

El trabajo en grupo en asignaturas de matemáticas

E. Sanabria Codesal; F. Monserrat Delpalillo

*Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática
Universitat Politècnica de València*

RESUMEN (ABSTRACT)

Álgebra forma parte del bloque de asignaturas básicas de primero de la titulación de Grado en Ingeniería Informática, implantada durante el curso 2010-2011, por la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática (ETSINF) de la Universidad Politécnica de Valencia (UPV). Dada la importancia que los conceptos de álgebra tienen en la formación de un graduado en informática, al programar la adaptación de la asignatura al EEES hemos considerado prioritario adecuar las metodologías docentes y las estrategias de evaluación para mejorar la adquisición de las competencias que aporta esta asignatura. En este trabajo nos centraremos principalmente en las acciones orientadas a la realización de trabajo en grupo por parte de los alumnos. Particularmente en la técnica del puzzle de Aronson y en la realización de proyectos que ponen de manifiesto las aplicaciones prácticas de la asignatura en el ámbito de la titulación. El objetivo de estas acciones es motivar a alumnado y conseguir de esta manera un aprendizaje más significativo en la materia.

Palabras clave: Trabajo en grupo, Puzzle de Aronson, Proyectos, Aprendizaje activo

1. INTRODUCCIÓN

Las competencias que aportan las asignaturas de matemáticas son de gran interés para la formación de un graduado en Ingeniería Informática, ya que constituyen una parte importante de la base de varias asignaturas del presente plan de estudios. Por este motivo al planificar la adaptación de la asignatura del Álgebra al EEES hemos considerado prioritario adecuar las metodologías docentes y las estrategias de evaluación planteando acciones que mejoren el aprendizaje de nuestros alumnos. En este trabajo nos centraremos principalmente en las actividades orientadas a la realización de trabajo en grupo por parte de los alumnos, particularmente en la técnica del puzzle de Aronson ([1]) y en la realización de sencillos proyectos donde los alumnos analicen las aplicaciones prácticas de los conceptos estudiados en la asignatura. El objetivo de estas acciones es motivar a alumnado y conseguir de esta manera un aprendizaje más significativo en esta materia.

2. MARCO TEÓRICO Y OBJETIVOS

Álgebra está incluida en el bloque de materias básicas de la titulación de Grado en Ingeniería Informática y se imparte durante el segundo cuatrimestre del primer curso de Grado. Esta asignatura tiene 6 créditos ECTS distribuidos como 3 de teoría de aula, 1,5 de seminarios y 1,5 de prácticas de laboratorio.

Los contenidos de álgebra lineal se distribuyen en los siguientes temas: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales, Matrices, Determinantes, Espacios vectoriales, Aplicaciones lineales, Diagonalización y sus aplicaciones.

En la plataforma educativa de la UPV PoliformaT ([6]) se encuentra disponible para los alumnos la información y los

materiales referentes a cada unidad, como se muestra en la Fig. 1.

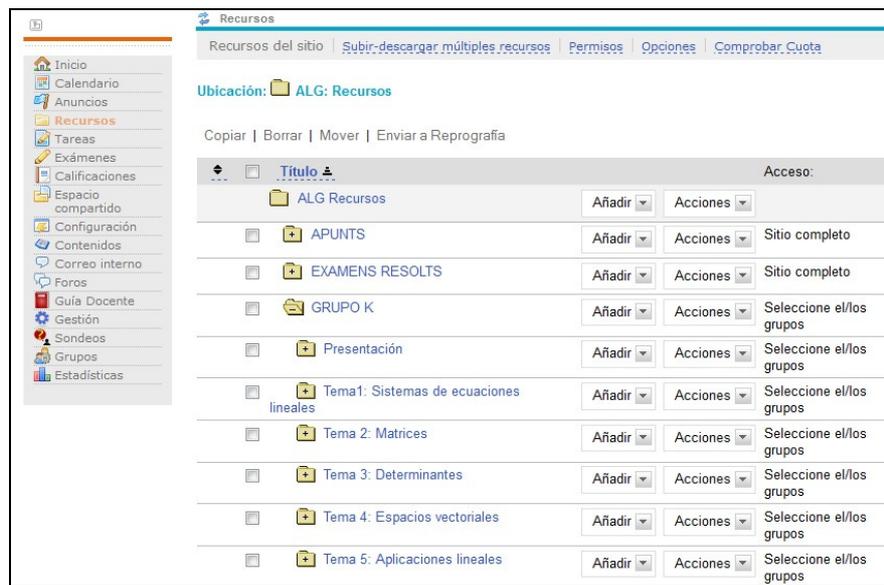


Figura 1: Contenidos de Álgebra

Durante el curso académico 2010-2011, hemos llevado a cabo una serie de iniciativas docentes tanto en la metodología, como en la evaluación, para mejorar el rendimiento académico de nuestros alumnos en la asignatura, con las que pretendemos alcanzar los siguientes objetivos:

- 1) Dotar a la asignatura de un valor añadido mediante el fomento del trabajo autónomo y cooperativo utilizando, entre otras herramientas, la plataforma educativa PoliformaT
- 2) Garantizar una mejor comprensión de los contenidos de la asignatura dándole un enfoque más aplicado tanto a través de las prácticas, como a través de los proyectos propuestos
- 3) Fomentar el aprendizaje significativo de los conocimientos aportados por la asignatura, principalmente a través de metodologías activas como el puzzle de Aronson.

3. METODOLOGÍA

Analizaremos brevemente la metodología de los dos principales tipos de trabajo en grupo que hemos utilizado durante el presente curso 2010-2011:

- Trabajo en grupo utilizando la técnica del Puzzle de Aronson
- Proyectos relacionados con las aplicaciones de la asignatura

La metodología del puzzle de Aronson tiene una parte de intercambio de información entre los miembros del grupo que realizamos en el aula bajo la supervisión del profesor, mientras que los proyectos corresponden a las actividades no presenciales de los alumnos. El uso de las tutorías permite realizar un seguimiento adecuado, tanto de la elaboración de los proyectos, como del resto de los trabajos que realizamos.

El peso que la realización del trabajo en grupo tiene en la evaluación planteada en la asignatura es de un 20% sobre la nota total.

3.1. Puzzle de Aronson

Aprovechando la implantación del grado hemos renovado los materiales de la asignatura intentando adecuarlos a las nuevas metodologías docentes y de evaluación que vamos a realizar durante el curso. En los apuntes de teoría hemos incluido gran variedad de ejemplos y ejercicios resueltos, para facilitar a los alumnos la comprensión de su lectura y que les sea útil para trabajar de forma autónoma, ya que este material servirá de apoyo para realizar los trabajos en grupo planteados con la metodología del puzzle de Aronson.

En este tipo de trabajo cooperativo, pedimos a los alumnos que formen grupos de tres personas. Cada miembro prepara una parte del material que se va a trabajar en grupo, de manera que de forma

individual no tendrían la información suficiente para resolver el problema final. En la Fig. 2 vemos el índice de trabajo individual de cada miembro del grupo.

Trabajo en grupo sobre tipos especiales de matrices (jueves 10/3/11)

Introducción

En este trabajo conoceremos algunos tipos especiales de matrices destacables por su estructura: transpuestas, transpuestas-conjugadas, simétricas, antisimétricas, hermíticas y antihermíticas. Para ello es necesario recordar las operaciones básicas de los números complejos, entre ellas la conjugación. Recordamos que la conjugación consiste en cambiar el signo a la parte imaginaria de un número complejo, es decir dado $a + bi$, el complejo conjugado que denotado por $\overline{a + bi} = a - bi$.

Miembro 1 del grupo: Matriz transpuesta y transpuesta-conjugada

Para realizar el trabajo en grupo tendrás que:

- leer con atención el apartado 1.2 de las páginas 3, 4 y 5 de los apuntes del Tema 2 Unidad temática 5.
- hacer un esquema (entregable) de su contenido dando las definiciones de matriz transpuesta y transpuesta-conjugada y poniendo un ejemplos de cada tipo con matrices 4×4 .

Figura 2: Trabajo individual del miembro 1 de grupo

Cada alumno estudia antes de llegar a clase el tópico teórico que le corresponde. Una vez en el aula se reúne con expertos en el mismo tema de otros grupos, para aclarar las posible dudas que hayan surgido y resolver un problema de su parte teórica. En la Fig. 3 mostramos un problema de este tipo.

Una vez entregado este primer trabajo, se reúne con el resto de sus compañeros de grupo y por turnos, cada uno de los miembros explica al resto de compañeros su parte, siendo necesaria la colaboración activa de todos los miembros para poder resolver con éxito el problema final propuesto al grupo, del que vemos un ejemplo en la Fig. 4.

Miembros 1 del grupo (jueves 10/3/11)

Ejercicio: Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2+i & 4 \\ 1-i & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

◊ Calcula su matriz transpuesta A^t y transpuesta conjugada A^* .

◊ Comprueba que los rangos de A , A^t y A^* coinciden.

Figura 3: Ejercicio de los miembros 1 del grupo

Grupos (jueves 10/3/11)

Ejercicio: Dado la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

◊ ¿ La matriz A es invertible? Si lo es, calcula su inversa.

◊ Calcula su matriz transpuesta-conjugada A^* y comprueba que la inversa de $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Figura 4: Ejercicio en grupo propuesto

3.2. Proyectos

Otra de las innovaciones que hemos incluido en este curso y que ya habíamos realizado con anterioridad en otras asignaturas ([2] y [3]) es la realización de proyectos en grupo, donde los alumnos trabajan en sencillas aplicaciones del álgebra lineal. El propósito de

estos proyectos es doble. Por una parte, se pretende consolidar los conocimientos que los alumnos van adquiriendo a lo largo del curso y, por otra parte, se pretende que constituyan un fuerte elemento motivador para el estudio del álgebra lineal. Los estudiantes de ingeniería son, muchas veces, reacios a admitir ciertas asignaturas como importantes dentro del ámbito de sus estudios debido a que no ven, en el momento que le son explicadas, aplicaciones inmediatas de las mismas. Este segundo propósito supone un intento de corregir esta deficiencia en el caso de la asignatura que nos ocupa.

En la Fig. 5 mostramos un listado con una serie de proyectos que se le ofrece al alumnado al principio del curso, conjuntamente con una breve explicación de los contenidos de los mismos y de los prerrequisitos.

Los alumnos deben distribuirse por grupos y elegir los proyectos que, a priori, les sugieran una mayor motivación. La cantidad de proyectos a realizar dependerá, desde luego, de los criterios de cada profesor, pero nosotros estimamos que 2 de ellos puede ser una cantidad adecuada para una asignatura semestral como es la que nos ocupa. La elección de los proyectos ofrecidos consideramos que es lo suficientemente flexible como para que el trabajo exigido en cada uno de ellos al alumno pueda adaptarse más al primero de los propósitos (consolidación de conceptos ya aprendidos) o al segundo (componente motivacional).

<p>1. Listado de proyectos Álgebra. Curso 2010-2011</p> <p>1.1. Ecuaciones de curvas y superficies que pasan por puntos específicos</p> <p>En este proyecto se describe una técnica para utilizar los determinantes en la obtención de las ecuaciones de las rectas, circunferencias y cónicas que pasan por puntos específicos del plano. Este procedimiento se utiliza también cuando se quieren obtener las ecuaciones de planos y esferas que pasan por puntos fijos del espacio tridimensional. Son requisitos para la realización del mismo la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y el cálculo de determinantes.</p> <p>1.2. Cadenas de Markov</p> <p>Se describe un modelo general para un sistema que cambia de estado y se aplica a problemas concretos. Se demuestra que estos sistemas tienden a tener una configuración permanente si los periodos de tiempo son grandes. Es necesario conocer sistemas de ecuaciones lineales, cálculo matricial.</p> <p>1.3. Modelos Económicos de Leontief</p> <p>Se estudian dos modelos lineales para sistemas económicos. Algunos resultados relacionados con matrices no negativas se utilizan para determinar las estructuras de equilibrio entre los precios y las tasas de producción que satisfacen la demanda. Es necesario conocer sistemas de ecuaciones lineales y matrices.</p> <p>1.4. Crecimiento de la población y las edades específicas</p> <p>Se investiga el crecimiento con respecto al tiempo de una población animal clasificada por edades, en un ecosistema, aplicando el modelo matricial de Leslie, que describe el comportamiento de la parte femenina de la población clasificándola por intervalos de edad del mismo número de años y teniendo en cuenta que según pasa el tiempo cambia el número de hembras en cada intervalo. También se determina la distribución de las edades en el límite y la tasa de crecimiento de la población.</p> <p>1.5. El algoritmo PageRank de Google</p> <p>Los algoritmos de búsqueda de información en internet, como el PageRank de Google, constituyen una excelente aplicación de las herramientas básicas del cálculo matricial y de las cadenas de Markov. El PageRank es el método de cálculo que usaron los fundadores de Google (Sergey Brin y Lawrence Page) para clasificar las páginas web según su importancia. La finalidad del método es la obtención de un vector, el vector PageRank, que proporciona la importancia relativa de las páginas. Se requieren conocimientos de cálculo matricial.</p>
--

Figura 5: Listado de proyectos

Si se quiere hacer más énfasis en el primero, la realización del proyecto debería ser algo tardía en el desarrollo del curso, de manera que el alumno ya haya adquirido bastantes conocimientos teóricos y procedimentales para poder hacer frente a los problemas propuestos; también el grado de exigencia y profundidad requeridos en estos problemas puede ser grande (acorde con los conocimientos adquiridos, claro está). Sin embargo, si se quiere hacer más énfasis en la componente motivacional, resultará interesante que el alumno realice el proyecto durante las primeras semanas del curso, de manera que esto le sirva de ‘acicate’ para estudiar la asignatura, al ser consciente tempranamente de sus aplicaciones. Obviamente, el

nivel de exigencia en cuanto a conocimientos adquiridos debe ser, en este caso, menor.

A modo de ejemplo, presentaremos a continuación, a grandes rasgos, el desarrollo de dos de los proyectos: ‘El algoritmo PageRank de Google’ y ‘Crecimiento de la población y las edades específicas’. Las actividades propuestas pretenden enfatizar más la componente motivacional debiéndose, por tanto, plantear en una fase temprana del curso.

3.2.1. Proyecto ‘El algoritmo PageRank de Google’

Los algoritmos de búsqueda de información en internet, como el PageRank de Google, constituyen una excelente de aplicación de las herramientas básicas del cálculo matricial y de las cadenas de Markov. El PageRank es el método de cálculo que usaron los fundadores de Google para clasificar las páginas web según su importancia [4] (véase también [5] para una breve y clara explicación del método). La finalidad del método es la obtención de un vector, el vector PageRank, que proporciona la importancia relativa de las páginas (es decir, asigna a cada página un ‘grado de importancia’, obteniéndose una ordenación de todas las webs según su ‘importancia’). Este vector se calcula en función de la estructura de las conexiones de la web.

Proporcionamos al alumno un boletín en el que se explican, a través de un ejemplo, los fundamentos básicos del método PageRank, donde se parte de la descripción de una red de muy pocas páginas web (8 concretamente) mediante un grafo dirigido cuyos vértices representan las páginas (numeradas de 1 a 8) y cuyas aristas representan los enlaces entre ellas. A partir de este grafo se construye la matriz cuadrada G' de orden 8 cuya entrada (i, j) es

igual a 0, si la página j no enlaza con la página i , y $1/m$ si enlaza con la página i , donde m es el número de enlaces presentes en j . Un ‘navegante aleatorio’ será un usuario que navega ‘aleatoriamente’ por la red. Consideramos una sucesión de vectores de tal manera que la componente j -ésima del k -ésimo vector indica la probabilidad de que el ‘navegante aleatorio’ visite la página j en su k -ésima visita. Esta sucesión tiene la particularidad de que cada uno de estos vectores se obtiene multiplicando la matriz definida en el párrafo anterior por el vector precedente. Se razona de manera muy sencilla que una manera matemáticamente coherente de definir el grado de importancia de una determinada página web j es como la componente j -ésima del vector límite de la sucesión de vectores descrita (en caso de que exista dicho límite). A partir de aquí, se realizan modificaciones (todas ellas ‘muy naturales’ desde el punto de vista del ‘navegante aleatorio’) a la matriz antes descrita con el fin de asegurar que la secuencia de vectores tenga límite. De esta manera se obtiene una matriz G que determina una cadena de Markov convergente a un vector cuyas componentes vienen a ser los grados de importancia de las páginas web, denominado ‘vector PageRank’. Se explica a continuación cómo obtener este vector con el programa de cálculo simbólico Scilab [7] y se proponen una serie de actividades a realizar. Se proporciona también un ‘paquete’ (que hemos llamado PageRank.sci) con el código fuente de ciertas funciones de Scilab que hemos diseñado para este proyecto con el fin de facilitar los cálculos.

Actividad 1. Carga en Scilab el fichero PageRank.sci y escribe el siguiente comando:

```
-->A=randomat(10)
```

Verás que, como resultado, se obtiene una matriz estocástica de orden 10 con ceros en la diagonal.

- Escribe la matriz obtenida.
- Asumiendo que representa la primera matriz Google provisional G' (tal y como se ha definido en la explicación teórica) de una pequeña red formada por 10 páginas web, dibuja el diagrama del grafo dirigido asociado a la red.
- Finalmente calcula la matriz Google definitiva G , calcula el vector PageRank asociado a la red y ordena las páginas según su "grado de importancia".

Actividad 2. Escribe el siguiente comando:

```
-->A=randomat_2(100);
```

Asumiendo que la matriz estocástica de orden 100 obtenida A representa la segunda matriz Google provisional G'' de una cierta red compuesta por 100 páginas web (observa que no hay ninguna columna nula), calcula la matriz Google definitiva G y calcula el vector PageRank. ¿Qué página web tiene mayor PageRank? ¿Podrías explicar por qué?

Figura 6: Actividades propuestas en ‘El algoritmo PageRank de Google’

Proporcionamos también a los alumnos una hoja con las actividades propuestas, como muestra la Fig. 6. Aunque una justificación minuciosa y rigurosa del algoritmo PageRank haría uso de los conceptos de valor y vector propio y del Teorema de Perron-Fröbenius, es posible (y así lo hemos hecho) realizar una explicación comprensible del algoritmo sin mencionar, ni tan siquiera, los términos ‘valor propio’ y ‘vector propio’. Es más, lo único que se requiere saber para entender la explicación del proyecto y realizar las actividades es, por una parte, el producto matricial y, por otra parte, unas nociones muy básicas de cálculo de probabilidades. Así pues, con tan sólo unos requisitos básicos, el alumno puede ser consciente, nada más comenzar el curso, de una aplicación muy potente y útil del álgebra lineal.

3.2.2. Proyecto ‘Crecimiento de la población y las edades específicas’

En este proyecto se pretende ver una aplicación sencilla del álgebra lineal al estudio de la evolución de una cierta población de

seres vivos de un ecosistema.

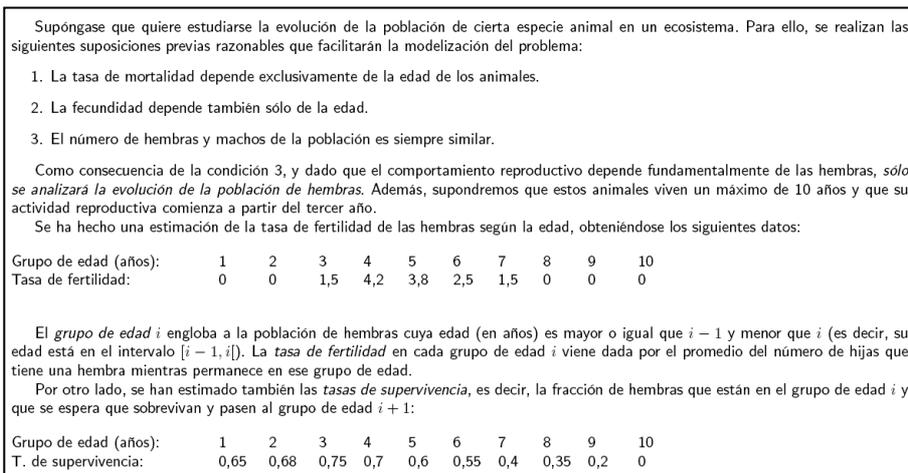


Figura 7: Ejemplo de datos de la evolución de un grupo poblacional

Al igual que en el caso del proyecto anterior, los requisitos en cuanto a conocimientos matemáticos son muy pocos y, por tanto, resultará conveniente realizarlo también al principio del curso. Al igual que en el caso anterior, se entregará a los alumnos un boletín explicativo del proyecto. En él, en primer lugar, se mostrará un ejemplo sencillo, con datos concretos, de los detalles acerca de una cierta población de una especie animal, como vemos en la Fig. 7. A continuación se explicará cómo, a partir de los datos mostrados, puede estudiarse el proceso de envejecimiento poblacional (Fig. 8).

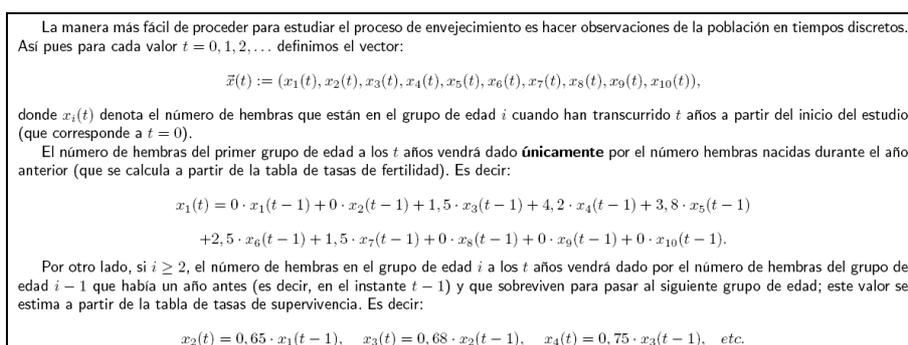


Figura 8: Estudio del proceso de envejecimiento poblacional

A continuación se explicará cómo, a partir de una matriz denominada ‘matriz de Leslie’, puede modelizarse el comportamiento de la población a partir de un sistema dinámico (Fig. 9).

Todo esto se puede expresar matricialmente de la siguiente manera (¡compruébalo!):

$$\vec{x}(t) = L \vec{x}(t - 1),$$

donde L es la siguiente matriz (*matriz de Leslie*):

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,5 & 4,2 & 3,8 & 2,5 & 1,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,65 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,68 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,55 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$\vec{x}(1) = L \vec{x}(0),$$

$$\vec{x}(2) = L \vec{x}(1) = L^2 \vec{x}(0),$$

$$\vec{x}(3) = L \vec{x}(2) = L^3 \vec{x}(0),$$

y en general, para todo $t \in \{1, 2, 3, \dots\}$:

$$\vec{x}(t) = L^t \vec{x}(0).$$

Figura 9: Modelización usando la matriz de Leslie

Finalmente se plantearán las actividades que los estudiantes deben resolver con la ayuda de Scilab [9] (Fig. 10).

Actividad 1. En el ejemplo anterior supóngase que, inicialmente, se tiene una población de 100 hembras (y 100 machos) en el primer grupo de edad. Es decir: ¿Cuál será su distribución aproximada en el cabo de 5 años? ¿Y de 10? ¿Cómo evoluciona la población durante los primeros 100 años?

Actividad 2. En el mismo ejemplo supongamos que las tasas de supervivencia se mantienen igual pero que las tasas de fertilidad son las siguientes:

Grupo de edad (años):	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tasa de fertilidad:	0	0	0	1	1,3	1	0,5	0	0	0

¿Cómo evoluciona la población durante los 100 primeros años?

Actividad 3. Supongamos ahora que las tasas de supervivencia se mantienen igual pero que las tasas de fertilidad son las siguientes:

Grupo de edad (años):	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tasa de fertilidad:	0	0	0	$1+\epsilon$	1,3	1,8	1,5	0	0	0

siendo $\epsilon \in [-1, 1]$. Tomando $\epsilon = 0$, ¿cómo evoluciona la población durante los 100 primeros años? Estudia cómo cambia la forma de evolucionar la población al crecer t para diferentes valores de ϵ .

Figura 10: Actividades

Aunque el estudio riguroso del comportamiento a largo plazo de un sistema dinámico de este tipo involucra la teoría de valores y vectores propios, en el desarrollo de este proyecto no se habla en ningún momento de ellos, requiriéndose únicamente un estudio descriptivo del sistema dinámico. Existe la posibilidad de, en los estadios finales del curso, plantear en una segunda parte del proyecto un estudio más detallado de los mismos ejemplos utilizando ya la teoría de valores propios.

4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este momento no tenemos resultados del rendimiento de los alumnos con esta nueva estructuración de la asignatura que hemos realizado, ya que sólo hemos realizado un parcial, de los tres que están previstos por lo que desconocemos las notas finales de la asignatura. Sin embargo, pese al desconocimiento de estos datos, la sensación es que las experiencias descritas han resultado enriquecedoras y motivadoras para los alumnos. Nuestro objetivo en este sentido es pasar una encuesta, una vez finalizado el curso, para tener resultados realistas y contrastados sobre estas experiencias docentes.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Camp, S., Conejero, J. A. y Sanabria, E. (2004). Organización del trabajo en grupo mediante la técnica del puzzle de Aronson. Actas del III Congreso Internacional Docencia Universitaria e Innovación (CIDUI), Girona.
2. Sanabria E. (2006). Una experiencia de aprendizaje a través del trabajo en grupo. Actas de las Primeras Jornadas de Innovación Educativa, Zamora.

3. Martínez Hinarejos C. D. y Sanabria Codesal E. (2010). Una experiencia de coordinación entre las asignaturas de Análisis Matemático y Programación de la ETSINF. Actas de las VIII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria, Alicante.
4. Brin S. y Page L. (1998). The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine. Computer Networks and Isdn Systems, 30, 2.
5. Pedroche F. (2007) Métodos de cálculo del vector PageRank. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. , 39, 7-30.
6. Universitat Politècnica de València. Portal educativo UPV PoliformaT (2011): <http://poliformat.upv.es/portal>
7. Scilab (programa de computación numérica), web: <http://www.scilab.org/>