



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA



Escola Tècnica
Superior d'Enginyeria
Informàtica

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Informàtica
Universitat Politècnica de València

Simulación de vehículos eléctricos ligeros

PROYECTO FINAL DE CARRERA

Ingeniería Informàtica

Autor: Jaime Jiménez Cuesta

Director: Àngel Valera Fernández

Valencia, diciembre de 2012

Resumen

Pese a que aún no están demasiado extendidos, el uso de vehículos autónomos es ya una realidad y su introducción en el parque móvil ofrecería numerosas ventajas. El motivo de este proyecto es el estudio y obtención del modelo de suspensión del eje delantero de un vehículo eléctrico ligero actualmente en desarrollo. Se detallará paso a paso la modelización del mecanismo y el proceso de resolución del problema cinemático para, finalmente, realizar una simulación de su comportamiento ante unos determinados datos de entrada. Por otro lado, puesto que se pretende que el vehículo en desarrollo sea autónomo, se diseñará, usando el software de Matlab, un algoritmo para el control de trayectorias de robots móviles mediante persecución pura. Esto incluirá tanto el control cinemático como el control dinámico. Se ejecutarán diversas simulaciones para distintas trayectorias. Por último, se probará el algoritmo desarrollado sobre un robot real de Lego Mindstorms NXT.

Palabras clave: vehículo eléctrico, suspensión, Ackerman, robot móvil

Agradecimientos

Quiero aprovechar este espacio para expresar mi agradecimiento a aquellas personas que me han apoyado en la realización de este proyecto.

En primer lugar, debo dar las gracias a mi director, Ángel Valera, por su ayuda durante todo este año y por permitirme conocer el Instituto de Automática e Informática Industrial. Así mismo, quiero destacar el soporte recibido por los compañeros del laboratorio de robótica del *ai2*.

También quiero darle las gracias a Vicente Mata, del DIMM, por estar siempre disponible para resolver mis dudas sobre mecánica.

Finalmente, quisiera agradecer a mis padres el apoyo moral que me han dado durante toda la carrera y a mi novia, Rosa, por animarme y ayudarme con este último esfuerzo. Gracias a ellos todo ha sido más sencillo.

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Contexto	5
1.2. Objetivos	6
I Planteamiento teórico	7
2. Robots móviles	8
2.1. Introducción	8
2.2. Clasificación de robots	9
2.2.1. Robots con ruedas	9
2.2.2. Robots con patas	12
2.2.3. Robots articulados	13
2.2.4. Robots submarinos	14
2.2.5. Robots aéreos	14
2.3. Modelos cinemáticos	15
2.3.1. Configuración diferencial	15
2.3.2. Configuración triciclo	18
2.3.3. Configuración Ackerman	20
2.4. Control de robots móviles	21
2.4.1. Control de trayectorias por punto descentralizado	22
2.4.2. Seguimiento de caminos por persecución pura	23
3. Introducción a los mecanismos	26
3.1. Generalidades	26
3.2. Clasificación de pares cinemáticos	27
3.2.1. Pares de Clase I	27
3.2.2. Pares de Clase II	28
3.2.3. Pares de Clase III	29
3.3. Grados de libertad	30

3.4. Coordenadas y ecuaciones de restricción	31
3.5. Análisis cinemático	33
3.5.1. Problema de posición inicial	34
3.5.2. Problema de los desplazamientos finitos	37
3.5.3. Problema de velocidad	38
3.5.4. Problema de aceleración	39
3.5.5. La simulación cinemática	39
4. Ejes y suspensión	40
4.1. Suspensión de eje rígido	43
4.1.1. Eje De Dion	44
4.1.2. Suspensión de ballesta	45
4.2. Suspensión de eje semirrígido	46
4.2.1. Eje de torsión	46
4.3. Suspensión independiente	48
4.3.1. Cinemática de la suspensión independiente	48
4.3.2. Ventajas de la suspensión independiente	51
4.3.3. Suspensión independiente de doble trapecio	51
4.3.4. Suspensión Multibrazo o <i>Multi-Link</i>	53
4.3.5. Suspensión McPherson	54
4.4. Suspensión según el tipo de eje	57
 II Desarrollo práctico	 59
5. Suspensión de un vehículo eléctrico ligero	60
5.1. Modelo de suspensión delantera	61
5.1.1. Numeración de barras y designación de nudos	61
5.1.2. Pares cinemáticos	62
5.1.3. Sistemas de referencia y dimensiones de las barras	63
5.1.4. Puntos de anclaje	66
5.1.5. Determinación de grados de libertad	66
5.2. Resolución del problema cinemático	67
5.2.1. Ecuaciones de restricción	67
5.2.2. Datos de entrada	80
5.2.3. Resultados de la simulación	82
 6. Control de un vehículo eléctrico autónomo	 84
6.1. Construcción del robot	85
6.2. Simulación del control	86
6.2.1. Control dinámico	86

6.2.2. Control cinemático mediante persecución pura	91
6.2.3. Resultado de las simulaciones	94
6.3. Control sobre el robot real	96
6.3.1. Calibrado de la dirección	97
6.3.2. Hilo de control de la dirección	98
6.3.3. Bucle principal de ejecución	98
6.3.4. Resultados	101
Conclusiones y trabajo futuro	102
Bibliografía	109

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contexto

Los robots móviles surgieron por la necesidad de extender el campo de aplicación de la robótica, restringido inicialmente al alcance de una estructura mecánica fijada en uno de sus extremos.

La investigación y diseño de robots móviles ha crecido desde los años 70 de manera exponencial. Esta gran evolución ha permitido que hoy en día se puedan utilizar para navegar en distintos terrenos: terrestres, aéreos, subacuáticos, etc., con aplicaciones también muy amplias como: reconocimiento de terreno, automatización de procesos, búsqueda y rescate de personas en lugares de difícil acceso, exploración planetaria o para ampliar el rango de trabajo de robots manipuladores.

Se pueden clasificar según el tipo de locomoción que emplean: con ruedas, con patas, mediante articulaciones, etc. Los robots móviles que han sido más ampliamente estudiados son los que utilizan ruedas, debido a su sencillez de construcción y eficiencia en superficies lisas y firmes.

Un objetivo principal de la robótica móvil es el de alcanzar el máximo grado de autonomía con la mínima intervención humana. Se entiende por autonomía la capacidad del robot para determinar sus acciones mediante un razonamiento, en base a la observación del entorno que le rodea empleando sensores. Es lo que se conoce como sistemas de navegación automática, que incluyen tareas de percepción, planificación y control.

Este concepto de autonomía en robots móviles puede extenderse a vehícu-

los ligeros. Hoy en día ya hay numerosos estudios y casos de aplicación de vehículos autónomos o sin conductor. Estos vehículos son capaces de percibir el entorno que les rodea y navegar en consecuencia imitando la conducción humana. Para ello emplean complejas técnicas de sensorización mediante GPS, láser, radar y visión artificial. Mediante estas técnicas y sistemas avanzados de control son capaces de planificar rutas respetando la señalización y la teniendo en cuenta la posible presencia de obstáculos.

El uso generalizado de vehículos autónomos presentaría múltiples ventajas: reducción de accidentes de tráfico debida a la ausencia de factores humanos, reducción de la congestión de las carreteras, se reduciría el consumo de gasolina y las emisiones al emplearse técnicas de optimización de rutas, etc.

El objeto de estudio de este proyecto serán los vehículos eléctricos ligeros. Se presentarán en primer lugar conceptos básicos de robótica móvil. Por otro lado, se hace una breve introducción a la mecánica y se ofrece una visión general de los sistemas de suspensión más empleados en los vehículos actuales.

1.2. Objetivos

Uno de los objetivos de este proyecto será modelar el sistema de suspensión de un vehículo eléctrico que está en desarrollo actualmente. Se resolverá el problema cinemático de forma incremental, partiendo de un mecanismo más sencillo hacia otros más complejos (primero un cuarto de vehículo, a continuación un eje completo y finalmente el vehículo entero). Se identificará cada uno de los elementos que forman parte del mecanismo y se resolverá el problema cinemático del mismo para intentar realizar una simulación del comportamiento de la suspensión real.

Puesto que se pretende que el vehículo en desarrollo sea autónomo, otro de los objetivos de este proyecto será establecer el control de un vehículo de cuatro ruedas con configuración cinemática de Ackerman e implementar un algoritmo de seguimiento de caminos.

Parte I

Planteamiento teórico

Capítulo 2

Robots móviles

2.1. Introducción

El término *robot* tiene múltiples definiciones, una de ellas es la siguiente:

Un robot es una máquina diseñada para realizar trabajos productivos e imitar los movimientos o comportamientos de los seres vivos.

Los robots están equipados con articulaciones, ruedas, patas, cadenas, etc. que permiten actuar sobre ellas, de manera que se puede controlar su movimiento.

Pueden definirse más concretamente como cualquier estructura mecánica con una cierta autonomía que emplea un ordenador o microcontrolador para desarrollar una actividad y posee un conjunto de sensores para relacionarse con su entorno. También es necesario un software que gestione la información proporcionada por los sensores y ejecute las acciones necesarias para realizar la actividad deseada.

Aunque su clasificación no siempre es clara, tradicionalmente se han dividido en dos grandes grupos: robots manipuladores (o industriales) y robots móviles. Los robots manipuladores son ampliamente usados en el proceso productivo industrial para tareas que requieren funciones repetitivas o la manipulación de grandes cargas, como puede ser una cadena de montaje. Suelen estar fijos y poseen un área de trabajo delimitada.

Los robots móviles, en cambio, tienen la capacidad de moverse libremente por el espacio, percibir su entorno e interactuar con él, incluso aunque éste sea

desconocido en un principio, lo que tiene un gran interés para la investigación. El resto del capítulo se centrará únicamente en este tipo de robots.

2.2. Clasificación de robots

Los robots móviles pueden clasificarse en función del entorno en el que se mueven (terrestre, aéreo, acuático, etc.) o en función de la estructura y elementos que emplean para moverse (con ruedas, con patas, etc.). A continuación se presenta una clasificación basada en la combinación de ambos criterios.

2.2.1. Robots con ruedas

Los robots con ruedas son la solución más simple y eficiente para conseguir la movilidad en terrenos suficientemente duros y libres de obstáculos, permitiendo velocidades relativamente altas. Existen diferentes tipos de configuraciones de locomoción mediante ruedas, cada una con unas características y propiedades diferentes en cuanto a eficiencia energética, dimensiones, cargas útiles y maniobrabilidad.

Diferencial

El direccionamiento viene dado por la diferencia de velocidades de dos ruedas laterales, que a su vez proporcionan la tracción. Adicionalmente son necesarias una o más ruedas locas que sirven de apoyo. Es la configuración más utilizada en robots para interiores por su simplicidad y bajo coste. Sus desventajas son la dificultad de controlar los deslizamientos y las trayectorias rectas (ambas ruedas deben ir a la misma velocidad).

Un ejemplo de vehículos eléctricos con configuración diferencial son las sillas de ruedas eléctricas como la que se muestra en la figura 2.1. En este caso, hay cuatro ruedas de apoyo: dos delante de las ruedas de tracción y dos detrás.

Tipo oruga

Son robots con dos cadenas o pistas de deslizamiento en los laterales, como en los tanques. Tanto la tracción como el direccionamiento se consigue mediante las cadenas que se comportan de forma análoga a dos grandes ruedas a cada



Figura 2.1: Silla de ruedas eléctrica con locomoción diferencial y cuatro ruedas de apoyo (fuente: Golden Technologies)

lado. Desde el punto de vista cinemático, la configuración oruga se comporta como el modelo diferencial con el eje de giro situado entre las dos ruedas equivalentes.

Esta configuración es útil para la navegación campo a través o en terrenos irregulares, en los que presenta mejor rendimiento que el modelo diferencial debido a su mejor tracción y menor deslizamiento.

En la figura 2.2 puede verse un robot de este tipo. Se trata de un *PackBot* del fabricante *iRobot*, utilizados por el ejército de EE.UU. para reconocimiento en entornos con terreno irregular.



Figura 2.2: Robot PackBot con locomoción de tipo oruga desarrollado por iRobot

Triciclo

Este sistema es el del triciclo clásico. Dispone de dos ruedas de tracción y una rueda delantera (o trasera) orientable para la dirección. La rueda orien-

table también puede ser de tracción, en cuyo caso las dos ruedas del otro eje deben ser libres. Se trata de una configuración simple, pero puede presentar problemas de estabilidad como la pérdida de tracción cuando se desplaza por una pendiente.

Ackerman

La configuración Ackerman es la utilizada en los vehículos de cuatro ruedas convencionales. Las dos ruedas delanteras giran para controlar la orientación y las traseras se mantienen paralelas. Cuando se efectúa un giro, la rueda interior gira en un ángulo mayor que la exterior para evitar el deslizamiento. El mayor problema de la configuración Ackerman es su limitación de maniobrabilidad.

El típico ejemplo de vehículo eléctrico con configuración Ackerman es un coche de radiocontrol como el de la figura 2.3.



Figura 2.3: Coche eléctrico de radiocontrol (fuente: RC Radiocontrol)

Omnidireccional

Todas las configuraciones vistas hasta ahora comparten un mismo defecto: no pueden moverse en todas direcciones. Los robots omnidireccionales, en cambio, pueden moverse en cualquier dirección del plano y alcanzar cualquier posición sin necesidad de rotar antes. La base de su funcionamiento son las ruedas omnidireccionales que utilizan, cuyas ruedas locas pueden girar perpendicularmente al eje de la rueda principal a la que van unidas (figura 2.4). La única rueda sobre la que se aplica la acción, no obstante, es la rueda principal.

Estos robots suelen llevar tres ruedas omnidireccionales, aunque hay diseños que llevan cuatro. Con tres ruedas, el sistema tiene suficientes actuadores para



Figura 2.4: Rueda omnidireccional doble de Rotacaster. Las ruedas locas (de color rojo) permiten a la rueda principal deslizarse lateralmente

controlar los tres grados de libertad de movimiento plano (dos de traslación y uno de rotación). Aplicando distintas velocidades de giro a cada rueda, se consigue que el robot gire o que avance en la dirección deseada.

El robot omnidireccional más conocido es Robotino (figura 2.5), que se usa con fines educativos y de investigación. Cuenta con tres ruedas omnidireccionales dispuestas con sus ejes formando ángulos de 120° .



Figura 2.5: Robot omnidireccional Robotino fabricado por Festo

2.2.2. Robots con patas

Permiten aislar el cuerpo del terreno empleando únicamente puntos discretos de soporte. El polígono de soporte se puede adaptar para mantener la estabilidad y pasar sobre obstáculos, por lo que poseen mejores propiedades que las ruedas para atravesar terrenos difíciles (tierra, nieve, etc.) o con obstáculos.

El uso de patas permite conseguir movimientos omnidireccionales y reducir el deslizamiento. En contra, requieren un consumo de energía mayor y sus algoritmos de control y planificación son más complejos que en los vehículos con ruedas.

La configuración más común es la de seis patas, ya que son el número menor que proporciona mayor estabilidad. Atendiendo al número de patas se pueden clasificar en bípedos, cuadrúpedos, hexápodos, etc. (figura 2.6).



Figura 2.6: Hexápodo PhantomX AX (Trossen Robotics) y cuadrúpedo AlphaDog LS3 (Boston Dynamics)

Cabe mencionar también, dentro de los robots con patas, los robots trepadores que son de gran utilidad para realizar tareas de inspección y reparación en paredes verticales. Emplean garras o dispositivos magnéticos o de succión en las patas para sostenerse. Es el caso de los robots del proyecto RiSE de Boston Dynamics, capaces de trepar muros, árboles y vallas. Cuentan con patas dotadas de microgarras que les permiten escalar superficies con relieve, y una cola fija que les ayuda en los ascensos empinados. Tienen dos versiones, un hexápodo y un cuadrúpedo (figura 2.7).



Figura 2.7: Robots trepadores RiSE V2 (hexápodo) y RiSE V3 (cuadrúpedo) de Boston Dynamics

2.2.3. Robots articulados

Las configuraciones articuladas son interesantes para terrenos difíciles a los que debe adaptarse el cuerpo del robot. Su estructura es la de una cadena formada por varios eslabones que les confieren múltiples grados de libertad.

Son conocidos como robots de tipo serpiente por su similitud con este animal (figura 2.8).

Un ejemplo es el robot japonés Soryu-II, empleado para localizar y rescatar personas atrapadas entre los escombros después de un terremoto. Otro robot de tipo serpiente es el ACM-R5, que además es anfibio.

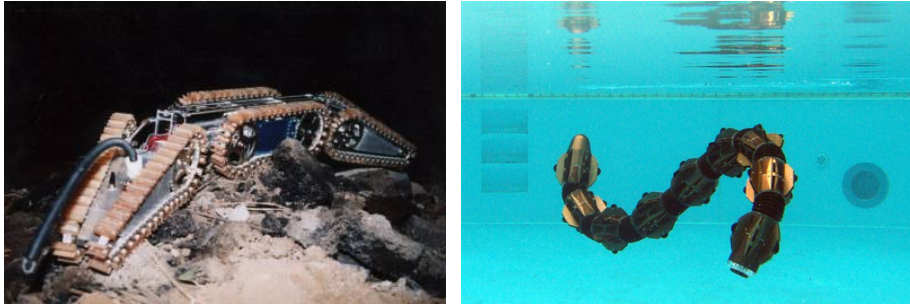


Figura 2.8: Robots articulados Soryu-II y ACM-R5 (Hirosho Fukushima Lab)

2.2.4. Robots submarinos

Robots capaces de moverse bajo el agua mediante un sistema de propulsión que les permite maniobrar en tres dimensiones. Suelen tener aplicaciones militares o de investigación científica para explorar lagos, fondos marinos, etc.

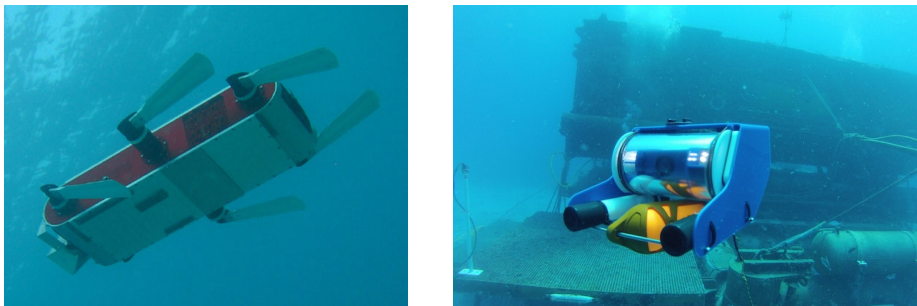


Figura 2.9: Robots submarinos Aqua2 (McGill University) y OpenROV (código abierto: <http://openrov.com>)

2.2.5. Robots aéreos

Hay una gran variedad de vehículos aéreos con diferentes tamaños, formas y características. Originalmente eran pilotados de forma remota, pero hoy

en día los más utilizados son los vehículos aéreos no tripulados, UAV por sus siglas en inglés (*Unmanned Aerial Vehicle*). Se usan principalmente en aplicaciones militares de reconocimiento, espionaje o ataque. También sirven para uso cartográfico o de exploración.



Figura 2.10: Vehículos aéreos no tripulados Ikhana (NASA) y HADA (Inta)

2.3. Modelos cinemáticos

En esta sección se detallarán los modelos cinemáticos de las principales configuraciones de robots móviles con ruedas.

2.3.1. Configuración diferencial

Como se ha explicado en la sección anterior, los robots diferenciales cuentan con dos ruedas que giran de forma independiente. Dependiendo de la velocidad de cada rueda, el robot describirá una trayectoria u otra (figura 2.11).

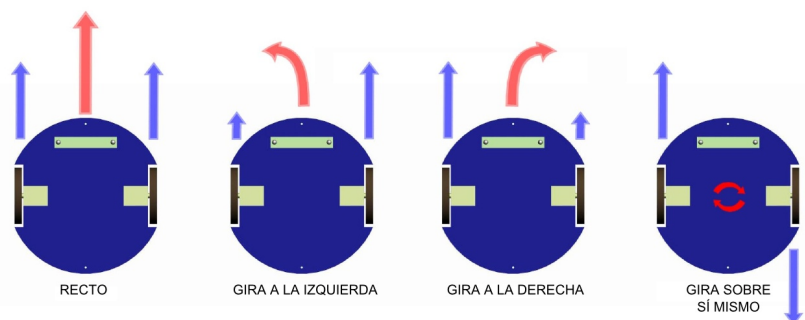


Figura 2.11: Trayectorias de un robot diferencial en función de la velocidad de cada rueda

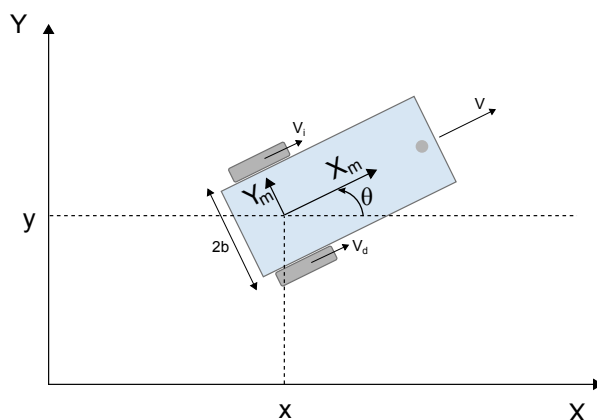


Figura 2.12: Modelo cinemático de un robot diferencial

La velocidad lineal del robot, v , se calcula como

$$v = \frac{v_i + v_d}{2}, \quad (2.1)$$

donde v_i y v_d son las velocidades lineales de las ruedas izquierda y derecha, respectivamente. Es decir, la velocidad lineal del robot es la media de la velocidad de las ruedas.

Cuando cada rueda gira a una velocidad diferente, el robot gira alrededor de un punto situado en algún lugar de la línea que une las ruedas, conocido como centro de curvatura instantáneo ICC (del inglés *Instantaneous Center of Curvature*).

En cada instante, las ruedas izquierda y derecha deben seguir una trayectoria que se mueva alrededor del ICC a la misma velocidad angular ω , luego se debe cumplir:

$$\omega(R + b) = v_d, \quad \omega(R - b) = v_i, \quad (2.2)$$

donde ω es la velocidad angular del robot, R es el radio de curvatura instantáneo de la trayectoria del robot (distancia desde el ICC hasta el punto medio del eje de las ruedas) y b es la distancia de cada rueda a ese punto medio.

La velocidad angular del robot se calcula como

$$\omega = \frac{v_d - v_i}{2b}, \quad (2.3)$$

y el radio de curvatura R

$$R = b \cdot \frac{v_i + v_d}{v_d - v_i}. \quad (2.4)$$

Es interesante notar que si ambas ruedas giran en sentido contrario, esto es $v_i = -v_d$, el radio de curvatura es $R = 0$ y el robot gira sobre sí mismo. En cambio, si las dos ruedas giran a la misma velocidad, $v_i = v_d$, entonces $R = \infty$ y el robot realiza una trayectoria rectilínea.

Modelo cinemático directo

Consiste en determinar la posición del robot a partir de su velocidad lineal y angular. Las ecuaciones (2.1) y (2.3) pueden expresarse de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2b & 1/2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_d \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

La posición y orientación del robot viene dada por las ecuaciones

$$\dot{x} = v \cdot \cos \theta \quad (2.6)$$

$$\dot{y} = v \cdot \sin \theta \quad (2.7)$$

$$\dot{\theta} = \omega, \quad (2.8)$$

o de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

siendo θ la orientación actual del robot.

Sustituyendo v y ω de (2.5) en (2.9) y ajustando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2b} \begin{bmatrix} b \cos \theta & b \cos \theta \\ b \sin \theta & b \sin \theta \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \frac{v_i + v_d}{2} \\ \sin \theta \frac{v_i + v_d}{2} \\ \frac{v_d - v_i}{2b} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Modelo cinemático inverso

Este problema consiste en determinar qué acción de control hay que aplicarle a cada rueda para alcanzar una determinada posición (x, y, θ) deseada. Esto es más complejo de calcular que la cinemática directa. Se puede calcular aplicando la matriz pseudoinversa¹ al modelo cinemático directo.

¹La pseudoinversa de una matriz A se define como $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$

Aplicando la pseudoinversa la ecuación (2.5) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} v_i \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

y haciendo lo mismo con la ecuación (2.9):

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Sustituyendo la segunda en la primera se obtiene el modelo cinemático inverso

$$\begin{bmatrix} v_i \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - b\dot{\theta} \\ \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta + b\dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

2.3.2. Configuración triciclo

Los robots de triciclo tienen dos ruedas traseras de propulsión y una delantera orientable para la dirección (figura 2.13).

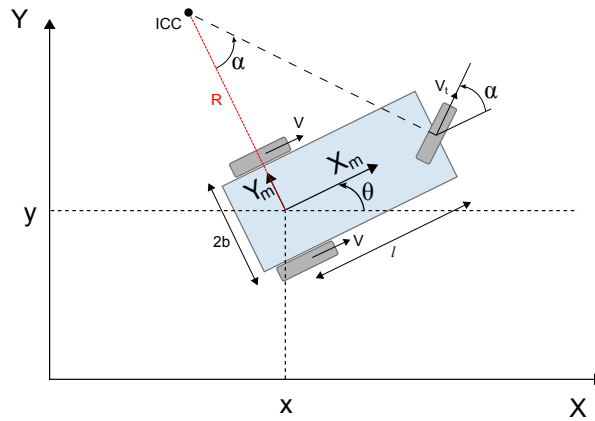


Figura 2.13: Modelo cinemático de un robot tipo triciclo

Modelo cinemático directo

La cinemática del triciclo se calcula de forma similar a la configuración diferencial. En este caso el ICC es el punto donde intersectan el eje de la rueda delantera y el de las ruedas traseras. El radio de curvatura R va desde este

punto hasta el centro del eje trasero. Las velocidades lineal y angular del robot son, respectivamente,

$$v = v_t \cdot \cos \alpha \quad (2.14)$$

y

$$\omega = v \cdot \gamma, \quad (2.15)$$

donde α es el ángulo de giro la rueda directriz, v_t su velocidad lineal, y γ la curvatura que describe el robot.

De la figura anterior se deduce

$$\tan \alpha = \frac{l}{R}, \quad (2.16)$$

y puesto que la curvatura es la inversa del radio, $\gamma = \frac{1}{R}$, se puede expresar en función del ángulo de la dirección como

$$\gamma = \frac{\tan \alpha}{l}, \quad (2.17)$$

siendo l la distancia desde el eje trasero hasta el centro de la rueda delantera.

Desarrollando y expresando de forma matricial las ecuaciones de velocidad se tiene

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\tan \alpha}{l} \end{bmatrix} v_t \cdot \cos \alpha \quad (2.18)$$

Sustituyendo estos valores de v y ω en la ecuación (2.9) se obtiene el modelo cinemático directo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \frac{\tan \alpha}{l} \end{bmatrix} v_t \cdot \cos \alpha \quad (2.19)$$

Modelo cinemático inverso

Se procede igual que en la configuración diferencial. Aplicando la matriz pseudoinversa a la ecuación (2.18) se obtiene

$$\begin{bmatrix} v_t \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{v^2 + \omega^2 l^2} \\ \arctan\left(\frac{l\omega}{v}\right) \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

y sustituyendo en ésta los valores de la ecuación (2.12) obtenemos el modelo cinemático inverso

$$\begin{bmatrix} v_t \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)^2 + \dot{\theta}^2 l^2} \\ \arctan\left(\frac{l\dot{\theta}}{\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta}\right) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

2.3.3. Configuración Ackerman

Es la configuración típica de los automóviles y vehículos autónomos de exteriores. Cuenta con cuatro ruedas, dos delanteras de dirección. Como ya se comentó, la característica de la dirección de Ackerman es que, al efectuar un giro, la rueda interior describe un ángulo mayor que la exterior, con el fin de evitar deslizamientos (figura 2.14).

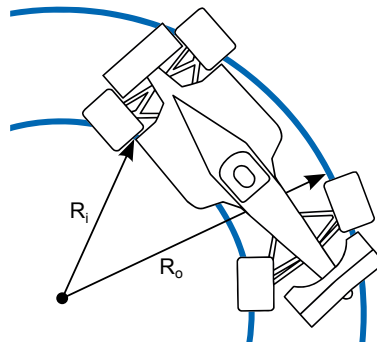


Figura 2.14: Radios interior y exterior descritos por las ruedas de un coche con configuración Ackerman

Desde el punto de vista cinemático, la configuración Ackerman es equivalente a la del triciclo una vez se conoce la rueda equivalente a las dos ruedas delanteras. En la figura 2.15 aparece en color azul.

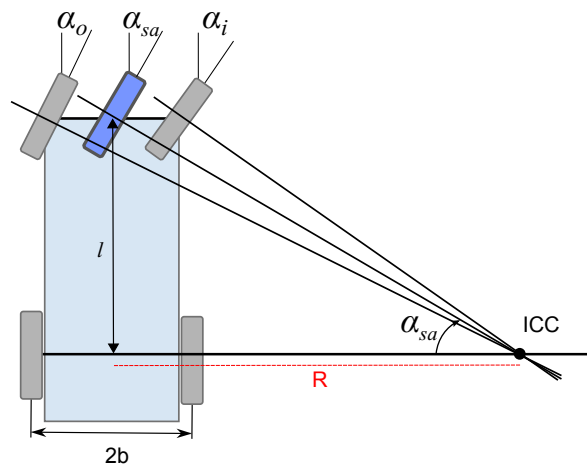


Figura 2.15: Modelo cinemático de Ackerman equivalente al triciclo

La relación entre los ángulos de las ruedas interior y exterior es:

$$\cot \alpha_o - \cot \alpha_i = \frac{R + b}{l} - \frac{R - b}{l} = \frac{2b}{l}, \quad (2.22)$$

siendo α_i el ángulo de la rueda interior (subíndice i del inglés *inner wheel*), α_o el ángulo de la rueda exterior (*outer wheel*) y la $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$.

El ángulo de giro de la rueda equivalente puede calcularse mediante

$$\cot \alpha_{sa} = \cot \alpha_i + \frac{b}{l} \quad (2.23a)$$

o bien

$$\cot \alpha_{sa} = \cot \alpha_o - \frac{b}{l} \quad (2.23b)$$

Una vez se conocen la velocidad y orientación de la rueda equivalente, se pueden aplicar las mismas ecuaciones del modelo cinemático del triciclo.

2.4. Control de robots móviles

El control de un vehículo o robot móvil se realiza a dos niveles: control dinámico y control cinemático. El control dinámico se ocupa de controlar la posición o velocidad angular de los motores. Generalmente se trata de un controlador P, PD, PI o PID. El control cinemático suele ser más complejo y se encarga de calcular la posición/orientación del robot en cada instante, así como de las acciones de control necesarias para llevarlo de un lugar a otro.

Así pues, se establece un control en cascada donde el control dinámico es el bucle interno y el control cinemático el bucle externo, tal y como se muestra en la figura 2.16.

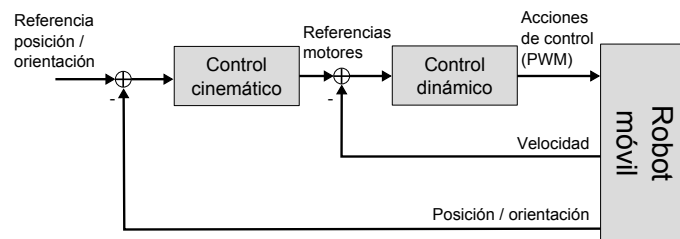


Figura 2.16: Esquema de control en cascada de robots móviles

En esta sección se presentan dos métodos geométricos para el control cinemático en coches autónomos. En concreto, el método de control de trayectorias por punto descentralizado y el de seguimiento de caminos por persecución pura.

2.4.1. Control de trayectorias por punto descentralizado

Una **trayectoria** consiste en una curva temporal para cada una de las coordenadas sobre las que se debe realizar el control del robot: $x(t)$, $y(t)$, $\theta(t)$. La principal característica de este método es la influencia de la variable tiempo en la planificación, lo que quiere decir que el robot realizará la trayectoria con unas velocidades de acuerdo al tiempo.

Este método establece el control a partir de la posición y velocidad de un punto que está alejado una distancia e del eje de tracción del robot.

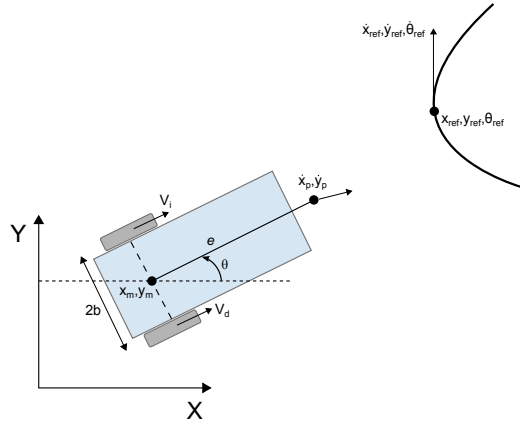


Figura 2.17: Modelo de control de posición por punto descentralizado

Las coordenadas del punto descentralizado en función de las del robot son:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m + e \cos \theta \\ y_m + e \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

La velocidad del punto descentralizado es la derivada de su posición:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_m - e \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y}_m + e \dot{\theta} \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e \sin \theta \\ 0 & 1 & e \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Sustituyendo el último vector de la ecuación anterior por la del modelo cinemático directo del robot (ecuación (2.10) para configuración diferencial y ecuación (2.19) para el triciclo), se puede obtener la velocidad del punto descentralizado en función de las velocidades de las ruedas del robot.

2.4.2. Seguimiento de caminos por persecución pura

Un **camino** es una curva definida en el espacio cartesiano o de configuración que debe seguir el robot sin tener en cuenta el factor tiempo: $C = \{x, y, \theta\}$. La característica principal de este método es la no influencia del factor tiempo, lo que elimina las restricciones de velocidad.

El algoritmo de persecución pura determina geoméricamente la curvatura que conducirá el vehículo desde su posición (x, y) a un punto objetivo elegido del camino (x_{ob}, y_{ob}) . Sea el sistema de referencia local de la figura 2.18. Se supone que, en el intervalo de control, la curvatura es constante, describiendo el vehículo un arco de circunferencia.

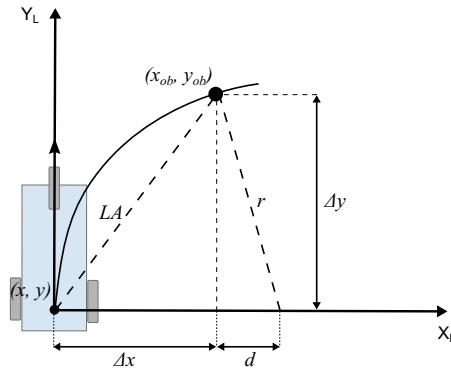


Figura 2.18: Seguimiento de caminos mediante persecución pura

De la figura se deduce:

$$r = \Delta x + d \quad (2.26)$$

$$d^2 + (\Delta y)^2 = r^2 \quad (2.27)$$

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = LA^2, \quad (2.28)$$

siendo r el radio de curvatura del vehículo y LA la distancia del vehículo al punto objetivo (del inglés *Look Ahead*).

Despejando d de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se tiene

$$(r - \Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = r^2 \quad (2.29)$$

Y despejando r de esta última ecuación se obtiene el radio de curvatura necesario para que el vehículo se traslade Δx y Δy :

$$r = \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{2\Delta x} = \frac{LA^2}{2\Delta x} \quad (2.30)$$

Por tanto, la curvatura que hay que suministrar al vehículo será

$$\gamma = \frac{1}{r} = -\frac{2\Delta x}{LA^2}, \quad (2.31)$$

siendo el signo negativo debido al sentido de giro necesario para alcanzar el punto objetivo en la figura.

Aplicar esta ley de control es muy sencillo, ya que sólo hay que determinar el punto del camino que se encuentra a una distancia LA y calcular el error lateral Δx con respecto a la posición actual del vehículo. Si las coordenadas están en un sistema global, hay que tener en cuenta la orientación del vehículo al calcular Δx , en cuyo caso será:

$$\Delta x = (x_{ob} - x) \cos \theta + (y_{ob} - y) \sin \theta \quad (2.32)$$

Suponiendo una velocidad constante del vehículo, un método práctico para aplicar la ley de control es el que muestra la figura 2.19. Consiste en obtener, en cada periodo de control, el punto (x_{obm}, y_{obm}) del camino objetivo que está más próximo al vehículo (x, y) y elegir como punto objetivo el que se encuentre a una distancia fija s tomada sobre el camino. A continuación se calcula

$$LA = \sqrt{(x_{ob} - x)^2 + (y_{ob} - y)^2} \quad (2.33)$$

y Δx con (2.32) y se aplica la ley de control (2.31).

Existen situaciones en las que aplicar simplemente esta ley de control puede presentar problemas. Uno de estos casos es cuando el punto objetivo se encuentra muy alejado (LA es muy grande) y la acción de control suministrada por la ecuación (2.31) es muy pequeña, puesto que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al punto objetivo. Esto se puede solucionar saturando el valor de LA a una distancia máxima.

Otra situación problemática es cuando el vehículo se encuentra sobre el camino (Δx es muy pequeña), pero orientado en dirección contraria al sentido

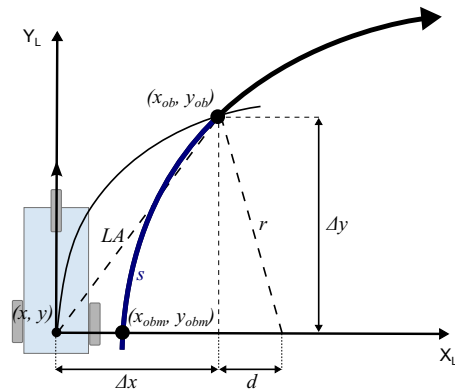


Figura 2.19: Aplicación práctica del método de persecución pura con una distancia fija sobre el camino

del camino. En este caso se obtendría un valor de la curvatura muy pequeño que no permitiría girar el vehículo hasta la orientación correcta. Cuando se detecta uno de estos casos, hay que sustituir la curvatura obtenida por una acción de control mayor que permita al vehículo orientarse cuanto antes.

Capítulo 3

Introducción a los mecanismos

En este capítulo se presentan algunos fundamentos de la teoría de máquinas y mecanismos, en concreto de la cinemática espacial, necesarios para la posterior comprensión del desarrollo práctico.

3.1. Generalidades

Un mecanismo es un conjunto de elementos mecánicos, uno de los cuales es fijo, en contacto con otros de forma que pueden tener movimiento relativo entre ellos, y este movimiento tiene una forma determinada (no caótico ni aleatorio). Como consecuencia, el movimiento de un mecanismo está restringido y se puede estudiar independientemente de las fuerzas que lo producen.

Se proponen las siguientes definiciones.

Definición 1 (Mecanismo) *Se define como un sistema multicuerpo formado por la unión de dos o más cuerpos rígidos (también llamados elementos) unidos a través de unas uniones imperfectas llamadas pares cinemáticos o simplemente pares.*

Definición 2 (Elemento o barra) *Cada una de las partes en que puede descomponerse el sistema mecánico de forma que tenga movimiento relativo respecto de las demás partes y en relación a las cuales existe una discontinuidad de tipo físico.*

Definición 3 (Par cinemático) *O simplemente par, se define así a la unión imperfecta existente entre dos elementos. Una unión imperfecta es aquella que permite el movimiento en algún grado de libertad.*

En la figura 3.1 se observan dos mecanismos distintos que pueden ayudar a comprender los conceptos que se acaban de definir.

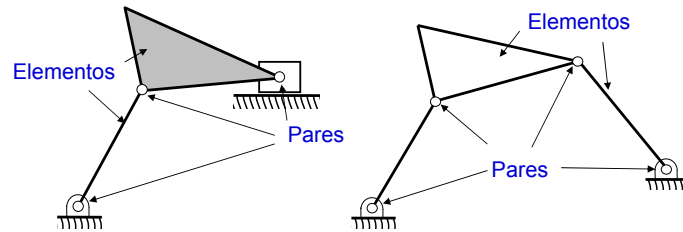


Figura 3.1: Elementos (barras) y pares de dos mecanismos

3.2. Clasificación de pares cinemáticos

Los pares cinemáticos pueden clasificarse en base a diversos criterios: por el número de elementos que unen, por el tipo de contacto, por el cierre, etc. En esta sección se clasificarán en base al número de grados de libertad de movimiento que permiten.

3.2.1. Pares de Clase I

Permiten el movimiento en 1 grado de libertad. Restringen 5 grados de libertad. Ejemplos:

1. **De Revolución (R)**, permite un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo.

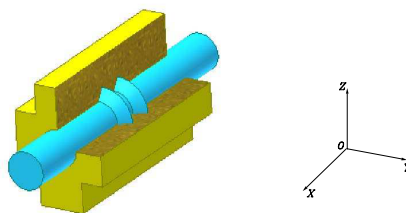


Figura 3.2: Par de Revolución

2. **Prismático (P)**, permite un movimiento de traslación a lo largo de un eje, o una curva dada.

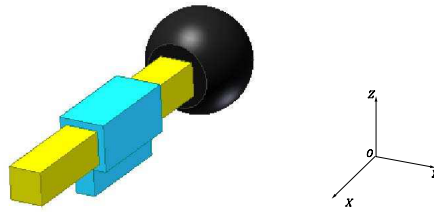


Figura 3.3: Par Prismático

3. **Helicoidal o de tornillo (H)**, permite un movimiento de traslación a lo largo de un eje y simultáneamente un movimiento de rotación, dependiente de la traslación, alrededor del mismo eje.

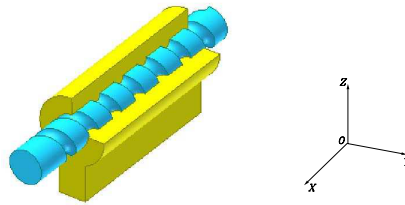


Figura 3.4: Par de Tornillo o Helicoidal

3.2.2. Pares de Clase II

Permiten el movimiento en 2 grados de libertad. Se pierden 4 grados de libertad. Ejemplos:

1. **Universal o cardán (U)**, permite un movimiento de rotación alrededor de dos ejes perpendiculares entre sí.

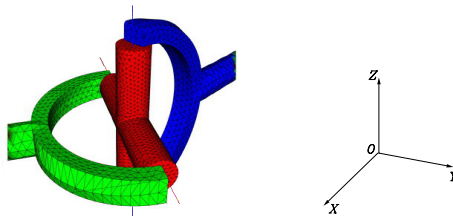


Figura 3.5: Par Universal

2. **Cilíndrico (C)**, permite traslación a lo largo de un eje y rotación independiente alrededor del mismo eje.

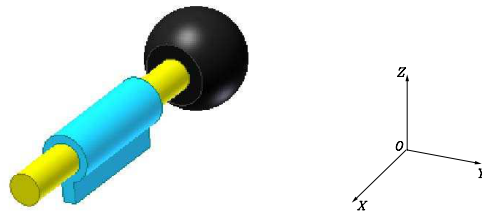


Figura 3.6: Par Cilíndrico

3. **Leva (L)**, permite traslación a lo largo de un eje y rotación alrededor de un eje perpendicular al primero.

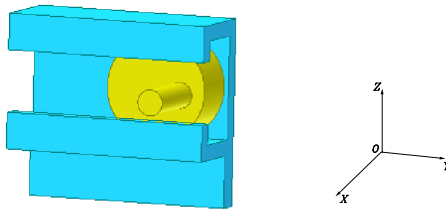


Figura 3.7: Par de Leva

3.2.3. Pares de Clase III

Permiten el movimiento en 3 grados de libertad. Restringen 3 grados de libertad. Ejemplos:

1. **Esferico (E)**, permite rotación alrededor de tres ejes. Es decir, permite rotación alrededor de un punto fijo.

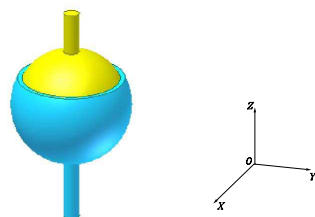


Figura 3.8: Par Esferico

2. **Esfera sobre cilindro acanalado (Ss)**, permite rotación alrededor de dos ejes linealmente independientes y traslación a lo largo de un tercer eje.

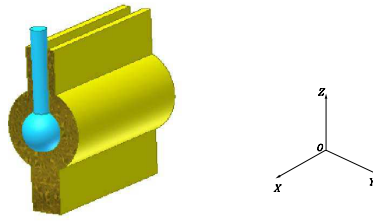


Figura 3.9: Par constituido por una esfera con mango en contacto con un cilindro acanalado

3. **Plano (PI)**, permite traslación a lo largo de dos ejes y rotación alrededor de otro eje perpendicular a los dos anteriores.

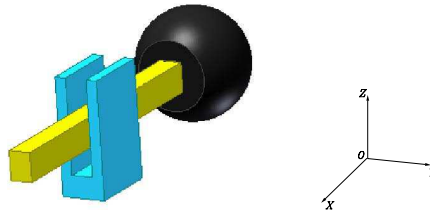


Figura 3.10: Par Plano

3.3. Grados de libertad

El concepto de grados de libertad proviene de la teoría de sistemas y es de aplicación muy general. Aquí se adopta la siguiente definición:

Definición 4 (Grados de libertad) *Es el número mínimo y suficiente de parámetros que es necesario conocer para determinar completamente la posición de un mecanismo.*

Un cuerpo que esté libre en el espacio tiene seis grados de libertad, tres de posición y tres de orientación. Al ponerse en contacto con otros cuerpos, el movimiento del cuerpo original pierde grados de libertad y queda restringido.

Para determinar el número de grados de libertad de un mecanismo espacial, es decir, su movilidad, se emplea el Criterio de Grübler-Kutzbach, cuya expresión es:

$$M = 6n - \sum_{i=1}^j (6 - f_i) = 6(N - 1 - j) + \sum_{i=1}^j f_i, \quad (3.1)$$

donde n es el número de barras o elementos móviles del mecanismo, N es el número de barras más el cuerpo fijo ($n + 1$), j es el número de uniones o pares cinemáticos y f_i es el número de grados de libertad de cada par.

Es interesante notar que los sumandos del sumatorio de la primera expresión no son sino las restricciones de cada par, esto es, $c = 6 - f$. De esta forma, sabiendo a qué clase de las vistas en la sección anterior pertenece cada par y conociendo el número de pares de cada clase presentes en el mecanismo, se puede expresar la ecuación de movilidad (3.1) de esta otra forma:

$$M = 6n - 5P_1 - 4P_2 - 3P_3 - 2P_4 - P_5, \quad (3.2)$$

donde P_1 es el número de pares de Clase I que contiene el mecanismo, P_2 es el número de pares de Clase II, P_3 es el número de pares de Clase III, etc.

3.4. Coordenadas y ecuaciones de restricción

Se conocen como *coordenadas independientes* aquellas que coinciden con el número de grados de libertad del mecanismo (si éste es holónimo) y, por tanto, son el número mínimo de coordenadas necesarias para definir completamente su posición.

Se puede emplear un número mayor de coordenadas que el número de grados de libertad, de forma que se consiga una descripción mucho más sencilla del sistema. Éstas son las llamadas *coordenadas dependientes*, y deben relacionar entre ellas y con las coordenadas independientes a través de lo que se conoce como *ecuaciones de restricción*.

Así, en un problema cinemático habrá tantas ecuaciones de restricción como coordenadas dependientes. Estas ecuaciones deben ser introducidas en la formulación del análisis cinemático.

Las ecuaciones de restricción pueden clasificarse en dos tipos:

- **Restricciones en los elementos:** en elementos rígidos se establecen normalmente como condición de longitud constante.
- **Restricciones en los pares cinemáticos:** son ecuaciones que permiten el movimiento relativo en los grados de libertad del par cinemático y restringen el resto de movimientos.

A continuación se detallan únicamente las ecuaciones de restricción presentes en los cuatro pares cinemáticos que se encontrarán más adelante: de revolución, prismático, universal y esférico.

Ecuaciones de restricción del Par de Revolución

$$\begin{aligned} h_i \times h_i &= 0 \\ h_i \times s_{ij} &= 0 \\ s_{ij}^T s_{ij} &= c \end{aligned}$$

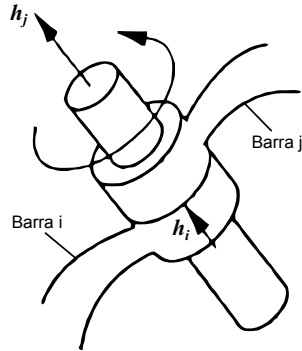


Figura 3.11: Ecuaciones de restricción del par de revolución

En el par de revolución es necesario que exista un eje común en los dos elementos, que es lo que garantizan las dos primeras ecuaciones. La tercera ecuación asegura que existe un punto común entre ambas barras.

Ecuaciones de restricción del Par Prismático

$$\begin{aligned} h_i \times h_i &= 0 \\ h_i \times s_{ij} &= 0 \\ n_i^T n_j &= 0 \end{aligned}$$

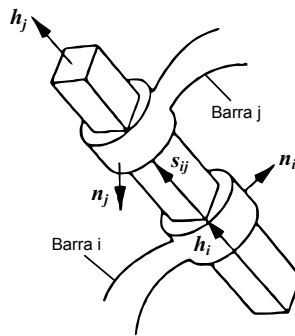


Figura 3.12: Ecuaciones de restricción del par prismático

En el par prismático también es necesario que exista un eje común en las dos barras. Por ello, las dos primeras ecuaciones son idénticas a las anteriores. La otra condición que debe cumplirse es que el ángulo entre ambas barras debe permanecer constante, garantizado por la tercera ecuación.

Ecuaciones de restricción del Par Universal

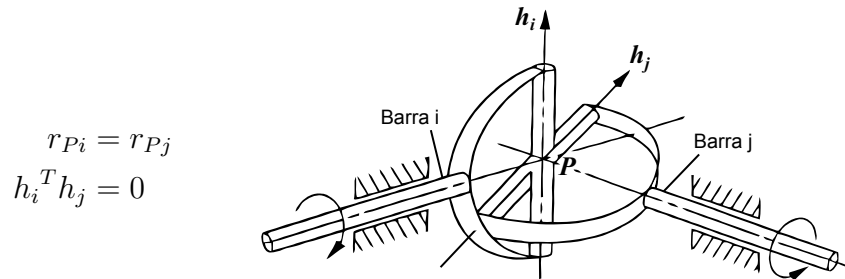


Figura 3.13: Ecuaciones de restricción del par universal

La primera ecuación asegura que existe un punto común a las dos barras. La segunda garantiza un ángulo constante de 90° entre ambas.

Ecuación de restricción del Par Esférico

$$r_{Pi} = r_{Pj}$$

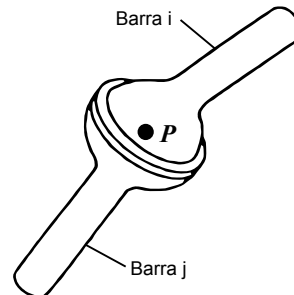


Figura 3.14: Ecuación de restricción del par esférico

La única restricción del par esférico es la existencia de un punto en común entre los dos elementos.

3.5. Análisis cinemático

El estudio cinemático de un mecanismo pretende conocer el movimiento del mismo independientemente de las fuerzas que actúen sobre él. Se trata de un problema puramente geométrico y su solución muestra cuáles son los movimientos factibles del mecanismo en cuestión. Cuando ese mecanismo

opere en condiciones reales sometido a la acción de fuerzas, su movimiento será alguno de los posibles encontrados en el análisis cinemático.

En los problemas cinemáticos, los valores de posición, velocidad, aceleración, etc. de los grados de libertad del mecanismo, así como las dimensiones de las barras, son impuestos por el analista. Son, por lo tanto, datos del problema.

A continuación se explicará cómo resolver los problemas cinemáticos para cualquier mecanismo plano que haya sido modelizado en coordenadas naturales, aunque la técnica es extensible a todos los tipos de coordenadas dependientes y a mecanismos espaciales.

3.5.1. Problema de posición inicial

Consiste en, conocido el valor en posición de los grados de libertad del mecanismo, obtener la posición de todos los elementos del mismo.

Asumiendo que la modelización del mecanismo se ha realizado en coordenadas naturales, el problema de posición inicial consistirá en obtener el valor de todas las coordenadas —puntos, vectores unitarios, ángulos, distancias— correspondientes a unos determinados valores de las coordenadas que representen a los grados de libertad. Así, quedará perfectamente establecida la posición de todos los elementos del mecanismo para esos valores de los grados de libertad.

Veamos un ejemplo partiendo del cuadrilátero de la figura 3.15. Supongamos que ha sido modelizado en coordenadas naturales. El vector de coordenadas del mecanismo sería el siguiente:

$$q^t = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha\} \quad (3.3)$$

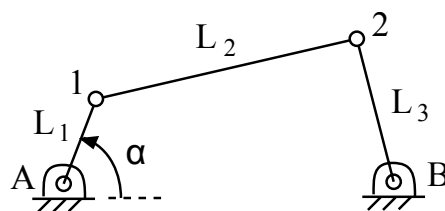


Figura 3.15: Posición inicial del cuadrilátero articulado

Luego, el problema de posición inicial consistirá en averiguar cuáles son los valores que toman las coordenadas x e y de los puntos 1 y 2 para un determinado valor del ángulo α . Las posiciones de los puntos fijos A y B y las dimensiones de las tres barras son conocidas.

Las variables del problema se encontrarán ligadas por un cierto número de ecuaciones de restricción, que agruparemos en un vector denominado vector de restricciones Φ . Luego, para obtener los valores de las coordenadas que buscamos habrá que resolver el sistema:

$$\Phi(q) = 0 \quad (3.4)$$

Este sistema es no lineal. En el ejemplo que hemos presentado, la ecuación vectorial (3.4) tendrá la siguiente forma:

$$(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_1^2 = 0 \quad (3.5a)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 = 0 \quad (3.5b)$$

$$(x_2 - x_B)^2 + (y_2 - y_B)^2 - L_3^2 = 0 \quad (3.5c)$$

$$(x_1 - x_A) - L_1 \cos \alpha = 0 \quad (3.5d)$$

Los sistemas de ecuaciones no lineales son difíciles de resolver, por ello procederemos a la linealización de la ecuación (3.4), que se desarrolla en serie de Taylor alrededor de una posición inicial más o menos aproximada que se toma como punto de partida.

$$\Phi(q) \cong \Phi(q_0) + \Phi_q(q_0)(q - q_0) = 0 \quad (3.6)$$

En el ejemplo, el vector de posición aproximado sería:

$$q_0^t = \{x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0, \alpha\}, \quad (3.7)$$

donde el superíndice de las variables indica que se trata de los valores aproximados iniciales que, lógicamente, no cumplirán las restricciones. La ecuación (3.6) se puede reescribir como:

$$\Phi_q(q_0)(q - q_0) = -\Phi(q_0), \quad (3.8)$$

que representa un sistema lineal de tantas ecuaciones como restricciones se hayan establecido (sean m , cuatro en el ejemplo) y tantas incógnitas como variables tenga el problema (sean n , cinco en el ejemplo). Sin embargo, dado que el valor de los grados de libertad es conocido y puesto que $g = n - m$ (siendo g el número de grados de libertad) finalmente tendremos un sistema cuadrado de tamaño m .

La matriz del sistema de ecuaciones de (3.8) es el jacobiano de las ecuaciones de restricción respecto a las variables, de tamaño $m \times n$. Cada fila contiene las derivadas de la correspondiente ecuación de restricción respecto a cada

una de las variables. En el ejemplo que estamos tratando tendrá el siguiente aspecto:

$$\Phi_q(q) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_A) & 2(y_1 - y_A) & 0 & 0 & 0 \\ -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 0 \\ 0 & 0 & 2(x_2 - x_B) & 2(y_2 - y_B) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & L_1 \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Entonces, resolviendo el sistema (3.8), obtendremos una solución q , que llamaremos q_1 , y que tampoco satisfará las ecuaciones de restricción (3.5) por completo, pero estará más cerca. La nueva solución aproximada será:

$$q_1^t = \{x_1^1, y_1^1, x_2^1, y_2^1, \alpha\} \quad (3.10)$$

Este procedimiento se empleará de forma iterativa obteniéndose cada vez una solución más próxima a aquella que satisface todas las ecuaciones de restricción. Reescribiendo la ecuación (3.8) de forma general tenemos:

$$\Phi_q(q_i)(q_{i+1} - q_i) = -\Phi(q_i), \quad (3.11)$$

de forma que, en cada iteración, se obtiene una solución mejorada q_{i+1} a partir de la anterior, q_i . Este procedimiento es conocido como método iterativo de Newton-Raphson y se puede utilizar para resolver cualquier sistema de ecuaciones no lineal. El orden de convergencia de este método es cuadrático en el entorno de la solución, lo que hace que en pocas iteraciones se alcance una solución con un error muy pequeño.

Para comprender la interpretación geométrica del método de Newton-Raphson pensemos en una función no lineal de una única variable para la que buscamos su corte con el eje de abscisas, esto es, resolver el problema $f(x) = 0$. El significado geométrico del método puede verse en la figura (3.16).

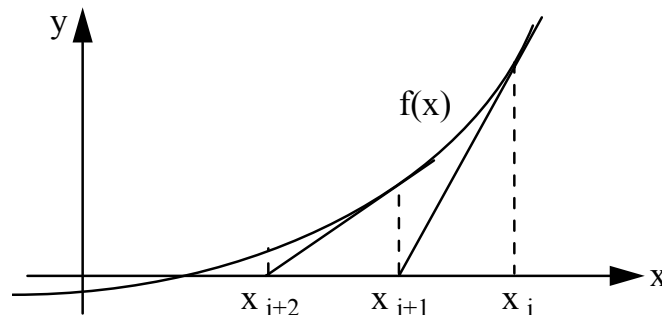


Figura 3.16: Interpretación geométrica del método de Newton-Raphson

Es decir, al linealizar el sistema no lineal nos vamos aproximando a la solución por medio de las tangentes en las sucesivas soluciones parciales, cada vez más próximas a la solución real. Lo que en el caso de una función de una variable es la pendiente de cada recta tangente, en el caso general de varias funciones de varias variables es el jacobiano, o matriz jacobiana.

Inicialmente, el sistema (3.11) tiene m ecuaciones y n incógnitas, si bien, como ya hemos dicho, el valor de las variables correspondientes a los grados de libertad, en número $g = n - m$, es conocido. Por tanto, el valor de $q_{i+1} - q_i$ es nulo para los grados de libertad. Así pues, bastará con eliminar las columnas del jacobiano correspondientes a los grados de libertad para llegar al sistema cuadrado de tamaño $m \times m$. En el ejemplo, el sistema (3.11) quedará:

$$\begin{bmatrix} 2(x_1^i - x_A) & 2(y_1^i - y_A) & 0 & 0 \\ -2(x_2^i - x_1^i) & -2(y_2^i - y_1^i) & 2(x_2^i - x_1^i) & 2(y_2^i - y_1^i) \\ 0 & 0 & 2(x_2^i - x_B) & 2(y_2^i - y_B) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{i+1} - x_1^i \\ y_1^{i+1} - y_1^i \\ x_2^{i+1} - x_2^i \\ y_2^{i+1} - y_2^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (x_1^i - x_A)^2 + (y_1^i - y_A)^2 - L_1^2 \\ (x_2^i - x_1^i)^2 + (y_2^i - y_1^i)^2 - L_2^2 \\ (x_2^i - x_B)^2 + (y_2^i - y_B)^2 - L_3^2 \\ (x_1^i - x_A) - L_1 \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Respecto a la aproximación inicial q_0 necesaria para comenzar el proceso iterativo, puede ser una aproximación bastante burda, siendo muy difícil que se encuentre tan alejada de la solución que impida que el método converja.

Para cuantificar durante el proceso iterativo el incumplimiento de las ecuaciones de restricción, se define el siguiente error:

$$e = \sqrt{\sum_{i=1}^m \phi_i^2}, \quad (3.13)$$

donde ϕ_i es el valor que toma cada ecuación de restricción. El proceso se detendrá cuando este error descienda por debajo de una determinada tolerancia establecida previamente.

3.5.2. Problema de los desplazamientos finitos

Este problema consiste en, una vez montado el mecanismo en la posición correspondiente a un determinado valor de los grados de libertad, calcular la

nueva posición a la que se llega cuando se incrementa o disminuye el valor de los grados de libertad.

Se trata, así pues, de resolver de nuevo el problema de posición para cada nuevo valor de los grados de libertad empleando el método visto en el apartado anterior. La diferencia está en la aproximación inicial que se toma. En el problema de posición estábamos obligados a tomar unos valores inventados, mientras que ahora los valores iniciales serán los de la posición anterior del mecanismo, siempre que los incrementos de los grados de libertad no sean demasiado grandes.

Resolviendo el problema de los desplazamientos finitos de forma reiterada podemos conocer el movimiento del mecanismo para un determinado rango de variación de los grados de libertad. Esto tiene gran interés para representar gráficamente las posiciones obtenidas, ya que permite comprobar visualmente cuál será el movimiento del mecanismo.

3.5.3. Problema de velocidad

Este problema consiste en determinar las derivadas temporales (velocidades) de todas las variables del mecanismo, para una determinada posición del mismo, conocidas las derivadas temporales de las variables correspondientes a los grados de libertad en dicha posición.

Como se vio al tratar el problema de posición, las variables con las que se modeliza el mecanismo deben satisfacer unas ecuaciones de restricción, como indica la expresión (3.4). Si se deriva esta expresión respecto al tiempo, empleando la regla de derivación en cadena, se obtiene:

$$\Phi_q(q)\dot{q} = 0 \quad (3.14)$$

La matriz jacobiana es perfectamente conocida, puesto que ya se ha resuelto el problema de posición. Luego, el sistema de ecuaciones (3.14) es un sistema lineal con m ecuaciones y n incógnitas (las velocidades). Al igual que en el problema de posición, las velocidades de los grados de libertad son dato. Así pues, pasando al lado derecho de la ecuación las columnas del jacobiano correspondientes a los grados de libertad, multiplicada cada una por el debido valor de velocidad, se obtiene un sistema cuadrado de tamaño m .

3.5.4. Problema de aceleración

Este último problema consiste en determinar las derivadas temporales segundas (aceleraciones) de todas las variables del mecanismo, para una determinada posición del mismo y un cierto campo de velocidades, conocidas las derivadas temporales segundas de las variables correspondientes a los grados de libertad en dicha posición.

Derivando respecto al tiempo la expresión (3.14) que proporciona las velocidades se obtiene

$$\dot{\Phi}_q \dot{q} + \Phi_q \ddot{q} = 0, \quad (3.15)$$

que, reordenando, queda

$$\Phi_q \ddot{q} = -\dot{\Phi}_q \dot{q} \quad (3.16)$$

La matriz jacobiana sigue siendo la misma que en el problema de velocidades. El término de la derecha es función de las posiciones y velocidades, por lo que también es conocido. Tenemos, pues, un nuevo sistema lineal con m ecuaciones y n incógnitas (las aceleraciones). Al igual que en el problema de velocidades, pasando a la derecha de la expresión (3.16) las columnas del jacobiano relativas a los grados de libertad multiplicadas por su correspondiente aceleración, se obtiene un sistema cuadrado de tamaño m .

3.5.5. La simulación cinemática

Si introducimos la variable tiempo en el problema de los desplazamientos finitos, se obtendrá una verdadera simulación cinemática del movimiento del mecanismo. Variando la posición de los grados de libertad de acuerdo a una ley que es función del tiempo, se conocerán en cada instante las posiciones, velocidades y aceleraciones de todos los sólidos del mecanismo. Es decir, se obtendrá como resultado el movimiento del mismo.

Capítulo 4

Ejes y suspensión

Se llama suspensión al conjunto de elementos elásticos que se interponen entre el chasis de un vehículo y las ruedas y ejes. Su misión es absorber las reacciones que producen en las ruedas las irregularidades del terreno, asegurando el confort de los ocupantes del vehículo y, a su vez, manteniendo la estabilidad del mismo para que siga la trayectoria deseada por el conductor.

Cuando el vehículo circula por un terreno irregular, las ruedas están sometidas a una serie de impactos que se transmiten a la carrocería a través de los elementos de unión. Si el terreno es llano, las pequeñas irregularidades del mismo son absorbidas por la elasticidad de los neumáticos. Cuando las irregularidades son grandes, los impactos producidos sobre las ruedas se transmiten al chasis y se traducen en oscilaciones.

Se pueden presentar distintos tipos de oscilaciones (figura 4.1):

- De marcha: oscilaciones rectilíneas en sentido del eje longitudinal del vehículo.
- Transversal: oscilaciones rectilíneas en sentido del eje transversal.
- Vertical o de empuje: oscilaciones rectilíneas en sentido del eje vertical que se producen al pasar por un terreno ondulado.
- Balanceo: oscilaciones giratorias alrededor del eje longitudinal, que se pueden generar al tomar curvas a alta velocidad.
- Cabeceo: oscilaciones giratorias alrededor del eje transversal, generalmente debidas a frenadas y aceleraciones.
- Zigzag: oscilaciones giratorias alrededor del eje vertical.

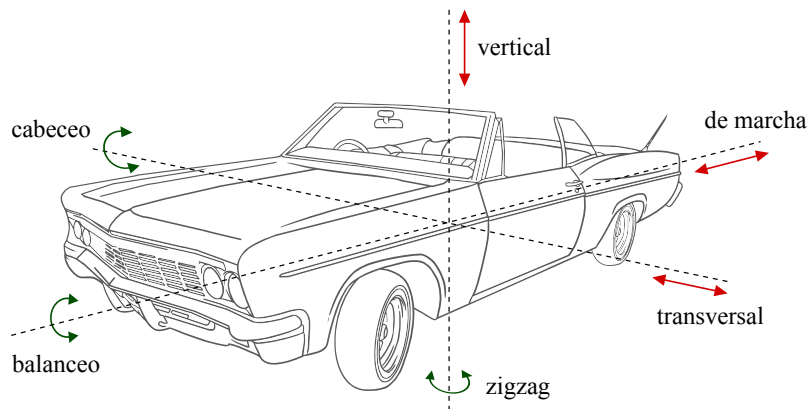


Figura 4.1: Tipos de oscilaciones presentes en un vehículo
(fuente del original: www.dragoart.com)

Los ejes fueron definidos inicialmente como un enlace lateral rígido entre dos ruedas que pudieran dirigirse juntas, asegurando un rodaje estable y simplificando el montaje al proporcionar una unión entre las ruedas y el cuerpo del vehículo. Esta definición es válida para todos los ejes rígidos y semirrígidos. Este tipo de ejes se mueven a la par que las ruedas, ya que éstas están unidas directamente a él. La conexión directa entre las ruedas y el eje desapareció con la introducción de los sistemas de suspensión independiente, los cuales se caracterizan por tener un soporte dirigitivo donde va montada la rueda. Este soporte forma parte de un mecanismo que conecta la rueda con el eje. Los nuevos componentes (el mecanismo de suspensión y el soporte de la rueda) son considerados una parte del montaje distinta al eje.

Las ruedas del sistema de suspensión trasero sólo tienen un grado de libertad (vertical) respecto al cuerpo del vehículo, con el fin de permitir movimientos de rebote y compresión. Las ruedas del sistema frontal de suspensión tienen un grado de libertad adicional (de rotación) alrededor del eje de giro que permite el cambio de dirección.

Puesto que los ejes rígidos y los sistemas independientes de suspensión son conceptos completamente distintos, no hay definiciones concretas para los términos *suspensión* y *eje*. Debido a que las características de cada tipo se solapan con las del otro, es difícil establecer una clasificación única y lógica. Un primer nivel de clasificación única se puede basar en las diferencias básicas entre los dos tipos de ejes:

- ejes rígidos (control de ruedas no independiente)
- sistemas de suspensión independiente (control de ruedas independiente)

Se puede definir un tercer tipo de eje, a medio camino entre los dos anteriores:

- ejes semirrígidos (sistemas de suspensión con barra de torsión)

En la tabla 4.1 se puede ver una comparación de las características principales de estos tres tipos de eje/suspensión.

Suspension Type	Dependent		Independent		
	Rigid	Semi-rigid	Planar	Spherical	Spatial (3D)
Configurability	-	0	0	+	++
Longitudinal Springing	-	-	0	+	++
Manufacturing Costs	+	+	0	-	--
Space Optimization	--	0	0	0	+
Total Weight	-	+	0	+	+
Durability	++	0	0	-	-
Handling	-	0	0	+	++
Ride Comfort	--	0	0	+	++

Tabla 4.1: Características principales de distintos tipos de suspensión

Como segundo nivel de clasificación se ha usado el comportamiento cinemático del sistema (movimiento plano, esférico o tridimensional).

Sin embargo, esta clasificación no es aplicable a todos los diseños de suspensión posibles. Resulta más significativo usar como segundo nivel de diferenciación el tipo de barras y uniones del sistema de suspensión. La tabla 4.2 muestra una clasificación basada en este criterio.

Joint Types	Rigid Axles		Semi-rigid	Independent Suspensions														
	Leaf Spring	Revolute / Pivotal Joints + Coil Springs	Revolute / Pivotal Joints	Revolute / Pivotal Joints		Revolute / Pivotal Joints			Rotational Sliding Joints + Revolute / Pivotal Joints									
# of Links	1	2	1	1	1	2	3	4	5	3	4							
Orientation	Longitudinal	Longitudinal	Semi-Trailing	Longitudinal	Longitudinal	Semi-Trailing	Lateral	Lateral	Spatial (3D)	Spatial (3D)	Lateral	Lateral	Spatial (3D)	Damper Struts				
Other Features	Leaf Spring Set	Parahand Rod Three-Point Links	Watt's Linkage	Parabolic Yoke Link Torsion Twist Beam Coupling Twist Beam Standard Twist Beam	Straight Links	Three-Point Links	Straight Links	Trapezoidal Links	Double Wishbone (SLA)	Decomposed (SLA)	Multi-Link	Three-Point Links	Spring Struts					
Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabla 4.2: Clasificación de ejes y sistemas de suspensión

Como tercer nivel de clasificación se ha empleado el número de barras. En los ejes rígidos este campo representa el número total de barras, mientras que en las suspensiones independientes representa el número de barras por rueda.

La orientación de las barras (longitudinal, lateral, diagonal, tridimensional) representa el cuarto nivel de clasificación. Los diferentes tipos de barras se han empleado como quinto y último nivel.

Atendiendo a esta clasificación, se pueden definir 18 tipos diferentes de ejes y sistemas de suspensión. En los siguientes apartados se describirán en detalle aquellos más importantes y cuyo uso está hoy más extendido. Se discutirán las ventajas e inconvenientes de cada uno y se mostrará su perfil de rendimiento mediante un diagrama de araña que muestra los principales criterios de evaluación.

4.1. Suspensión de eje rígido

Un eje rígido se define como una barra lateral que conecta de forma rígida una rueda a otra, de forma que el movimiento de una depende del movimiento de la otra. Los ejes rígidos eran inicialmente una adaptación de los ejes que se empleaban en los carros tirados por caballos. Hoy en día es relativamente raro su uso como eje delantero. Sólo se encuentran en una cantidad pequeña de coches y todoterrenos construidos para tener un máximo rendimiento fuera de carretera.

Su uso en ejes de propulsión trasera es más habitual, generalmente presente en vehículos pesados (todoterrenos, furgonetas, camiones ligeros) que no precisan de un gran confort.

Las propiedades de los ejes rígidos son las siguientes (figura 4.2):

- simplicidad, bajo coste, fácil integración del diferencial trasero dentro del cuerpo del eje (semiejes sin articulaciones),
- forma plana en su conjunto: superficie de carga amplia para ejes que no sean de propulsión,
- robustez, gran capacidad de carga
- centro de rodadura elevado,
- orientación idéntica de ambas ruedas durante recorridos de ruedas paralelas (ambas ruedas tienen la misma alineación e inclinación),
- son posibles grandes movimientos del eje (uso en todoterrenos),
- masa no suspendida elevada (el eje completo se mueve con las ruedas), para ejes de propulsión hasta dos veces mayor que la de los sistemas de

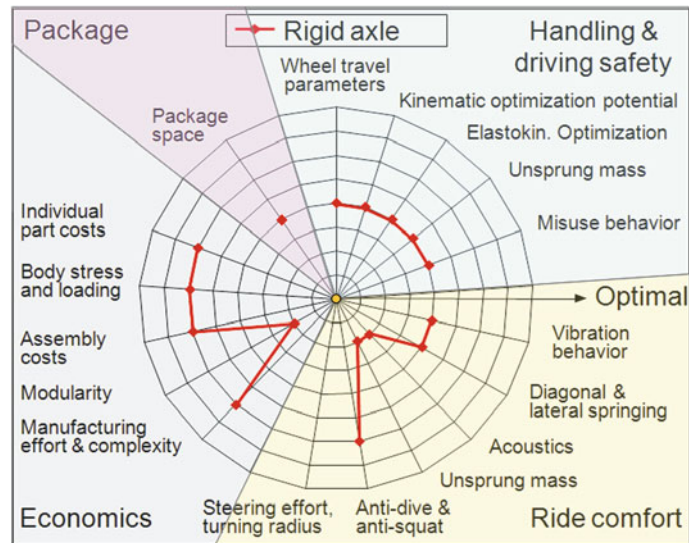


Figura 4.2: Perfil de rendimiento de los ejes rígidos

suspensión independiente,

- el movimiento de una rueda afecta al movimiento de la otra cuando una de ellas se ve sometida a irregularidades del terreno,
- la conexión lateral entre las ruedas (el eje) es sólida, voluminosa y se puede mover respecto al cuerpo del vehículo.

En comparación con un eje rígido de propulsión, un eje de arrastre generalmente cuenta con menos masa no suspendida debido a la ausencia de un diferencial y de semiejes.

4.1.1. Eje De Dion

En 1894, el marqués Albert de Dion ideó y patentó un diseño para reducir el peso no suspendido del eje trasero de propulsión. Esto se consigue montando la unidad propulsora (el diferencial y los semiejes) en el cuerpo del coche, en lugar de en el eje. De esta forma se convierten en masa suspendida. El eje De Dion (también llamado puente o tubo) es una traviesa rígida que une las dos ruedas y suele tener forma de U para evitar el diferencial. La ventaja de este sistema es que consigue mantener los parámetros de las ruedas constantes gracias al puente rígido, y además disminuye la masa no suspendida. Puede verse un ejemplo en la figura 4.3.

Este tipo de suspensión se utilizó durante muchos años en coches deportivos,

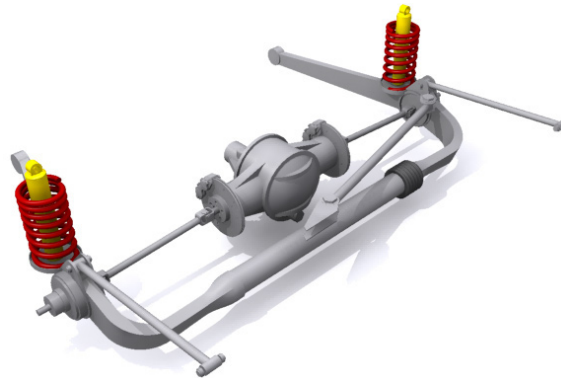


Figura 4.3: Suspensión De Dion (fuente: carbibles.com)

pero fue abandonado con el auge de los sistemas de suspensión independiente. En 1996, Mercedes recuperó esta suspensión para su modelo Smart.

4.1.2. Suspensión de ballesta

Muchos ejes rígidos incorporan una ballestas longitudinales (figura 4.4). Las ballestas se componen de unas láminas de acero flexibles, llamadas hojas, cuya longitud es siempre diferente respecto a las contiguas (normalmente van de mayor a menor) que se mantienen unidas mediante un tornillo que las atraviesa por un orificio central común. La hoja más larga, llamada maestra, es la que se une al bastidor. En la imagen se pueden observar unas bridas que ayudan a mantener las hojas alineadas.

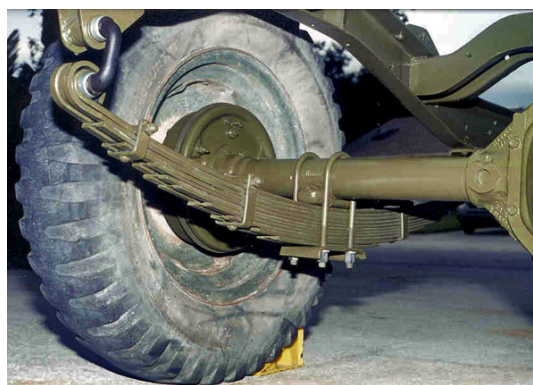


Figura 4.4: Vehículo pesado con suspensión de ballestas (fuente: Wikipedia)

Las ventajas que ofrece son el reducido volumen que ocupa y su forma plana. Entre sus desventajas se encuentran el aumento de peso y de la fricción, la

tendencia de las ballestas a doblarse en forma de S al acelerar o frenar, y la compresión y saltos de las ruedas que se producen con los cambios de carga. En consecuencia, el sistema de ballestas no es válido para los requisitos de confort que hoy en día necesita un vehículo de pasajeros.

Se utiliza sobretodo en furgonetas y otros vehículos de transporte cuyos ejes han de soportar cargas mucho mayores que los vehículos de pasajeros en los que están basados (figura 4.5). Este tipo ejes no necesitan brazos de suspensión y son, por tanto, la solución más económica y simple para ejes de arrastre.

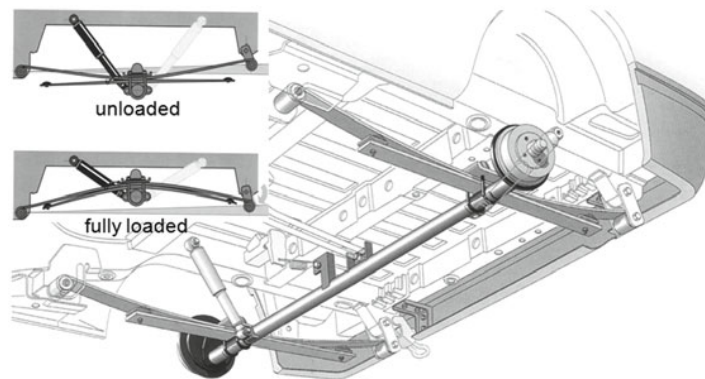


Figura 4.5: Eje trasero con ballestas en un vehículo comercial ligero (VW Caddy II, 1994)

4.2. Suspensión de eje semirrígido

Un eje semirrigido proporciona una unión mecánica entre las dos ruedas, parecido a un eje rígido. El eje rígido, sin embargo, impide cualquier movimiento relativo entre las ruedas, mientras que el semirrigido cuenta con un elemento central elásticamente deformable que permite un cierto rango de movimiento relativo entre las ruedas.

4.2.1. Eje de torsión

EL comportamiento de los ejes de torsión (figura 4.6) combina algunas propiedades del eje rígido con otras de los sistemas de suspensión independiente. Los soportes de las ruedas están unidos rígidamente a dos brazos longitudinales unidos por un travesaño que suele tener forma de U. El travesaño es

capaz de deformarse un cierto ángulo cuando una de las ruedas encuentra un obstáculo, para después regresar a su posición inicial, dando estabilidad al vehículo.



Figura 4.6: Eje trasero con barra de torsión (Toyota Auris)

Las ventajas del eje de torsión son (figura 4.7):

- construcción sencilla: un componente principal (la barra soldada con forma de U),
- volumen pequeño y plano en conjunto,
- montaje y desmontaje sencillos
- el travesaño funciona como estabilizador,
- la masa conectada a cada rueda es mínima,
- buenas propiedades anti-lift y anti-squat,
- cambios mínimos en la separación de las dos ruedas.

Las desventajas de este sistema son:

- se concentra la tensión en los puntos de conexión entre los subcomponentes rígidos y los elásticos (riesgo de grietas en la soldadura),
- poca resistencia a fuerzas laterales (rigidez lateral baja),
- no es adecuado para ejes de tracción/propulsión,
- no es adecuado para ejes que deban soportar mucha carga, debido a las soldaduras,
- ofrece pocas posibilidades de optimización en cuanto a confort y acústica.

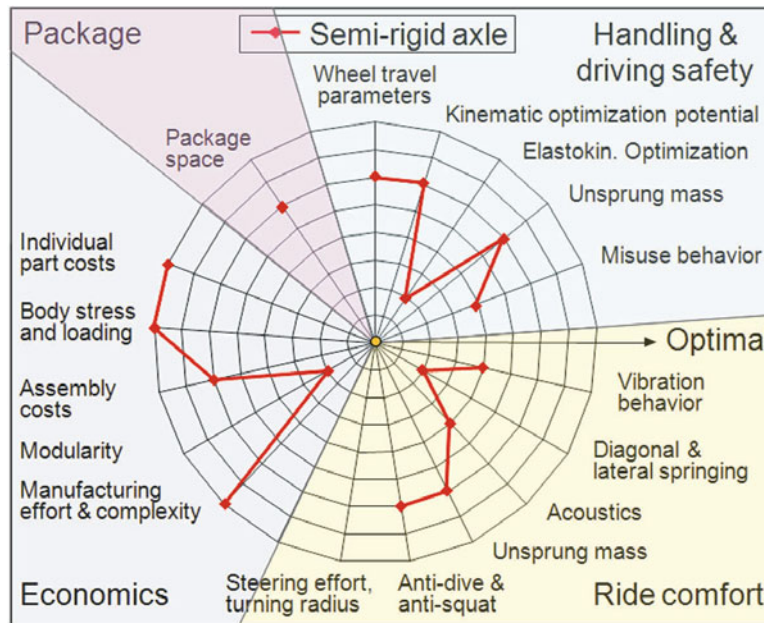


Figura 4.7: Perfil de rendimiento de los ejes semirrígidos

4.3. Suspensión independiente

Antes de describir los sistemas más comunes de suspensión independiente, la siguiente subsección ofrece información básica sobre su cinemática y modelado.

4.3.1. Cinemática de la suspensión independiente

Todo sistema de suspensión independiente está formado por un acoplamiento mecánico o mecanismo (un conjunto de articulaciones y elementos rígidos) que conectan el cuerpo del vehículo con el soporte de la rueda por medio de uniones intermedias.

Los elementos o barras individuales del mecanismo se conectan unas a otras a través de uniones o pares, ubicados normalmente en los extremos de las barras. El tipo de unión determina la libertad de movimiento de los elementos que une. Los grados de libertad de una barra puede ir de 1 a 5. La rueda se conecta al soporte mediante un par de revolución (el rodamiento de la rueda). Este grado de libertad de rotación forma parte de todos los sistemas de suspensión, por lo que no se tendrá en cuenta de ahora en adelante.

Un sistema de suspensión independiente debe permitir al soporte de la rueda moverse en dirección vertical respecto al cuerpo del vehículo. Este grado de libertad permite que la rueda siga el perfil de la superficie de la carretera en la dirección del eje z . El movimiento vertical de la rueda aísla el cuerpo del vehículo de las vibraciones y oscilaciones causadas por las irregularidades en la superficie de la carretera. Este movimiento es soportado por el conjunto formado por el muelle y el amortiguador. En el análisis que sigue no se tendrá en cuenta el grado de libertad necesario para el movimiento de dirección. Se asume, pues, que los soportes de las ruedas delanteras y traseras tienen sólo un grado de libertad, es decir, las barras de la suspensión deben eliminar cinco de los seis grados de libertad que inicialmente poseen.

El número de barras o brazos necesarios para controlar el movimiento de la rueda depende de las propiedades cinemáticas de los distintos tipos de brazos usados en el sistema de suspensión (figura 4.8).

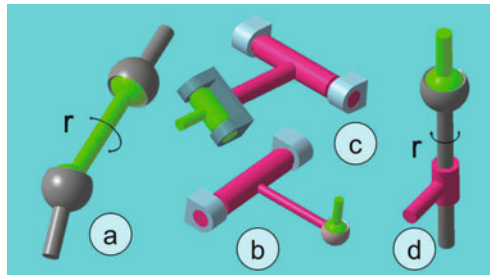


Figura 4.8: Tipos de barras o brazos

El tipo de brazo más simple es el brazo de dos puntos (figura 4.8a). Cada brazo de dos puntos reduce el número de grados de libertad del soporte de la rueda en uno. Si se conecta el soporte al cuerpo del vehículo por medio de cinco brazos de este tipo, le queda un solo grado de libertad para el movimiento de compresión y rebote. Esta configuración se conoce como suspensión de cinco brazos.

Se pueden eliminar dos grados de libertad empleando un brazo de tres puntos (o doble horquilla) (figura 4.8b) con una sola unión al soporte de la rueda y dos uniones al cuerpo del vehículo. Si se usa un brazo de tres puntos y tres de dos puntos, se obtiene un sistema de suspensión de cuatro brazos (figura 4.9).

Empleando dos brazos de doble horquilla, sólo es necesario un brazo más de dos puntos para anular los cinco grados de libertad. Esta configuración se conoce como sistema de suspensión de doble trapecio.¹

¹También denominado suspensión de doble horquilla

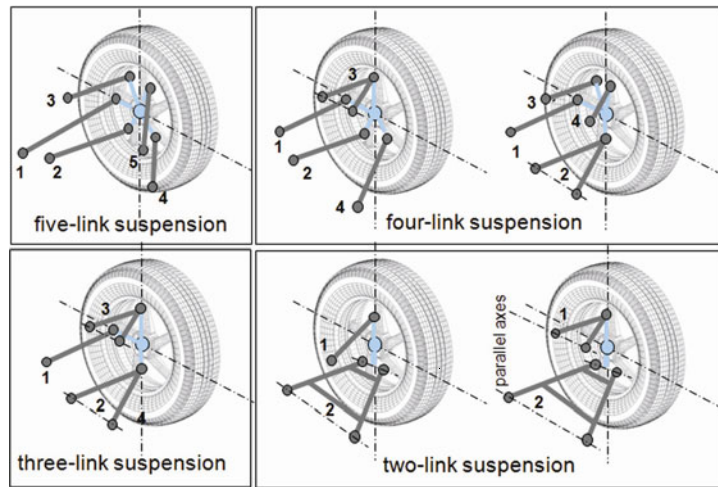


Figura 4.9: Sistemas de suspensión independiente con 5, 4, 3 y 2 brazos

Un brazo de cuatro puntos (figura 4.8c) se puede usar para eliminar cuatro grados de libertad. Si se le añade un brazo de dos puntos, la rueda tendrá un solo grado de libertad. Esta configuración es conocida como sistema de suspensión de dos brazos.

También es posible configurar un sistema de suspensión de un brazo. Esto se consigue uniendo los soportes de las ruedas traseras directamente con el cuerpo del vehículo usando articulaciones giratorias. Cada soporte tiene un único grado de libertad de rotación, cuyo desplazamiento dependerá de la localización y orientación de la articulación (figura 4.10).

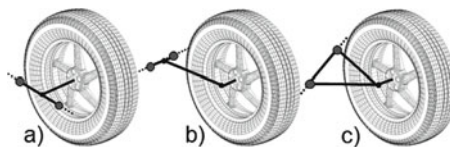


Figura 4.10: Variantes de orientación en la suspensión independiente de un brazo: a) lateral, b) longitudinal y c) diagonal

Otro tipo de unión es el par de rotación deslizante. Un ejemplo de este tipo de uniones es un amortiguador, cuya varilla del pistón puede rotar y moverse libremente con respecto a la carcasa del amortiguador (figura 4.8d). Se pueden eliminar dos grados de libertad montando la carcasa del amortiguador sobre el soporte de la rueda y fijando la varilla del pistón al cuerpo del vehículo. Esta configuración se conoce como suspensión McPherson. Es necesario añadir tres brazos de dos puntos (o uno de tres puntos y uno de dos puntos) para eliminar los tres grados de libertad restantes.

4.3.2. Ventajas de la suspensión independiente

El porcentaje de vehículos que cuentan con un sistema de suspensión independiente no para de crecer. Esto es debido a las siguientes ventajas generales de estos sistemas:

- masa no suspendida reducida,
- el movimiento de una rueda no afecta al movimiento de la otra cuando sólo una de ellas se ve sometida a irregularidades de terreno,
- amplia libertad a la hora de configurar la cinemática y la eslatocinemática,
- aislamiento simple de las vibraciones de la carretera y del ruido.

Entre las desventajas de los sistemas de suspensión independiente se incluyen:

- la articulación y distancia al suelo de los ejes están limitados (esto limita las capacidades del vehículo fuera de carretera),
- para equilibrar el peso sobre las ruedas cuando se toman curvas es necesaria una barra estabilizadora,
- no son tan robustos como los ejes rígidos.

En las siguientes secciones se detallan las características de los dos sistemas de suspensión independiente que más uso tienen.

4.3.3. Suspensión independiente de doble trapecio

Es un tipo de suspensión independiente de tres brazos. Se caracteriza por tener la rueda suspendida de dos brazos, uno de ellos por encima del centro de la rueda y el otro por debajo, con el objeto soportar todas las fuerzas y momentos que actúan sobre ella (figura 4.11). Es necesario un tercer brazo que controle la dirección.

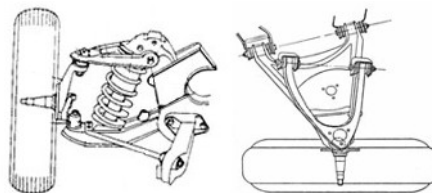


Figura 4.11: Suspensión de doble trapecio (SLA)

Las barras se colocan de forma transversal, con un extremo unido al cuerpo del vehículo mediante pivotes o pares de revolución y por el otro a la mangueta mediante pares esféricos que permiten la orientación de la rueda.

Es ventajoso que la barra superior sea más corta que la inferior. A este sistema de suspensión se le conoce como suspensión SLA (del inglés: *short/long arm*). Con esta configuración se reduce la combadura y la posible separación entre las ruedas del eje durante el viaje. Además, que la barra superior sea más corta también es beneficioso para que la suspensión no interfiera con el compartimento del motor o el maletero. Puede verse un ejemplo real en la figura 4.12.

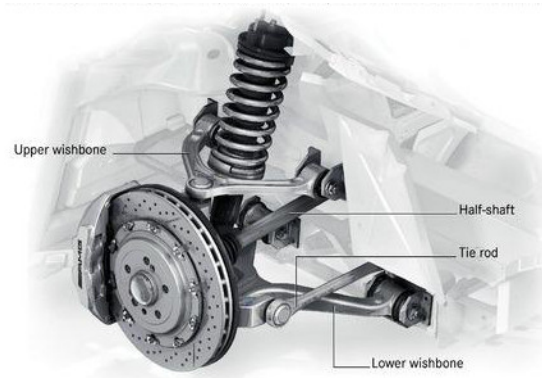


Figura 4.12: Suspensión SLA (Mercedes-Benz SLS AMG, 2012)

Las fuerzas del conjunto muelle/amortiguador se aplican directamente sobre los brazos. Esto produce grandes momentos de flexión, lo que requiere brazos más pesados y caros. Aunque puede ir anclado a cualquiera de los dos trapecios, es preferible que esté unido al inferior.

Eligiendo distintas configuraciones de longitud y posición de los brazos se pueden conseguir distintas geometrías de suspensión de forma que se puede variar la estabilidad y dirección según el diseño y las preferencias.

El perfil de rendimiento de la suspensión de doble trapecio puede verse en la figura 4.13. Las ventajas del doble trapecio son:

- gran libertad de diseño: el centro de balanceo y el eje de cabeceo pueden elegirse libremente, se pueden limitar los cambios en la separación de las ruedas,
- alta rigidez ante fuerzas transversales,
- buena conducción y manejo.

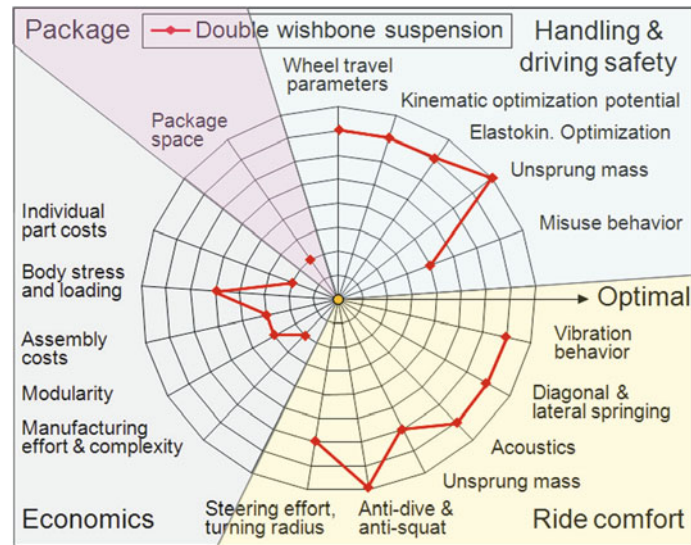


Figura 4.13: Perfil de rendimiento de los sistemas de suspensión de doble trapecio

Sus desventajas son:

- alto coste de fabricación,
- ocupa un gran volumen (es especialmente problemático en el plano del trapecio superior),
- las fuerzas aplicadas sobre la parte del chasis son tan fuertes que es preciso usar un bastidor auxiliar.

4.3.4. Suspensión Multibrazo o *Multi-Link*

La sofisticación de la suspensión de doble trapecio dio lugar a sistemas con más de tres barras llamados sistemas de suspensión multibrazo. Muchos de estos sistemas parten de uno de doble trapecio en el que se ha sustituido uno (o ambos) trapecios por dos brazos de dos puntos. La descomposición de este brazo en dos distintos ofrece a los diseñadores amplia libertad para ajustar y sintonizar los distintos parámetros de la suspensión.

Además, en los ejes traseros, que carecen de sistema de dirección, puede ser de utilidad conectar uno de estos nuevos brazos orientado longitudinalmente. Este brazo puede ser unido de forma rígida al soporte de la rueda siempre que cuente con una cierta elasticidad para compensar los movimientos de la suspensión.

Aunque la gran variedad de configuraciones existentes hace imposible determinar un rendimiento específico para todas las suspensiones multibrazo, se puede ver un perfil general en la figura 4.14.

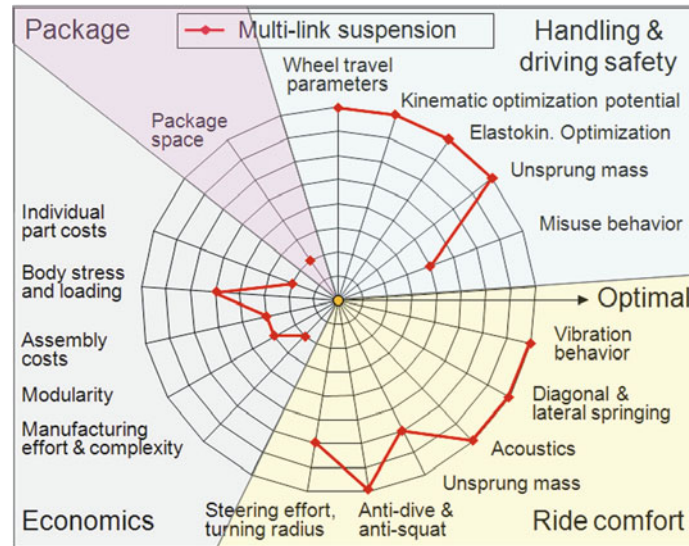


Figura 4.14: Perfil de rendimiento de los sistemas de suspensión multibrazo

A continuación se muestran algunos ejemplos de suspensión multibrazo.



Figura 4.15: Suspensión delantera de 5 brazos y trasera tropezoidal de propulsión (Audi A4, 2010)

4.3.5. Suspensión McPherson

El sistema de suspensión McPherson emplea un tipo de unión distinta a las anteriores. Esta unión, de deslizamiento rotacional (normalmente un amortiguador) permite, simultáneamente, movimientos de rotación y traslación a la vez que actúa como amortiguador vertical. El cilindro del amortiguador

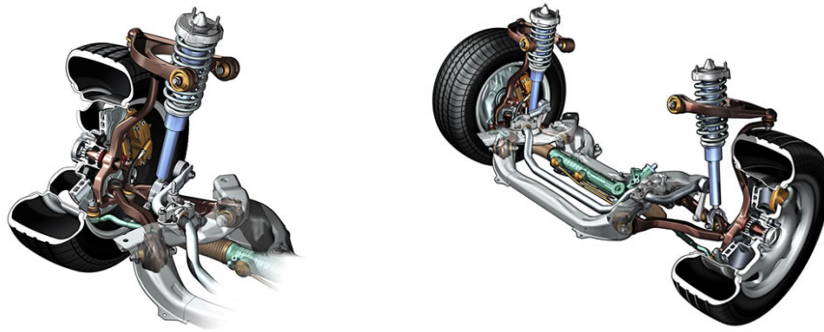


Figura 4.16: Suspensión delantera de 4 brazos (Mercedes-Benz Clase E W211, 2009)

se conecta rígidamente al soporte de la rueda, y la barra del pistón se une al cuerpo del vehículo pero con libertad para rotar. Este tipo de suspensión transmite de forma directa las oscilaciones desde el asfalto hasta el chasis, con lo que es imprescindible que el subchasis sea más resistente en los puntos donde se fija los amortiguadores.

Este sistema de suspensión se utiliza mucho debido a su diseño simple y compacto. Se puede encontrar tanto en coches como en camiones ligeros. Aunque puede montarse en los dos ejes, es más habitual en el delantero.

El tipo de suspensión McPherson más habitual es la conocida como suspensión coilover. Se caracteriza por montar el muelle espiral exteriormente al amortiguador, sujetando un extremo a cada lado del mismo. Con ello, se consigue una suspensión fácilmente ajustable y muy compacta.

Para que una suspensión McPherson esté completa, necesita tres brazos de dos puntos adicionales. Uno de ellos se coloca a la altura del centro de la rueda, y se encarga de controlar la dirección. Los otros dos se colocan en el plano inferior de la suspensión para controlar el movimiento de la rueda (brazo de control). Cuando se monta en el eje trasero es necesario que uno de estos tres brazos se coloque de forma longitudinal, con el fin de soportar las fuerzas longitudinales o de marcha.

Se puede ver un ejemplo en el eje delantero de la figura 4.17.

El rendimiento de la suspensión McPherson puede verse en la figura 4.18.

Las ventajas de este sistema de suspensión son:

- los componentes de amortiguación y control se combinan en una sola unidad,

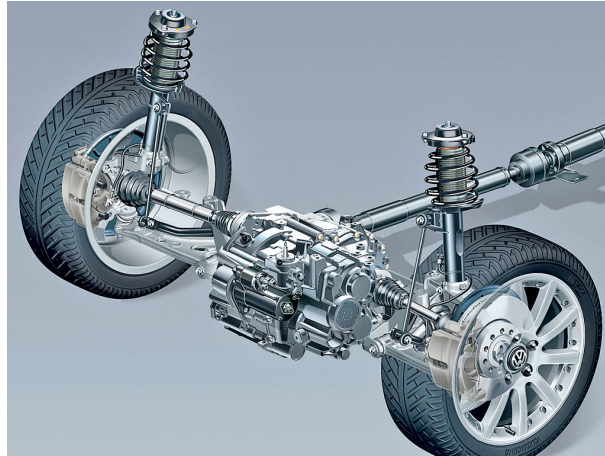


Figura 4.17: Suspensión delantera McPherson (VW Golf)

- forma estrecha del conjunto,
- muy barato y ligero.

Entre sus desventajas se encuentran:

- la cinemática del eje delantero es peor que con un sistema de doble trapecio,
- se aplica mucha carga al cuerpo del vehículo a través del montaje superior,
- cuesta aislar el ruido de la carretera,
- la fricción de la barra del pistón genera oscilaciones de alta frecuencia y desgaste.

4.4. Suspensión según el tipo de eje

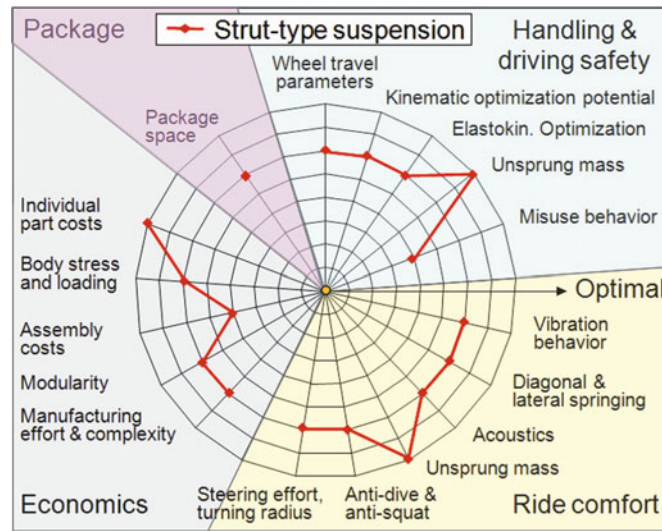


Figura 4.18: Perfil de rendimiento de los sistemas de suspensión McPherson

4.4. Suspensión según el tipo de eje

Los sistemas de suspensión para los ejes delantero y trasero tienen requisitos y condiciones muy distintos. Es por ello que el diseño usado en cada uno de ellos también difiere.

En el caso del eje delantero, en el 78 % de los vehículos fabricados en todo el mundo en 2005 se usó una suspensión McPherson, seguida por la de doble trapecio (20 %). La primera se utiliza en la mayoría de los vehículos con tracción delantera (el 90 % de éstos), mientras que la de doble trapecio está más presente en los de propulsión trasera (53 % frente al 39 % que emplearon una McPherson). Pueden verse en más detalle estos datos en la figura 4.19.

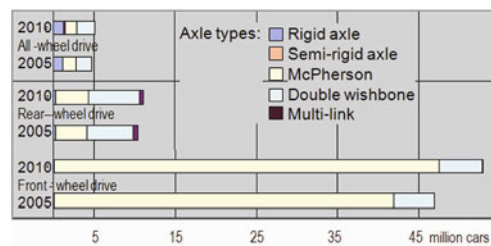


Figura 4.19: Tipos de eje delantero empleados en 2005 y 2010

En el caso del eje trasero, la variedad es mayor. En el año 2005 había seis tipos distintos de ejes presentes. Los más utilizados son los ejes semirrígidos

4.4. Suspensión según el tipo de eje

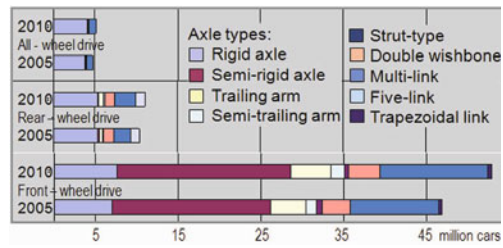


Figura 4.20: Tipos de eje trasero empleados en 2005 y 2010

(26 %), seguidos por los ejes rígidos y multibrazo (23 % cada uno). Se pueden ver los datos completos en la figura 4.20.

Parte II

Desarrollo práctico

Capítulo 5

Suspensión de un vehículo eléctrico ligero

A lo largo de este capítulo se detalla el modelado de un sistema de suspensión independiente para el eje delantero del vehículo eléctrico de la figura 5.1. Este vehículo se está desarrollando dentro de un proyecto de investigación llevado a cabo conjuntamente por varios departamentos de la Universitat Politècnica de València.¹

El objetivo de este capítulo es poder realizar una simulación cinemática que permita prever el comportamiento real de la suspensión delantera.

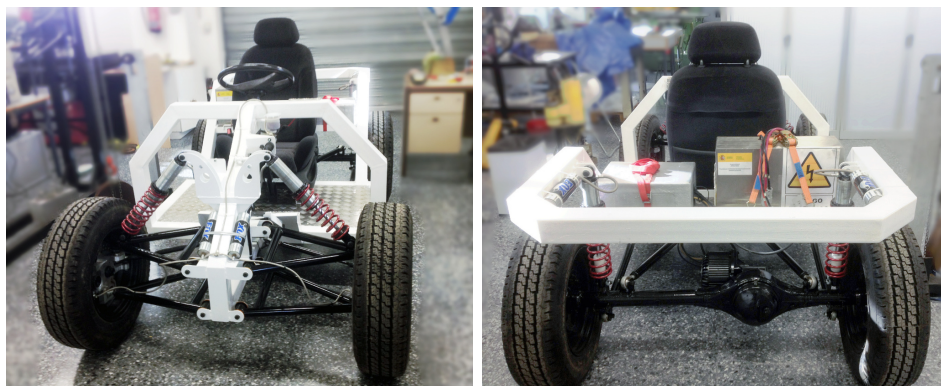


Figura 5.1: Vista del eje delantero y trasero del vehículo eléctrico

¹Proyecto IDEMOV – IDECONA

5.1. Modelo de suspensión delantera

Para la suspensión del eje delantero del vehículo se ha diseñado un sistema de suspensión de doble trapecio como el de la siguiente imagen.

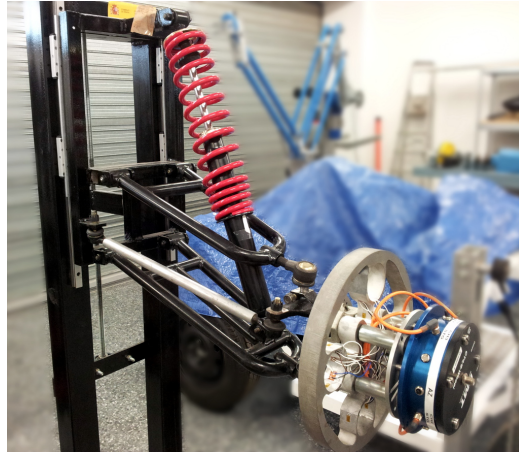


Figura 5.2: Prototipo de suspensión de doble trapecio utilizada para el modelado

Hay una ligera diferencia entre la suspensión que se va a modelar y la del vehículo final, que puede apreciarse en la vista frontal del coche. Mientras que en la suspensión del vehículo el amortiguador se ha fijado al trapecio superior, en el modelo de la figura 5.2 va unido al trapecio inferior. Sin embargo, esto no influirá en la modelización y simulación.

En el resto de la sección se detallan el esquema del mecanismo del eje delantero, la numeración de las barras y la designación de nudos, los tipos de pares cinemáticos y, por último, la asignación de sistemas de referencia y dimensiones a cada barra.

5.1.1. Numeración de barras y designación de nudos

La figura 5.3 representa el modelo del mecanismo de una sola rueda. Las letras hacen referencia a los nudos, los números indican el número de barra, y los valores l_i son las dimensiones de las mismas.

Las barras 1 y 2 son los trapecios inferior y superior, respectivamente. La barra 3 es la mangueta. La barra 4 es el brazo de unión a la barra de dirección. La barra 5 es la rueda. Las barras 6 y 7 modelizan el conjunto

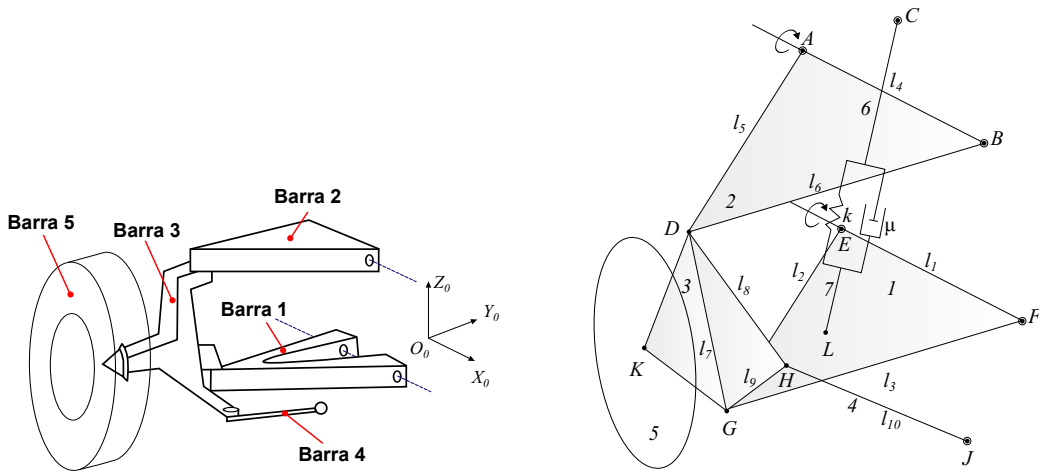


Figura 5.3: Numeración de barras y designación de nudos

amortiguador/suspensión. El símbolo \odot representa punto de anclaje al chasis del vehículo.

5.1.2. Pares cinemáticos

La figura 5.4 muestra el modelo completo del eje delantero indicando, para cada nudo, el tipo de par cinemático².

Tenemos un total de 15 barras. El significado de las barras 9-15 es análogo al de las barras 1-7 descrito en el apartado anterior. Nótese que se ha añadido una nueva, la número 8, correspondiente a la barra de dirección.

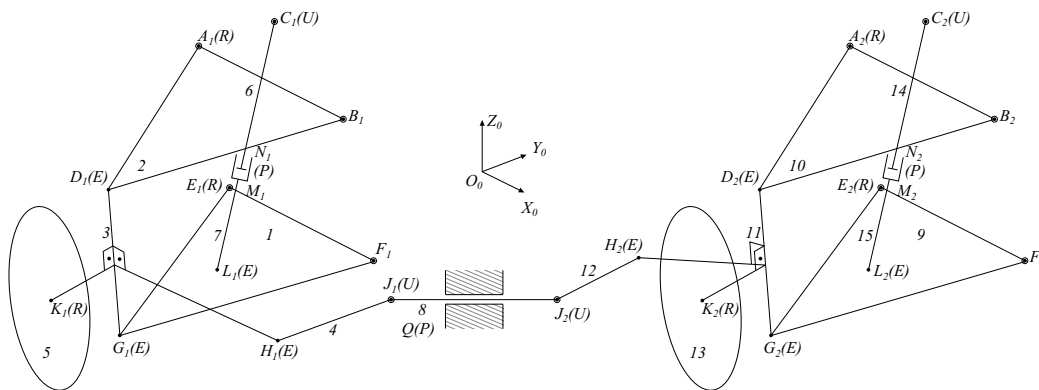


Figura 5.4: Barras, nudos y pares cinemáticos del eje delantero

²R: de revolución, P: prismático, U: universal, E: esférico.

5.1.3. Asignación de sistemas de referencia y dimensiones de las barras

Barras 1 y 9

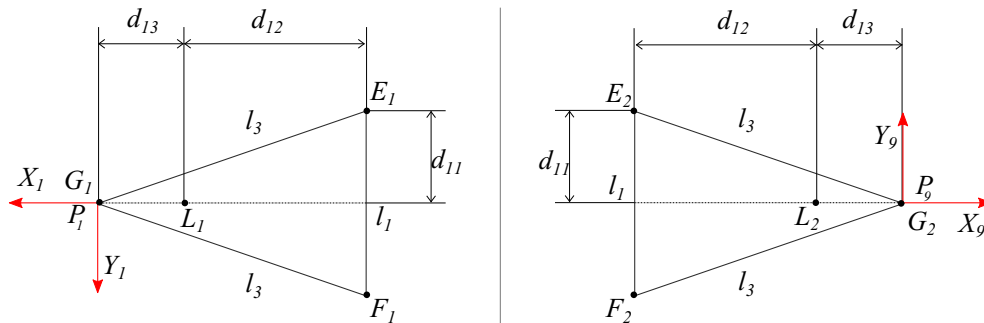


Figura 5.5: Sistemas de referencia de las barras 1 y 9

Dimensiones:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= 400 \text{ mm} & d_{11} &= 199,9999 \text{ mm} \\
 l_2 &= 377 \text{ mm} & d_{12} &= 319,5763 \text{ mm} \\
 l_3 &= 377 \text{ mm} & d_{13} &= 82 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Barras 2 y 10

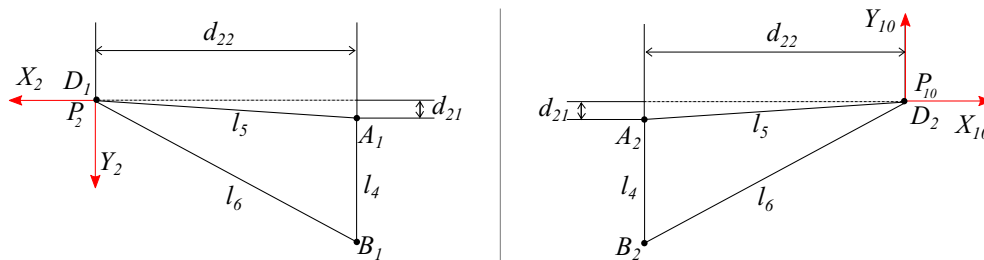


Figura 5.6: Sistemas de referencia de las barras 2 y 10

Dimensiones:

$$\begin{aligned}
 l_4 &= 150 \text{ mm} & d_{21} &= 59,0900 \text{ mm} \\
 l_5 &= 257 \text{ mm} & d_{22} &= 250,1147 \text{ mm} \\
 l_6 &= 326 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Barras 3 y 11

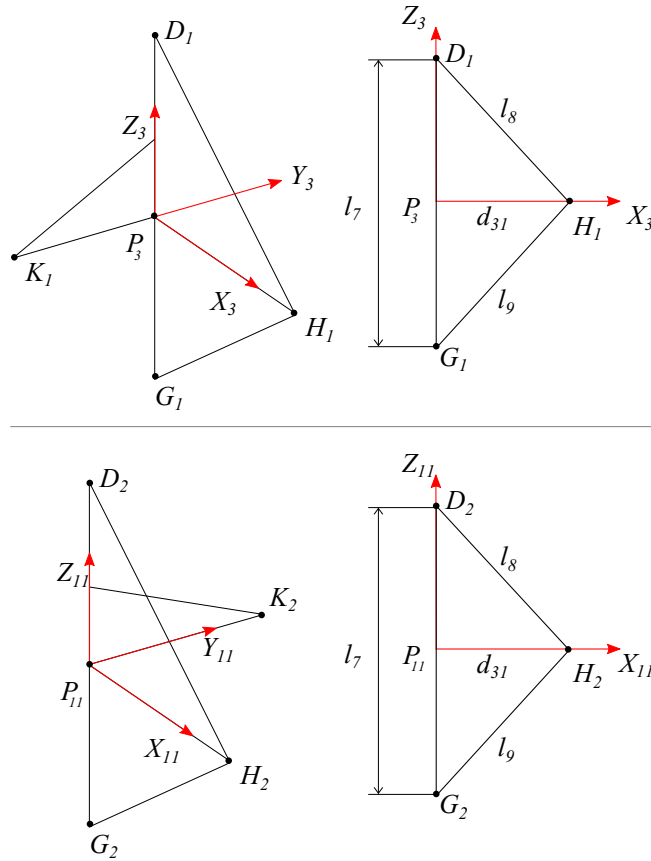


Figura 5.7: Sistemas de referencia de las barras 3 y 11

Dimensiones:

$$l_7 = 427 \text{ mm}$$

$$d_{31} = 59,0900 \text{ mm}$$

$$l_8 = 250 \text{ mm}$$

$${}^3\vec{r}_{D_1K_1} = [-16,8176 \quad -18,0308 \quad -228,4956]^T \text{ mm}$$

$$l_9 = 250 \text{ mm}$$

$${}^{11}\vec{r}_{D_2K_2} = [-16,8176 \quad 18,0308 \quad -228,4956]^T \text{ mm}$$

Barras 4, 8 y 12

Dimensiones:

$$l_{10} = 319 \text{ mm}$$

$$l_{11} = 400 \text{ mm}$$

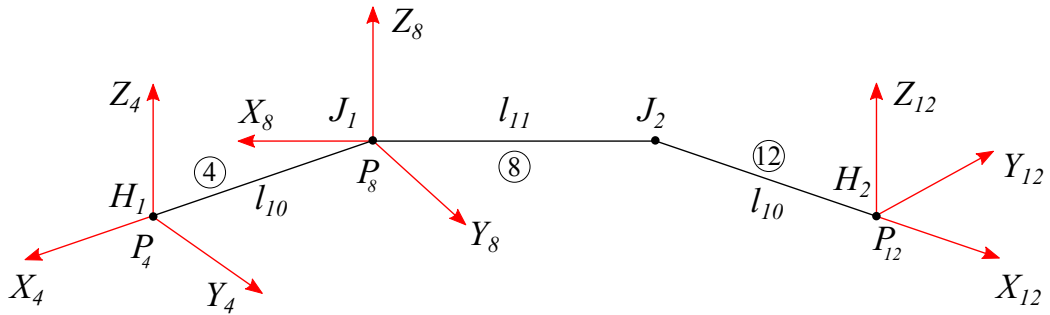


Figura 5.8: Sistemas de referencia de las barras 4, 8 y 12

Barras 5 y 13

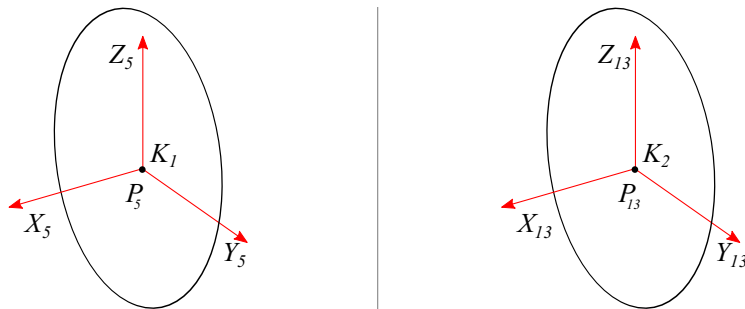


Figura 5.9: Sistemas de referencia de las barras 5 y 13

Las barras 5 y 13, correspondientes a las ruedas, no aportan dimensiones geométricas al problema.

Barras 6-7 y 14-15

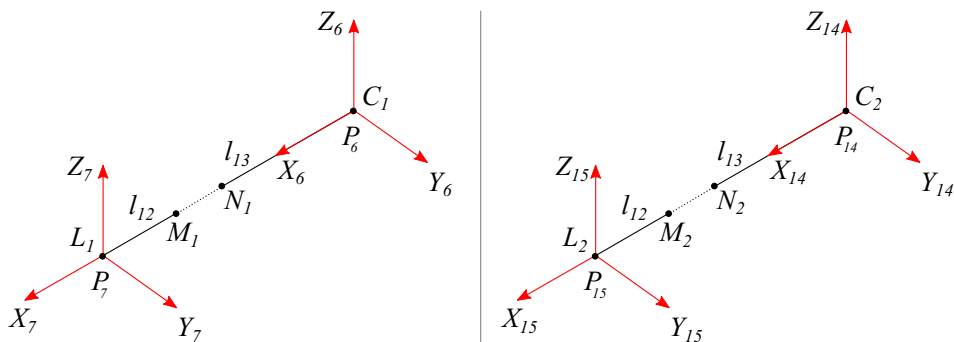


Figura 5.10: Sistemas de referencia de las barras 6-7 y 14-15

Estas barras, pertenecientes al conjunto amortiguador/suspensión, tampoco aportan dimensiones al problema. Además, l_{12} y l_{13} son variables y no aparecerán en la formulación.

5.1.4. Puntos de anclaje

Las coordenadas de los puntos de anclaje de la figura 5.4 respecto al sistema fijo sobre el chasis son:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= [367 \quad -250 \quad 555]^T \text{ mm} & A_2 &= [367 \quad 250 \quad 555]^T \text{ mm} \\
 B_1 &= [517 \quad -250 \quad 555]^T \text{ mm} & B_2 &= [517 \quad 250 \quad 555]^T \text{ mm} \\
 C_1 &= [307 \quad -300 \quad 680]^T \text{ mm} & C_2 &= [307 \quad 300 \quad 680]^T \text{ mm} \\
 E_1 &= [67 \quad -200 \quad 180]^T \text{ mm} & E_2 &= [67 \quad 200 \quad 180]^T \text{ mm} \\
 F_1 &= [467 \quad -200 \quad 180]^T \text{ mm} & F_2 &= [467 \quad 200 \quad 180]^T \text{ mm} \\
 J_1 &= [467 \quad -200 \quad 33]^T \text{ mm} & J_2 &= [467 \quad 200 \quad 33]^T \text{ mm}
 \end{aligned}$$

5.1.5. Determinación de grados de libertad

Una vez identificadas todas las barras y pares cinemáticos que componen el mecanismo, se debe determinar el número de grados de libertad que tiene. Para ello, emplearemos el Criterio de Grübler-Kutzback que se describió en la sección 3.3.

En la tabla 5.1 aparece el número de pares de cada clase que hay en el mecanismo.

<i>Tipo de par</i>	<i>Cantidad</i>	<i>Clase</i>
De revolución	6	Clase I
Prismático	3	
Universal	4	Clase II
Esférico	8	Clase III

Tabla 5.1: Número de pares de cada tipo y clase a la que pertenecen

Aplicando la fórmula (3.2) se tiene que

$$M = 6 \cdot 15 - 5 \cdot (6 + 3) - 4 \cdot 4 - 3 \cdot 8 = 5, \quad (5.1)$$

es decir, el mecanismo posee cinco grados de libertad de movimiento.

Las coordenadas independientes del mecanismo asociadas a los grados de libertad están distribuidas de la siguiente forma: dos en la suspensión derecha, dos en la suspensión izquierda y una en la barra de dirección. En concreto son:

- z_7 : altura del punto L_1 (trapezio inferior derecho),
- ϕ_5 : rotación de la barra 5 (rueda derecha) alrededor del eje X_5 ,
- y_8 : coordenada y de la barra de dirección,
- z_{15} : altura del punto L_2 (trapezio inferior izquierdo),
- ϕ_{13} : rotación de la barra 13 (rueda izquierda) alrededor del eje X_{13} .

5.2. Resolución del problema cinemático

El objetivo de esta sección es poder realizar una simulación cinemática del movimiento que describe el mecanismo a lo largo del tiempo.

Vamos a determinar el número de coordenadas dependientes presentes en el problema. Se tiene un total de quince barras, cada una con seis coordenadas, tres de posición y tres de orientación $(x, y, z, \phi, \theta, \psi)$. Puesto que hay cinco coordenadas independientes, habrá un total de $15 \cdot 6 - 5 = 85$ coordenadas dependientes. Por tanto, habrá que definir 85 ecuaciones de restricción.

5.2.1. Ecuaciones de restricción

En este apartado se detallan las ecuaciones de restricción en cada par cinemático. Para las matrices de rotación se ha empleado la convención de ángulos de Euler ZYX ($Rot_{zyx} = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$), excepto para las barras correspondientes a las ruedas y a la dirección en las que se aplica el criterio XYZ ($Rot_{xyz} = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi)$).

Las ecuaciones de restricción correspondientes a la suspensión derecha son las siguientes.

Par R en E₁ (barra 1 ↔ chasis)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0E_1} = {}^0\vec{r}_{O_0P_1} + {}^0R_1 \cdot {}^1\vec{r}_{P_1E_1}} \quad (5.2)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{r}_{O_0P_1} &= [x_1 \quad y_1 \quad z_1]^T \\ {}^1\vec{r}_{P_1E_1} &= [-d_{12} \quad -d_{11} \quad 0]^T \\ {}^0R_1 &= Rot_{zyx}(\phi_1, \theta_1, \psi_1) \end{aligned}$$

- Eje común

$$\boxed{{}^0\vec{u}_{E_1F_1} \times {}^0R_1 \cdot {}^1\vec{u}_{E_1F_1} = 0} \quad (5.3)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{u}_{E_1F_1} &= \frac{{}^0\vec{r}_{E_1F_1}}{|{}^0\vec{r}_{E_1F_1}|} = [0,9999 \quad 0 \quad 0,0124]^T \\ {}^0\vec{r}_{E_1F_1} &= {}^0\vec{r}_{O_0F_1} - {}^0\vec{r}_{O_0E_1} \\ {}^1\vec{u}_{E_1F_1} &= [0 \quad 1 \quad 0]^T \end{aligned}$$

Par R en A₁ (barra 2 ↔ chasis)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0A_1} = {}^0\vec{r}_{O_0P_2} + {}^0R_2 \cdot {}^2\vec{r}_{P_2A_1}} \quad (5.4)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{r}_{O_0P_2} &= [x_2 \quad y_2 \quad z_2]^T \\ {}^2\vec{r}_{P_2A_1} &= [-d_{22} \quad d_{21} \quad 0]^T \\ {}^0R_2 &= Rot_{zyx}(\phi_2, \theta_2, \psi_2) \end{aligned}$$

- Eje común

$$\boxed{{}^0\vec{u}_{A_1B_1} \times {}^0R_2 \cdot {}^2\vec{u}_{A_1B_1} = 0} \quad (5.5)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{u}_{A_1B_1} \parallel {}^0\vec{u}_{E_1F_1} &= [0,9999 \quad 0 \quad 0,0124]^T \\ {}^2\vec{u}_{A_1B_1} &= [0 \quad 1 \quad 0]^T \end{aligned}$$

Par E en D₁ (barras 2 ↔ 3)

- Punto común³

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0P_2} + {}^0R_2 \cdot {}^2\vec{r}_{P_2D_2} = {}^0\vec{r}_{O_0P_3} + {}^0R_3 \cdot {}^3\vec{r}_{P_3D_1}} \quad (5.6)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{r}_{O_0P_3} &= [x_3 \quad y_3 \quad z_3]^T \\ {}^3\vec{r}_{P_3D_1} &= [0 \quad 0 \quad \frac{l_7}{2}]^T \\ {}^0R_3 &= Rot_{zyx}(\phi_3, \theta_3, \psi_3) \end{aligned}$$

Par E en G₁ (barras 1 ↔ 3)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0P_1} + {}^0R_1 \cdot {}^1\vec{r}_{P_1G_1} = {}^0\vec{r}_{O_0P_3} + {}^0R_3 \cdot {}^3\vec{r}_{P_3G_1}} \quad (5.7)$$

siendo

$${}^3\vec{r}_{P_3G_1} = [0 \quad 0 \quad -\frac{l_7}{2}]^T$$

Par E en H₁ (barras 3 ↔ 4)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0P_3} + {}^0R_3 \cdot {}^3\vec{r}_{P_3H_1} = {}^0\vec{r}_{O_0P_4} + {}^0R_4 \cdot {}^4\vec{r}_{P_4H_1}} \quad (5.8)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{r}_{O_0P_4} &= [x_4 \quad y_4 \quad z_4]^T \\ {}^3\vec{r}_{P_3H_1} &= [d_{31} \quad 0 \quad 0]^T \\ {}^0R_4 &= Rot_{zyx}(\phi_4, \theta_4, \psi_4) \end{aligned}$$

³Los términos sombreados en gris se cancelan

Par U en J₁ (barras 4 ↔ 8)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0P_4} + {}^0R_4 \cdot {}^4\vec{r}_{P_4J_1} = {}^0\vec{r}_{O_0P_8} + {}^0R_8 \cdot {}^8\vec{r}_{P_8J_1}} \quad (5.9)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^4\vec{r}_{P_4J_1} &= [-l_{10} \quad 0 \quad 0]^T \\ {}^0\vec{r}_{O_0P_8} &= [x_8 \quad y_8 \quad z_8]^T \\ {}^0R_8 &= Rot_{zxy}(\psi_8, \theta_8, \phi_8) \end{aligned}$$

- Ángulo cte. de 90° entre las dos barras

$$\boxed{{}^0\vec{u}_8^T \cdot {}^0\vec{u}_4 = 0} \quad (5.10)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{u}_8 &= {}^0R_8 \cdot [1 \quad 0 \quad 0]^T \\ {}^0\vec{u}_4 &= {}^0R_4 \cdot [0 \quad 0 \quad 1]^T \end{aligned}$$

Par E en L₁ (barras 7 ↔ 1)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0P_7} + {}^0R_1 \cdot {}^1\vec{r}_{P_1L_1} = {}^0\vec{r}_{O_0P_7} + {}^0R_7 \cdot {}^7\vec{r}_{P_7L_1}} \quad (5.11)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{r}_{O_0P_7} &= [x_7 \quad y_7 \quad z_7]^T \\ {}^7\vec{r}_{P_7L_1} &= [-d_{13} \quad 0 \quad 0]^T \\ {}^0R_7 &= Rot_{zyx}(\phi_7, \theta_7, \psi_7) \end{aligned}$$

Par U en C₁ (barra 6 ↔ chasis)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0C_1} = {}^0\vec{r}_{O_0P_6} + {}^0R_6 \cdot {}^6\vec{r}_{P_6C_1}} \quad (5.12)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{r}_{O_0P_6} &= [x_6 \quad y_6 \quad z_6]^T \\ {}^0R_6 &= Rot_{zyx}(\phi_6, \theta_6, \psi_6) \end{aligned}$$

- Ángulo cte. de 90° entre las dos barras

$$\boxed{{}^0\vec{u}_0 \cdot ({}^0R_6 \cdot {}^6\vec{u}_6) = 0} \quad (5.13)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{u}_0 \parallel {}^0\vec{u}_{E_1F_1} &= [1 \quad 0 \quad 0]^T \\ {}^6\vec{u}_6 &= [0 \quad 0 \quad 1]^T \end{aligned}$$

Par P en M₁–N₁ (barras 6 ↔ 7)

- Ángulo constante entre ambas barras (se toma 90°)

$$\boxed{({}^0R_6 \cdot {}^6\vec{j}_6)^T \cdot ({}^0R_7 \cdot {}^7\vec{k}_7) = 0} \quad (5.14)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^6\vec{j}_6 &= [0 \quad 1 \quad 0]^T \\ {}^7\vec{k}_7 &= [0 \quad 0 \quad 1]^T \end{aligned}$$

- Eje común

$${}^0\vec{r}_{P_6P_7} \parallel {}^0\vec{i}_7 : \quad \boxed{{}^0\vec{r}_{P_6P_7} \times ({}^0R_7 \cdot {}^7\vec{i}_7) = 0} \quad (5.15)$$

$${}^0\vec{i}_7 \parallel {}^0\vec{i}_6 : \quad \boxed{({}^0R_7 \cdot {}^7\vec{i}_7) \times ({}^0R_6 \cdot {}^6\vec{i}_6) = 0} \quad (5.16)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{r}_{P_6P_7} &= \begin{bmatrix} x_7 - x_6 \\ y_7 - y_6 \\ z_7 - z_6 \end{bmatrix} \\ {}^6\vec{i}_6 = {}^7\vec{i}_7 &= [1 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned}$$

Par R en K₁ (barras 3 ↔ 5)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0K_1} = {}^0\vec{r}_{O_0P_3} + {}^0R_3({}^3\vec{r}_{P_3D_1} + {}^3\vec{r}_{D_1K_1})} \quad (5.17)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{r}_{O_0K_1} = {}^0\vec{r}_{O_0P_5} &= [x_5 \quad y_5 \quad z_5]^T \\ {}^3\vec{r}_{P_3D_1} &= [0 \quad 0 \quad \frac{l_7}{2}]^T \\ {}^3\vec{r}_{D_1K_1} &= [-16,82 \quad -18,03 \quad -228,5]^T \text{ mm} \end{aligned}$$

- Eje común

$$\boxed{\left({}^0R_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times \left({}^0R_5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 0} \quad (5.18)$$

asumiendo $Y_3 \parallel X_5$, y siendo

$${}^0R_5 = Rot_{xyz}(\phi_5, \theta_5, \psi_5)$$

A continuación, las ecuaciones de restricción de la suspensión izquierda.

Par R en E₂ (barra 9 ↔ chasis)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0E_2} = {}^0\vec{r}_{O_0P_9} + {}^0R_9 \cdot {}^9\vec{r}_{P_9E_2}} \quad (5.19)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{r}_{O_0P_9} &= [x_9 \quad y_9 \quad z_9]^T \\ {}^9\vec{r}_{P_9E_2} &= [-d_{12} \quad d_{11} \quad 0]^T \\ {}^0R_9 &= Rot_{zyx}(\phi_9, \theta_9, \psi_9) \end{aligned}$$

- Eje común

$$\boxed{{}^0\vec{u}_{E_2F_2} \times {}^0R_9 \cdot {}^9\vec{u}_{E_2F_2} = 0} \quad (5.20)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{u}_{E_2F_2} &= \frac{{}^0\vec{r}_{E_2F_2}}{|{}^0\vec{r}_{E_2F_2}|} \\ {}^0\vec{r}_{E_2F_2} &= {}^0\vec{r}_{O_0F_2} - {}^0\vec{r}_{O_0E_2} \\ {}^9\vec{u}_{E_2F_2} &= [0 \quad -1 \quad 0]^T \end{aligned}$$

Par R en A₂ (barra 10 ↔ chasis)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0A_2} = {}^0\vec{r}_{O_0P_{10}} + {}^0R_{10} \cdot {}^{10}\vec{r}_{P_{10}A_2}} \quad (5.21)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{r}_{O_0P_{10}} &= [x_{10} \quad y_{10} \quad z_{10}]^T \\ {}^{10}\vec{r}_{P_{10}A_2} &= [-d_{22} \quad -d_{21} \quad 0]^T \\ {}^0R_{10} &= Rot_{zyx}(\phi_{10}, \theta_{10}, \psi_{10}) \end{aligned}$$

- Eje común

$$\boxed{{}^0\vec{u}_{A_2B_2} \times {}^0R_{10} \cdot {}^{10}\vec{u}_{A_2B_2} = 0} \quad (5.22)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{u}_{A_2B_2} &= \frac{{}^0\vec{r}_{A_2B_2}}{|{}^0\vec{r}_{A_2B_2}|} \\ {}^0\vec{r}_{A_2B_2} &= {}^0\vec{r}_{O_0B_2} - {}^0\vec{r}_{O_0A_2} \\ {}^{10}\vec{u}_{A_2B_2} &= [0 \quad -1 \quad 0]^T \end{aligned}$$

Par E en D₂ (barras 10 ↔ 11)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0P_{10}} + {}^0R_{10} \cdot {}^{10}\vec{r}_{P_{10}D_2} = {}^0\vec{r}_{O_0P_{11}} + {}^0R_{11} \cdot {}^{11}\vec{r}_{P_{11}D_2}} \quad (5.23)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{r}_{O_0P_{11}} &= [x_{11} \quad y_{11} \quad z_{11}]^T \\ {}^{11}\vec{r}_{P_{11}D_2} &= [0 \quad 0 \quad \frac{l_7}{2}]^T \\ {}^0R_{11} &= Rot_{zyx}(\phi_{11}, \theta_{11}, \psi_{11}) \end{aligned}$$

Par E en G₂ (barras 9 ↔ 11)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0P_9} + {}^0R_9 \cdot {}^9\vec{r}_{P_{11}G_2} = {}^0\vec{r}_{O_0P_{11}} + {}^0R_{11} \cdot {}^{11}\vec{r}_{P_{11}G_2}} \quad (5.24)$$

siendo

$${}^{11}\vec{r}_{P_{11}G_2} = \left[0 \quad 0 \quad -\frac{l_7}{2}\right]^T$$

Par E en H₂ (barras 11 ↔ 12)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0P_{11}} + {}^0R_{11} \cdot {}^{11}\vec{r}_{P_{11}H_2} = {}^0\vec{r}_{O_0P_{12}} + {}^0R_{12} \cdot {}^{12}\vec{r}_{P_{12}H_2}} \quad (5.25)$$

siendo

$${}^0\vec{r}_{O_0P_{12}} = \begin{bmatrix} x_{12} & y_{12} & z_{12} \end{bmatrix}^T$$

$${}^{11}\vec{r}_{P_{11}H_2} = \begin{bmatrix} d_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$${}^0R_{12} = Rot_{zyx}(\phi_{12}, \theta_{12}, \psi_{12})$$

Par U en J₂ (barras 12 ↔ 8)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0P_{12}} + {}^0R_{12} \cdot {}^{12}\vec{r}_{P_{12}J_2} = {}^0\vec{r}_{O_0P_8} + {}^0R_8 \cdot {}^8\vec{r}_{P_8J_2}} \quad (5.26)$$

siendo

$${}^{12}\vec{r}_{P_{12}J_2} = \begin{bmatrix} -l_{10} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$${}^8\vec{r}_{P_8J_2} = \begin{bmatrix} -l_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

- Ángulo cte. de 90° entre las dos barras

$$\boxed{{}^0\vec{u}_8^T \cdot {}^0\vec{u}_{12} = 0} \quad (5.27)$$

siendo

$${}^0\vec{u}_{12} = {}^0R_{12} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Par E en L₂ (barras 15 ↔ 9)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0P_9} + {}^0R_9 \cdot {}^9\vec{r}_{P_9L_2} = {}^0\vec{r}_{O_0P_{15}} + {}^0R_{15} \cdot {}^{15}\vec{r}_{P_{15}L_2}} \quad (5.28)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{r}_{O_0P_{15}} &= [x_{15} \quad y_{15} \quad z_{15}]^T \\ {}^9\vec{r}_{P_9L_2} &= [-d_{13} \quad 0 \quad 0]^T \\ {}^0R_{15} &= Rot_{zyx}(\phi_{15}, \theta_{15}, \psi_{15}) \end{aligned}$$

Par U en C₂ (barra 14 ↔ chasis)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0C_2} = {}^0\vec{r}_{O_0P_{14}} + {}^0R_{14} \cdot {}^{14}\vec{r}_{P_{14}C_2}} \quad (5.29)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{r}_{O_0P_{14}} &= [x_{14} \quad y_{14} \quad z_{14}]^T \\ {}^0R_{14} &= Rot_{zyx}(\phi_{14}, \theta_{14}, \psi_{14}) \end{aligned}$$

- Ángulo cte. de 90° entre las dos barras

$$\boxed{{}^0\vec{u}_0 \cdot ({}^0R_{14} \cdot {}^{14}\vec{u}_{14}) = 0} \quad (5.30)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{u}_0 \parallel {}^0\vec{u}_{E_2F_2} &= [1 \quad 0 \quad 0]^T \\ {}^{14}\vec{u}_{14} &= [0 \quad 0 \quad 1]^T \end{aligned}$$

Par P en M₂–N₂ (barras 14 ↔ 15)

- Ángulo constante entre ambas barras (se toma 90°)

$$\boxed{({}^0R_{14} \cdot {}^{14}\vec{j}_{14})^T \cdot ({}^0R_{15} \cdot {}^{15}\vec{k}_{15}) = 0} \quad (5.31)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^{14}\vec{j}_{14} &= [0 \quad 1 \quad 0]^T \\ {}^{15}\vec{k}_{15} &= [0 \quad 0 \quad 1]^T \end{aligned}$$

- Eje común

$${}^0\vec{r}_{P_{14}P_{15}} \parallel {}^0\vec{i}_{15} : \quad \boxed{{}^0\vec{r}_{P_{14}P_{15}} \times ({}^0R_{15} \cdot {}^{15}\vec{i}_{15}) = 0} \quad (5.32)$$

$${}^0\vec{i}_{15} \parallel {}^0\vec{i}_{14} : \quad \boxed{({}^0R_{15} \cdot {}^{15}\vec{i}_{15}) \times ({}^0R_{14} \cdot {}^{14}\vec{i}_{14}) = 0} \quad (5.33)$$

siendo

$${}^0\vec{r}_{P_{14}P_{15}} = \begin{bmatrix} x_{15} - x_{14} \\ y_{15} - y_{14} \\ z_{15} - z_{14} \end{bmatrix}$$

$${}^{14}\vec{i}_{14} = {}^{15}\vec{i}_{15} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Par R en K₂ (barras 11 ↔ 13)

- Punto común

$$\boxed{{}^0\vec{r}_{O_0K_2} = {}^0\vec{r}_{O_0P_{11}} + {}^0R_{11}({}^{11}\vec{r}_{P_{11}D_2} + {}^{11}\vec{r}_{D_2K_2})} \quad (5.34)$$

siendo

$${}^0\vec{r}_{O_0K_2} = {}^0\vec{r}_{O_0P_{13}} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} & z_{13} \end{bmatrix}^T$$

$${}^{11}\vec{r}_{P_{11}D_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{l_7}{2} \end{bmatrix}^T$$

$${}^{11}\vec{r}_{D_2K_2} = \begin{bmatrix} -16,82 & 18,03 & -228,5 \end{bmatrix}^T \text{ mm}$$

- Eje común

$$\boxed{\left({}^0R_{11} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times \left({}^0R_{13} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 0} \quad (5.35)$$

asumiendo $Y_{11} \parallel X_{13}$, y siendo

$${}^0R_{13} = Rot_{xyz}(\phi_{13}, \theta_{13}, \psi_{13})$$

Par P en la barra de dirección (barra 8 ↔ chasis)

- Ángulo constante entre las dos barras (se toma 90°)

$$\boxed{({}^0R_8 \cdot {}^8\vec{j}_8)^T \cdot {}^0\vec{u}_{J_1J_2} = 0} \quad (5.36)$$

siendo

$${}^8\vec{j}_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

- Eje común

$${}^0\vec{r}_{P_8J_2} \parallel {}^0\vec{u}_{J_1J_2} : \quad \boxed{{}^0\vec{r}_{P_8J_2} \times {}^0\vec{u}_{J_1J_2} = 0} \quad (5.37)$$

$${}^0\vec{i}_8 \parallel {}^0\vec{u}_{J_1J_2} : \quad \boxed{({}^0R_8 \cdot {}^8\vec{i}_8) \times {}^0\vec{u}_{J_1J_2} = 0} \quad (5.38)$$

siendo

$$\begin{aligned} {}^0\vec{u}_{J_1J_2} &= \frac{{}^0\vec{r}_{J_1J_2}}{|{}^0\vec{r}_{J_1J_2}|} \\ {}^0\vec{r}_{J_1J_2} &= {}^0\vec{r}_{O_0J_2} - {}^0\vec{r}_{O_0J_1} \\ {}^0\vec{r}_{P_8J_2} &= {}^0\vec{r}_{O_0J_2} - {}^0\vec{r}_{O_0P_8} \\ {}^8\vec{i}_8 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Ecuaciones numeradas

Descomponiendo por columnas las ecuaciones anteriores, se forma el vector de restricciones Φ . A continuación se presentan las 85 ecuaciones numeradas.

Par R en E_1 y par R en E_2

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (5.2)(1) & \Phi_{41} &= (5.19)(1) \\ \Phi_2 &= (5.2)(2) & \Phi_{42} &= (5.19)(2) \\ \Phi_3 &= (5.2)(3) & \Phi_{43} &= (5.19)(3) \\ \Phi_4 &= (5.3)(2) & \Phi_{44} &= (5.20)(2) \\ \Phi_4 &= (5.3)(3) & \Phi_{45} &= (5.20)(3) \end{aligned}$$

Par R en A_1 y par R en A_2

$$\begin{aligned} \Phi_6 &= (5.4)(1) & \Phi_{46} &= (5.21)(1) \\ \Phi_7 &= (5.4)(2) & \Phi_{47} &= (5.21)(2) \\ \Phi_8 &= (5.4)(3) & \Phi_{48} &= (5.21)(3) \\ \Phi_9 &= (5.5)(2) & \Phi_{49} &= (5.22)(2) \\ \Phi_{10} &= (5.5)(3) & \Phi_{50} &= (5.22)(3) \end{aligned}$$

Par E en D_1 y par E en D_2

$$\begin{array}{ll} \Phi_{11} = (5.6)(1) & \Phi_{51} = (5.23)(1) \\ \Phi_{12} = (5.6)(2) & \Phi_{52} = (5.23)(2) \\ \Phi_{13} = (5.6)(3) & \Phi_{53} = (5.23)(3) \end{array}$$

Par E en G_1 y par E en G_2

$$\begin{array}{ll} \Phi_{14} = (5.7)(1) & \Phi_{54} = (5.24)(1) \\ \Phi_{15} = (5.7)(2) & \Phi_{55} = (5.24)(2) \\ \Phi_{16} = (5.7)(3) & \Phi_{56} = (5.24)(3) \end{array}$$

Par E en H_1 y par E en H_2

$$\begin{array}{ll} \Phi_{17} = (5.8)(1) & \Phi_{57} = (5.25)(1) \\ \Phi_{18} = (5.8)(2) & \Phi_{58} = (5.25)(2) \\ \Phi_{19} = (5.8)(3) & \Phi_{59} = (5.25)(3) \end{array}$$

Par U en J_1 y par U en J_2

$$\begin{array}{ll} \Phi_{20} = (5.9)(1) & \Phi_{60} = (5.26)(1) \\ \Phi_{21} = (5.9)(2) & \Phi_{61} = (5.26)(2) \\ \Phi_{22} = (5.9)(3) & \Phi_{62} = (5.26)(3) \\ \Phi_{23} = (5.10) & \Phi_{63} = (5.27) \end{array}$$

Par E en L_1 y par E en L_2

$$\begin{array}{ll} \Phi_{24} = (5.11)(1) & \Phi_{64} = (5.28)(1) \\ \Phi_{25} = (5.11)(2) & \Phi_{65} = (5.28)(2) \\ \Phi_{26} = (5.11)(3) & \Phi_{66} = (5.28)(3) \end{array}$$

Par U en C_1 y par U en C_2

$$\begin{array}{ll} \Phi_{27} = (5.12)(1) & \Phi_{67} = (5.29)(1) \\ \Phi_{28} = (5.12)(2) & \Phi_{68} = (5.29)(2) \\ \Phi_{29} = (5.12)(3) & \Phi_{69} = (5.29)(3) \\ \Phi_{30} = (5.13) & \Phi_{70} = (5.30) \end{array}$$

Par P en M_1N_1 y par P en M_2N_2 (en Φ_{33} y Φ_{73} hay que evitar coger la segunda, ya que aparece una combinación lineal)

$$\begin{array}{ll}
 \Phi_{31} = (5.14) & \Phi_{71} = (5.31) \\
 \Phi_{32} = (5.15)(1) & \Phi_{72} = (5.32)(1) \\
 \Phi_{33} = (5.15)(3) & \Phi_{73} = (5.32)(3) \\
 \Phi_{34} = (5.16)(1) & \Phi_{74} = (5.33)(1) \\
 \Phi_{35} = (5.16)(3) & \Phi_{75} = (5.33)(3)
 \end{array}$$

Par R en K_1 y par R en K_2

$$\begin{array}{ll}
 \Phi_{36} = (5.17)(1) & \Phi_{76} = (5.34)(1) \\
 \Phi_{37} = (5.17)(2) & \Phi_{77} = (5.34)(2) \\
 \Phi_{38} = (5.17)(3) & \Phi_{78} = (5.34)(3) \\
 \Phi_{39} = (5.18)(1) & \Phi_{79} = (5.35)(2) \\
 \Phi_{40} = (5.18)(3) & \Phi_{80} = (5.35)(3)
 \end{array}$$

Par P entre la barra de dirección y el chasis

$$\begin{array}{l}
 \Phi_{81} = (5.36) \\
 \Phi_{82} = (5.37)(1) \\
 \Phi_{83} = (5.37)(3) \\
 \Phi_{84} = (5.38)(1) \\
 \Phi_{85} = (5.38)(3)
 \end{array}$$

Modificación del par prismático de la barra 8

Al descomponer las ecuaciones de restricción correspondientes al par prismático de la barra 8, se presenta una combinación lineal entre las ecuaciones Φ_{84} y Φ_{85} . En detalle son:

$$\begin{array}{l}
 \Phi_{84} \equiv \sin \phi_8 \cos \theta_8 = 0 \\
 \Phi_{85} \equiv \cos \phi_8 \cos \theta_8 = 0
 \end{array}$$

Como se puede ver, la ecuación Φ_{85} es redundante con la anterior. Esto provocaría singularidades en el algoritmo de resolución de Newton-Raphson, lo que impediría su convergencia.

Para evitar este problema, se decide eliminar la última ecuación de restricción, Φ_{85} , y considerar un grado de libertad adicional, ϕ_8 , que será pasivo. Por tanto, el sistema completo quedará con seis grados de libertad (seis coordenadas independientes) y 84 ecuaciones de restricción (84 coordenadas dependientes).

5.2.2. Datos de entrada

Tras comprobar que las ecuaciones están bien planteadas, se intenta resolver con Matlab el problema de posición para un montaje concreto del mecanismo. Una vez resuelto, se puede usar su resultado como estimación inicial para el problema de los desplazamientos finitos.

Para realizar la simulación cinemática hay que definir previamente un conjunto de movimientos a partir de los cuales se tomarán los datos de posición, velocidad y aceleración. Para la variación de los grados de libertad z_7 y z_{15} a lo largo del tiempo, se han empleado dos series de Fourier diferentes.

Las series de Fourier se definen como

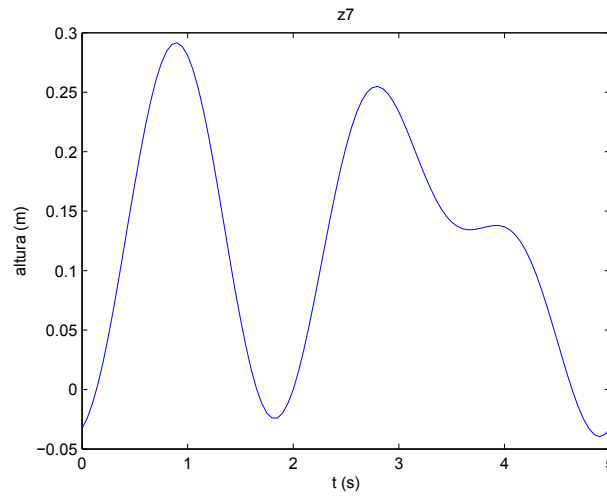
$$q(t) = q_0 + \sum_{j=0}^{NH} \left[\frac{a_j}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot j} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot j \cdot t) - \frac{b_j}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot j} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot j \cdot t) \right]$$

siendo t el tiempo (en segundos), NH el número de armónicos, y $f = \frac{1}{Duración}$ la frecuencia.

Movimiento del trapecio inferior derecho

Para la variación de la coordenada z_7 se propone la siguiente serie:

$NH = 3$
 Duración = 5 s
 $q_0 = 0,1237$
 $a_1 = 0,1604 \cdot 10^{-4}$
 $a_2 = 0,2413$
 $a_3 = -0,1002$
 $b_1 = 0,4652 \cdot 10^{-1}$
 $b_2 = 0,9552 \cdot 10^{-1}$
 $b_3 = 0,3067$



La trayectoria se discretiza empleando un tiempo de muestreo de 100 ms, por lo que se obtienen 50 muestras para las que el problema de posición admite solución.

Movimiento de las ruedas

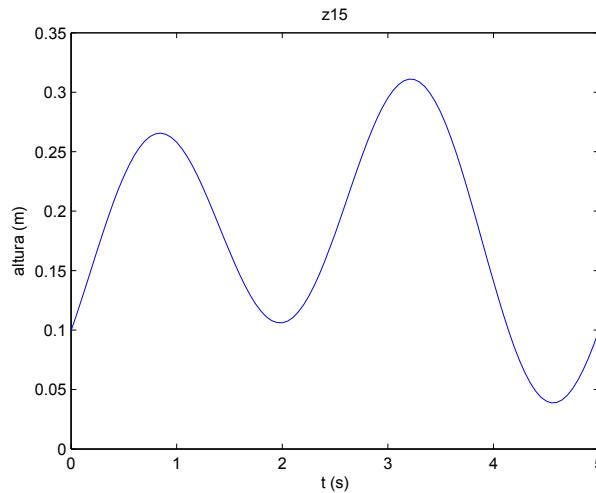
Para el movimiento de las dos ruedas (ϕ_5 y ϕ_{13}) se considera la ley de variación:

$$\phi_5 = \phi_{13} = \sin(\pi \cdot f \cdot t) \text{ rad.}$$

Movimiento del trapecio inferior izquierdo

Para la variación de la coordenada z_{15} se propone la serie:

$$\begin{aligned} \text{NH} &= 2 \\ \text{Duración} &= 5 \text{ s} \\ q_o &= 0,18 \\ a_1 &= -0,51593 \cdot 10^{-5} \\ q_2 &= 0,24978 \\ b_1 &= 0,51169 \cdot 10^{-1} \\ b_2 &= 0,99825 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$



Que también se discretiza en 50 muestras.

Movimiento de la barra de dirección

Se ha considerado que la barra de dirección está fija, con $y_8 = -0,2$. En el caso de la variable ϕ_8 , hay que recordar que se introdujo como grado de libertad para evitar singularidades en el algoritmo de Newton-Raphson, por lo que es un grado de libertad pasivo y no cambia a lo largo del tiempo. Se le ha dado el valor $\phi_8 = -1,54$ rad.

5.2.3. Resultados de la simulación

Se resuelve con Matlab el problema de posición, velocidad y aceleración para los 50 instantes muestreados y se representa gráficamente, para cada uno de ellos, la posición de todas las barras y puntos de anclaje. Uniendo las gráficas de todas las muestras se puede formar una película o animación donde se aprecia mejor el movimiento del mecanismo.⁴

En la figura 5.11 se muestran las capturas para 11 instantes de tiempo (intervalos de medio segundo). A la izquierda de cada figura se encuentran las barras 9-15 (rueda izquierda) y a la derecha las barras 1-7 (rueda derecha).

⁴Puede verse la animación completa en http://youtu.be/e9-YvM-f_xg

5.2. Resolución del problema cinemático

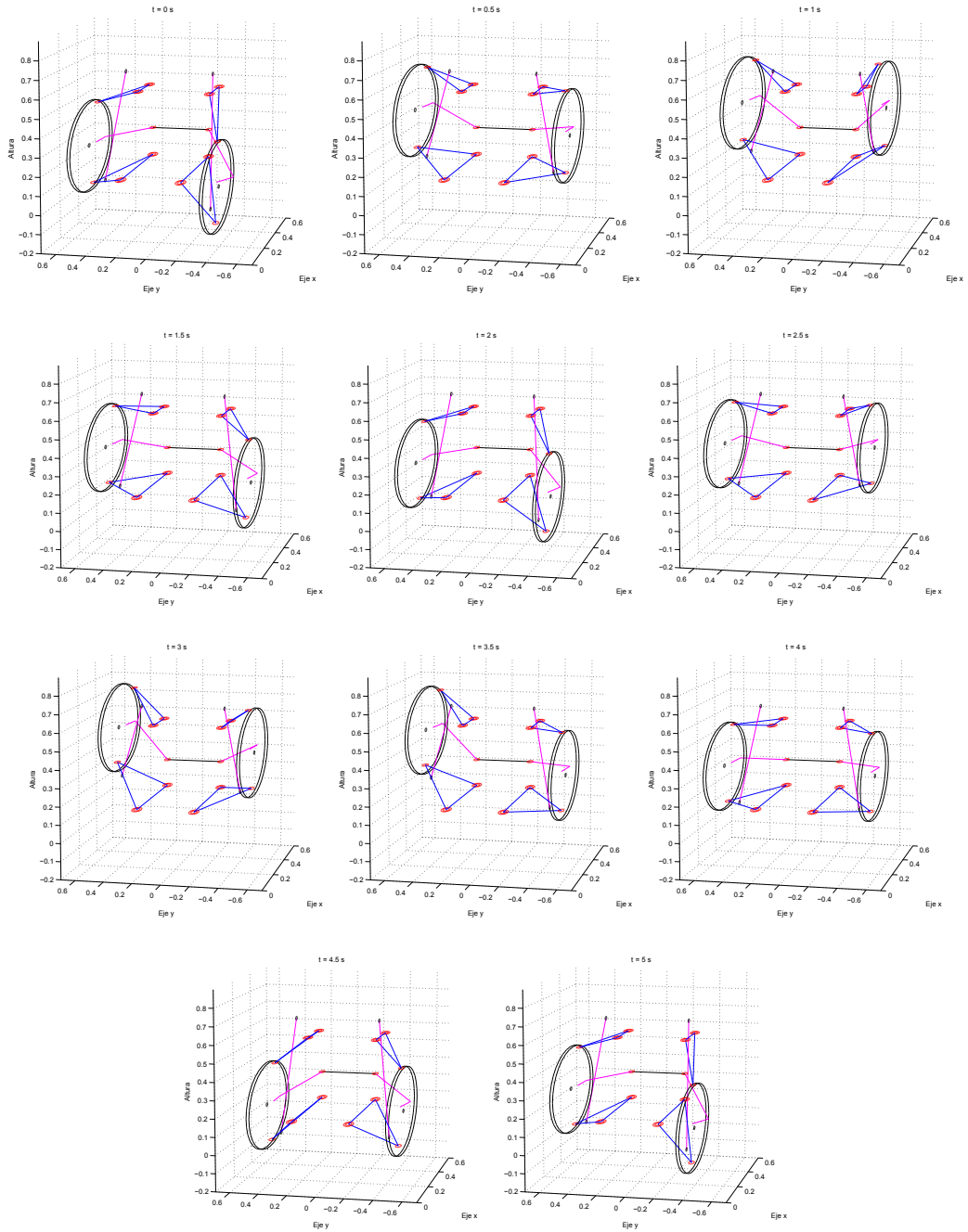


Figura 5.11: Simulación cinemática del eje delantero del vehículo

Capítulo 6

Control de un vehículo eléctrico autónomo

El objetivo de este capítulo es implementar el control de un vehículo con configuración Ackerman para el seguimiento de caminos. Puesto que el modelo final todavía no está fabricado, se ha implementado a menor escala con un robot de Lego Mindstorms NXT. El robot empleado puede verse en la figura 6.1. Se ha optado por un control cinemático basado en seguimiento de caminos por persecución pura.



Figura 6.1: Robot de Lego NXT con configuración Ackerman empleado (dimensiones: radio de las ruedas $r = 2,8$ cm y distancia entre ejes $l = 16,7$ cm)

6.1. Construcción del robot

El robot se ha montado utilizando elementos y piezas estándar de Lego Mindstorms NXT. Se han empleado dos motores, uno para la propulsión de las ruedas traseras y otro para controlar la dirección.

Las ruedas delanteras deben comportarse como es característico en la configuración Ackerman, es decir, al efectuar un giro la rueda interior debe producir un ángulo mayor que el de la rueda exterior. La forma más sencilla de conseguirlo es haciendo que las uniones de las barras del eje delantero formen un trapecio (figura 6.2).

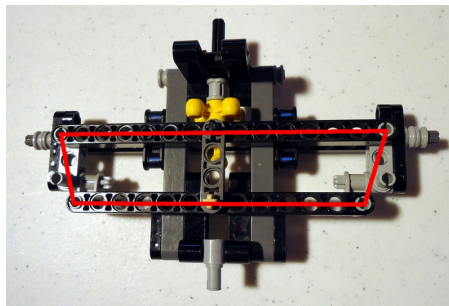


Figura 6.2: Aproximación al sistema de dirección de Ackerman empleando uniones en forma de trapecio

Así mismo, en el eje trasero es necesario un diferencial para permitir que las ruedas izquierda y derecha giren a distinta velocidad cuando se toma una curva. Se ha utilizado un engranaje diferencial de Lego. En la figura 6.3 se puede apreciar el montaje en forma de trapecio del eje de dirección y el eje trasero con el diferencial incorporado, así como los dos motores para accionarlos.

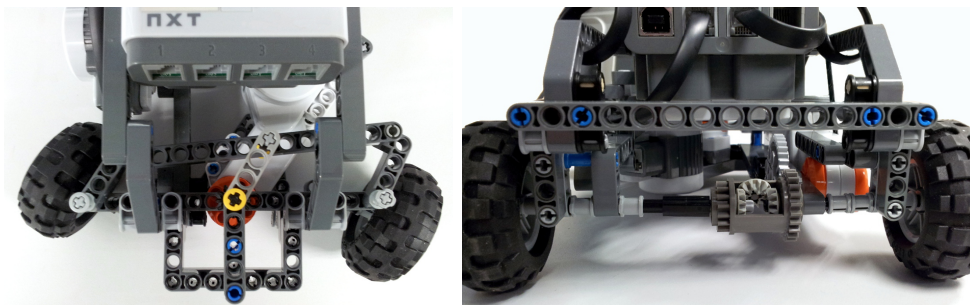


Figura 6.3: Vista del eje de dirección y del eje trasero del robot

6.2. Simulación del control

Antes de implementar el algoritmo de control sobre el robot real, se va a simular sobre Matlab para comprobar que se comporta correctamente. El bucle de control completo que se ejecutará es el que aparece en la figura 6.4.

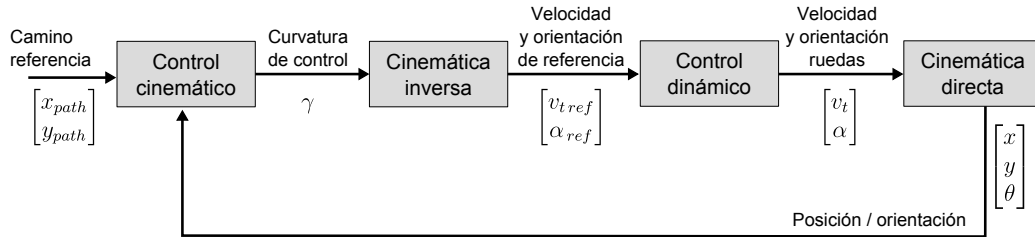


Figura 6.4: Esquema de control del robot móvil

6.2.1. Control dinámico

El control dinámico es el bucle interno de control que se encarga de regular la velocidad de los motores para que se aproximen lo máximo posible a las velocidades de referencia que proporciona la cinemática inversa. Cada motor de Lego Mindstorms lleva incorporado un encoder que se puede utilizar para controlarlo de forma precisa. El encoder tiene una resolución de 360 pulsos por revolución, o lo que es lo mismo, un pulso por grado.

En la figura 6.5 se puede ver el bucle de control de cada motor.

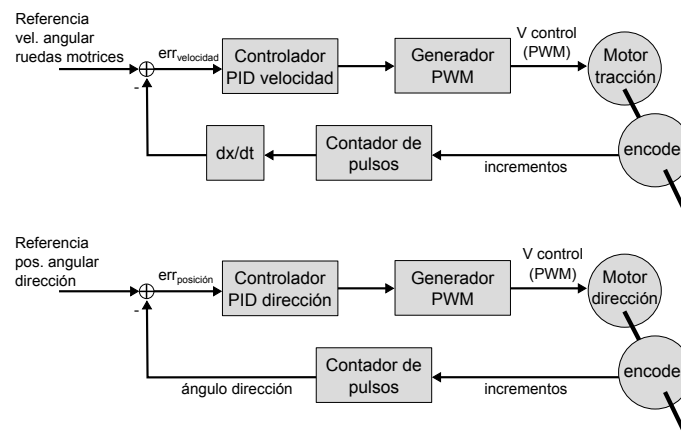


Figura 6.5: Control dinámico de la velocidad y dirección de un vehículo tipo triciclo

Para diseñar los controladores, se deben identificar previamente los motores.

Identificación de los motores

La identificación de sistemas consiste en encontrar el modelo matemático que tenga las mismas características que el sistema. Este modelo matemático es lo que se conoce como función de transferencia del sistema.

Identificación en posición Para identificar los motores en posición, se considera la siguiente función de transferencia para modelar el proceso:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s(1 + \tau S)} \quad (6.1)$$

Los parámetros que hay que identificar en este tipo de sistema son K (ganancia) y τ (constante de tiempo). El valor de K se obtiene introduciendo un escalón al sistema y dividiendo la pendiente de la rampa de salida entre el valor del escalón introducido

$$K = \frac{m}{\Delta u} \quad (6.2)$$

Para obtener el valor de la constante de tiempo hay que calcular el retardo entre la respuesta del sistema y la rampa de pendiente m (figura 6.6).

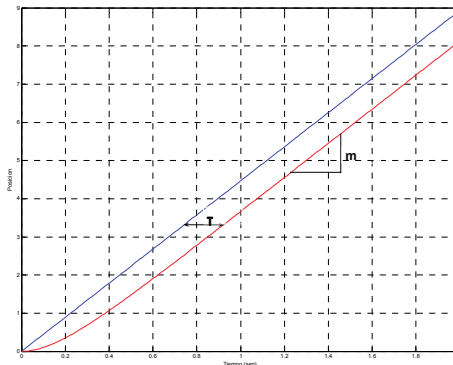


Figura 6.6: Obtención del parámetro τ de un sistema tipo 1

Usando el lenguaje de programación Java y la librería lejOS, se ha escrito un programa que introduce un escalón de valor 35 a uno de los motores y toma 100 muestras, con un periodo de muestreo de 50 milisegundos, del valor

del encoder (posición en radianes) del motor. Estos datos se guardan en un fichero y se analizan en Matlab.

La ganancia calculada es $K = 0,181$ y la constante de tiempo $\tau = 0,044$, por lo que la función de transferencia queda

$$G_p(s) = \frac{0,181}{s(1 + 0,044s)} \quad (6.3)$$

En la figura 6.7 puede verse la comparación entre la salida real del motor y la del modelo identificado, así como la recta de pendiente $m = 6,335$ utilizada para calcular τ .

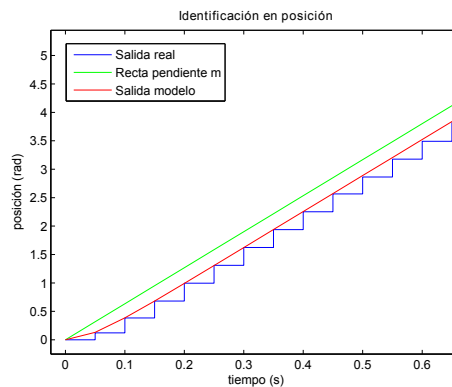


Figura 6.7: Identificación en posición de un motor de corriente continua de Lego NXT

Identificación en velocidad Para identificar el motor en velocidad, hay que encontrar el valor de la ganancia K_v y la constante de tiempo τ_v de la siguiente función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_v}{1 + \tau_v s}. \quad (6.4)$$

K_v es el valor final de la salida dividido entre el valor del escalón introducido. Si el escalón es unitario, K_v es el valor final. El valor del τ_v es el tiempo que transcurre desde que se introduce el escalón hasta que el sistema alcanza el 63,2% del valor final (figura 6.8).

Para obtener estos parámetros, se ejecuta de nuevo el programa anterior pero almacenando esta vez la velocidad del motor calculada mediante la

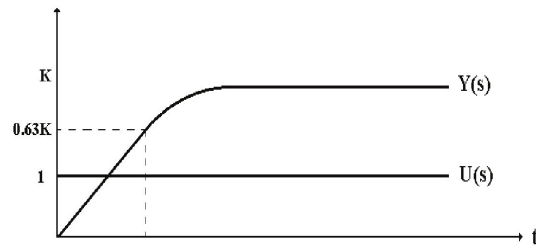


Figura 6.8: Respuesta de un sistema de primer orden ante escalón unitario

aproximación matemática

$$vel = \frac{pos_{actual} - pos_{anterior}}{T_s} \quad (6.5)$$

donde vel está expresada en rad/s y pos_{actual} y $pos_{anterior}$ son las posiciones actual y anterior del motor, expresadas en radianes. Otra forma de obtener la velocidad del motor es derivar el vector de posiciones obtenido en el apartado anterior.

Tras analizar la gráfica con la salida real del sistema, los parámetros identificados son $K_v = 0,1809$ y $\tau_v = 0,07$, por lo que la función de transferencia queda:

$$G_p(s) = \frac{0,1809}{1 + 0,07s} \quad (6.6)$$

La figura 6.9 muestra la salida real del sistema, la aproximación matemática y la salida del modelo identificado.

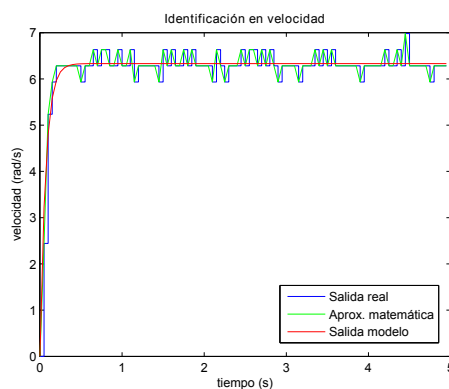


Figura 6.9: Identificación en velocidad de un motor de corriente continua de Lego NXT

Diseño de controladores

Una vez identificados en posición y velocidad, se puede proceder al control de los motores usando para la simulación los modelos obtenidos.

Para el motor encargado de la dirección se ha elegido un controlador proporcional. Este regulador efectúa el control sobre la posición del motor, controlando así la orientación de las ruedas del eje de dirección. Su acción de control depende únicamente del error entre la referencia y la salida del sistema:

$$u(t) = k_p e(t) \quad (6.7)$$

El equivalente discreto de esta acción de control se obtiene calculando la ecuación en diferencias de la expresión anterior, que en este caso es muy sencilla:

$$u(k) = k_p e(k), \quad (6.8)$$

es decir, en el instante k habrá que aplicar una acción de control que depende de la ganancia proporcional y del error en ese instante.

En el caso del motor que acciona las ruedas traseras, el controlador con el que se obtuvieron mejores resultados fue un proporcional-integral. En este caso, el control se realiza sobre la velocidad del motor (velocidad angular). Este controlador combina la acción de control proporcional e integral, que viene dada por la expresión:

$$u(t) = K_{PI} \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e dt \right] \quad (6.9)$$

Una opción para aproximar esta expresión de forma discreta es considerar que la integral es una suma de áreas:

$$\int_0^t e dt \cong \sum_{i=0}^{k-1} T e(i) \quad (6.10)$$

Con esta aproximación, la acción de control en discreto será:

$$u(k) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + u(k-1), \quad (6.11)$$

donde $q_0 = K_{PI}$ y $q_1 = K_{PI} \frac{T-T_i}{T}$. Por tanto, la acción de control en el instante k depende de los valores del error el instante actual y anterior, así como de la acción de control aplicada en el instante anterior.

En la figura 6.10 aparece el diagrama de bloques de Simulink que se encarga del control dinámico de los motores.

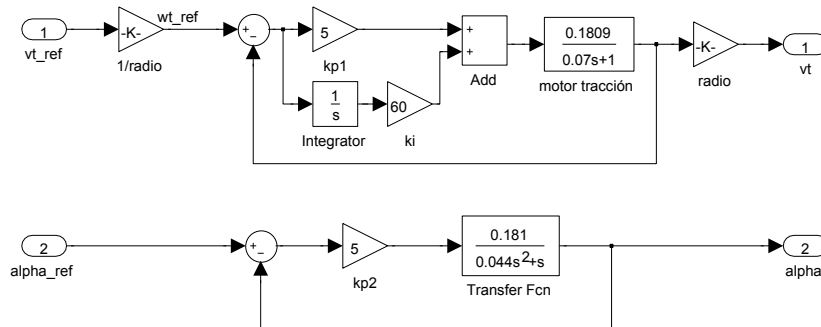


Figura 6.10: Diagrama de Simulink del control dinámico de los motores

6.2.2. Control cinemático mediante persecución pura

La figura 6.11 muestra el diagrama de bloques Simulink con el bucle de control completo.

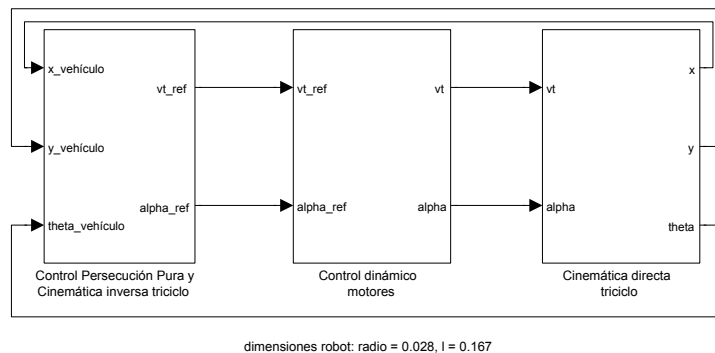


Figura 6.11: Diagrama de Simulink del bucle de control completo

El primer bloque implementa el control cinemático mediante persecución pura (ver sección 2.4.2), y determina la cinemática inversa calculando la velocidad de tracción $v_{t_{ref}}$ y la orientación de la dirección α_{ref} necesarias para llevar al robot desde su posición actual hasta el punto objetivo calculado. La posición y orientación actual del robot las recibe del último bloque, encargado de la cinemática directa, mientras que por parámetro se especifican las coordenadas X e Y de los puntos del camino de referencia, así como el valor del *Look-Ahead*. Su diagrama interno es el de la figura 6.12.

El bloque *Interpreted Matlab Function* ejecuta un script de Matlab que calcula y devuelve el punto más cercano a una distancia LA del robot. Además, emplea una técnica de ventana deslizante para consultar un rango limitado de puntos del camino. Se ha establecido un *WindowRatio* de valor 4, es decir,

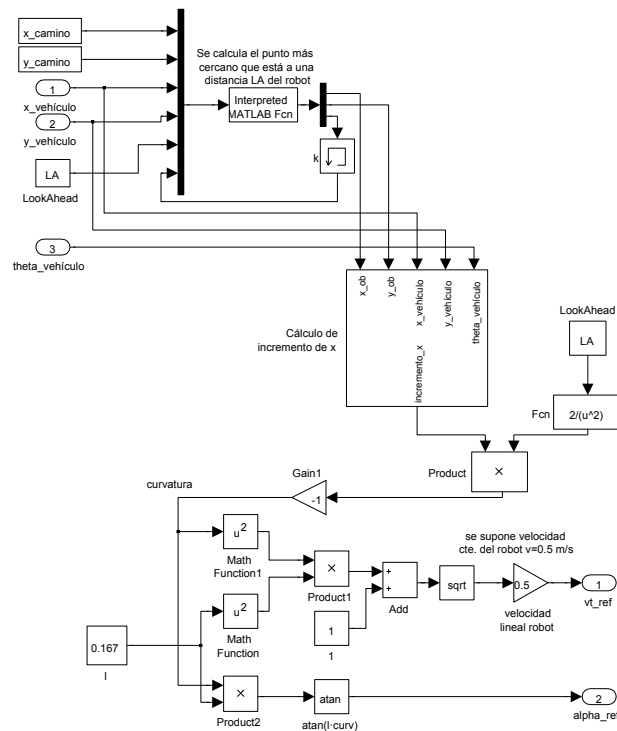


Figura 6.12: Diagrama de Simulink del control cinemático por persecución pura y de la cinemática inversa de un robot tipo triciclo

en cada instante el algoritmo buscará el punto más cercano de entre 1/4 del total de puntos del camino, a partir del último seleccionado. Esto es interesante cuando se pretende seguir un camino que presenta cruces entre sí. En la figura 6.13 se puede observar un ejemplo, donde el punto negro representa el último punto objetivo elegido y el trazo de puntos rojos la ventana de selección actual. De esta forma, se evita que en el cruce elija como punto objetivo alguno de los otros dos caminos y se desvíe de la ruta correcta.

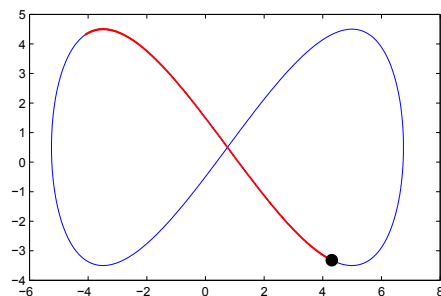


Figura 6.13: Ejemplo de aplicación de ventana deslizante dentro del algoritmo de persecución pura, usando $windowRatio = 4$

Cabe mencionar que se ha introducido un ligero cambio en la forma de calcular Δx , siendo ahora

$$\Delta x = (x_{ob} - x) \sin \theta - (y_{ob} - y) \cos \theta \quad (6.12)$$

Esto se debe a la diferencia de criterio a la hora de asignar el sistema de referencia local del robot. En este caso el eje X coincide con el eje longitudinal y el eje Y con el eje trasero del robot, midiéndose θ respecto al eje X global.

Como se puede observar en la figura 6.12, la cinemática inversa se calcula a partir del valor de la curvatura que devuelve el algoritmo de persecución pura. Recordemos que la expresión de la velocidad angular del triciclo era

$$\omega = v \cdot \gamma,$$

luego, sustituyendo ω en las ecuaciones (2.20) del modelo cinemático inverso del triciclo, se obtienen las acciones de control que hay que aplicar en función de la curvatura:

$$v_{tref} = v \sqrt{1 + l^2 \cdot \gamma^2} \quad (6.13)$$

$$\alpha_{ref} = \arctan(l \cdot \gamma) \quad (6.14)$$

La velocidad y orientación de referencia de las ruedas se pasan al segundo bloque, encargado de establecer el control dinámico sobre los motores y cuya estructura interna es la de la figura 6.10 del apartado anterior.

El tercer y último bloque calcula la cinemática directa en función de la velocidad v_t y orientación α que recibe. Este bloque admite, además, varios parámetros: la posición y orientación inicial del robot (x_0, y_0, θ_0) y la orientación inicial de la rueda delantera equivalente (α_0) . Su diagrama de bloques interno es el de la figura 6.14.

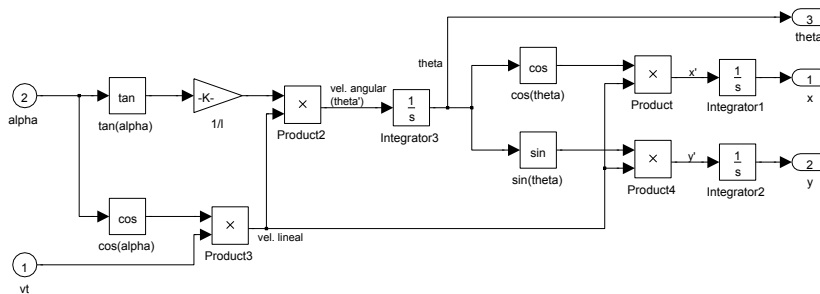
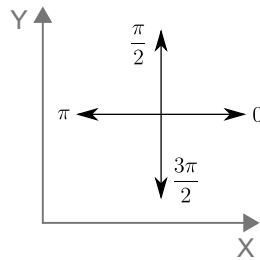


Figura 6.14: Diagrama de Simulink de la cinemática directa de un robot tipo triciclo

6.2.3. Resultado de las simulaciones

Se han ejecutado diversas simulaciones con cuatro caminos distintos: una recta diagonal, una circunferencia, un cuadrado y un lazo. Para cada uno se han probado varios valores de *Look-Ahead*. Los valores del ángulo θ de orientación del robot tienen sentido positivo, como muestra la siguiente imagen.



A continuación se presentan los resultados de las simulaciones para un robot con ruedas de radio 2,8 cm, distancia entre los ejes 16,7 cm y velocidad constante 0,5 m/s. El camino de referencia aparece en rojo y la trayectoria seguida por el robot en azul.

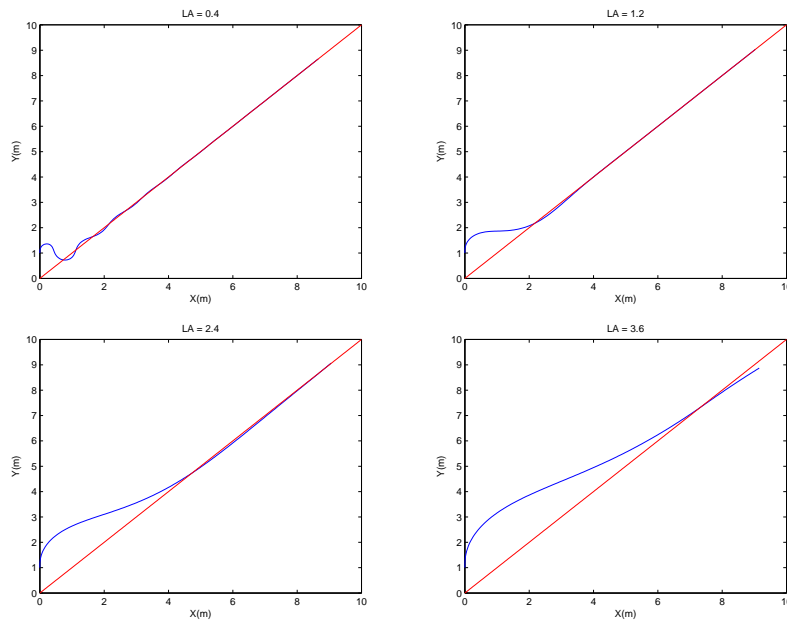


Figura 6.15: Trayectoria rectilínea seguida por el robot con posición de origen (0,1) y orientación inicial $\pi/2$ rad (duración de simulación: 25 s)

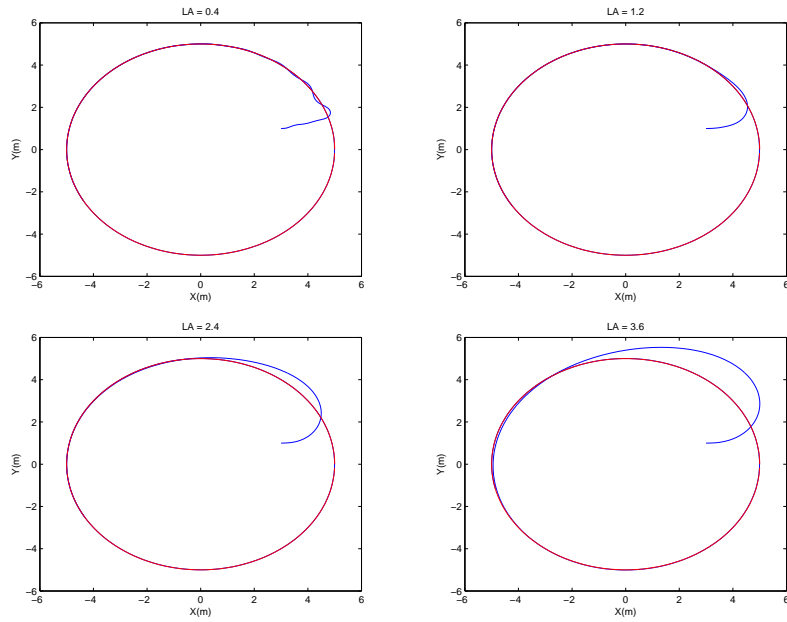


Figura 6.16: Trayectoria circular seguida por el robot con posición de origen (3,1) y orientación inicial 0 rad (duración de simulación: 100 s)

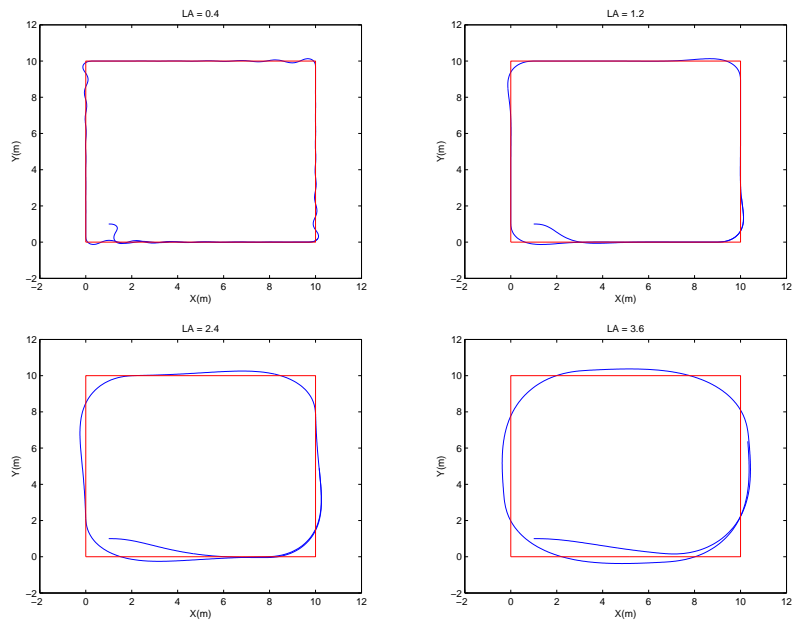


Figura 6.17: Trayectoria cuadrada seguida por el robot con posición de origen (1,1) y orientación inicial 0 rad (duración de simulación: 100 s)

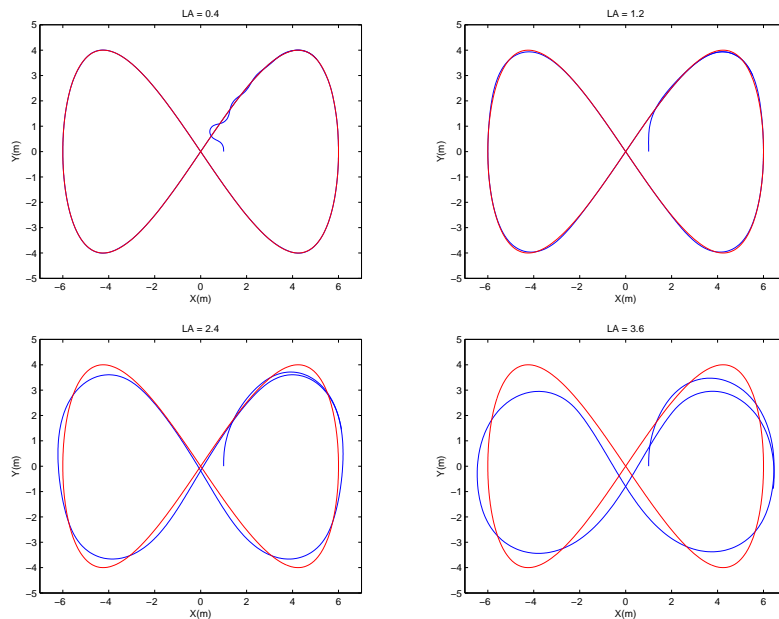


Figura 6.18: Trayectoria con forma de lazo seguida por el robot con posición de origen (1,0) y orientación inicial $\pi/2$ rad (duración de simulación: 100 s)

Como se puede observar en los resultados, con un valor de LA muy pequeño se producen más oscilaciones al inicio y durante la trayectoria. Por otro lado, con un valor muy grande el robot tarda más en alcanzar el camino y le cuesta asimilar cambios bruscos de orientación.

6.3. Control sobre el robot real

Para programar el robot se ha utilizado leJOS NXJ, que es un completo firmware en JAVA que sustituye el oficial de LEGO. Se distribuye como código abierto y está desarrollado por la comunidad, por lo que se puede encontrar abundante información y ayuda en Internet. El entorno de programación utilizado ha sido eclipse con la API de leJOS instalada.

La figura 6.19 representa el diagrama de ejecución del programa. A continuación detalla en profundidad.

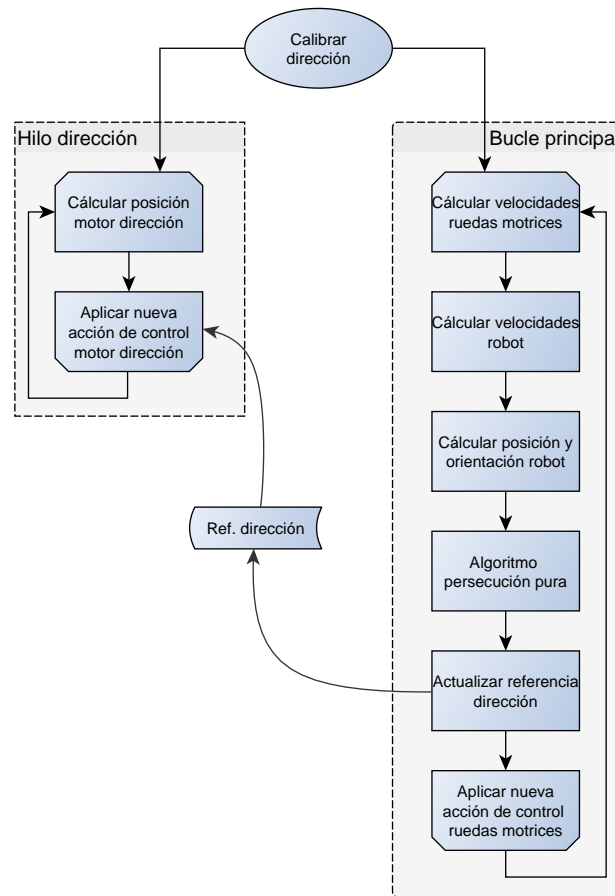


Figura 6.19: Diagrama de ejecución del programa de control del robot

6.3.1. Calibrado de la dirección

Lo primero que se hace al ejecutar el programa es calibrar la dirección. Consiste en determinar cuáles son los límites izquierdo y derecho de la dirección (hasta dónde puede girar el motor). Esto es necesario para poder centrar la dirección del robot y conocer su orientación. Se puede conseguir con diversos métodos, el que se ha empleado aquí es el siguiente.

Se hace girar el motor en un sentido y se compara, de forma periódica (en este caso cada 80 ms), el valor actual de su encoder con el valor en el instante anterior. Cuando se detecta que el encoder no ha cambiado entre dos instantes consecutivos, se detiene y se almacena su valor actual, que será su límite en este sentido.

Este procedimiento se realiza primero girando la dirección a la izquierda, y

a continuación a la derecha. Una vez se tienen los dos límites, se calcula la media entre los dos y se almacena. Este valor será la posición del motor que hace que se centre la dirección.

Una vez realizada la calibración, se fija como referencia inicial de la dirección el centro calculado, se forma el camino que tendrá que seguir el robot y se ejecutan de forma paralela los dos bucles que aparecen en el diagrama: el hilo de control de la dirección y el bucle principal del programa.

6.3.2. Hilo de control de la dirección

Este hilo implementa el control dinámico del motor que controla la dirección, y se ejecuta de forma periódica con un tiempo de muestreo menor que el del bucle principal, 10 ms. En cada ejecución, el hilo lee el último valor de la referencia de dirección que ha modificado el bucle principal y aplica un control PID sobre la posición actual que tiene el motor para llevarlo hasta la posición deseada.

Aunque este proceso se ha implementado como un hilo de ejecución paralelo al bucle del programa principal, se podía haber incluido dentro de éste puesto que el periodo de muestreo del bucle es suficiente para realizar tanto el control cinemático del robot como el control de la dirección.

6.3.3. Bucle principal de ejecución

El bucle principal del programa es el que implementa la cinemática directa, el control cinemático por persecución pura y la cinemática inversa. Además, también se encarga del control dinámico del motor que acciona las ruedas traseras. Se ejecuta con un periodo de muestreo 50 ms.

En primer lugar, realiza el cálculo de la velocidad angular y lineal del motor trasero mediante la aproximación:

$$\omega_{\text{driveMotor}} = \text{pulse2rad} \cdot \frac{\text{encoder}_k - \text{encoder}_{k-1}}{T_s}, \quad (6.15)$$

donde $\text{pulse2rad} = \frac{2\pi}{360}$, puesto que cada pulso del encoder es un grado de rotación del motor.

Puesto que hay un engranaje entre el motor y el diferencial, para calcular la velocidad lineal de las ruedas es necesario multiplicar la velocidad angular, además de por el radio, por la relación de transmisión correspondiente

a los engranajes. La relación de transmisión, o *gear ratio*, para engranajes circulares se define como:

$$gearRatio = \frac{\text{n}^\circ \text{ de dientes engranaje del motor}}{\text{n}^\circ \text{ de dientes engranaje arrastrado}} \quad (6.16)$$

El engranaje unido al motor tiene 40 dientes, mientras que el diferencial montado en el eje trasero tiene 24 (figura 6.20), luego la relación de transmisión es

$$gearRatio = \frac{40}{24} = 1,667, \quad (6.17)$$

es decir, el eje trasero gira 1,667 veces por cada revolución del motor.

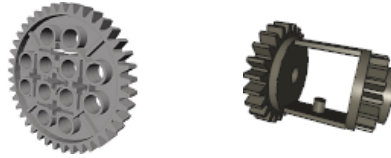


Figura 6.20: Engranajes utilizados en el eje trasero. A la izquierda el engranaje unido al motor (40 dientes) y a la derecha el diferencial unido al eje (24 dientes) (fuente: <http://sariel.pl>)

Por tanto, la velocidad lineal de las ruedas es:

$$v_{driveMotor} = \omega_{driveMotor} \cdot wheelRadius \cdot gearRatio \quad (6.18)$$

A partir de la velocidad lineal de las ruedas se calculan la velocidad angular y lineal del robot:

$$\omega_{robot} = v_{driveMotor} \cdot \frac{\tan \alpha}{l} \quad (6.19)$$

$$v_{robot} = v_{driveMotor} \cdot \cos \alpha, \quad (6.20)$$

donde el valor de α se obtiene leyendo el encoder del motor de la dirección y convirtiéndolo a radianes.

La posición y orientación actual del robot se calcula usando la siguiente aproximación a la integral de la ecuación diferencial (2.9):

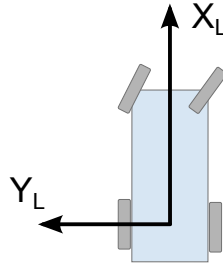
$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k + v_k T_s \cos \theta_k \\ y_k + v_k T_s \sin \theta_k \\ \theta_k + \omega_k T_s \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

que es válida cuando Δt o el incremento de θ son suficientemente pequeños.

A continuación, el bucle principal ejecuta el algoritmo de persecución pura utilizando el camino que se ha especificado al inicio del programa. El algoritmo emplea un valor fijo de $LA = 0,4$ y una ventana deslizante con $windowRatio = 4$, igual que la utilizada en la simulación. Este algoritmo, sin embargo, es más sofisticado que el que se empleó en Matlab, ya que tiene la capacidad de detectar cuándo el punto objetivo está situado detrás del robot, así como los casos en los que se encuentra muy alejado.

El segundo problema se ha resuelto fácilmente inicializando la distancia mínima a ∞ al principio de cada período de muestreo. El primer problema es más complejo, ya que se tiene que determinar si el punto objetivo se encuentra detrás del robot y aplicar una acción de control diferente en ese caso.

Para ello, en primer lugar se pasa el punto objetivo de coordenadas globales a coordenadas del robot, cuyo sistema de referencia local es el siguiente.



Si la coordenada x_L del punto objetivo es positiva, se sabe que se encuentra delante del robot y se aplica la acción de control habitual

$$\gamma = -\frac{2\Delta x}{L^2}.$$

Si por el contrario se detecta que el punto está detrás, se comprueba entonces si está a la derecha o a la izquierda, esto es, si $y_L \leq 0$ ó $y_L > 0$, respectivamente, y se aplica una acción de control con el siguiente valor de Δx :

$$\Delta x_{right} = |y_{ob} - y| + |x_{ob} - x| \quad (6.22)$$

si está a la derecha, y

$$\Delta x_{left} = -(|y_{ob} - y| + |x_{ob} - x|) \quad (6.23)$$

si está a la izquierda. Con estos valores probados por tanteo se consigue que el robot se encare antes hacia la orientación correcta.

Una vez obtenida la curvatura γ , se calcula el nuevo valor del ángulo α y se actualiza la referencia de la dirección que utiliza el hilo de control. Esta referencia se satura previamente entre los dos valores límite que se obtuvieron durante la calibración.

También se calcula la nueva velocidad lineal $v_{\text{driveMotorRef}}$ que deben tener las ruedas traseras, y a partir de ella la correspondiente velocidad angular $\omega_{\text{driveMotorRef}}$.

Por último, el bucle implementa el control dinámico de la velocidad de las ruedas traseras utilizando como referencia la velocidad angular anterior y un controlador PID. Entonces, satura la acción de control a los valores máximos permitidos y se la aplica al motor.

6.3.4. Resultados

Pese a que el control era bueno, los resultados de la ejecución del algoritmo sobre el robot real no fueron tan satisfactorios como en las simulaciones realizadas con Matlab. Esto es debido, por una parte, a la holgura que presentan las piezas y uniones de los robots Lego Mindstorms NXT, haciendo difícil ajustar correctamente la orientación de la dirección aún cuando la acción de control aplicada es correcta.

Por otro lado, el uso exclusivo de odometría para estimar la posición y orientación del robot conlleva unos errores sistemáticos imposibles de evitar que se van acumulando en cada periodo de muestreo y hacen que el robot se desvíe cada vez más de la trayectoria original a medida que pasa el tiempo.

Conclusiones y trabajo futuro

En este proyecto se han llevado a cabo dos tareas diferenciadas: la simulación de la suspensión del eje delantero de un vehículo por un lado y la implementación de un algoritmo de control para el seguimiento de caminos por otro.

Para el estudio y modelado de la suspensión del vehículo en desarrollo, se partió en primer lugar del mecanismo formado por un cuarto de vehículo (suspensión de una sola rueda). Una vez resueltos los problemas cinemáticos de posición, velocidad y aceleración, y habiendo comprobado que el modelo era correcto, se amplió el estudio al eje delantero completo. Partiendo de la solución del problema que ya se tenía para un cuarto de vehículo, ampliarlo al eje completo resultó más sencillo. El comportamiento de la nueva rueda era análogo a la anterior en su mayor parte y sólo hubo que añadir la barra correspondiente a la dirección y modificar las ecuaciones de restricción correspondientes a las manguetas, que para un cuarto de vehículo estaban fijas al chasis.

En esta memoria se ha presentado directamente la solución del modelo para el eje delantero completo. Se ha realizado una simulación cinemática del comportamiento de la suspensión para unas leyes de variación determinadas de los grados de libertad y se ha obtenido una animación con el movimiento de los elementos del mecanismo.

Por falta de tiempo no se ha podido obtener el modelo del vehículo completo. Uno de los posibles trabajos futuros es obtener y simular el modelo completo e identificar los parámetros dinámicos del sistema a partir del modelo cinemático.

En cuanto al algoritmo de control de vehículos para el seguimiento de caminos, los resultados obtenidos con el robot real no han sido demasiado satisfactorios para trayectorias con cambios bruscos de orientación. Esto es debido tanto a la mecánica propia de las piezas del robot como al uso en

exclusiva de odometría para la estimación de la posición y orientación.

Se pueden introducir numerosas mejoras en este aspecto, como es el uso de sensores de tipo brújula, giróscopos o acelerómetros para refinar la orientación del robot o la ayuda de un sistema de visión artificial para estimar correctamente su posición. Existen técnicas más avanzadas, como los Filtros de Kalman o la fusión sensorial, que combinan la información de varios sensores (tanto internos como externos al robot) para aumentar la precisión del seguimiento de la trayectoria.

Sería interesante probar estos algoritmos en el vehículo real una vez finalizado. Por tratarse de un vehículo de exteriores, en este caso se podría emplear un sistema de GPS para su correcto posicionamiento.

Índice de figuras

2.1. Silla de ruedas eléctrica con locomoción diferencial y cuatro ruedas de apoyo (fuente: Golden Technologies)	10
2.2. Robot PackBot con locomoción de tipo oruga desarrollado por iRobot	10
2.3. Coche eléctrico de radiocontrol (fuente: RC Radiocontrol) . . .	11
2.4. Rueda omnidireccional doble de Rotacaster. Las ruedas locas (de color rojo) permiten a la rueda principal deslizarse lateralmente	12
2.5. Robot omnidireccional Robotino fabricado por Festo	12
2.6. Hexápodo PhantomX AX (Trossen Robotics) y cuadrúpedo AlphaDog LS3 (Boston Dynamics)	13
2.7. Robots trepadores RiSE V2 (hexápodo) y RiSE V3 (cuadrúpedo) de Boston Dynamics	13
2.8. Robots articulados Soryu-II y ACM-R5 (Hiroshe Fukushima Lab)	14
2.9. Robots submarinos Aqua2 (McGill University) y OpenROV (código abierto: http://openrov.com)	14
2.10. Vehículos aéreos no tripulados Ikhana (NASA) y HADA (Inta)	15
2.11. Trayectorias de un robot diferencial en función de la velocidad de cada rueda	15
2.12. Modelo cinemático de un robot diferencial	16
2.13. Modelo cinemático de un robot tipo triciclo	18
2.14. Radios interior y exterior descritos por las ruedas de un coche con configuración Ackerman	20
2.15. Modelo cinemático de Ackerman equivalente al triciclo	20
2.16. Esquema de control en cascada de robots móviles	21
2.17. Modelo de control de posición por punto descentralizado . . .	22
2.18. Seguimiento de caminos mediante persecución pura	23
2.19. Aplicación práctica del método de persecución pura con una distancia fija sobre el camino	25

3.1. Elementos (barras) y pares de dos mecanismos	27
3.2. Par de Revolución	27
3.3. Par Prismático	28
3.4. Par de Tornillo o Helicoidal	28
3.5. Par Universal	28
3.6. Par Cilíndrico	29
3.7. Par de Leva	29
3.8. Par Esferico	29
3.9. Par constituido por una esfera con mango en contacto con un cilindro acanalado	30
3.10. Par Plano	30
3.11. Ecuaciones de restricción del par de revolución	32
3.12. Ecuaciones de restricción del par prismático	32
3.13. Ecuaciones de restricción del par universal	33
3.14. Ecuación de restricción del par esférico	33
3.15. Posición inicial del cuadrilátero articulado	34
3.16. Interpretación geométrica del método de Newton-Raphson	36
4.1. Tipos de oscilaciones presentes en un vehículo (fuente del ori- ginal: www.dragoart.com)	41
4.2. Perfil de rendimiento de los ejes rígidos	44
4.3. Suspensión De Dion (fuente: carbibles.com)	45
4.4. Vehículo pesado con suspensión de ballestas (fuente: Wikipedia)	45
4.5. Eje trasero con ballestas en un vehículo comercial ligero (VW Caddy II, 1994)	46
4.6. Eje trasero con barra de torsión (Toyota Auris)	47
4.7. Perfil de rendimiento de los ejes semirrígidos	48
4.8. Tipos de barras o brazos	49
4.9. Sistemas de suspensión independiente con 5, 4, 3 y 2 brazos	50
4.10. Variantes de orientación en la suspensión independiente de un brazo: a) lateral, b) longitudinal y c) diagonal	50
4.11. Suspensión de doble trapecio (SLA)	51
4.12. Suspensión SLA (Mercedes-Benz SLS AMG, 2012)	52
4.13. Perfil de rendimiento de los sistemas de suspensión de doble trapecio	53
4.14. Perfil de rendimiento de los sistemas de suspensión multibrazo	54
4.15. Suspensión delantera de 5 brazos y trasera tropezoidal de pro- pulsión (Audi A4, 2010)	54
4.16. Suspensión delantera de 4 brazos (Mercedes-Benz Clase E W211, 2009)	55
4.17. Suspensión delantera McPherson (VW Golf)	56

4.18. Perfil de rendimiento de los sistemas de suspensión McPherson	57
4.19. Tipos de eje delantero empleados en 2005 y 2010	57
4.20. Tipos de eje trasero empleados en 2005 y 2010	58
5.1. Vista del eje delantero y trasero del vehículo eléctrico	60
5.2. Prototipo de suspensión de doble trapecio utilizada para el modelado	61
5.3. Numeración de barras y designación de nudos	62
5.4. Barras, nudos y pares cinemáticos del eje delantero	62
5.5. Sistemas de referencia de las barras 1 y 9	63
5.6. Sistemas de referencia de las barras 2 y 10	63
5.7. Sistemas de referencia de las barras 3 y 11	64
5.8. Sistemas de referencia de las barras 4, 8 y 12	65
5.9. Sistemas de referencia de las barras 5 y 13	65
5.10. Sistemas de referencia de las barras 6-7 y 14-15	65
5.11. Simulación cinemática del eje delantero del vehículo	83
6.1. Robot de Lego NXT con configuración Ackerman empleado (dimensiones: radio de las ruedas $r = 2,8$ cm y distancia entre ejes $l = 16,7$ cm)	84
6.2. Aproximación al sistema de dirección de Ackerman empleando uniones en forma de trapecio	85
6.3. Vista del eje de dirección y del eje trasero del robot	85
6.4. Esquema de control del robot móvil	86
6.5. Control dinámico de la velocidad y dirección de un vehículo tipo triciclo	86
6.6. Obtención del parámetro τ de un sistema tipo 1	87
6.7. Identificación en posición de un motor de corriente continua de Lego NXT	88
6.8. Respuesta de un sistema de primer orden ante escalón unitario	89
6.9. Identificación en velocidad de un motor de corriente continua de Lego NXT	89
6.10. Diagrama de Simulink del control dinámico de los motores . . .	91
6.11. Diagrama de Simulink del bucle de control completo	91
6.12. Diagrama de Simulink del control cinemático por persecución pura y de la cinemática inversa de un robot tipo triciclo	92
6.13. Ejemplo de aplicación de ventana deslizante dentro del algo- ritmo de persecución pura, usando $windowRatio = 4$	92
6.14. Diagrama de Simulink de la cinemática directa de un robot tipo triciclo	93

6.15. Trayectoria rectilínea seguida por el robot con posición de origen (0,1) y orientación inicial $\pi/2$ rad (duración de simulación: 25 s)	94
6.16. Trayectoria circular seguida por el robot con posición de origen (3,1) y orientación inicial 0 rad (duración de simulación: 100 s)	95
6.17. Trayectoria cuadrada seguida por el robot con posición de origen (1,1) y orientación inicial 0 rad (duración de simulación: 100 s)	95
6.18. Trayectoria con forma de lazo seguida por el robot con posición de origen (1,0) y orientación inicial $\pi/2$ rad (duración de simulación: 100 s)	96
6.19. Diagrama de ejecución del programa de control del robot . . .	97
6.20. Engranajes utilizados en el eje trasero. A la izquierda el engranaje unido al motor (40 dientes) y a la derecha el diferencial unido al eje (24 dientes) (fuente: http://sariel.pl)	99

Índice de tablas

4.1. Características principales de distintos tipos de suspensión . . .	42
4.2. Clasificación de ejes y sistemas de suspensión	42
5.1. Número de pares de cada tipo y clase a la que pertenecen . . .	66

Bibliografía

- [1] Java de Oracle. <http://www.oracle.com/technetwork/java>.
- [2] B. Heißing y M. Ersoy. *Chassis Handbook*. Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2011.
- [3] Ana Magdalena de Juan de Luna y Ramón Sancibrián Herrera. Cinemática y dinámica de máquinas (capítulos 1-3). Apuntes de la asignatura, OCW Universidad de Cantabria, abril 2011.
- [4] leJOS NXJ Tutorial. <http://lejos.sourceforge.net/nxt/nxj/tutorial>.
- [5] MathWorks. <http://www.mathworks.es>.
- [6] Aníbal Ollero Baturone. *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Marcombo, 2001.
- [7] José María Rico Martínez. Introducción a la cinemática de las máquinas. Informe técnico, Departamento de Ingeniería Mecánica. División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, México, septiembre 2012.
- [8] Sariel.pl. <http://sariel.pl>. sariel's custom LEGO Technic creations.
- [9] R. Silva Ortigoza, J. R. García Sánchez, V. R. Barrientos Sotelo, M. A. Molina Vilchis, V. M. Hernández Guzmán y G. Silva Ortigoza. Una panorámica de los robots móviles. *Télématique, Revista Electrónica de Estudios Telemáticos*, 6(3):1-14, 2007.
- [10] Ángel Valera Fernández. Mecatrónica. Apuntes de la asignatura, Universitat Politècnica de València, 2011.
- [11] Wikipedia. <http://es.wikipedia.org>.