

## TÉCNICAS NUMÉRICAS MODALES PARA EL ANÁLISIS ACÚSTICO DE DISPOSITIVOS DE ESCAPE DE SECCIÓN TRANSVERSAL ARBITRARIA CON MONOLITO

Francisco D. Denia<sup>1</sup>, Eva M. Sánchez-Orgaz<sup>1</sup>, J. Martínez-Casas<sup>1</sup> y  
Javier Carballeira<sup>1</sup>

1: Centro de Investigación en Ingeniería Mecánica (CIIM)  
Universitat Politècnica de València  
Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, Spain  
e-mail: fdenia@mcm.upv.es, web: <http://www.upv.es>

**Palabras clave:** Ruido, dispositivo de escape, monolito, método de elementos finitos, ajuste modal numérico, eficiencia computacional, acústica de conductos.

**Resumen** *En este trabajo se proponen y analizan técnicas modales de cálculo del comportamiento acústico de dispositivos de la línea de escape con sección transversal arbitraria y monolito. Dichos dispositivos, tales como catalizadores y filtros de partículas diésel, se utilizan de forma generalizada en automoción y, además de su impacto en las emisiones de productos contaminantes, tienen una influencia considerable en la atenuación sonora asociada al sistema de escape. El desarrollo de las técnicas propuestas combina un modelo modal tridimensional de propagación de ondas en los conductos de entrada/salida y la cámara central, todos ellos de sección transversal arbitraria y axialmente uniforme, con un modelo acústico unidimensional para los conductos capilares del monolito [1]. En el caso de conductos y cámara se utilizan expansiones modales basadas en la utilización de modos transversales calculados con un planteamiento 2D de EF y modos longitudinales analíticos, mientras que para el monolito se recurre a matrices de cuatro polos con las características acústicas del dispositivo. El acoplamiento de las soluciones de los diferentes subdominios del dispositivo [2, 3] se lleva a cabo mediante la utilización, en su versión numérica, de la técnica de ajuste modal, para aprovechar las propiedades de ortogonalidad de los modos transversales de presión. Los resultados obtenidos se validan mediante la comparación con medidas experimentales y simulaciones numéricas 3D de EF, mostrando una buena concordancia. El coste computacional de las técnicas modales presentadas en este trabajo es inferior al asociado a los cálculos 3D de EF.*

## 1. INTRODUCCIÓN

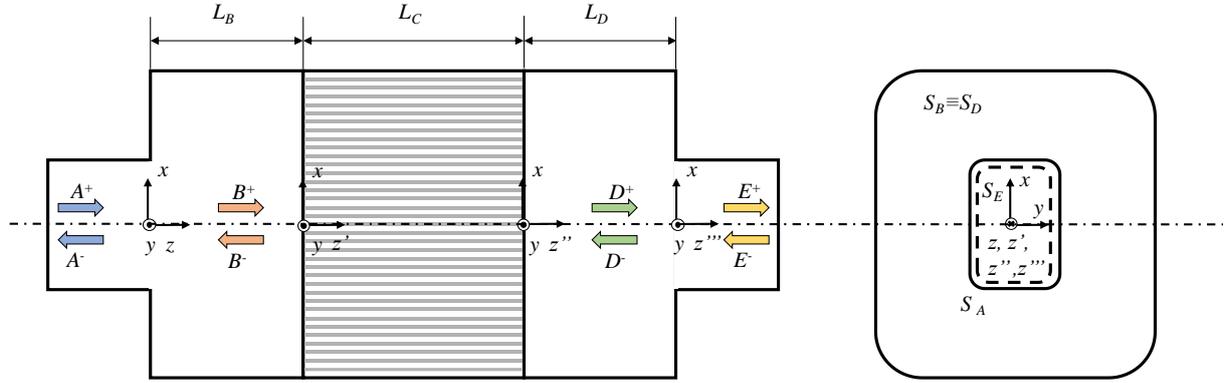
El tratamiento de los gases de escape con catalizadores y filtros de partículas diésel permite reducir las emisiones contaminantes por debajo de los límites permitidos por la legislación vigente. A pesar de ser esta su principal función en el sistema de escape de vehículos, dichos dispositivos también juegan un papel fundamental en las emisiones sonoras. Así pues, han de tenerse en cuenta a la hora de realizar un diseño integral del sistema de escape desde un punto de vista acústico [1-5].

Una de las principales características de los catalizadores y filtros de partículas es la utilización de un monolito de tipo cerámico, formado por miles de conductos capilares de sección transversal muy pequeña, para los que se pueden encontrar diversos modelos acústicos en la literatura [1-5]. Sin embargo, el modelo de propagación del sonido en el catalizador completo ha de incluir también las cámaras de expansión y los conductos de entrada/salida, situados a ambos lados del monolito. Los modelos de onda plana presentan limitaciones importantes y suelen estar restringidos a las bajas frecuencias y para conductos con sección transversal de dimensiones reducidas. Por esta razón, en general se utilizan modelos numéricos y/o analíticos multidimensionales; en el caso de los primeros, su principal ventaja es que se pueden aplicar a geometrías complejas, si bien su coste computacional es elevado; las técnicas analíticas son aplicables a geometrías sencillas y requieren un menor tiempo de cálculo. Los resultados más realistas [2-3, 6] proceden de formulaciones basadas en modelos 3D en las cavidades (conductos y cámaras) y 1D en los capilares que conforman el monolito, ya que consideran que la propagación del sonido es multidimensional en las cámaras de expansión y en los conductos de entrada/salida, mientras que en los capilares se asume que la propagación es unidimensional [2-3, 6]. Esto permite sustituir el monolito cerámico por una matriz de transferencia de cuatro polos, teniendo en cuenta que en su interior únicamente existe propagación de onda plana.

En el presente trabajo, se combina este modelo 3D conductos/1D capilares con la técnica de ajuste modal en su versión numérica, con el objetivo de reducir el elevado coste computacional de una herramienta 3D de tipo numérico basado en el método de elementos finitos (MEF) [1, 6-8]. El acoplamiento de los campos acústicos de presión y velocidad axial se lleva a cabo en las discontinuidades geométricas del catalizador. Estas condiciones de compatibilidad se fuerzan en forma de integración ponderada en el caso de ajuste modal. Los resultados obtenidos con esta técnica se validan para una configuración de tipo cilíndrico, comparándolos con medidas experimentales y una simulación numérica basada en una formulación 3D de EF, mostrando una buena concordancia y un menor coste computacional. En trabajos recientes se ha llevado a cabo la comparación de las técnicas de ajuste modal y colocación puntual [6] en catalizadores circulares con monolito, mostrando que la primera es más precisa y requiere un menor coste computacional. Además, la técnica de colocación puntual ha demostrado ser muy sensible a los puntos de colocación que se escogen para acoplar los campos acústicos [9, 10]. Por este motivo, Kirby [10] propuso la utilización de un método híbrido que combina soluciones analíticas y numéricas de la ecuación de ondas en

diversos recintos, soluciones que se acoplan de manera satisfactoria con ajuste modal, cosa que no ocurre al utilizar la técnica de colocación puntual. Por lo tanto, esta última técnica no se ha considerado finalmente en el presente trabajo.

## 2. MODELO MATEMÁTICO



**Figura 1.** Esquema de un catalizador con monolito cerámico.

En la Figura 1 se puede observar un catalizador con monolito cerámico que se divide en varios subdominios. Las regiones A y B están asociadas con el conducto y la cámara de expansión de entrada, respectivamente, mientras que los subdominios D y E componen la contracción a la salida del catalizador. Tanto los conductos como las cámaras poseen una sección axialmente uniforme, siendo aire su medio de propagación que queda caracterizado a través de dos parámetros, como son la densidad  $\rho_0$  y la velocidad del sonido  $c_0$ . Cabe destacar que en estas regiones la propagación del sonido es multidimensional, mientras que en los conductos capilares que conforman el monolito (situado en la parte central del catalizador) la propagación se considera unidimensional. Por lo tanto, el monolito se puede caracterizar mediante su matriz de cuatro polos, pudiéndose escribir ésta en términos de sus propiedades equivalentes  $\rho_m$  y  $c_m$ , ambas complejas y dependientes de la frecuencia.

La propagación del sonido en el interior del dispositivo se rige por la ecuación de ondas, cuya solución se puede escribir en términos de una expansión modal. En el caso del conducto A, la ecuación se puede escribir como [2, 3, 7, 8]

$$P_A(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n^+ e^{-jk_{A,n}z} + A_n^- e^{jk_{A,n}z} \right) \psi_{A,n}(x, y) \quad (1)$$

$$U_A(x, y, z) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{n=1}^{\infty} k_{A,n} \left( A_n^+ e^{-jk_{A,n}z} - A_n^- e^{jk_{A,n}z} \right) \psi_{A,n}(x, y) \quad (2)$$

donde  $P_A$  y  $U_A$  representan los campos de presión y velocidad acústica axial,  $A^+$  y  $A^-$  son

las amplitudes modales incógnita del problema asociadas con las ondas incidente y reflejada,  $\psi_{A,n}(x,y)$  es el modo de presión transversal correspondiente a la sección del conducto de entrada,  $k_{A,n}$  es el número de onda axial,  $\omega$  es la frecuencia angular y  $j$  es la unidad imaginaria. En el caso de las regiones  $B$ ,  $D$  y  $E$  la solución es similar tras realizar las modificaciones oportunas.

Para obtener los números de onda axiales y sus modos transversales de presión correspondientes, se debe resolver el problema de autovalores cuadrático al que se llega tras aplicar separación de variables y resolver la ecuación de ondas de la sección transversal con la ayuda del método de elementos finitos en un dominio 2D. Este procedimiento es bastante sencillo en conductos de pared rígida, por lo que se obvia su desarrollo matemático. No obstante, pueden encontrarse más detalles en [7-11].

Una vez resuelto el problema 2D de autovalores, se puede proceder al cálculo de las distintas amplitudes modales. Para ello, es necesario tener en cuenta que los campos acústicos deben satisfacer ciertas condiciones en las discontinuidades geométricas, que en este caso vienen determinadas por la expansión/contracción entre los conductos y las cámaras correspondientes, así como en las interfaces de las cámaras a ambos lados del monolito cerámico. Además de la continuidad de los campos de presión y velocidad acústica axial, se considera que velocidad axial normal a las paredes de la cámara es cero debido que son rígidas e impermeables al sonido. Adicionalmente, a ambos lados del monolito deben satisfacerse ciertas relaciones entre los campos acústicos que se detallan a continuación.

Así pues, en la expansión del dispositivo la continuidad de los campos acústicos se puede escribir como

$$P_A(x, y, z = 0) = P_B(x, y, z' = -L_B) \quad (x, y) \in S_A \quad (3)$$

$$U_A(x, y, z = 0) = U_B(x, y, z' = -L_B) \quad (x, y) \in S_A \quad (4)$$

mientras que la velocidad axial nula en la pared lateral de la cámara viene dada por

$$U_B(x, y, z' = -L_B) = 0 \quad (x, y) \in S_B - S_A \quad (5)$$

El acoplamiento del monolito en  $S_B \equiv S_D$  será [5, 6]

$$P_B(x, y, z' = 0) = T_{11}^m P_D(x, y, z'' = 0) + T_{12}^m P_D(x, y, z'' = 0) \quad (x, y) \in S_B \equiv S_D \quad (6)$$

$$U_B(x, y, z' = 0) = T_{21}^m P_D(x, y, z'' = 0) + T_{22}^m P_D(x, y, z'' = 0) \quad (x, y) \in S_B \equiv S_D \quad (7)$$

donde  $T_{11}^m$ ,  $T_{12}^m$ ,  $T_{21}^m$  y  $T_{22}^m$  son los polos de la matriz de comportamiento acústico.

Finalmente, en la contracción las ecuaciones se pueden escribir de forma similar a las de la expansión, obteniéndose las siguientes expresiones

$$P_D(x, y, z'' = L_D) = P_E(x, y, z''' = 0) \quad (x, y) \in S_E \quad (8)$$

$$U_D(x, y, z'' = L_D) = U_E(x, y, z''' = 0) \quad (x, y) \in S_E \quad (9)$$

$$U_D(x, y, z'' = L_D) = 0 \quad (x, y) \in S_D - S_E \quad (10)$$

A continuación, se detallarán las ecuaciones que se obtienen al aplicar la técnica de ajuste modal.

### 2.1. Ajuste modal

En este caso, se utiliza un procedimiento de integración ponderada en las ecuaciones (3)-(10), donde las funciones de ponderación son los modos transversales de los conductos. Se consideran  $N_m$  modos para expandir los campos de presión y velocidad acústica axial asociados a las cámaras, mientras que para los conductos de entrada/salida se utilizan  $N_a$  y  $N_e$ , respectivamente. A continuación se detalla la obtención del sistema de ecuaciones que permitirá obtener las amplitudes modales incógnita.

En la expansión, teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de los modos transversales [6], las ecuaciones de compatibilidad (3)-(5) se pueden expresar del siguiente modo

$$(A_s^+ + A_s^-) \int_{S_A} \psi_{A,s}^2(x, y) dS = \sum_{n=1}^{N_m} (B_n^+ e^{-jk_{B,n}(-L_B)} + B_n^- e^{jk_{B,n}(-L_B)}) \int_{S_A} \psi_{B,n}(x, y) \psi_{A,s}(x, y) dS \quad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{N_a} k_{A,s} (A_s^+ - A_s^-) \int_{S_A} \psi_{A,s}(x, y) \psi_{B,n}(x, y) dS = k_{B,n} (B_n^+ e^{-jk_{B,n}(-L_B)} - B_n^- e^{jk_{B,n}(-L_B)}) \int_{S_A} \psi_{B,n}^2(x, y) dS \quad (12)$$

donde las funciones de ponderación son los modos de presión  $\psi_{A,s}(x, y)$  y  $\psi_{B,s}(x, y)$  con  $s=1, \dots, N_a$  y  $N_m$ , respectivamente. Los productos modales se integran numéricamente usando la metodología estándar de EF, consistente en la utilización de los puntos de Gauss y la cuadratura correspondiente para integrar productos de funciones de forma. Parte de los cálculos llevados a cabo en el problema de autovalores 2D anterior es útil para el cómputo de las integrales de ajuste modal.

Siguiendo un procedimiento similar con las ecuaciones (6) y (7) asociadas al monolito, se considera la matriz de cuatro polos que relaciona la presión y la velocidad acústica axial a ambos lados. Así pues, multiplicando estas ecuaciones por el modo transversal  $\psi_{B,s}(x, y) = \psi_{D,s}(x, y)$ , con  $s = 1, \dots, N_m$  y sacando partido de las relaciones de ortogonalidad se obtiene

$$(B_s^+ + B_s^-) = T_{11}^m (D_s^+ + D_s^-) + \frac{k_{D,s}}{\rho_0 \omega} T_{12}^m (D_s^+ - D_s^-) \quad (13)$$

$$\frac{k_{B,s}}{\rho_0 \omega} (B_s^+ - B_s^-) = T_{21}^m (D_s^+ + D_s^-) + \frac{k_{D,s}}{\rho_0 \omega} T_{22}^m (D_s^+ - D_s^-) \quad (14)$$

Como se puede observar, las ecuaciones anteriores presentan una simplicidad considerable, no dependen de la geometría de la sección transversal y relacionan directamente las amplitudes de onda con el mismo número modal, sin acoplamiento con modos de distinto orden.

Por último, siguiendo un procedimiento análogo al de la expansión, las ecuaciones (8)-(10), asociadas a la contracción, se pueden reescribir como

$$\sum_{n=1}^{N_m} \left( D_n^+ e^{-jk_{D,n}L_D} + D_n^- e^{jk_{D,n}L_D} \right) \int_{S_E} \psi_{D,n}(x,y) \psi_{E,n}(x,y) dS = (E_s^+ + E_s^-) \int_{S_E} \psi_{E,s}^2(x,y) dS \quad (15)$$

$$k_{D,s} \left( D_s^+ e^{-jk_{D,s}L_D} - D_s^- e^{jk_{D,s}L_D} \right) \int_{S_E} \psi_{D,s}^2(x,y) dS = k_{E,n} (E_n^+ - E_n^-) \int_{S_E} \psi_{E,n}(x,y) \psi_{D,s}(x,y) dS \quad (16)$$

siendo en este caso las funciones de ponderación los modos de presión  $\psi_{E,s}(x,y)$  y  $\psi_{D,s}(x,y)$ , con  $s=1, \dots, N_e$  y  $N_m$  respectivamente. Al igual que en el caso de la expansión, los productos modales se integran numéricamente utilizando la cuadratura estándar de EF.

### 2.3. Cálculo de la pérdida de transmisión

En el modelo descrito anteriormente, las ecuaciones adicionales necesarias para obtener el valor de las amplitudes incógnita  $A_n^+$ ,  $B_n^+$ ,  $D_n^+$  y  $E_n^+$ , se basan en la consideración de una onda plana incidente de amplitud  $A_0^+ = 1$  y  $A_n^- = 0$ ,  $\forall n$  y de un dispositivo de escape con terminación anecoica, o lo que es lo mismo,  $E_n^- = 0 \forall n$ . Una vez obtenidas dichas amplitudes, la atenuación se puede calcular como

$$TL = -20 \log \left( \frac{S_E}{S_A} |E_0^+| \right) \quad (17)$$

donde  $S_A$  y  $S_E$  son las secciones de los conductos de entrada/salida del catalizador [2, 3].

Para las dimensiones del dispositivo y el rango de frecuencias considerado en este trabajo, los modos de alto orden decaen rápidamente con la distancia, por lo que el  $TL$  se define de forma única y es independiente de la localización del punto considerado en la sección transversal de salida.

## 3. RESULTADOS

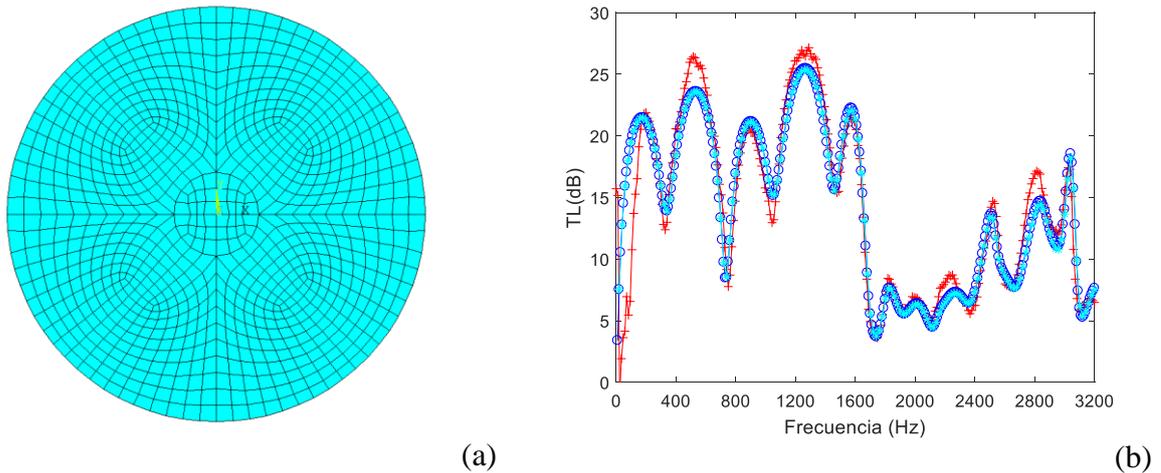
En primer lugar, se presenta una validación del método de ajuste modal, comparando sus resultados con aquellos obtenidos a partir de medidas experimentales y con los calculados mediante un programa comercial de elementos finitos. Tras la validación, se compara la atenuación de catalizadores con distintas secciones transversales. En todos los casos los elementos utilizados para mallar dichas secciones son cuadriláteros de tipo cuadrático.

### 3.1. Validación de la metodología propuesta

Como se ha indicado, se presenta aquí la validación de los resultados obtenidos mediante la técnica de ajuste modal. Para ello, se estudia el comportamiento acústico de un catalizador circular con monolito cerámico (véanse las dimensiones y propiedades más adelante). En primer lugar, se ha obtenido la pérdida de transmisión producida por el catalizador a partir de medidas experimentales y se ha comparado a la atenuación obtenida mediante ajuste modal. Este resultado, además, se ha comparado con un cálculo de

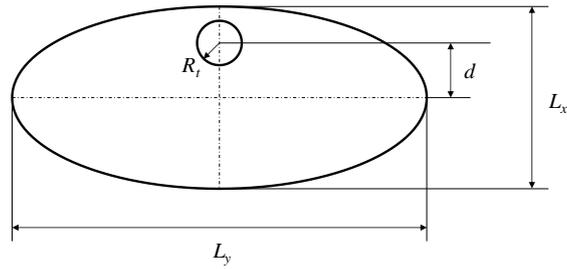
elementos finitos realizado con la ayuda del programa comercial Comsol Multiphysics®. Las principales dimensiones del catalizador bajo estudio son  $R_1 = R_3 = 0.0258$  m (radio de los conductos de entrada/salida, respectivamente),  $R_2 = 0.1275$  m (radio de las cámaras situadas a ambos lados del monolito) y  $L_B = L_D = 0.1975$  m. Las propiedades del aire son  $c_0 = 345.76$  m/s y  $\rho_0 = 1.1866$  kg/m<sup>3</sup> (velocidad y densidad del sonido, respectivamente). En cuanto al monolito cerámico, éste viene caracterizado por: longitud  $L_C = 0.075$  m, resistividad  $R = 1500$  rayl/m,  $\phi = 0.88$ , factor geométrico  $\alpha_g = 1.14$ , viscosidad dinámica  $\mu = 1.783 \cdot 10^{-5}$  Pa s, conductividad térmica  $\kappa = 0.02534$  W/(m K) y calor específico a temperatura constante  $C_p = 1005$  J/(kg K) [5].

Como se puede observar en la Fig. 2, las curvas de pérdidas de atenuación obtenidas numéricamente muestran una buena concordancia con las obtenidas a partir de datos experimentales, apareciendo algunas discrepancias sobre todo en el rango de bajas frecuencias, donde las medidas experimentales son más imprecisas debido a la dificultad de conseguir una terminación anecoica con longitudes de onda tan grandes. También cabe destacar que los resultados de  $TL$  obtenidos utilizando ajuste modal numérico y Comsol Multiphysics® se superponen y son indistinguibles.



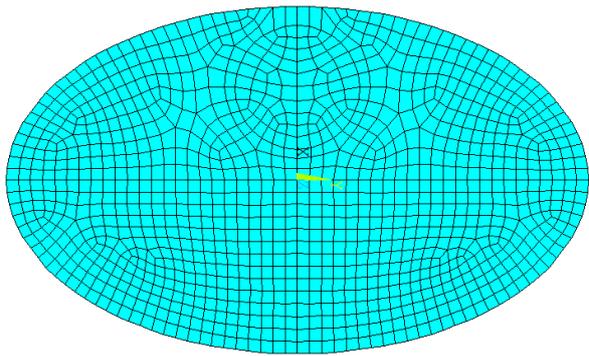
**Figura 2.** (a) Mallado de la sección transversal del catalizador circular; (b)  $TL$  del catalizador: +++, medidas experimentales; \*\*\*, ajuste modal; ooo, Comsol Multiphysics®.

A continuación, se compara el  $TL$  de un silenciador de sección transversal elíptica con los conductos de entrada/salida descentrados. Dicha sección queda definida por las longitudes de sus ejes mayor y menor, siendo estas  $L_y = 0.25$  m y  $L_x = 0.15$  m. Los conductos de entrada/salida, de radio  $R_t = 0.0268$  m, se encuentran a una distancia  $d = 0.04$  m del centro de la elipse. Las características del monolito son las mismas que en el caso anterior del silenciador de sección circular.

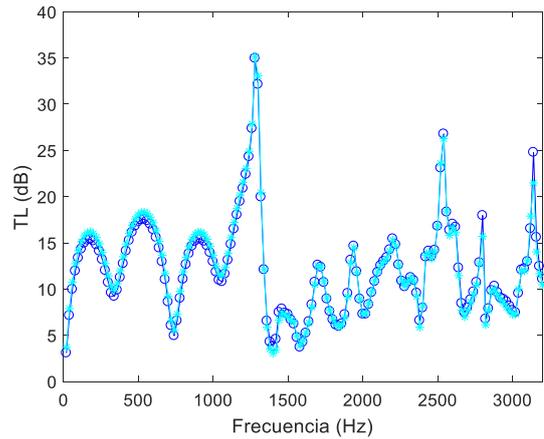


**Figura 3.** Sección transversal del silenciador elíptico.

En la Fig. 4 se puede observar como el  $TL$  obtenido con la técnica de ajuste modal y el calculado con el programa comercial Comsol Multiphysics® presentan una excelente concordancia, con mínimas discrepancias que pueden ser debidas, entre otros motivos, a las diferencias entre las mallas utilizadas. Sin ser exhaustivos, cabe indicar que el tiempo de cálculo necesario en el caso de ajuste modal es, aproximadamente, unas diez veces menor que el de la simulación 3D de Comsol, lo cual pone de manifiesto las ventajas computacionales de la técnica propuesta.



(a)



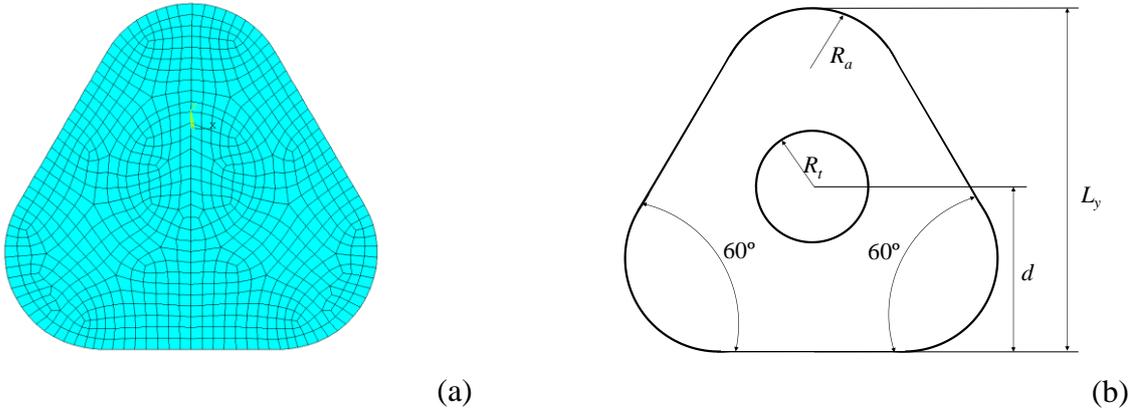
(b)

**Figura 4.** (a) Mallado de la sección transversal del catalizador elíptico; (b)  $TL$  del catalizador: \*\*\*, ajuste modal; ooo, Comsol Multiphysics®.

### 3.2. Comparación de distintas geometrías

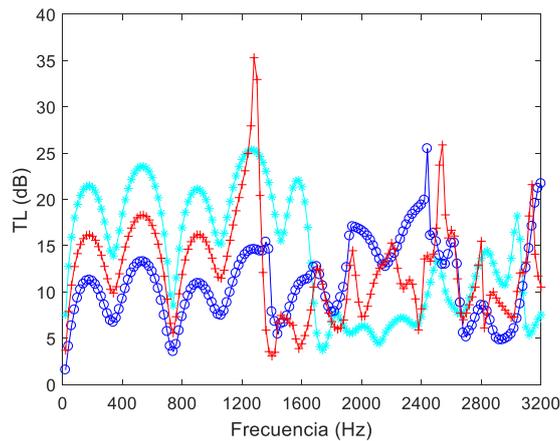
En esta sección se comparan distintas configuraciones de catalizador, es decir, con diferentes secciones transversales, como son circular, elíptica y triangular. En todos los casos las características del monolito son las mismas descritas en la sección 3.1. Las geometrías de los catalizadores circular y elíptico también son las descritas en las secciones anteriores, mientras que la sección triangular se puede observar en la Fig. 5. La altura del triángulo es  $L_y = 0.1438$  m, mientras que el conducto central de radio  $R_t = 0.0268$  m se encuentra situado a una

distancia  $d = 0.07125$  m de la parte inferior del catalizador y el radio de chaflán viene dado por  $R_a = 0.04$  m.



**Figura 5.** (a) Mallado de la sección transversal del catalizador triangular; (b) Dimensiones de la sección transversal del silenciador triangular.

En la Fig. 6 se presenta la comparación del  $TL$  de las distintas geometrías anteriormente mencionadas. Se puede observar que en el rango de bajas y medias frecuencias, hasta 1600 Hz, la configuración circular presenta mejores valores de atenuación (excepto en un pequeño intervalo de frecuencias en torno a 1300 Hz), mientras que en rango de 1600 Hz hasta aproximadamente 2500 Hz, la geometría triangular presenta mejores resultados. El comportamiento acústico a baja frecuencia del catalizador depende fundamentalmente de la relación de áreas entre el conducto y la cámara, por lo que a mayor área transversal de la cámara (siendo iguales todos los conductos), mayor  $TL$  presenta el catalizador. Sin embargo, a elevadas frecuencias, la irrupción de modos de orden superior y su propagación multidimensional dan lugar a un comportamiento más irregular que impide establecer tendencias claras.



**Figura 6.**  $TL$  de varias geometrías con monolito cerámico: +++ , elíptica; \*\*\*, circular; ooo, triangular.

#### 4. CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo numérico basado en la técnica de ajuste modal para evaluar el comportamiento acústico de catalizadores con monolito cerámico cuya sección transversal es de geometría arbitraria y no admite por tanto tratamiento analítico. La comparación de los resultados del modelo con medidas experimentales ha demostrado su validez desde el punto de vista práctico. Además, desde el punto de vista computacional, la metodología propuesta tiene una precisión considerable, similar a la de una formulación 3D de EF, a la par que reduce el coste computacional. Adicionalmente, se observa que la geometría del catalizador influye notablemente en la atenuación, sobre todo en el rango de medias y bajas frecuencias.

#### 5. AGRADECIMIENTOS

Proyecto realizado con la Ayuda Fundación BBVA a Investigadores y Creadores Culturales 2016. La Fundación BBVA no se responsabiliza de las opiniones, comentarios y contenidos incluidos en el proyecto y/o los resultados derivados del mismo, los cuales son total y absoluta responsabilidad de los autores.

#### REFERENCIAS

- [1] F. D. Denia, A. G. Antebas, R. Kirby, F.J. Fuenmayor, *Multidimensional acoustic modelling of catalytic converters*, ICSV, Kraków, 2009, pp. 1-8.
- [2] F. D. Denia, J. Martínez-Casas, J. Carballeira, E. Nadal, F. J. Fuenmayor, *Comparación acústica de técnicas modales para la simulación acústica de dispositivos de escape con monolito*, XXI CNIM, Elche, 2016, pp. 1531-1536.
- [3] F. D. Denia, E. M. Sánchez-Orgaz, J. Carballeira, F.J. Fuenmayor, *Modelado del comportamiento acústico de catalizadores cónicos mediante colocación puntual*, *Tecniacústica*, Valencia, (2015).
- [4] S. Allam, M. Åbom, “Sound propagation in an array of narrow porous channels with application to diesel particulate filters”, *JASA*, **29**, pp. 882-901 (2006)
- [5] A. Selamet, V. Easwaran, J. M. Novak, R. A. Kach. Wave attenuation in catalytic converters: reactive versus dissipative effects, *JASA*, **103**, pp. 935-943 (1998).
- [6] F. D. Denia, J. Martínez-Casas, J. Carballeira, E. Nadal, F. J. Fuenmayor, “Computational performance of analytical methods for the acoustic modelling of automotive exhaust devices incorporating monoliths”, *J. Comput. Appl. Math.*, disponible online, <http://doi.org/10.1016/j.cam.2017.03.010> (2017).
- [7] R. Kirby, “A comparison between analytic and numerical methods for modelling automotive dissipative silencers with mean flow”, *J. Sound Vib.*, **325**, pp. 565-636 (2009).
- [8] E. M. Sánchez-Orgaz, F. D. Denia, F. J. Fuenmayor, R. Kirby, *An efficient technique based on numerical mode matching for the acoustic characterization of dissipative silencers with thermal gradients*, 11<sup>th</sup> WCCM, Barcelona, 2016.

- [9] R. Glav, “The point-matching method on dissipative silencers of arbitrary cross-section”, *J. Sound Vib.*, **189**, pp. 123-135 (1996).
- [10] R. Kirby, “Modeling sound propagation in acoustic waveguides using a hybrid numerical method”, *JASA*, **124**, pp. 1930-1940, (2008).
- [11] R. Kirby, “Transmission loss predictions for dissipative silencers of arbitrary cross section in the presence of mean flow”, *JASA*, **114**, pp. 200-209 (2003).