

Sets of numbers from complex networks perspective



A thesis submitted for the degree of Doctor in Mathematics at
Universitat Politècnica de València (UPV)

Author

Pedro Antonio Solares Hernández

Advisors

Dr. J. Alberto Conejero

Dr. Miguel A. García March

Valencia, September 2021

Resumen

El estudio de los Sistemas Complejos es uno de los campos científicos que ha tenido mayor productividad en las últimas décadas y no ha dejado de fascinar a la comunidad que se dedica al estudio de sus propiedades. En particular, la Ciencia de Redes se ha mostrado como una de las áreas más prolíficas dentro de los Sistemas Complejos. En los últimos años, sus métodos han sido aplicados para modelar múltiples fenómenos de la vida real tanto generados de manera natural, como puede ser en el caso de la biología, como debidos a las acciones e interacciones del hombre, como puede ser el caso de las redes sociales o las redes de comunicaciones.

Recientemente, se ha visto cómo los métodos de la Ciencia de Redes pueden ser aplicados en el contexto de las matemáticas, como es el caso de la Teoría de Números. Uno de los casos que más se han estudiado es el de las redes cuyos elementos son números y que se relacionan mediante la relación de la divisibilidad. El objetivo principal de esta tesis es extender estos estudios a otros conjuntos de números. Por una parte, estudiamos la divisibilidad en los números naturales cuando obtenemos estos a partir de subconjuntos de números naturales extraídos de matrices de Pascal de orden creciente, lo que nos permite extraer conjuntos de números de manera no secuencial y con incrementos no constantes entre ellos. Por otra parte, estudiamos el caso de la relación de divisibilidad de los números racionales, dado que a partir del argumento diagonal de Cantor se pueden ordenar, lo que nos permite comprobar hasta qué punto algunas de las propiedades observadas para la divisibilidad de los números naturales son extensibles a un contexto más general.

La tesis se divide en 4 capítulos. El capítulo 1 contiene una introducción general a la tesis y está estructurado en 6 secciones. En las secciones 1.1 y 1.2, presentamos brevemente la Ciencia de Redes, mostrando algunos ejemplos de aplicación y motivamos el estudio de redes de números generadas a partir de la propiedad de divisibilidad. En la Sección 1.3, definimos los objetivos de esta tesis doctoral y su alcance. En la sección 1.4, presentamos la noción de red, sus formas de representación y algunas medidas que se pueden calcular sobre ellas, como son los grados de los nodos, la distribución de estos grados, la asortatividad y los coeficientes de clustering.

Por otro lado, en la Sección 1.5, revisamos los modelos de redes más conocidos como son las redes aleatorias de Erdős y Rényi, las redes de pequeño mundo de Watts y Strogatz, las redes libres de escala de Barabási y Albert y las redes jerárquicas. Mostramos en la Sección 1.6, una revisión de diversos estudios realizados con el fin de aplicar métodos de la Ciencia de Redes a problemas y propiedades que surgen en la Teoría de Números, como son las redes de divisibilidad o redes generadas a partir de la Conjetura de Collatz o la Conjetura Fuerte de Goldbach.

En los Capítulos 2 y 3, mostramos los resultados obtenidos y que han sido publicados hasta la fecha y, finalmente, en el Capítulo 4, resumimos las conclusiones obtenidas e indicamos algunos problemas relacionados que consideramos de interés abordar en un futuro.