

Superficies singulares de Frei Otto

Geometría y generación de formas activas

Trabajo Final de Grado 2018/2019 Composición Arquitectónica | Matemáticas Aplicadas



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA



ESCOLA TÈCNICA
SUPERIOR
D'ARQUITECTURA

Crespo Llopis, María | Valencia, Octubre 2018

Tutor: **Songel González, Juan María**

Cotutor: **Peris Manguillot, Alfred**

Grado en Fundamentos de la Arquitectura
Escuela Técnica Superior de Arquitectura



ESCOLA TÈCNICA
SUPERIOR
D'ARQUITECTURA



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Trabajo de Final de Grado

Grado en Fundamentos de la Arquitectura

Superficies singulares de Frei Otto

Geometría y generación de formas activas

Trabajo Final de Grado 2018/2019 Composición Arquitectónica | Matemáticas Aplicadas

Crespo Llopis, María | Valencia, Octubre 2018

Tutor: **Songel González, Juan María**

Cotutor: **Peris Manguillot, Alfred**

Grado en Fundamentos de la Arquitectura

Escuela Técnica Superior de Arquitectura

Índice de contenidos

Resumen - Resum - Abstract

Palabras claves - Paraules clau- Key words 9

1. Introducción

1.1. Objetivos 16

1.2. Métodos de trabajo 17

2. Frei Otto. Procesos de autogeneración de formas

2.1. Arquitectura de Frei Otto 20

2.2. Metodología y antecedentes experimentales 22

3. Formación de burbujas. Superficies mínimas

3.1. Bordos rígidos 30

3.2. Bordos flexibles 46

3.3. Combinaciones 54

3.4. Dos marcos 60

4. De la experimentación física al diseño digital

4.1. Procesos informáticos. Casos prácticos 72

4.2. Parametrización de formas. Wolfram Mathematica 74

5. Conclusión	84
6. Bibliografía	88
7. Índice de imágenes	92
8. Experimentos. "Ensayo _ error"	96

Frei Otto es uno de los arquitectos del siglo XX que más investigó las estructuras de forma activa, que visibilizan con mucha claridad la relación entre forma y estructura, con formas que siguen el flujo de las tensiones. Sus estructuras se caracterizan por la ligereza y por las formas superficiales de las membranas traccionadas.

La modelización matemática de algunas de las superficies singulares de Frei Otto es posible gracias al carácter puramente geométrico de muchas de ellas. Desde las superficies minimales (es decir, superficies que minimizan su área bajo ciertas condiciones de contorno) que obtenía experimentalmente con agua jabonosa, hasta superficies de doble curvatura. Muchas de ellas son susceptibles de ser matemáticamente parametrizadas, y a su vez es posible experimentar con la variación de parámetros para descubrir nuevas formas. Para ello se utilizará software con licencia UPV que permite generar formas exportables a formatos de CAD y de impresión 3D, y generar maquetas que reproduzcan dichas formas.

Palabras clave

Frei Otto, modelización matemática, superficies minimales, superficies de doble curvatura, arquitectura paramétrica, estructuras de forma activa.

Frei Otto és un dels arquitectes del segle XX que més va investigar les estructures de forma activa, que visibilitzen amb molta claredat la relació entre forma i estructura, amb formes que segueixen el flux de les tensions. Les seues estructures es caracteritzen per la lleugeresa i per les formes superficials de les membranes traccionadas.

La modelització matemàtica d'algunes de les superfícies singulars de Frei Otto és possible gràcies al caràcter purament geomètric de moltes d'elles. Des de les superfícies minimales (és a dir, superfícies que minimitzen la seua àrea davall certes condicions de contorn) que obtenia experimentalment amb aigua sabonosa, fins a superfícies de doble curvatura. Moltes d'elles són susceptibles de ser matemàticament parametritzades, i al seu torn és possible experimentar amb la variació de paràmetres per a descobrir noves formes. Per a això s'utilitzarà programari amb llicència UPV que permet generar formes exportables a formats de CAD i d'impressió 3D, i generar maquetes que reproduïsquen les dites formes.

Paraules clau

Frei Otto, modelització matemàtica, superfícies minimales, superfícies de doble curvatura, arquitectura paramètrica, estructures de forma activa.

Abstract

Frei Otto is one of the 20th century architects who most thoroughly investigated form-active structures, which make visible the relationship between form and structure very clearly, with forms following the flow of forces. His structures are best characterized by their lightness and the surface forms of tensioned membranes.

Mathematical modeling of some of the unique surfaces of Frei Otto is possible thanks to the purely geometrical character of many of them. Starting from its minimal surfaces (that is, surfaces that minimize their area under certain boundary conditions) obtained experimentally with soapy water, to surfaces of double curvature. Many of them are capable of being mathematically parametrized, and in turn it is possible to experiment with the variation of parameters to discover new forms. This will require UPV software that allows the generation of exportable forms to CAD and 3D printing formats, and to generate models that reproduce these forms.

Key words

Frei Otto, Mathematical modeling, minimal surfaces, double curvature surfaces, parametric architecture, form-active structures

1. Introducción

1.1. Objetivos

1.2. Métodos de trabajo

Desde sus orígenes, el mundo de la Arquitectura se ha enfrentado a muchas cuestiones que intentaban definirla, dotarla de las características de un lapso temporal concreto.

Todas esas preguntas responden a una misma búsqueda, ¿es la función la que sigue a la forma? o en cambio, ¿es la forma la que ha de definir la función?.

A lo largo de los años, las diferentes etapas por las que atravesaba el hombre se han visto reflejadas y han buscado refugio en ella. Las dudas e inquietudes del individuo, han intentado definirla hasta el punto de alcanzar el cánon de belleza deseado.

Frei Otto, es uno de los arquitectos más influyentes del Siglo XX. Sus investigaciones pioneras sobre estructuras ligeras de tracción, continúan siendo de gran relevancia en la actualidad, consiguiendo la perfecta armonía entre las transmisiones de cargas y la forma de la misma.

La posibilidad de crear nuevas estructuras que respondan a los conceptos de eficiencia, ligereza, economía y adaptación, se ve reforzada por el análisis y la experimentación física del autor, sin dejar nunca de lado la estética natural y orgánica de la estructura. La construcción ligera como síntesis de un consumo mínimo de materiales.

La metodología experimental de Frei Otto, basado en la autogeneración de formas, tenía un fin práctico concreto, nada era casual ni predeterminado, sino que surge de manera natural.

Gracias a sus experimentos con películas de jabón, y el empleo de las superficies mínimas, soluciona los problemas de desigualdad tensional que surgían en sus proyectos de membranas.

Su capacidad de encontrar lo que no se busca, por medio de la experimentación, genera un nuevo camino a seguir en el que por medio de los estudios de la naturaleza, se pueden generar nuevas estructuras livianas, dónde la función y la forma no están reñidas entre sí.

En este trabajo, se ponen de manifiesto esas ideas novedosas a la hora de proyectar, que pueden tener una gran influencia en el campo de la construcción y de la arquitectura del futuro.

Se ha realizado una clasificación de diversas obras y autores, y por medio de diferentes tipos de límites y las películas de jabón, se ha podido observar cómo serían si se hubiesen realizado con superficies mínimas, y las infinitas posibilidades de autogeneración de formas que nos proporciona este tipo de experimentación.

1.1. Objetivos

En éste Trabajo de Fin de Grado, se pretende indagar, tanto de forma teórica como práctica, en los ejemplos de estructuras de membranas inventadas por el arquitecto y teórico alemán Frei Otto, estableciendo una relación directa entre su forma y estructura.

El siguiente trabajo se basará en el estudio de las superficies mínimas, tomando como punto de partida los experimentos realizados en los años '50 por Frei Otto, con pompas o películas de jabón. Se trata de estructuras muy ligeras formadas generalmente por membranas, las cuales además de constituir la superficie más pequeña posible para una estructura dada, tienen la característica de establecer una uniformidad tensional en todos los puntos y direcciones de la superficie. Esta propiedad física de las superficies mínimas, se podría traducir en términos proyectuales como gran ligereza al tratarse de elementos con áreas lo más ajustadas posibles, eficiencia energética, economía y adaptación, ya que son capaces de cubrir y unificar el espacio a gran escala.

Una vez realizado el trabajo más práctico de experimentación, se procederá a modelizar matemáticamente alguna de las superficies creadas por Frei Otto, para jugar con la variación de parámetros, permitiendo así descubrir nuevas formas. Para esta parte del trabajo se empleará software proporcionado por la Universitat Politècnica de València, que permita así generar formas que sean después reproducibles en maquetas.

1.2. Métodos de trabajo

Para organizar el marco teórico del tema a estudiar, el trabajo se ha dividido en los siguientes apartados:

Primero se expondrá una breve biografía del autor, Frei Otto, además de comentar los rasgos más característicos de su arquitectura, y sus experimentos físicos.

A continuación nos centraremos en el estudio de las superficies mínimas, clasificándolas según su tipo de borde, para realizar los experimentos con películas de jabón.

Para concluir el trabajo, se procederá a parametrizar las diferentes formas generadas en los apartados anteriores mediante el programa informático Wolfram Mathematica.

2. Frei Otto. Procesos de autogeneración de formas

2.1. Arquitectura de Frei Otto

2.2. Metodología y antecedentes experimentales

2.1. Arquitectura de Frei Otto

Frei Otto, nacido en Siegmar, Alemania en 1925, destacó como una de las personalidades más importantes dentro de los ámbitos de la Arquitectura y la Ingeniería del Siglo XX.

Realizó sus estudios de Arquitectura en la Universidad Técnica de Berlín, donde más tarde desarrolló su tesis doctoral sobre Construcciones Tensadas.

Considerado como el precursor de las estructuras ligeras de tracción, fundó el instituto para estructuras ligeras en la Universidad de Stuttgart.

Gran parte de sus obras e investigaciones son reconocidas y galardonadas a nivel mundial. Su extensa carrera recoge premios tan relevantes como la Medalla de Oro Real RIBA en el año 2006, por el Royal Institute of British Architects, y el Premio Pritzker en el año 2015 a toda una vida dedicada a la arquitectura. Concediéndose éste días después del fallecimiento del autor, se convierte así en el primer Premio Pritzker entregado a título póstumo en la historia de los galardones.

Sus extensas investigaciones en estructuras ligeras, 60 años después de su realización, siguen siendo tan relevantes como el primer día, y su obra continúa inspirando a arquitectos e ingenieros en la actualidad.

Este tipo de estructuras surgieron ante la necesidad del autor de cubrir y unificar el espacio a gran escala, de esta forma podía optimizar al máximo el desarrollo de la obra, lo que le permitía construir con la cantidad mínima de materiales.

Para el autor, el concepto de Arquitectura se fusionaba con el de Naturaleza, siguiendo las bases del Organicismo partía de

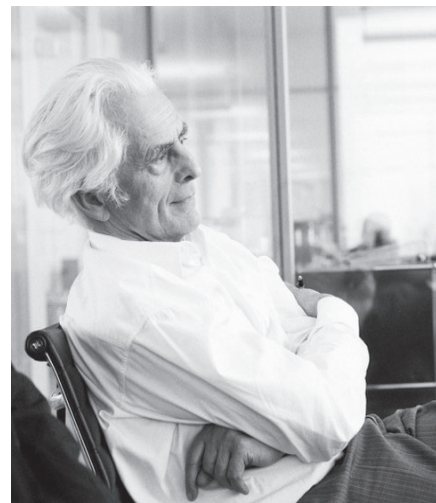


Imagen 1. Arquitecto Frei Otto.



Imagen 2. Maqueta de estructura con membranas.

de un mismo todo que le permitía analizar las estructuras más orgánicas y plasmarlas en formas que podían ser construidas gracias a una arquitectura ligera.

El intento de Otto de fundir la arquitectura con el mundo natural, lo hizo pionero en el campo de la sostenibilidad, buscando siempre la vinculación directa entre la construcción con el medio en el que se implanta.

Sus estructuras emulan formas biológicas, cuerpos que trabajan de la manera más sostenible posible, permitiendo así la relación función-estética. Por tanto, toda su obra queda resumida con los conceptos de ligereza, eficiencia, economía, y adaptación, ya que todas ellas parten de la búsqueda de una superficie mínima.

Las superficies mínimas, son aquellas que tienen área mínima y una tensión superficial uniforme en cada punto de la misma, a la vez que poseen una curva cerrada como contorno. Gracias a las investigaciones de Frei Otto, resultaron ser de gran utilidad para la innovación de estructuras con un diseño simple, ya que no hay otra superficie que posea un área menor para una estructura dada, lo que deriva en obras de gran ligereza y estabilidad.

Basándose en estas características, Frei Otto desarrolló una serie de experimentos pioneros para la época, mediante los cuales a partir de maquetas realizadas a partir de películas de jabón o membranas elásticas, creaba modelos de pequeñas dimensiones que le permitían probar y definir formas nuevas.

Para el desarrollo de este trabajo, nos vamos a centrar en la realización de esas maquetas de jabón, y podremos observar cómo éste material se adapta a una serie de estructuras propuestas, cambiando su forma al tender a la mínima superficie.

2.2. Metodología y antecedentes experimentales

“Poder construir presupone el conocimiento de todas las formas de la arquitectura y de la construcción, al igual que de su desarrollo. Construir significa progresar en ese proceso, investigar y hacer. El desarrollo de los edificios comenzó hace al menos 10.000 años y ha alcanzado un altísimo nivel, pero de ninguna manera es un proceso cerrado. Todavía hay innumerables posibilidades abiertas, innumerables descubrimientos por hacer”.

Otto, F¹

Frei Otto, ha dedicado gran parte de su trayectoria profesional, en crear un vínculo entre la naturaleza y la arquitectura, que se pudiese traducir en una serie de nuevos conocimientos aplicables al diseño y a la construcción. Junto a este interés del autor por evocar las formas más orgánicas, desarrolló diversos métodos de autogeneración de forma o *form finding*, que le permitiesen crear ciertas geometrías que pudiesen cubrir determinadas funciones.

Es durante la década de 1950, a partir de las primeras estructuras traccionadas, cuando Otto realiza esta serie de experimentos de autogeneración, siguiendo los pasos de arquitectos como Antonio Gaudí, que mediante la creación de maquetas de trabajo a base de cadenas y redes, estudió cómo se comporta la materia al ser sometida a un sistema de cargas, y encontrar así nuevas formas.

La necesidad de llevar a cabo esta serie de experimentos y ensayos físicos con maquetas, surge como una herramienta de trabajo fundamental en el desarrollo y búsqueda de nuevas formas.



Imagen 3. Fotografía de maqueta funicular de Gaudí para Güell.

1. Songel González, J.M. (2008). *Frei Otto. Conversación con Juan María Songel*. Barcelona: Gustavo Gili, D.L.

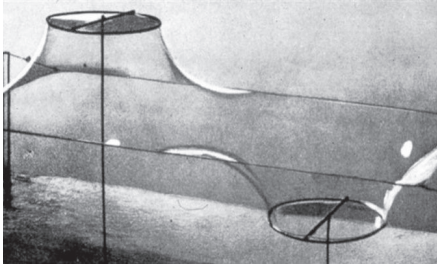


Imagen 4. Experimento con películas de jabón.



Imagen 5. Aviario en el zoo, Múnich, Alemania 1979

De entre toda su labor de investigación, tenemos que destacar los experimentos realizados con películas de jabón, que le permitían extrapolar el proyecto de la fase de ensayo, a modelos reales de superficies mínimas, que podía construir con el uso de membranas y redes de cables pretensados.

Estos experimentos se realizaban sumergiendo un marco rígido de uno o varios trozos, con la forma deseada, teniendo en cuenta que ha de tratarse de un contorno cerrado, en una solución jabonosa de agua con detergente. Al retirar la estructura, se crea una superficie curvada dentro del propio marco, que corresponde a las características físicas de una superficie mínima.

Siguiendo este sencillo proceso, Frei Otto desarrolló una serie de maquinaria que le permitiese crear las películas de jabón y que a la vez éstas quedasen registradas y fotografiadas en una pantalla. Con todo estos procedimientos medía las formas resultantes, y podía recrearlas con exactitud en modelos con telas o membranas.

Estas estructuras ligeras, en las que la forma ha surgido de forma experimental, sentarán las bases de una arquitectura innovadora que constituirá una herramienta muy importante de optimización y búsqueda de formas.

Según Frei Otto, la experimentación física es la única forma que te puede conducir a encontrar lo novedoso en cuento a la generación de formas.

Pese a que no todos los experimentos con películas de jabón realizados durante la década de los cincuenta tuvieron una aplicación práctica, sirvieron como punto de partida para un tipo muy específico de investigación, cruzando los caminos de la arquitectura con el campo de las matemáticas.

Se entiende que estos experimentos sirvieron de guía para descubrir nuevas formas, como resultado de las distintas modificaciones o variaciones de los diferentes parámetros sin límites.

Frei Otto, persigue con sus experimentos físicos con maquetas, la posibilidad de ganarle la batalla al cálculo por ordenador, la búsqueda de lo que aún no se ha podido realizar, y que escapa de las leyes impuestas por el hombre. Las infinitas posibilidades físicas que te aporta el jugar con la geometría de la naturaleza, que queda plasmada en una superficie mínima.

Un claro ejemplo de la presencia de las superficies mínimas en la arquitectura es el estadio Olímpico de Múnich, diseñado por Frei Otto, donde las formas orgánicas que emulaban los Alpes que rodeaban la edificación se ven claramente reflejadas en la cubierta del estadio.

La arquitectura de Frei Otto, pone de manifiesto la lucha arquitectónica entre la experimentación física y el diseño digital, dejando claro su interés por la generación de formas mediante medios físicos, en vez del diseño con el ordenador ².

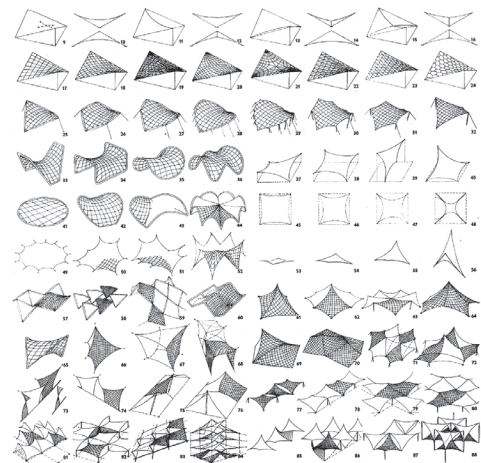


Fig. 14. Variaciones, adiciones y combinaciones de estructuras de redes con formas alabeadas. Sistematizaciones gráficas de Frei Otto.

Imagen 6. Variaciones y combinaciones de estructuras con formas alabeadas de Frei Otto.

2. Songel González, J.M. (2010). "Frei Otto y el debate sobre la génesis de la forma arquitectónica". EGA-Revista de expresión gráfica, 15, 8.

La investigación por medio de maquetas físicas muestra el interés de Otto ante el descubrimiento, la innovación que le permite llegar ahí dónde no se había planteado llegar, permitiéndole descubrir lo que no sabía que buscaba: infinitas posibilidades.

Cabe destacar, que en la actualidad, este trabajo de experimentación, se ha de complementar con bases matemáticas, con el diseño lógico y digital, lejos de la intuición. Esto permite la resolución de proyectos como el del Estadio Olímpico de Múnich, o el Pabellón Alemán de la Exposición de 1967, gracias a softwares informáticos que generan la superficie a partir de curvas, estudiando la estructura desde un enfoque matemático.

“Con el ordenador sólo se puede calcular lo que en realidad conceptualmente ya está en él. Sólo encuentras lo que buscas, lo no buscado no se puede encontrar con el ordenador. Sin embargo con la experimentación libre sí se puede encontrar lo no buscado”.

Otto, F ³

3. Formación de burbujas. Superficies mínimas

- 3.1. Bordes rígidos
- 3.2. Bordes flexibles
- 3.3. Combinaciones
- 3.4. Dos marcos

La finalidad principal de este trabajo es analizar las formas que se generan a partir de los experimentos con películas de jabón, realizados en los años cincuenta, por el arquitecto alemán Frei Otto.

Se tratarán de estructuras ligeras, capaces de trabajar con espesor y forma mínima, generadas a partir de una serie de procesos físicos, dando como resultado, unas superficies mínimas que trabajan a tracción.

Éstas superficies mínimas, son aquellas estructuras formadas generalmente por membranas, que tienen un área mínima y una curvatura media igual a cero en cada punto de la misma, poseyendo además, una curva cerrada como contorno. Esta propiedad física de las superficies mínimas, se podría traducir en términos proyectuales como gran ligereza al tratarse de elementos con áreas lo más ajustadas posibles, eficiencia energética, economía y adaptación, ya que son capaces de cubrir y unificar el espacio a gran escala.

Un ejemplo claro de cómo funcionan las superficies mínimas son los experimentos con pompas de jabón, permitiendo indagar en las características y ver el comportamiento de éste tipo de superficies.

Siguiendo estos estudios, se han realizado una serie de experimentos con películas de jabón, basándose en las propiedades que éste tipo de superficies aportan al mundo de la arquitectura.

Analizando y observando cada una de las formas que surgen al sumergir un contorno concreto, en una solución jabonosa, se ha realizado una clasificación de los resultados, para así poder facilitar la comprensión de los diferentes procesos.

Cabe destacar, que no sólo se han tomado formas geométricas puras para el desarrollo práctico del trabajo, superficies como lo pueden ser el hiperboloide hiperbólico o paraboloides, conocidas ya sus ecuaciones paramétricas, sino que también, se han tomado como punto de inspiración diferentes formas sacadas de obras arquitectónicas ya construidas, como pueden ser las cáscaras de hormigón realizadas por el arquitecto Félix Candela, Jean Nouvel, e incluso las propias obras que Frei Otto llevó a la realidad gracias a este tipo de experimentos. Todas ellas, obras arquitectónicas muy diversas.

Este segundo punto de partida, o investigación paralela, nos sirve para poder analizar cómo se habrían llevado a cabo este tipo de obras, si se hubiesen tomado durante su proyección, o su construcción como superficies mínimas, y como se hubiesen comportado entonces.

3.1. Bordes rígidos

Dentro de este apartado, analizaremos todas aquellas superficies mínimas que se generen dentro de un marco o contorno cerrado con límites rígidos.

Dado un marco de cualquier forma posible, con sus bordes rígidos curvados o doblados, se crea un conjunto de líneas o formas, que al ser sumergidas en una solución jabonosa, crean una superficie continua capaz de ser tensada.

Gracias a la experimentación que se ha realizado para la elaboración de este trabajo, hemos apreciado distintas categorías dentro de este apartado de bordes rígidos.

Por un lado, dado un marco plano, se crea una superficie de jabón que tenderá a ser plana, independientemente del número de vértices que le queramos dar a la figura, siempre y cuando la misma no se deforme debido a su propio peso, o a la acción de fuerzas externas que deformen el contorno.

Si doblamos un lado del marco, observamos que la superficie generada en su interior tiende a curvarse hasta cubrir todo el espacio acotado. Podemos retorcer o doblar el alambre de contorno las veces que se deseen, obteniendo cada vez diferentes formas de superficies mínimas.

Por ejemplo, si realizamos diferentes vértices dentro de un marco de alambre, creamos diferentes posibilidades de formas articuladas, dónde la tensión de la lámina de jabón será superior a la rigidez del propio marco, dando infinitas posibilidades.

Del mismo modo, si en vez de crear vértices, simplemente retorceremos el alambre tomando las esquinas como puntos redondeados, se generan formas mucho más sinuosas en las que las superficies obtenidas experimentan una mayor curvatura.

Otra categoría de la clasificación se produce al emplear contornos cerrados de forma circular, al igual que también podemos considerar superficies helicoidales cuando tratamos los bordes rígidos. Dependiendo del espacio que se deja entre una espiral y otra, la lámina de jabón genera una envolvente superficial en espiral distinta.

Dado un alambre o borde rígido, creamos un marco plano de forma rectangular, en cuyo interior se creará una superficie de jabón que tenderá a ser plana, independientemente del número de vértices que le queramos dar a la figura.

En este caso, si partiendo de un rectángulo, doblamos a nuestra voluntad tres veces el marco de alambre, creamos unos pequeños montículos que configuran de forma sinuosa, el nuevo contorno de la estructura.

Si sumergimos la figura modificada en una solución jabonosa, observamos que la superficie generada en su interior tiende a curvarse hasta cubrir todo el espacio acotado. Podemos retorcer o doblar el alambre de contorno las veces que se deseen, obteniendo cada vez diferentes formas de superficies mínimas.

Se obtiene, por lo tanto, una superficie mínima igual a la superficie ondulada que configura la cubierta de la Casa en Los Vilos, obra del grupo de arquitectos SANAA, construida en Chile, a orillas del Océano Pacífico en el año 2012⁴.

Desde el punto de vista proyectual, la sinuosa cubierta corresponde a la clara intención de relacionar el programa de la vivienda con el lugar de implantación, con la intención de evocar el horizonte. Una arquitectura flexible.



Imagen 7. Casa en Los Vilos, SANAA, Chile, 2012



Imagen 8. Exterior Casa en Los Vilos en construcción.

4. PLATAFORMA ARQUITECTURA, Agos 2007. "ACTAR: Casas SANAA (Kazuyo Sejima + Ryue Nishizawa)". <<https://www.plataformaarquitectura.cl/ci/02-2288/actar-casas-sanaa-kazuyo-sejima-ryue-nishizawa>>

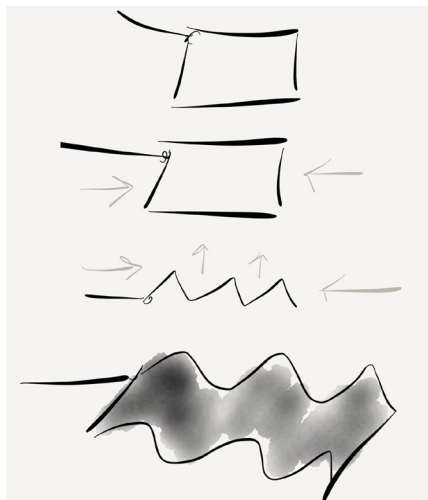
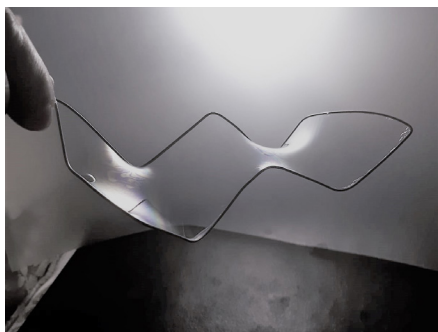


Imagen 9. Esquemas e imágenes propios de autogeneración de formas.



Imagen 10. Imagen propia. Autogeneración de formas con bordes rígidos curvados

Dado un alambre o borde rígido, creamos un marco plano de forma circular en cuyo interior se creará una superficie de jabón que tenderá a ser plana, independientemente del número de vértices que le queramos dar a la figura.

En este caso, partiendo de un círculo, doblamos n veces el marco de alambre, creamos unos pequeños montículos que configuran de forma sinuosa, el nuevo contorno de la estructura.

Si sumergimos la figura modificada en una solución jabonosa, observamos que la superficie generada en su interior tiende a curvarse hasta cubrir todo el espacio acotado. Podemos retorcer o doblar el alambre de contorno las veces que se deseen, obteniendo cada vez diferentes formas de superficies mínimas.

Se obtiene, por lo tanto, una superficie mínima igual a la intersección de cuatro paraboloides hiperbólicos, que crean una flor de ocho pétalos, que a su vez configura la geometría del restaurante del Oceanogràfic de Valencia, construida por el arquitecto Félix Candela en el año 1997⁵.

Las soluciones constructivas propuestas por el autor, destacan por tratarse de estructuras resistentes. Debido a su geometría son capaces de transmitir casi únicamente esfuerzos a compresión, lo que le permite desarrollar cáscaras o envoltentes muy finas de hormigón, de un espesor constante, normalmente de cuatro centímetros.



Imagen 11. Restaurante del Parque Oceanogràfic de Valencia, 1997.



Imagen 12. Vista exterior del restaurante.

5. ANDRÉS MARTÍN, F. R. / FADÓN SALAZAR, F. "Análisis gráfico de obras emblemáticas de Félix Candela". <<http://www.egrafica.unizar.es/ingegrat/pdf/Comunicacion17102.pdf>>

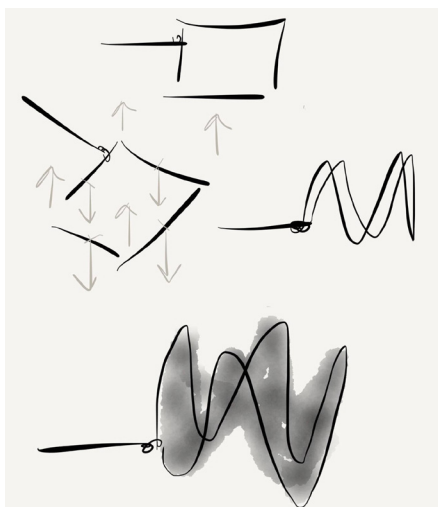


Imagen 13. Esquemas e imágenes propios de autogeneración de formas.



Imagen 14. Imagen propia. Autogeneración de formas con bordes rígidos doblados.

Dado un alambre o borde rígido, creamos un marco plano de forma circular, en cuyo interior se creará una superficie de jabón que tenderá a ser plana.

En este caso, si partiendo de un marco circular, doblamos a nuestra voluntad el alambre, creamos una nueva curva en su interior, es decir, creamos un loop con el alambre que constituirá el nuevo contorno de la estructura.

Si sumergimos este marco en una solución jabonosa, y lo sacamos, se crea una superficie mínima de contacto entre los dos contornos, el interior del loop y el exterior del círculo.

Abriendo y cerrando el círculo interior se generan diferentes formas de superficies, como se puede apreciar en las imágenes.

Se obtiene, por lo tanto, una superficie mínima igual en concepto, a una superficie de Enneper, una superficie de auto-intersección. Podemos comparar esta forma generada con la geometría que compone el Museo Nacional de Qatar, obra del arquitecto francés Jean Noveau, aún en construcción ⁶.

En este proyecto, se pretende poner en valor la cultura de Qatar, la tradición, además de contar con galerías de exposiciones permanentes, auditorio, restaurantes, parques, y demás funciones públicas.



Imagen 15. Museo Nacional de Qatar, Jean Nouvel, en construcción



Imagen 16. Exterior Museo.

6. Ateliers Jean Nouvel. "National Museum du Qatar". <<http://www.jeannouvel.com/en/projects/musee-national-du-qatar/>>

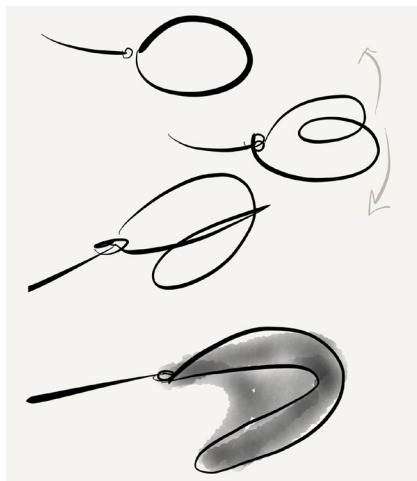
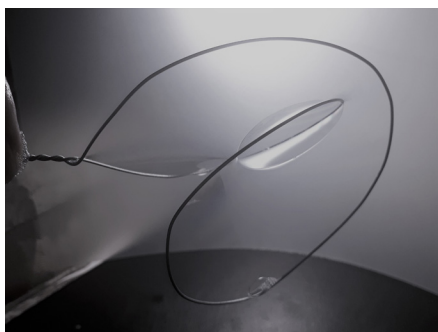


Imagen 17. Esquemas e imágenes propias de autogeneración de formas.



Imagen 18. Imagen propia. Autogeneración de formas con bordes rígidos de doble curvatura

Al tomar un trozo de alambre o borde rígido, y dándole formas orgánicas y arbitrarias, conseguimos crear un contorno cerrado.

Al sumergir el marco en una solución jabonosa, y lo sacamos, se crea una superficie mínima dentro del contorno.

Cabe destacar que las posibilidades que nos brindan los experimentos con películas de jabón, dentro del apartado de bordes rígidos, nos permite innovar a la hora de crear los contornos cerrados, aunque las superficies tienden siempre a repetirse. No sólo podemos partir de formas geométricas puras parametrizables, sino que cualquier forma orgánica, ya sea sinuosa, angulosa, o incluso retorcida, puede contener en su interior una superficie mínima, siempre y cuando se cumpla la condición de ser un contorno o borde cerrado.

En nuestro caso, al crear un borde orgánico, sin forma lógica aparente, se obtiene una superficie mínima igual en concepto, a la membrana estructural que constituye la Casa Flor, obra del grupo de arquitectos SANAA ⁷.

En esta vivienda, el cerramiento transparente y sinuoso, o membrana como lo definen los autores, es el mismo que gracias a su geometría curvilínea, es capaz de sostener las cargas verticales en cubierta.



Imagen 19. Casa Flor, SANAA, 2006



Imagen 20. Planos Casa Flor.

7. PLATAFORMA ARQUITECTURA, Agos 2007. "ACTAR: Casas SANAA (Kazuyo Sejima + Ryue Nishizawa)". <<https://www.plataformaarquitectura.cl/ci/02-2288/actar-casas-sanaa-kazuyo-sejima-ryue-nishizawa>>

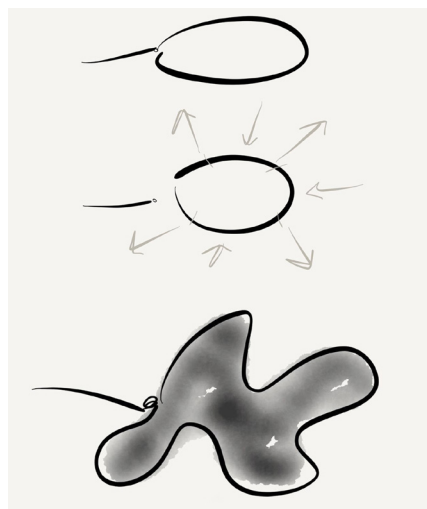
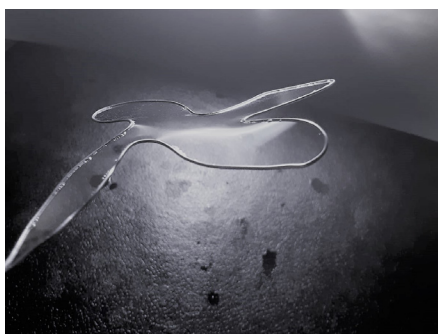
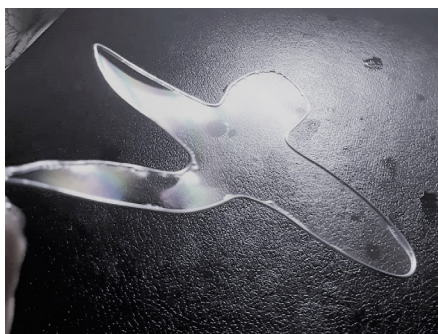


Imagen 21. Esquemas e imágenes propios de autogeneración de formas.



Imagen 22. Imagen propia. Autogeneración de formas con bordes rígidos curvados

Dado un alambre o borde rígido, creamos un marco plano de forma triangular, en cuyo interior se creará una superficie de jabón que tenderá a ser plana, independientemente del número de vértices que le queramos dar a la figura. Tomamos el lado base del triángulo, y lo doblamos de forma ascendente, creando un cuarto vértice en la figura.

Al sumergir el marco en una solución jabonosa, y lo sacamos, se crea una superficie mínima dentro del contorno, correspondiente a un paraboloides hiperbólico.

Cabe destacar que las posibilidades que nos brindan los experimentos con películas de jabón, dentro del apartado de bordes rígidos, nos permite innovar a la hora de crear los contornos cerrados, aunque las superficies tienden siempre a repetirse.

Se obtiene, por lo tanto, una superficie mínima igual en concepto, al paraboloides hiperbólico que constituye cada uno de los brazos de la Iglesia de Santa Mónica, obra del arquitecto español Félix Candela, y construida en San Lorenzo de Xochimancas, México D.F. en 1960. En este caso, sólo se ha reproducido uno de los brazos de la cubierta, pero si se repitiese el módulo tres veces más de forma radial, se obtendría la estructura completa ⁸.

La cubierta de hormigón diseñada en forma de paraguas, contiene cuatro paraboloides hiperbólicos sostenidos únicamente por un pilar central, liberando así el interior de la iglesia.

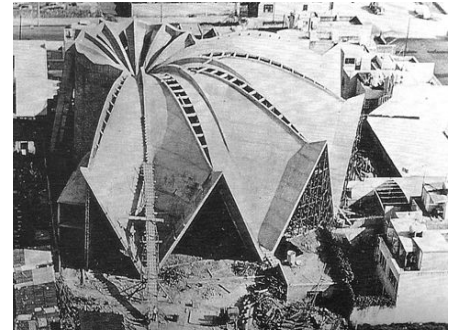


Imagen 23. Iglesia de Santa Mónica en San Lorenzo de Xochimancas, México D.F. 1960



Imagen 24. Paraguas interior.

8. PLATAFORMA ARQUITECTURA, Agos 2012. "Recorrido por las obras de Félix Candela".
<<https://www.plataformaarquitectura.cl/ci/02-177607/recorrido-por-las-obras-de-felix-candela>>

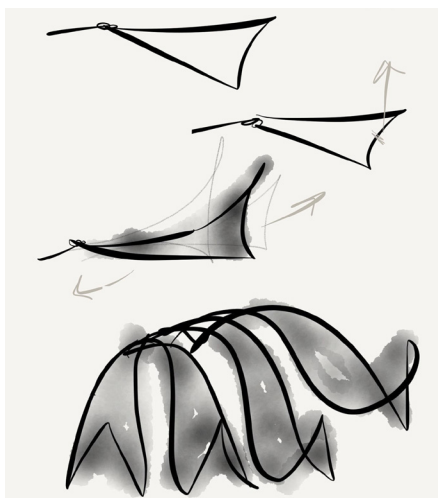
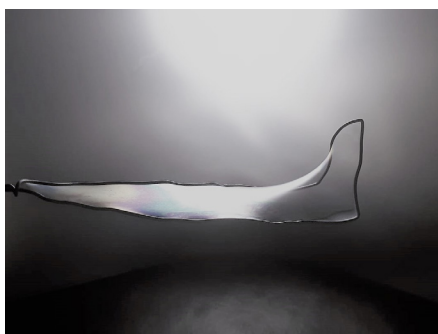


Imagen 25. Esquemas e imágenes propias de autogeneración de formas.

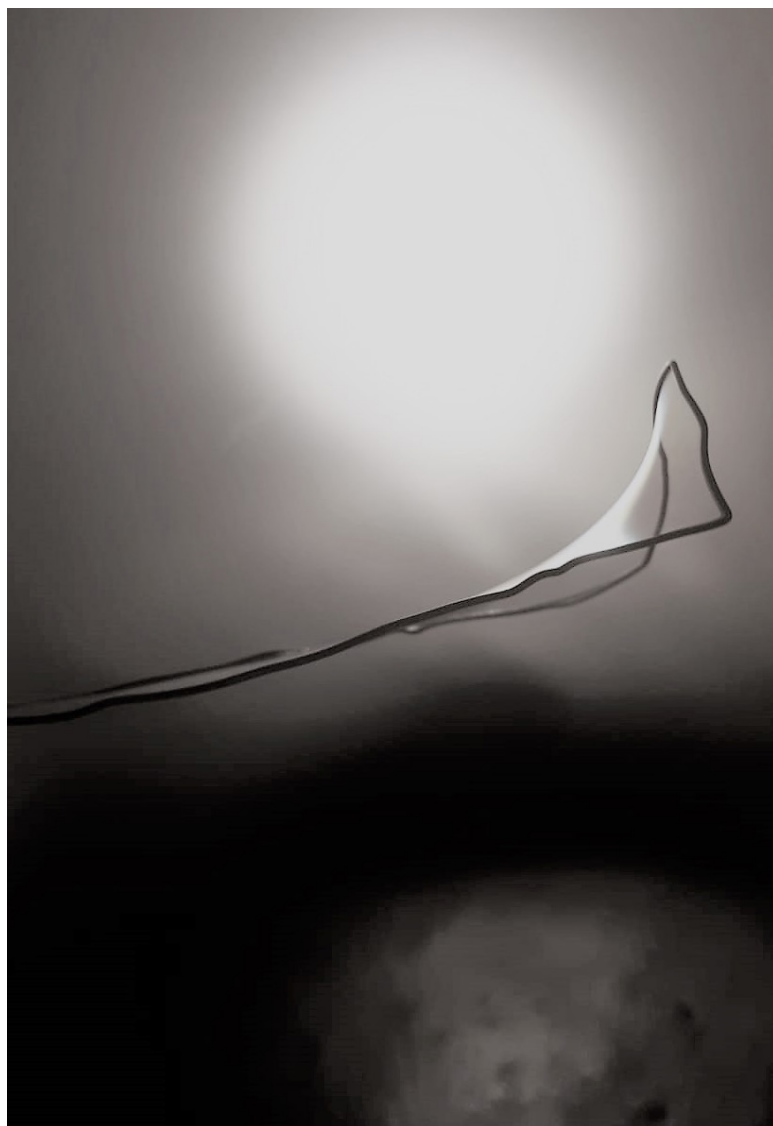


Imagen 26. Imagen propia. Autogeneración de formas con bordes rígidos. Paraboloides hiperbólico.

Al tomar un trozo de alambre o borde rígido, y enrollándolo sobre sí mismo repetidas veces, conseguimos crear un contorno cerrado, un helicoide.

Al sumergir el marco en una solución jabonosa, y lo sacamos, se crea una superficie mínima dentro del contorno.

Cabe destacar que las posibilidades que nos brindan los experimentos con películas de jabón, dentro del apartado de bordes rígidos, nos proporcionan infinitas posibilidades de generación de formas. Dependiendo de la distancia entre las espirales, se producirán diferentes superficies mínimas.

En nuestro caso, se obtiene una superficie mínima helicoidal, igual en concepto a la estructura que constituye la escalera del vestíbulo subterráneo del Museo Louvre en París, obra del arquitecto Ming Pei ⁹.

En esta obra, se proyectó un vestíbulo subterráneo, que diese acceso a las diferentes salas, cubierto en su totalidad por una gran pirámide de vidrio. Es la escalera helicoidal, la que salva el desnivel desde la cota de calle.



Imagen 27. Escalera interior del Museo Louvre, París,



Imagen 28. Escalera en planta.

9. PLANO Y ESCALA, Sept 2014. "Escaleras al cielo". <<https://www.planoyescala.com/2014/09/escalera-al-cielo-top-escaleras.html>>

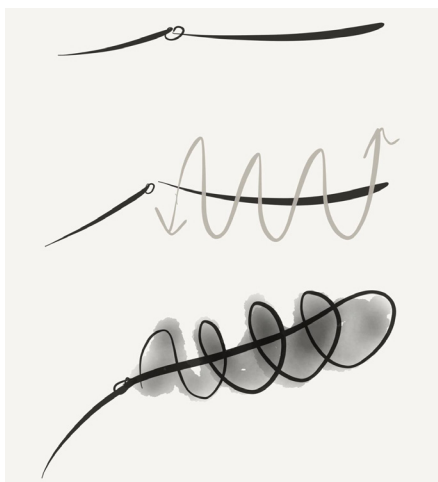
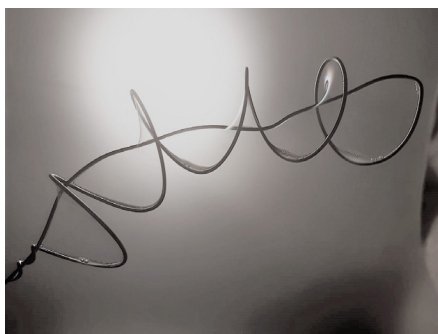


Imagen 29. Esquemas e imágenes propios de autogeneración de formas.

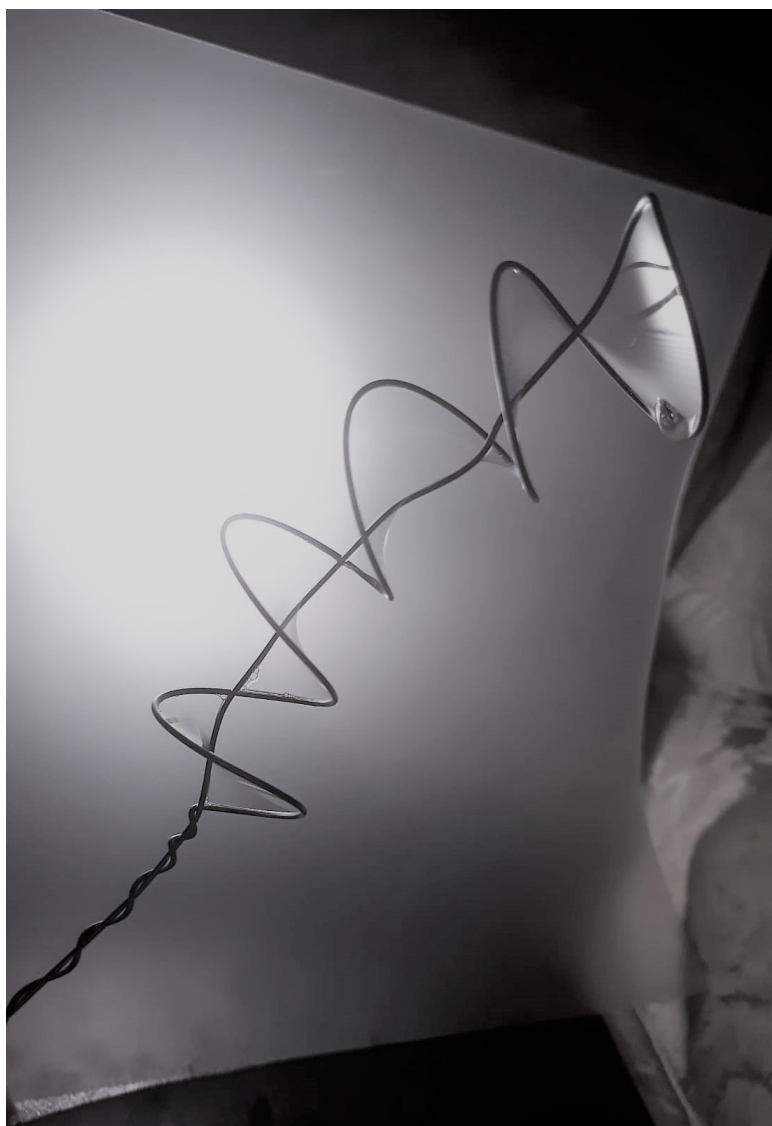


Imagen 30. Imagen propia. Autogeneración de formas con bordes rígidos curvados. Helicoide.

| Rehabilitación del auditorio al aire libre en el parque Paraíso

Dado un alambre o borde rígido, creamos un marco plano de forma circular, en cuyo interior se creará una superficie de jabón que tenderá a ser plana.

En este caso, si partiendo de un marco circular, doblamos a nuestra voluntad el alambre, creamos una curva en forma de hoja, el nuevo contorno de la estructura.

Si sumergimos la figura modificada en una solución jabonosa, observamos que la superficie generada en su interior tiende a curvarse hasta cubrir todo el espacio acotado.

Se obtiene, por lo tanto, una superficie mínima de paraboloides hiperbólicos, igual a la superficie ondulada que configura las diferentes cubiertas de la rehabilitación del auditorio al aire libre del parque Paraíso en Madrid. Cabe destacar la existencia de cinco paraboloides de diferentes tamaños, ocupando cada uno una función específica ¹⁰.

En este proyecto, se pretende recuperar el uso cultural del antiguo auditorio del parque, además de introducir en el programa diferentes salas de ensayos y de espacios dinámicos complementarios de usos que sirvan de equipamientos.

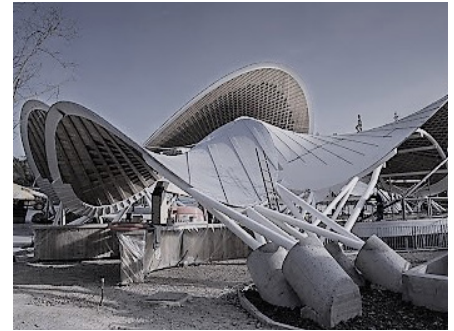


Imagen 31. Rehabilitación del auditorio al aire libre del parque Paraíso, Madrid.

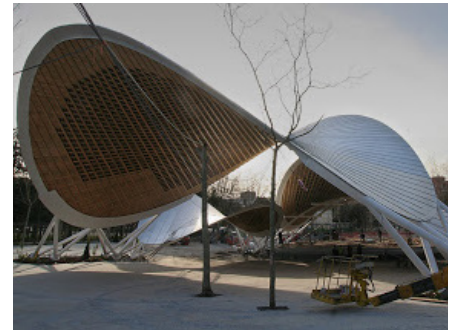


Imagen 32. Detalle del paraboloides hiperbólico.

10. URBAN SCRAPER (2007). "Rehabilitación del auditorio al aire libre en el parque Paraíso". <<http://www.urbanscraper.com/2007/03/rehabilitacion-del-auditorio-al-aire.html>>

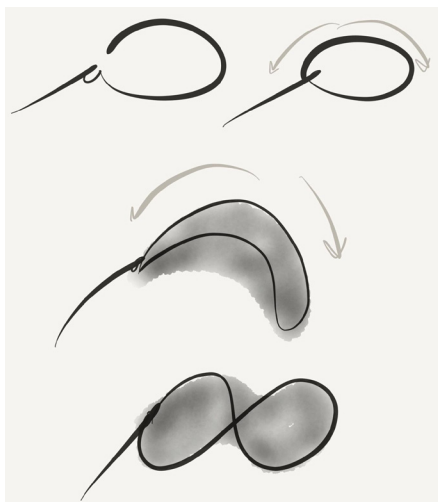
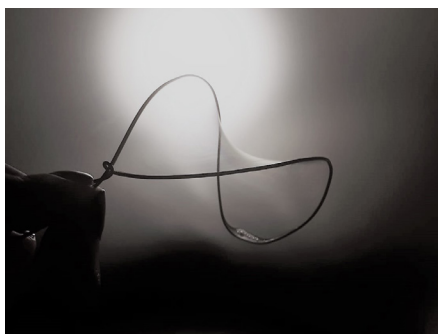


Imagen 33. Esquemas e imágenes propias de autogeneración de formas.



Imagen 34. Imagen propia. Autogeneración de formas con bordes rígidos curvados. Paraboloides hiperbólicos.

3.2. Bordes flexibles

Dentro de este apartado, analizaremos aquellas superficies mínimas que se generen dentro de un marco o contorno cerrado con límites flexibles, es decir, todas las delimitadas por hilos de algodón.

Debemos destacar que los hilos también pueden usarse como un marco, que nos permita producir las láminas de jabón que constituyen las superficies mínimas.

El comportamiento de estos bordes flexibles se aleja del que puedan presentar los bordes rígidos, la presión que experimenta el jabón que encierran es mayor a la que pueda soportar el propio hilo, y por lo tanto, esta presión de tracción que se produce en todas direcciones en la propia superficie jabonosa, produce que los límites adopten una forma de curva.

Para el desarrollo de este tipo de formas, necesitaremos la ayuda auxiliar de una serie de apoyos o puntos fijos, que nos permitan atar y delimitar los contornos con los hilos de algodón. Dado un marco flexible, por ejemplo entre dos puntos fijos, los límites tenderán a curvarse hasta alcanzar formas cóncavas.

En el caso de colocar más de tres puntos fijos, al no encontrarse éstos en un mismo plano, es decir, al encontrarse alabeados, se producirán al sumergirse en una solución jabonosa, superficies mínimas curvadas que tenderán a alcanzar la forma de una silla de montar, es decir, la forma de un paraboloides, al encontrarse limitadas por un contorno.

Gracias a la experimentación que se ha realizado para la elaboración de ese trabajo, hemos apreciado que debido a la ejecución de este tipo de experimentos, los modelos producidos pueden ser fácilmente modificados, aunque nos permiten generar un gran número de posibilidades diferentes.

| Pabellón de música para la Exposición Federal de Kassel

Al tomar dos trozos de hilo o borde flexible, y atarlos a cuatro puntos de apoyos fijos situados en diferentes planos, producimos un contorno cerrado.

Si sumergimos este marco en una solución jabonosa, y los sacamos, observaremos como la tensión superficial que se produce en la película de jabón producirá una acción sobre el propio hilo que tiende a curvarse, es entonces cuando se crea una superficie mínima dentro del marco cerrado.

Se obtiene, por lo tanto, una superficie mínima correspondiente a un paraboloides hiperbólico, una superficie doblemente reglada, creada a partir de una parábola con la concavidad hacia abajo que se desliza a lo largo de la otra con la concavidad hacia arriba.

Esta superficie es la que se encuentra construida por medio de membranas para el pabellón de música en los jardines de la Exposición Federal de Kassel en Colonia, Alemania, obra del arquitecto Frei Otto, construido en el año 1955, como una solución de toldo para el jardín, que cubriría el espacio destinado a la orquesta ¹¹.

Con esta obra, el autor muestra una arquitectura ligera, que no ha de tener una gran carga constructiva, sino que puede expresarse a través de una serie de formas simples e innovadoras que se generan libres.



Imagen 35. Pabellón de música para la Exposición Federal de Kassel, Colonia.

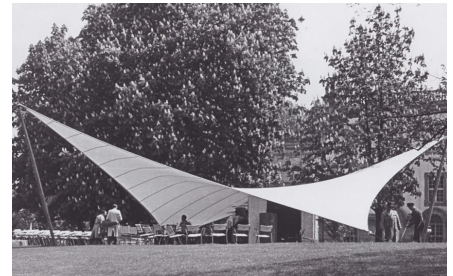


Imagen 36. Exterior Pabellón de música.

11. MANDU'A (2015). "80 años de Frei Otto". <<http://www.mandua.com.py/primer-pritzker-postumo-es-para-frei-otto-n108>>

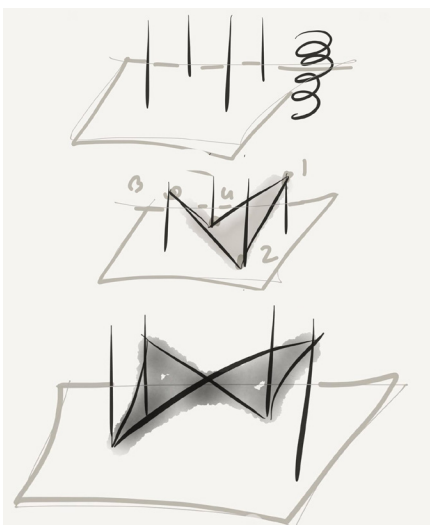
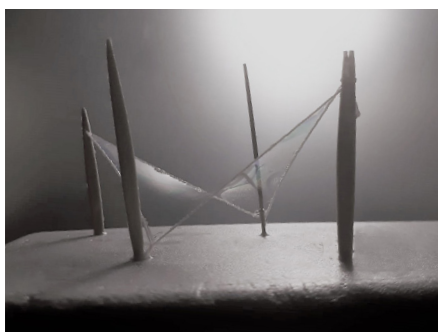
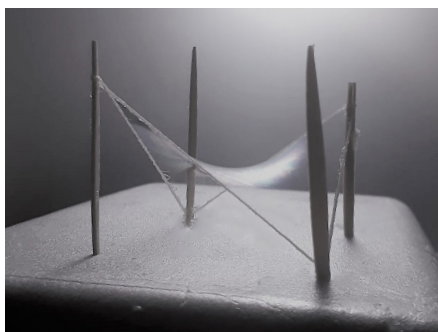


Imagen 37. Esquemas e imágenes propios de autogeneración de formas.

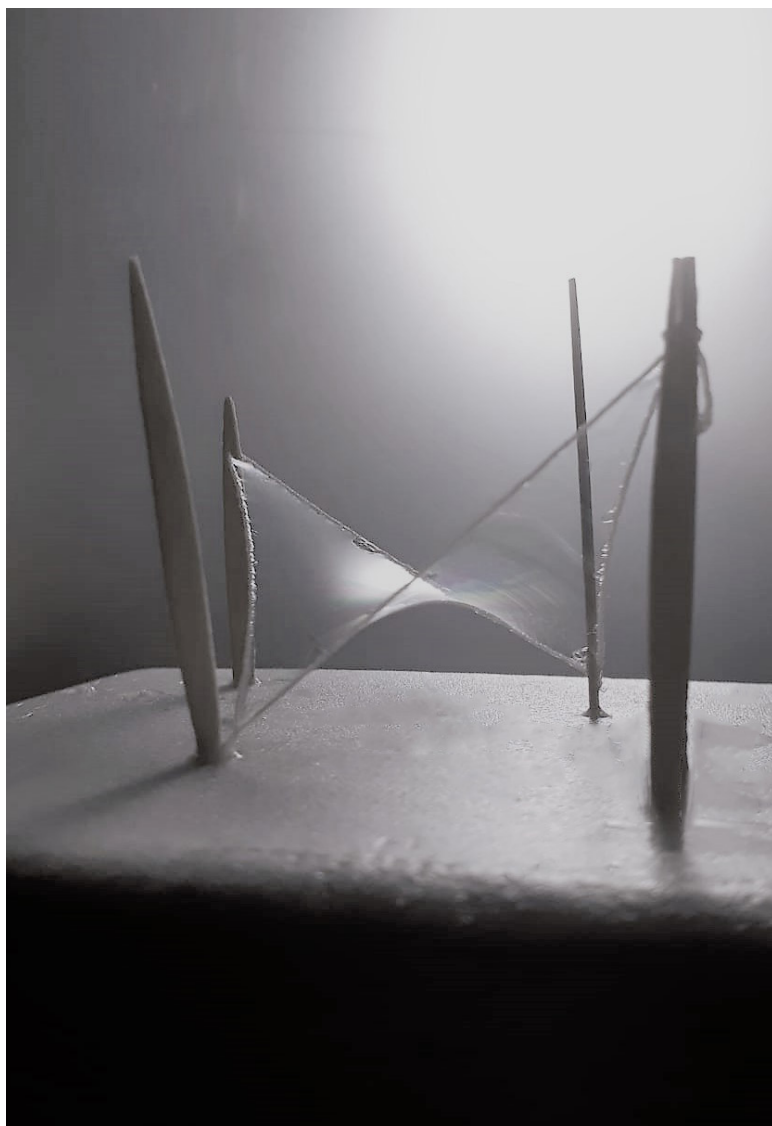


Imagen 38. Imagen propia. Autogeneración de formas con bordes flexibles con cuatro apoyos.

Al tomar los trozos de hilo o borde flexible, y atarlos a cinco puntos de apoyo fijos, dos de ellos situados en diferentes planos, producimos un contorno cerrado.

Si sumergimos este marco en una solución jabonosa, y los sacamos, observaremos como la tensión superficial que se produce en la película de jabón producirá una acción sobre el propio hilo que tiende a curvarse, es entonces cuando se crea una superficie mínima dentro del marco cerrado. Si a continuación la estiramos hasta colocar correctamente los puntos de apoyo, observamos como la superficie se tensa.

Realizando ésto, lo que conseguiremos es un marco que servirá como módulo de la estructura. Obtenemos una forma correspondiente a la una superficie mínima igual, a la que constituye la cubierta del Uno Chiyo Memorial Museum en Yamaguchi, Japón, obra del arquitecto Shigeru Ban en colaboración con Frei Otto ¹².

Se trata de una obra que no llegó a ser construida, proyectada en un emplazamiento pintoresco japonés, cuyo único requisito era el uso de las tejas de madera en la realización de la cubierta.

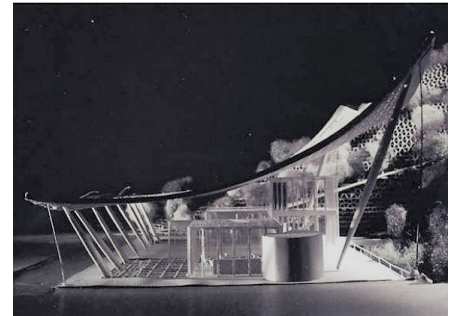


Imagen 39. Uno Chiyo Memorial Museum, Yamaguchi, Japón.



Imagen 40. Exterior Museo.

12. BOLETÍN DE INFORMACIÓN TÉCNICA N° 237. "80 años de Frei Otto". <http://cmm.cenart.gob.mx/delanda/textos/frei_otto.pdf>

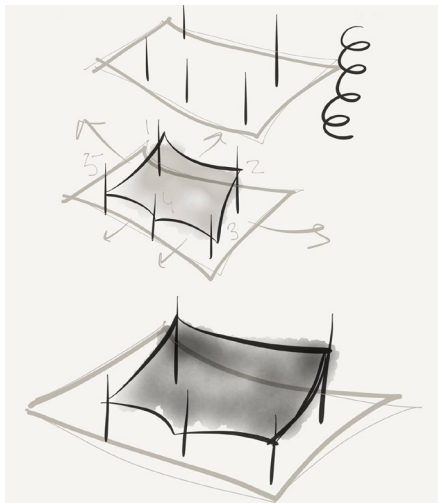
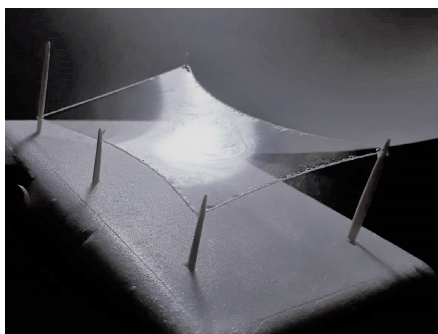
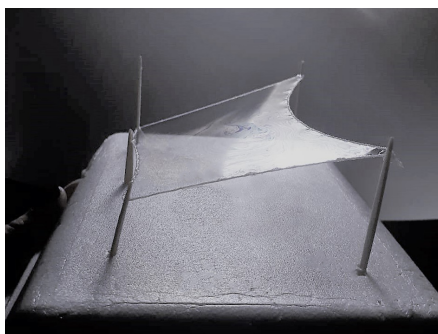


Imagen 41. Esquemas e imágenes propios de autogeneración de formas.



Imagen 42. Imagen propia. Autogeneración de formas con bordes flexibles.

| Pabellón de baile para la Exposición Federal de Kassel

Al tomar los trozos de hilo o borde flexible, y atarlos a un punto de apoyo fijo, situado en diferentes planos, producimos un contorno cerrado.

Si sumergimos este marco en una solución jabonosa, y los sacamos, observaremos como la tensión superficial que se produce en la película de jabón producirá una acción sobre el propio hilo que tiende a curvarse, es entonces cuando se crea una superficie mínima dentro del marco cerrado.

Realizando ésto, lo que conseguiremos es un marco, que servirá como módulo de la estructura. Si repetiésemos éste seis veces de forma radial, obtendremos la estructura correspondiente a la una superficie mínima igual, a la que constituye el pabellón de música para la Exposición Federal de Kassel en Colonia, Alemania, obra del arquitecto Frei Otto, construido en el año 1957, como solución de toldo para el jardín, que cubriría el espacio de la orquesta ¹³.

Se trata de una de las cuatro estructuras de membranas realizadas con motivo de la exposición en los jardines de Kassel que aún se conservan.

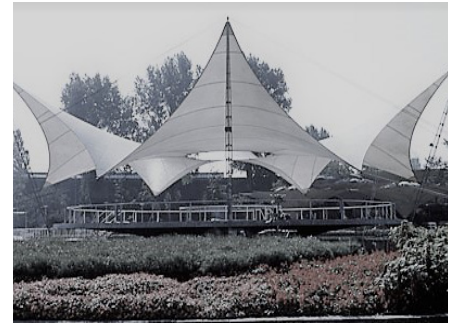


Imagen 43. Pabellón de baile para la Exposición Federal de Kassel, 1957.



Imagen 44. Exterior Pabellón de baile, Colonia.

13. MANDU'A (2015). "80 años de Frei Otto". <<http://www.mandua.com.py/primer-pritzker-postumo-es-para-frei-otto-n108>>

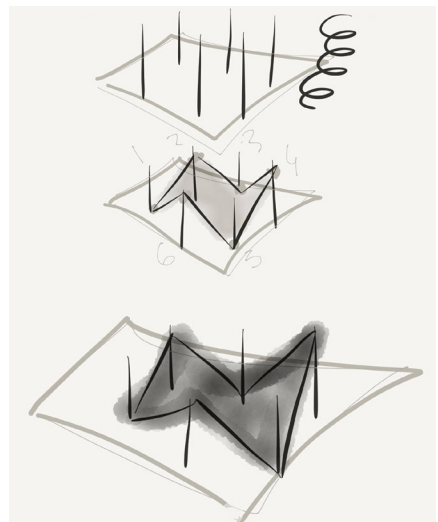
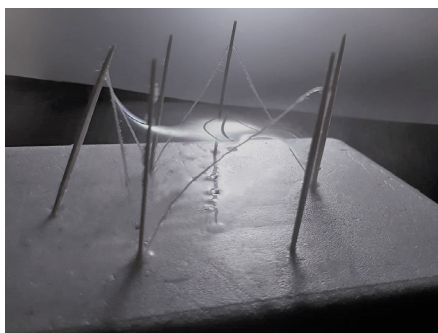


Imagen 45. Esquemas e imágenes propios de autogeneración de formas.

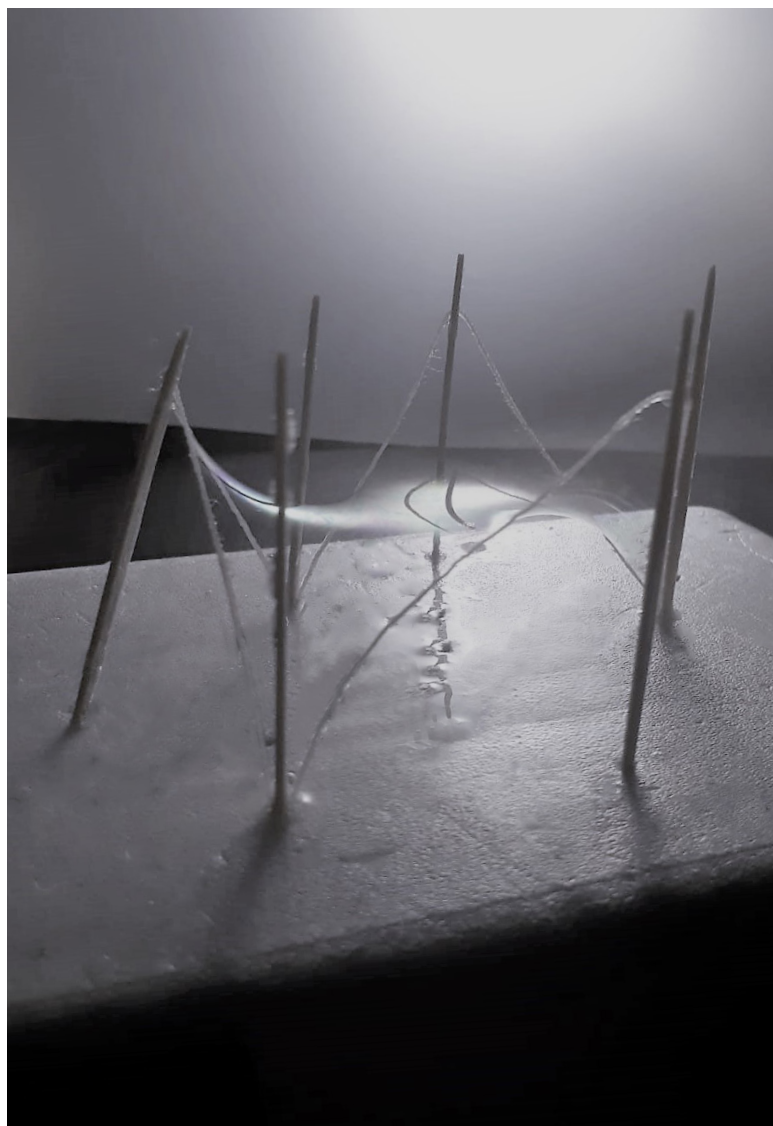


Imagen 46. Imagen propia. Autogeneración de formas con bordes flexibles, con seis apoyos.

3.4. Combinaciones

Dentro de las superficies mínimas, en los experimentos se emplean las combinaciones, para el desarrollo de estructuras más complejas, como por ejemplo el caso de la generación de formas para las tiendas de campaña y las estructuras de cables, es usual el combinar los diferentes tipos de bordes o contornos.

Un ejemplo práctico de este tipo de generación de formas se da en las cubiertas del Estadio Olímpico de Múnich¹ del año 1972, dónde se representan las adiciones de las diferentes secciones de bordes flexibles y rígidos, usando como modelo los experimentos con películas de jabón.

Mediante ésta combinación de bordes rígidos con bordes flexibles, hemos recreado, a través de los experimentos con las películas de jabón, diferentes obras arquitectónicas ya construidas.



Tomando un alambre, y dándole forma rectangular, curvando ligeramente la figura por los vértices enfrentados, obtenemos un plano cerrado, que constituirá el borde rígido de la figura.

Cogemos un hilo de algodón, el borde flexible, y lo atamos a dos de los vértices opuestos de la figura de alambre, generando la diagonal de la figura.

Este hilo, al sumergir el contorno en la solución jabonosa, descansará sobre la superficie de jabón que se forma, sin ningún tipo de tensión sobre él. Sin embargo, si por medio de una herramienta auxiliar, como lo es un clip, podemos estirar ese hilo a nuestra voluntad, modificando la superficie inicial.

En nuestro caso, al estirar del borde flexible hacia arriba, creamos una superficie en forma de cresta, que genera a su vez una variación en la superficie del alambre, provocando una curvatura ascendente en la diagonal del rectángulo inicial, al tirar de ella.

Obtenemos así, una superficie mínima que asemeja la forma del la superficie que configura el arco de entrada del pabellón para la Exposición Federal de Jardinería de Kassel del año 1957 en Colonia, Alemania, diseñada por Frei Otto ¹⁴.

En este caso, se trata de una carpa alabeada tetrapuntual, es decir, que sus vértices no se encuentran en el mismo plano, lo cual genera esa ondulación en su centro, al igual que nuestra superficie.



Imagen 47. Arco de entrada del pabellón para la Exposición Federal de Jardinería de Kassel, 1957

14. BOLETÍN DE INFORMACIÓN TÉCNICA N° 237. "80 años de Frei Otto". <http://cmm.cenart.gob.mx/delanda/textos/frei_otto.pdf>

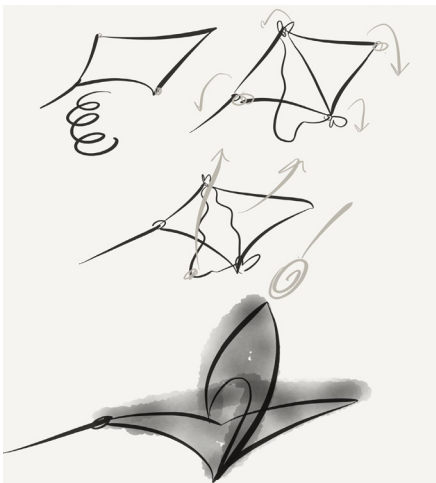


Imagen 48. Esquemas e imágenes propias de autogeneración de formas.

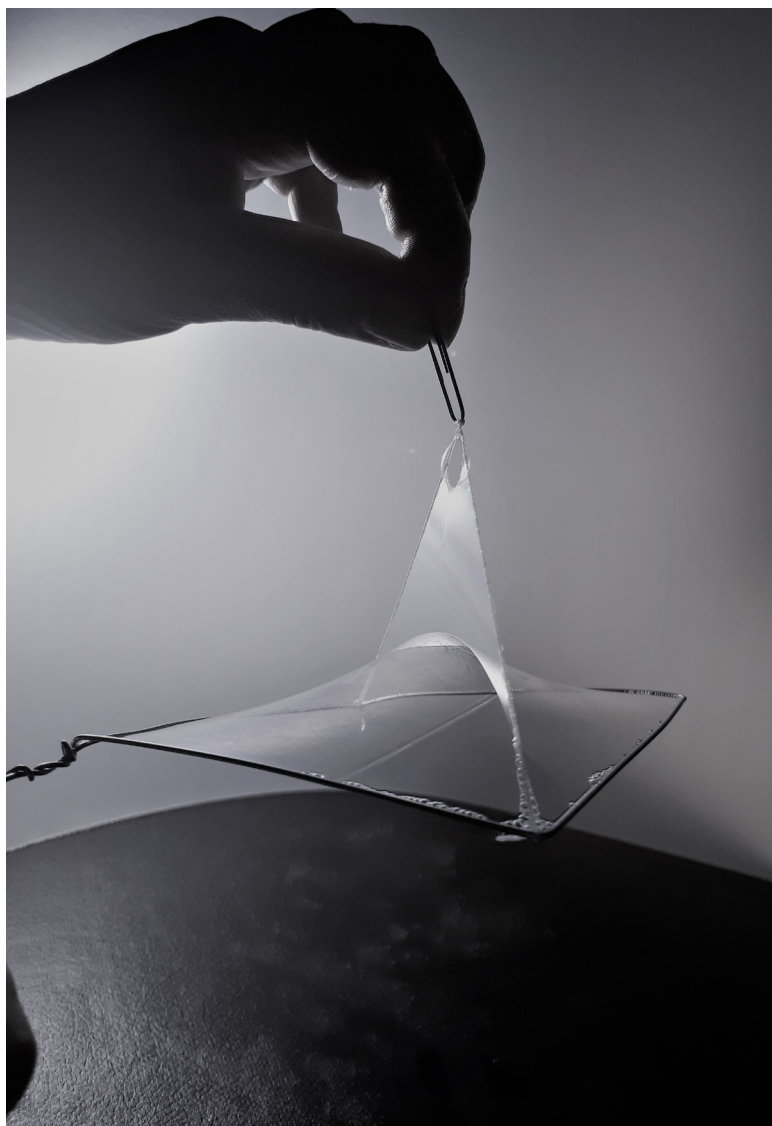


Imagen 49. Imagen propia. Combinación de rectángulo de alambre más hilo (Borde rígido / Borde flexible)

Doblamos un trozo de alambre, el borde rígido, y le damos forma hasta obtener un semicírculo, dejando el contorno abierto, tomamos los extremos, a los cuales atamos un hilo de algodón, que será borde flexible, cerrando así el marco de la figura.

Sumergiendo ésta, en una solución jabonosa, observamos como el hilo es arrastrado hacia el borde rígido, debido a la tensión superficial que se produce por la película de jabón. Este hilo, descansará sobre la superficie que se forma, sin ningún tipo de tensión sobre él. Sin embargo, si por medio de una herramienta auxiliar, como lo es un clip, podemos estirar ese hilo a nuestra voluntad, modificando la superficie inicial.

Es entonces, al estirar del borde flexible hacia abajo, cuando creamos una superficie en forma de cascada descendente, a la vez que se genera una curvatura en el semicírculo superior.

Se obtiene una superficie mínima que recuerda a las cascadas de luz que se vierten sobre las cáscaras de hormigón que conforman la estructura de la Estación Central de Stuttgart en Alemania, obra del arquitecto Christoph Ingenhoven ¹⁵.

Este proyecto cuyo objetivo principal es la modernización de la estación de tren de la ciudad, consigue mediante su diseño de superficies mínimas, ser capaz de alcanzar el ahorro energético mediante la gestión de los recursos y la tecnología, además de entrelazar la creación de espacios verdes públicos con las líneas de alta velocidad de los trenes.

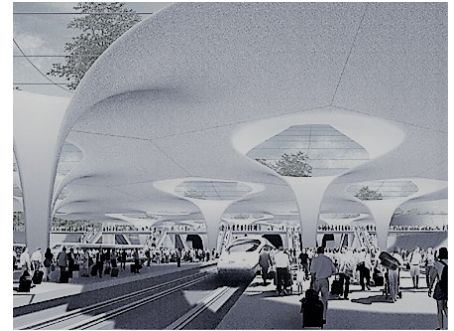


Imagen 50. *Diseño de la nueva Estación Central de Stuttgart, Alemania 2006*

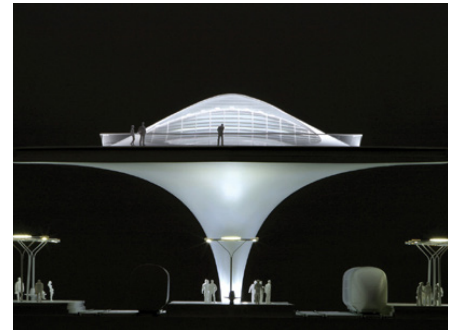


Imagen 51. *Maqueta del proyecto, Estación subterránea*

15. CONSTRUIBLE, Dic 10, 2006. "Estación Central de Stuttgart". <<https://www.construible.es/2006/12/10/estacion-central-de-stuttgart>>

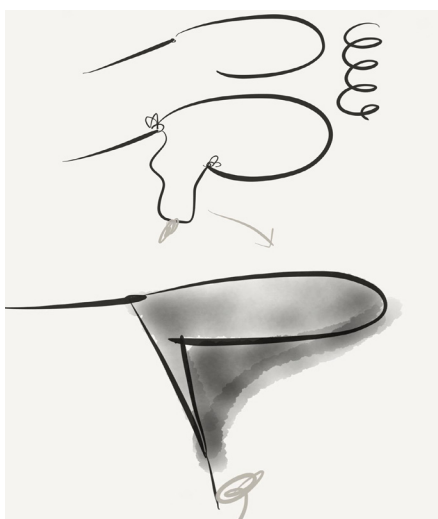
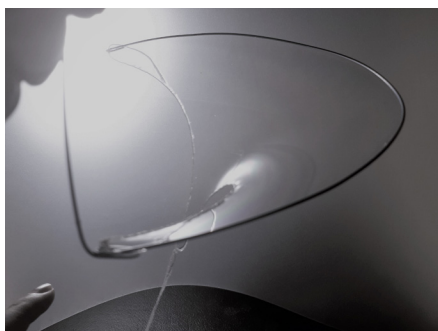


Imagen 52. Esquemas e imágenes propios de autogeneración de formas.



Imagen 53. Imagen propia. Combinación de semi círculo más hilo (Borde rígido / Borde flexible)

3.5. Dos marcos

En este apartado, analizaremos aquellas superficies mínimas que se generen dentro de dos marcos o contornos cerrados dentro tanto de los límites rígidos como de los flexibles, es decir, todas las delimitadas por varias formas.

Dado dos marcos de cualquier forma posible, se crea un conjunto de líneas o formas, que al ser sumergidas en una solución jabonosa, crean dos superficies continuas capaces de ser tensadas, y que se combinan entre ellas. Por lo tanto obtendremos una sola superficie que se genera por la interacción de dos marcos, ya sean iguales o diferentes.

Debemos destacar que la forma más recurrente en este tipo de experimentos es la catenoide, la formada entre dos marcos circulares rígidos de mismo tamaño.

Si realizamos el experimento mediante la combinación de un borde rígido y un borde flexible independientes, podemos estudiar el comportamiento de un marco rígido circular y n puntos fijos de apoyo dados como límites flexibles.

También se pueden formar superficies mínimas entre los bordes flexibles o no rígidos y la propia superficie jabonosa, simplemente tirando de los hilos de algodón a través del agua con jabón.

Gracias a la experimentación que se ha realizado para la elaboración de ese trabajo, hemos apreciado que debido a la ejecución de este tipo de experimentos, los modelos producidos pueden ser fácilmente modificados, aunque nos permiten generar un gran número de posibilidades diferentes.



Al tomar dos trozos de alambre o borde rígido de dos tamaños diferentes, uno más pequeño que el otro, dándoles formas circulares a los dos trozos, se crean dos contornos cerrados.

Si sumergimos ambos marcos en una solución jabonosa, y los sacamos, manteniéndolos muy cercanos y paralelos el uno del otro, se crea una superficie mínima de contacto entre los dos contornos. Si comenzamos a alejar los aros, manteniéndolos siempre paralelos, la superficie tiende a estrecharse por el centro, creando una curvatura en el cuello de unión entre ambos arcos, y formando una pequeña superficie en la zona de contacto.

Rompiendo esta película se obtiene una catenoide, una superficie de revolución generada por la rotación de una hipérbola alrededor de uno de sus ejes de simetría. Si no se rompiese esta película que se forma en el interior, aparece otro tipo de superficie, que se asemeja a la forma de un diábolo.

Se obtiene, por lo tanto, una superficie mínima igual en concepto, al hiperboloide revolucionado de 40 metros de altura que constituye la Catedral de Brasilia, obra del arquitecto brasileño Óscar Niemeyer construida en el año 1970 ¹⁶.

La base de este edificio es circular, de unos 60 metros de diámetro, contando con el apoyo de 16 columnas curvas que conforman a su vez la fachada principal de la catedral.



Imagen 54. Exterior Catedral de Brasilia, 1970



Imagen 55. Proceso constructivo de la Catedral

16. PLATAFORMA ARQUITECTURA, Ener 25, 2011. "Clásicos de Arquitectura: Catedral de Brasilia / Oscar Niemeyer". <<https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/02-69439/catedral-de-brasilia-oscar-niemeyer> >



Imagen 56. Esquemas e imágenes propias de autogeneración de formas.



Imagen 57. Imagen propia. Autogeneración de formas con dos marcos. Catenoides.

Al tomar dos trozos de alambre o borde rígido, del mismo tamaño, formamos un triángulo que deformamos hasta redondear su vértice superior, creando así dos contornos cerrados.

Si sumergimos ambos marcos en una solución jabonosa, y los sacamos, manteniéndolos muy cercanos y paralelos el uno del otro, se crea una superficie mínima de contacto entre los dos contornos. Si comenzamos a alejar los marcos, manteniéndolos siempre paralelos, la superficie tiende a estrecharse por el centro, creando una curvatura en el cuello de unión entre ambos, y formando una pequeña superficie en la zona de contacto.

Rompiendo esta película se obtiene un paraboloides hiperbólico, una superficie doblemente reglada, creada a partir de una parábola con la concavidad hacia abajo que se desliza a lo largo de la otra con la concavidad hacia arriba.

Se obtiene, por lo tanto, una superficie mínima igual a la que constituye la forma del Pabellón de los Rayos Cósmicos, obra del arquitecto español Félix Candela construida en el año 1951 en Ciudad de México ¹⁷.

Para este proyecto, se propuso emplear una cubierta de doble curvatura, es decir, alabeada, justificando que dotaba a la construcción de la resistencia, rigidez y la estabilidad necesaria.



Imagen 58. Pabellón de los Rayos Cósmicos, Ciudad de México 1951.



Imagen 59. Exterior del Pabellón de los Rayos Cósmicos.

17. PLATAFORMA ARQUITECTURA, Sept 27, 2011. "Clásicos de Arquitectura: Pabellón de Rayos Cósmicos/ Félix Candela" <<https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/02-110674/clasicos-de-arquitectura-pabellon-de-rayos-cosmicos-felix-candela>>

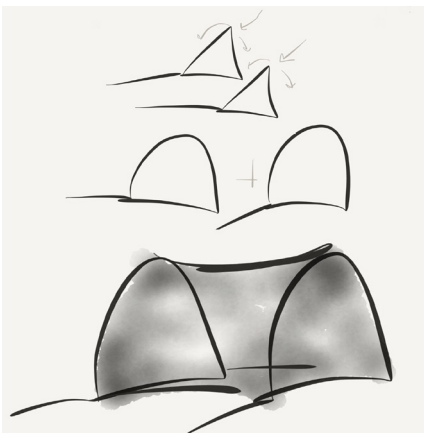
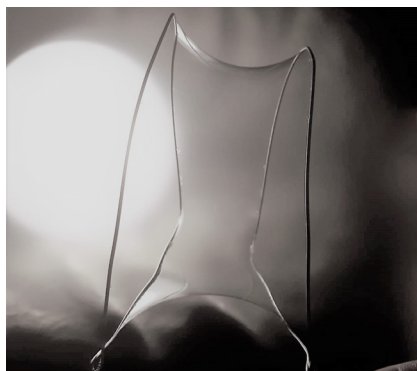


Imagen 60. Esquemas e imágenes propios de autogeneración de formas.

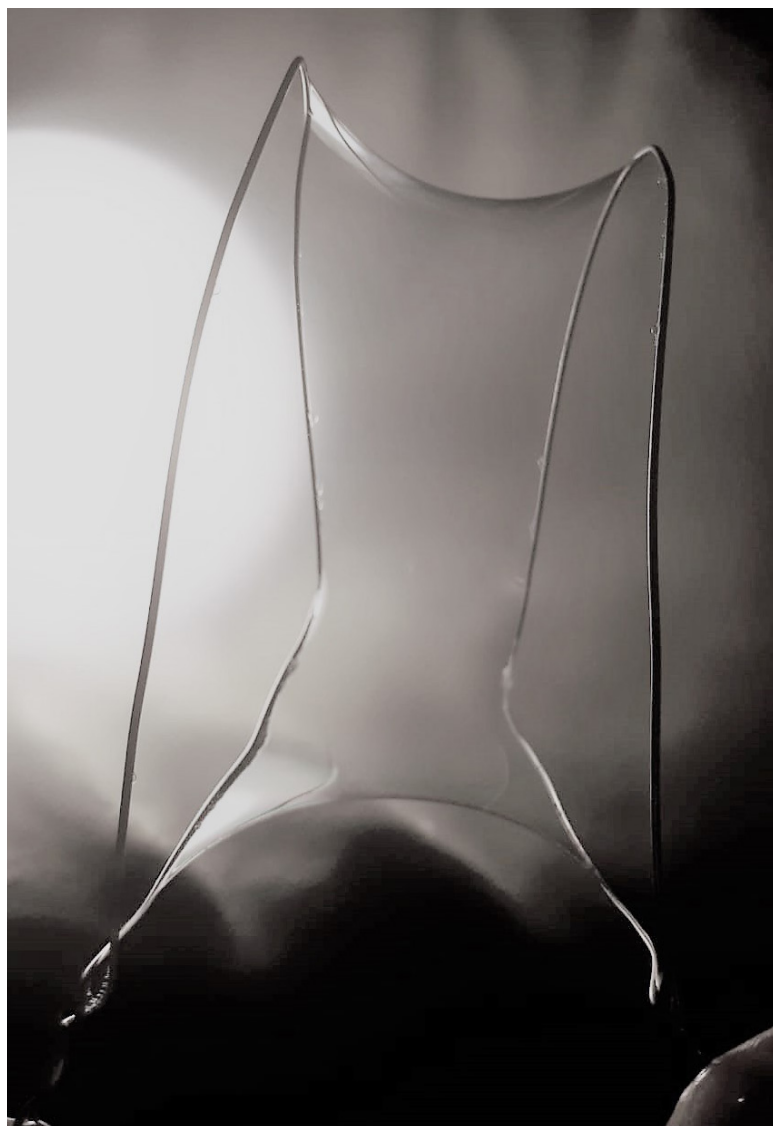


Imagen 61. Imagen propia. Autogeneración de formas con dos marcos. Paraboloide hiperbólico.

| Parroquia de San Antonio de las Huertas

Al tomar dos trozos de alambre o borde rígido de forma circular de distintos tamaños, uno más grande que el otro, y los doblamos hasta conseguir dos curvas semejantes a unos paraboloides hiperbólicos, generando dos contornos cerrados.

Si sumergimos ambos marcos en una solución jabonosa, y los sacamos, se crea una superficie mínima en cada uno de los contornos. Si comenzamos a acercar los marcos, manteniéndolos girados en uno respecto al otro, observamos como las dos superficies tienden a unirse, formando una nueva superficie en la zona de contacto entre ambas.

Al generarse una nueva superficie en la intersección, se crean también unas pequeñas superficies en los alambres situados por debajo de la superior. Rompiendo estas películas, la superficie superior se estabiliza, obteniéndose una intersección entre dos paraboloides hiperbólicos, una superficie doblemente reglada, creada a partir de una parábola con la concavidad hacia abajo que se desliza a lo largo de la otra con la concavidad hacia arriba.

Se obtiene, por lo tanto, una superficie mínima igual a la que constituye las bóvedas interiores de la Parroquia de San Antonio de las Huertas, obra del arquitecto español Félix Candela construida en el año 1956 en Ciudad de México ¹⁸.

Para este proyecto, se propuso emplear una cubierta de doble curvatura, es decir, alabeada, justificando que dotaba a la construcción de la resistencia, rigidez y la estabilidad necesaria.



Imagen 62. Interior de la Parroquia de San Antonio de las Huertas, 1956.

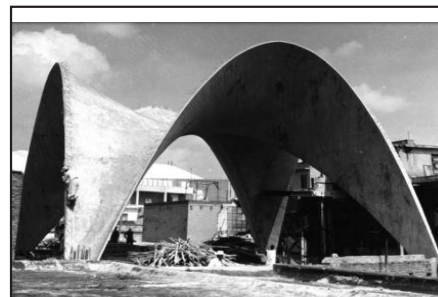


Imagen 63. Vista del primer cascarón de borde libre construido para la parroquia de San Antonio de las Huertas.

18. Oliva, J.G. | Ontiveros M. | Valdez E. (2011) "El espacio religioso en México y las superficies de paraboloides hiperbólicos de Félix Candela".

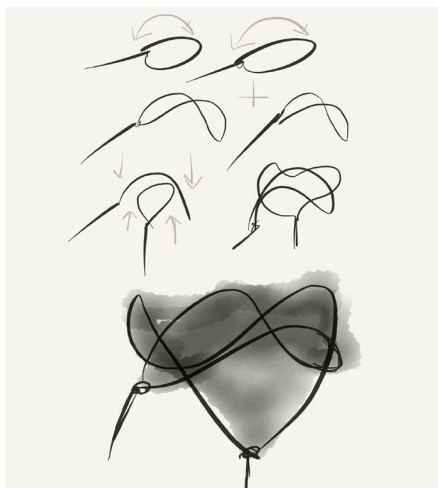
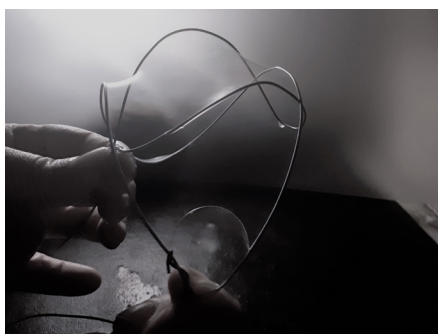
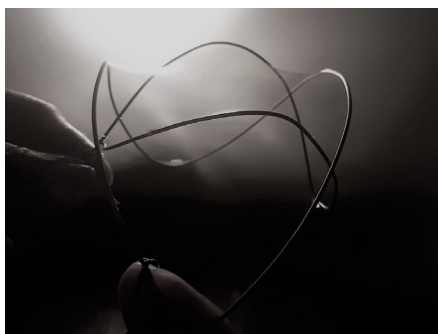


Imagen 64. Esquemas e imágenes propios de autogeneración de formas.



Imagen 65. Imagen propia. Autogeneración de formas con dos marcos. Doble intersección de paraboloides hiperbólicos.

Al tomar dos trozos de alambre o borde rígido, del mismo tamaño, formamos un triángulo que deformamos hasta redondear su vértice superior, creando así dos contornos cerrados.

Si sumergimos ambos marcos en una solución jabonosa, y los sacamos, se crea una superficie mínima en cada uno de los contornos. Si comenzamos a entrelazar los marcos, manteniéndolos enfrentados, observamos como las dos superficies tienden a unirse, formando una nueva superficie en la zona de contacto entre ambas.

Al entrelazar los dos arcos, se genera entre ellos una película, que conforme vamos separándolos, se va estirando, hasta curvarse totalmente en su centro.

Se obtiene, por lo tanto, una superficie mínima igual a dos arcos parabólicos que constituyen la cubierta del Dorton Arena, obra del arquitecto Matthew Nowicki, construida en el año 1952 en Carolina del Norte, Estados Unidos ¹⁹.

En este proyecto, se propuso emplear una cubierta de doble curvatura, es decir, alabeada, configurando un gran espacio sin columnas.



Imagen 66. Exterior del Dorton Arena, Carolina del Norte, 1952.



Imagen 67. Vista aérea del Dorton Arena.

19. CIVIL ENGINEERING, Sept, 2014. 'Covered Coliseum: Dorton Arena'.

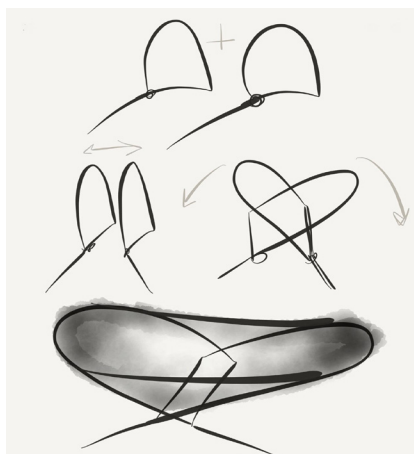
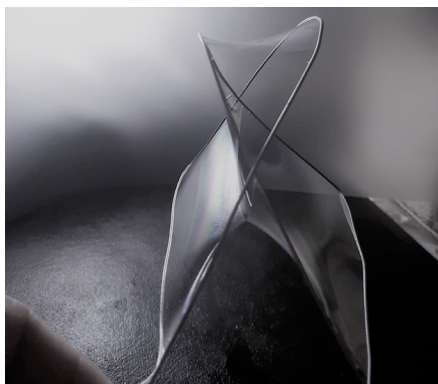


Imagen 68. Esquemas e imágenes propios de autogeneración de formas.

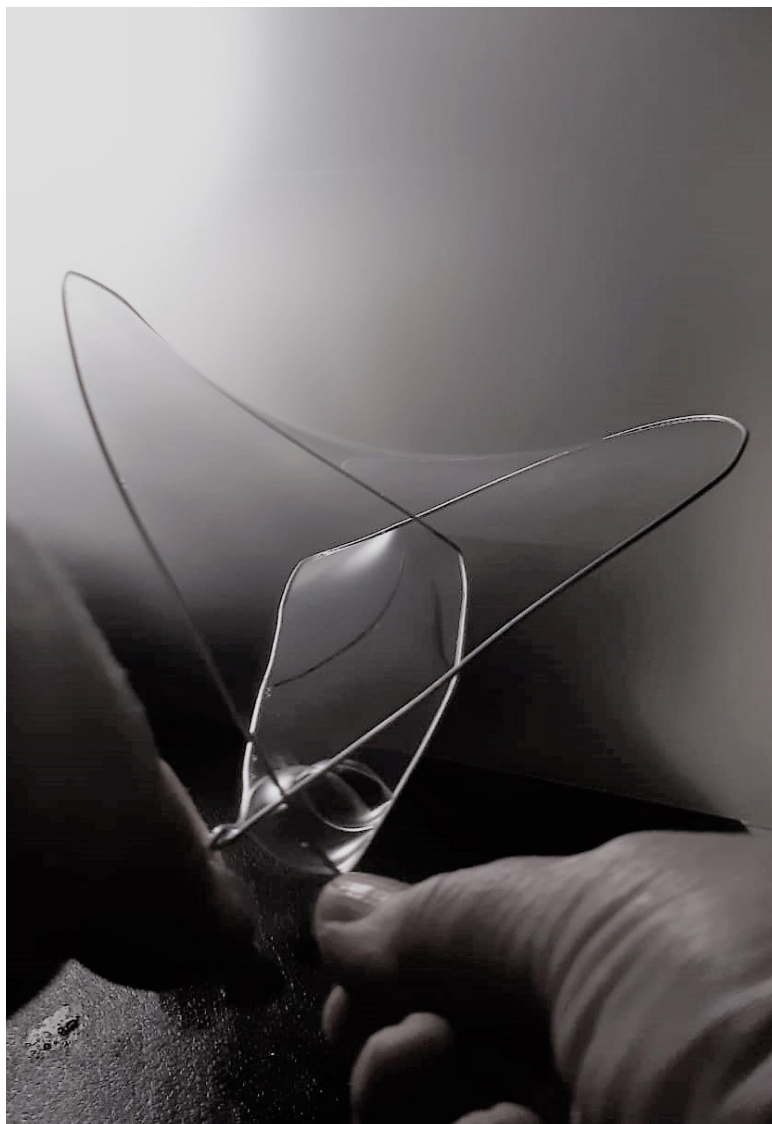


Imagen 69. Imagen propia. Autogeneración de formas con dos marcos. Intersección de dos arcos parabólicos.

4. De la experimentación física al diseño digital

4.1. Procesos informáticos. Casos prácticos

4.2. Parametrización de formas. Wolfram Mathematica

4.1. Procesos informáticos. Casos prácticos

En la actualidad, no se puede entender la arquitectura como un elemento ajeno al diseño digital. Se ha convertido en un tándem que le permite al usuario desarrollar sus tareas de una forma rápida, eficiente, además de facilitar el diseño y la producción.

Durante el desarrollo de este trabajo, hemos podido apreciar que Frei Otto, pese a destacar por su innovación proyectual, basando cada uno de sus trabajos en la experimentación física con maquetas, no dejó de lado la herramienta del diseño por ordenador.

Alejándose de la idea del diseño con ordenadores como fuente principal de trabajo que no permite desarrollar la imaginación y mecaniza el proceso de crear, lo defiende como un complemento muy útil a la tarea del arquitecto o ingeniero, facilitando los cálculos estructurales o las decisiones más aproximadas al diseño detallado.

Para poder apreciar la importancia de las Matemáticas y del diseño digital como herramientas en la arquitectura de Frei Otto, no podemos olvidarnos de su proyecto del Estadio Olímpico de Múnich ²⁰.

Es en este proyecto tan complejo, donde se puede apreciar el desarrollo de diversos conceptos matemáticos. La maestría con la que el autor logra abstraer las formas y sintetizarlas a su estado más sencillo y puro.

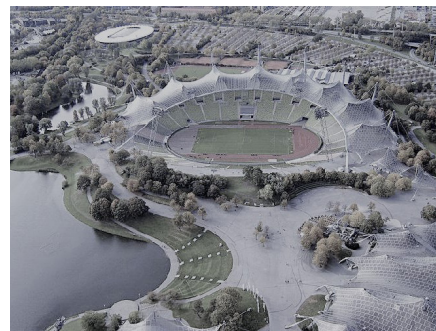


Imagen 70. Vistas del Estadio Olímpico de Múnich, 1972.

20. CROQUIZAR, Mar 28, 2013. 'Estadio Olímpico de Munich – Frei Otto'. < <http://www.croquizar.com/olympic-stadium-f-otto-g-behnisch/> >

Otro proyecto en el cual el proceso de diseño digital se fusiona con el analógico es el del Pabellón multiusos de Mannheim ²¹.

Es aquí dónde, paralelamente al trabajo con maquetas de cadenas y mallas invertidas, se emplean herramientas informáticas que partían de la base de todos aquellos datos e investigaciones de formas obtenidos mediante una maqueta física construida por Otto.

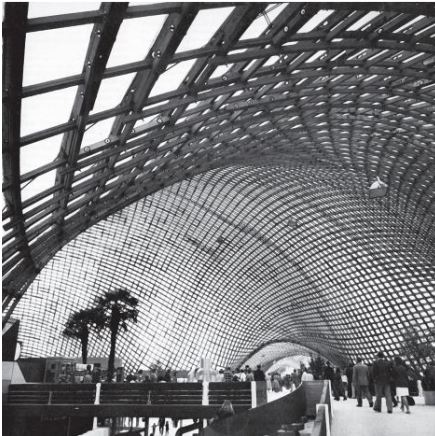


Imagen 71. Vistas del Pabellón multiusos de Mannheim, 1975.

21. G. PINO, F. (2016) 'Centro Multiusos en Mannheim. Frei Otto'.

4.2. Parametrización de formas. Wolfram Mathematica

Desde los orígenes de la construcción, la Arquitectura y las Matemáticas han experimentado una estrecha relación. La una surge de la otra, y se complementan.

Podríamos decir, que uno de los objetivos principales de la Arquitectura, es la construcción de volúmenes que permitan relacionar, organizar, y acotar los espacios en los cuales se vana desarrollar las distintas funciones.

Para el desarrollo de este trabajo práctico, se han realizado diferentes experimentos con películas de jabón siguiendo las pautas de las investigaciones realizadas por el arquitecto Frei Otto.

Los experimentos con películas de jabón, nos permiten elaborar infinitas combinaciones de formas, de estructuras, pero por otro lado, al tratar con superficies mínimas, sus características físicas provocan que la película tienda siempre a la creación de curvas concretas. Estas curvas que se generan dentro de los marcos, tienden a reproducir ciertas geometrías como el paraboloide hiperbólico, que hemos sintetizado en este trabajo.

A continuación, se expondrán las formas resultantes de esos experimentos, las cuales se han parametrizado con el programa informático Wolfram Mathematica, y modelizado posteriormente con el programa Rhinoceros_Grasshopper.

Cabe destacar, que el uso de este tipo de software es una herramienta muy útil a la hora de proyectar este tipo de formas orgánicas, gracias a la clara geometría que presentan, sirve como complemento a los procesos físicos, facilitando tanto su construcción como su cálculo.



| Superficie de Schwarz "D" (Diamante)

Una superficie de Schwarz ²², es un ejemplo de superficie mínima periódica

Se llamó a esta superficie "diamante", porque tiene dos laberintos congruentes entrelazados, representando cada uno una versión de una forma tubulata inflada que asemeja la estructura de unión de un diamante.

La fórmula que define esta geometría es la siguiente:

$$\sin(x)\sin(y)\sin(z) + \sin(x)\cos(y)\cos(z) + \cos(x)\sin(y)\cos(z) + \cos(x)\cos(y)\sin(z) = 0$$

Una vez identificada, procedemos a introducir los parámetros en el programa informático Wolfram Matemática, y obtenemos la siguiente representación:

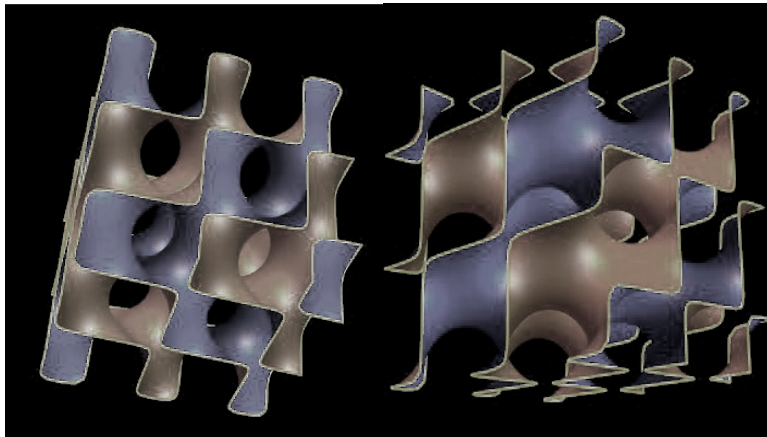


Imagen 72. Superficie de Schwarz "D". (Diamante). < <https://demonstrations.wolfram.com/TriplyPeriodicMinimalSurfaces/> >

22. Superficie de Schwarz < https://en.wikipedia.org/wiki/Schwarz_minimal_surface >

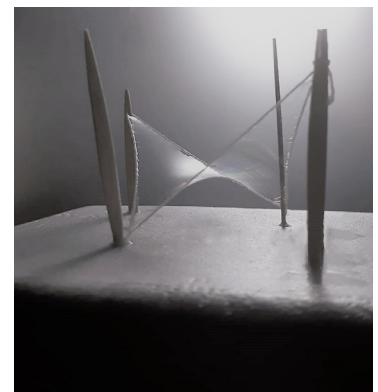
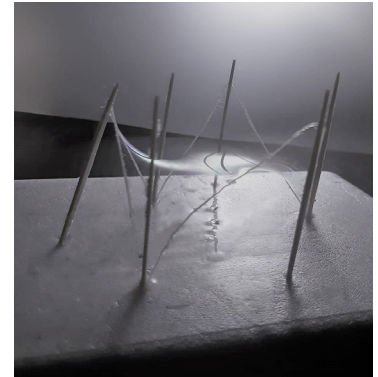


Imagen 73. Imágenes propias. Superficies mínimas de películas de jabón, superficie de Schwarz "D".

| Superficie de Enneper



Imagen 74. Imagen propia. Superficie mínima de película de jabón, superficie de Enneper.

La superficie de Enneper ²⁷, en los campos de la geometría diferencial y algebraica, es una superficie mínima de auto-intersección.

La fórmula que define esta geometría es la siguiente:

$$\begin{aligned}x &= u(1 - u^2/3 + v^2)/3, \\y &= -v(1 - v^2/3 + u^2)/3, \\z &= (u^2 - v^2)/3.\end{aligned}$$

Una vez identificada, procedemos a introducir los parámetros en el programa informático Wolfram Mathematica, y obtenemos la siguiente representación:

```
ParametricPlot3D[ew[r, φ], {r, 0, #}, {φ, 0, 2π}, PlotPoints → 100] & /@ {1, 2, 3}  
| gráfico paramétrico 3D | número de puntos en la representación
```

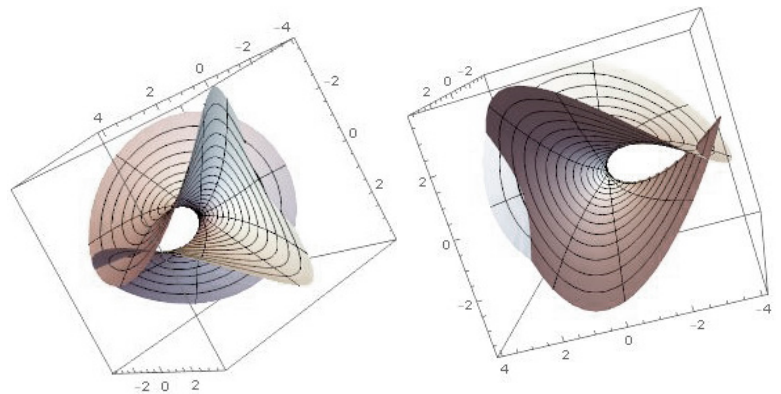


Imagen 75. Imagen propia. Parametrización de una superficie de Enneper. Wolfram Mathematica.

23. Superficie de Enneper <https://en.wikipedia.org/wiki/Enneper_surface >

| Superficie de Schwarz "P" (Primitiva)

La segunda superficie de Scherk, se puede apreciar como dos planos ortogonales, cuya intersección consiste en una secuencia de túneles en direcciones alternas. En nuestro caso , sólo representaremos un módulo de dicha secuencia.

Sus intersecciones con planos horizontales consisten en hipérbolas alternas.

La fórmula que define esta geometría es la siguiente:

$$\cos(x) + \cos(y) + \cos(z) = 0$$

Una vez identificada, procedemos a introducir los parámetros en el programa informático Wolfram Matemática, y obtenemos la siguiente representación:

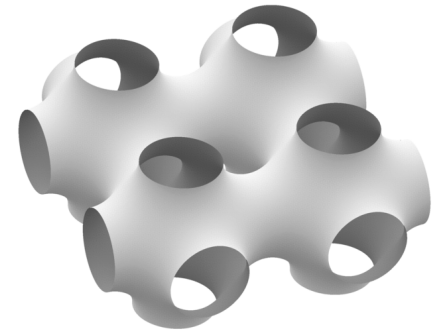


Imagen 76. Modelado de superficie de Schwarz "P". (Primitivo).

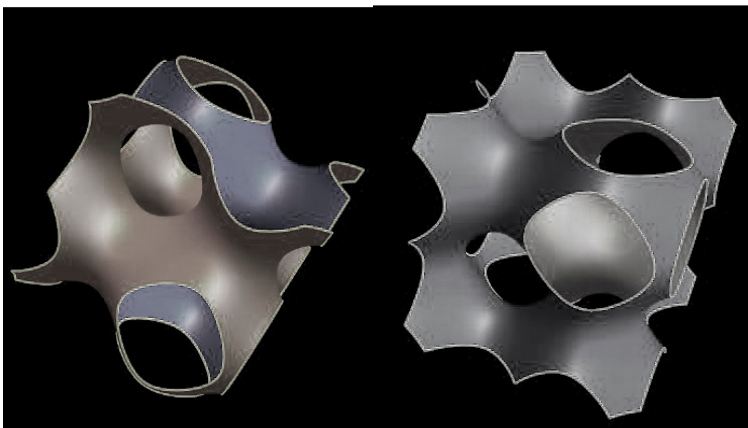


Imagen 77. Superficie de Schwarz "P". (Primitivo). < <https://demonstrations.wolfram.com/TriplyPeriodicMinimalSurfaces/> >

24. Superficie de Schwarz < https://en.wikipedia.org/wiki/Schwarz_minimal_surface >

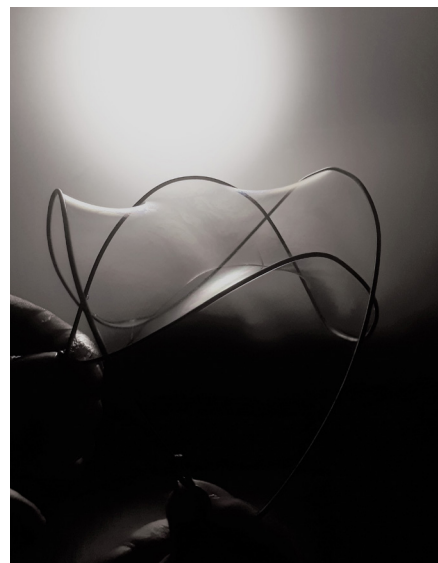
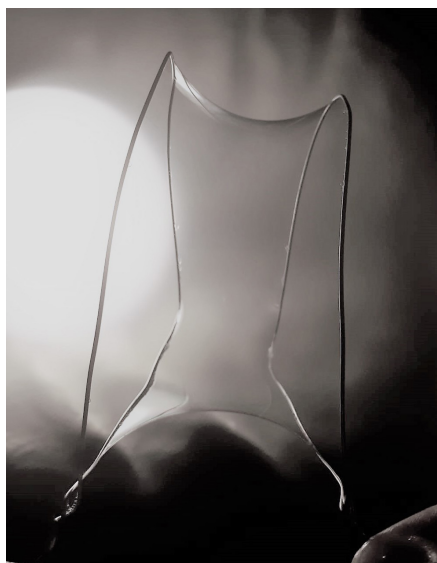


Imagen 78. *Imágenes propias. Superficies mínimas de películas de jabón, superficie de Schwarz "P".*

| Catenoide

La catenoide ²⁵, es una superficie mínima que pertenece a la misma familia que la helicoide, generada al girar una curva de forma catenaria alrededor de un eje, es decir, sobre su directriz.

La fórmula que define esta geometría es la siguiente:

$$\begin{aligned}x &= c \cosh \frac{v}{c} \cos u \\y &= c \cosh \frac{v}{c} \sin u \\z &= v\end{aligned}$$

Dónde, u es elemento del conjunto $[-\pi, \pi)$ y v es elemento del conjunto \mathbb{R} , siendo c , una constante real distinta de cero.

Una vez identificada, procedemos a introducir los parámetros en el programa informático Wolfram Matemática, y obtenemos la siguiente representación:

```
ParametricPlot3D[catenoid /. a -> 1, {u, 0, 2 π}, {v, -1.5, 1.5}]  
| gráfico paramétrico 3D
```

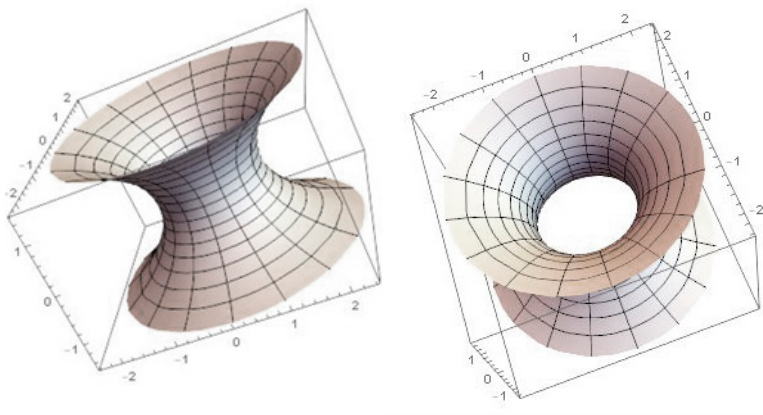


Imagen 81. Imagen propia. Parametrización de una catenoide. Wolfram Mathematica.

25. Catenoide < <https://en.wikipedia.org/wiki/Catenoid> >

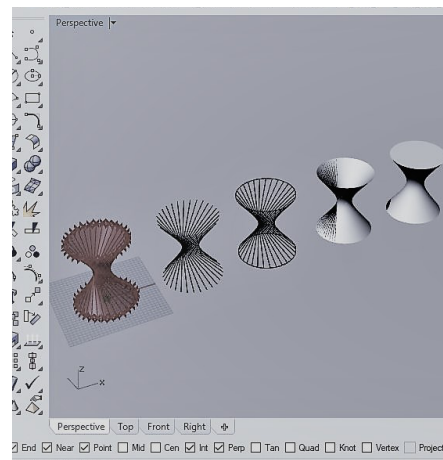


Imagen 79. Modelizado propio de una catenoide en Rhinoceros_Grasshopper.



Imagen 80. Imagen propia. Superficie mínima de película de jabón, catenoide.

| Helicoide

El helicoide ²⁶, es una superficie reglada y mínima, generada por una traza de línea recta que gira según una espiral, que se extiende en todas direcciones.

La fórmula que define esta geometría es la siguiente:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos(\alpha\theta), \\y &= \rho \sin(\alpha\theta), \\z &= \theta,\end{aligned}$$

Dónde, p y θ es el rango de negativo infinito a positivo infinito, siendo α una constante. Si éste es positivo, el helicoide será diestro, revolucionará hacia la derecha, mientras que si por el contrario es negativo, será zurdo, con su revolución hacia la izquierda.

Una vez identificada, procedemos a introducir los parámetros en el programa informático Wolfram Mathematica, y obtenemos la siguiente representación:

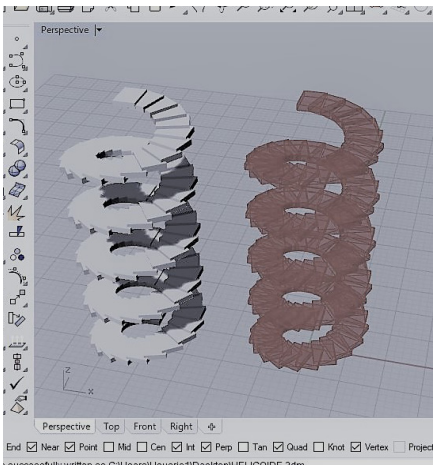


Imagen 82. Modelizado propio de una helicoide en Rhinoceros Grasshopper.



Imagen 83. Imagen propia. Superficie mínima de película de jabón, helicoidal.

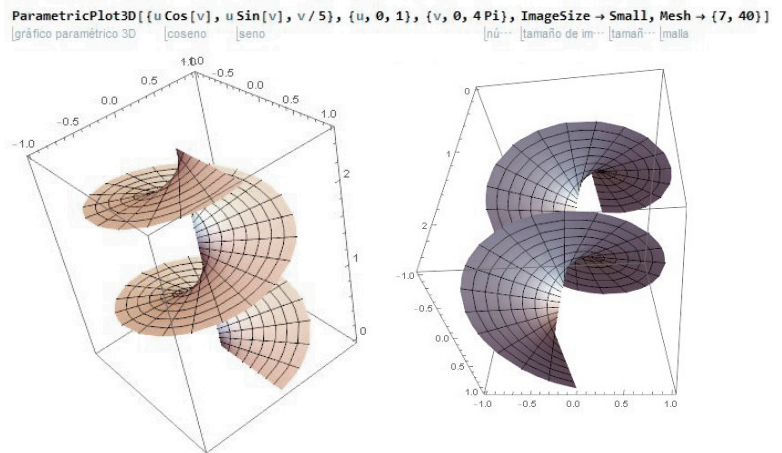


Imagen 84. Imagen propia. Parametrización de una helicoide. Wolfram Mathematica.

26. Helicoide <<https://en.wikipedia.org/wiki/Helicoid>>

5. Conclusión

Durante el desarrollo de éste trabajo, se ha querido relacionar directamente el planteamiento teórico de la arquitectura de Frei Otto con la realización práctica de sus experimentos con películas de jabón, al igual que poner en valor las distintas e infinitas posibilidades que nos aporta este proceso experimental.

Como se ha podido ver reflejado en este trabajo, la experimentación física que llevó acabo Frei Otto durante la década de los cincuenta, sigue siendo de gran relevancia.

Los métodos de autogeneración de formas surgieron como instrumento de diseño basándose en diversos procedimientos experimentales con algunos sistemas materiales, buscando las formas óptimas que permitiesen una mayor resistencia.

Podemos afirmar, que en la actualidad esta práctica no ha quedado obsoleta, sino que es un gran punto de partida para que nuestra mente a la hora de proyectar, se aleje de la caja, de las formas más ortogonales y rigurosas, y tome un camino diferente, basándose en las formas y geometrías de la naturaleza.

Cabe destacar que este tipo de actividades pioneras fueron muy revolucionarias en su tiempo, y que los programas informáticos de cálculos de estructuras simplemente surgieron como complemento a ellas. La capacidad del hombre de imaginar, de crear, debe ir más allá de unos parámetros introducidos en un sistema de chips.

"La mayoría de los arquitectos piensan en dibujos, o pensaron en dibujos; hoy piensan en el monitor de la computadora".

*Otto, F*²⁷

27. MCGUIRK, J. (2005) *Revista Icon*, entrevista a Frei Otto.

Todo ello se consigue mediante la inspiración en los elementos naturales, la intención de relacionar la edificación con el entorno en el que se implanta. La búsqueda de crear un sólo ente entre lo natural y lo artificial.

El arquitecto ha de buscar inspiración en lo que conoce, lo que puede ver. Explorar su propia mente, forzarla al máximo, y llegar a nuevas formas, nuevas ideas. Intentar llegar a aquello que desconoce, liberar su mente mediante la experimentación.

La construcción de obras por medio de las superficies mínimas, no sólo nos muestran una forma aún novedosa de enfrentarnos al papel y al lápiz en el momento de la proyección, sino que resulta una forma de llevar a la realidad esas ideas de la forma más económica, empleando la menor cantidad de materiales posible, logrando así fusionar una gran ligereza y la gran adaptación que le otorga la estructura construida.

En definitiva, el interés de Otto por la relación entre función y forma, tiene como objetivo optimizar y generar un nuevo sistema estructural, que sienta las bases de la Arquitectura del futuro sobre la experimentación física.

"Siempre intenté pensar en tres dimensiones. El ojo interior del cerebro no debe ser plano sino tridimensional, para que todo sea un objeto en el espacio. No estamos viviendo en un mundo bidimensional".

Otto, F 28

6. Bibliografía

Libros

BACH, K. | OTTO, F. | BURKHARDT, B. (ED). (1988). *IL 18 Seifenblasen=Forming bubbles. Institute for Lightweight Structures | Stuttgart : Krämer.*

MEISSNER, I. & MÖLLER, E. (ED.). (2015). *Frei Otto a life of research construction and inspiration.* München: Detail.

NERDINGER, W. (ED.). (2005). *Frei Otto Complete Works.* Basel: Birkhäuser.

OTTO, F. (ED). (1988). *IL 22 Form. Stuttgart: University of Stuttgart.*

OTTO, F. (ED). (1992). *IL 23 Structures. Stuttgart: University of Stuttgart.*

OTTO, F. | GASS, S. | WEIDLICH, W. (ED). (1990). *IL 25 Experiments. Stuttgart: University of Stuttgart.*

ROLAND, C. (ED). (1973). *Frei Otto: Estructuras. Estudio y trabajo sobre la construcción ligera.* Barcelona: Gustavo Gili,S.A.

SONGEL GONZÁLEZ, J.M. (2008). *Frei Otto. Conversación con Juan María Songel.* Barcelona: Gustavo Gili, D.L.

CALVO, V. | PERIS, A. | RODENAS, F. (2015). *Diagonalización, cálculo multivariable e integración con Mathematica: Electolibris.*

Tesis

ABRUNHOSA BARATA CRUZ, A.J. (2012). *Arquitectura [Bio]lógica. Uma análise da obra de Frei Otto.* Tesis. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra Departament de Arquitectura. <https://estudogeral.sib.uc.pt/handle/10316/20803>

FONTANA CABEZAS, J.J. (2012). *El diseño estructural en las formas complejas de la Arquitectura reciente.* Tesis. Alicante: Universidad de Alicante. Escuela Politécnica Superior.

SONGEL GONZÁLEZ, J.M. (2005). *Frei Otto y el Instituto de Estructuras Ligeras de Stuttgart: una experiencia de metodología, investigación y sistematización en la búsqueda de la forma resistente.* Tesis. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia. <https://riunet.upv.es/handle/10251/2346>

ANÓNIMO, UNIVERSIDAD DE LOS ANDES. (2006). *Modelos Matemáticos y Simulación Numérica en Arquitectura.* Departamento de Arquitectura, Departamento de Matemáticas. <https://laboratoriomatematicas.uniandes.edu.co/bioing/cuadernillo.pdf>

ANDRÉS MARTÍN, F. R. / FADÓN SALAZAR, F. "Análisis gráfico de obras emblemáticas de Félix Candela ". <http://www.egrafica.unizar.es/ingegraf/pdf/Comunicacion17102.pdf>

ALARCÓN LÓPEZ, A (2008). "Superficies Minimales Completas en el Espacio Euclíde". <https://www.ugr.es/~alarcon/papers/tesis.pdf>

Artículos y revistas

- BECERRA | LOMONACO | TESSORE. (2011).** “Frei Otto. Diseño Arquitectónico y Estructural”. FCEIA.
- BOLETÍN DE INFORMACIÓN TÉCNICA N° 237.** “80 años de Frei Otto”. http://cmm.cenart.gob.mx/delanda/textos/frei_otto.pdf
- CIVIL ENGINEERING, Sept, 2014.** ‘Covered Coliseum: Dorton Arena’.
- CONSTRUIBLE, Dic 10, 2006.** “Estación Central de Stuttgart”. <https://www.construible.es/2006/12/10/estacion-central-de-stuttgart>
- CROQUIZAR, Mar 28, 2013.** ‘Estadio Olímpico de Munich – Frei Otto’. <http://www.croquizar.com/olympic-stadium-f-otto-g-behnisch/>
- G. PINO, F. (2016)** ‘Centro Multiusos en Mannheim. Frei Otto’, rita n°5, abril 2016, pp. 106-113.
- MANDU’A (2015).** “80 años de Frei Otto”. <http://www.mandua.com.py/primer-pritzker-postumo-es-para-frei-otto-n108>
- MCGUIRK, J. (2005)** *Revista Icon*, entrevista a Frei Otto.
- OLIVA, J.G. | ONTIVEROS M. | VALDEZ E. (2011)** *Revista UNAM*, “El espacio religioso en México y las superficies de paraboloides hiperbólicos de Félix Candela”.
- PLANO Y ESCALA, Sept 2014.** “Escaleras al cielo”. <https://www.planoyescala.com/2014/09/escalera-al-cielo-top-escaleras.html>
- PLATAFORMA ARQUITECTURA, Agos 2007.** “ACTAR: Casas SANAA (Kazuyo Sejima + Ryue Nishizawa)”. <https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/02-2288/actar-casas-sanaa-kazuyo-sejima-ryue-nishizawa>
- PLATAFORMA ARQUITECTURA, Agos 2012.** “Recorrido por las obras de Félix Candela”. <https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/02-177607/recorrido-por-las-obras-de-felix-candela>
- PLATAFORMA ARQUITECTURA, Ener 25, 2011.** “Clásicos de Arquitectura: Catedral de Brasilia / Oscar Niemeyer”. <https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/02-69439/catedral-de-brasilia-oscar-niemeyer>
- SIERRA, F. | PATIÑO, E. (2005).** “Objetos a partir de la rigidización de estructuras de membrana” en ponencia presentada en el II Simposio Latinoamericano de Tenso Estructuras. Caracas, Venezuela. 10.
- SONGEL GONZÁLEZ, J.M. (2010).** “Frei Otto y el debate sobre la génesis de la forma arquitectónica”. EGA-Revista de expresión gráfica, 15, 8. <https://riunet.upv.es/handle/10251/14810>
- SONGEL GONZÁLEZ, J.M. (2013).** “De Goethe a Frei Otto: un itinerario romántico en busca de las formas de la vida y sus fuerzas generadoras en la naturaleza y en la técnica”. Ediciones generales de la UPV. <https://riunet.upv.es/handle/10251/43994>
- URBAN SCRAPER (2007).** “Rehabilitación del auditorio al aire libre en el parque Paraíso”.

Páginas web

- < http://www.academia.edu/20425278/Superficies_Minimales._Historia_Desarrollo_y_Aplicaciones_a_Otras_Ciencias >
- < <https://www.archdaily.mx/mx/763577/frei-otto-abrazando-el-futuro-un-documental-sobre-frei-otto> >
- < <http://www.arquitecturaenacero.org/historia/arquitectos/frei-otto-pritzker> >
- < <http://www.freiotto.com> >
- < <http://www.jeannotte.com/en/projects/musee-national-du-qatar/> >
- < <http://www.mikel-rueda.com/sobre-la-parametrizacion-en-la-arquitectura/> >
- < <https://www.plataformaarquitectura.com> >
- < <http://www.urbanscraper.com/2007/03/rehabilitacion-del-auditorio-al-aire.html> >
- < <https://www.wikipedia.org/wiki/> >
- < <https://www.world-architects.com/it/architecture-news/insight/skeletons-soap-bubbles-and-spider-webs> >
- < <https://www.mathcurve.com/surfaces.gb/schwarz/schwarz.shtml> >

7. Índice de imágenes

Imagen: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 12, 19, 20, 23, 24, 54, 55, 58, 59, 62, 63, 70, 71
< www.plataformaarquitectura.com >

Imagen: 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 29, 30, 33, 34, 37, 38, 41, 42, 45, 46, 48, 49, 52, 53, 56, 57, 60, 61, 64, 65, 69, 73, 74, 75, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86
< Propias >

Imagen: 50,51
<<https://www.construible.es/2006/12/10/estacion-central-de-stuttgart>>

Imagen: 39,40,47
<http://cmm.cenart.gob.mx/delanda/textos/frei_otto.pdf>

Imagen: 66, 67
< www.asce.org/project/dorton-arena/ >

Imagen: 31,32
<<http://www.urbanscraper.com/2007/03/rehabilitacin-del-auditorio-al-aire.html>>

Imagen: 15,16
<<http://www.jeannouvel.com/en/projects/musee-national-du-qatar/>>

Imagen: 72, 76, 77
<<https://demonstrations.wolfram.com/TriplyPeriodicMinimalSurfaces/>>



8. Experimentos. "Ensayo _error"

En este anexo, se incorporan todas aquellas fotografías tomadas durante el proceso de experimentación con películas de jabón, las cuales, por no poder ser parametrizadas con el programa informático Wolfram Mathematica, se han quedado exentas del trabajo.

Debemos destacar el carácter no geométrico que siguen las siguientes formas, ya que unas surgen de un proceso de investigación sin patrones, y otras de la pura casualidad.

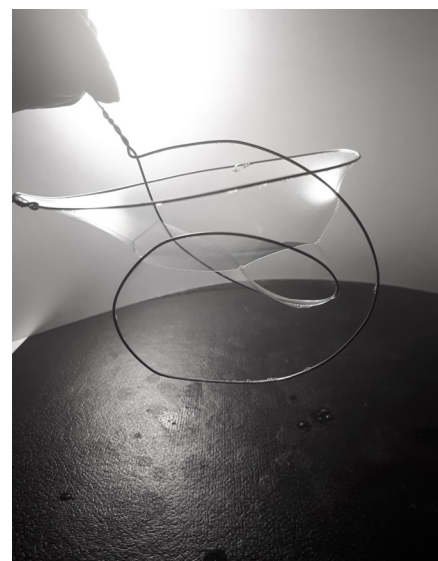
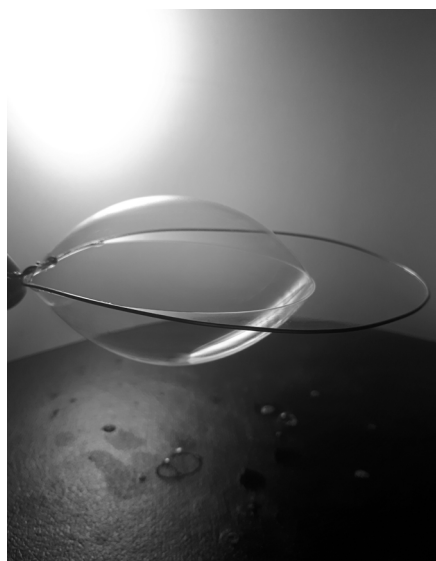
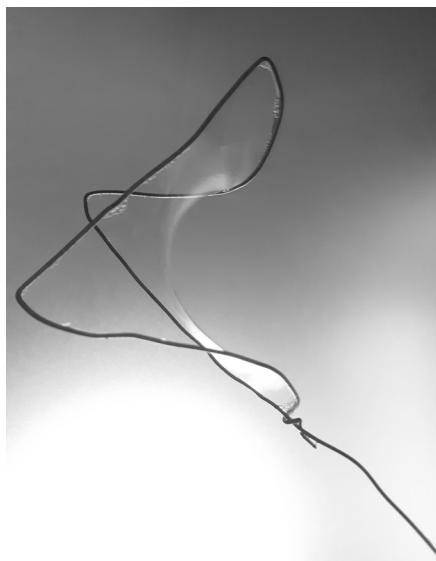


Imagen A1. *Imágenes propias. Superficies mínimas de películas de jabón.*

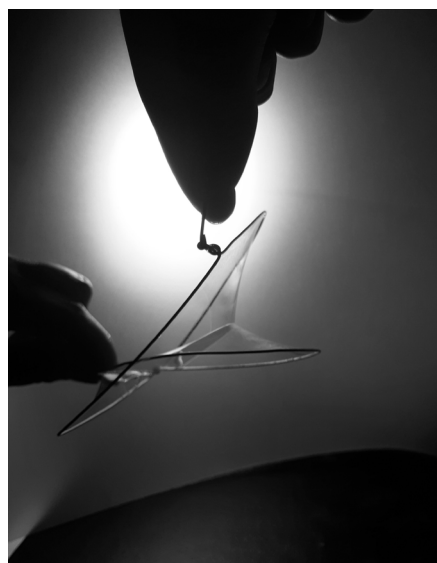
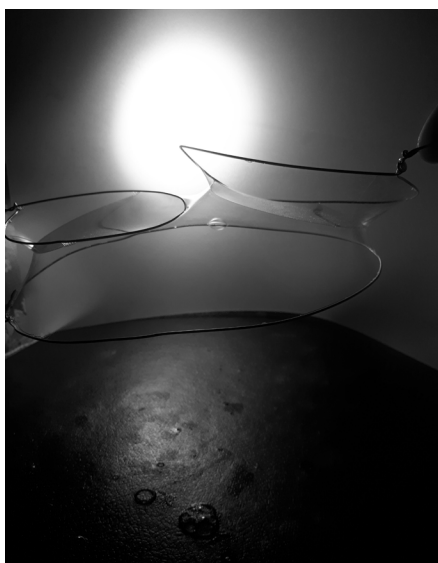
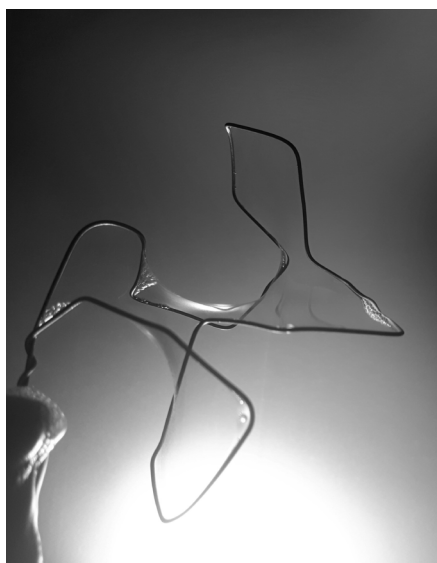
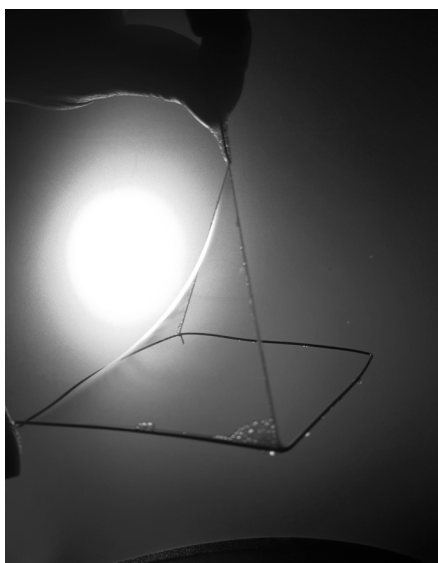


Imagen A2. Imágenes propias. Superficies mínimas de películas de jabón.

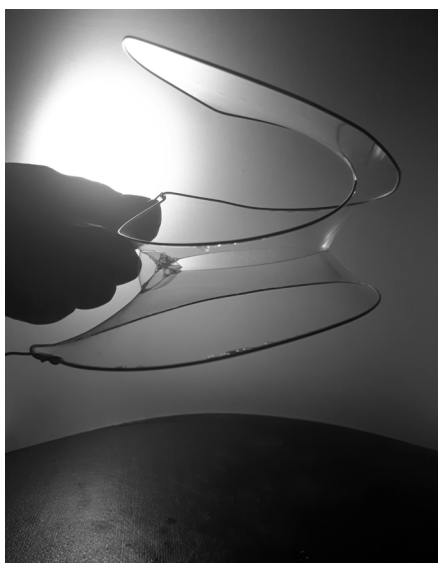
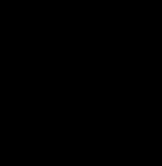
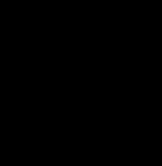


Imagen A3. Imágenes propias. Superficies mínimas de películas de jabón.



ESCOLA TÈCNICA
SUPERIOR
D'ARQUITECTURA



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Trabajo de Final de Grado
Grado en Fundamentos de la Arquitectura