

PROPUESTA DE UN ÍNDICE PARA EVALUAR EL DESEMPEÑO FÍSICO BASADO EN MODELOS TERMODINÁMICOS

Universitat Politècnica de València

Departamento de Matemática Aplicada

Máster Universitario en Investigación Matemática (INVESTMAT)



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

investmat

- Autor: Puig Castro, Diego
- Tutor: Fernández de Córdoba Castellá, Pedro José
- Tutor: Castro Palacio, Juan Carlos

Índice

1. Introducción, Motivación y Objetivos	4
1.1. Introducción	4
1.2. Motivación	4
1.3. Objetivos	4
2. Marco Teórico	5
2.1. Generalidades de la función de distribución Chi	5
2.1.1. Chi centrada	5
2.1.2. Chi no centrada	5
2.2. Diferencias relevantes entre la Chi centrada y no centrada	6
2.2.1. Cambios en la asimetría	6
2.2.2. Diferencia en la información contenida	7
2.2.3. Elementos hacia una interpretación física	7
3. Simulaciones	8
3.1. Generación aleatoria de la función Chi no centrada	8
3.2. Simulaciones de casos para la Chi no centrada	8
3.2.1. Mismo desplazamiento en los valores medios y varianzas iguales, en las gaussianas generadoras (con $v = 5 * \sigma$)	8
3.2.2. Mismo desplazamiento en los valores medios y varianzas ligeramente diferentes, en las gaussianas generadoras ($v = 5 * \sigma$)	9
3.3. Asimetría	11
3.4. Entropía de la distribución	11
4. Resultados en deportistas	12
4.1. Procedimiento para la selección y tratamiento de los datos experimentales	12
4.2. Forma Física	13
4.3. Halterofilia	14
5. Conclusiones	17
6. Anexos	19
6.1. Experimento	19
6.2. Tablas de resultados	21
6.2.1. Resultados pruebas físicas	21
6.2.2. Halterofilia	27
6.2.3. R.square	30
6.3. Códigos Matlab	30
6.3.1. Echi.m	30
6.3.2. plogp.m	31
6.3.3. Simulations Code	31
6.3.4. Condicion Física Code	33
6.3.5. Halterofilia.m	34

Índice de figuras

1.	Comparación entre la función de distribución de Maxwell-Boltzmann generalizada [6] (función Chi centrada de $k = 6$ grados de libertad) y la función Chi no centrada para $k = 6$ grados de libertad. Se ha tomado un valor de desplazamiento de 36 y de varianza $\sqrt{\pi}$, en las funciones gaussianas generadoras.	6
2.	Distribución de probabilidad de MB (Chi para $k = 3$ centrada) y de la Chi no centrada ($k = 3$). La media de la función no centrada se ha hecho coincidir con la de la función de MB.	7
3.	Evolución de Chi con v para $k = 6$ y $\sigma = \phi$	8
4.	Ajuste de la ecuación 5 a muestras centradas y no centradas con $k = 3$ y $\sigma = 3$	9
5.	Ajuste de la ecuación 5 a muestras centradas y no centradas con $k = 6$ y $\sigma = \sqrt{\pi}$	9
6.	Ajuste de la ecuación 5 a muestras centradas y no centradas anisotrópica con $k = 6$ y $\sigma = \phi$. Proporción de $\frac{\max(\bar{\sigma})}{\min(\bar{\sigma})} - 1 = 0.17$	10
7.	Ajuste de la ecuación 5 a muestras centradas y no centradas anisotrópicas con $k = 6$ y $\sigma = \sqrt{\pi}$. Proporción de $\frac{\max(\bar{\sigma})}{\min(\bar{\sigma})} - 1 = 0.30$	10
8.	Ajuste de la ecuación 5 a muestras centradas y no centradas anisotrópicas con $k = 6$ y $\sigma = \sqrt{\pi}$. Proporción de $\frac{\max(\bar{\sigma})}{\min(\bar{\sigma})} - 1 = 0.50$ entre las desviaciones típicas mínima y máxima.	11
9.	Evolución de la asimetría de Chi con el parámetro de desplazamiento v para $k = 6$ y distintos σ	11
10.	Evolución de la entropía de Chi con v para $k = 6$ y distintas σ	12
11.	Histogramas normalizados del índice de Fuerza Bruta.	13
12.	Histogramas normalizados del índice de Condición Física.	14
13.	Ajustes a Rayleigh (Chi centrada con $k = 2$) y Chi no centrada de las competencias de halterofilia.	16

Índice de cuadros

1.	Parámetros de la Chi no centrada.	15
2.	Resultados de pruebas de fuerza y peso corporal (parte 1)	21
3.	Resultados de pruebas de fuerza y peso corporal (parte 2)	22
4.	Resultados pruebas de resistencia (parte 1)	23
5.	Resultados pruebas de resistencia (parte 2)	24
6.	Resultados de los índices (parte 1)	25
7.	Resultados de los índices (parte 2)	26
8.	Resultados femenino -76kg	27
9.	Resultados masculino -73kg	28
10.	Resultados masculino -81kg	29
11.	Parámetros R cuadrado	30

1. Introducción, Motivación y Objetivos

1.1. Introducción

La distribución Chi es una distribución de probabilidad continua ampliamente utilizada en Estadística Aplicada [1, 2, 3, 4, 5]. El hecho de que esta distribución se pueda generar a partir de variables aleatorias gaussianas, le proporciona una ventaja especial tanto para las simulaciones, como para posibles interpretaciones.

La distribución Chi de $k=3$ grados de libertad se puede encontrar en la Física para representar las velocidades de las partículas independientes de un gas ideal en equilibrio termodinámico a una temperatura determinada. Otro caso típico de la Física es la distribución de Rayleigh, que se corresponde con una Chi de $k = 2$ grados de libertad.

El grupo InterTech de la Universitat Politècnica de València (www.intertech.upv.es) ha realizado varios trabajos que involucran la aplicación de la Chi en diferentes contextos, interpretada como un gas ideal multidimensional. En la referencia [6] se realiza un estudio de percentiles de la distribución Chi, donde el resultado principal es la que las razones entre percentiles es una característica general de esta distribución, ya que no depende de su único parámetro, relacionado con la varianza de la distribución. En un trabajo posterior [7], un estudio basado en la transformada de Fourier y la entropía espectral demuestra que las respuestas de niños, que responden independientemente a estímulos visuales, están correlacionadas entre sí. Este resultado es muy significativo y constituye la motivación fundamental para el modelo termodinámico propuesto en la referencia [8], donde los tiempos de respuesta de un grupo de niños coetáneos se representan a través de la distribución de Maxwell-Boltzmann. Los resultados indican una correspondencia entre un grupo de niños y las partículas independientes de un gas ideal.

Otros trabajos que se sucedieron a los mencionados anteriormente incluyen simulaciones de la función Chi, modificada por variaciones en las funciones gaussianas generadoras. En la referencia [9] se estudian los límites en los que se pueden variar las varianzas de las gaussianas para obtener aún, un buen ajuste de la función de distribución resultante con la función Chi. En un estudio de simulaciones similar [10], se analiza la influencia de la asimetría de las funciones generadoras en la función de distribución resultante. Las funciones generadoras se representaron por exGaussianas, originadas de la convolución entre una gaussiana y una exponencial decreciente. Se exploraron los límites en la variación de la asimetría para obtener aún un buen ajuste con la función Chi.

La investigación de esta tesis está en línea con los trabajos comentados en los párrafos anteriores. La función Chi, esta vez en su variante no centrada [11, 12], se utiliza para modelar datos de pruebas deportivas con el objetivo de caracterizar la forma física en deportistas. En una primera parte se comenta el modelo teórico y se realizan simulaciones de los casos más relevantes. En una segunda parte, se describen ejemplos de aplicación, de la metodología presentada en esta tesis, a datos reales de deporte.

1.2. Motivación

La motivación de la presente investigación se sustenta en la posibilidad de utilizar la distribución de probabilidad Chi no centrada como indicador de forma física, a partir de los resultados derivados de pruebas individuales asumidas con distribución gaussiana. En el Anexo I, se detallan las pruebas de fuerza, resistencia muscular y resistencia cardiovascular, utilizadas para caracterizar la fuerza física en este trabajo [13, 14].

1.3. Objetivos

Los objetivos principales del trabajo son:

- Proponer un índice para caracterizar la forma física basado en la función Chi no centrada [11, 12], donde las funciones generadoras se construyen a partir de los datos de pruebas

individuales asumidas con distribución gaussiana.

- Desarrollar una metodología que sirva de herramienta de trabajo para los entrenadores deportivos, que les permita, de una manera sencilla, caracterizar la forma física de los deportistas, con base en pruebas individuales como las de fuerza, resistencia muscular y resistencia vascular (ver Anexo 6.2).

2. Marco Teórico

2.1. Generalidades de la función de distribución Chi

2.1.1. Chi centrada

La función Chi es una distribución de probabilidad continua ampliamente utilizada en la Estadística Aplicada [1, 2, 3, 4, 5]. Se genera a partir del cálculo de la norma euclídea de un vector, cuyas componentes son variables independientes distribuidas de manera gaussiana. A continuación se muestran la forma habitual normalizada en la que se expresa la variable Chi, junto con las respectivas densidad de probabilidad (PDF) y densidad acumulada de probabilidad (CDF).

$$\begin{aligned}
 \text{Conjunto} \quad \chi &= \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2} \\
 \text{PDF} \quad f(x, k) &= \frac{1}{2^{(k/2-1)} \Gamma(k/2)} x^{k-1} e^{-x^2/2} \\
 \text{CDF} \quad F(x, k) &= P(k/2, x^2/2)
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde μ es el valor medio de la variable aleatoria, σ es la desviación típica, k representa los grados de libertad, $\Gamma(z)$ es la función Gamma de Euler [17] y $P(k, x)$ es la función gamma incompleta [17].

La función de distribución Chi centrada, planteada en la ecuación 1, no permite la diferenciación de valores iguales, pero con signos opuestos, en las funciones gaussianas generadoras. Este hecho supone una inconveniencia en relación con la propuesta de un índice basado en esta función. En este trabajo se propone a la función Chi no centrada en lugar de la centrada, ya que permite evitar esta inconveniencia en los casos que se analizarán en este trabajo.

2.1.2. Chi no centrada

La función Chi no centrada [11, 12] se puede construir a partir de la Chi centrada mediante el desplazamiento de los valores medios, v_i en las distribuciones de las gaussianas generadoras. En este trabajo se asumirá un desplazamiento igual, v , para todas las funciones generadoras. En el caso de la función Chi no centrada normalizada por las varianzas de las gaussianas generadoras, la variable aleatoria adopta la siguiente forma,

$$\tilde{\chi} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} + v_i \right)^2} \tag{2}$$

La función de densidad de probabilidad correspondiente se expresa como,

$$\tilde{f}(x; k, \lambda) = \frac{e^{-(x^2 + \lambda^2)/2} x^k \lambda}{(\lambda x)^{k/2}} I_{k/2-1}(\lambda x) \tag{3}$$

Y la función de distribución acumulada,

$$\tilde{F}(x, k) = 1 - Q_{k/2}(\lambda, x) \tag{4}$$

donde $I_\nu(z)$ es una función de Bessel modificada de primer orden, $Q_M(a, b)$ es la función Q de Marcum y $\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^k v_i^2}$. El límite de la función de densidad de probabilidad (ecuación 3) cuando λ tiende a cero, permite recuperar la densidad de probabilidad de la Chi centrada de la ecuación 1.

Si queremos preservar la interpretación físico-estadística de la función Chi, debemos tomar el caso no normalizado, ya que las varianzas son proporcionales a la temperatura. Esta información se perdería si todas las varianzas son iguales a la unidad (gas ideal multidimensional isotrópico). Por otro lado, si las varianzas son diferentes, pudiéramos interpretar que el modelo corresponde a un gas ideal anisotrópico, con temperaturas diferentes en los diferentes grados de libertad.

La distribución de probabilidad resultante para la Chi no centrada no normalizada en nuestras simulaciones se ajustará a la siguiente función, que constituye un *ansatz* introducido en este trabajo,

$$PDF \quad \hat{f}(x; k, \lambda, T) = \frac{e^{-T(x^2 + \lambda^2)/2} T x^k \lambda I_{k/2-1}(\lambda x T)}{(\lambda x)^{k/2}} \quad (5)$$

Se puede apreciar que, además de λ , la función depende de un parámetro T [8].

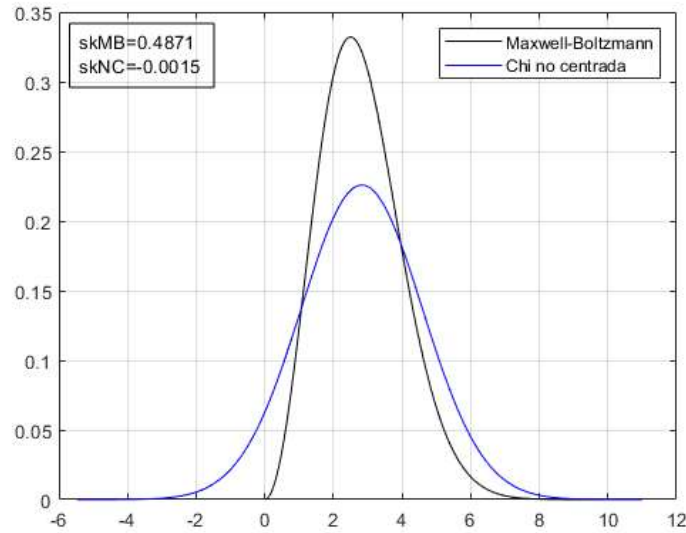


Figura 1: Comparación entre la función de distribución de Maxwell-Boltzmann generalizada [6] (función Chi centrada de $k = 6$ grados de libertad) y la función Chi no centrada para $k = 6$ grados de libertad. Se ha tomado un valor de desplazamiento de 36 y de varianza $\sqrt{\pi}$, en las funciones gaussianas generadoras.

2.2. Diferencias relevantes entre la Chi centrada y no centrada

2.2.1. Cambios en la asimetría

Como se puede apreciar en la figura 1, la distribución de Maxwell-Boltzmann presenta asimetría con respecto a su valor más probable (valor máximo), es decir, es una distribución sesgada positivamente. Por otra parte, se observa que la función Chi no centrada es apreciablemente simétrica. La simetría en la función Chi no centrada de la figura 1 es consecuencia del desplazamiento hacia valores positivos de las gaussianas generadoras (más del 99.9 % de los valores son positivos). Se ha tomado un parámetro de desplazamiento mucho mayor que sigma, específicamente $v = 5 \cdot \text{sigma}$. Por otra parte, el tercer momento centrado de la distribución, la asimetría, se espera que sea muy cercano a cero en este caso.

Sabemos que el tercer momento de la distribución es:

$$\mu'_3 = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}L_{3/2}^{(k/2-1)}\left(\frac{-\lambda^2}{2}\right) \quad (6)$$

Dónde $L_n^{(a)}(z)$ es la función de Laguerre.

2.2.2. Diferencia en la información contenida

La función Chi no centrada representa una mejora en cuanto a la información recolectada en relación con la Chi centrada. Este hecho es una consecuencia de desplazar las gaussianas generadoras en un valor mucho mayor que sigma, de manera que sus valores sean mayoritariamente positivos. En la figura 2 se puede apreciar visualmente el aumento de la varianza de la distribución no centrada con respecto a la centrada.

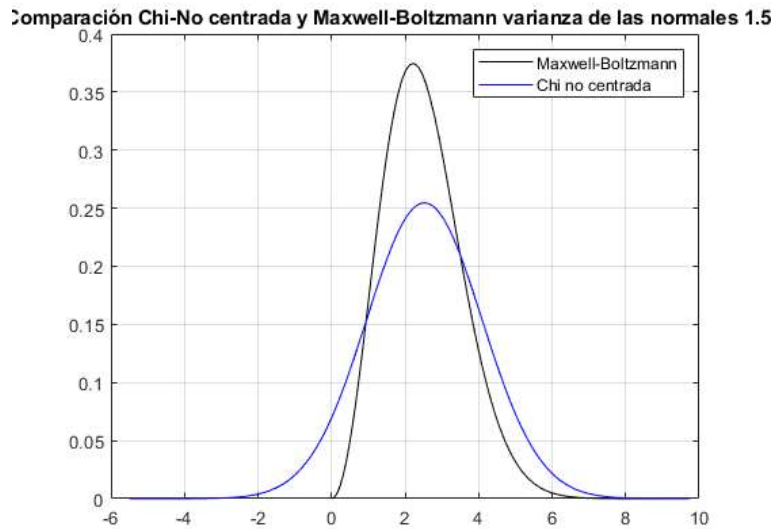


Figura 2: Distribución de probabilidad de MB (Chi para $k = 3$ centrada) y de la Chi no centrada ($k = 3$). La media de la función no centrada se ha hecho coincidir con la de la función de MB.

2.2.3. Elementos hacia una interpretación física

Como se ha comentado anteriormente, la función de Maxwell-Boltzmann para la distribución del módulo de las velocidades de las partículas de un gas ideal, es una función Chi de $k = 3$ grados de libertad y varianzas iguales, pero no unitarias, en las gaussianas generadoras. Las varianzas son proporcionales a la temperatura del gas ideal en equilibrio con un termostato.

La función Chi no centrada podría interpretarse como un gas ideal que tiene un movimiento preferencial de sus partículas en una dirección determinada del espacio, donde el parámetro de desplazamiento puede ser la velocidad media. Este parámetro indica una dependencia de la forma de la función resultante del sistema de referencia inercial escogido, sin embargo, la temperatura (proporcional a las varianzas), permanente inalterable. Por ejemplo, si referimos el gas a un sistema de referencia que se mueve a la velocidad media preferencial antes mencionada, la función de distribución resultante vuelve a ser una MB. La función Chi no centrada de $k = 3$ grados de libertad, tiende a la función Chi centrada de $k = 3$ (MB) cuando el parámetro de desplazamiento tiende a cero.

Este apartado no presenta conclusiones definitivas, sino una posible interpretación física que realiza el autor sobre el modelo propuesto.

3. Simulaciones

En esta sección se muestran los resultados expuestos en el apartado anterior con simulaciones en el lenguaje de MATLAB[®] con los códigos presentados en el apartado 6.3 de los Anexos.

3.1. Generación aleatoria de la función Chi no centrada

Para generar la muestra de Chi, en primera instancia, debemos generar tantas gaussianas de media (μ) cero y de tantas varianzas (σ) iguales o comparables como dimensiones tenga nuestro gas. Una vez generadas, guardamos las gaussianas y les sumamos a cada componente de la distribución el mismo v_i para simplificar el modelo y para que a su vez todas las pruebas ponderen lo mismo en el resultado final. Todo esto se puede ver en la función Echi.mat en el Anexo 6.3.

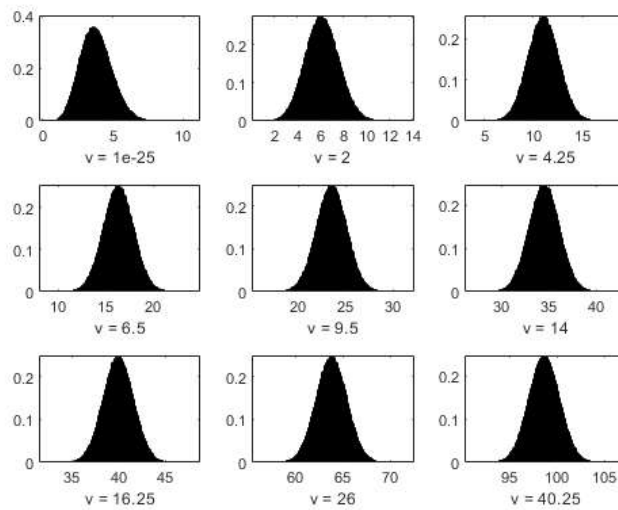


Figura 3: Evolución de Chi con v para $k = 6$ y $\sigma = \phi$.

En la figura 3 se muestran los histogramas de la misma muestra a la cual se le está sumando un valor v igual para todas sus dimensiones y, a su vez, esta va aumentando en cada gráfico del panel. Se puede observar que, a partir de un cierto valor de v ($\approx 5\sigma$) la forma de la distribución es muy similar.

3.2. Simulaciones de casos para la Chi no centrada

En este apartado se simula y se compara la distribución de Maxwell-Boltzmann (Chi centrada para $k = 3$ y $k = 6$) y la Chi no centrada, en relación con los dos casos relevantes para este trabajo.

3.2.1. Mismo desplazamiento en los valores medios y varianzas iguales, en las gaussianas generadoras (con $v = 5 * \sigma$)

El presente caso puede corresponderse con un gas ideal a una temperatura determinada. Las varianzas de las gaussianas generadoras son iguales entre sí, así como el desplazamiento del valor medio. Sería el caso de un gas ideal con una velocidad media preferencial (v) representada por el parámetro de desplazamiento λ en la ecuación 5. Para ello, en un primer paso se generan las gaussianas con media cero. Subsecuentemente, la Chi no centrada se genera sumando la misma v a todas las distribuciones normales generadoras que anteriormente estaban centradas en cero.

Ambas distribuciones se ajustan a la fórmula de Chi no centrada modificada, sólo cambiando el parámetro λ , y con el mismo parámetro T . Las figuras 4 y 5 muestran la comparación entre la Chi centrada y la no centrada para $k = 3$ y $k = 6$ grados de libertad, respectivamente. Se ha considerado el caso del parámetro de desplazamiento mucho mayor que la varianza. Se puede apreciar que las curvas pasan de ser asimétricas en las Chi centradas, a simétricas y más anchas (mayor varianza) en el caso de la Chi no centrada.

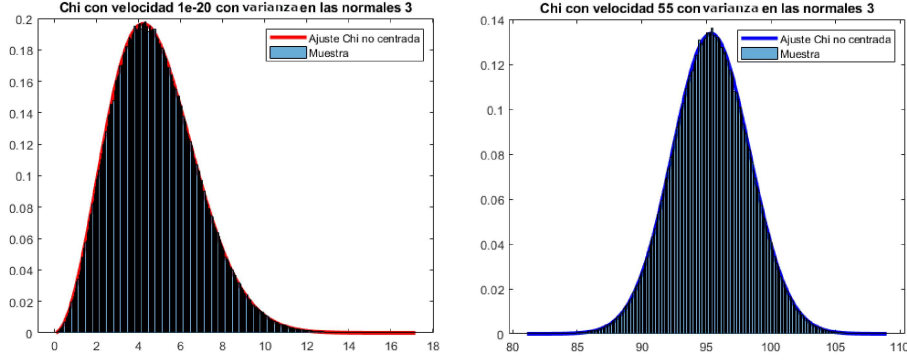


Figura 4: Ajuste de la ecuación 5 a muestras centradas y no centradas con $k = 3$ y $\sigma = 3$.

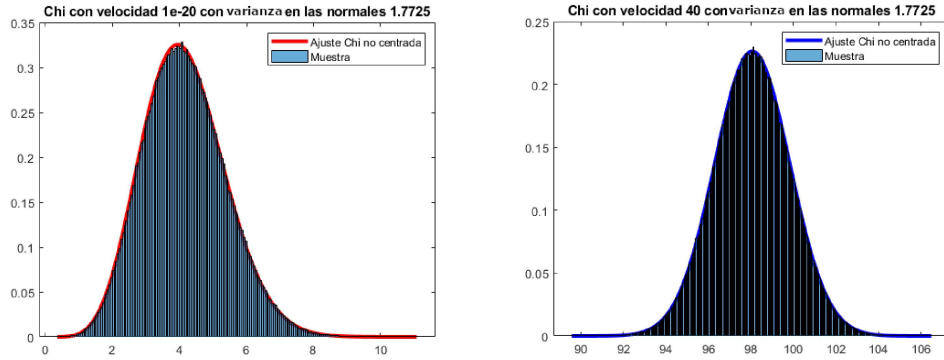


Figura 5: Ajuste de la ecuación 5 a muestras centradas y no centradas con $k = 6$ y $\sigma = \sqrt{\pi}$.

3.2.2. Mismo desplazamiento en los valores medios y varianzas ligeramente diferentes, en las gaussianas generadoras ($v = 5 * \sigma$)

Para esto en *ECHI.m* (Anexo 6.3) se genera un vector de desviaciones típicas equiespaciadas y de dimensión igual a la dimensión del gas. A estas muestras se les suma una $v \geq 5 \text{ máx}(\vec{\sigma})$. Para este caso de estudio se elige una diferencia proporcional del 8% con respecto a la varianza media de las gaussianas generadoras. La figura 6 muestra el resultado de las simulaciones y los respectivos ajustes a la ecuación 5. De igual manera que en las figuras 4 y 5, se ha considerado el caso del parámetro de desplazamiento mucho mayor que la varianza.

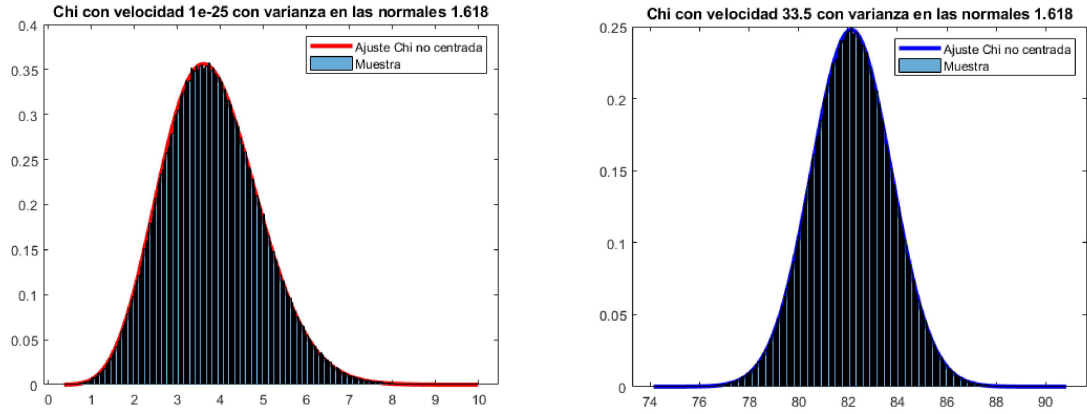


Figura 6: Ajuste de la ecuación 5 a muestras centradas y no centradas anisotrópica con $k = 6$ y $\sigma = \phi$. Proporción de $\frac{\max(\bar{\sigma})}{\min(\bar{\sigma})} - 1 = 0.17$.

Se observa que la ecuación 5 sigue siendo una buena aproximación para el gas anisotrópico cuando las varianzas son comparables, en este caso la proporción entre $\frac{\max(\bar{\sigma})}{\min(\bar{\sigma})} - 1$ es de 0.174. Si aplicamos en vez de un 8 % un 13 %, se obtiene como resultado lo que se muestra en la figura 7. Se puede apreciar que el ajuste sigue siendo muy bueno.

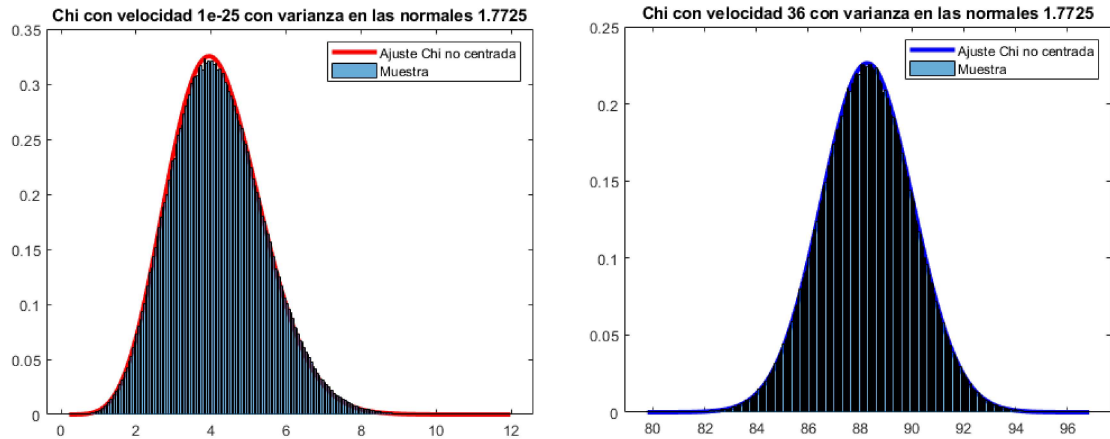


Figura 7: Ajuste de la ecuación 5 a muestras centradas y no centradas anisotrópicas con $k = 6$ y $\sigma = \sqrt{\pi}$. Proporción de $\frac{\max(\bar{\sigma})}{\min(\bar{\sigma})} - 1 = 0.30$.

La figura 8 muestra los resultados para una proporción de 0.5 entre las desviaciones típicas. Se observa que la calidad del ajuste empeora.

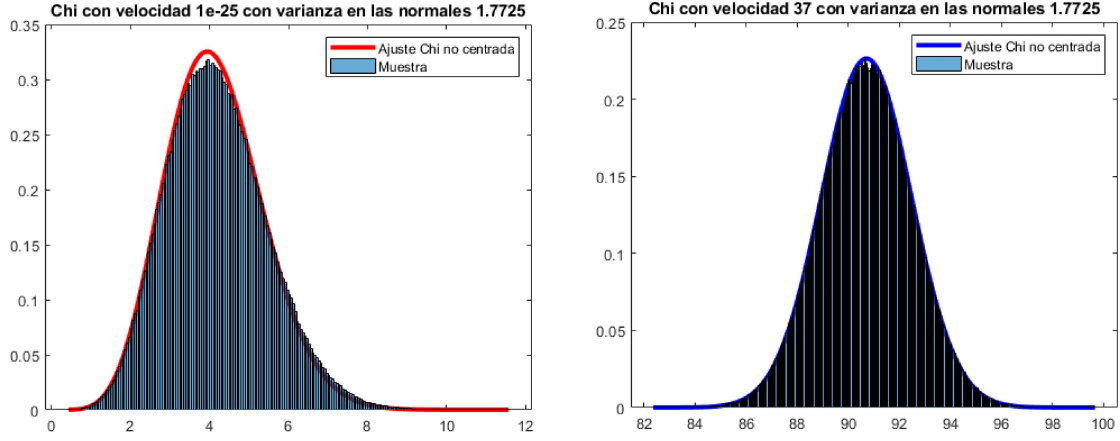


Figura 8: Ajuste de la ecuación 5 a muestras centradas y no centradas anisotrópicas con $k = 6$ y $\sigma = \sqrt{\pi}$. Proporción de $\frac{\max(\hat{\sigma})}{\min(\hat{\sigma})} - 1 = 0.50$ entre las desviaciones típicas mínima y máxima.

3.3. Asimetría

La asimetría de las muestras generadas en el subapartado anterior se pueden calcular con la siguiente expresión:

$$sk = \frac{E[(x - \mu)^3]}{\sigma^3} \quad (7)$$

donde $E[]$ es el valor esperado de la cantidad que se incluya entre los corchetes. Esto viene implementado en la función *skewness* de MATLAB[®], lo que aplicado a las muestras generadas da como resultado las curvas que se observan en la Figura 8

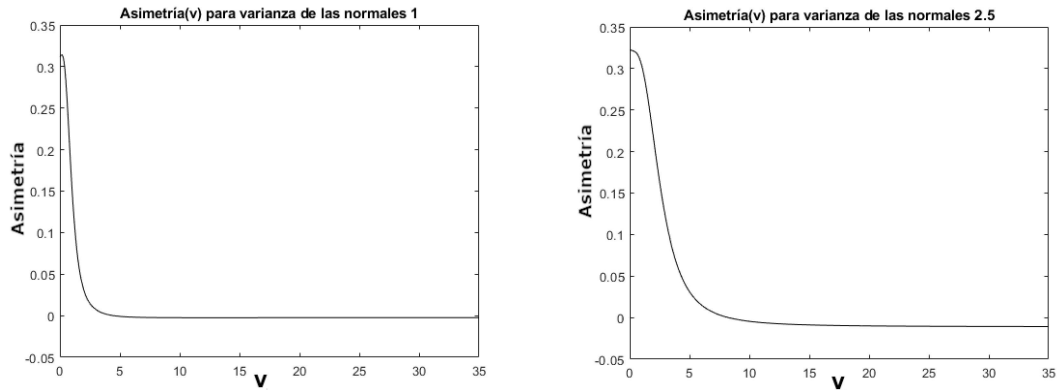


Figura 9: Evolución de la asimetría de Chi con el parámetro de desplazamiento v para $k = 6$ y distintos σ .

Como podemos observar, se vuelve a repetir el patrón, es decir, la asimetría se anula para valores grandes del desplazamiento de las medias en comparación con la desviación estándar. Se evidencia que la elección de tomar $v = 5\sigma$ es una buena aproximación.

3.4. Entropía de la distribución

Para tener una idea de la información contenida en la función Chi no centrada, hemos seleccionado la entropía de Shannon, dada por la siguiente expresión:

$$s = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i), \quad (8)$$

donde p_i es la probabilidad correspondiente al estado i .

La figura 10 muestra la evolución de la entropía de Chi con v para $k = 6$ y distintas σ . En la práctica, se ha utilizado 0.1 como ancho de los subintervalos de los histogramas. El código de Matlab utilizado para hacer los histogramas, `plotd.mat`, se puede encontrar en el Anexo 6.3.

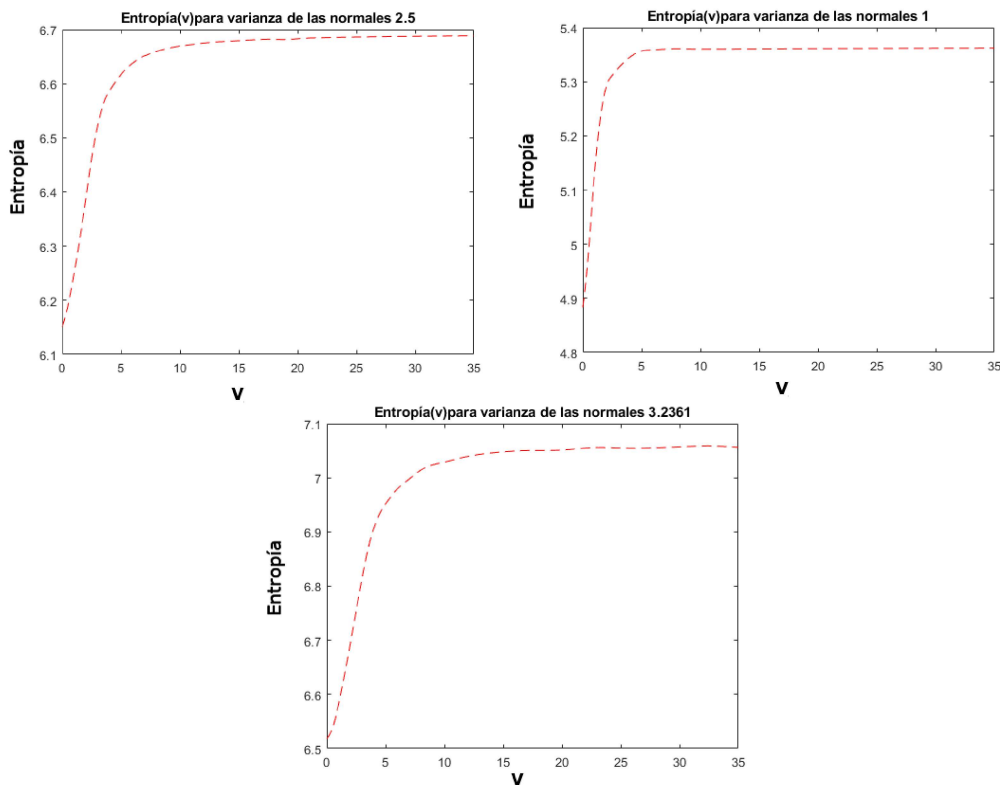


Figura 10: Evolución de la entropía de Chi con v para $k = 6$ y distintas σ .

Cabe recalcar que las representaciones de la evolución de la entropía no son exactamente la evolución con la fórmula de Shannon, sino que se utiliza una herramienta de eliminación de ruido (wavelets biortogonales) para eliminar el ruido generado por utilizar el mismo ancho de subintervalo para todas las distribuciones. Una vez aplicada la herramienta, se puede distinguir que, para valores grandes del desplazamiento de las medias en comparación con la desviación típica, la entropía toma un valor aproximadamente constante. Se evidencia, una vez más, que la elección de tomar $v = 5 * \sigma$ es una buena aproximación.

4. Resultados en deportistas

4.1. Procedimiento para la selección y tratamiento de los datos experimentales

Para el tratamiento de datos experimentales se ha tomado en cuenta lo siguiente:

- Para comprobar la normalidad de las muestras se realiza la prueba de Lilliefors [15].
- Se descartan las muestras no distribuidas normalmente.

- Comprobar si las varianzas son comparables entre las distribuciones y si son comparables, generar un gas y determinar la temperatura o si no son comparables normalizar^I los datos.
- Las pruebas individuales, cuyas distribuciones se ha comprobado que son gaussianas, se combinan según la norma euclídea en k dimensiones, para formar un índice de forma física.
- La distribución resultante se ajusta a la función de la Chi no centrada, caracterizada por los parámetros B y λ , según la ecuación 5.

4.2. Forma Física

En este apartado se tratarán los resultados obtenidos en el experimento descrito en los Anexos 6.1 y 6.2. Aunque el experimento está pensado tanto para varones como para mujeres, solo se han tratado los datos obtenidos en los varones por falta de estadística en mujeres. Los sujetos que han realizado las pruebas son voluntarios pertenecientes a, entre otros, Valencia Club de Judo, Balonmano Alcacer-Picassent, Herca (sección judo), Esportiu Valencia (sección judo), Club Halterofilia Alzira y con personas que están preparando pruebas físicas de acceso a la seguridad del estado.

Una vez realizadas las pruebas y comprobada su normalidad, se descartan aquellas que no superan la prueba de Lilliefors [15], como es el caso de las pruebas de press de banca relativo, sentadilla relativa y número de dominadas. Por tanto, sólo se realizarán dos índices, uno en el cual se tengan en cuenta las pruebas de fuerza bruta y otro, en el que se tengan en cuenta todas las pruebas que han superado la prueba de Lilliefors, lo cual permite construir un índice de 3 y 6 dimensiones en la Chi, respectivamente.

Teniendo en cuenta que los datos tienen varianzas no comparables, se procedió a normalizar todos los datos. Luego se hizo la composición de la Chi y Chi no centrada, considerando $v > 5\sigma$. La figura 11 muestra los resultados obtenidos para la Chi centrada (función de MB) y la no centrada.

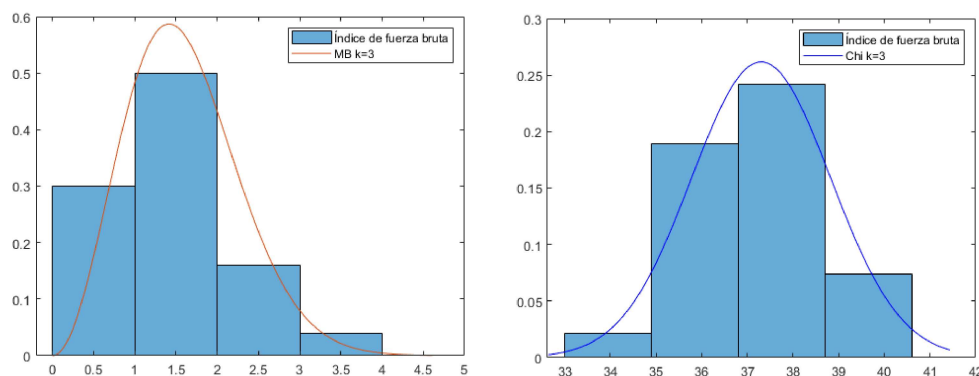


Figura 11: Histogramas normalizados del índice de Fuerza Bruta.

El índice de Fuerza Bruta se calcula a través de las tres pruebas de fuerza (sentadilla, dominada lastrada y press de banca) con sus datos normalizados y haciendo la norma de estos. ¿Qué mejoras presenta la Chi no centrada frente a la distribución de Maxwell-Boltzmann en este caso? Primero, si se observa la anchura de las distribuciones (relacionada con la varianza), se puede discernir que la Chi no centrada es más ancha, lo que hace intuir una mejor capacidad para discernir entre los resultados de diferentes sujetos. Por ejemplo, si vamos a los resultados numéricos, seleccionando al sujeto 1 de la muestra y al sujeto 18, el primero tiene un índice en la distribución de Maxwell-Boltzmann de 2.54, mientras el sujeto 18 tiene un índice de 3.61. Por

^IEntiendase por normalizar $x_n = \frac{x - \mu_i}{\sigma_i} + v_i$, donde $v_i = 0$ si la muestra se quiere centrada

otra parte, si seleccionamos el índice de la Chi no centrada de los mismos sujetos, el primero tiene un índice de 39.74 y el segundo un índice de 33.64. El autor de este trabajo conoce *a priori* que el desempeño del sujeto 1 es mejor que el del sujeto 18, sin embargo, la función Chi centrada no lo expresa así, ya que no distingue entre valores iguales de diferente signo. En este caso, la función Chi no centrada muestra el resultado correcto. El sujeto 1 se identifica con un valor mayor que el sujeto 18 en la función Chi no centrada, lo que evidencia la efectividad de esta función como posible índice de Fuerza Bruta.

Para los resultados de Condición Física general del sujeto se seleccionan los 6 resultados que siguen una distribución normal y repitiendo el proceso anterior, pero para $k = 6$, se obtiene que para mejorar el orden de magnitud se recomienda restar la media del conjunto a todo el conjunto, donde los valores negativos indican los deportistas con peor condición física en relación con la media y, con valores positivos, aquellos deportistas que destacan más en las pruebas.

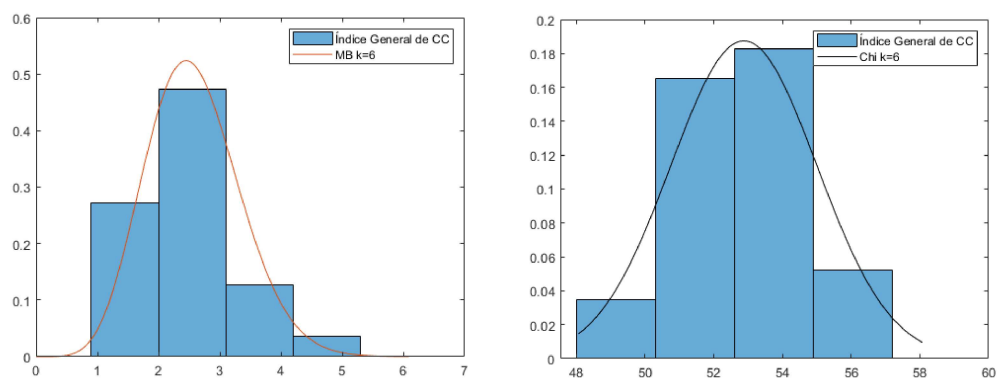


Figura 12: Histogramas normalizados del índice de Condición Física.

4.3. Halterofilia

En esta sección se analizarán los resultados en el mundial de halterofilia de 2019 [16], el último previo a las olimpiadas de Tokio. Se incluyen los pesos masculinos de -73kg y -81kg y en el peso femenino de -76kg^{II}, para hacer una comparación de varianzas o «temperaturas» entre los distintos pesos y los distintos sexos.

Como es bien sabido, las competiciones de halterofilia constan de dos pruebas: arrancada y dos tiempos. Al haber dos pruebas en esta disciplina, la distribución que se aplicará es la de Rayleigh. Esta distribución ya está implementada en el filtro de distribuciones de MATLAB[®], lo que se aprovechará para hacer el ajuste. Por otro lado, se utilizará una distribución Chi no centrada con $k = 2$.

Para el experimento se descarta todo aquel sujeto que no disponga de puntuación en los dos levantamientos, así como todo aquel que su puntuación sea excesivamente baja para obtener distribuciones gaussianas. Una vez tratados los datos, centramos las medias tomando como referencia la media de los resultados de la prueba de dos tiempos, ya que así se asegura cumplir con $v > 5\sigma$. El valor de $\lambda = \mu(\text{«media de la prueba de dos tiempos»})\sqrt{2}$, por lo que sólo quedaría por ajustar el parámetro T para cada categoría de competición. Los resultados del ajuste se han incluido en la tabla 1.

^{II}En la mayoría de deportes en los que sus categorías se dividen por la masa del competidor se anota como - p kg para indicar que la masa del competidor ha de ser menor que p .

Cuadro 1: Parámetros de la Chi no centrada.

Categoría	λ	T
Masculino -81kg	269.68	0.0050
Masculino -73kg	253.09	0.0045
Femenino -76kg	182.17	0.0040

Se puede observar que entre los pesos y los sexos hay diferencias de λ debido a que la fuerza es muy dependiente del peso corporal y, al fijar el valor medio de las medias de las distribuciones, la media de la prueba de dos tiempos es mayor cuanto mayor sea la fuerza de los sujetos evaluados.

Por otro lado, también se observan diferencias en los valores de T , es decir, en las varianzas de las distribuciones (relacionadas con la anchura). Tendríamos funciones de distribución dependiendo del peso y del sexo biológico de los sujetos evaluados, a diferencia de los experimentos en la referencia [13, 10], donde los resultados estaban en función de la edad.

En cuanto a la parte práctica de la aplicación, los resultados en la clasificación no varían por lo general la forma tradicional del resultado. Por otra parte, se obtiene que, para empates de peso total levantado con diferentes resultados en las pruebas, su índice de competición es distinto, es decir, da un desempate entre dos sujetos con el mismo peso levantado, ergo, distingue la dificultad de la prueba. Estas consecuencias, como se puede ver en el anexo 6.2, provocarían la salida del podio de Neisi Patricia Dajomes Barrera en el total levantado en la categoría femenino -78kg. La figura 13 representa los resultados de las competiciones de halterofilia por categoría.

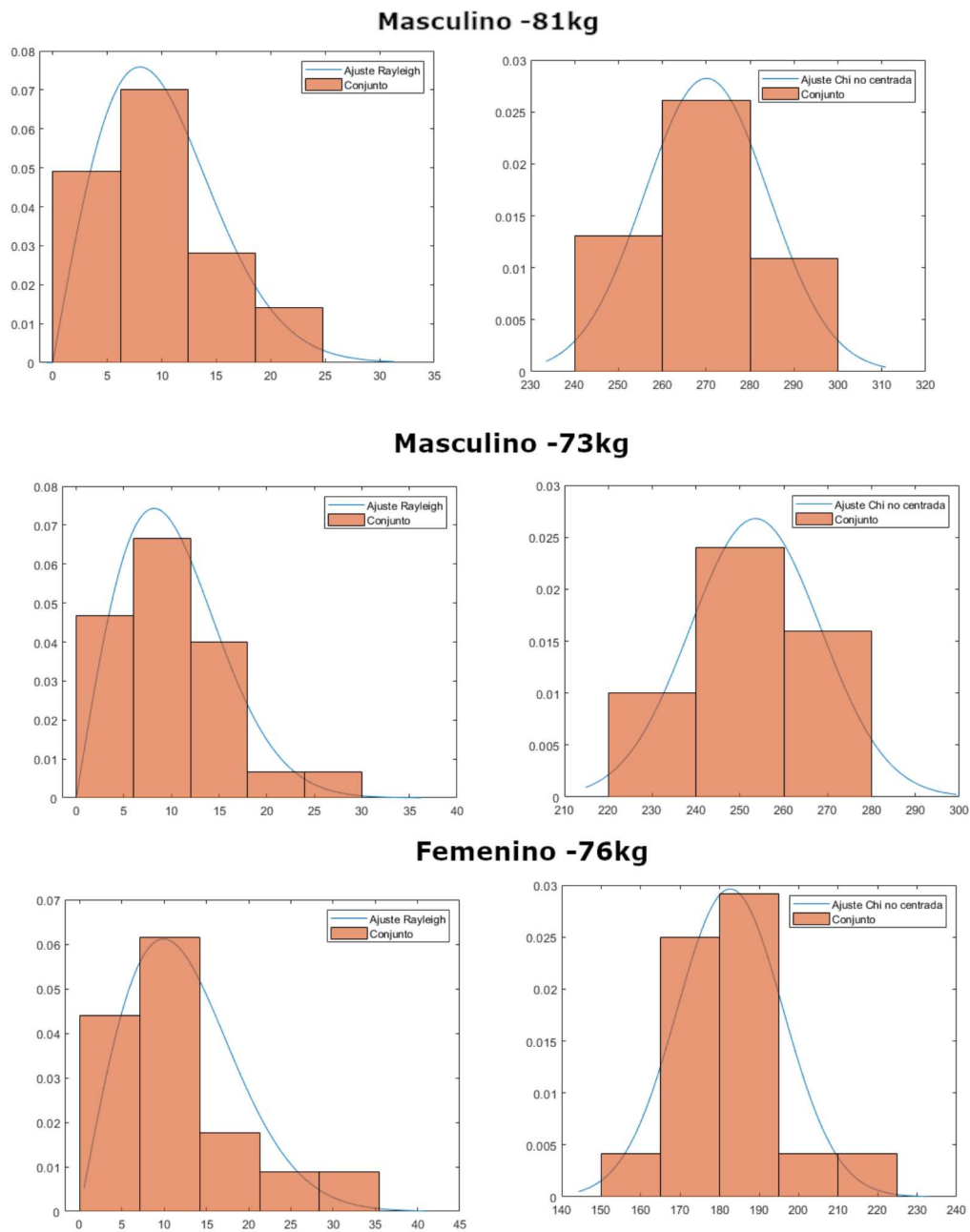


Figura 13: Ajustes a Rayleigh (Chi centrada con $k = 2$) y Chi no centrada de las competiciones de halterofilia.

5. Conclusiones

En primer lugar, se ha obtenido una mejora sobre el modelo de Maxwell-Boltzmann a través de la función Chi no centrada modificada, demostrado tanto en el marco teórico como en las simulaciones. Por otra parte, en esta investigación, se destaca por encima de la probabilidad de encontrar un determinado índice en una población, el valor de dicho índice, que es el que da la clasificación del sujeto.

Si se ciñen las conclusiones a los objetivos del trabajo, se puede concluir de forma satisfactoria que se han logrado los dos, ya que el primero queda demostrado en el apartado 4, en cambio, para el segundo cabe indagar más en el modelo. La propuesta de la herramienta de clasificación de un determinado conjunto de sujetos puede no depender de las pruebas elegidas en el experimento, aunque las seis pruebas seleccionadas son los patrones básicos de movimiento. La herramienta es eficaz, porque no es rígida en cuanto a las pruebas, por ejemplo, si se quisiera generar un índice para judocas se cambiarían las pruebas de empuje horizontal por pruebas de empuje vertical, porque los patrones de empuje en el judo son mayoritariamente verticales, como pudieran ser el press militar o los fondos de pectoral en barras paralelas, o cambiar la prueba de fuerza de pierna por pruebas explosivas de fuerza como la cargada o la arrancada. A su vez, se pueden añadir o eliminar pruebas de la herramienta teniendo únicamente que ajustar el parámetro T de la distribución y se podrían generar índices específicos para diferentes propósitos más concretos.

Referencias

- [1] Montgomery, D.C.; Runger, G.C. *Applied Statistics and Probability for Engineers*, 6th ed.; John Wiley & Sons, Inc.: Hoboken, NJ, USA, 2014.
- [2] Pearson, K. On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.* 1900, 50, 157–175.
- [3] Fisher, R. On the Interpretation of c^2 from Contingency Tables, and the Calculation of P. *J. R. Stat. Soc.* 1922, 85, 87–94
- [4] Fisher, R.A. The Conditions Under Which c^2 Measures the Discrepancy Between Observation and Hypothesis. *J. R. Stat. Soc.* 1924, 87, 442–450
- [5] Bolboacă, S.D.; Jäntschi, L.; Sestraş, A.F.; Sestraş, R.E.; Pamfil, D.C. Pearson-Fisher Chi-Square Statistic Revisited. *Information* 2011, 2, 528–545.
- [6] Castro-Palacio, J.C.; Fernández-de-Córdoba, P.; Isidro, J.M.; Navarro-Pardo, E.; Selva-Aquilar, R. Aguilar. Percentile study of Chi distribution. Application to response time data. *Mathematics* 2020, 8, 514.
- [7] Iglesias-Martínez, M.E.; Hernaiz-Guijarro, M.; Castro-Palacio, J.C., Fernández-de-Córdoba, P.; Isidro, J.M., Navarro-Pardo, E. *Machinery Failure Approach and Spectral Analysis to Study the Reaction Time Dynamics over Consecutive Visual Stimuli: An Entropy-Based Model*, *Mathematics*. 2020; 8(11):1979. <https://doi.org/10.3390/math8111979>
- [8] Castro-Palacio, J.C.; Fernández-de-Córdoba P.; Isidro J.M.; Sahu, S.; Navarro-Pardo, E. *Human Reaction Times: Linking Individual and Collective Behaviour Through Physics Modeling*, *Symmetry*. 2021; 13(3):451. <https://doi.org/10.3390/sym13030451>
- [9] Fernández de Córdoba, P.; Isidro, J.M.; Castro-Palacio, J.C.; Navarro-Pardo, E.; Velázquez-Abad, L. *Monte Carlo Simulation of a Modified Chi Distribution with Unequal Variances in the Generating Gaussians. A Discrete Methodology to Study Collective Response Times*, *Mathematics* 2021, 9(1), 77 <https://www.mdpi.com/2227-7390/9/1/77>

- [10] Ortigosa, N.; Orellana-Panchame, M.; Castro-Palacio, J.C.; Fernández de Córdoba, P. J. M. Isidro, *Monte Carlo simulation of a modified Chi distribution considering asymmetry in the generating functions: Application to the study of health-related variables*. *Symmetry* 2021, 13, 924. <https://doi.org/10.3390/sym13060924>
- [11] Charles Miller Grinstead, James Laurie Snell, *Introduction to probability*, ASM, 1988
- [12] Krishnan, M. *The Noncentral Bivariate Chi Distribution*, *SIAM Review*. 9(4):708-714. 1967 <https://epubs.siam.org/doi/10.1137/1009111>
- [13] Da Silva Grigoletto, M.E.; García Manso, J.M; Remiro Álvarez, G. *La halterofilia aplicada al deporte. Su enseñanza, uso y aplicación*, Wanceulen S.L., Sevilla, N.º 1 edición (14 marzo 2013)
- [14] César García, G. y David Secchi, J. *Test course navette de 20 metros con etapas de un minuto. Una idea original que perdura hace 30 años*. *ScienceDirect* 49, 183, 2014, 93-103 <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S188665811400022X?via%3Dihub>
- [15] Dallal, Gerard E. and Wilkinson, L. *An Analytic Approximation to the Distribution of Lilliefors's Test Statistic for Normality*, *The American Statistician*, Volume 40, number 4, pages 297-296, 1986, Taylor and Francis. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00031305.1986.10475419>
- [16] Deportes.info, el sitio de los deportes. <https://www.los-deportes.info/halterofilia019-hombres-epm96044.html>
- [17] Weisstein, Eric W. *Chi Distribution*. From *MathWorld*—A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/ChiDistribution.html>