

# NOTRE DAME DE PARÍS

[ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE LA CATEDRAL GÓTICA]



## TRABAJO FINAL DE GRADO

---

Escuela Técnica Superior de Arquitectura

Grado en Fundamentos de la Arquitectura

Curso 2020-2021

Autor : Juanjo Pla Nacher

Tutor : Luisa Basset Salom



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



ESCUELA TÉCNICA  
SUPERIOR DE  
ARQUITECTURA

# GUIÓN

## RESUMEN / ABSTRACT

### I. INTRODUCCIÓN

- OBJETIVOS
- METODOLOGÍA
- OBJETIVOS DEL DESARROLLO SOSTENIBLE

### II. HISTORIOGRAFÍA

- CONTEXTO HISTÓRICO (El monasterio, la Catedral, el Palacio)
- EL GÓTICO (Características generales, reglas estructurales, métodos geométricos de diseño, tratados)
- EVOLUCIÓN DE LA CATEDRAL (En busca de la luz)

### III. ANALISIS ESTRUCTURAL

- MATERIALES (Materiales, forma de trabajo, tradición)
- CARGAS (Empujes horizontales y cargas gravitatorias)
- ESQUEMA ESTRUCTURAL (Porticos)
- TRANSMISIÓN DE CARGAS (individual-conjunto)

### IV. PROPUESTA ESTRUCTURAL

- CONSIDERACIONES PREVIAS (Contexto, Afección de las Bóvedas)
- CUBIERTAS METÁLICAS (Tipos, geometrización, esquema, propuesta)
- PROPUESTA CONJUNTO ESTRUCTURAL (Detalle)
- COMPROBACIÓN

### VI. CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFÍA

INDICE DE FIGURAS

NOTAS

## Resumen

El objeto de este trabajo final de grado es realizar un análisis desde el punto de vista estructural de los elementos afectados en el incendio de la catedral gótica Notre Dame de Paris. Una vez realizado este análisis estructural y conocido suficientemente el comportamiento de los elementos con capacidad portante, se estudiarán distintas soluciones de cubierta, y se realizarán propuestas con otros materiales. El uso de materiales con propiedades mecánicas completamente diferentes a la piedra y la madera permitirá comparar cómo pueden resolverse las distintas soluciones estructurales que conforman la catedral e incluso realizar una propuesta de sustitución de las bóvedas afectadas en el reciente incendio, pudiendo limitarse la intervención a una mera sustitución de los elementos afectados, la techumbre, con intención conservacionista o a una propuesta estructural nueva.

**Palabras Clave:** *Notre Dame de Paris, arquitectura gótica, arco apuntado, techumbre, análisis estructural.*

## Abstract

The aim of this Final Degree Project is to perform an analysis of the elements affected in the fire of the gothic cathedral Notre Dame de Paris from the structural point of view. After performing the structural analysis and knowing sufficiently the behavior of the elements with bearing capacity, different roof solutions will be studied, and proposals made with other materials. The use of materials with mechanical properties completely different to stone and wood will allow us to compare how the different structural solutions of the cathedral can be solved and even make a proposal to replace the vaults affected in the recent fire, the intervention being limited to a mere replacement of the roofing affected elements with conservation intent or a new structural proposal.

**Keywords:** *Notre Dame de Paris, Gothic architecture, pointed arch, roofing, structural analysis.*

## Resum

L'objecte d'aquest treball final de grau és realitzar una anàlisi des del punt de vista estructural dels elements afectats en l'incendi de la catedral gòtica Notre Dame de Paris. Una vegada realitzat aquesta anàlisi estructural i conegut prou el comportament dels elements amb capacitat portant, s'estudiaran diferents solucions de coberta, i es realitzaran propostes amb altres materials. L'ús de materials amb propietats mecàniques completament diferents a la pedra i la fusta permetrà comparar com poden resoldre's les diferents solucions estructurals que conformen la catedral i fins i tot realitzar una proposta de substitució de les voltes afectades en el recent incendi, podent limitar-se la intervenció a una mera substitució dels elements afectats, la sostrada, amb intenció conservacionista o a una proposta estructural nova.

**Paraules Clau:** *Notre Dame de Paris, arquitectura gòtica, arc apuntat, sostrada, anàlisi estructural.*

1

# INTRODUCCIÓN

La catedral de Notre Dame de París es el monumento histórico que, junto a la torre Eiffel, define el carácter parisino en su proyección internacional, siendo además ambos, análogos monumentos en esencia, alfa y omega en la línea cronológica de la arquitectura esquelética.

A nivel arquitectónico y social, se ha convertido en un sello de identidad, un elemento más del nacionalismo Francés, tan reconocible como su propia bandera o su cocina. La bandera es al nacionalismo lo que Notre Dame al estilo gótico, son conceptos inherentes, por lo que, no es de extrañar que, tras el pasado incendio del 15 de abril de 2019, el debate sobre cómo se debe intervenir en este monumento haya copado las discusiones nacionales e internacionales en materia de conservación del patrimonio histórico.

Este trabajo de final de grado busca introducirse, si bien, tímidamente, en el discurso que rodea la obra arquitectónica definitoria no solo de una nación sino de un movimiento artístico, la época de las catedrales, el periodo histórico gobernado por lo gótico. Por ello, la importancia de establecer una línea cronológica clara en la evolución social, cultural, económica, y como se verá posteriormente, artística, de este periodo, con el fin de empaparse de las raíces del estilo dónde se homogeneiza el arte, la arquitectura y las estructuras en una masa definitivamente sólida que será la base en el cambio de paradigma en la construcción.

## OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

Este trabajo final de grado plantea un estudio en profundidad del estilo y los elementos que definen la catedral gótica, conocimiento que resulta imprescindible para poder realizar un análisis estructural de Notre Dame de París, con objeto de obtener una visión completa del monumento, que dé pie a poder realizar una propuesta suficientemente sólida para los elementos de la cubierta, bóvedas y techumbre, afectados durante el incendio, siendo la finalidad última de este trabajo, dejar constancia de la suma importancia de este modelo arquitectónico, que es base para la proliferación y repetición del estilo en monumentos coetáneos y generación de posteriores arquitecturas.

Por todo esto, se inicia el trabajo realizando un análisis historiográfico de los condicionantes y determinantes que propician la germinación del nuevo arte en el marco social y cultural, enfatizando en la importancia de la evolución que sufre hasta constituirse como un estilo propio, definitorio de un periodo histórico, el gótico, dando una luz especial a la evolución del arco.

En este aspecto, se ha considerado de vital importancia, en el análisis estructural, un estudio previo de los materiales, que, aporta una línea de entendimiento en la evolución del arte y las estructuras que no podría valorarse de ser despreciado, puesto que son estos mismos los que definen las posibilidades formales de un elemento y que, por tanto, enderezan un movimiento a seguir una vertiente u otra. Las imposiciones por materialidad se traducen en avance formal, de un elemento, póngase el arco, agotada esta línea de trabajo, regresa el material para continuar en el avance evolutivo del mismo y se reitera el procedimiento.

Conocido el comportamiento del material, se procede a estimar las cargas representativas que afectan al monumento, principalmente los pesos propios de las bóvedas de la nave central y el empuje que estas ejercen sobre los contrafuertes, por medio de un método gráfico empleado con anterioridad en el cálculo de esfuerzos en arcos, el método Snell. Conocido el valor de estas a través de una representación estructural gráfica de una sección tipo se procede a determinar la transmisión de esfuerzos en la estructura de la catedral.

Por último se plantean criterios para poder realizar una propuesta estructural nueva que sustituya la techumbre afectada durante el incendio, originalmente en madera, por una estructura metálica, y se realizará de manera cualitativa una comprobación de los elementos que la forman mediante el método de los nudos, cerrando el estudio que compete este trabajo de final de grado.

## OBJETIVOS DEL DESARROLLO SOSTENIBLE

Los objetivos del desarrollo sostenible o por sus siglas en castellano ODSs contienen 17 puntos que buscan aportar estándares y herramientas a profesionales de diferentes campos como es el caso de la arquitectura, para poder alcanzar los objetivos para la agenda 2030 de las naciones unidas (UN) con el fin último de erradicar la pobreza, asegurar la paz y la prosperidad en el planeta. Estos puntos son los siguientes:

### 1. **Sin Pobreza**

Uno de los mayores desafíos mundiales aunque no resulta de aplicación en lo que respecta a la materia del presente trabajo.

### 2. **Hambre Cero**

La erradicación del hambre extrema en el planeta es un objetivo que debe concernir a cualquier ámbito de la sociedad sin distinción de campos, sin embargo, en el ámbito de las estructuras parece desdibujarse la conexión con este mismo objetivo, no obstante, y dado que el objeto del trabajo es la catedral de Notre Dame de Paris, edificio innegablemente ligado a la institución de la iglesia católica, si se puede decir que a lo largo de la historia, supuestamente, se ha contribuido a poner fin a la desnutrición y al hambre extrema mediante el ejercicio de la caridad y limosna, conceptos de los que se habla en el apartado del contexto histórico del presente trabajo.

### 3. **Buena Salud y Bienestar**

Tratando este punto sobre los avances contra las principales causas de muerte y enfermedad, se puede concluir que si bien no se trata el tema directamente en este trabajo, sí consideramos las estructuras como una parte fundamental de la arquitectura y esta como una potente herramienta en la generación de espacios más salubres y seguros se puede concluir que indirectamente se contribuye, aunque mínimamente, a este punto.

### 4. **Educación de Calidad**

Este objetivo va encaminado a lograr una educación primaria y secundaria de calidad e inclusiva para todos los niños y niñas por lo que quedaría excluido en lo que a este trabajo influye. No obstante, si cabe destacar el papel de las escuelas catedralicias en la liberalización de la educación y la cultura que durante siglos había permanecido en el poder de un grupo de unos pocos privilegiados, el cuerpo clerical de la iglesia en las abadías monacales.

### 5. **Igualdad de Género**

El derecho humano básico a la no discriminación por razones de género es otro de los objetivos fundamentales para alcanzar un futuro sostenible. En la literatura de este trabajo se habla del nacimiento del amor cortes y la devoción mariana en contraste con la cultura del caballero y el dominio de la figura del Pantocrátor anterior. Esto aunque vago, puede relacionarse con la meta final de este objetivo, siendo el amor cortes y la devoción a la virgen el origen de la inclusión social de la figura de la mujer en el panorama sociocultural occidental.

### 6. **Agua Limpia y Saneamiento**

Asegurar el acceso al agua potable, a una red de saneamiento e higiene y proteger los recursos hídricos son algunos de los temas que se tratan en este punto. Poco se puede relacionar con el objeto del trabajo, si bien, de la misma forma que en el punto de buena salud y bienestar, se puede afirmar que la arquitectura es una de las herramientas más potentes para, con una buena gestión por parte de las partes pertinentes, alcanzar este objetivo de desarrollo sostenible.

### 7. **Energía Limpia y Asequible**

El acceso a una energía eléctrica limpia es fundamental en la lucha contra el cambio climático, por ello, resulta necesario abandonar las energías fósiles y abrir paso a fuentes renovables como la energía solar, eólica o termal. En este sentido, podría ser de aplicación en el trabajo de estudio, en tanto en cuanto, la producción del material elegido para realizar la propuesta estructural, los perfiles de acero, se obtengan mediante procesos limpios, en los que el consumo de energía sea eficiente y en la medida de lo posible se introduzcan, para la obtención de la energía empleada en la producción, fuentes renovables.

### 8. **Trabajo Decente y Crecimiento Económico**

Este punto plantea alcanzar niveles de producción y crecimiento económico sostenible a través de la innovación tecnológica y la implementación de medidas por parte de los gobiernos para estimular la creación de trabajo con el fin de erradicar la pobreza extrema y luchar contra las formas de esclavitud moderna. No interviene directamente en lo que respecta a la materia del presente trabajo.

## 9. **Industria, Innovación e Infraestructura**

Inversión en infraestructura e innovación tecnológica y científica que derive en crecimiento económico. Este punto se relaciona con los medios de transporte y el empleo de energías renovables. No resulta de aplicación.

## 10. **Desigualdades Reducidas**

El objetivo fundamental de este punto es reducir la brecha de desigualdad económica existente entre el 10% de personas más ricas y más pobres del planeta, con medidas como la migración ordenada, regulada y segura de personas entre países. En esta línea poco se puede relacionar con el presente estudio por lo que se concluye que este punto de los objetivos del desarrollo sostenible no interviene en el trabajo.

## 11. **Ciudades y Comunidades Sostenibles**

El incremento de población en las ciudades especialmente en los países desarrollados crece de manera exponencial lo que implica que las medidas de sostenibilidad que se implementen en estas capitales de la superpoblación va a tener un impacto notable en el global.

Este punto queda fuera del alcance del objeto de trabajo, sin embargo, tratando este trabajo de Notre Dame de París, y siendo París una de las ciudades más pobladas de Europa, las medidas adoptadas en esta ciudad que vaya en pro de la sostenibilidad contribuirán notablemente a este objetivo.

## 12. **Producción y Consumo Responsable**

Conseguir un crecimiento económico sostenible requiere una reducción drástica de la huella de carbono que se produce en la actividad de consumo de los bienes que se generan. En este sentido la gestión de residuos y recursos empleados en la producción, en este caso en concreto, del acero empleado en la generación de los perfiles que formarán las cerchas metálicas de la propuesta, será fundamental en la contribución a este objetivo.

## 13. **Acción Climática**

Los efectos del calentamiento global tienen consecuencias directas sobre la economía del planeta, los cambios en el clima y los desastres climáticos. Acciones encaminadas a paliar estos efectos deben ser tomadas de forma colectiva y urgente. Siendo los gobiernos los principales responsables en la toma de decisiones y medidas que afectan a la sociedad se evidencia la desconexión de este punto con el objeto del trabajo.

## 14. **Vida Bajo el Agua**

Este punto trata la importancia de el efecto de los océanos sobre los sistemas de balance globales que hacen habitable el planeta. La forma en la que gestionamos este recurso para luchar contra el cambio climático y la contaminación marina es de vital importancia. La relación del tema de trabajo con este punto es nula.

## 15. **La Vida en la Tierra**

Los humanos dependen de la tierra tanto como del agua para su supervivencia y la de miles de especies animales. Una gestión responsable de los recursos agrícolas y forestales es fundamental en la lucha contra el cambio climático y el calentamiento global, siendo así, el empleo del acero como material sustitutivo, de la madera de roble, en la creación de las cerchas que forman la cubierta de Notre Dame de París, se percibe como un paso encaminado hacia la buena gestión de este recurso natural. Por tanto, este punto es de aplicación.

## 16. **Paz, Justicia e Instituciones Sólidas**

La violencia e inseguridad tienen un impacto directo sobre la economía de los países. Las guerras, el terrorismo o las dictaduras son asuntos que deben ser abordados globalmente por los gobiernos con objeto de implantar los derechos humanos en todas las naciones. A estos efectos no se puede establecer una relación directa o indirecta de este punto de los objetivos del desarrollo sostenible con el tema objeto de este trabajo.

## 17. **Alianzas para los Objetivos**

La cooperación global en la lucha por lograr los objetivos del desarrollo sostenible y alcanzar la agenda 2030 de las naciones unidas es fundamental y requiere de un apoyo económico anual de 5 billones de dólares. Las medidas planteadas para alcanzar este objetivo se engloban en diferentes campos, el financiero, el tecnológico, la construcción o el comercio entre otros. Resulta difícil relacionar este punto con el trabajo realizado por lo que, se finaliza este apartado y punto enfatizando la importancia de la colaboración internacional en la misión de alcanzar y promover la difusión de cada uno de los puntos tratados.

2

# HISTORIOGRAFÍA

## CONTEXTO HISTORICO (El monasterio, la catedral, el palacio)

Asentarse en el contexto de la trama gótica implica analizar principalmente los hitos político-sociales y económicos que preceden el periodo vulgarmente conocido como la época de las catedrales, donde encontraremos que la piedra angular que alimentará el proceso creativo y los cambios sociales que propiciarán la aparición del nuevo arte será la Iglesia católica romana.

Siguiendo el índice del libro la época de las catedrales de Georges Duby, dividiremos el periodo comprendido entre 980-1420 en tres, el monasterio, la catedral y el palacio.

### EL MONASTERIO. 980-1130 (ROMANICO)

Tras la caída del Imperio romano en Ravena, nueva capital del Imperio (después de Roma), en el siglo V, y el consiguiente ascenso de los pueblos barbaros, (sajones, godos, y normandos), se inicia el periodo conocido como la edad media (S.V-XV) acuñado también con el nombre de oscurantismo, definido por la real academia de la lengua española como "oposición sistemática a la difusión de la cultura" o "defensa de ideas o actitudes irracionales o retrógradas". Esta definición arroja una primera pincelada al marco de sucesos que caracterizan los diez siglos de la historia de occidente comprendidos en este periodo, en los que descubriremos la precisión del término con que la identificamos.

Tras la victoria del rey Franco Carlo Magno sobre los pueblos barbaros se inicia la época del imperio carolingio donde se instaura el catolicismo como única religión del imperio y que culminará con la formación, tal y como la conocemos, de los países occidentales modernos. En su disolución apreciamos los albores del arte románico, estilo adoptado en las antiguas regiones del imperio, exportado por estos pueblos bárbaros en el cese de sus incursiones y su asentamiento en distintos puntos de Europa. *"Los gérmenes iniciales del arte románico se perciben en el instante en que los normandos se instalan y se amansan, en que el rey de Hungría se convierte, en que el conde de Arles expulsa de sus guaridas a los piratas sarracenos que acaban de exigir el rescate por el abad de Cluny. Después del año 980, no se observan más abadías saqueadas ni multitudes de monjes atemorizados que huyen con sus reliquias y tesoros"*<sup>1</sup>.

La imposición de la religión católica como religión del imperio supone el posterior ascenso del arte y la arquitectura románicos en el panorama de los dominios monásticos, en los que a partir del siglo X se percibe un adelanto en las técnicas agrícolas que permitirán el progreso de Europa en los próximos tres siglos. Como relataba el obispo Thietmar de Merseburg en sus crónicas: "Habiendo llegado a los mil años de la concepción de Cristo Salvador por la Virgen sin pecado, se vio brillar en el mundo una mañana radiante". Este mensaje de optimismo confirma el inicio de una época de prosperidad económica derivada de los avances en el mundo agrario en una Europa feudal en la que los señores dominaban con brazo de hierro una sociedad miserable que se está preparando para un cambio.

La profusa difusión del arte románico tiene varias razones fundamentales, la primera de ellas es el carácter nómada que sigue existiendo en la sociedad, al menos en aquella responsable de la creación de la obra artística, la cumbre de la sociedad, aquellos pocos privilegiados, reyes, príncipes, obispos, señores, los cuales se desplazaban de una ubicación a otra, al haber acabado con los recursos que se podía ofrecer. Una capitanía errante que al establecer su corte diseminaba la semilla del arte románico en aquel lugar donde se desplegaba. La siguiente razón radica en la cohesión de los niveles más altos de cultura de la sociedad, cohesión cuya base se sitúa la herencia cultural carolingia. Por último, y siguiendo la línea anterior, cabe hablar de la homogeneidad de creencia, la religión católica establece su hegemonía en el siglo VIII, al ser usada como herramienta de uniformidad y control social por el imperio carolingio, el cual había visto como responsable de la caída de Roma no solo la horda de invasiones bárbaras, sino la heterogeneidad a nivel social. *"la aristocracia del siglo XI, reunida bajo una misma fe, compartía así mismo los mismos ritos, lenguaje, herencia, cultura, memoria, el prestigio de roma y el del Imperio"*<sup>2</sup>.

No obstante, serán inicialmente los monjes quienes portarán la carga de la transmisión cultural, y por ende, artística en esta primera etapa de la edad media, estableciendo el monasterio como base de mandos del progreso y la evolución artística.



*figura1. Fresco de la Iglesia de Tahull, Valle de Bohí. Declarada Patrimonio de la Humanidad por la UNESCO en el año 2000. Representación gráfica del arte románico mediante la figura del Pantocrátor.*

En las regiones más desarrolladas de occidente, concretamente en el reino de Francia, empieza a producirse, entorno al año 1000 una serie de cambios sociales fundamentales en la comprensión de surgimiento del arte románico, el feudalismo. El feudalismo se basa en las relaciones de vasallaje, bien sea entre siervo y señor, sociedad e Iglesia o Iglesia y Dios, quedando uno, no solo subordinado al otro, sino bajo su manto, su protección. Esta concepción explica y es motor de la generación artística, el temor a Dios, señor supremo, al cual se intenta comprar favor por medio de las donaciones particulares, donaciones piadosas por los difuntos, que alimentan, ahora menos escasamente, los medios para su realización. El arte y la arquitectura, en este punto, están consagrado a la liturgia, la religión, la Iglesia y el cristianismo de principios del siglo XI aparece como una religión de muertos. La importancia de los ritos funerarios y las donaciones de principios de siglo XI perdurará prácticamente hasta la actualidad. *“La limosna lava el pecado como el agua apaga el fuego : la donación piadosa constituyo entonces el gesto de piedad fundamental de una cristiandad aplastada por el sentimiento de culpa inevitable”*<sup>3</sup>. En el ámbito económico estas donaciones piadosas explicarán ,junto con la fragmentación de las herencias en favor de la iglesia, el impulso que entre 980 y 1130 nutre producción artística, el arte románico, el cual no hubiera alcanzado su verdadera magnitud.

No obstante, esta forma de ganar el favor de Dios no era la única, aunque si la más extendida. La peregrinación aparece como otro instrumento de salvación del alma del cristiano, el cual ante el apremio de la muerte se despojaba de sus lazos con el mundo terrenal para emprender un éxodo, al estilo del antiguo testamento, en busca de la tierra prometida. Acercarse al reino de los cielos era una hazaña heroica, no solo por la inminencia del momento de la muerte, también la duración de la travesía, puesto que todo cristiano aspiraba a orar a los pies de los tres santos sepulcros, el de san Pedro, el de Santiago y el de Cristo. Esto hizo que esta forma de redención de los pecados se hiciera especialmente popular entre

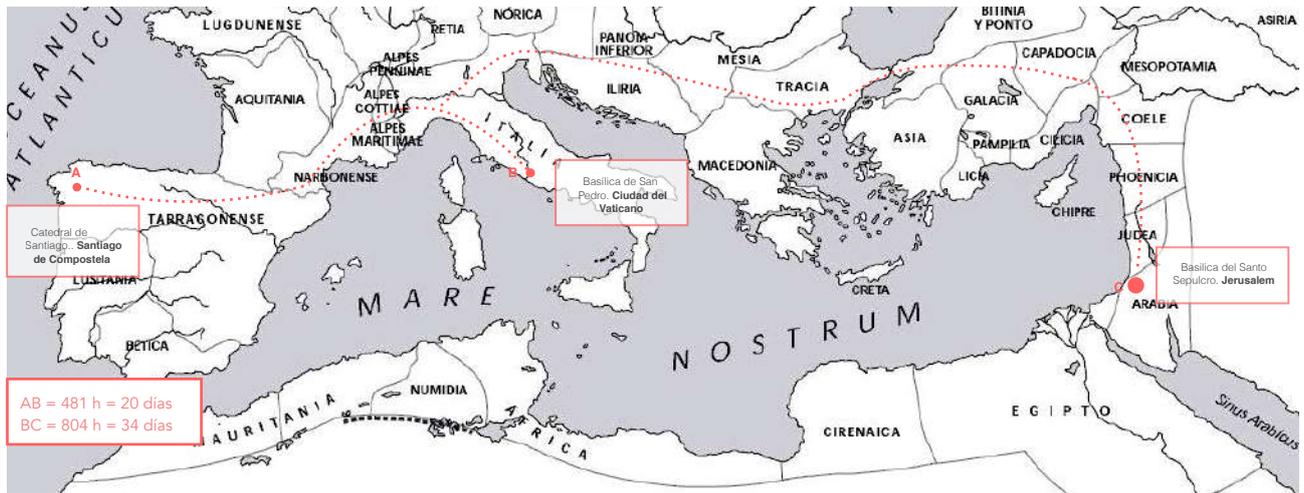


figura2. Mapa de Europa con las provincias del imperio Romano. Ubicación de los tres santos sepulcros y tiempo de peregrinación.

la sociedad caballeresca, los caballeros, cuya máxima, la valentía, es marca de tan formidable odisea. La penitencia sitúa, de esta manera, su homólogo en la peregrinación. Figura 2

La sociedad y la cultura del siglo XI están marcados por la figura del caballero, el rey de la guerra. La violencia, el honor, la audacia, vigor, fidelidad son sus marcas de identidad. Poco a poco esta visión cortesana del héroe caballeresco arraiga en la sociedad feudal como canon de comportamiento. Para adaptarse a la nueva sociedad en la que los vínculos de servidumbre individual y colectiva se forjan en las grandes cortes europeas siguiendo el ideal caballeresco, la iglesia del siglo XI se cubre de oro y piedras preciosas y posteriormente pone a su servicio estos caballeros, en un intento de prevenir la laicización de una sociedad aun temprana. Nacen así los caballeros de las cruzadas, consagrados a Dios y la Iglesia, que alrededor del siglo XII traerán con sus victorias los tesoros más brillantes conocidos por la sociedad occidental. *“Los caballeros que en las fronteras de la cristiandad acaban de arrollar a una banda musulmana: Una vez reunido el botín, retiraron una enorme cantidad de metal, plata y oro, y no olvidando el boto que habían hecho a dios, la enviaron inmediatamente al monasterio de Cluny”<sup>4</sup>.*

Si bien es cierto que la caballería domina la cristiandad latina, en el ámbito espiritual encontramos un patrón diferente. Los monjes se sitúan en este periodo histórico a la cabeza, actuando como agentes de la redención colectiva. De igual forma que Jesucristo se sacrifica en la cruz por la salvación de la humanidad, son los mojes los encargados de realizar el sacrificio último en favor del colectivo actuando el monasterio como órgano imprescindible en esta cruzada. Este hecho explica la grandiosa proliferación y prosperidad de la institución monástica, originada en torno a la adoración de las reliquias de los santos, puesto, no olvidemos, nos encontramos ante una cristiandad prominentemente dominada por la muerte. La importancia de la institución monástica en el siglo XI genera una renovación espontánea de los monasterios, puesto que, para alcanzar la gloria de dios, su santuario en la tierra, el monasterio, debía de reflejar la grandeza de la luz divina. Nace de esta reforma la congregación, reunión de varios monasterios bajo la dirección de un superior general, de la que dependen muchos de los rasgos de la creación artística, el arte sagrado, la arquitectura, puesto que, las relaciones de parentesco entre los diferentes monumentos de esta época, menos tienen que ver con la vecindad geográfica que con la filiación monástica. Entre las distintas congregaciones surgidas en el siglo XI será la orden de Cluny la que se impondrá soberana y ejercerá mayor influencia en la sociedad feudal, generación artística y cultural. Crisol de arte y cultura, esta orden erigida alrededor del año 1000 por san Odión, se vinculó directamente a la iglesia de Roma, escapando de los lazos de poder temporales, generando un imperio autónomo que prontamente adquirió un carácter antiepiscopal, destruyendo el sistema de estado carolingio basado en la soberanía conjunta del conde y el obispo, ambos regidos por el soberano. El triunfo de Cluny supone un regreso a nivel cultural, opuesto a las escuelas catedrales, que encontrarán su máxima expresión en los siglos venideros, tanto Cluny como el feudalismo lucharán conjuntamente para destruir los fundamentos antiguos, las

tensiones humanistas y el desarrollo cultural. Según George Duby : *“Junto con el proceso de la economía rural y la instauración del feudalismo, el éxito de Cluny representa el hecho más importante de la historia europea del siglo XI”*<sup>5</sup>.

En el siglo XI podemos diferenciar dos itinerarios bien diferenciados en la tendencia monacal, los cuales comparten la misma voluntad de aislamiento o clausura. La primera de ellas, influida por el cristianismo bizantino, se desarrolla en la línea de Italia central donde se escinde la latinidad del helenismo, buscaba acercarse a Dios a través de la renuncia a lo corpóreo, a lo terrenal. El ascetismo eremitaño. Este estilo de vida monacal relegaba evidentemente la creación artística. La segunda tendencia compartía lazos con la tradición carolingia que la había impuesto en tiempos del imperio en gran parte de los monasterios europeos. Los benedictinos. Esta orden renegaba al igual que el ascetismo eremitaño de la acción evangelizadora, pero se diferenciaba con la anterior en dos principios fundamentales, el espíritu comunitario y la moderación. Los benedictinos siguen el dogma de la obediencia ciega, como primer escalón en el estado de humildad al señor, en este caso abad. De la misma manera que los hijos de las grandes casas feudales, los monjes benedictinos disfrutaban de una riqueza colectiva, siendo en sí mismos, individualmente, verdaderamente pobres.

Cluny adopta la regla benedictina como forma de integración en los marcos sociales medievales, aceptando la fortuna, el lujo, la opulencia, la ornamentación y sobre todo la limosna, que se consagra a Dios. Rechazando cualquier tipo de esfuerzo físico o carnal, dedicaban su existencia a la contemplación pasiva, despreciando incluso las actividades intelectuales. *“De las tres artes del trivium al monje no le parecían necesaria ni la retórica, elocuencia, ni la dialéctica, ciencia del razonamiento. Para la formación del monje solo es necesario la gramática”*<sup>6</sup>. Esta renuncia al humanismo posiblemente sea el punto de inflexión para diferenciar la estética austera del arte románico, forjado en los monasterios, de la estética imperial. La siguiente cita ayuda al entendimiento de la estética románica: *“La estética de la que procede el arte monástico era una estética cerrada, introvertida, para iniciados, hombres puros que, rechazando el mundo corrompido y sus seducciones, estaban en la vanguardia del pueblo cristiano en su marcha hacia la verdad”*<sup>7</sup>.

El arte medieval monástico, el Románico, hereda algunas de las formas y motivos del arte bárbaro, en especial los motivos vegetales, que no pretenden realismo en su concepción, tampoco la abstracción geométrica que le precedía, más bien, alcanzar el espejismo de la reencarnación, donde la policromía y los materiales más nobles juegan un papel importante en la transmisión de este efecto, este espejismo, que se traslada a la escultura. La reencarnación de Dios, de las imágenes de lo sobrenatural se enraízan por medio de la escultura en el mundo sensible. El renacimiento de la escultura monumental es el más importante avance artístico visto en el siglo XI, el cual encuentra sus raíces en las reminiscencias clásicas del arte imperial, donde el realismo resurge de la oscuridad en la que se había sumido occidente, tras la caída de Roma, y que muestra que, todo el conocimiento helénico no había desaparecido para siempre. *“El arte románico de las bóvedas, de los demonios esculpidos y las sirenas se mezcló en el pórtico de la iglesia monástica con las tradiciones clásicas del arte imperial”*<sup>8</sup>. Hasta este punto la escultura de la figura humana en la representación de los misterios del reino celestial apenas se vislumbra, será más tarde en las escuelas catedrales cuando los dialécticos comienzan a discutir la naturaleza de las tres personas divinas, padre, hijo y espíritu santo, revelando verdaderamente el rostro de Dios.

## **LA CATEDRAL. 1130-1280 (GÓTICO)**

En la definición de catedral : *“Iglesia principal en la que el obispo, con su cabildo, tiene su sede o cátedra”* se extraen dos ideas o conceptos fundamentales de este segundo periodo de la historia medieval. La catedral es la iglesia del obispo, por tanto, ya no será el monje la figura más representativa en el ámbito litúrgico, y tampoco el monasterio el órgano principal dentro de la jerarquía eclesiástica. Se produce una migración de poder en el seno de la institución eclesiástica encontrando su nueva ubicación en el corazón

de las ciudades, que durante los próximos dos siglos crecen incansablemente. Si bien, la catedral es el corazón de la ciudad, y la ciudad el más próspero lugar del siglo XII, es pues Notre Dame la más alta representación de esta nueva tipología edificatoria que nace cobijada por los más copiosos campos conocidos. La Ile de France, se alza triunfante en los amaneceres del siglo XII para acoger un nuevo estilo artístico, una estética innovadora cuyos ecos perduran hasta la actualidad, el gótico.

Es importante resaltar que, al menos, en los 60 primeros años de este periodo aludido con el nombre "la catedral" la verdadera iglesia del rey seguía siendo un monasterio, no una la catedral. Un monasterio, Saint-Denis-en-France, la "abadía madre" es la construcción primigenia donde Suger, maestro creador del arte gótico, realiza sus primeras experiencias y que servirá de precedente para la realización posterior de las grandes catedrales góticas, donde esta nueva estética encontrará su máximo esplendor. Es precisamente en Saint-Denis que aparecen las primeras estatuas enmarcadas del arte medieval sobre dosel al modo de los marfiles carolingios, con un nuevo motivo que será estandarte del gusto gótico. El surgimiento de los motivos marianos. La figura femenina se eleva, no solo en lo que respecta el ámbito litúrgico, también a nivel social, con el amor cortes, la figura de la dama florece. Este hecho es, posiblemente, uno de los hechos sociológicamente más relevantes desde la caída del Imperio Romano, ya que, durante siete siglos, no solo la figura femenina es despojada de su dignidad, también de su humanidad, las pocas imágenes femeninas que perduran responden a alegorías de los meses de la tradición clásica, la madre de Dios se encuentra en un segundo plano en el marco teológico. En lo que respecta el marco social esta posición se acentúa, hasta el punto de no reconocer la existencia del alma en la costilla de Adán, Eva, la primera mujer, responsable de la caída del hombre, responsable de todos los pecados del mundo.

En lo que respecta el medio económico del siglo XII, se produce un cambio notable en el paradigma. Las grandes riquezas siguen proviniendo de los señoríos feudales. La agricultura sigue siendo base de la economía, no obstante, aparece otra figura que progresivamente gana importancia, cuya fortuna no se constituye en tierras sino en bienes, inmuebles, posesiones, en definitiva, capitales. Los mercaderes que traficaban con mercancías en las ferias de Champaña se establecen junto con los nobles señores, el prelado eclesiástico y la monarquía en la cima de la pirámide social. No obstante, la figura de el mercader, el comerciante, el artesano, queda aún subordinada a las anteriores, debe ganarse su favor, especialmente el de los representantes de Dios en la tierra, la iglesia.

La opresión ejercida por la iglesia sobre la burguesía con el objeto de controlar los crecientes ingresos de este colectivo originó constantes conflictos entre los dos estamentos sociales. La violencia y tensiones generadas culminaba en cierto grado de entendimiento, tratados, en los que se reafirmaba el poderío eclesiástico y la subordinación burguesa. Se impone sobre la conciencia de los nuevos ricos, aludiendo al texto evangélico sobre la purificación del templo, "*ningún mercader puede agradar a Dios*"<sup>9</sup>, una moralidad, ciertos tabúes acerca de la obtención de su riqueza, conduciéndoles por un estrecho sendero hacia la donación, la limosna. Una vez más la iglesia sale victoriosa en la batalla por controlar el estamento socioeconómico.

Se puede establecer cierta analogía entre el surgimiento de la burguesía, la catedral y las donaciones. El nacimiento de un nuevo estrato social propicia el florecimiento en sus dominios, la ciudad, de una nueva tipología edificatoria, ambos constituyéndose como emblemas representativos de la misma, a través de las donaciones piadosas que ya no se materializan en tierras sino en dinero. El enriquecimiento del estamento eclesiástico a expensas de las donaciones piadosas del colectivo privilegiado, especialmente del rey, el cual practicaba la donación más extensamente que el resto, posibilita, en un corto periodo de tiempo, la proliferación, casi simultánea, en el territorio franco, de las catedrales, que se yerguen triunfantes como hitos de un nuevo periodo, la era de las catedrales y la ciudad.

El cambio en el paradigma económico y social afecta directamente el ámbito cultural, activamente dominado por la institución monástica, que hasta el siglo XI había sido difusora y cuna de saber y cultura, así como de la producción artística. De la misma manera en que la ciudad sustituye al campo, la catedral

sustituye al monasterio y con ello también las funciones de divulgación cultural y artística que le correspondían. Se convierte así en el centro de estudios la catedral y sus alrededores, los claustros -barrio que franquea la catedral- naciendo las escuelas catedralicias, más ligadas al presente. Se flexibiliza el estilo de enseñanza, que se asemeja, ahora sí, más a la forma de enseñanza clásica en grupos, y a la vez se hace más accesible, siempre para unos pocos afortunados. Sin embargo, la divulgación del saber seguía ligada al conocimiento de Dios, *"la inteligencia es la más eficaz de las armas, la que puede conducir a verdaderas victorias y escudriñar los misterios de Dios"*<sup>10</sup>. Será posteriormente, tras la reconquista de Toledo que se traducirán libros y versiones del griego y el árabe al latín, cuando en estas mismas escuelas se discutirán los temas clásicos, aparecerá el derecho y los estudios humanistas y más tarde las ciencias aplicadas, las matemáticas, la física y la metafísica. Todo el conocimiento que se consideraba al alcance de los hombres tenía su origen en Dios, es por ello que en el siglo XII cambia el modelo divino. Ya no se encuentran más referencias del Dios juzgador, el juez bíblico, [figura 1](#), sino del hombre, Jesús, bajo la forma de Cristo doctor.

Con el resurgimiento de las matemáticas, aritmética y geometría, gracias a las conquistas sobre el islam, renace no solo la filosofía de la antigua Grecia, también la ciencia, que va introduciéndose lentamente en el campo del saber escolástico. Este hecho influye notablemente sobre el terreno de la ingeniería civil y la arquitectura, puesto que, se presentaron las condiciones idóneas para poder realizar los primeros cálculos estructurales.

Es en Saint-Denis, [figura 3](#), dónde encontramos el primer monumento conocido cuya estructura fue realmente calculada por medio de la geometría y la aritmética, constituyendo un enorme paso en el camino en busca de la luz, tema que se desarrollará más ampliamente posteriormente. Otro gran avance en este sentido fue el descubrimiento de los arbotantes (París, 1180) que posibilitará la creación de construcciones más esbeltas y ligeras, introduciendo una mayor permeabilidad lumínica en los interiores de las catedrales, que se convertirán en un grandioso entramado de elementos estructurales que constituirán el armazón del arte gótico.



[figura3](#). Interior de la Abadía de Saint Denis. París, Francia

Hacia 1100 surgen nuevas órdenes religiosas, algunas cuya ideología se encuentra radicalmente opuesta a la opulencia y el lujo de la primera gran orden monástica, la orden de Cluny, que había perdido fuelle tras las críticas recibidas sobre su forma de vida abacial. No obstante, las que verdaderamente enraizaron en el marco social fueron aquellas que conciliaron la visión benedictina y cluniacense, especialmente la orden del Císter, que a partir 1145 representó la vanguardia de las ordenes monacales. La doctrina del Císter se enfrenta radicalmente a la escuela episcopal, al razonamiento y al saber escolástico. Según San Bernardo, fundador de la orden cistirciense, *"No hay nada más pernicioso que la dialéctica, que el razonamiento, aquel esfuerzo vano por hacer inteligible la fe"*<sup>11</sup>. La posición de San Bernardo caracterizará la lucha entre religiosos y laicos, e influirá en los estudios impartidos en las escuelas catedralicias, que vivirán en un constante mecimiento entre la apertura a las artes liberales y la ciencia y la estaticidad contemplativa de los ejercicios de fe que se yerguen como estandarte del Císter. Esta dualidad en el razonamiento sobre lo impartido sobre la fe y las personalidades de Dios se extrapola al ámbito artístico. El arte cistirciense se aproxima, de la misma manera que la visión de Suger, maestro de Saint-Denis y del arte Gótico, al pensamiento Dionisiano, a su teología de la luz, difiriendo en una característica fundamental, la ornamentación, contra la que se levantará. La concepción arquitectónica de esta orden retorna a los volúmenes románicos, másicos, austeros, romos, pero ahora si, luminosos. La luz, junto a la virgen, adquieren un papel primordial en el ámbito de la construcción cistircense, y contra las pretensiones iniciales de San Benito, su arte contribuyó a difundir profusamente el estilo francés, el *opus francigenum*, el arte mariano y de las catedrales. Suger introduce a Maria en el centro de la iconografía religiosa mientras San Bernardo la corona como reina de los cielos y la tierra.

El siglo XII se eleva como el siglo de la piedad mariana y el amor cortes, cientos de catedrales se levantan en su nombre, santa María, la madre de Dios, nuestra señora, nuestra dama, Notre Dame. Responsable de lavar los pecados del mundo, piadosa virgen Maria, protectora de los débiles, de los desamparados, su imagen se eleva como bandera hacia la salvación, no solo de los hombres, también, y este hecho es especialmente relevante, de las mujeres . Los valores femeninos son finalmente reconocidos. De la devoción del Císter por la figura de Maria surge una nueva orden, el Temple, consagrada a la virgen, una milicia de caballeros convertidos que alzan las armas en sus cruzadas en nombre de Nuestra Señora contra los enemigos de la cristiandad. La lucha contra la herejía es posiblemente uno de los puntos más relevantes de este periodo histórico, ya no solo en los tumultuosos confines de la cristiandad, sino en su seno. El interior del imperio cristiano estaba plagado de aquellos considerados como herejes, una jerarquía paralela que predicaba distinto a la iglesia, y por ello debían ser rápidamente reprimida. El Císter y el temple eran los principales responsables de esta misión, los cuales vieron en el arte el más imponente instrumento de represión, utilizado con fines propagandísticos el arte de las catedrales se diseminó en toda la extensión de sus dominios como arma contra la herejía.

En los primeros años del siglo XIII, la jerarquía eclesiástica se tambalea, no solo no ha podido erradicar la herejía del panorama social, sino que se abren nuevos frentes de batalla en el campo del saber de las escuelas de París, donde Amaury de Bene comienza su enseñanza : *"todo es uno, puesto que lo existente es Dios, en consecuencia, cada hombre es un miembro de Dios y, por lo tanto, escapa del pecado"*<sup>12</sup>. Este razonamiento sobre la personalidad divina y su relación con el hombre y el pecado desarma a la iglesia en su afán por controlar el comportamiento de la sociedad, fuertemente sujeto a la idea de la redención de los pecados a través de la limosna y la penitencia, ya que esta filosofía se acercaba en mayor medida al ideal y optimismo de la lírica caballeresca que regía la sociedad. Por otra parte, los maestros parisinos comienzan a indagar en las enseñanzas del filósofo pagano Aristóteles, que encuentra en Averroes el mayor aliado en la diseminación de su obra y conocimientos, mientras que, en Toledo, el equipo que trabajaba desde mitad del siglo XII en las traducciones de los volúmenes sobre la lógica de Aristóteles dan a luz, finalmente, a la madre de las ciencias, la Física y la Metafísica, dando respuestas y explicaciones racionales del comportamiento del universo. Estos supuestos ataques a la jerarquía eclesiástica promueven la centralización y el repliegue de los poderes eclesiásticos en la figura de Inocencio III, que ocupaba en esta época el trono de San Pedro, ejerciendo, como nunca antes, su poder absoluto sobre la cristiandad latina, sometiendo por completo la jerarquía social.

La victoria de Inocencio III, sobre los peligros que acechaban el catolicismo culmina con el concilio de Letrán, en cuyo programa constaba : *"eliminar la herejía y fortalecer la fe, fortalecer las costumbres, extirpar los vicios, implantar las virtudes, conjurar los excesos, calmar las discordias, establecer la paz, repudiar la tiranía y hacer prevalecer la verdad por todas partes"*<sup>13</sup>. La iglesia, como institución, sale fortalecida de la batalla que se le presentaba desde principio de siglo y sin ayuda de las ordenes monásticas que habían caído definitivamente en descrédito se establece triunfante en el nuevo panorama. Entre las repercusiones que tuvo el concilio de Letrán sobre la sociedad cabe destacar por lo atroz de las misma : la imposición sobre el pueblo judío de una marca de distinción que les excluía del resto de la sociedad. La discriminación sobre el colectivo judío que culminará con el más brutal genocidio conocido en la historia de occidente tiene su precedente inicial en esta medida, que desconecto desde este punto en adelante, al pueblo de Abraham de la sociedad latina de occidente. Se establece también en esta época la la santa inquisición que actuará como un abominable mecanismo para apagar las primeras luces de progreso que se vislumbraban en los últimos siglos de la edad media



*figura4. Arzobispo Freidrich Coch y Nacis, Dresden, 1933*

El creciente rechazo social a las antiguas ordenes monacales, el Císter y Cluny, por su forma de vida en la que, enmascarada de pobreza, se vivía la opulencia y el lujo, hace germinar el surgimiento de las ordenes mendicantes, los franciscanos y dominicos. Inicialmente considerados herejes por predicar una forma de cristianismo distinta a la que dictaba la iglesia de Roma, su ideal de pobreza absoluta atrajo a las masas de cristianos cansados de la hipocresía en la que había caído las ordenes monásticas . Su creciente popularidad hico imprescindible, no solo, incluirlos en el cuerpo eclesiástico, también, moldearlos, con el fin de emplearlos como otra herramienta de control y propaganda, posiblemente, la más eficiente. Las ordenes mendicantes se establecen en el corazón del motor económico del siglo XIII, las ciudades, donde encuentran el caldo de cultivo perfecto para difundir la verdadera doctrina, el verdadero ejemplo de Cristo. Conscientes de la magnitud de sus objetivos, franciscanos y, especialmente, dominicos encuentran necesario la formación en la razón para combatir las cruzadas que se les presentan en este nuevo siglo, la incredulidad de las masas que no han conocido al verdadero Dios, que conforma el cuerpo multiforme de la herejía. Por ello son bien conocedores de la dialéctica y filosofía de Aristóteles. La diferencia fundamental entre ambas ordenes radica en la tendencia en la que se desarrollan. Mientras que dominicos se establecen en el centro de la producción intelectual, franciscanos, y en especial su líder, Francisco de Asís *"junto a*

*Cristo, el gran héroe de la historia cristiana*<sup>14</sup> se asientan en el corazón de fieles y herejes, por la sencillez, fidelidad e integridad de su mensaje, imponiéndose victoriosos.

Las repercusiones que tienen las ordenes mendicantes sobre la producción artística, a nivel formal, inicialmente, por la sencillez de su filosofía, son escasas, apenas introducen ciertos elementos iconográficos que apoyaban su mensaje. No obstante, si que juegan un papel importante en la difusión y el tempo en la producción artística. La rapidez en la construcción de catedrales como Notre Dame de París, que se terminó en 1250, se debe a la combinación de tres factores principalmente: el florecimiento de la burguesía dentro de las ciudades, el incesante flujo de donaciones particulares que alimenta la iglesia desde varios siglos atrás y la necesidad de esta de difundir rápidamente el mensaje de Cristo.

La victoria de las ordenes mendicantes sobre la herejía elimina las barreras impuestas al estilo francés, el arte gótico, que en la segunda mitad del siglo XIII ilumina los territorios de la cristiandad latina, Europa occidental. La virulenta represión que desde la santa sede se impone sobre sus dominios, sumado a la voluntad de domino sobre los poderes temporales, y los desastres militares en las campañas de las cruzadas, que abandonan definitivamente el intento de reconquista del santo sepulcro, desencadenan, en los tiempos del papa Inocencio IV, innumerables conflictos que hicieron tambalearse de nuevo la institución eclesiástica. Los monarcas no se reconocen más, subordinados al obispo de Roma, el pueblo se levanta contra la moral de los sacerdotes, surgen las primeras huelgas de la historia, en definitiva, se derrumba el sueño de unir al mudo bajo la fe de Cristo. Se hace evidente que Europa es, simplemente, una pequeña porción del universo.

Las últimas décadas del siglo XIII se caracterizan por la abertura al comercio con el gigante asiático, cuyas dimensiones se empezaban a vislumbrar. En 1271, el Italiano Marco Polo abre la ruta de la seda. Italia empieza a sustituir a Francia como eje central de prosperidad europea gracias al comercio. Los hombres de negocios se enriquecen, la burguesía se impone en el marco social. La cristiandad se abre a la posibilidad de coexistencia con otras culturas y religiones, no busca más la forzosa unidad fuente de guerras y penurias, se vuelve transigente, gentil, más cercana al verdadero mensaje de Cristo. Por último, en el campo arquitectónico, el impulso inventivo se detiene debido a la supremacía de la dialéctica en los estudios de las escuelas catedralicias y a los estrechos lazos de la producción de arte con los preladados religiosos, formados mayormente por integrantes de las ordenes mendicantes, que se desvinculan de esta misión.

## **EL PALACIO. 1280-1420 (GÓTICO TARDÍO)**

La palabra palacio desciende del latín *palatium*, referida a la residencia del cesar sobre el monte Palatino de Roma. Residencia de la realeza, nobleza, del lujo. Así pues, comienza este nuevo capítulo de la edad media que comprende ambos siglos XIV y XV, en los que paradójicamente el crecimiento socioeconómico basado en la supremacía feudal origen del crecimiento previo se interrumpe, no siendo así la propensión al fausto en el ámbito artístico, que por el contrario se exacerba.

A nivel social, el siglo XIV se caracteriza por una regresión constante de sus números demográficos, debido , en gran parte, a las pandemias, la peste y la violencia. Las guerras, las cuales previamente se habían proyectado hacía el exterior, ahora las encontramos en el seno de la cristiandad, lo que reducirá inevitablemente también sus números, que habían alcanzado su máxima en el siglo XIII con las conquistas sobre la herejía de Inocencio III y San Francisco de Asís. Como parece lógico, aquellas regiones más prosperas, más densamente pobladas, cuyas aspiraciones territoriales eran mayores, fueron las más duramente golpeadas, Alemania, Francia e Inglaterra. Estas tres potencias confiaban su progreso en la economía feudal, fundamentalmente agraria, y el comercio vinculado al mediterráneo oriental. En realidad, la decadencia y el repliegue que se produce en esta etapa concierne, de manera más directa, a la sociedad

feudal primitiva, al señor y al siervo, nobles y campesinos son las grandes víctimas del cambio en el paradigma social y económico que se avecinaba desde aproximadamente un siglo.

Por contra, comerciantes, mercaderes, burgueses, encontraron en las rutas oceánicas que se abrían, nuevas vías para esquivar la depresión que afectaba los altos estamentos sociales feudales, imponiendo su supremacía, renovando y rejuveneciendo los estratos privilegiados de la pirámide social, que ahora amplía su ángulo superior dando espacio a las nuevas fortunas, cada vez más numerosas.

En cuanto a la cultura y la producción artística que durante siglos habían permanecido bajo el abrigo y control de la jerarquía eclesiástica, durante el siglo XIV encuentran el dinamismo perdido, se liberan y amplían, así como lo hace el estamento social. Se produce una laicización. Ya no quedan estrictamente asociadas y controladas por el prelado eclesiástico, se vuelven inclusivas, entendiendo incluso como accesible siempre para los, ya no, tan pocos afortunados. A medida que la base del tercio superior de la pirámide social se ensancha también lo hace la producción artística, la literatura, la pintura, la arquitectura, la cultura. Una nueva sociedad requería un nuevo arte, donde la propensión al lujo responde a las cada vez mas crecientes, cuantitativa y cualitativamente, fortunas burguesas.

El proceso de laicización del arte y la cultura va acompañado de la vulgarización del gusto. En el siglo XIV aparecen ciertas características artísticas que denotan el cambio en el mecenazgo de las obras de arte, el cambio de el orden creador, que no responde más a las exigencias del prelado si no de la burguesía, que reemplaza a la iglesia como responsable de la creación de obra artística. El conjunto de estas características podría englobarse bajo el proceso de vulgarización del arte, que responde al nivel cultural de este estrato social, la burguesía, el cual comienza, durante este nuevo siglo, a poder acceder a la educación que en los siglos anteriores quedaba reservada para los estamentos eclesiásticos. Un nivel de cultura limitado sumado al gusto por la cotidianidad y la individualidad hace proliferar un sin fin de objetos de reducido tamaño, fácilmente portables, que podían ser distribuidos fácilmente en las ferias y mercados, y que constituirán el bajo arte, el arte burgués.

Sin embargo, el alto arte, el arte que verdaderamente estaba consagrado a la institución eclesiástica, la arquitectura, la escultura, la pintura, queda subordinada a la individualidad del mecenazgo de príncipes, grandes abades y obispos, del papa, los cuales ya no buscan la homogeneidad de estilo que precedía este periodo si no la heterogeneidad que proporciona la individualidad del mecenas a la obra de arte, [figura 5](#). Por lo que en el marco de las artes más elevadas respecta, la laicización tiene un menor impacto, o por lo menos un impacto menos evidente, no obstante también se abre, se hace transigente a los motivos y temas profanos, en los que se exalta el poder de lo temporal sobre la divinidad.

Por lo que respecta al marco de los estudios y las escuelas catedralicias, cabe destacar la apertura progresiva, pero lenta, que, desde inicios del siglo XIII, se produce hacia el pensamiento laico. La necesidad de gente, cada vez más formada en conocimientos de derecho y filosofía romanos, es uno de los factores que posibilitaron esta apertura. Sin embargo, la decisión principal que abrió la brecha hacia la completa laicización de la educación, hacia la aparición de los estudios universitarios de París y Oxford, fue, un mal paso de las autoridades religiosas. *“En 1277 las autoridades religiosas prohíben en París la enseñanza de la tesis de Averroes, condenó, al mismo tiempo, ciertas propuestas enunciadas por Santo Tomas de Aquino”<sup>15</sup>.*

Ante este ataque de la institución a los pilares del pensamiento, la orden de dominicos reaccionó inmediatamente, no quedo impasible, se opuso categóricamente a la decisión de la santa sede, hasta el punto de prohibir dentro de la orden la negación del tomismo, llegando en 1323 a la canonización del santo. No obstante, fue en Italia realmente donde el retroceso impuesto no enraizó. Mientras en las escuelas de París y Oxford la influencia de los dominicos en la investigación teológica se transfirió a la orden de franciscanos.

Del conflicto entre pensamiento y religión se abrieron las vías hacia el pensamiento moderno. Dos figuras de la escuela de Oxford destacan especialmente, la del escocés John Duns, que planteaba que el número de verdades dogmáticas que pueden basarse en la razón es limitado, por lo que la fe debe ser el instrumento racional, y la figura de Guillermo de Ockham, verdadero artífice del cambio hacia la modernidad<sup>16</sup>.

El ockhanismo, se opone a la filosofía Aristotélica, y encuentra dos vías diferenciadas para comprender los dogmas cristianos, bien mediante el acto de fe, bien mediante el uso de la lógica, que se puede adscribir únicamente al mundo sensible, no al inteligible, el mundo de las ideas, que se encuentra en territorio de la fe. *“Cuando llega a la existencia solamente en el espíritu —tantum in anima—, tiene que escoger entre una cualidad real de esta substancia y un simple objeto de pensamiento, una especie de ficción”*<sup>17</sup>. Por tanto, y dado que el entendimiento de Dios pertenece al mundo inteligible, la inteligencia no se considera un instrumento para alcanzar la verdad del dogma, sino el amor.

Por una parte, esta doctrina hace posible, al liberar a dios del pensamiento escolástico, incluir el cuerpo de la sociedad en esta mística búsqueda, vulgarizándose. Por la otra, al no encontrar más necesidad de incluir a dios en el marco de la lógica, esta se libera, abriéndose a la laicización de la enseñanza.

El cambio en la iconografía y la imaginería que se produce a lo largo de la edad media se podría sintetizar según las distintas personalidades asignadas a la figura de Cristo, esbozando una idea de la metamorfosis social que se produce. Durante la época románica, los benedictinos implantan la imagen de Cristo juez en el centro de la iconografía cristiana, el Pantocrátor, [figura1](#). Más tarde, en el siglo XIII, los pensadores e intelectuales de las catedrales posicionan en los pórticos junto la imagen de la virgen María la de Cristo doctor, rey de ciencia. En el siglo XIV, siglo de la cristiandad popular, el pueblo reclama al hombre. Jesús Juez, Jesús Doctor, Jesús hombre, estos tres cambios en la figura divina encierran los diez siglos que comprende la edad media.



*figura5. Profesión de San Pedro Mártir, Lluís Borrassà. 1425. Pintura al temple sobre tabla.*

## EL GÓTICO (Características generales, reglas estructurales, métodos geométricos de diseño, tratados)

El arte y la arquitectura góticas se desarrollan en Europa occidental entre los periodos románico y renacentista, del siglo XII al XV. De las características generales que definen el estilo a nivel arquitectónico destaca, por su importancia, el renacimiento del arco apuntado o arco ojival, cuyas primeras manifestaciones en la arquitectura datan del siglo VII con la cúpula de la roca, de Jerusalén. No obstante, su uso, aunque menos extendido, también es conocido por las culturas prehelénicas, egipcia, mesopotámicas (asirias, indias y persas). ¿Por qué teniendo el conocimiento técnico para realizar este tipo de arco hemos de esperar hasta el siglo XI para encontrar las primeras manifestaciones del arte gótico en Europa? Quizá la respuesta, aunque abierta a interpretación radical, paradójicamente, en el auge de los pueblos godos, ya que su falta de organización político-social y cultural, sumado al hecho de que los primeros tratados de diseño aparecen con el renacimiento, impide que se propague cierto tipo de conocimientos y que la construcción de grandes monumentos se vea impedida. Digo paradójicamente porque el vocablo "Gótico" deriva del nombre "godo" "barbaros" utilizado por primera vez con tintes peyorativos en las biografías de pintores Toscanos del famoso tratadista italiano Giorgio Vasari en el siglo XVI que en alguno de sus capítulos lo emplea para describir el periodo de la edad media anterior al renacimiento<sup>18</sup>.

La acogida y visión del estilo gótico en Europa tiene diferencias notables. En contraste con Italia, donde se considera el arte gótico como confuso, desordenado incluso poco digno, hecho que mucho tiene que ver con la caída del imperio romano a manos de los Godos, encontramos otras potencias como Alemania, Inglaterra, Francia y España donde este estilo es fuertemente acogido e incluso nacionalizado hasta el punto de que el debate sobre su origen copará las discusiones y estudios de los historiadores a lo largo de la historia hasta muy avanzado el siglo XIX, resolviéndose finalmente que su nacimiento a mediados del siglo XII se produce en la región del norte de Francia, acuñando incluso en su época el nombre del estilo como opus francigerum o estilo francés. Concretamente y según lo indicado en libros como Entender la arquitectura de Lenard M. Roth : *"la arquitectura gótica fue inventada en 1141 por Suger, abad del monasterio de Saint-Denis"*<sup>19</sup>.

La arquitectura gótica supone un avance notable frente a la arquitectura Románica e incluso desde el punto de vista estructural mucho más innovador que el Renacentista, como se discutirá y razonará más extensa y excelsamente en el libro "las piedras de Venecia" de John Ruskin . Fundamentalmente esto se debe al empleo del arco ojival o apuntado frente al uso previo del arco de medio punto, el cual permite reducir los empujes horizontales originados por el peso propio de las pétreas bóvedas, permitiendo abrir huecos más grandes con muros de menor sección lo que se traduce en espacios interiores más luminosos y exteriores más esbeltos.

La introducción de este tipo de arcos supone cierta inversión en la dualidad ciego-hueco, desapareciendo las estructuras portantes murarias en favor de la esbeltez de los pilares característicos del gótico, planteando de nuevo el problema y patologías derivados de los empujes horizontales, manifestándose la necesidad de un nuevo elemento estructural que transmita estos empujes de la estructura primaria a una estructura secundaria que puede ser ubicada fuera del núcleo central, creando una retícula de pilares conectados con arcos arbotantes formando un esqueleto sólido muy ligero que absorbe los esfuerzos originados por las bóvedas de piedra.

A medida que las dimensiones alto-ancho aumentan aparecen nuevos elementos que posibilitan este incremento dimensional, como los pináculos, los cuales verticalizan la carga transmitida por los arbotantes a los pilares, permitiendo reducir la sección de los mismos. A diferencia de la opinión del tratadista italiano Giorgio Vasari nada en el gótico puede considerarse confuso o desordenado, mucho menos poco riguroso o digno, cada elemento responde a una necesidad o problemática presentada, dando como resultado una amalgama de elementos que funcionan cohesivamente para realizar una de las construcciones más

notables en la historia de la humanidad, la catedral gótica, en especial, estudio de este trabajo fin de grado, la catedral de Notre Dame de París.

Para establecer una definición lo suficientemente exacta de lo que se entiende como arte gótico o mejor dicho arquitectura gótica, John Ruskin nos ilustra en la adaptación del libro "Las piedras de Venecia",—La naturaleza del gótico— los elementos tanto internos como externos que debe tener una construcción para considerarse puramente gótica, y en que grados de "goticismo" se puede mover la misma para ser asimilada a dicho concepto.

Adaptando la analogía de la constitución mineral de la tiza de J. Ruskin se pretende hacer más inteligible esta idea. La composición mineralógica básica dada de una determinada piedra, póngase el granito, es cuarzo, feldespato y mica. De la proporción en la que se encuentren estos minerales básicos dependerá lo granítica de la roca analizada. No obstante, otros compuestos mineralógicos se encuentran en menor grado en su composición. De la misma manera en un edificio gótico encontraremos ciertos elementos considerados esencialmente góticos y otros que serán accesorios y que matizarán lo concreto del gótico en una determinada geografía o construcción.

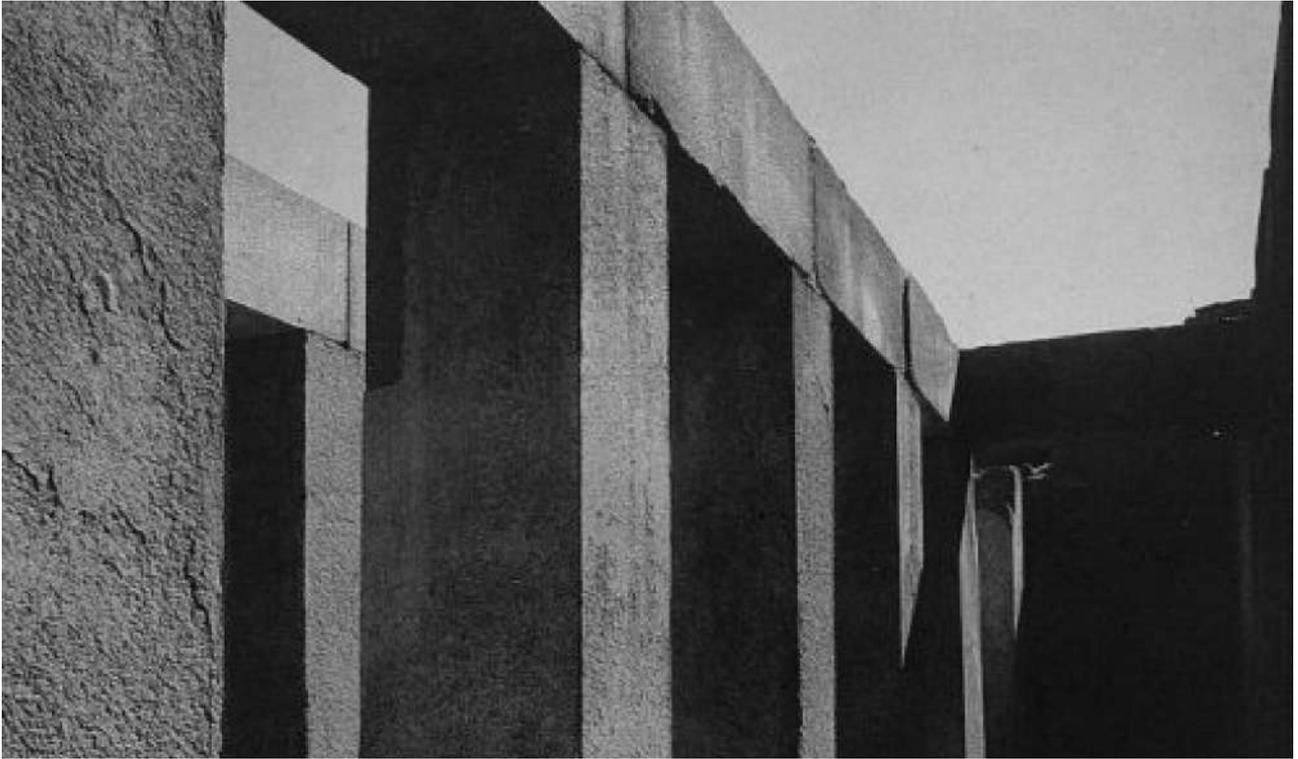
*"Gótico: Arquitectura foliada, que utiliza el arco apuntado para la techumbre propiamente dicha y el gablete para la cubierta"*<sup>20</sup>. La siguiente definición aglutina los elementos indispensables que se tienen que dar para concluir que una arquitectura es puramente gótica, de no encontrarse, de manera deliberada y no por imposición constructiva, debe descartarse esta de clasificarse como gótica.

## EL ARCO OJIVAL

La importancia de arco en la historia de la arquitectura es un punto fundamental en el desarrollo y estudio del campo de las estructuras. Los arcos son elementos lineales generadores de espacios, que permiten abrir grandes huecos en muros de mampostería, los cuales, por su importante peso propio, materialidad, generalmente pétreos o derivados como los cerámicos y forma de trabajo, por gravedad, presentaban un inconveniente notable a la hora de constituirse como elemento de cerramiento. Por otra parte, la posibilidad de extenderse espacialmente generando estructuras en dos y tres dimensiones, bóvedas y cúpulas, los constituye como elemento estructural de primer orden.

Tradicionalmente la forma más sencilla de abrir huecos en sistemas murales era a través del dintel, viga pétreo que se incrusta en el muro salvando la luz de paso deseada. Eliminando el muro, el resultado es un sistema aislado de columna y viga coloquialmente llamado arquitejado o adintelado, el cual mediante la repetición de su estructura básica en el espacio es capaz de generar una retícula infinita que permite la cubrición de espacios tan grandes como deseado. *"Uno de los ejemplos más claros de construcción adintelada, en piedra, es el templo del Valle de Gizeh"*<sup>21</sup>, figura 6. El hándicap en la utilización de este sistema es la luz de y entre vigas, que, en gran medida depende de la elasticidad del material, y el propio material, la piedra.

Los materiales pétreos se comportan de forma excelente trabajando a compresión, no obstante, no soportan tracción, por lo que la disposición de los mismos como jácenas, hace que estos elementos viga, que dispuestos verticalmente responderían magníficamente, trabajen bajo una sollicitación, flexión, que por limitación material hace colapsar la pieza por agotamiento elástico, bajo carga crítica, imposibilitando generar espacios con grandes luces entre pilares o hipotecando la formación de esas luces al ahorro material.



*figura 6. Templo del Valle de Gizeh. Sistema reticular aquitrabado o adintelado.*

La solución a este sistema se presenta con el descubrimiento del elemento arco, el cual al estar formado por subelementos de menor tamaño, dovelas, soluciona dos problemas fundamentales, uno de carácter logístico, el transporte y otro de carácter estático, la transmisión interna de esfuerzos, ya que, gracias a la forma de arco y al reducido tamaño de las dovelas, los esfuerzos de tracción que se generan en el interior del dintel son sustituidos por fuerzas prácticamente perpendiculares en las caras de los subelementos, originando únicamente esfuerzos de compresión en el interior, resolviendo definitivamente la problemática presentada por el material.

La forma de arco que se cree primigenia, por su sencillez, es el arco semicircular o de medio punto, el cual, si es verdad, soluciona el problema planteado anteriormente, introduce una nueva problemática, los empujes laterales. Estos llamados empujes no son más que la componente horizontal de la fuerza diagonal que se forma en el descenso de la carga en el interior del arco. Con forme más abierto sea el arco, más tenderá a la horizontal la diagonal de descarga, ergo, mayor empuje se producirá en la base del arco, desestabilizando la estructura en el plano del pórtico, al modo de flexión simple en ménsula.

Esta problemática introducida en mayor grado por el arco de medio punto pasa por dos posibles soluciones.

Respetando la composición formal del arco, el medio punto, mediante el apantallando de pilares en la dirección en la que actúa el empuje, es decir, el plano del pórtico, consiguiendo así, que la fuerza diagonal de descarga, mediante el efecto arco, se transmita adecuadamente al terreno. El efecto arco se ve favorecido por la masa de contrafuerte que gravita sobre la diagonal de descarga, verticalizando la resultante de cargas.

Modificando formalmente el arco encontramos que los empujes se reducen considerablemente a medida que la punta del arco se eleva. De esta manera nace el arco ojival o arco gótico, como solución a los empujes generados en el arco de medio punto, permitiendo alcanzar mayores luces entre pilares y reducir las secciones del muro, lo que conduce a la evolución hacia arquitecturas más esbeltas, menos máscas, y por lo tanto con mayores posibles espaciales y compositivos.

La modificación introducida no complicó especialmente la puesta en obra en la realización de arcos, más bien la favoreció, ya que, con la misma cimbra semicircular se podían realizar un número muy alto de arcos apuntados, en comparación con los de medio punto que precisaban cimbra por arco, si este modificaba sensiblemente el tamaño de su base. La flexibilidad introducida por el arco ojival se traduce en menores tiempos de montaje y construcción, menor consumo de recursos y mayor posibilidad de simultaneidad en la realización de tareas, lo que posibilitó la construcción de las grandes catedrales en periodos relativamente cortos de tiempo.

## EL GABLETE

El gablete es el elemento verdaderamente relevante del estilo gótico, ya que, si bien el arco ojival, es la figura más representativa de este estilo, la firma, no es verdaderamente fiel al mismo, si no actuando cohesivamente con el gablete.<sup>22</sup>

Esta categórica afirmación encuentra su perfecta justificación en cualquier ejemplo de buen gótico o gótico puro, como es el caso de la catedral de Reims, Francia, donde podemos observar ya no solo en la cubierta, compuesta por una techumbre pétrea de arcos apuntados y bóvedas nervadas bajo gablete, sino en la totalidad de los elementos ornamentales que componen la majestuosa fachada oeste, el esquema mencionado, que parece resultar objeto indivisible de la construcción gótica.

La cubierta gótica no resulta interesante únicamente por la presencia del gablete, también, y justamente para la formación de la pendiente de este, se presenta otro elemento estructural básico en la cubrición de grandes luces y que posibilitó la realización de las grandes naves de las catedrales medievales, entre otras, las armaduras de cubierta o cerchas. Estos elementos constituidos con la geometría indeformable del triángulo, se emplearon primigeniamente en la construcción de las grandes obras civiles romanas, y perduraron hasta la edad media donde encontramos manifestaciones como: la cubierta de la gigantesca nave de Westminster, en Londres, salvando una luz de 20,7 metros, se constituye como la mayor construida en toda la época medieval.*figura 7*



*figura 7. Armadura gótica de la nave principal de Westminster, Londres.*

No obstante, las más abundantes manifestaciones de cerchas medievales las encontramos en las pequeñas iglesias con techumbre de madera donde se desarrollaron muchas de las características esenciales que constituyen el alma del estilo gótico como el naturalismo o la variabilidad. Cabe resaltar, aún que mencionado, el material con el que se realizaban estas armaduras góticas o armaduras estilo Tudor, la madera. Resulta evidente que, al tratarse de un material completamente distinto a la piedra, las características mecánicas y propiedades físicas que presenta sean distintas, e incluso, como es el caso de las cubriciones, más adecuadas en su uso. Buenos ejemplos de estas estructuras jabalconadas persisten en la actualidad, mayormente en Inglaterra, en lugares como Saint Botolph en Trunch o Saint Wendreda en March.

## LA FOLIACIÓN

Por último, para completar la definición citada anteriormente, cabe enfatizar en el concepto de la foliación en el arte y la arquitectura gótica. La imitación de la naturaleza en la formación de producción artística, ya bien, sea arquitectura, pintura, escultura o literatura, es un recurso que se ha empleado en el arte desde tiempos inmemoriales y que en este periodo que nos ocupa se adueña, se introduce de alguna manera en el alma y cuerpo del estilo gótico. Todos los rasgos que se consideran característicos\* de este estilo, en todos está presente la foliación, y es a través de ella que tienen una expresión física, mediante la ornamentación, la obra escultórica y estructo-escultórica.

Dos buenos ejemplos de hasta qué punto la foliación penetra en el alma del estilo sería la tracería y el arco ojival. En la tracería se evidencia que, el uso de los motivos naturales, florales, vegetales en su conjunto, constituye la más ferviente fuente de inspiración para los maestros que realizaban estas, en sí mismas también, obras de arte, las cuales conforman los elementos difusores de luz, que más tarde se discutirán, los vitrales, los rosetones, las vidrieras. La foliación alcanzara, hacia finales del siglo XIV, su mayor esplendor con el gótico tardío, donde la ornamentación se exacerbará en pro de estos pequeños elementos que componen la catedral, perdiendo brillo el conjunto del estilo.

La modificación introducida por la foliación en el arco ojival se manifiesta mediante una nueva tipología derivada de la anterior, el arco trifolio o lobulado, el cual presenta una mejora en la respuesta estructural con respecto al simplemente apuntado, cuando las dimensiones no exceden cierto límite. No obstante, no queda claro si el lobulado en los arcos buscaba esta mejora a nivel estructural, o simplemente fue resultado del gusto por la ornamentación con motivo vegetal.

La ventaja del lobulado en la formación de arcos y tracería es la flexibilidad y variabilidad que aporta al hecho creador, permitiendo realizar innumerables patrones que se adapten al gusto y la tendencia del momento, creando subtipologías que caracterizarán vitrales, bóvedas y arcadas de las catedrales góticas.

## EVOLUCIÓN DE LA CATEDRAL (En busca de la luz)

En la evolución de la catedral gótica, el motor fundamental que alimenta el proceso tecnológico, que posibilitó el alzamiento de las imponentes obras que representaron el siglo XIII, es la búsqueda de la luz. El arte y la arquitectura góticos, en contraste con su predecesora románica, se caracterizan por la completa permeabilidad lumínica de los espacios interiores, que, de alguna manera, emergen de la caverna en la que se hallaban sumergidos. La oscuridad que los había sometido anteriormente desaparece, irguiéndose triunfante la catedral, cuya estructura juega un papel determinante en la inversión del código lleno-vacío que había dominado la arquitectura románica, abriendo paso a espacios flexibles, delicados, salvajes, donde las nuevas formas encuentran su reflejo en la luz divina.

El origen de la evolución de la iglesia cristiana hacia la luz se encuentra en la teología de Suger, influido directamente por los textos de San Dionisio, el areopagita, y expresándose a través de la iglesia abacial de Saint Denis en France. Las fuentes escritas atribuidas a Dionisio, el areopagita describe a Dios como la *"Luz Supraesencial, Padre de las Luces"* y a Cristo como *"Primera radiación"*. Según lo expuesto en el libro de Lenard M. Roth titulado Entender la arquitectura *"tales pasajes sugieren que esta pura radiación celestial podría ser asimilada, a través de una analogía, a la luz terrenal"*<sup>23</sup>. (p316) La luz divina se asimila a la iluminación, por ello, parece imprescindible que la arquitectura se abra al exterior, de alguna manera al modo de Frank Lloyd Wright, rompiendo la caja arquitectónica compuesta por el másico cuerpo románico a través de los coloridos vitrales, dando lugar a una nueva arquitectura, el Gótico.

La iglesia de Saint-Denis se establece como precedente, como punto de inflexión entre las dos arquitecturas, entre la luz y la oscuridad, por ello, analizar los elementos introducidos por Suger en esta, permite formar una idea de cómo, porqué y en qué grado, ciertos elementos estructurales y arquitectónicos fueron pensados, empleados y perfeccionados en el nuevo estilo.

De la misma manera que Dios el séptimo día de la creación, Suger escribe contemplando su obra: *"radiante es el noble edificio invadido por la nueva luz"*<sup>24</sup>. La nueva luz, que no solo se introduce por las vidrieras de colores, también a través del conocimiento técnico que se empieza a incluir en la arquitectura y que posibilita que su obra se establezca como modelo de nuevo estilo. Así pues, las innovaciones introducidas como consecuencia del empleo del cálculo estructural en la arquitectura de Suger, se pueden sintetizar en la siguiente lista:

**A**pertura de grandes vitrales policromados.

**C**apillas radiales "transparentes".

**C**olumnas más esbeltas.

**D**eambulatorio doble en el coro.

**E**squema en planta de salón.

**T**orres franqueando la entrada.

**I**ntención teológica en la disposición estructural.

**S**ustitución de los muros por contrafuertes.

**S**ustitución de la techumbre por bóvedas nervadas.

**S**ustitución del arco de medio punto por el apuntado.

# 3

**ANALISIS**  
**ESTRUCTURAL**

## MATERIALES (Materiales, formas de trabajo, tradición)

La elección de materiales destinados a elementos estructurales, como pueden ser jácenas, arcos, bóvedas, pilares o muros portantes, determina la forma en que estos elementos trabajan en la construcción, por lo que un adecuado estudio, elección, ejecución y puesta en obra es esencial para asegurar la estabilidad, seguridad y funcionalidad del conjunto. En estructuras proyectadas siguiendo los métodos de cálculo actuales, esto es, el análisis límite de estructuras, desarrollado a partir del siglo XIX, se debe garantizar tanto la estabilidad, estados límite de servicio, deformaciones y vibraciones, como la resistencia, estados límite últimos, equilibrio y estabilidad.

Tradicionalmente, objeto que compete este trabajo, el conocimiento sobre los estados límite estructurales era desconocido, no obstante, si existía cierto saber sobre el comportamiento de los materiales constructivos, fruto de la experiencia y la observación, estableciendo reglas constructivas que funcionaban para ciertos elementos que requerían una durabilidad considerable.

La piedra, pues, por su estructura y composición química y mineralógica, presenta una resistencia a los agentes ambientales que la consolidan como material constructivo por excelencia en el ámbito de las grandes construcciones históricas, por lo que en este capítulo trataremos principalmente la piedra y la fábrica de piedra, reservando ciertas observaciones para la madera de las cerchas góticas y en menor medida el vidrio coloreado de los vitrales

### LA PIEDRA

Notre Dame de París está constituido en su totalidad por las reservas calcáreas extraídas del subsuelo de la ciudad, que ha permitido la proliferación de innumerables edificios que perduran hasta la actualidad. Las piedras calizas, en su conjunto, se engloban dentro del grupo genérico de rocas sedimentarias de origen químico, rocas carbonatadas, formadas en la destrucción, transporte, depósito y compactación o cementación, de rocas anteriores más sólidas, por acción de agentes físicos o químicos.

Las características físicas, químicas y mecánicas de las piedras calizas dependen de su composición mineralógica. Fundamentalmente formadas por carbonato cálcico, reacciona fácilmente ante medios ácidos, disgregándose superficialmente, confiriéndoles además una resistencia a la deformación, una dureza, de 3-4 en la escala de Mohs, lo que las constituye como materiales altamente trabajables.

Las piedras generalmente tienen un muy buen comportamiento trabajando a compresión simple, no obstante, no se comportan igual al actuar otras sollicitaciones como la flexión y la tracción, por lo que los antiguos debieron asegurar que los elementos constituidos con este material trabajaran exclusivamente bajo acciones axiales de compresión. Por ello, todo el entramado estructural que conforma una catedral gótica del estilo de Notre Dame de París va encaminado a transformar los esfuerzos horizontales transmitidos esencialmente por las techumbres y cubiertas pétreas en cargas transmitidas en la dirección de las directrices del elemento estructural, ya sea vertical como en muros y pilares o curvo, como en arcos y estribos arbotantes.

Las resistencias unitarias de las piedras calizas, en general, tanto tracción como compresión se pueden extraer de tablas como la expuesta en el libro de Santiago Huerta, "Arcos, bóvedas y cúpulas" (pag14) donde se observa que la resistencia a compresión de una piedra caliza  $\sigma_c$ , se mueve en el intervalo de 7-40 Mpa dependiendo de la calidad de la piedra, mientras que la resistencia a tracción  $\sigma_t$  entre 0,5-4 Mpa<sup>25</sup>, del orden de 10 a 20 veces inferior, por lo que a todos los efectos se considerará la resistencia a esfuerzo axial de tracción nula. El gran intervalo en el que se mueven las resistencias mecánicas de la piedra caliza responden a dos factores según lo expuesto por Robert Mark "la orientación de la piedra en su lecho natural y la dirección con que se aplican las fuerzas en la estructura"<sup>26</sup>.

Otra propiedad fundamental de las piedras, también referenciada en el libro citado anteriormente es el ángulo de rozamiento entre piedras, que confiere a las fábricas realizadas con este material cohesión por acción del peso propio del material. Si imaginamos una fábrica de piedras de una altura  $H$  con un peso  $W$ , cada piedra, con un peso  $w_i$  y una altura  $h_i$ , ejerce una fuerza normal a la superficie con la piedra inferior igual  $\gamma_i \cdot A_i \cdot h_i$ , si se establece como condición la misma área y altura de los bloques pétreos, la expresión queda como sigue  $N_i = \gamma_i \cdot (A \cdot h)$ , siendo  $N_i$  la normal a la superficie en cada sección de la fábrica. Al actuar una fuerza externa desestabilizante, empuje horizontal, se genera entre los bloques un rozamiento  $f = N_i \cdot \mu$ , siendo el coeficiente de rozamiento  $\mu$  función del ángulo de rozamiento interno  $\varnothing$ ,  $\mu = \tan \varnothing$ , tanto mayor será la fricción entre las superficies, que constituye la acción estabilizante, como lo sean la normal y el coeficiente de rozamiento, y por lo tanto, el peso y el ángulo de rozamiento, propiedad intrínseca de la roca constituyente. Por lo que, a priori, la estabilidad en una fábrica de piedra colocada a hueso\* estará relacionada con el peso de cada elemento que la compone y el ángulo de rozamiento interno de cada piedra, que para la piedra caliza se establece en  $\varnothing = 30^\circ$ , siendo  $\mu = 0,58$ , adimensional.

## EL MORTERO

*“La literatura en la historia de la arquitectura normalmente conducen a interpretaciones erróneas sobre los morteros medievales. Especialmente en lo que respecta la cuestión de como los morteros “secan” se encuentran muchas incongruencias”<sup>27</sup>*. Los morteros medievales, de los que los textos valoran su endurecimiento en meses e incluso siglos, se asume, en el libro “Experiments in gothic structure”, están formados únicamente por cal, o cal y mezcla de arenas, más agua, lo que implica que no tiene propiedades hidráulicas como ocurre con los morteros de cemento actuales. No existen reacciones de hidratación de los componentes conglomerantes, por lo que los procesos de fraguado y endurecimiento son notablemente más largos que aquellos de los del cemento Portland, diez horas.

Los morteros de cal pasan por dos fases en su endurecimiento, el fraguado y la carbonatación. El primero se produce al mezclar los polvos de piedra caliza, procedentes de la calcinación de la roca, con agua. El óxido cálcico o cal contenido en la piedra caliza se mezcla con el agua aportada, formando hidróxido cálcico, el exceso de agua mezclado con el hidróxido forma una pasta de cal pura, que fragua a medida que se evapora el exceso de agua o este es absorbido por otros elementos como la piedra de la fábrica. El tiempo de fraguado depende del exceso de agua, la humedad relativa, y las ratios de absorción de la piedra, pero en general es un proceso que puede durar días e incluso semanas, no meses ni años.

La carbonatación sin embargo si es un proceso verdaderamente lento, y esto es a lo que en los textos se pueden haber referido al decir que el endurecimiento o “secado” de los morteros medievales tenía una duración de meses o años, a la carbonatación en los morteros de cal.

En la carbonatación la pasta de mortero, formada por hidróxido de calcio, reacciona con dióxido de carbono ambiente para formar carbonato cálcico. Este proceso requiere su tiempo, ya que el porcentaje de dióxido de carbono en ambiente es reducido, además una vez formada la primera capa carbonatada, exterior, es muy complicado que el dióxido la penetre y carbonate el resto de la pasta del mortero, por lo que es muy probable que, a día de hoy, muchos de los morteros medievales existentes no se encuentren enteramente “endurecidos”, por lo que sus resistencias mecánicas son realmente bajas.

## LA FÁBRICA

Una fábrica está compuesta esencialmente por un material constituyente, piedra o ladrillo, que proporciona cuerpo a la fábrica y un material conglomerante, mortero o cemento, encargado de asegurar la correcta adherencia de los bloques que conforman la fábrica.

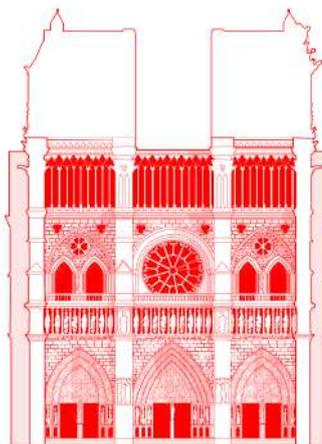
Los morteros constituyen el elemento débil de la fábrica, sus resistencias son del orden de la de tracciones en rocas, por lo que, las patologías estructurales, tales como grietas o desprendimientos, se evidenciaran de forma más llamativa en estos elementos. Sin embargo, cumplen una función fundamental, componer una serie de cuerpos disgregados en un sólido agregado que trabaja solidariamente en su conjunto, y que, si bien es verdad, la resistencia de este nuevo elemento es inferior a la análoga maciza, las fábricas, por su buen comportamiento, constituyen el elemento portante por excelencia en construcción, hasta el descubrimiento del hormigón armado a mediados del siglo XIX.

Como reza el libro de Santiago Huerta "Arcos bóvedas y cúpulas" la fábrica es un material anisótropo y discontinuo, esto es, presenta cualidades diferenciadas dependiendo de la dirección en la que se examine y no conforma un sólido ideal, como requiere la teoría de la elasticidad de materiales para la aplicación de los métodos de cálculo estructural, por lo que determinar ciertos parámetros elásticos fundamentales como bien puede ser el módulo de elasticidad, el coeficiente de Poisson o sus resistencias mecánicas, ya sea, compresión, tracción o flexión, resulta ciertamente complicado.

De los ensayos realizados hacia finales del siglo XIX con objeto de obtener las resistencias de ciertas fabricas se han extraído las siguientes conclusiones. Experimentalmente se comprueba que la presencia de juntas en fábricas disminuye la resistencia del conjunto macizo de manera proporcional al espesor de la junta, por lo que a menor número y espesor de juntas mayores resistencias mecánicas, "*La resistencia de la fábrica no viene determinada por la resistencia del más débil de sus elementos*"<sup>28</sup>. Y se determina que la resistencia de una fábrica, es decir la tensión máxima a la que puede someterse un determinado elemento constituido con fábrica de piedra es del orden de 1/10 parte de la resistencia última o de rotura de esa misma piedra.  $\sigma_{adm} = 1/10 \sigma_R$

Toda la dedicación y estudio invertido en el enfoque resistente de las fabricas perdió sentido cuando en el siglo XVIII se analizaron tensiones de trabajo de elementos estructurales de edificios históricos realizados en fabrica de piedra o ladrillo, tales como la catedral gótica de Mallorca, el Panteón de Roma o la basílica de Santa Sofía en Estambul. Los resultados extraídos revelaron unas tensiones de trabajo muy inferiores a las de rotura, del orden de una a dos magnitudes menor, evidenciando el absurdo del enfoque resistente en el cálculo de fábricas, y poniendo punto y final a las investigaciones encaminadas en esta dirección.

El enfoque se redirige ahora a la delimitación de la superficie de cedencia, esto es, la superficie de formación de rotulas plásticas. Cuando en una fibra de cierto material se alcanza el momento de plastificación  $M_{pl}$ , se forma una articulación, ya no se admite más carga, por lo que esta se transmite a la fibra contigua, donde el procedimiento se reitera hasta alcanzar la plastificación completa del material. El material al plastificar sigue admitiendo deformaciones sin carga, cada vez mayores, hasta la rotura, siendo estas deformaciones irreversibles.



*figura8. Fachada Oeste Notre Dame, París*

*En esta figura se observa de izquierda a derecha, el pórtico de Santa Ana, el del juicio final y el de la Virgen María.*

*De igual forma, se puede observar los elementos propios a los que nos referíamos en capítulos anteriores, el arco ojival o apuntado, presente en todos los niveles de la fachada, el gablete, y la foliación que enriquecen la decoración de la edificación, realizados en fábrica de piedra caliza, convirtiendo la catedral de Notre Dame en una obra estructo-escultórica única.*

Teniendo en cuenta tres consideraciones, que son base del cálculo límite de estructuras de fábrica, resistencia a compresión infinita, resistencia a tracción nula, e imposibilidad de fallo por deslizamiento, es decir, ángulo de rozamiento infinito, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la superficie de cedencia en una junta cualquiera, donde se debe comprobar que los esfuerzos en la junta, axil y momento, se encuentran dentro del dominio delimitado por las rectas  $M = \pm N \cdot h$ , siendo  $h$  la distancia desde el centro de gravedad de la sección al borde, y que por lo tanto cumplen la condición de cedencia. Esto implica que los esfuerzos de compresión en el interior del elemento fabrica deben estar contenidos en el espesor del material, de no ser así se originarían tracciones que podrían llevar la estructura a la ruina.

## LA MADERA

La madera es el conjunto de tejidos de origen orgánico que conforman el tronco, ramas y raíces de los vegetales leñosos, constituyendo un material altamente ligero en comparación con las resistencias mecánicas que pueden alcanzar. Debido a su carácter anisótropo, presenta, al igual que las fábricas de piedra, capacidades muy diferenciadas dependiendo de la direccionalidad del esfuerzo, axial o trasversal, siendo la dirección de las fibras condicionante fundamental en el comportamiento, tanto a tracción como a compresión, presentando en la peor de las situaciones, tracción trasversal, un descenso de las resistencias del orden de 15 a 17 veces, en comparación con la situación más favorable, compresión axial.

Son pocas las construcciones con techumbre de madera de origen gótico anterior a 1400 que perduran en la actualidad, siendo un excelente ejemplo de ellas la nave central del antiguo palacio de Westminster, construida entre 1394-1402. Esto se debe, en gran parte, a la durabilidad del material, la madera al tener origen orgánico y no mineral, posee estructuras más atacables por los agentes externos tales como la humedad, el fuego y los parásitos, degradándose a una velocidad considerablemente mayor, en general, que la piedra.

Los tres grandes inconvenientes en el uso, que presenta la madera en comparación con los pétreos naturales son pues, la higroscopicidad, capacidad de la madera para intercambiar agua con el ambiente, originando cambios dimensionales, la combustibilidad, facilidad de arder, y la vulnerabilidad frente al ataque de insectos y hongos, siendo los dos últimos, verdaderamente motivo de la inexistencia de gran parte de las obras realizadas en madera, no solo en la época gótica, sino a lo largo de la historia.

Multitud de capitales europeas, tales como Roma, con el gran incendio del 62; Londres, con el gran incendio de 1666, que acabo con la peste negra; Madrid, con el incendio del real Alcázar de 1734; Estocolmo, con el gran incendio de 1759 al este de Soderholm; o París, con el actual incendio de Notre Dame en 2019, son muestra del efecto devastador del fuego y establecen precedentes históricos del origen y la causa de el hecho de que no existan apenas, en comparación con construcciones de fábrica, construcciones en madera, estableciendo a nivel, al menos centroeuropeo, una tradición constructiva apoyada mayormente en la piedra.

## EL VIDRIO COLOREADO

Los paneles de vidrio eran raramente empleados como material constructivo en la antigüedad clásica. Escasos ejemplos se pueden encontrar en paños de ventanales en Pompeya y el Oriente próximo, no obstante, no se establece precedente en su uso, al menos, en la antigua Roma donde *"Vitruvio, el cual había tratado meticulosamente cada material constructivo clásico, no menciona el vidrio"*<sup>29</sup>. Como se expone en el libro escrito por Henry J. Cowan *"The Master Builders"* será en la Edad Media, con el surgimiento del gótico, cuando el vidrio coloreado se establezca como material constructivo común, llenando los espacios de las grandes naves de las catedrales de una nueva dulzura, la experiencia de una nueva visión a través de la luz.

En cuanto a la materialización del vidrio coloreado, se encuentran dos procedimientos, que, al parecer, fueron ampliamente empleados en la fabricación del vidrio medieval, y que se va a mencionar escuetamente.

El vidrio corona, que se realizaba soplando la mezcla vítrea a base de arena de sílice, realizando una especie de forma de globo amorfo, el cual se hacía girar y por medio de la fuerza centrífuga, en su enfriamiento, adoptaba su forma final, disco o corona.

El vidrio cilíndrico, datado en época romana, se conoce a través de los escritos atribuidos al monje benedictino Theophilus en el siglo X, donde expone detalladamente el proceso, que sigue así: *"El vidrio en estado líquido se soplabo formando una especie de amplio bulbo, que a través de repetidas oscilaciones pendulares adoptaba forma cilíndrica. Uno de los extremos se perforaba y ensanchaba para coincidir con el mayor de los diámetros de la masa pseudo-cilíndrica, repitiéndose la operación en el otro extremo. Seguidamente el vidrio se recalentaba y dividía en dos laminas curvadas, que se depositaban en la parte lisa del horno, donde a través de la aportación de calor y la aplicación de presión con planchas y suaves piezas de madera se obtenía el panel de vidrio, que componiéndose con mayas de plomo o hierro, en unidades mayores, formaban, al encastrarse en las tracerías pétreas, los vitrales de las imponentes catedrales"*<sup>30</sup>.

## CARGAS (Empujes horizontales, cargas gravitatorias)

A la hora de realizar un análisis estructural, ya bien sea una estructura metálica, de hormigón, madera, o como es el caso, fábrica de piedra caliza, el agente que determina como dimensionar los diferentes elementos que conforman el conjunto estructural, suponiéndolo siempre estos adecuados para el esfuerzo al que se van a ver sometidos, son las cargas.

Los materiales aportan los parámetros iniciales de comportamiento, la resistencia, el módulo de elasticidad, la tensión admisible de trabajo, el tipo de fractura, cualidades intrínsecas de la estructura a analizar que permiten, una vez estimadas las cargas, concluir si estas se encuentran dentro de un margen de comportamiento adecuado, admisible.

En el cálculo actual, conocidas las cargas, se elige, según el dimensionado se realice a resistencia, situaciones permanentes o casi permanentes, valores de carga mayorados, o deformación, situaciones límite irreversibles, valores de carga característicos, una hipótesis de carga que combina, según la persistencia de la acción, los diferentes tipos de carga, permanentes, variables (o accidentales), obteniendo un valor unitario que permite realizar la comprobación pertinente.

De la misma manera el objetivo aquí es estimar los diferentes tipos de carga que actúan en la estructura de la catedral gótica de Notre Dame de París, con objeto de evaluar, a groso modo, no tanto si la carga es admisible, ya que esto se evidencia en el buen comportamiento del monumento a lo largo de la historia, si no, el margen existente, con las dimensiones de sus elementos estructurales, hasta el colapso.

A continuación pues, se determinará los efectos de las cargas permanentes que actúan, esto es, el peso propio de las bóvedas y los empujes originados por acción de estas últimas sobre los estribos, bien sean contrafuertes o arbotantes (cargas gravitatorias), y las cargas variables, la acción del viento sobre los frentes de fachada.

### CARGAS PERMANENTES

#### PESO PROPIO

El cálculo del peso propio de la estructura se realizará siguiendo la metodología expuesta por Robert Mark en el libro "Experiments in gothic structure" analizando, primero los planos generales y de detalle, si existieran, para determinar el volumen de piedra y los centros de gravedad de las distintas dovelas que forman los arcos principales de las bóvedas. Conocido el volumen y la densidad o peso específico normal del material empleado, piedra caliza, el peso propio se obtiene directamente multiplicando ambos parámetros. Seguidamente, determinando el área de los materiales planos tales como el vidrio de los vitrales o las láminas metálicas de las cubiertas, se obtienen fácilmente los pesos propios de estos elementos multiplicando áreas y espesores de material por pesos específicos normalizados de estos elementos, representando lineal o superficialmente su proyección en el modelo estructural. Por último, habría que realizar el mismo procedimiento para determinar el peso propio de las cerchas que forman el gablete de cubierta, que se presentaría como fuerza puntual en coronación de muro. El presente trabajo se centrará únicamente en la obtención del peso propio de la bóveda al estimarse la carga más desfavorable.

$$\gamma = P / V ; \rho = m / V ; P = m \cdot g ; \gamma = \rho \cdot g = 10 \rho ; P(N) = \gamma (N/m^3) \cdot V (m^3) = 10 \rho (Kg/m^3) \cdot V (m^3)$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2 [ 1\text{Kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1\text{N}; 1\text{N} = 10^{-3} \text{KN} ]$$

La fórmula expuesta anteriormente  $\mathbf{P} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{V}$ , proporciona valores de carga puntuales, los cuales no son usuales, en cuanto a frecuencia se habla, por lo que, para la obtención de pesos propios nos valdremos del genérico carga por superficie, que podrá particularizarse, si fuera el caso, en el análisis para la obtención de

cargas lineales y puntuales a través de los ámbitos de aplicación de carga. Resulta sencillo trabajar, si es posible, con cargas uniformemente repartidas, ya que, será suficiente con conocer el espesor del elemento para obtener el peso propio. Por ello, en la medida de lo posible, y a razón de simplificar los modelos, los pesos propios se obtendrán mediante la siguiente expresión:

$$W = P/A = \gamma \cdot e \text{ (N/mm}^2\text{) fórmula 1}$$

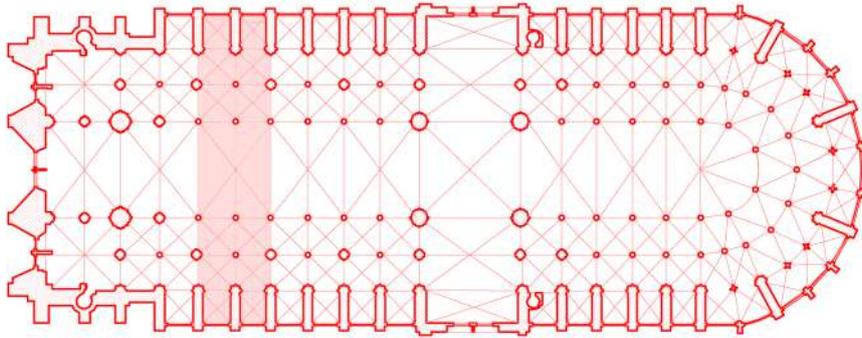


figura9. Planta Notre Dame, París

Aparece marcada la sección de bóveda elegida para calcular el apartado de peso propio.

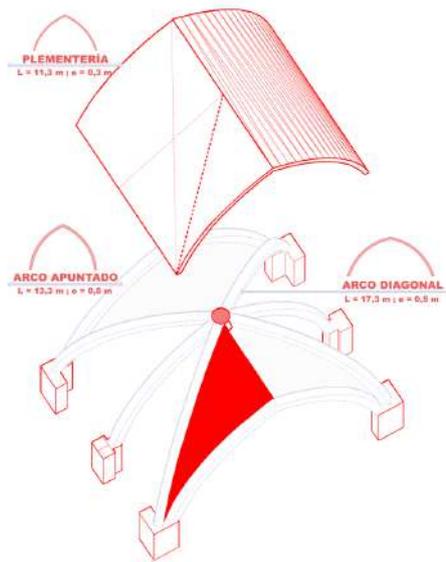


figura10. Axonometría bóveda sexpartita

Para el cálculo del peso propio de las bóvedas se ha simplificado el modelo como muestra la figura, en tres arcos perpiaños\*, y dos nervaduras diagonales como elementos lineales y una bóveda de cañón apuntada como elemento superficial.

Arco Perpiaño\*: "Aquel que está dispuesto transversalmente al eje de una bóveda de arista, de crucería o contiguas, quedando resaltado a manera de cincha".

De esta manera el procedimiento para obtener, de forma simplificada, el valor del peso propio de una bóveda sexpartita como la mostrada en la figura 10, será: Conocida la densidad normal de la piedra caliza  $\rho = 2400 \text{ Kg/m}^3$ , extraída de cualquier manual de materiales de construcción, obtenemos el peso específico multiplicando por la aceleración de la gravedad, a efectos de este trabajo considerada  $10 \text{ m/s}^2$ ,  $\gamma = 24.000 \text{ N/m}^3$ .

Aplicando la fórmula 1 se obtiene el peso propio de cada elemento por separado, primero el de los nervios diagonales, seguidamente el de los arcos perpiaños y por último el correspondiente a la plementería.

$$w_1 = 24.000 \cdot 0,8 = 19.200 \text{ N/m}^2$$

$$w_2 = 24.000 \cdot 0,6 = 14.400 \text{ N/m}^2$$

$$w_3 = 24.000 \cdot 0,3 = 7.200 \text{ N/m}^2$$

El peso total de la bóveda será resultado de la adición de estos tres multiplicado por el número de veces que se repite cada elemento

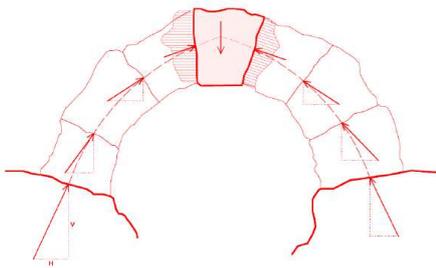
$$W = \sum W_1 \cdot n_1 + \sum W_2 \cdot n_2 + \sum W_3 \cdot n_3 = 87.600 \text{ N/m}^2 = 87,6 \text{ KN/m}^2$$

En el resultado hay que tener en cuenta las siguientes consideraciones. 1. La plementería se ha modelizado con forma de bóveda de cañón apuntada, según la directriz de los arcos perpiaños. 2. El resultado final no tiene en cuenta el efecto de la superposición de elementos, sea, por ejemplo, plementería y nervios o nervios y arcos perpiaños. 3. El exceso en el resultado final, en comparación con la realidad, se considera en pro de la seguridad, y por tanto admisible.

## EMPUJES

El empuje es la fuerza que aparecen como reacción a una acción dada, en este caso, una carga gravitatoria, el peso propio de las bóvedas. Isaac Newton describe la interacción entre acciones y reacciones, es decir entre cargas y empujes, en la tercera ley del movimiento, el principio de acción reacción, que sigue así: Cuando un cuerpo A ejerce una fuerza sobre otro cuerpo B, B reaccionará ejerciendo otra fuerza sobre A de igual módulo y dirección, aunque de sentido contrario. La primera de las fuerzas recibe el nombre de fuerza de acción y la segunda fuerza de reacción.

Los empujes son pues vectores, cuyo modulo dirección y sentido vendrá determinado por la forma en la que el elemento que los genera interactuar con su entorno. Si analizamos un arco, en el que la única acción actuante es su propio peso, el peso de las dovelas que lo forman, encontramos que la tensión que se genera entre las juntas, asumiendo planas, debe ser aproximadamente perpendicular a la cara de las mismas, siendo la resultante en su punto de aplicación la fuerza de compresión que transmite el arco a los estribos que lo sustentan. *“Los estribos, las construcciones más o menos complicadas que resisten el empuje de los arcos y de las bóvedas y lo transmiten hasta el terreno, son los que dan firmeza a los edificios”<sup>31</sup>.*



**figura11.** Arco etrusco de dovelas de piedra. Se observa, a medida que descendemos en el arco, como se verticaliza el empuje que mantiene la clave debido al peso propio de los bloques que forman la estructura.

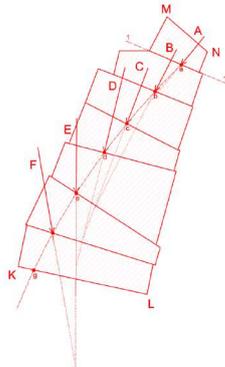
Como se observa en la **figura 11** esta fuerza de compresión tiene dos componentes, una vertical, que se transmitirá al terreno directamente a través de los soportes, y otra horizontal, el empuje, cuya obtención será el foco de estudio de este apartado. *“El arco empuja de forma permanente contra los estribos: «el arco nunca duerme», dice un antiguo proverbio árabe”.*

Previo a analizar el empuje en arcos y bóvedas debemos recordar la condición de cedencia impuesta por el material, la fábrica, la cual establece que los esfuerzos de compresión en el interior del elemento deben estar contenidos en el espesor del material. Esta definición abre paso a lo que se conoce como línea de empujes.

### figura12. Línea de empujes

Dada una geometría y un sistema de planos de corte y carga, se dibuja en línea discontinua la línea de transmisión de empujes. Variando cualquiera de los tres parámetros anteriormente nombrados, cargas, geometría o planos de corte, se obtendría una configuración distinta de la línea de empujes.

Moseley denominó la línea envolvente formada por la proyección de los empujes - line of pressure- línea de presiones.



*“La línea de empujes es el lugar geométrico del punto de paso de la resultante por un sistema de planos de corte dados”<sup>32</sup>.* figura 12

Esta definición engloba cualquier forma geométrica en carga a la que se le puedan realizar planos de corte, superficies delimitadas geoméricamente por tres puntos, por lo que, si se particulariza a una geometría concreta, póngase un arco de fábrica, encontramos que las juntas entre dovelas constituyen, naturalmente, las superficies de corte, constituyendo un dato conocido.

Aplicando la condición de cedencia se delimita un conjunto de posibles líneas de empuje admisibles, compatibles con el estado tensional y la forma del arco.

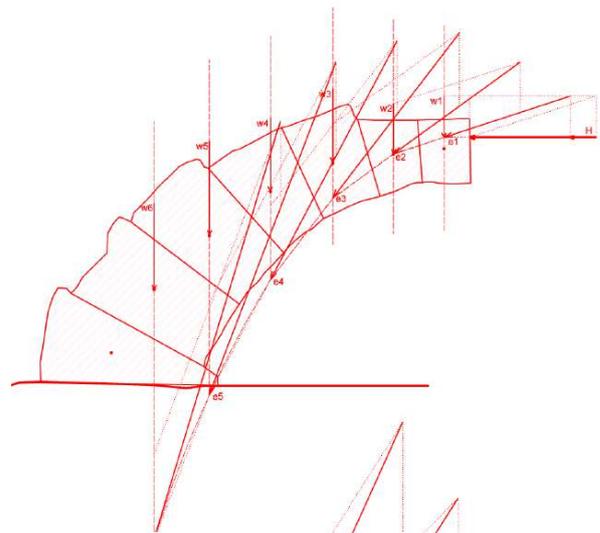
Para conocer la magnitud del empuje en el interior del arco basta con realizar un sencillo ejercicio. Para ello nos valdremos de nuevo de la [figura 11](#), imaginando ahora la clave suspendida en el aire. Se observa que la componente vertical de la fuerza que mantiene la clave suspendida se corresponde con el peso propio, presumiblemente variable para cada dovela. A medida que descendemos en la línea del arco encontramos que esta componente aumenta proporcionalmente con el peso, no obstante la componente horizontal, para que el sistema esté en equilibrio, debe mantenerse invariable, constituyendo el empuje en el arranque.

Siendo el empuje el apoyo suministrado al arco para mantener su equilibrio, resulta evidente que la forma del arco influye en la magnitud del empuje y análogamente en el dimensionado del estribo, por lo que para conocer realmente esta fuerza se habrá de imponer ciertas condiciones y comprobar que la configuración adquirida es admisible.

Snell, en 1846 proporcionó un ingenioso método para la obtención de esfuerzos en arcos simétricos, del que se valdrá este ejercicio para obtener un empuje admisible y que se representa gráficamente en las [figuras 13 a y b](#). ("La condición de simetría fija la dirección horizontal del empuje en clave"). El método, origen de la estática gráfica, consiste en proponer un cierto punto de aplicación y magnitud de empuje horizontal en clave. Establecido este condicionante y componiendo la fuerza horizontal con la vertical del peso propio se encuentra un paralelogramo cuya diagonal será el empuje en clave. Reiterando este procedimiento se obtiene el empuje en los arranques del arco.

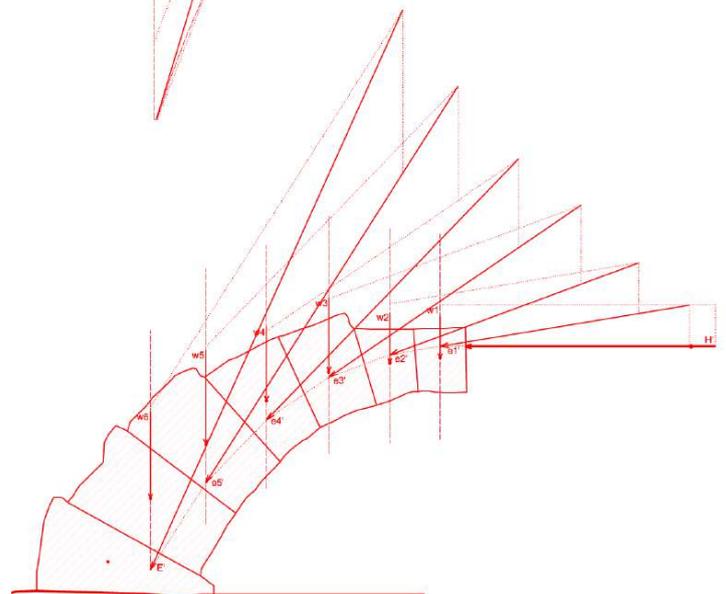
#### [figura13a](#). Equilibrio en un arco simétrico. Configuración inadmisble

Esta figura representa la configuración de empujes que se adquiriera para una fuerza horizontal aplicada, de magnitud  $H$ . Como puede comprobarse visualmente esta configuración no constituye una solución admisible. La línea de empujes no queda contenida en el espesor del elemento de fábrica, es decir, no se cumple la condición de cedencia del material, por tanto existirían tracciones en el interior del elemento. De esta figura se extraen dos nociones, la primera, que la magnitud del empuje es incorrecta, la estructura no se encuentra en equilibrio, no constituye una solución admisible. La segunda, que el punto de aplicación del esfuerzo horizontal inicial  $H$  influye en la admisibilidad de la solución en cuanto a que su posición determina las ordenadas de la línea de empujes.

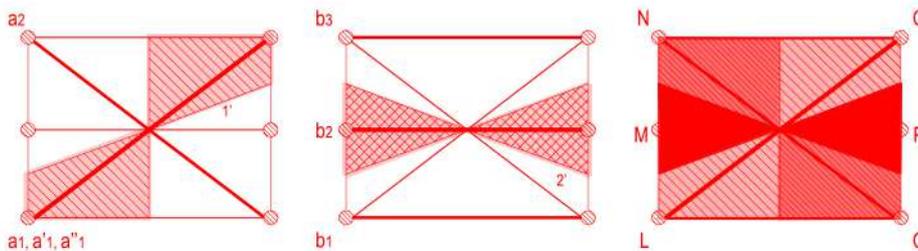


#### [figura13b](#). Equilibrio en un arco simétrico. Configuración admisible

Siendo ahora la reacción horizontal  $H' = 2H$ , se observa que la línea de empujes queda contenida en el espesor de elemento de fábrica, cumpliendo con la condición de cedencia y que por tanto, ahora sí, encontrando una configuración que, para el sistema de cargas, planos de corte y geometría, es válida. Se evidencia a través del estudio de estas dos figuras que la geometría adquiere un papel fundamental en cuanto a la magnitud del empuje se habla, puesto que en la primera, figura 5a, una pequeña modificación en la geometría del arco, ligeramente rebajado, haría la solución admisible. Análogamente se observa que para geometrías de arco rebajadas los empujes adquieren un orden de magnitud de, aproximadamente, el doble, comprobando así lo anteriormente afirmado, el arco apuntado supone una mejora en el comportamiento de una estructura, permitiendo alcanzar mayores luces y elementos de estribo más esbeltos, conduciendo a una arquitectura más brillante.



Para el estudio del empuje realizaremos la misma simplificación aplicada para pesos propios, mediante la cual se descompone la bóveda sexpartita en tres arcos perpiaños, dos nervaduras diagonales y una bóveda en cañón apuntada. Conocida la geometría, los pesos específicos del material y proponiendo una serie de planos de corte para la composición de las dovelas podemos proceder a la obtención individual del empuje para cada uno de los arcos citados. Cabe resaltar que la obtención del empuje se pretende para los elementos portantes de esta fuerza, los arcos, por lo que el peso propio de la plementería se considera asimilado por estos mismos elementos, en la medida en la que el ámbito de cada arco actúa. Para ello nos valdremos de la [figura 14](#), en la que se nombran los arcos según letras y se grafiarán los ámbitos de carga para cada arco.



[figura14](#). Esquema bóveda sexpartita.

En la presente figura se grafías los ámbitos de carga para cada arco, reconociendo dos ámbitos principalmente 1', que afecta a la diagonal a1, y 2', que se refiere al arco b2.

ii = Nombre  
i'i = Peso propio  
i''i = Adición plementería  
l = Soportes

$$a_1 = \text{Diagonal 1}, a'_1 = 19.200 \text{ N/m}^2 \cdot 0,8 \text{ m} = \mathbf{15.360 \text{ N/m}}; a''_1 = 7.200 \text{ N/m}^2 \cdot 11,3 \text{ m}^2 = \mathbf{81.360 \text{ N}}$$

$$L_1 = \text{Longitud directriz 1} = 7,6 \text{ m}; a''_1 = 81.360 \text{ N} / 7,6 \text{ m} = \mathbf{10.705,3 \text{ N/m}}$$

$$a_1 = \mathbf{26.065,3 \text{ N/m}}$$

$$b_1 = \text{Arco 1}, b'_1 = 14.400 \text{ N/m}^2 \cdot 0,6 \text{ m} = \mathbf{8.640 \text{ N/m}}; b''_1 = 7.200 \text{ N/m}^2 \cdot 0 \text{ m}^2 = \mathbf{0 \text{ N}}$$

$$b_1 = \mathbf{8.640 \text{ N/m}}$$

$$b_2 = \text{Arco 2}, b'_2 = 14.400 \text{ N/m}^2 \cdot 0,6 \text{ m} = \mathbf{8.640 \text{ N/m}}; b''_2 = 7.200 \text{ N/m}^2 \cdot 7,5 \text{ m}^2 = \mathbf{54.000 \text{ N}}$$

$$L_2 = \text{Longitud 2} = 6 \text{ m}; a''_1 = 54.000 \text{ N} / 6 \text{ m} = \mathbf{9.000 \text{ N/m}}$$

$$b_2 = \mathbf{17.640 \text{ N/m}}$$

Cada arco se divide en el mismo número de dovelas, diez, por lo que el procedimiento para obtener el peso individual de cada una de ellas consiste en multiplicar la carga lineal obtenida anteriormente por la longitud del segmento de arco. Al resultado basta con dividirlo por el número estimado de dovelas para obtener la carga puntual o peso de estos elementos. Se comprueba, comparando con los datos obtenidos gráficamente, [figura 15](#), que el peso obtenido es suficientemente aproximado, considerándose solución válida.

$A_1 = 19.809,6 \text{ N} = \mathbf{19,8 \text{ KN}}$ ;  $B_1 = 5.184 \text{ N} = \mathbf{5,2 \text{ KN}}$ ;  $B_2 = 10.584 \text{ N} = \mathbf{10,6 \text{ KN}}$  Conocidas las cargas puntuales de las dovelas de cada arco se puede proceder a aplicar el método Snell, previamente mencionado, para la obtención del empuje en el arranque del arco.

Valiéndose de la estática gráfica, aplicada en la [figura15](#), se obtiene en este punto los empujes en forma de vector, que por medio de las escalas gráficas se traducen a kilogramos, y se comprueba visualmente que se cumple la condición de cadencia impuesta por el material, la fábrica, concluyendo este apartado.

**EA1 = 250.000 N = 250 KN ; EB2 = 114.000 N = 114 KN**

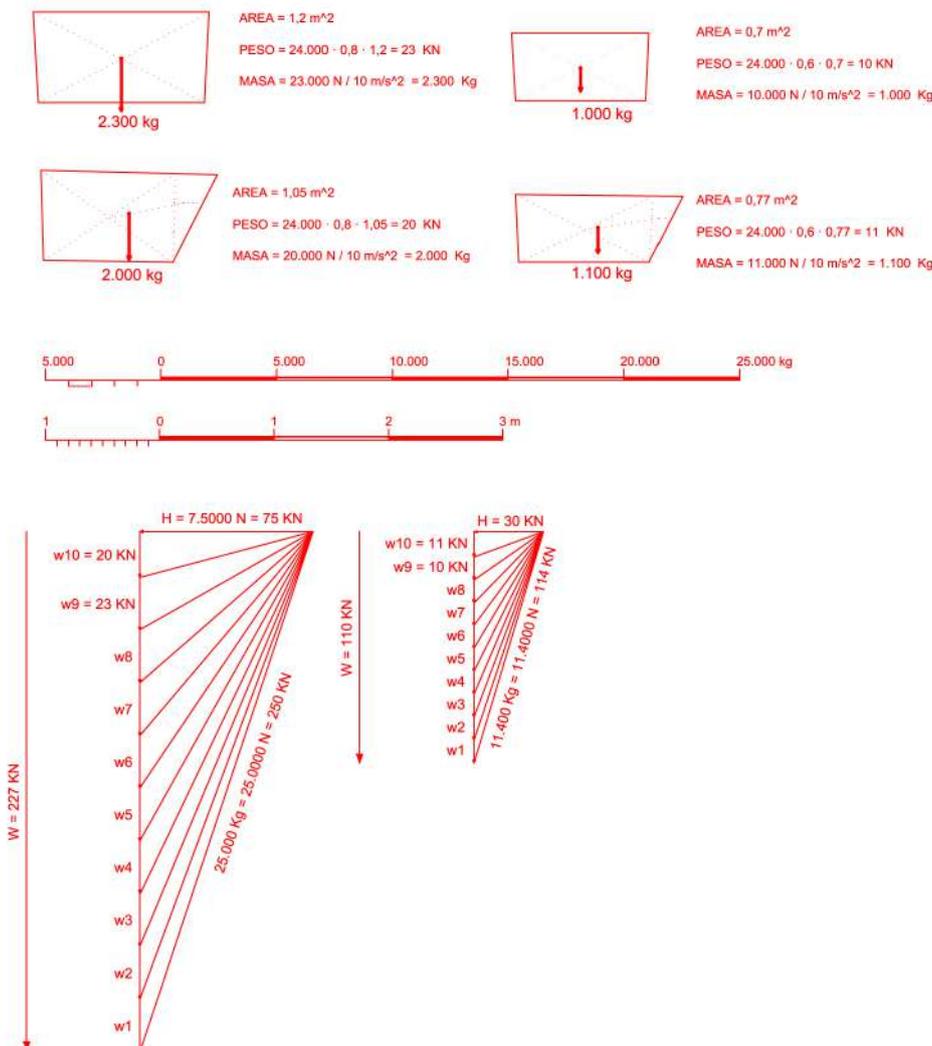
La conclusión adoptada en este apartado sigue así: existe un rango o intervalo de valores de la componente horizontal del empuje que verifican la condición de cadencia de la fábrica. Este rango se ha establecido experimentalmente para estos dos arcos de la sección de bóvedas elegida en 10 y 5 KN respectivamente. Conocida, aproximadamente, las situaciones límite mínimas y máximas, y asumiendo que se ha excedido en las cargas de peso propio por razones de seguridad de cálculo, es razonable admitir que si bien, independientemente, las diagonales se encuentran en situación de mínimo esfuerzo, por lo que admitirían más carga, los arcos transversales no, por ello la bóveda como conjunto no debería recibir más carga para que su comportamiento sea asumiblemente elástico.

figura15. Método snell para el cálculo del empuje en arcos simétricos. Estática gráfica.

Se ha representado para ambos arcos A1, nervadura diagonal, y B2, arco perpiño, lo dictado en el método Snell. Como se puede observar, se ha grafiado en línea discontinua de puntos la línea de empujes.

Para el caso del arco A1, nótese coincide prácticamente con la línea de empujes mínima para arcos apuntados, mientras que en el caso del arco B2, se aprecia la situación contraria. Esto implica para el primer de los casos que el intervalo admisible del empuje comprenderá un rango establecido entre los 75 - 85 KN aproximadamente, mientras que para el segundo caso el intervalo se reduce a 25 - 30 KN.

Esta acotación del intervalo de empuje admisible se extrae de la experimentación en el proceso gráfico de obtención de ambos diagramas, por lo que no puede adoptarse como norma general, puesto que, como se intuye, la geometría y dimensiones del arco juegan un papel fundamental en la capacidad portante del mismo elemento.



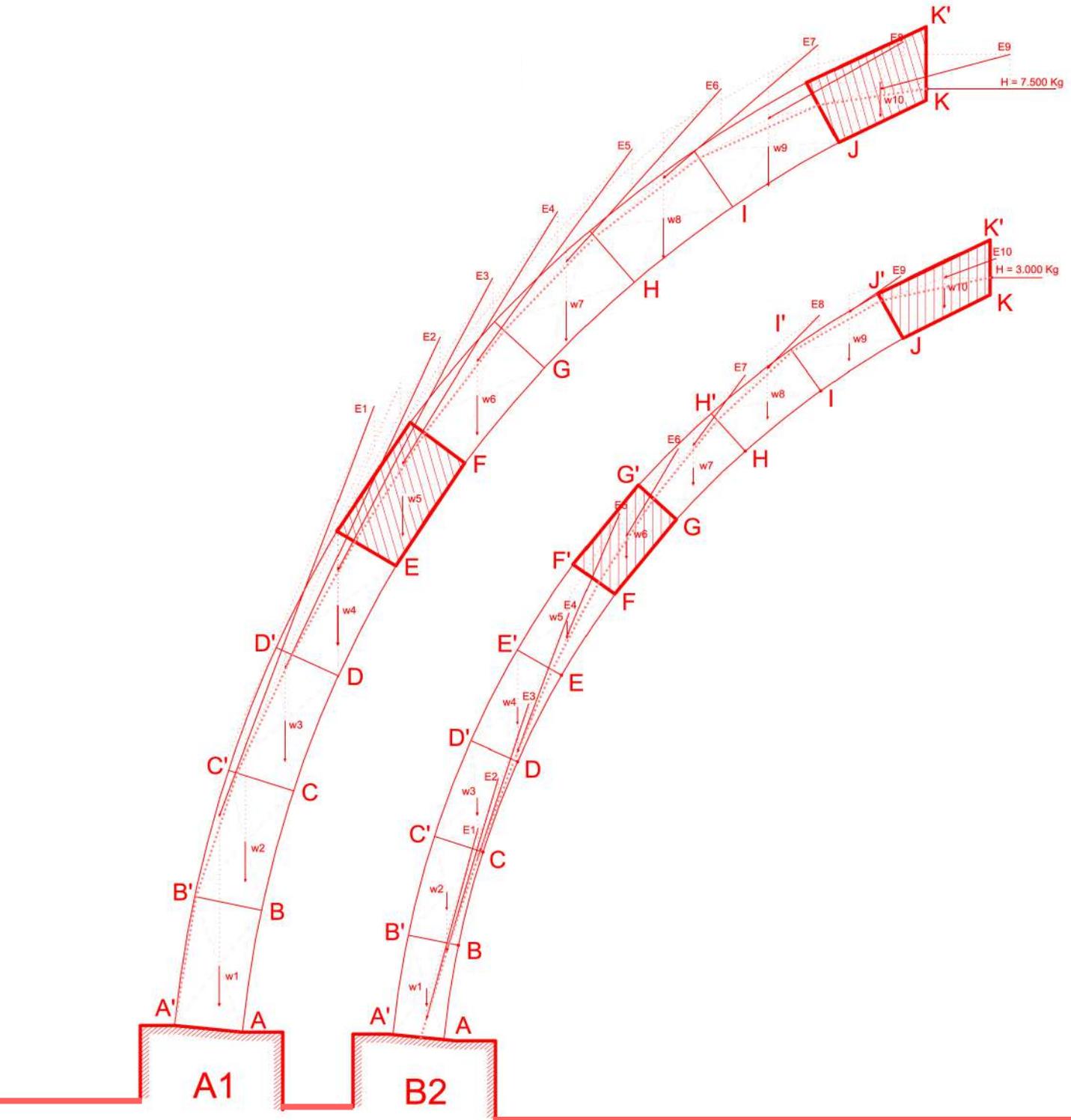


figura16. Equilibrio en un arco simétrico. Polígono de fuerzas

El polígono de fuerzas muestra para cada valor de reacción horizontal, la magnitud e inclinación del empuje, mostrando tanto la componente horizontal, invariante, como la vertical, la adición de pesos propios. La presente figura se presenta análogamente al método Snell expuesto anteriormente.

Como aclaración se expone la adición de vectores en la figura 7a

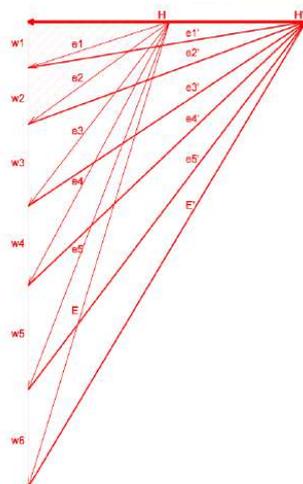
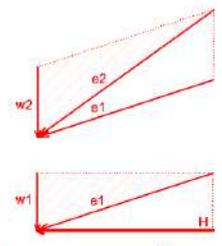


figura16a. Composición de fuerzas.

La suma de vectores se puede realizar gráficamente como se muestra. Este será el método empleado en la obtención del empuje.



## CARGAS VARIABLES

### VIENTO

El enfoque en la obtención de la carga de viento se realizará desde un punto de vista puramente teórico, lo que implica que no se obtendrá, per se, resultados analíticos en cuanto a este punto se trata por razón de complejidad de cálculo y dificultad en la obtención de resultados lo suficientemente fiables, sin someter el modelo a un programa de cálculo. Sin embargo, parece importante exponer un procedimiento claro siguiendo la línea de razonamiento citada anteriormente en el libro "Experiments in gothic structure".

Previo a citar los pasos a seguir para el cálculo teórico de la carga de viento cabe analizar la orientación en la que el viento actúa con mayor intensidad, entendiendo intensidad como la situación más desfavorable. Siendo para el caso general de las catedrales góticas, y en particular para Notre Dame de París, independientemente de su dimensión, por el claro predominio de la longitudinalidad en la composición en planta, la dirección trasversal, [figura 17](#)

Así pues, la información necesaria para realizar un estudio de la distribución de la carga de viento incluye un conocimiento previo de los registros meteorológicos históricos dados para la localización, la Ile-de-france, que incluyan la velocidad media, la dirección predominante del viento y los perfiles teóricos de velocidad o niveles de velocidad para el terreno, en particular en el momento de la construcción. Esta información suele poder obtenerse a través de las fuentes meteorológicas gubernamentales.

Conocida esta información se puede proceder a calcular las distribuciones de presiones y succiones a través de la siguiente expresión:

$$p = 1/2 \rho \cdot V^2 \cdot C \cdot G \text{ (Kg = 10N) } = 150 \text{ kg/m}^2 = 1500 \text{ N/m}^2 = 1,5 \text{ KN/m}^2$$

fórmula 2

$$P = m \cdot g \text{ [ g = 10 m/s}^2; 1\text{kg} = 10 \text{ N} = 10^{-2} \text{ KN ]}$$

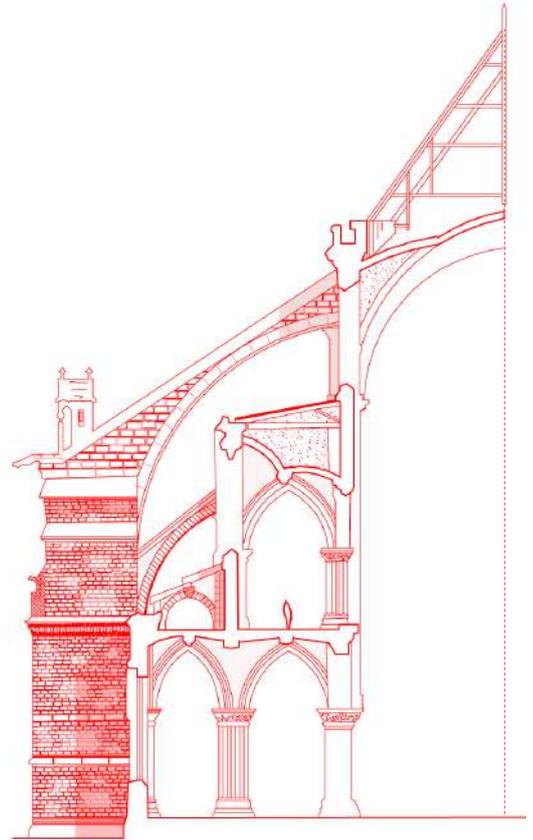
$\rho$  = Presión del viento

$\rho$  = Densidad del aire = 0,135 kg-sec<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>

V = Velocidad del viento = m/s

C= Coeficiente de presión = adimensional

G = Factor ráfaga = 2,3



*figura17. Sección trasversal Notre Dame, París  
Con objeto de dar valor a la mampostería del muro contrafuerte obsérvese no se ha grafiado la capilla entre muros.*

### COEFICIENTE DE PRESIÓN DEL VIENTO

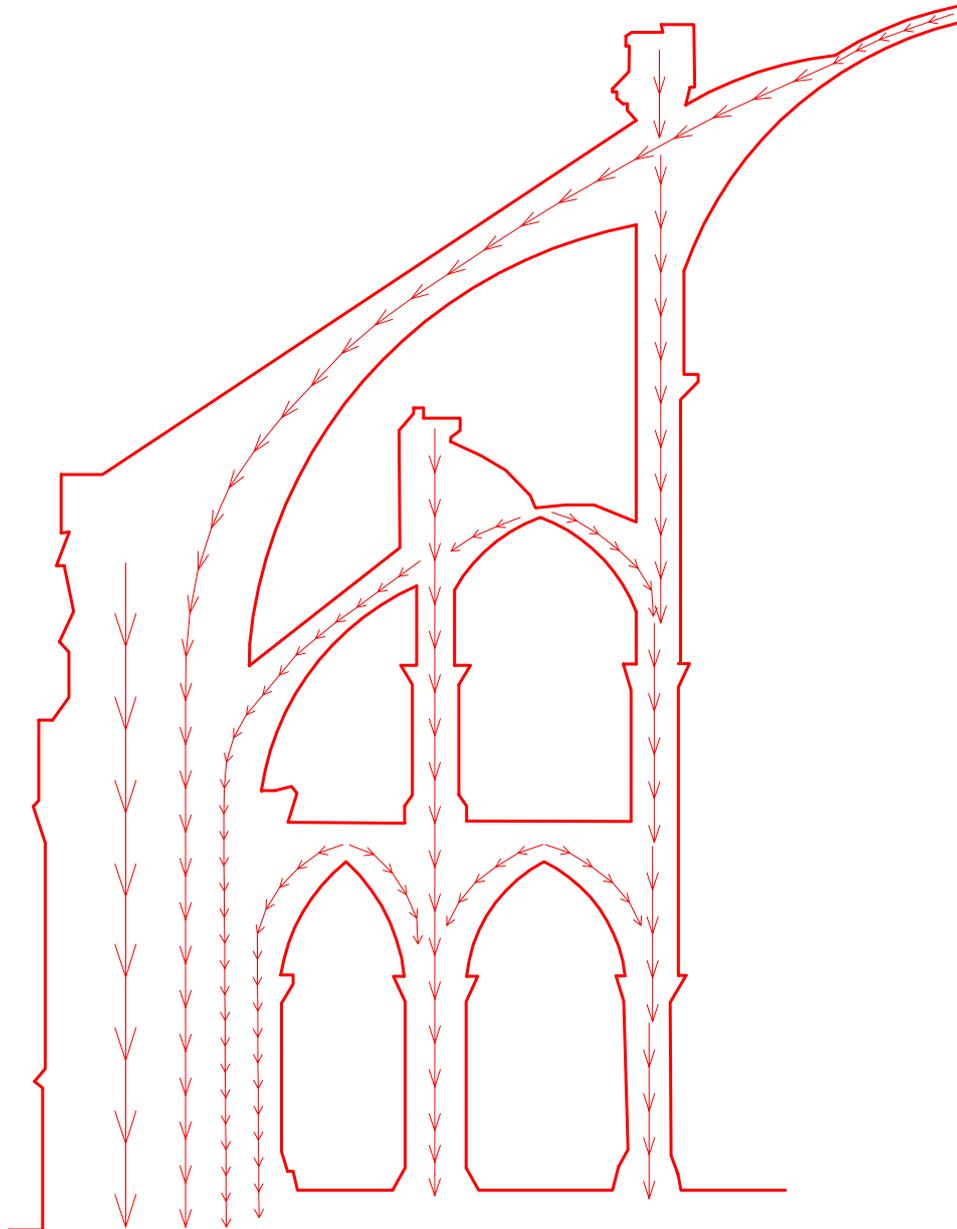
Para la obtención de este coeficiente adimensional relacionado con la tipología y la forma del edificio de estudio se requiere realizar al menos dos modelos de estudios de túnel de viento que proporcionen las distribuciones de presión sobre las superficies del objeto analizado para un campo de velocidades constante y variable respectivamente.

### FACTOR DE RAFAGA DE VIENTO

El factor ráfaga tienen en cuenta la esbeltez, relación ancho-alto del edificio, la rigidez, la frecuencia del viento, la rugosidad del terreno y la energía de ráfaga basada en la distribución de la longitud de onda del viento. Según las experiencias de Robert Mark *"Cuando la altura total de la estructura es inferior a un séptimo de la longitud de onda de la ráfaga de viento, generalmente 300-900m, se puede adoptar un factor constante, que para cualquier construcción gótica que cumpla con la tipología de catedral, ronda en torno al 2,3-2,2"*<sup>33</sup>

Del estudio realizado para la catedral de Amiens, una de las construcciones góticas más altas, se obtiene una presión máxima del viento de  $150 \text{ kg/m}^2$ . Para este trabajo adoptaremos el mismo resultado sabiendo queda dentro del margen de la seguridad. Claramente este resultado, varios ordenes de magnitud por debajo de aquel obtenido para el peso propio de las bóvedas y el empuje, no supone una solicitud para la estructura que pueda llegar a agotar su resistencia o afectar a su uso. Por ello se concluye que, cumpliendo ambos estados limite, no tenerla en cuenta no afectará la integridad del objeto de este punto. Véase el libro citado anteriormente para más información.

## TRASMISIÓN DE CARGAS Y ESQUEMA ESTRUCTURAL



*figura18. Esquema transmisión de cargas. Notre Dame de París.  
En la presente figura se muestra el recorrido que, con mayor probabilidad, realizan las cargas en el interior de la estructura, según la capacidad del elemento estructural para soportar las mismas.*

4

# ESTRUCTURAS METÁLICAS

## CONSIDERACIONES PREVIAS (Contexto y Afección de las bóvedas)

### CONTEXTO

Previo a abordar la cuestión de qué propuesta de conjunto estructural sería más adecuada para remplazar la techumbre y bóvedas afectadas por el incendio ocurrido la tarde del lunes 15 de abril de 2019, cabría analizar el punto de partida, el nivel de afección de ambos elementos, y posteriormente disertar razonadamente los criterios que afectan la cubrición de las naves de la catedral, tales como la elección material y formal. Esta elección debe apoyarse en la tradición e historia legados a través de la conciencia histórica, el conocimiento y la documentación que han sido aportados por nombres como Violet le Duc\*, Henry Deneux o Rémi Fromot y Cédric Trentesaux (enlace web) en el ejercicio de su profesión.

### AFECCIÓN TECHUMBRE Y BÓVEDAS

“Con total seguridad, la catedral de Notre Dame de París es, a día de hoy, un edificio sublime y majestuoso. Aunque ha conservado su nobleza con el paso del tiempo, uno no puede sino lamentar, sino indignarse ante las innumerables degradaciones y ultrajes infligidas contra este venerable monumento, tanto por el paso del tiempo como por la mano del hombre”<sup>34</sup>

Esta cita extraída de la genial novela de Victor-Marie Hugo, Nuestra señora de París, 1831, aunque aplicada en anteriores ocasiones para subrayar el descontento generado tras la polémica restauración llevada a cabo entre 1844-1869 por Eugéne Viollet-le-Duc y Jean-Baptiste-Antolina Lassus, puede aplicarse en la actualidad para de nuevo enfatizar, resaltar, lo que ha sido una evidencia desde el momento de su construcción en 1163, la grandeza y singularidad de la construcción, que si bien no es la obra que mejor relata el espíritu del estilo gótico desde el punto de vista artístico-literario, si se ha grabado como emblema de este mismo estilo en la conciencia colectiva, en parte gracias a la citada obra del Poeta Victor Hugo y posteriores adaptaciones llevadas al teatro, y a la gran pantalla de la mano de las producciones Walt Disney Pictures, como es el caso de la película el Jorobado de Notre Dame, 1996.

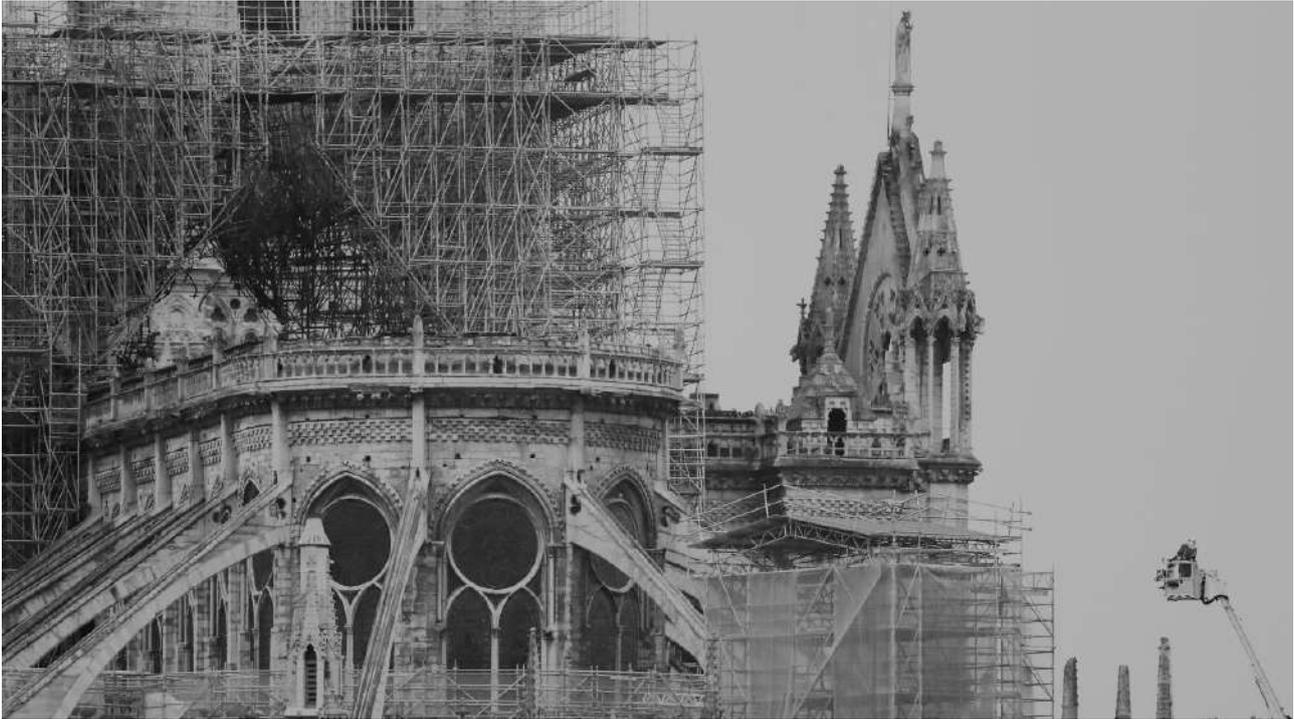
De esta manera el incendio acaecido el pasado 15 de Abril de 2019, se suma a la lista de degradaciones y ultrajes implícitos en la cita y sin ninguna duda reabre la polémica generada casi ya dos siglos en torno a la restauración de la obra maestra del Gótico Francés.

En cuanto al nivel de pérdida o degradación de los componentes que conforman la cubierta de Notre Dame, bóvedas y techumbre, resulta natural como se señala en el artículo para el blog Albanécar de Javier de Mingo, pensar que puesto que la parte más representativa en el skyline Parisino, en cuanto a la catedral se refiere, eran aquellos apuntados faldones y aguja que definían la personalidad del monumento, su completa destrucción fue, o ha sido la gran catástrofe, pero sumándose al pensamiento del mencionado arquitecto Javier Mingo, lo verdaderamente preocupante ha sido la pérdida del trabajo de carpintería medieval que formaba la techumbre de madera que soportaba los faldones de la cubierta jabalconada.

Ciertamente, no es de extrañar que de los dos elementos que formaban la cubierta de la catedral uno de ellos se vierá completamente degradado mientras el otro se ha mantenido prácticamente intacto, este hecho responde a la naturaleza del material estructural empleado, madera de roble y piedra caliza. La respuesta al fuego de la madera, aun siendo un material altamente combustible, empleado como fuente de energía biomasa, se podría clasificar de excepcional, en cuanto al nivel de protección que representa frente a materiales homólogos en la construcción, como el acero o el aluminio. La madera al combustionar forma una capa superficial de material carbonizado, carbono, el cual requiere un incremento del calor aportado superior a los 400°C para que la combustión continúe. De alguna forma la carbonización de la madera es un proceso lento que permite mantener las propiedades mecánicas del elemento durante un periodo de

tiempo mayor. Esto posiblemente haya sido responsable de la buena conservación de las bóvedas pétreas, junto con el resto de la estructura, que si bien tiene un comportamiento frente al fuego, por su materialidad, superior al de la madera, principalmente por su incombustibilidad, su comportamiento estructural si viene condicionado por aquel de la techumbre, pudiendo verse comprometido en un incendio si no se toman las medidas adecuadas.

Afortunadamente, en el caso de Notre dame de París se pudo contener el incendio y actuar sobre la estructura antes de que los esfuerzos, principalmente los pesos propios de las bóvedas, llevarán al colapso la emblemática edificación, por lo que siguiendo la cita que abría este apartado, uno no puede sino lamentar los ultrajes infligidos contra este venerable monumento, y agradecer la resiliencia que lo ha mantenido para su admiración en la actualidad.



[figura19](#). Notre Dame de París, tras el incendio del 15 de abril de 2019

## CUBIERTAS METÁLICAS (Tipos de cubierta y selección)

Partiendo de lo introducido en este último capítulo y acorde a lo planteado sobre la especial importancia del trabajo de carpintería medieval, parece lógico concluir que, posiblemente, la mejor opción, teniendo en cuenta lo anteriormente comentado, sería la intervención sobre la cubierta con afán conservacionista o proteccionista, siendo esto una reconstrucción idéntica de los trabajos de cerchas o armadura medieval realizados, en el caso de Notre dame, con la madera de más de mil robles.

Dentro del marco de la restauración o mejor dicho de la reconstrucción de la cubierta, se puede adoptar una postura más o menos purista atendiendo a criterios económicos, en el sentido en que, si bien la importancia de recuperar el trabajo de carpintería perdido en el incendio es máximo, también hay que reconocer que no solo a nivel económico esta opción resultaría inadecuada, si no que a otros niveles como puede ser el medioambiental, se evidencia el sin sentido de la reproducción una cubierta de esta magnitud con cerchas de madera maciza natural, siendo que en la actualidad existen innumerables opciones con maderas recicladas que podrían constituir una opción mucho más responsable con los recursos de los que disponemos, tanto económicos, como, y principalmente, ecológicos.

Siendo así, la elección adoptada para la propuesta de nueva cubrición sería una reproducción idéntica de la cubierta., una techumbre realizada con cerchas de madera transformada reciclada.

No obstante para el objeto del trabajo que nos ocupa se va a optar por adaptar la tipología de cercha de madera a una estructura metálica, de manera que la propuesta consistirá en dos fases un estudio del tipo de armadura empleado en la cubierta de Notre Dame y posteriormente una la adaptación de este mismo a una estructura metálica.

### TIPOS

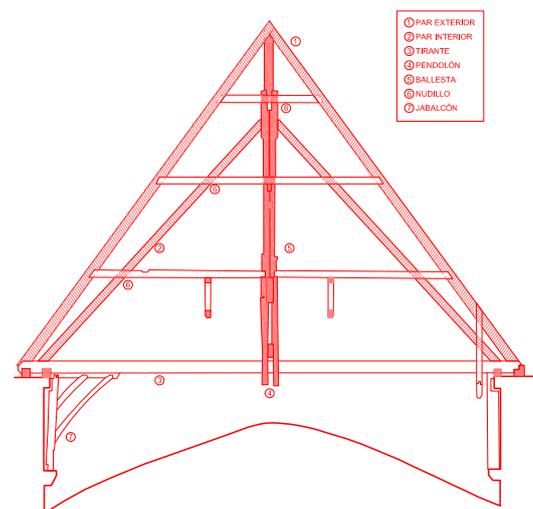
Del artículo anteriormente mencionado "La Foret de Notre Dame" publicado en 10 de enero del 2020 por Albanécar se extraen las siguientes figuras que se comentan, [figura 20](#) y [figura 21](#), las cuales representan la cercha principal y secundaria que conforman la armadura de cubierta perdida durante el incendio con sus distintas partes o elementos.

A continuación se recibe la cita dónde Javier de Mingo, creador del contenido del artículo, comenta la función de cada elemento que se señala en las distintas figuras de forma que se entienda fácilmente la forma de trabajo de esta estructura.

#### CERCHA PRINCIPAL " Ferme Principale "

"La cercha principal está formada por dos juegos de pares: uno exterior que soporta la cobertura y uno interior menos inclinado, que junto al *poignon* (pendolón) forman un *arbalétrier* (ballesta)."<sup>35</sup> [figura 19](#)

"Los pares internos están comprimidos por el pendolón, que tira hacia abajo, al ser el responsable principal de



[figura20](#). Cercha medieval Principal Notre Dame de París.

soportar la flecha del imprescindible *entrait* (tirante), de nada menos que 14 metros, y de los *entrails retroussés* (nudillos). Además, en sentido longitudinal, el *sous-faîtage*, un sistema de pilares jabalconados con carreras que discurren bajo los nudillos, tiene la misión de repartir la flecha de los elementos horizontales cargando en esta ocasión sobre los pares exteriores.<sup>36</sup>

#### PAR EXTERIOR

Su misión es absorber el peso propio del elemento de cubrición de la cubierta bien sea teja cerámica curva o árabe, teja cerámica plana o como es el caso, teja plana metálica, además de la carga de viento, que será la sollicitación más exigente en el dimensionado de este elemento.

Típicamente, el comportamiento ideal de una cercha es axial, es decir se trabaja con esfuerzos de tracción y compresión, no obstante el comportamiento real difiere ligeramente, existe momento flector, por lo que este elemento requiere de puntos de apoyo que limiten su dimensión, reduciendo de esta manera el esfuerzo sollicitación. [Figura 21a](#)

#### PAR INTERIOR

Este elemento forma junto al pendolón la ballesta de la cercha. Su inclinación ligeramente más rebajada que el par exterior tiene como objeto incrementar sensiblemente la componente horizontal del esfuerzo interno que define el elemento con la finalidad de contrarrestar el empuje que genera el par exterior traccionado. Este efecto se consigue precisamente gracias al efecto ballesta que consiste en comprimir el par interior a través de una carga vertical transmitida por el pendolón. [Figura 21b](#)

#### TIRANTE

El tirante o *entrait* en francés es el elemento horizontal comprimido de mayor longitud, en este caso alrededor de los 14 metros. La compresión de este elemento provocada por la tracción del par exterior genera una flecha que debe ser absorbida por el elemento vertical, pendolón, comprimiendo el mismo y transmitiendo ese esfuerzo al par interior, equilibrando el sistema y reduciendo finalmente el empuje generado por el par exterior traccionado. [Figura 21c](#)

#### PENDOLÓN

De la palabra péndulo, el pendolón o "poinçon" es el elemento de la armadura medieval de mayor importancia, ya que recoge las deformaciones debidas a la flexión de los elementos horizontales dispuestos paralelamente a lo largo de la cercha.

Como resultado este elemento se encuentra en un estado de compresión que se transmite al par interno, favoreciendo la disminución del empuje y, por tanto, la disminución de la sección necesaria para el dimensionado. [Figura 21d](#)

#### NUDILLOS

Diminutivo de nudo. Los nudillos son los elementos horizontales de menor entidad que se desfazan una cierta distancia de forma paralela a lo largo de la cercha.

Tienen una función fundamentalmente estructural ya que, por una parte, reducen la longitud de los pares limitando la flexión a la que están sometidos, y por tanto su deformación, y por otra parte, constituyen un elemento rigidizador contra las acciones horizontales en el plano en el que están contenidos.

Además pueden contribuir a la adición de compresión del par inferior incrementado su flexión mediante pesos colgantes, ergo, contribuyen a la reducción del empuje. [Figura 21e](#)

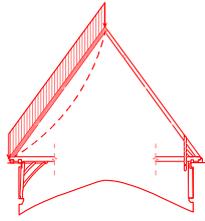


figura21a. Par ext.

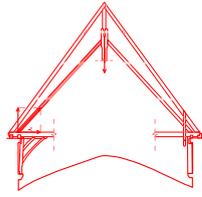


figura21b. Par int.

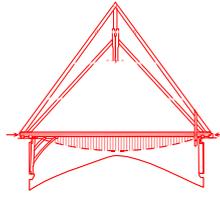


figura21c. Tirante.

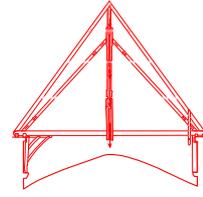


figura21d. Pendolón.

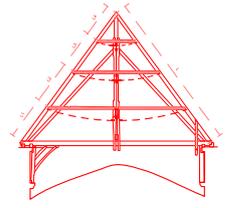


figura21d. Nudillos.

### CERCHA SECUNDARIA

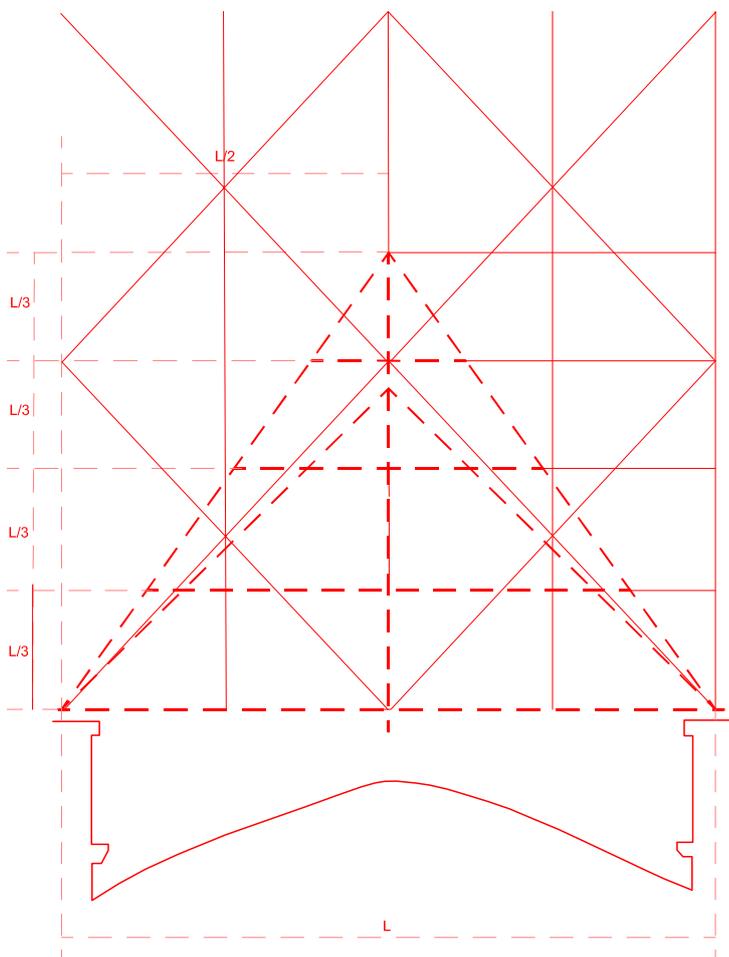
*“Por otra parte, había cuatro cerchas secundarias por cada principal, que únicamente poseían pares exteriores y nudillos, con la función de dar soporte a la cobertura y transmitir cargas. Al carecer de tirante, ejercían empujes horizontales sobre los muros que sólo los tirantes de las cerchas principales podían contrarrestar, si bien en el caso de Notre Dame, los contrafuertes de los muros, pensados para soportar el empuje de las bóvedas sexpartitas de la nave, también suponían suficiente garantía, por lo menos para evitar un desastre general”<sup>37</sup>.*

Este tipo, considerado de segundo orden en la jerarquía del armazón estructural gótico, carece de “arbalétrier” y “entrait”, es decir ballesta y tirante, figuras 21b -21d, por lo que lógicamente, y como bien se describe en la cita anterior los esfuerzos de tracción transmitidos por el par exterior se reciben por los muros en forma de empuje, siendo la cercha principal la encargada, de alguna manera de contrarrestar este mismo empuje, y los contrafuertes de absorberlo con suficiente garantía.

## GEOMETRIZACIÓN

Previo a realizar una propuesta en estructura metálica cabe, una vez comprendido el funcionamiento estructural, siendo este la transmisión de esfuerzos internos en el armazón que conforma la cubierta, realizar, basándose en la [figura 21](#), un esquema en el que aparezcan los ejes principales, distancias y ritmos, que permitan realizar una abstracción formal o geométrica de la cercha original, con objeto de obtener una plantilla gráfica base para generar las posibles propuestas.[figura 22](#)

Siendo así, obtenida la plantilla se puede proceder a la propuesta de diferentes cerchas que pueden ser dimensionadas, ahora sí, basándose en el cálculo estructural de estados límite últimos y de servicio, para una carga estimada de una combinación de acciones dada, teniendo como acciones a considerar el peso propio del material de cubrición y la carga de viento que se desestimaba en anteriores apartados.



[figura22](#). Plantilla gráfica para la elaboración de cerchas.

Para la obtención de la plantilla gráfica se ha optado por geometrizar el modelo base referido en la figura 20, de manera que las proporciones y medidas guarden una relación dimensional, siendo  $L$ , la longitud total de la cercha, que en el caso de las cerchas principales y secundarias de el armazón de Notre Dame es de unos 14 m.

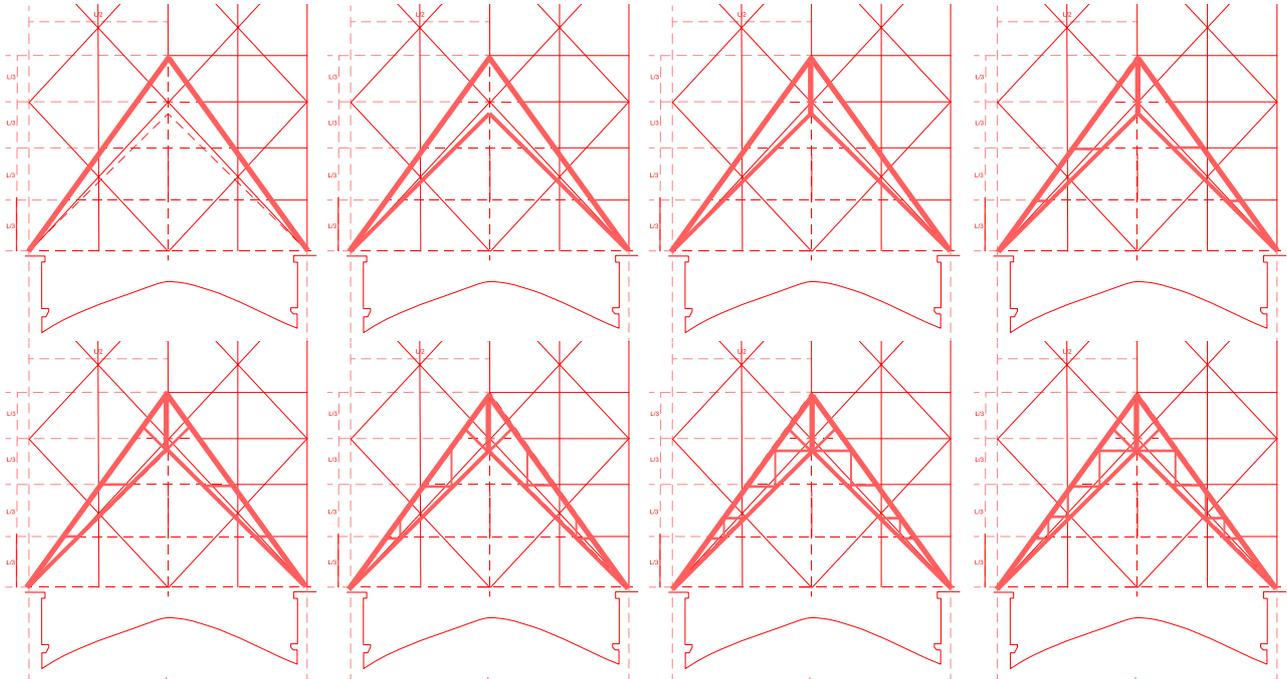
No obstante se puede encontrar cerchas de idéntica proporción modificando este parámetro longitud.

Para la obtención de una posible cercha metálica basta con elegir de las alineaciones principales, grafiadas con línea discontinua gruesa, los segmentos que deben formar la configuración, entendiendo siempre que debe de tratarse de una solución, al menos, geoméricamente, admisible.

En este sentido existen dos opciones, optar por no modificar el patrón adoptando esta misma configuración diseñada en madera para realizar una estructura metálica, o bien, simplificar esta geometría para la obtención de un modelo nuevo.

## ESQUEMA ESTRUCTURAL

Este punto abarca el proceso o fases de generación formal de la cercha principal, desde un estadio primitivo al final, con el objetivo de entender la propuesta que se realiza para la reconstrucción de la armadura de cubierta de la catedral de Notre Dame de París. [figura 23](#)



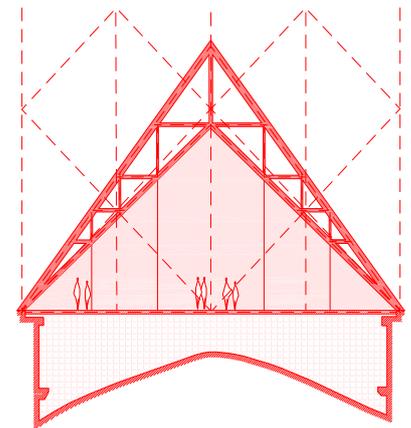
[figura23](#). Estadios de la Cercha Metálica .

A medida que se avanza en los ocho estadios que componen esta figura se evidencia la existencia de un espacio con interés arquitectónico que podría albergar un hábitat para la memoria histórica, que de alguna manera se ha visto dañada con la destrucción del armazón gótico de Notre Dame, con la intención de cerrar la última de las cicatrices infligidas en el venerable monumento que sirvió de inspiración a Víctor Hugo en la redacción de su obra y que menciona en su famosa cita.

## ESPACIO DE LA RESILIENCIA

Este nuevo espacio que se genera entre la cara superior de las bóvedas pétreas y la cara inferior de las cerchas metálicas se invierte para alojar el espacio dedicado a la contemplación y reverencia de la historia de Notre Dame.

Un espacio museo ambivalente, generado entre la preexistencia y lo nuevo, dónde se dignifique aquello que se ha perdido para siempre, el trabajo de carpintería medieval, pero que quedará grabado en la memoria colectiva como emblema de una nueva etapa en la historia contemporánea.



[figura24](#). Espacio de la Resiliencia. Museo

# PROPUESTA CONJUNTO ESTRUCTURAL

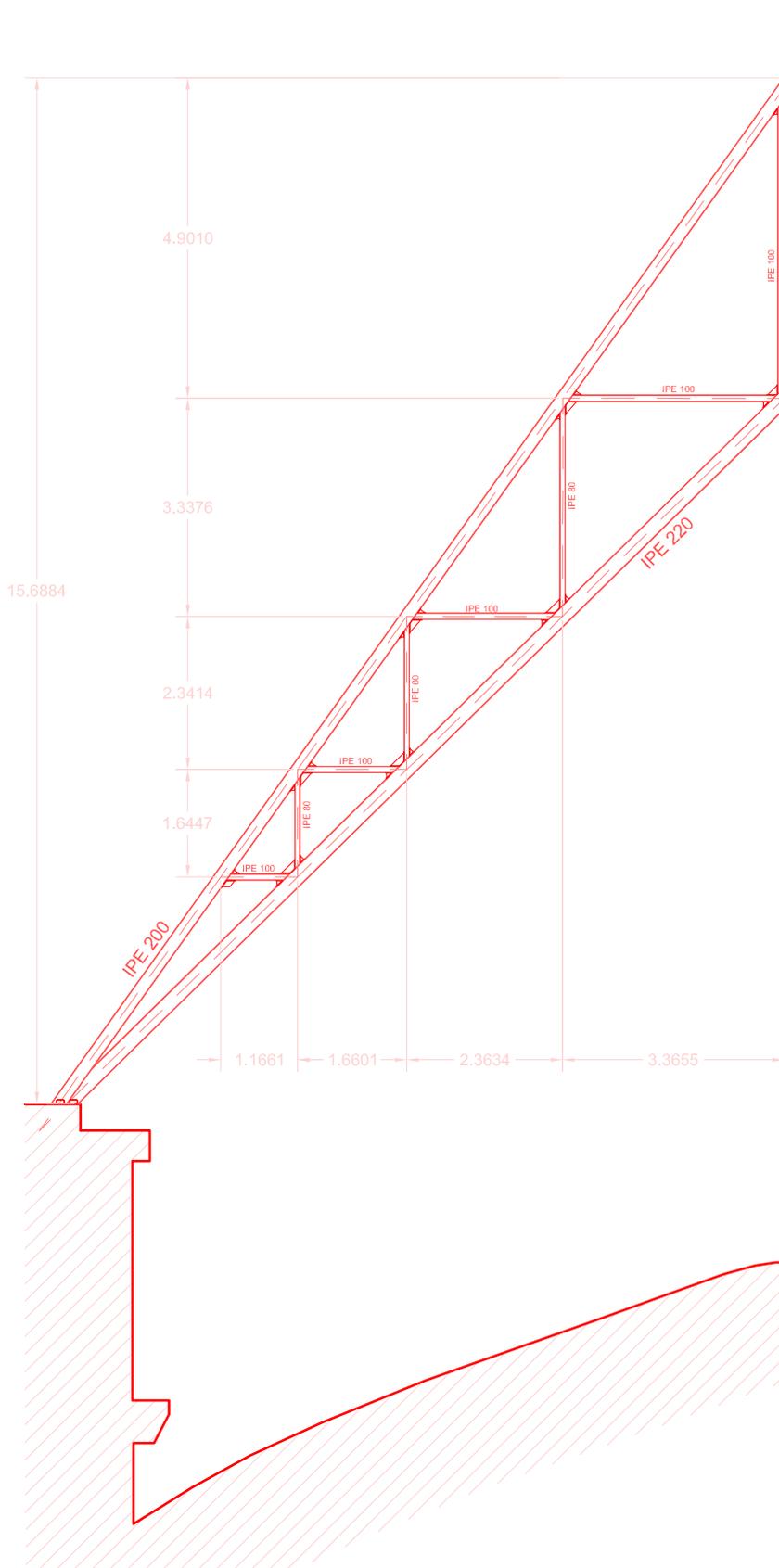


figura25. Predimensionado de la cercha metálica.

## COMPROBACIÓN

Para concluir este trabajo final de grado, se realizará una comprobación estructural, siguiendo el método de los estados límite, para situaciones permanentes o casi permanentes, estados límite últimos, del predimensionado realizado en el apartado anterior, de tal manera que, el axil sollicitación, para cada una de las barras que componen la cercha, obtenido tras aplicar una de las hipótesis de carga que combina, según la persistencia de la acción, los diferentes tipos de carga, permanentes o variables (o accidentales), sea admisible. Es decir, se verifique :

$$S_d \leq R_d \text{ (N/mm}^2\text{) fórmula 3}$$

Esta fórmula genérica proporcionada por el código técnico de la edificación, en el documento básico de seguridad estructural DB SE-A, viene a decir que las acciones, o sollicitaciones, mayoradas debe ser menor o igual a la resistencia de cálculo o diseño, siendo esta, el producto de la resistencia característica del material, en este caso acero S-275, y el coeficiente de minoración.

$$S_d = S \cdot \gamma_f \text{ fórmula 4}$$

$$R_d = R_k \cdot \gamma_m \text{ fórmula 5}$$

Se observa en la expresión de la fórmula 3, que las unidades corresponden a fuerza por unidad de superficie, es decir, tensión. Lo que implica, en el caso de la fórmula 4, que, para la situación particular de presentarse una acción de axil puro, como es el caso, la formula seguiría así:

$$S_d = S \cdot \gamma_f = (N_x/A) \cdot \gamma_f \text{ fórmula 4.1}$$

Particularizando la fórmula 3 al caso concreto en el que nos encontramos, una cercha realizada con perfiles metálicos IPE sometida a fuerza axial, se encuentra que, la expresión a emplear en la comprobación es la siguiente:

$$N_x / f_{y,d} \leq A \text{ fórmula 6}$$

$N_x$  = Sollicitación axial, bien sea, tracción o compresión (N)

$$f_{y,d} = \text{Resistencia de diseño del acero} = f_{y,k} / \gamma_{M0} = 275 / 1.05 = 262 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

$A$  = Area del perfil metálico (mm<sup>2</sup>)

De esta manera el objeto ahora es averiguar la sollicitación en cada una de las barras que componen la cercha y a través de la fórmula 6, comprobar que la estimación realizada en el predimensiono es válida. Para ello se necesita conocer las cargas que actúan sobre la estructura, permanentes y variables, elegir la hipótesis de carga más adecuada para la situación que nos encontramos y una vez aplicadas estas cargas, a las que ya se aplican los coeficientes de mayoración de acciones, sobre el modelo estructural, mediante el método de los nudos, el método de los cortes o equilibrando acciones, se obtiene la sollicitación de cálculo.

## ESTIMACIÓN CARGAS

Obtenidas las cargas superficiales que afectan la cubierta se trasladará estas a sus correspondientes lineales a través del ámbito de carga. Generalmente en estructuras unidireccionales, como la que encontramos, las cargas actuantes, normalmente superficiales, son asumidas por los elementos con capacidad portante, definidos en una de las direcciones, la dirección principal de carga. Estas cargas son transmitidas al elemento portante mediante elementos secundarios ortogonales a la dirección principal de la estructura, formando una retícula, que posibilita la conversión de cargas superficiales a lineales. En este sentido, el ámbito de carga, figura 25, de un elemento estructural lineal, es la zona, área imaginaria, en la que este elemento actúa, es decir, la parte de la carga superficial que es asimilada por el elemento portante principal.

$$amb.l = 0.5L$$

C

[fórmula 7](#)

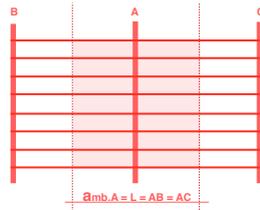


figura25. Esquema Ambito de carga A .

Convencionalmente el ámbito de carga para un elemento estructural, en este caso la viga A, corresponde a un medio de la luz entre elementos con capacidad portante, ya sean estos, principales o secundarios, dependiendo del elemento a analizar, para el caso I. EXTREMOS. Y una vez la luz entre elementos portantes para el caso II. MEDIOS.

### PERMANENTES

Las cargas permanentes que actúan sobre la estructura corresponden al peso propio del material de cubierta, en este caso, cubierta acabada con teja metálica (W1), y al peso propio de la propia estructura, realizada con perfiles IPE (W2).

$$W = W1 + W2 = 16 \text{ KN/m}$$

#### PESO PROPIO CUBIERTA

Se extrae el peso propio de la cubierta a través de prontuario. ([prontuarios.info/acciones/elementos](http://prontuarios.info/acciones/elementos))

Cubiertas (peso en proyección horizontal). Faldones de teja sobre tableros  $W = 3 \text{ KN/m}^2$

Se considera una luz entre cerchas de 5m y como caso de estudio una cercha intermedia, lo que implica que  $amb = L = 5\text{m}$

$$W1 = 2 \cdot (3 \text{ KN/m}^2) = 3 \cdot 5 = 15 \text{ KN/m} = 15.000 \text{ N/m}$$

#### PESO PROPIO ESTRUCTURA

Extrayendo los datos de un prontuario de estructuras metálicas se obtiene los pesos lineales para cada perfil que forma la cercha.

$$W_{IPE220} = 262 \text{ N/m}$$

$$W_{IPE200} = 224 \text{ N/m}$$

$$W_{IPE100} = 81 \text{ N/m}$$

$$W_{IPE80} = 60 \text{ N/m}$$

$$W2 = 2 \cdot [(262 \cdot 15,9) + (224 \cdot 19,55) + (81 \cdot 8,5) + (60 \cdot 7,3)] + (81 \cdot 4,9) = 2 \cdot [4.165,8 + 4.379,2 + 688,5 + 438] + 396,9 = 2 \cdot [9.671,5] + 396,9 = 19.740 \text{ N}$$

$$W2 = 19.740 / 19,55 \text{ (N/m)} = 1009,7 \text{ N/m} = 1 \text{ KN/m}$$

## VARIABLES

Las acciones variables son aquellas que pueden o no estar actuando sobre la estructura y engloba las sobrecargas de uso, la nieve y el viento.

### SOBRECARGA DE USO

En el código técnico de la edificación se proporcionan valores característicos de sobrecargas de uso según categorías de uso, tabla 3.1 del documento básico Acciones en la edificación CTE DB-AE. Para el caso que nos ocupa se dicta lo siguiente.

Subcategoría de uso G2, cubiertas accesibles únicamente para conservación, con inclinación superior a 40°

$$\mathbf{G2 = 0 \text{ KN/m}^2}$$

### NIEVE

La expresión facilitada para la obtención de esta acción sigue así:

$$q_n = \mu \cdot s_k \text{ fórmula 8}$$

$\mu$  = Coeficiente de forma

$s_k$  = Valor característico de la carga de nieve sobre un terreno horizontal

$$\mathbf{q_n = 0 \cdot 0.45 = 0 \text{ KN/m}^2}$$

### Coeficiente de forma ( $\mu$ )

“El viento puede acompañar o seguir a las nevadas, lo que origina un depósito irregular de la nieve sobre las cubiertas. Por ello, el espesor de la capa de nieve puede ser diferente en cada faldón”. Por ello el código técnico proporciona unos criterios para su obtención en el apartado 3.5.3

Nos encontramos en el caso 1. “En un faldón limitado inferiormente por cornisas o limatesas, y en el que no hay impedimento al deslizamiento de la nieve, el coeficiente de forma tiene el valor de 1 para cubiertas con inclinación menor o igual que 30° y 0 para cubiertas con inclinación de mayor o igual que 60° (para valores intermedios se interpolará linealmente). Si hay impedimento, se tomará  $\mu = 1$  sea cual sea la inclinación”. La inclinación de nuestra cubierta se aproxima a los 60° por lo que el coeficiente de forma adoptara el valor 0

$$\mathbf{\mu = 0}$$

### Carga de nieve ( $s_k$ )

Para la obtención de la carga de nieve nos valdremos de los datos facilitados para la ubicación del edificio en el Eurocódigo 1, contrastándolo además con lo referido en la guía de las acciones de AcelorMittal y el software de análisis y dimensionado de estructuras Dlubal<sup>38 39 40</sup>.

$$\mathbf{s_k = 0.45 \text{ KN/m}^2}$$

## VIENTO

“La distribución y el valor de las presiones que ejerce el viento sobre un edificio y las fuerzas resultantes dependen de la forma y de las dimensiones de la construcción, de las características y de la permeabilidad de su superficie, así como de la dirección, de la intensidad y del racheo del viento”.

La expresión utilizada para la obtención de esta acción es la siguiente:

$$q_e = q_b \cdot C_e \cdot C_p \text{ fórmula 9}$$

$q_b$  = Presión dinámica del viento

$C_e$  = Coeficiente de exposición

$C_p$  = Coeficiente eólico o de presión

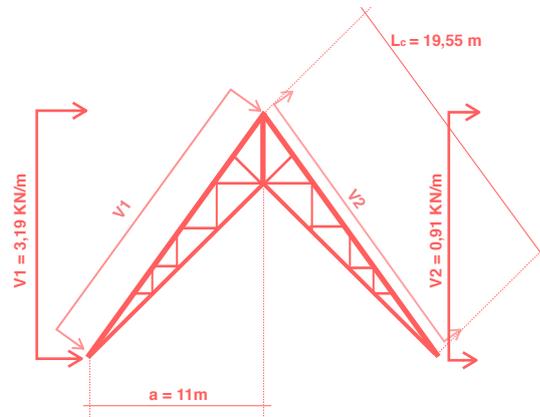


figura26. Esquema Carga de Viento. Proyección Carga.

La carga de viento obtenida a través de la expresión de la fórmula 9 es perpendicular al plano de la cubierta y representa la presión, en uno de los faldones de cubierta, y la succión, en el otro. Hay que comprobar que la succión no supone una acción estabilizadora, de ser así, se desestimaría en el cálculo.

$$V1 = 0,35 \cdot 2,6 \cdot 0,7 = 0,637 \text{ KN/m}^2; V1 = 0,637 \cdot a_{mb.II} = 0,637 \cdot 5 = \mathbf{3,19 \text{ KN/m}}$$

$$V2 = 0,35 \cdot 2,6 \cdot 0,2 = 0,182 \text{ KN/m}^2 \cdot L1 = 0,182 \cdot a_{mb.II} = 0,182 \cdot 5 = \mathbf{0,91 \text{ KN/m}}$$

$a_{mb.II}$  = Ámbito de carga para un cercha intermedia = 5 m

Presión dinámica del viento ( $q_b$ )

Este coeficiente se extrae como indicado anteriormente para nieve, a través del Eurocódigo 1<sup>41 42 43</sup>, que proporciona un valor para la presión de la velocidad básica del viento igual a:

$$q_b = \mathbf{0.35 \text{ KN/m}^2}$$

Coeficiente de exposición ( $C_e$ )

“El coeficiente de exposición, variable con la altura del punto considerado, en función del grado de aspereza del entorno donde se encuentra ubicada la construcción. Se determina de acuerdo con lo establecido en 3.3.3, tabla 3.4”

Considerado un grado de aspereza del entorno IV, zona urbana en general, industrial o forestal, y una altura del punto considerado > 30 m

$$C_e = \mathbf{2.6}$$

Coeficiente eólico o de presión ( $C_p$ )

Se obtiene de la tabla D.6 Cubiertas a dos aguas. Conocida la dirección del viento,  $45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ , la pendiente de la cubierta  $\alpha=60^\circ$  y la zona según la figura, H para presión e I para succión, se obtiene los siguientes resultados:

$$C_p = \mathbf{0.7}$$

$$C_s = \mathbf{-0.2}$$

### COMBINACIÓN DE ACCIONES

La combinación de acciones para situaciones persistentes o transitorias, esto es, en estados límite últimos, es:

$$\sum (\gamma_G G_k) + (\gamma_Q Q_k) + \sum (\gamma_Q Q_k \cdot \psi_0) \text{ fórmula 10}$$

$\gamma_G G_k$  = Todas las acciones permanentes

$\gamma_Q Q_k$  = Acción variable principal

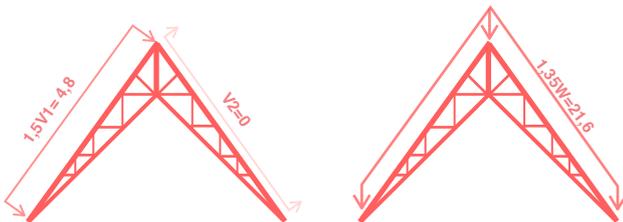
$\gamma_Q Q_k \cdot \psi_0$  = Acción variable secundaria

En la **fórmula 10** encontramos el valor característico de las acciones, permanentes y variables, calculadas en el apartado anterior, acompañadas de los coeficientes parciales de seguridad ( $\gamma$ ) para las acciones, cuyo valor se proporciona en la tabla 4.1 del DB-SE, y el coeficiente de simultaneidad ( $\psi$ ), que se obtendrá de la tabla 4.2. Conocidos estos datos encontramos dos posibles combinaciones de acciones para comprobar la estructura a resistencia.

#### SITUACIÓN I. $V_2 \leq W$

$$(\gamma_G W) + (\gamma_Q V) + (\gamma_Q q_n \psi_0) + (\gamma_Q G_2 \psi_0)$$

$$1,35W + 1,5V1 \text{ fórmula 10.a}$$



**figura27a. Esquema Cargas. Situación I**

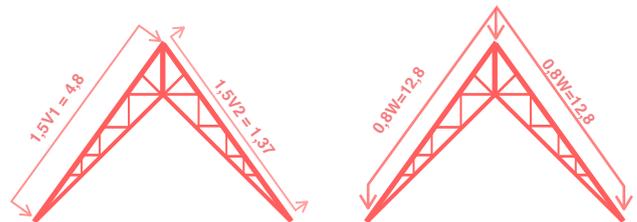
La presente figura muestra individualmente la combinación para acciones variables, a la izquierda, y permanentes, a la derecha. Las unidades de la figura se corresponden con N/m.

En esta situación el efecto de las cargas permanentes es mayor que la succión del viento,  $V_2$ . Esto implica que la succión del viento en el faldón derecho de la cubierta supone una acción favorable, por lo que el coeficiente parcial de seguridad se reduce a 0, eliminando la acción del viento en este faldón.

#### SITUACIÓN II. $W \leq V_2$

$$(\gamma_G W) + (\gamma_Q V) + (\gamma_Q q_n \psi_0) + (\gamma_Q G_2 \psi_0)$$

$$0,8W + 1,5V \text{ fórmula 10.b}$$



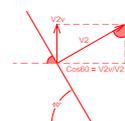
**figura27b. Esquema Cargas. Situación II**

La presente figura muestra individualmente la combinación para acciones variables, a la izquierda, y permanentes, a la derecha. Las unidades de la figura se corresponden con N/m.

En esta situación el efecto de las cargas permanentes, es menor que la componente vertical de la succión del viento, lo que implica que esta succión es una acción desfavorable y el coeficiente parcial de seguridad en este caso es igual a 1,5 para el viento y 0,8 para el peso propio en los faldones, al constituirse ahora como acción favorable.

El objeto ahora es averiguar en que situación nos encontramos para poder seleccionar la combinación correcta y proceder a obtener la sollicitación en cada elemento de la cercha, y así finalizar la comprobación de la estructura aplicando los datos obtenidos a la **fórmula 6.**, concluyendo si es una propuesta estructuralmente admisible o no. Para ello se deberá comprobar sí:

**$V_2 \leq W$  ; Situación I**



$$V_2 = 0,91 \text{ KN/m} ; V_{2v} = \text{Cos}60 \cdot 0,91 = 0,46 \text{ KN/m} ;$$

**$W \leq V_2$  ; Situación II**

$$W = 16 \text{ KN/m}$$

## REACCIONES

A priori no es posible determinar con certeza que situación, de las analizadas anteriormente, es la más desfavorable, ya que no se puede establecer que elementos se verán sometidos a tracción y que elementos a compresión, según el viento actúe en un sentido o el otro. No obstante, tras evidenciarse la poca representatividad de la carga de viento en el global de la estructura, como mencionado anteriormente en el análisis estructural, se opta por despreciar esta acción en el cálculo, concluyendo que, el caso más desfavorable es la situación I, que se corresponde con fórmula 10.a.

## ESTATICIDAD

En este sentido se procede, en este apartado, a calcular las reacciones en los apoyos para una estructura isoestática, es decir, una estructura cuyo grado de indeterminación estática  $GIE = 0$ , o lo que es lo mismo, cuyo número de incógnitas estáticas, internas o solicitaciones, y externas o reacciones, sea igual al número de ecuaciones del equilibrio estático, sumatorio de fuerzas y momentos.

**NIE = E** fórmula 11 ; **GIE = NIE - E = (3B + ΣR) - (3N+ ΣDt<sub>b</sub>)**

Siendo así, se puede resolver que, el número de incógnitas internas es igual a seis por el número de barras (6B), al existir axil, cortante y momento flector, en cada uno de los extremos de la barra, j e i, tres por extremo de barra. Y el número de incógnitas externas corresponde al sumatorio de reacciones, dependiendo del tipo de apoyo, empotrado, tres incógnitas, articulado, dos incógnitas, deslizante, una incógnita.

**NIE = 6B + ΣR** fórmula 11.a

El número de ecuaciones del equilibrio estático se corresponde a tres ecuaciones por nudo, sea nudo libre o apoyo, tres ecuaciones por barra, más una ecuación por cada desconexión total en extremo de barra, dado que la desconexión total aporta una condición en la dirección de la disociación, permitiendo movimiento o giro, o lo que es lo mismo, anulando reacción horizontal, vertical o momento.

**E = 3N + 3B + ΣDt<sub>b</sub>** fórmula 11.b

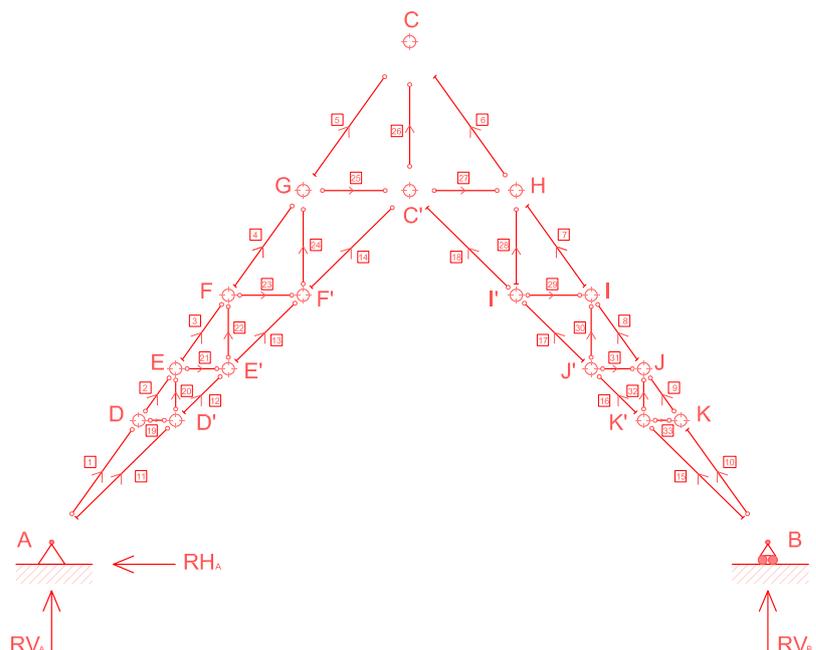
## MODELIZACIÓN

Previo a la obtención del grado de indeterminación estático se precisa conocer la modelización de la estructura figura 28.

figura28. Modelización de la estructura.

En la figura se muestra la modelización que se realiza en la cercha que formará la nueva cubierta de Notre Dame de París, donde se encuentran los datos necesarios para poder obtener el grado de indeterminación estática. De esta manera se determina que la estructura es isoestática, comprobando la ecuación de la fórmula 11.

**GIE= (3B + ΣR) - (3N+ ΣDt<sub>b</sub>)=(3·33 + 3) - (3·18 + 48) = 102 - 102 = 0**



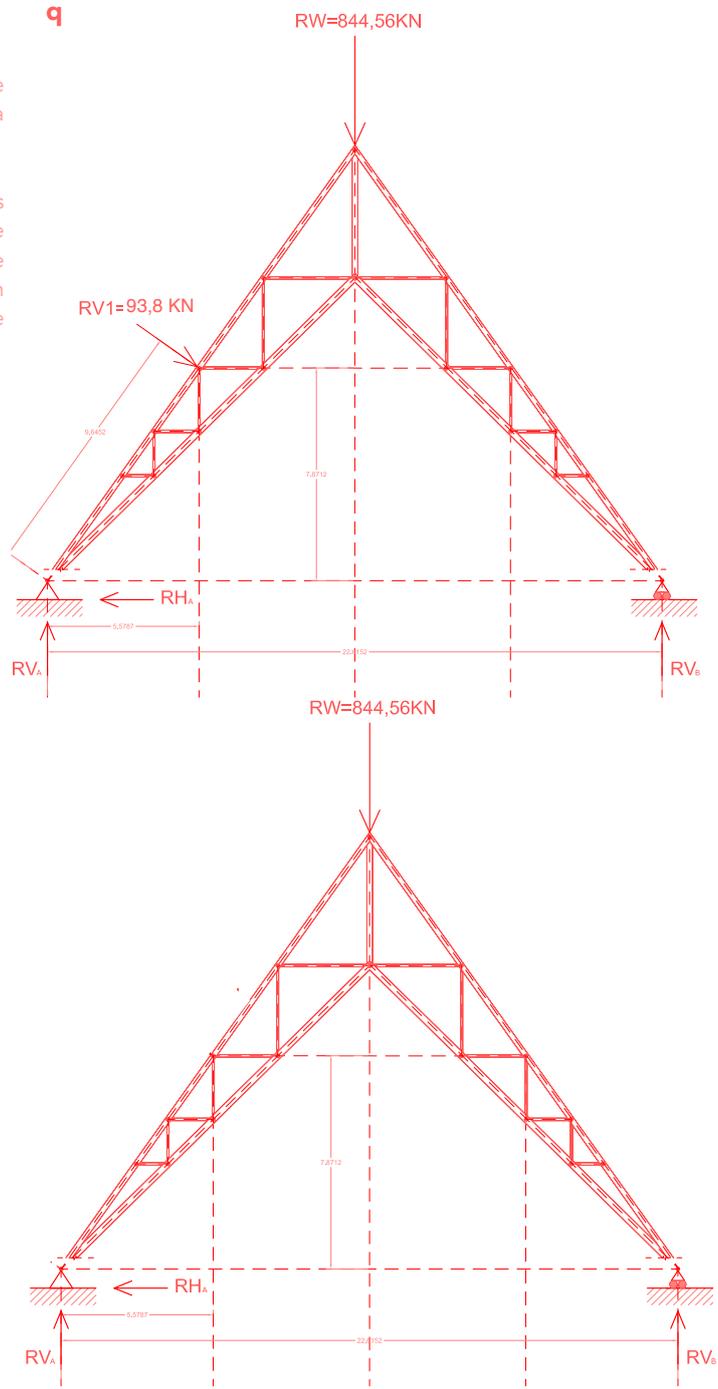
**CÁLCULO**

Comprobada la estaticidad de la estructura podemos proceder a obtener las reacciones en los apoyos en ambas situaciones, teniendo en cuenta el viento y no, con objeto de validar la decisión de despreciar esta acción de los cálculos que nos ocupan. Para ello nos valdremos de la figura 17, donde se coloca la resultante de las cargas uniformemente repartidas en su punto de aplicación y mediante las ecuaciones del equilibrio estático ( $\sum F_H, \sum F_V, \sum M_o$ ) se obtienen las reacciones.

**figura29. Cálculo Reacciones.**

Conocida la geometría de la estructura y la disposición de las cargas se procede a la obtención de las reacciones para ambas situaciones.

En el esquema de la presente figura las cargas correspondientes a la situación I se representan en la parte superior, mientras que, para la situación en la que se desprecia la carga de viento, las reacciones se obtendrán de forma análoga y su representación se ubica en la parte inferior de la figura.



**SITUACIÓN I**

$\sum F_H = 0$ ;  $RV1 \cdot \text{Sen}60 = R_{HA}$ ;  **$R_{HA} = 81,2 \text{ KN}$**

$\sum F_V = 0$ ;  $R_{VA} + R_{VB} = 844,56 + RV1 \cdot \text{Cos}60$ ;

$R_{VA} = 891,46 - R_{VB}$ ;  **$R_{VA} = 844,56 - 462,25 = 382,3 \text{ KN}$**

$\sum M_A = 0$ ;  $(R_{VB} \cdot 22,62) = (844,56 \cdot 11,31) + (93,8 \cdot 9,64)$ ;

**$R_{VB} = 10.456,2/22,62 = 462,25 \text{ KN}$**

**SITUACIÓN I (Despreciando el viento)**

$\sum F_H = 0$ ;  $R_{HA} = 0$ ;

**$R_{HA} = 0 \text{ KN}$**

$\sum F_V = 0$ ;  $R_{VA} + R_{VB} = 844,56$ ;  $R_{VA} = 844,56$ ;

**$R_{VA} = 844,56 - 422,3 = 422,3 \text{ KN}$**

$\sum M_A = 0$ ;  $(R_{VB} \cdot 22,62) = (844,56 \cdot 11,31)$ ;  $R_{VB} = (844,56 \cdot 11,31)/22,62$

**$R_{VB} = 9.552/22,62 = 422,3 \text{ KN}$**

## SOLICITACIONES

Conocidas las cargas actuantes sobre la estructura y las reacciones, se procede a la obtención de las solicitaciones para cada una de las barras de la cercha, con el objeto de comprobar el predimensionado inicial y determinar si la propuesta estructural es válida. Para ello se empleará el método de los nudos.

### MÉTODO DE LOS NUDOS

En el ejercicio de la aplicación de este método a una estructura plana, como la que encontramos, se requiere atender a ciertas hipótesis para su simplificación.

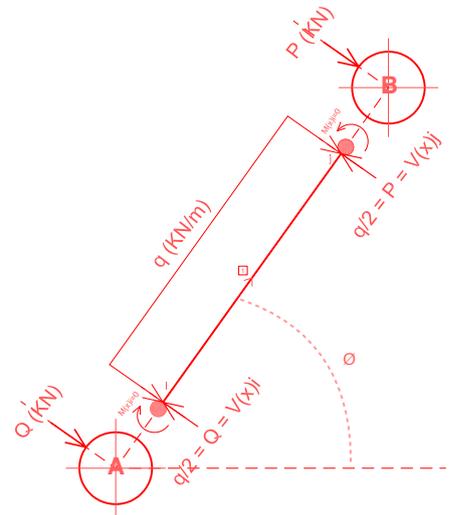
La primera de ellas es considerar los nudos, articulaciones perfectas, esto es, nudos donde el movimiento, giro relativo, es completamente libre, es decir no existe ninguna reacción, momento flector, que se oponga a este movimiento. Al no existir momento flector, es evidente que, el cortante en la barra es nulo, puesto que, la derivada de una constante, en este caso cero, es igual a cero ( $dM(x)/dx = -V(x)$ ), siendo la única solicitación actuante, un esfuerzo normal a la barra, el axil.

La siguiente simplificación es suponer las cargas aplicadas exclusivamente en los nudos. Esta simplificación es resultado de la aplicación directa de la hipótesis anterior sobre una barra aislada. Suponiendo momento nulo en cada extremo de barra,  $M_i = M_j = 0$ , y aplicando las ecuaciones del equilibrio estático, en concreto  $\sum F_v = 0$ , se obtiene que, la carga aplicada sobre el nudo es igual a un medio de la carga uniformemente repartida sobre la barra estudio. figura 29

La tercera simplificación implica aplicar el teorema de pequeñas deformaciones. Los cuerpos sometidos a acciones exteriores, cargas, sufren ciertas deformaciones, movimientos o giros, que se consideran despreciables en comparación con la dimensión del elemento analizado, en esta caso la barra.

La última de las hipótesis de simplificación que se deben de tener en cuenta en la aplicación del método de los nudos es suponer el peso propio del elemento considerado, barra, despreciable, en comparación con las cargas externas aplicadas.

Así pues, se procede a la obtención del valor del axil de las barras que son concurrentes en cada nudo, teniendo en cuenta que, se dispone de dos ecuaciones del equilibrio estático para la resolución del sistema, sumatorio de fuerzas. De esta manera, se limita el número máximo de incógnitas a resolver, a dos, por lo que, se debe empezar a resolver el problema por los nudos donde confluyan como máximo dos barras, y, una vez conocido el valor del axil, que se supondrá siempre de tracción, se reiterará el procedimiento hasta la finalización del problema.



figur30. Segunda Hipótesis. Cargas en nudos. Equilibrio en barras.

Aplicando las ecuaciones del equilibrio estático a una barra aislada se observa que, una carga  $q$  desarrollada en la extensión de una barra  $L$ , se puede asimilar a una carga puntual  $Q$ , aplicada en un nudo.  $Q = q \cdot L/2$

Teniendo en cuenta las simplificaciones mencionadas, se puede observar que la carga repartida  $q$ , no puede más que ser compensada por las reacciones en extremo de barra  $V(x)_i$  e  $V(x)_j$ . El valor de estas reacciones, que supondrán el cortante en la barra objeto de estudio, se transmiten al nudo, constituyéndose como carga aplicada en los nudos.

De esta manera las cargas repartidas pueden ser aplicadas en los nudos mediante la siguiente expresión:

$$Q_n = q \cdot L/2 \text{ Para nudos extremos}$$

$$Q_n = q/2 \sum L_n \text{ Para nudos intermedios}$$

Siendo:

$q$  = Carga uniformemente repartida

$L_n$  = Longitud de las barras  $1, 2, \dots, n = L_1; L_2$

$n$  = Núm. de barras concurrentes de igual  $\theta = 2$

SITUACIÓN I

Nudo A

**N1 = 1510,75 KN (C) ; N11 = 1225,45 KN (T)**

**WA = wL1/2 = (21,6 · 4,75)/2 = 51,3 KN**

RVA = 422,3 KN                      α = 55°

β = 45°

$\sum F_x=0 ; N1\cos\alpha + N11\cos\beta = 0$

$\sum F_y=0 ; N1\text{sen}\alpha + N11\text{sen}\beta = WA - RVA$

figura31. Nudo A.

$N1\cos\alpha = -N11\cos\beta ; N1 = -N11\cos\beta/\cos\alpha ;$

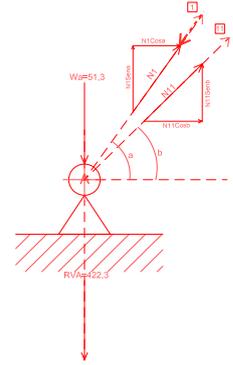
**N1 = -1225,45Cosβ/Cosα = -1510,75 KN**

$N1\text{sen}\alpha + N11\text{sen}\beta = WA - RVA ;$

$-(N11\cos\beta/\cos\alpha)\text{sen}\alpha + N11\text{sen}\beta = (WA - RVA)$

$N11(-\cos\beta\cdot\text{Tg}\alpha + \text{sen}\beta) = (WA - RVA)$

**N11 = (WA - RVA)/(-Cosβ·Tgα + Senβ) = 1225,45 KN**



Nudo D

**N2 = 1419,65 KN (C) ; N19 = 52,25 KN (C)**

**Wd = w/2·(L1+L2) = (21,6/2) · (4,75 + 2,16) = 74,62 KN**

α = 55°

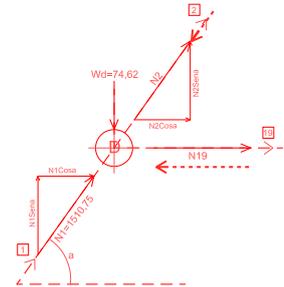
$\sum F_x=0 ; N2\cos\alpha + N19 = -N1\cos\alpha$

$\sum F_y=0 ; N2\text{sen}\alpha = Wd - N1\text{sen}\alpha$

figura32. Nudo D.

**N19 = (-N1 - N2)Cosα = - 52,25**

**N2 = Wd/Senα - N1 = -1419,65 KN**



Nudo D'

**N12 = 1151,55 KN (T) ; N20 = 52,25 KN (C)**

α = 55° ; β = 45°

$\sum F_x=0 ; N12\cos\beta = N11\cos\beta - N19$

$\sum F_y=0 ; N20 + N11\text{sen}\beta = N12\text{sen}\beta$

figura33. Nudo D'.

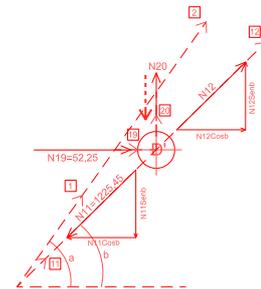
$N12 = N11 - N19/\cos\beta ;$

**N12 = 1151,55 KN**

$N20 = N12\text{sen}\beta - N11\text{sen}\beta ;$

$N20 = (N12 - N11)\text{sen}\beta$

**N20 = -52,25 KN**



Nudo E

**N3 = 1417,12 KN (C) ; N21 = 38,03 KN (C)**

**WE = w/2·(L2+L3) = (21,6/2) · (2,16 + 2,87) = 54,32 KN**

α = 55°

$\sum F_x=0 ; N21 + N3\cos\alpha = N2\cos\alpha$

$\sum F_y=0 ; N3\text{sen}\alpha = N2\text{sen}\alpha + N20 - WE$

figura34. Nudo E.

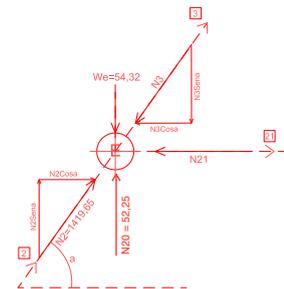
$N21 + N3\cos\alpha = N2\cos\alpha$

$N21 = (N2 - N3)\cos\alpha$

**N21 = 1,45 = 0 KN**

$N3 = N2 + (N20 - WE)/\text{sen}\alpha ;$

**N3 = 1417,12 KN**



Nudo E'

**N13 = 1067,77 KN (T) ; N22 = 38 KN (T)**

α = 55° ; β = 45°

$\sum F_x=0 ; N13\cos\beta = N12\cos\beta - N21$

$\sum F_y=0 ; N13\text{sen}\beta - N22 = N12\text{sen}\beta$

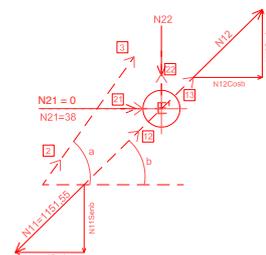
figura35. Nudo E'.

$N13 = N12 - N21/\cos\beta ;$

**N13 = N12 = 1151,55 KN**

$N22 = (N13 - N12)\text{sen}\beta ;$

**N22 = 0 KN**



<b>N1 = 1510,75 KN (C)</b>	<b>N10 = 1510,75 KN (C)</b>
<b>N11 = 1225,45 KN (T)</b>	<b>N15 = 1225,45 KN (T)</b>
<b>N2 = 1419,65 KN (C)</b>	<b>N9 = 1419,65 KN (C)</b>
<b>N19 = 52,25 KN (C)</b>	<b>N33 = 52,25 KN (C)</b>
<b>N12 = 1151,55 KN (T)</b>	<b>N16 = 1151,55 KN (T)</b>
<b>N20 = 52,25 KN (C)</b>	<b>N32 = 52,25 KN (C)</b>
<b>N3 = 1353,35 KN (C)</b>	<b>N8 = 1353,35 KN (C)</b>
<b>N21 = 0 KN</b>	<b>N31 = 0 KN</b>
<b>N13 = 1067,77 KN (T)</b>	<b>N17 = 1067,77 KN (T)</b>
<b>N22 = 0 KN</b>	<b>N30 = 0 KN</b>
<b>N4 = 1261,6 KN (C)</b>	<b>N7 = 1261,6 KN (C)</b>
<b>N23 = 52,62 KN (C)</b>	<b>N29 = 52,62 KN (C)</b>
<b>N14 = 933,35 KN (T)</b>	<b>N18 = 933,35 KN (T)</b>
<b>N24 = 52,62 KN (C)</b>	<b>N28 = 52,62 KN (C)</b>
<b>N5 = 1194,8 KN (C)</b>	<b>N6 = 1194,8 KN (C)</b>
<b>N25 = 38,9 KN (C)</b>	<b>N27 = 38,9 KN (C)</b>
<b>N26 = 125,5 KN (C)</b>	

Siguiendo el procedimiento expuesto anteriormente se obtiene los axiles del resto de barras.

Al encontrar condición de simetría en cargas y geometría se puede resolver que, conocidas las solicitaciones de una mitad estructural el problema queda resuelto.

De esta manera se cierra el apartado del cálculo de solicitaciones mediante el método de los nudos, en el cual hemos podido observar ciertas consideraciones que cabe resaltar.

El axil que se recibe en los apoyos depende de una constante que relaciona ambos ángulos,  $\alpha = 55^\circ$  y  $\beta = 45^\circ$ ,  $cte=0,81$ , es decir, que es dependiente de la inclinación de la cubierta. A mayor inclinación, para el mismo sistema de cargas, menor será la solicitación del par exterior ; Siendo la solicitación dependiente de las cargas la del par interior  $N11 = - N1 \cdot \cos \alpha / \cos \beta$  ; **N11 = - 0,81·N1**

Se observa, además, que se produce una inversión en el comportamiento estructural de los pares, interior/externo. Al haber considerado nula la carga de viento, el par exterior, normalmente traccionado resulta, finalmente, comprimido, mientras que el par interior sufre el fenómeno inverso.

La cercha bajo el efecto de una carga puntual aplicada en la cumbrera, nudo C, de magnitud igual a su correspondiente uniformemente repartida, sufre, por una parte, una deformación vertical, y por otra un desplazamiento horizontal, al haber considerado el apoyo B, como deslizante, dando como resultado el fenómeno de inversión del comportamiento de los pares mencionado anteriormente, y obteniendo una deformada como la de la

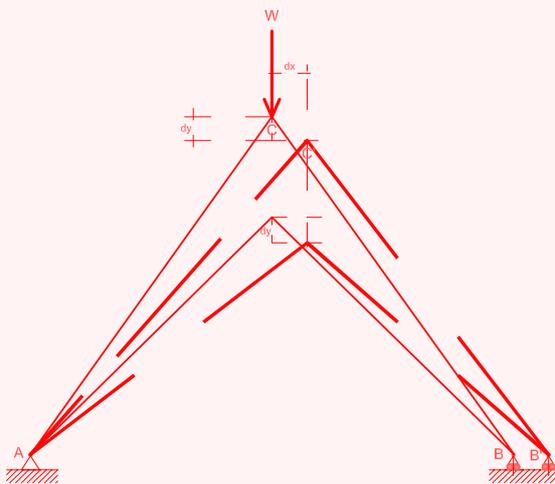


figura36. Esquema de la deformada de la estructura.

figura 36.

## COMPROBACIÓN

Finalmente se determina si la solución aportada para la sustitución de la cubierta es adecuada o no para el sistema de cargas determinado. Para ello nos valemos de la expresión de la **fórmula 6**, que se correspondería a una situación en la que solo actúa esfuerzo axial de tracción, mientras que para el caso de los elementos que se encuentren en compresión habría que particularizar esta misma expresión multiplicando por un coeficiente que tenga en cuenta el posible efecto de pandeo de aquellas barras sometidas a esta sollicitación.

### ELEMENTOS A TRACCIÓN $N_x / f_{y,d} \leq A$ fórmula 6.1

Como se resalta en la tabla, el perfil inicialmente seleccionado para constituir el par interior, IPE220, no cumple con lo indicado en la **fórmula 6.1**. Se precisa aumentar el perfil para cumplir con la inecuación. En este sentido se ha seleccionado el perfil mínimo necesario para cada barra, no obstante, por criterios de diseño se adoptara el perfil de mayor entidad para constituir el elemento formado por estas cuatro barras de la cercha, el par interior, **IPE300**.

B	B.sim	IPE <sub>0</sub>	N <sub>x</sub> (N)	f <sub>y,d</sub> (N/mm <sup>2</sup> )	N <sub>x</sub> / f <sub>y,d</sub> (mm) fórmula 6.1	≤ / ≥	A <sub>IPE<sub>0</sub></sub> (mm)	X/OK	IPE <sub>1</sub>	A <sub>IPE<sub>1</sub></sub> (mm)	X/OK
11	15	220	1225450	262	4677,29	≥	3340	X	300	5380	OK
12	16	220	1151550	262	4395,23	≥	3340	X	270	4590	OK
13	17	220	1067770	262	4075,46	≥	3340	X	270	4590	OK
14	18	220	933350	262	3562,40	≥	3340	X	240	3910	OK

### ELEMENTOS A COMPRESIÓN $(N_x \cdot w) / f_{y,d} \leq A$ fórmula 6.2

Para la comprobación de los elementos sometidos a compresión el procedimiento no resulta tan sencillo, se debe de tener en cuenta el factor de pandeo ( $w = 1/\chi$ ;  $\chi \leq 1$ ) que depende del plano considerado, en este caso el plano de la cercha, y la esbeltez adimensional ( $\lambda = \lambda/\lambda_R$ ). El factor de pandeo ( $w$ ) se puede expresar como la inversa del coeficiente reductor del pandeo ( $\chi$ ). Así pues, el objeto ahora es determinar este coeficiente de minoración de la resistencia frente al pandeo ( $N_{b,rd} = A \cdot F_{yd} \cdot \chi / \gamma_{M1}$ ), en cada barra sometida a la sollicitación que lo origina, barras comprimidas, para de esta manera finalizar la comprobación que ocupa este apartado.

El coeficiente reductor del pandeo ( $\chi$ ) se puede determinar de forma analítica, mediante la expresión de la **fórmula 12**, o gráficamente, conociendo la esbeltez adimensional ( $\lambda$ ) y la curva de pandeo, que depende de la clase de perfil. Para  $\lambda \leq 2$  el efecto del pandeo no se considera.

$$\chi = 1/(\varnothing + \sqrt{\varnothing^2 - \lambda^2}) \text{ fórmula 12 ; Para elementos de sección y axial constantes}$$

$$\varnothing = 0,5(1 + \alpha(\lambda - 0,2) + \lambda^2)$$

$\alpha$  = Coeficiente de imperfección. Tabla 35.1.2.a Capítulo IX EAE

$$\lambda = \text{Esbeltez adimensional} = \lambda/\lambda_R = (L_k/i)/(\sqrt{\pi^2 \cdot E/f_y}) = \sqrt{A \cdot f_y/N_{cr}}$$

$i$  = Radio de giro de la sección

$L_k$  = Longitud de pandeo =  $\beta \cdot L = L$ ;  $\beta=1$  Para barras biarticuladas

B	B.sim	L=L <sub>k</sub> (cm)	IPE 0	C S	i (cm)	$\lambda$	$\lambda_R$	$\lambda$	$\alpha$	$\phi$	$\chi$	w	N <sub>x</sub> (N)	N <sub>x</sub> ·w / f <sub>y,d</sub> (mm) <small>formula 6.2</small>	≤ / ≥	A <sub>IPE0</sub> (mm)	X/ OK	IPE 1	A <sub>IPE1</sub> (mm)	X/OK
1	10	4750	200	1	82,3	57,72	86,81	0,66	0,21	0,77	0,86	1,16	1510750	6676,56	≥	2850	X	330	7270	OK
2	9	2000	200	1	82,3	24,30	86,81	0,28	0,21	0,55	0,98	1,02	1419650	5517,04	≥	2850	X	330	6260	OK
3	8	2900	200	1	82,3	35,24	86,81	0,41	0,21	0,60	0,95	1,05	1353350	5430,30	≥	2850	X	330	6260	OK
4	7	4100	200	1	82,3	49,82	86,81	0,57	0,21	0,70	0,90	1,11	1261600	5352,43	≥	2850	X	300	5380	OK
5	6	5800	200	1	82,3	70,47	86,81	0,81	0,21	0,89	0,79	1,27	1194800	5780,55	≥	2850	OK	-	-	-
19	33	1150	100	1	40,7	28,26	86,81	0,33	0,21	0,57	0,97	1,03	52250	205,28	≤	1030	OK	-	-	-
20	32	2305	80	1	32,4	71,14	86,81	0,82	0,21	0,90	0,78	1,27	52250	254,25	≤	764	OK	-	-	-
21	31	1650	100	1	40,7	40,54	86,81	0,47	0,21	0,64	0,93	1,07	0	0,00	≤	1030	OK	-	-	-
22	30	1650	80	1	32,4	50,93	86,81	0,59	0,21	0,71	0,90	1,12	0	0,00	≤	764	OK	-	-	-
23	29	2350	100	1	40,7	57,74	86,81	0,67	0,21	0,77	0,86	1,16	52620	232,58	≤	1030	OK	-	-	-
24	28	3350	80	1	32,4	103,40	86,81	1,19	0,21	1,31	0,54	1,87	52620	374,90	≤	764	OK	-	-	-
25	27	3350	100	1	40,7	82,31	86,81	0,95	0,21	1,03	0,70	1,43	38900	211,63	≤	1030	OK	-	-	-
26	-	4750	100	1	40,7	116,71	86,81	1,34	0,21	1,52	0,45	2,24	125500	1073,53	≥	1030	X	120	1320	OK

f<sub>y</sub> = f<sub>yk</sub> = 275 N/mm<sup>2</sup> ; E=Módulo elástico acero = 210.000 N/mm<sup>2</sup> ; C.S = Clase de sección ;  $\phi$  : Curva de pandeo a

Se considera el pandeo en el plano del pórtico, que se corresponde con el eje fuerte de la sección, eje y, por lo que las propiedades de la sección están referidas a este eje.

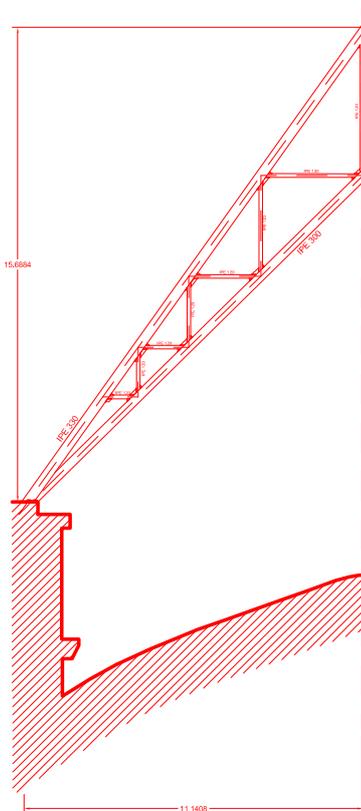


Figura 37. Propuesta estructural final

Pese a obtener valores de esbeltez adimensional inferiores a lo que marca la norma para considerar el efecto del pandeo en la comprobación a resistencia de una sección sometida a esfuerzo de compresión, al haber obtenido valores de factor de pandeo superiores a la unidad, mayoración de la acción, se considera el factor calculado por considerarse del lado de la seguridad.

Obtenidos los perfiles adecuados para la sollicitación actuante de acuerdo a la fórmula 6.2, se concluye que, para el par exterior se homogeneiza la sección a un **IPE330**. Mientras que para el resto de barras, inicialmente planteadas con perfiles IPE80Y100, se adoptará el **IPE120**, por ser el de mayor entidad.

De esta manera se finaliza el apartado de la comprobación del predimensionado, evidenciándose que, si bien, los elementos de menor entidad podían constituir una solución válida para el sistema de cargas planteado, aquellos con una capacidad portante superior, siendo estos los cordones de la cercha, habían sido elegidos pobremente, por lo que se ha precisado de un redimensionado, constituyéndose la cercha conforme a lo dispuesto en la figura 37.

5

# CONCLUSIONES

El entendimiento de las circunstancias, político, sociales y económicas, en las que se genera el movimiento artístico y cultural, que abre el nuevo capítulo histórico acuñado bajo el término la época de las catedrales por el autor Georges Duby, es fundamental en el seguimiento del hilo de razonamiento de este trabajo final de grado, titulado: Notre Dame de París, Análisis estructural de la catedral gótica. El cual, pretende poner en valor la importancia de la arquitectura gótica, en especial, a través de la evolución técnica y formal del arco, en el desarrollo del campo de las estructuras y la arquitectura.

Así pues, se realiza un análisis de los determinantes que caracterizan las construcciones que proliferan en Europa occidental entre 1130 y 1420, las catedrales góticas, pasando por la materialidad, los elementos estructurales, la influencia recíproca de estos en la transmisión de cargas y la generación de espacios, las cargas, etc, con objeto de establecer las bases para la realización de una propuesta de sustitución de la armadura medieval destruida durante el incendio ocurrido el pasado 15 de abril de 2019.

Finalmente, se concluye que, si bien, bajo el punto de vista del autor del trabajo, lo más adecuado en una intervención de un monumento histórico tan relevante como el tratado, es que sea conservacionista, se opta por realizar una propuesta estructural nueva, en la que se interpreta, tomando como referencia las posibilidades del nuevo material, el acero, la geometría original de la armadura gótica perdida, abriendo paso al capítulo del cálculo estructural, en el que se aplica lo referido en estructuras a cerchas metálicas.

Se observa, tras la obtención de los esfuerzos internos, que el predimensionado inicialmente planteado es insuficiente para satisfacer las condiciones de seguridad estructural, en cuanto a su capacidad resistente (ELU), por lo que se realiza un redimensionado de la estructura acorde a la situación que lo solicita, encontrando una solución posible, que pone punto y final a este trabajo.



## BIBLIOGRAFÍA

- ArcelorMittal. (2009). Guide des actions climatiques et sismiques, détermination des charges de neige (N65, N84). [https://constructalia.arcelormittal.com/files/Guide%20des%20actions%20climatiques%20et%20sismiques\\_FR--8fe99e75fdb5a7734084b0e9bb5da462.pdf](https://constructalia.arcelormittal.com/files/Guide%20des%20actions%20climatiques%20et%20sismiques_FR--8fe99e75fdb5a7734084b0e9bb5da462.pdf)
- ArcelorMittal. (2009). Guide des actions climatiques et sismiques, détermination des charges de vent (NV65). [https://constructalia.arcelormittal.com/files/Guide%20des%20actions%20climatiques%20et%20sismiques\\_FR--8fe99e75fdb5a7734084b0e9bb5da462.pdf](https://constructalia.arcelormittal.com/files/Guide%20des%20actions%20climatiques%20et%20sismiques_FR--8fe99e75fdb5a7734084b0e9bb5da462.pdf)
- Código técnico de la edificación. (2009). Documento básico seguridad estructural acciones en la edificación. (CTE DB-AE) <https://www.codigotecnico.org/pdf/Documentos/SE/DBSE-AE.pdf>
- Código técnico de la edificación. (2019). Documento básico seguridad estructural resistencia y estabilidad. (CTE DB SE1) <https://www.codigotecnico.org/pdf/Documentos/SE/DcmSE.pdf>
- Cowan, H.J. (1977). The master builders: a history of structural and enviromental design from ancient Egipt to the nineteenth century. (p.122). Robert. E. Krieger Publishing Company, INC.
- de Mingo, J. (10 de enero de 2020). La Foret de Notre Dame, *Albanécar*. <https://www.albanecar.es/la-foret-de-notre-dame/>
- Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed). Cátedra
- Eurocode 1. (1991). Actions sur les structures, actions du vent. (NF EN 1991-1-4). <http://locastock.fr/wp-content/uploads/2014/03/EUROCODE-1-Action-du-vent.pdf>
- Eurocode 1. (1991). Actions sur les structures, charges de neige. (NF EN 1991-1-3). <https://www.isba.fr/wp-content/uploads/2018/09/6-NF-EN-1991-1-3.pdf>
- Huerta Fernandez, S. (2004). Arcos, bóvedas y cúpulas: geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica. (p.14). Instituto Juan de Herrera, escuela técnica superior de arquitectura, Madrid.
- Hugo, V. (1831). Nuestra señora de París. Alianza editorial
- Mark, R. (1982). Experiments in gothic structure. (p.32). Bibliotheque Mclean.
- Roth, L.M.(2013). Entender la arquitectura, sus elementos, historia y significado. Gustavo Gili
- Ruskin, J (1851-1853). La naturaleza del gótico, Las piedras de Venecia (p.92). Casimiro
- Vignaux, P. (1954). El pensamiento en la edad media (p.141).Fondo de cultura económica
- (13 de Julio de 2021). Snow load, wind speed and seismic load maps. Dlubal, structural analysis and design software. <https://www.dlubal.com/en/solutions/online-services/snow-load-wind-speed-and-seismic-load-maps>

# ÍNDICE FIGURAS

**Portada.** Adaptado de Incendio de Notre Dame [Fotografía], 2019, Misiones online (<https://misionesonline.net/2019/04/18/cuidados-paliativostendria-que-haberlo-ido-a-ver/>)

**figura1.** Adaptado de Fresco de la Iglesia de Tahull [Fotografía], Museu nacional d'art de Catalunya (<https://www.museunacional.cat/en/colleccio/apse-sant-climent-de-taull/mestre-de-taull/015966-000>)

**figura2.** Mapa de Europa con las provincias del imperio Romano.

**figura3.** Adaptado de Interior de la Abadía de Saint Denis. París, Francia (p.315), por Universidad de Múnich, Kunstgeschichtliches seminar, 1993, Entender la arquitectura, sus elementos, historia y significado.

**figura4.** Adaptado de Arzobispo Freidrich Coch y Nacis, Dresden, 1933 [Fotografía], Matéria Pública (<https://clovismoliveira.wordpress.com/tag/mikhail-gorbachev/>)

**figura5.** Borrassà, Ll. (1425). Profesión de San Pedro Mártir. Barcelona: Museu nacional d'art de Catalunya

**figura 6.** Adaptado de Templo del Valle, pirámide de Kefrén, Gizeh (Egipto), ca. 2570-2500 a.C. (p23) por Verlag, H, Entender la arquitectura, sus elementos, historia y significado.

**figura 7.** Adaptado Armadura gótica de la nave principal de Westminster, Londres, [Fotografía] por UK Parliament ,2008, Flickr ([https://www.flickr.com/photos/uk\\_parliament/2700357021/in/photostream/](https://www.flickr.com/photos/uk_parliament/2700357021/in/photostream/))

**figura8.** Dibujo propio de la Fachada Oeste Notre Dame de París

**figura9.** Dibujo propio de Planta Notre Dame, París

**figura10.** Dibujo propio de Axonometría bóveda sexpartita

**figura11.** Dibujo propio de Arco etrusco de dovelas de piedra

**figura12.** Dibujo propio de Línea de empujes

**figura13a y b.** Dibujo propio de Equilibrio en un arco simétrico. Configuración inadmisibles

**figura14.** Dibujo propio de Esquema bóveda sexpartita.

**figura15.** Dibujo propio de Método snell para el cálculo del empuje en arcos simétricos. Estática gráfica.

**figura17.** Dibujo propio de Sección transversal Notre Dame, París

**figura18.** Dibujo propio de Esquema transmisión de cargas. Notre Dame de París.

**figura19.** Adaptado de Notre Dame de París, tras el incendio del 15 de abril de 2019, [Fotografía], 2019, el siglo (<https://elsiglo.com.ve/2019/10/15/el-andamio-sobre-notre-dame-sigue-haciendo-amenaza-de-derrumbe/>)

**figura20.** Dibujo propio de Cercha medieval Principal Notre Dame de París.

**figura21a-21d.** Dibujo propio de Componentes de la cercha

**figura22.** Dibujo propio de Plantilla gráfica para la elaboración de cerchas.

**figura23.** Dibujo propio de Estadios de la Cercha Metálica .

**figura24.** Dibujo propio de Espacio de la Resiliencia. Museo

**figura25.** Dibujo propio de Predimensionado de la cercha metálica.

**figura26.** Dibujo propio de Esquema Carga de Viento. Proyección Carga.

**figura27a y b.** Dibujo propio de Esquema Cargas.

**figura28.** Dibujo propio de Modelización de la estructura.

figura29. Dibujo propio de Cálculo Reacciones.

figura30. Dibujo propio de Segunda Hipótesis. Cargas en nudos. Equilibrio en barras.

figura31 - 35. Dibujo propio de Nudos.

figura36. Dibujo propio de Esquema de la deformada de la estructura.

figura 37. Dibujo propio de Propuesta estructural final

## NOTAS

- 1 Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed, p.15). Cátedra
- 2 Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed, p.19). Cátedra
- 3 Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed, p.59). Cátedra
- 4 Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed, p.54). Cátedra
- 5 Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed, p.75). Cátedra
- 6 Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed, p.80). Cátedra
- 7 Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed). Cátedra
- 8 Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed, p.94). Cátedra
- 9 Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed, p.119). Cátedra
- 10 Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed, p.123). Cátedra
- 11 Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed, p.128). Cátedra
- 12 Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed, p.143). Cátedra
- 13 Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed, p.144). Cátedra
- 14 Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed, p.149). Cátedra
- 15 Duby, G. (1993). La época de las catedrales. (13ª ed, p.218). Cátedra
- 16 Vignaux, P. (1954). El pensamiento en la edad media (p.141).Fondo de cultura económica
- 17 Vignaux, P. (1954). El pensamiento en la edad media (p.162).Fondo de cultura económica
- 18 Roth, L.M.(2013). Entender la arquitectura, sus elementos, historia y significado. (p.318). Gustavo Gili
- 19 Roth, L.M.(2013). Entender la arquitectura, sus elementos, historia y significado. (p.318). Gustavo Gili
- 20 Ruskin, J (1851-1853). La naturaleza del gótico, Las piedras de Venecia (p.92). Casimiro
- 21 Roth, L.M.(2013). Entender la arquitectura, sus elementos, historia y significado. (p.22). Gustavo Gili
- 22 Ruskin, J (1851-1853). La naturaleza del gótico, Las piedras de Venecia (p.80). Casimiro
- 23 Roth, L.M.(2013). Entender la arquitectura, sus elementos, historia y significado. (p.316). Gustavo Gili
- 24 Roth, L.M.(2013). Entender la arquitectura, sus elementos, historia y significado. (p.316). Gustavo Gili
- 25 Huerta Fernandez, S. (2004). Arcos, bóvedas y cúpulas: geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica. (p.14). Instituto Juan de Herrera, escuela técnica superior de arquitectura, Madrid.
- 26 Mark, R. (1982). Experiments in gothic structure. (p.32). Bibliotheque Mclean.
- 27 Mark, R. (1982). Experiments in gothic structure. (p.32). Bibliotheque Mclean.
- 28 Huerta Fernandez, S. (2004). Arcos, bóvedas y cúpulas: geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica. (p.23). Instituto Juan de Herrera, escuela técnica superior de arquitectura, Madrid.
- 29 Cowan, H.J. (1977). The master builders: a history of structural and enviromental design from ancient egipt to the nineteenth century. (p.122). Robert. E. Krieger Publishing Company, INC.
- 30 Cowan, H.J. (1977). The master builders: a history of structural and enviromental design from ancient egipt to the nineteenth century. (p.122). Robert. E. Krieger Publishing Company, INC.
- 31 Huerta Fernandez, S. (2004). Arcos, bóvedas y cúpulas: geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica. (p.2). Instituto Juan de Herrera, escuela técnica superior de arquitectura, Madrid.

- <sup>32</sup> Huerta Fernandez, S. (2004). Arcos, bóvedas y cúpulas: geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica. (p.37). Instituto Juan de Herrera, escuela técnica superior de arquitectura, Madrid.
- <sup>33</sup> Mark, R. (1982). Experiments in gothic structure. (p.36). Bibliotheque Mclean.
- <sup>34</sup> Hugo, V. (1831). Nuestra señora de París. Alianza editorial
- <sup>35</sup> de Mingo, J. (10 de enero de 2020). La Foret de Notre Dame, *Albanécar*. <https://www.albanecar.es/la-foret-de-notre-dame/>
- <sup>36</sup> de Mingo, J. (10 de enero de 2020). La Foret de Notre Dame, *Albanécar*. <https://www.albanecar.es/la-foret-de-notre-dame/>
- <sup>37</sup> de Mingo, J. (10 de enero de 2020). La Foret de Notre Dame, *Albanécar*. <https://www.albanecar.es/la-foret-de-notre-dame/>
- <sup>38</sup> Eurocode 1 (1991)
- <sup>39</sup> ArcelorMittal (2009)
- <sup>40</sup> (13 de Julio de 2021). Snow load, wind speed and seismic load maps. Dlubal, structural analysis and design software. <https://www.dlubal.com/en/solutions/online-services/snow-load-wind-speed-and-seismic-load-maps>
- <sup>41</sup> Eurocode 1 (1991)
- <sup>42</sup> ArcelorMittal (2009)
- <sup>43</sup> (13 de Julio de 2021). Snow load, wind speed and seismic load maps. Dlubal, structural analysis and design software. <https://www.dlubal.com/en/solutions/online-services/snow-load-wind-speed-and-seismic-load-maps>

