

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA



DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA

**Contribución a la definición de un
modelo teórico del proceso de fatiga
por alto ciclaje en materiales dúctiles**

TESIS DOCTORAL

EUSEBIO CARLOS CARBAJAL NAVARRO

DIRECTOR

Dr. D. RAFAEL SÁNCHEZ GRANDÍA

DICIEMBRE 2012

... a mi mujer e hijas, por todo,

Reyes, Mar y Mireia

Agradecimientos

Si bien la singularidad de elaboración de una tesis doctoral, residente en un medido trabajo de estudio e investigación, conlleva paralelamente una fuerte interrelación con personas inherentes al contexto en el que se opera, sin embargo, al mismo tiempo, dicha interrelación se extiende y magnifica no solo a personas de trato directo sino también a otras que, conjuntamente con su estilo o modelo de pensamiento, forman parte implícitamente del trabajo desarrollado. De todo ello, piensa este doctorado, surge una amalgama propia de estima, conocimiento e incluso razón póstuma, sin fronteras. Amalgama que, si no imposible, sí es difícil de expresar en un solo sentimiento de agradecimiento; de ahí que prácticamente siempre todo “agradecedor” tenga que indicar tópicamente que “se le disculpe” si no están incluidas todas las personas susceptibles de estarlo, por no hablar ya del grado de intensidad que debería subjetivar a cada agradecimiento en sí.

Así, lejos de entrar en esta paradoja, por no decir antitesis, dado que el rigor de los agradecimientos puede siempre pecar por defecto, exceso, u omisión, ...y, para no abusar más de la infinita paciencia de mi buen director de tesis, doy paso a este sentimiento:

En el ámbito del conocimiento, intrínsecamente hablando, se configuran entre dos Departamentos, el de Física Aplicada de la UPV (DFA) y el de Construcciones Arquitectónicas-II de la UPC (DCA2), y dos Escuelas, la Politécnica Superior de Edificación de Barcelona (EPSEB) y la de Ingeniería de Edificación de Valencia (ETSIE), aspecto prácticamente razonado en el capítulo de introducción de este trabajo. En ambos casos mi más profundo agradecimiento a todos los compañeros, y amistades, por su aliento continuo a esta empresa. Debo y deseo destacar, en primer lugar, a Rafael Sánchez Grandía, mi excelente Director de Tesis, de cuyo trato, dedicación, humanidad e intrincados acuerdos, producto de sanas y fructíferas discusiones, ha surgido una sincera amistad. Extensivamente, es de rigor, y sentimiento, agradecer la alta implicación, ánimo expresado por el Director del Departamento de Física Aplicada Jorge Curiel Esparza, y del mismo grado de profesionalidad de Pilar Capilla Pérez, Jefa de Unidad Administrativa. Sin olvidarme de Rosa M^a Martínez Sala e Isabel Tort Ausina, Profesoras del Departamento.

Un papel destacado, confiando incondicionalmente en todo momento tanto en mi proyecto como en mi persona, es de sumo agradecer a las personas de Francesc Jordana i Riba, Director de mi Escuela EPSEB, y a Isabel Serrà Martín, Jefa de la Sección de Estructuras del DCA2, en la que imparto docencia, personas que han sido fundamentales en momentos clave. Debo agradecer también, en su justa medida, el apoyo de la Dirección de mi Departamento DCA2, representado en la persona de Agustín Portales Pons. Un caluroso agradecimiento a todos mis compañeros de Sección, y en especial a Susana Pavón, a Xavier Falguera, que no han escatimado esfuerzos en facilitarme la labor docente cuando ha sido necesario, y a Roger Señís, por su generosa y continua disposición. También, en este mismo sentido, a Laia Haurie, de la Sección de Materiales, compañera en la docencia de Máster.

En el ámbito de la estima, indistintamente de mi Director de Tesis, es impagable el ánimo y apoyo en todo momento de mi familia, donde a la más directa les reservo la dedicatoria, que en esta etapa han tenido una implicación relevante, madre y hermanos, Abilia, Jesús, Núria y Gregorio. Reservó a la de Valencia un lugar destacado e imprescindible, sin ellos o no hubiese llegado aquí, o estaría aún en el camino, a mis primos Chari, Cecilio, y familia.

En este ámbito hace tiempo que se encuentran, por mérito propio, también de Valencia, mi amiga personal Sefa, en cierto grado artífice o culpable de que esté aquí, así como a M^a Angeles, Secretaria de Dirección de la ETSIE, de exquisito y diligente trato, que también agradezco a Miguel Granell.

Sería totalmente injusto dejarme a todos mis compañeros de Ingeniería de Materiales de la UPV, nunca se me olvidará su desvelo por tenerme preparado material y fotocopias en mi tránsito semanal de Valencia, incluidas llamadas telefónicas. En especial a mis amigos de Trabajos, Llúcia Reig que ya es doctora y Miguel García que, como buen bombero, me pisa los talones. En la imagen de citas, el agradecimiento a Frederic Guix, por su rápida comprensión y decisión.

Finalmente en el ámbito de la razón póstuma, poco a decir, mucho a agradecer, y más aún a recordar y dedicar, a mi padre Eusebio, y a mi intrínseco mentor Roberto Guerra Fontana, su amplia dimensión humano-cognoscitiva la dejo en manos de la curiosidad del lector, pero la recomiendo.

RESUMEN

El objeto de esta Tesis consiste en la propuesta de una formalización teórica del proceso de fatiga de alto ciclaje en metales dúctiles. Se trata éste de un campo interdisciplinar muy complejo, con muchas derivaciones en varios campos tecnológicos y con una muy amplia e históricamente dilatada experimentación, especialmente dirigida a metales y estados de tensión simples. Por ello, se consideró que esta Tesis incluyese en primer término aquéllas referencias y elementos teóricos necesarios para la adecuada exposición posterior de la fenomenología y sus correspondientes modelizaciones, por una parte y, por otra, de las contribuciones esenciales de la investigación en este campo. Este objetivo se aborda en su primer capítulo.

Los primeros dos epígrafes del capítulo 2 están destinados a la descripción del estado actual de las modelizaciones empíricas de la fatiga de alto ciclaje en ensayos uniaxiales y de la acumulación de daño en estos procesos. El tercer epígrafe de este capítulo es una descripción del estado actual de la investigación en torno a la fatiga, en general, y a la generación y evolución del daño, con especial atención a sus fundamentos termodinámicos. El cuarto epígrafe de este capítulo presenta una proposición de formalización teórica apropiada a tales resultados previos y al desarrollo de la investigación que se pretende. Por lo tanto, esta propuesta de modelización teórica constituye efectivamente, una aportación, pero no una contribución esencial de esta Tesis, dado su carácter de *establecida ad hoc* para el objetivo pretendido en este trabajo.

El capítulo 3 ofrece la primera contribución sustancial de esta Tesis. En este capítulo se propone una nueva modelización teórica del daño ajena a la introducción de una nueva variable interna independiente de daño. Efectivamente, se expone la debilidad de los modelos fundamentados en la asunción de tal hipótesis y, por lo tanto, en esta Tesis se considera que la variable asociada a la evolución del daño no puede ser otra que la propia tensión *real* en cada instante, construyéndose una nueva formalización basada en este concepto. Se ha comprobado que el modelo propuesto supone una generalización del modelo clásico de daño cuando se refiere a procesos uniaxiales y se ha resuelto igualmente en este capítulo la dificultad intrínseca a los modelos de daño en su extensión a estados anisotrópicos consecuencia de cualquier tipología de acción externa, comprobando su adecuación a los resultados previos basados en variables internas independientes de daño.

El capítulo 4 se destina a la exposición de una segunda contribución esencial de este trabajo, con la propuesta de un criterio energético de inicio de fatiga, o de daño, híbrido multiaxial. Se define así una nueva superficie límite de crecimiento de daño y su evolución, bajo ecuaciones formalmente equivalentes a las ecuaciones de evolución de deformación plástica. Este criterio, introducido con carácter absolutamente general, presenta una gran adecuación con resultados experimentales previos en ensayos de diversa tipología. La modelización propuesta en los capítulos 3 y 4 muestra un paralelismo formal absoluto con la modelización teórica del proceso de deformación plástica, permitiendo ello el desarrollo de modelos más sencillos de acoplamiento del daño en procesos elásticos y plásticos.

En el capítulo 5 se introduce el concepto de concentración de tensiones, inherente a la evolución del daño por avance de fisuración en la fatiga de alto ciclaje y se propone una descripción teórica del proceso de acumulación de daño bajo la aplicación de tensión alterna que permite una constatación de la fenomenología descrita por las curvas de Wöhler. Por otro lado, el enfoque aquí propuesto de la concentración de tensiones permite abordar aspectos referentes a la rigidez, resolviendo a este respecto el caso básico del elemento barra de directriz recta. Una última contribución queda propuesta en esta Tesis, con la aportación de un modelo de estimación estructural que contempla la rigidez de conjunto por efecto de la fatiga de alto ciclaje.

El capítulo 6 está dedicado al análisis de las conclusiones parciales ya establecidas en el desarrollo de esta memoria y a la formulación de las posibles líneas de investigación que tales conclusiones podrían permitir.

RESUM

L'objecte d'aquesta Tesi consisteix en la proposta d'una formalització teòrica del procés de fatiga d'alt ciclatge en metalls dúctils. Es tracta aquest d'un camp interdisciplinari molt complex, amb moltes derivacions en diversos camps tecnològics i amb una molt àmpliament i històricament dilatada experimentació, especialment dirigida a metalls i estats de tensió simples. Per això, es va considerar que aquesta Tesi inclogués en primer terme aquelles referències i elements teòrics necessaris per a l'adequada exposició posterior de la fenomenologia i les seves corresponents modelitzacions, d'una banda i, per l'altra, de les contribucions essencials de la recerca en aquest camp. Aquest objectiu s'aborda en el primer capítol.

Els dos primers epígrafs del capítol 2 estan destinats a la descripció de l'estat actual de les modelitzacions empíriques de la fatiga d'alt ciclatge en assaigs uniaxials i de l'acumulació de dany en aquests processos. El tercer epígraf d'aquest capítol és una descripció de l'estat actual de la recerca, en general, i de la generació i evolució del dany, amb especial atenció als seus fonaments termodinàmics. El quart epígraf d'aquest capítol presenta una proposició de formalització teòrica adient amb els resultats previs i al desenvolupament de la investigació que es pretén. Per tant, aquesta proposta de modelització teòrica constitueix efectivament, una aportació, però no una contribució essencial d'aquesta Tesi, atès el seu caràcter d'*establerta ad hoc* per a l'objectiu pretès en aquest treball.

El capítol 3 ofereix la primera contribució substancial d'aquesta Tesi. En aquest capítol es proposa una nova modelització teòrica del dany aliena a la introducció d'una nova variable interna independent de dany. Efectivament, s'exposa la feblesa dels models fonamentals en l'assumpció de tal hipòtesi i, per tant, en aquesta Tesi es considera que la variable associada a l'evolució del dany no pot ser una altra que la pròpia tensió *real* en cada instant, construint-se una nova formalització basada en aquest concepte. S'ha comprovat que el model proposat suposa una generalització del model clàssic de dany quan es refereix a processos uniaxials i s'ha resolt igualment en aquest capítol la dificultat intrínseca als models de dany en la seva extensió a estats anisotròpics, conseqüència de qualsevol tipologia d'acció externa, comprovant la seva adequació als resultats previs basats en variables internes independents de dany.

El capítol 4 es destina a l'exposició d'una segona contribució essencial d'aquest treball, amb la proposta d'un criteri energètic d'inici de fatiga, o de dany, híbrid multiaxial. Es defineix així una nova superfície límit de creixement de dany i la seva evolució, sota equacions formalment equivalents a les equacions d'evolució de deformació plàstica. Aquest criteri, introduït amb caràcter absolutament general, presenta una gran adequació amb els resultats experimentals previs en assaigs de diversa tipologia. La modelització proposada en els capítols 3 i 4 mostra un paral·lelisme formal absolut amb la modelització teòrica del procés de deformació plàstica, permetent això el desenvolupament de models més senzills d'acoblament del dany en processos elàstics i plàstics.

En el capítol 5 s'introdueix el concepte de concentració de tensions, inherent a l'evolució del dany per avanç de fissuració en la fatiga d'alt ciclatge i es proposa una descripció teòrica del procés d'acumulació de dany sota l'aplicació de tensió alterna que permet una constatació de la fenomenologia descrita per les corbes de Wöhler. D'altra banda, l'enfocament aquí proposat de la concentració de tensions permet abordar aspectes referents a la rigidesa, resolent al respecte el cas bàsic de l'element barra de directriu recta. Una darrera contribució queda proposada en aquesta Tesi, amb l'aportació d'un model d'estimació estructural que contempla la rigidesa del conjunt per efecte de la fatiga d'alt ciclatge.

El capítol 6 està dedicat a l'anàlisi de les conclusions parcials ja establertes en el desenvolupament d'aquesta memòria i a la formulació de les possibles línies d'investigació que les esmentades conclusions podrien permetre.

ABSTRACT

The goal of this Thesis is to propose a theoretical formalization of the high cycle fatigue process in ductile metals. That is a very complex interdisciplinary field, with many branches in various technological fields and with a very large and historically extensive experimentation, especially focused on metals and simple stress states. It is therefore considered that this thesis would include primarily the references and theoretical elements necessary for a suited subsequent exposure of the phenomenology, the associated modeling and the essential contributions of the research in this field. This objective is developed in the first chapter.

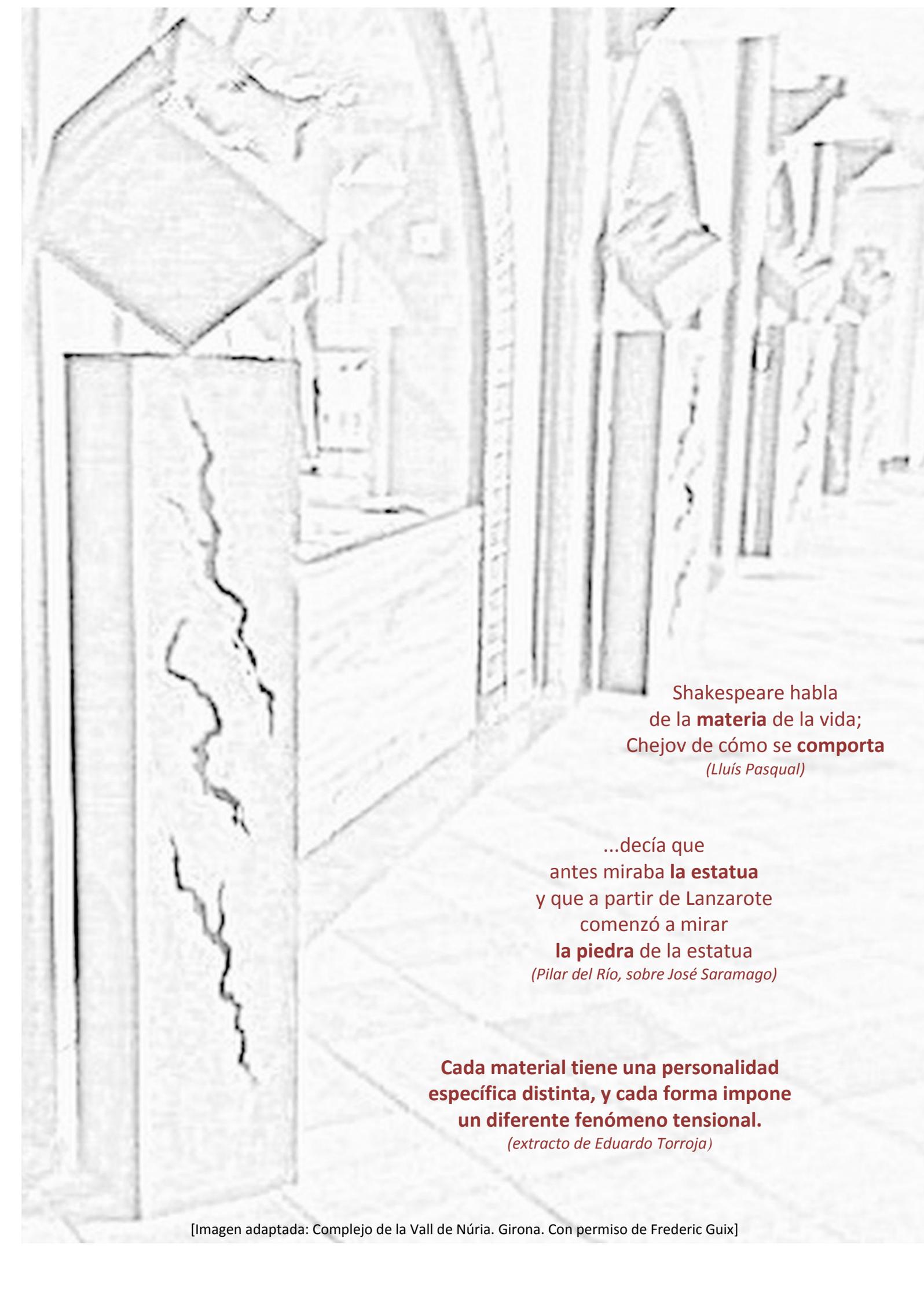
The first two sections of Chapter 2 are intended for the description of the current state of empirical modeling of high cycle fatigue in uniaxial processes and their damage accumulation. The third section of this chapter is a description of the current state of research on fatigue in general, and, specially, on the generation and evolution of damage, with particular reference on his thermodynamic background. The fourth section of this chapter presents a theoretical proposition appropriate to formalize such previous results and to develop research that is intended. Therefore, this proposed theoretical modeling is considered as a contribution, but not an essential contribution of this thesis, since it is an established *ad hoc* proposal to meet its research objectives.

Chapter 3 provides the first substantial contribution of this thesis. This chapter proposes a new theoretical modeling of damage that does not include an internal variable independent of damage. Indeed, it exposes the weakness of the models founded on the assumption of that hypothesis. Therefore, in this Thesis it is considered that the associated variable of the damage evolution cannot be other than the real tension in every moment and it is exposed a new damage formalization based on this concept. It has been found that the proposed model is a generalization of the classical damage model when it is applied to uniaxial processes and that it further solves the intrinsic difficulty that the classical damage model presents in anisotropic stress states resulted from any external action, checking its suitability with previous results obtained from the models with internal independent variables of damage.

Chapter 4 is intended to present a second essential contribution of this work, the proposal of new energy multiaxial hybrid criterion for initiation of fatigue, or damage. Then, it is defined a new boundary surface damage growth and its temporal evolution under equations formally equivalent to the plastic deformation evolution equations. This general approach has a great alignment with previous diverse experimental results multiaxial hybrid. The new model proposed in Chapters 3 and 4 shows an absolute formal parallelism with the theoretical model of plastic deformation process, thus allowing the development of simpler models of coupling damage with elastic or plastic deformations.

Chapter 5 introduces the concept of stress concentration, inherent in the evolution of damage by crack advance, and a theoretical description of accumulation of damage in high cycle fatigue is proposed and the phenomenology described by Wöhler curves is reproduced. Moreover, the stress concentration approach proposed here can be extended to aspects relating to rigidity and an application is developed in the case of a straight structural bar element. A final contribution is proposed in this thesis, with the proposal of a structural estimation model that includes joint stiffness due to high cycle fatigue.

Chapter 6 presents the analysis of the partial conclusions established in the development of this work and the formulation of possible further research.

A black and white line drawing of a Gothic-style hallway. The perspective is from the end of the hallway looking down its length. On the left, a large pillar is heavily cracked, with a jagged, irregular crack running vertically down its length. The hallway features several arched doorways on both sides, leading to other rooms. The floor is tiled with large, square tiles. The drawing is done in a simple, sketchy style with fine lines and some shading to indicate depth and texture.

Shakespeare habla
de la **materia** de la vida;
Chejov de cómo se **comporta**
(Lluís Pasqual)

...decía que
antes miraba **la estatua**
y que a partir de Lanzarote
comenzó a mirar
la piedra de la estatua
(Pilar del Río, sobre José Saramago)

**Cada material tiene una personalidad
específica distinta, y cada forma impone
un diferente fenómeno tensional.**
(extracto de Eduardo Torroja)

ÍNDICE	iii
Índice de Figuras [Referencias]	vi
Índice de Tablas	vii
SIMBOLOGIA ESPECÍFICA	viii

ÍNDICE			
1	INTRODUCCIÓN		1
	1.1	Antecedentes, justificación y exposición de objetivos	11
	1.2	Metodología	13
	1.3	Referencias básicas de la teoría de la fatiga	16
	1.3.1	INTRODUCCIÓN	16
	1.3.2	UNA VISIÓN GLOBAL DEL PROBLEMA DE LA FATIGA DE ALTO CICLAJE	16
	1.3.3	ELEMENTOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO PARA EL ESTUDIO DE LA FATIGA DE ALTO CICLAJE	31
	1.3.3.1	Elementos de Elasticidad lineal	31
	1.3.3.2	Elementos de Plasticidad. Criterios	38
	1.3.3.3	Elementos de Mecánica de la Fractura	47
	1.3.3.4	Rigidez del Material	55
2	FENOMENOLOGIA Y MODELIZACIONES DE LA FATIGA DE ALTO CICLAJE		56
	2.1	Introducción	56
	2.2	Fenomenología de la fatiga de alto ciclaje	59
	2.2.1	PARÁMETROS BÁSICOS EN LA DESCRIPCIÓN DE LA FENOMENOLOGÍA DE LA FATIGA DE ALTO CICLAJE	59
	2.2.2	FACTORES DE INFLUENCIA. MODIFICACIÓN DEL LÍMITE DE FATIGA	65
	2.2.3	UNA PRIMERA ESQUEMATIZACIÓN DE LA FENOMENOLOGÍA DE HCF	77
	2.3	Modelización de la fatiga de alto ciclaje	80
	2.3.1	MODELIZACIÓN CLÁSICA DE LA FATIGA DE ALTO CICLAJE UNIAXIAL CON EXTENSIÓN MULTIAXIAL	82
	2.3.2	MODELIZACIÓN CLÁSICA DEL DAÑO ACUMULATIVO POR FATIGA DE ALTO CICLAJE	96
	2.3.3	ELEMENTOS BÁSICOS DE LA MODELIZACIÓN DEL DAÑO	104
	2.3.3.1	Localidad y no localidad de un modelo teórico	104
	2.3.3.2	Modelos de elasticidad no local	105
	2.3.3.3	Modelos micromecánicos de evolución del daño	107
	2.3.3.4	Modelos fenomenológicos de evolución del daño	110
	2.3.3.5	Formalismo termodinámico en Mecánica del Medio Continuo	111
	2.3.3.6	Expresión local de la densidad de energía libre en un medio elástico lineal	114
	2.3.3.7	Modelos locales elásticos de daño	115
	2.3.3.8	Potencial disipativo de daño	117

	2.3.3.9	Modelos locales elastoplásticos acoplados con modelos de daño	121
	2.3.3.10	Modelos no locales elásticos o elastoplásticos acoplados con modelos de daño	124
	2.3.3.11	Conclusiones relativas a la modelización del daño	126
2.4	Contribución a la formalización de la fenomenología de la Fatiga de Alto Ciclaje		130
2.5	Conclusiones relativas a la fenomenología y modelización de la fatiga de alto ciclaje		138
3	CONTRIBUCIÓN A UNA NUEVA MODELIZACIÓN DEL DAÑO		140
	3.1	Función de daño uniaxial	141
	3.2	Función tensorial de daño	145
	3.3	Consideraciones relativas a la elección de la variable tensión efectiva como variable de control del proceso de daño	155
	3.4	Conclusiones	159
4.	CONTRIBUCIÓN A UNA NUEVA MODELIZACIÓN DE CRITERIOS DE FALLO EN ALTO CICLAJE		161
	4.1	Fallo energético en estados de tensión multiaxial	162
	4.2	Superficie límite de crecimiento de daño	165
	4.2.1	PREMISAS ESPECÍFICAS E HIPÓTESIS CONTRIBUTIVA BÁSICA	165
	4.2.2	FUNCIÓN DE VARIACIÓN DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA EN HCF	168
	4.2.3	ANÁLISIS TRIAXIAL, BIAXIAL Y UNIAXIAL DE LA FUNCIÓN DE VARIACIÓN DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA EN HCF	172
	4.2.4	ANÁLISIS BÁSICO DE LA EVOLUCIÓN DEL DAÑO SEGÚN $F(\sigma)$ DE EDEVF	188
	4.2.5	FATIGA MULTIAXIAL HCF PARA TENSIONES MEDIAS NO NULAS, CONSIDERANDO LA FUNCIÓN EDEVF	193
	4.3	Conclusiones	195
5	CONTRIBUCIÓN A LA VARIACIÓN DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES POR FATIGA HCF		197
	5.1	Índice de concentración de tensión por fatiga en la evolución de la HCF	198
	5.2	Coeficiente o índice de eficiencia a fatiga. Rigidez efectiva de una barra a fatiga de alto ciclaje	202
	5.3	Modelo K^{φ} : Análisis estructural de barras considerando la variación de rigidez por fatiga HCF	206
	5.4	Ilustración de aplicación del método K^{φ}	209

	5.5	Conclusiones	216
6.	ANÁLISIS DE CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE DESARROLLO		219
7	REFERENCIAS		228

Índice de Figuras [Referencias]		
1/1	Ménsula de Galileo e interpretación de los diagramas de esfuerzos. Notación adaptada. (Figura tomada de [TIMOSHENKO, 1953])	5
1/2	Distribución de la tensión normal de la ménsula de Galileo (Figura tomada de [HEYMAN, 2004])	6
1.3.2/1	Curva de Wöhler, $\sigma - N$, en log-log, típica de un metal dúctil	24
1.3.2/2	Curva $\varepsilon - N$, en log-log, o deformación vida, de un acero dúctil [SHIGLEY / MISCHKE, 2002].	25
1.3.3/1	Definición de las componentes de tensión en un elemento de volumen diferencial, dx_1, dx_2, dx_3 [SURESH, 2004].	31
1.3.3/2	Tensiones principales y tensión tangencial máxima, [NORTON, 1999]	33
1.3.3/3	(a) Tracción uniaxial. (b) Cortadura. [Adaptada de Mase, 1978], según representación de Mohr, 1882 (Aquí $\sigma_i, \sigma_{ii}, \sigma_{iii}$, son respectivamente $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)	40
1.3.3/4	Superficie de fluencia-Tresca Estado de tensión multiaxial. [ORTIZ, 1985]	41
1.3.3/5	Curva de fluencia – Tresca. Estado Plano. (Aquí σ_e , es σ_y). [ORTIZ, 1985]	41
1.3.3/6	Superficie de fluencia –Von Mises. Estado de tensión multiaxial. [ORTIZ, 1985].	42
1.3.3/7	Curva de Fluencia – Von Mises. Estado Plano. En la cual se ha incluido en línea punteada, la de Tresca (aquí σ_e , es σ_y). [ORTIZ, 1985].	43
1.3.3/8	Resultados experimentales, respecto a los criterios de Tresca y de Von Mises en metales dúctiles, aceros y aluminio, frente a uno frágil, fundición de hierro gris representada con el símbolo Δ . (Aquí σ_c es σ_y , resultante del ensayo de fluencia correspondiente). [NORTON, 1999].	44
1.3.3/9	Curva característica de propagación de grieta de material dúctil. [ARANA / GONZÁLEZ, 2002]	49
1.3.3/10	Placa infinita, con grieta de longitud $2a \ll$ ancho placa, de espesor unitario $B=1$, sometido a un estado de tensiones axial, en posible propagación. [ARANA / GONZÁLEZ, 2002].	50
1.3.3/11	Modos de grieta . Su superposición describe el caso general de tensiones en un sólido. [ARANA/GONZÁLEZ, 2002].	52
1.3.3/12	(a).Campo de tensiones en el frente de grieta, y (b).Corrección básica en la zona plástica de su punta, mediante la concepción de r_p , radio de plasticidad (que evita la singularidad tensional para $r \rightarrow 0$), en función del límite elástico σ_y , o del límite de fluencia . (Existen otros modelos de corrección). [ARANA / GONZÁLEZ, 2002]	52
2.2.1/1	Características básicas que presenta una fractura por fatiga	61
2.2.1/2	Curvas de Wöhler $\sigma - N$, log-log, de un mismo material con factores de influencia distintos.	62
2.2.2/1	Comportamiento de los metales dúctiles en fatiga en la relación $\sigma_{D,o} (\sigma_m = 0) - \sigma_m$, para flexión pura (rotativa y no rotativa) y axial pura.	73
2.2.2/2	Rotura a fatiga de alto ciclaje, en estado biaxial general, que contiene el asociado a torsión pura en particular.	76
2.2.3/1	Esquema: Conclusiones relativas a la experimentación HCF	79
2.3/1	Comportamiento de la histéresis de las deformaciones pseudoelásticas en fatiga [DOWLING, 2007, en base a LANDGRAF, 1970]	80

2.3.1/1	Diagrama de Haigh, representativo de los modelos de ajuste característicos, $S_a \equiv \sigma_a$, en función de $S_e \equiv \sigma_{D,o} (de \sigma_{a,o})$ y σ_m , en fatiga de alto ciclaje de materiales dúctiles. (Adaptado de [SHIGLEY / MISCHKE, 2002])	87
2.3.1/2	Resultados experimentales respecto al Criterio de Von Mises, de un acero dúctil, ante tensiones alternantes (tensión media, $\sigma_m=0$) debidas a sollicitaciones de torsión y biaxiales a flexión combinados, alternantes. (S_n es la resistencia a la Fatiga para n ciclos). [NORTON, 1999]	92
2.3.2/1	Daño acumulativo no lineal, D, para dos bloques o niveles (o escalones) de amplitud de tensión. (Adaptado de [LEMAITRE-CHABOCHE, 1985])	99
3.3/1	Esquema Funcional del Tratamiento Generalizado del Daño : función efectiva \bar{f} y tensión efectiva $\bar{\Gamma}$	157
4.1/1	Diagramas de interacción de los criterios energéticos de Beltrami-Haigh y Von Mises-Hencky	164
4.2.1/1	Posible influencia en Etapa-II de la tensión τ , en la fractura por fatiga HCF	165
4.2.1/2	Fractura HCF, acero dúctil, $\sigma_{1a}\sigma_{2a}$, $\sigma_m=0$ (zona continua)	167
4.2.2/1	Cilindro de [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924] y elipsoide de [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919], correspondientes a sus criterios, para HCF alternante ($\sigma_m = 0$), conteniendo la Superficie de daño, de función $F(\sigma)=0$	169
4.2.3/1	Diagrama de interacción de la función EDEVF, en HCF, en invariantes I_{1a}, I_{2a} , ($I_{2a}^* = sig\{I_{2a}\}\sqrt{ I_{2a} }$), de las amplitudes de tensión, según ecuaciones (4.2.3.2b,c,d,e). Los puntos, T-T', corresponden a la equitensión (triaxial)	173
4.2.3/2.	Estado tensional biaxial según EDEVF, en HCF definida, $\sigma_{3a} = 0$	178
4.2.3/3	Estado tensional biaxial según derivación triaxial inicial (elipse interna), y según biaxialidad estricta cuestionable (elipse externa). Problema de la unicidad de la solución de EDEVF.	182
4.2.3/4	Función EDEVF propuesta. Variación de la energía de deformación elástica, de expresión formalmente análoga a la energía de deformación, en la estimación de la HCF, $\sigma_m = 0$, de un acero dúctil estándar	186
4.2.3/5	Análisis del parámetro ν^* , en su campo de existencia	187
5.2/1	Análisis de la Ley de Hooke ampliada a nivel de barra en HCF	204
5.3/1	Estructura simbólica a analizar por: a. Método de las rigideces b. Modelo k^φ	206
5.4/1	Semipórtico plano	209
5.4/2	Diagrama de Momentos flectores (mKN), atendiendo al análisis k^φ	215
5.5.1	Esquemización del proceso de estimación de fatiga de alto ciclaje en estructuras	218

Índice de Tablas

2.2.1/1	Valores orientativos de amplitudes de tensión de metales, para N_i, N_D , en función de la resistencia máxima, σ_u	64
2.2.2/1	Valores orientativos del factor de influencia denominado C_{carga}	67
2.2.2/2	Valores orientativos del factor de influencia denominado $C_{tamaño}$	69

SIMBOLOGIA ESPECÍFICA	
RELATIVA AL OBJETO DE LA TESIS	
Las materias básicas mantienen sus nomenclaturas usuales	
a	Longitud de grieta
a _c	Longitud crítica de grieta
a _i	Parámetro del material de Corten – Dolan
a _m	Parámetro del material de Kuhn-Hardrath respecto a la sensibilidad, q, a la muesca
a _w	Parámetro del material de Wöhler
A	Área de sección plana
\bar{A}	Área efectiva de sección plana
[A]	Vector de acciones
A _b	Parámetro del material de Basquin
A _{bt}	Parámetro del material de Bastenaire
A _f	Relación de tensiones en fatiga
A _j	Parámetro del material asociado al daño acumulativo no lineal de acumulación lineal
A _p	Constante de ciclo de Palmgren
A _s	Parámetro de acabado superficial del material de Mischke
A _D	Área dañada de sección plana
A _{FL}	Parámetro del material de Froustey-Lasserre
A _R	Área residual
ASME	American Society of Mechanical Engineers
ASTM	American Society for Testing and Materials
α _p	Valor tensional por historia de carga
α _s	Parámetro de ajuste (Sines)
α _{uc}	Parámetro del material asociado a $\sigma_m < 0$
α _{DV}	Parámetro del material de Dan Vang
Δa	Quantum de fractura
b	Exponente de resistencia a la fatiga (pendiente de la recta de Basquin)
b _{bt}	Parámetro del material de Bastenaire
b _p	Parámetro del material de Palmgren
b _s	Parámetro de acabado superficial del material de Mischke
b _{st}	Parámetro del material de Stromeyer
b _w	Parámetro del material de Wöhler
b _{wb}	Parámetro del material de Weibull
B _b	Parámetro del material de Basquin
B _{wb}	Parámetro del material de Weibull
B _{FL}	Parámetro del material de Froustey-Lasserre
β _{FL}	Parámetro del material de Froustey-Lasserre
β _{DV} (=τ-1)	Parámetro del material de Dan Vang

c	Exponente de ductilidad a la fatiga
C_{bt}	Parámetro del material de Bastenaire
C_{carga}	Factor de influencia por tipo de carga
$C_{i,j}$	Conjunto de factores de influencia sobre el inicio de la HCF
$C_{ijkl}, \mathbf{C}, [C]$	Tensor de rigidez
C_m	Parámetro del material asociado al daño total acumulado
C_o	Constante con dimensiones de esfuerzo
C_p	Parámetro del material de Palmgren
C_{ri}	Parámetro del modificación de inicio de la fatiga HCF
C_{rD}	Parámetro de modificación del límite de fatiga
$C_{superficie}$	Factor de influencia por acabado superficial de la pieza
$C_{tamaño}$	Factor de influencia por tamaño de la pieza
C_{st}	Parámetro del material de Stromeyer
C_w	Parámetro del material de Wöhler
C_{wb}	Parámetro del material de Weibull
$C_{D,j}$	Conjunto de los factores de influencia sobre el límite de fatiga
C_H	Parámetro del material variable por acumulación no lineal del daño, de Henry
CTE	Código técnico de la edificación
C_1, C_2	Constantes interatómicas
d, D	Daño (índice)
d_e	Deformación elástica
d_e	Diámetro equivalente de la probeta
d_i	Daño de un bloque-i de nivel de amplitud de tensión σ_{a-i}
$d_{ij}, \mathbf{d}, [d]$	Tensor de daño
d_n	Variable del estado de la evolución del daño (diferencial de n)
d_p	Deformación plástica
d_u	Deformación unitaria genérica
d_w	Parámetro del material de Wöhler
d_M	Daño máximo
$[D]$	Vector de desplazamientos
D_c	Parámetro de daño crítico de Henry
$[D_\phi]$	Vector de desplazamiento con daño de HCF
D_{ijkl}	Tensor de daño de cuarto orden
δ_{ij}	Delta de Kronecker
$\vec{\nabla}$	Divergencia
$e_{ij}, \mathbf{e}, [e]$	Tensor desviador o de distorsión
E	Módulo de deformación longitudinal (Young)
\bar{E}	Módulo de deformación efectivo
E_{DV1}	Criterio multiaxial de Dan Vang, primera versión

E_{FL}	Criterio multiaxial de Froustey-Lasserre
E_h	Indicador de daño por plano, de Dan Vang
EDEVF	Función de Variación de Energía de Deformación en HCF
ε	Deformación longitudinal unitaria
ε_e	Deformación elástica unitaria
ε'_f	Coefficiente de ductilidad a la fatiga
ε_i	Deformaciones principales unitarias
$\varepsilon_{ij}, \boldsymbol{\varepsilon}, [\boldsymbol{\varepsilon}]$	Tensor de deformación
ε_{ij}^e	Tensor de deformación elástica
ε_{ij}^p	Tensor de deformación plástica
$\dot{\varepsilon}_{ij}^{HCF} (= \dot{\varepsilon}_{ij})$	Evolución del crecimiento del daño HCF
ε_{ij}^p	Tensor de deformación plástica
ε_{mp}	Deformación microplástica unitaria
ε_p	Deformación plástica unitaria
$d\varepsilon_{ij}^{HCF}$	Deformación en el proceso HCF
$\Delta \varepsilon$	Rango de deformación total
$\Delta \varepsilon_e$	Rango de deformación elástica
$\Delta \varepsilon_p$	Rango de deformación plástica
f	Densidad de energía libre
\vec{f}	Densidad de fuerza
f_d	Densidad de energía libre de distorsión
$f_{ij}(\theta)$	Función tensorial del frente de grieta
f_h	Densidad de energía libre hidrostática
$f(), F(), \mathfrak{F}()$	Función
F	Fuerza
$F_{cicl}(t)$	Solicitación externa cíclica
F_f	Factor de forma
F_{FL}	Función de Froustey-Lasserre
φ	Coefficiente o índice de eficiencia al límite de fatiga
φ_N	Coefficiente o índice de eficiencia a fatiga
ϕ	Función de tensión (de Airy)
Φ_f	Ángulo de fase flexión-torsión
ϕ_D	Función escalar de daño
ϕ_{D0}	Valor inicial de la función ϕ_D
$\phi_{D,ij}, [\phi_D]$	Tensor de daño de segundo orden
ϕ^p	Potencial plástico
ΔF	Incremento de fuerza
g	Entalpía libre
G	Módulo de deformación transversal o de corte (en materia de elasticidad)
G	Tenacidad a fractura (en materia de mecánica de la fractura)

G_{FL}	Función de Froustey-Lasserre
$\frac{1}{2} \gamma_{ij}, (i \neq j)$	Deformaciones unitarias de corte o angulares
$[\Gamma_n]$	Tensión asociada a superficie sin daño de versor \vec{n}
$[\overline{\Gamma}_n]$	Tensión asociada a superficie dañada de versor \vec{n}
$h(\cdot)$	Curva de tensión-deformación plástica
$[H^*]$	Matriz de EDEVF de estructura equivalente [H]
$H_{Klij}, \mathbf{H}, [H]$	Tensor de flexibilidad
HCF	Fatiga alto ciclaje (high cycle fatigue)
I_i	Invariantes del tensor de tensiones
I_{ia}	Invariantes del tensor de amplitud de tensiones
I'_i	Invariantes del tensor de deformaciones
I'_{ia}	Invariantes del tensor de amplitud de deformaciones
I_2^*	Eje asociado al invariante I_2
J_i	Invariantes del tensor desviador de tensiones
J_{ia}	Invariantes del tensor desviador de amplitud de tensiones
J_{im}	Invariantes de las componentes medias del tensor desviador
J'_i	Invariantes del tensor desviador de deformaciones
J'_{ia}	Invariantes del tensor desviador de amplitud de deformaciones
$\chi_p(\vec{n}, \vec{m})$	Función de daño asociada a $\vec{\tau}(\vec{n}, \vec{m})$
K	Rigidez barra (en materia de estructura de barras)
K	Factor de intensidad de tensiones a rotura (en materia de mecánica de fractura)
K'	Constante de fluencia
$\mathbf{K}, [K]$	Matriz de rigidez de estructura
K_e	Parámetro de Kececioglu dependiente del material
K'_c	Coefficiente de resistencia cíclico
K_f	Factor de concentración de tensiones a la fatiga
K_{rc}	Factor de intensidad de tensiones a rotura crítica
K_t	Factor de concentración de tensiones geométrico
K^{ij}	$0,5 \cdot K_{33}^{ij}$
K_{33}^{ij}	Rigidez a flexión, de la barra i-j
K^φ	Rigidez de la barra en HCF
$K^{\varphi ij}$	$0,5 \cdot K_{33}^{\varphi ij}$
$K_{33}^{\varphi ij}$	Rigidez a flexión en HCF, de la barra i-j
$K_\varphi(N), K_\varphi(t)$	Índice de concentración de tensión por fatiga a N ciclos o instante t
K_I, K_{II}, K_{III}	Factores de intensidad de tensiones según "modo" I, II, o III de grieta
dK_i	Variación de la rigidez en el ciclo $N=i$

l_1	Parámetro del material (para $\sigma_m \neq 0$)
l_2	Parámetro del material (para $\sigma_m \neq 0$)
L	Longitud
LCF	Fatiga bajo ciclaje (low cycle fatigue)
LDR	Regla lineal de daño (linear damage rule)
LEFM	Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (Linear elastic fracture mechanics)
λ	Constante elástica de Lamé
λ_{ij}	Componentes asociados a $\overline{\sigma_{ij}}$
λ_L	Longitud de onda
$\dot{\lambda}$	Factor de proporcionalidad en evolución de daño por deformación
$d\lambda$	Ver $\dot{\lambda}$
ΔL	Incremento de Longitud
m	Parámetro del material asociado al daño acumulativo no lineal de acumulación lineal
m_a	Parámetro del material (atracción atómica)
m_i	Parámetro del material asociado al daño acumulativo no lineal de acumulación no lineal del bloque-i de σ_{a-i}
m_p	Constante del material, de Paris
m_j	Parámetro de ajuste, del material asociado al daño acumulativo no lineal de acumulación lineal
m_{ni}	Número de núcleos-daño, parámetro del material de Corten-Dolan
m_1	Parámetro del material (para $\sigma_m \neq 0$)
m_2	Parámetro del material (para $\sigma_m \neq 0$)
M	Parámetro del material, multiaxial de Marín
[M]	Matriz de transformación [D] en [D _φ]
MMC _A	Mecánica del Medio Continuo Aplicada
$\mu (=G)$	Constante elástica de Lamé de corte
n	Número de ciclos ($n < N$)
n'	Exponente de endurecimiento por deformación cíclica
n_a	Parámetro del material (repulsión atómica)
n_i	Número de ciclos efectuados por un bloque-i de σ_{a-i}
N, N_f	Número de ciclos de rotura (fallo)
N_{fg}	Ciclos de rotura en la fase de grieta de Paris
N_D	Número de ciclos de rotura HCF
$N_i (=N)$	Número de ciclos a rotura de un bloque-i a σ_{a-i}
N_{i0}	Número de ciclos al inicio de HCF
N_t	Número de ciclos de transición de LCF a HCF, ($\approx N_i$)
ν	Coefficiente de Poisson
ν^*	Parámetro de EDEVF dependiente de ν

ω	Pulsación
p	Parámetro del material asociado al daño
P_1	Parámetro del material, multiaxial de Marín
P_2	Parámetro del material, multiaxial de Marín
ψ	Variable del estado de la evolución del daño
Π	Productorio
q	Sensibilidad a las muescas
Q_s	Ratio tensional doble, torso-flector
r	Distancia al frente de grieta
r_a	Distancia interatómica
r_i	Parámetro relativo a la propagación de la grieta, de Corten-Dolan
r_o	Distancia interatómica de equilibrio inicial ($F=0$)
r_m	Radio de la muesca o entalla
R_f	Relación de tensiones en fatiga
Δr_o	Incremento distancia interatómica de equilibrio inicial
s_D	Variable de evolución de daño común a componentes de $[\phi_D]$
s_i	Tensiones desviadoras o de distorsión principales
$s_{ij}, \mathbf{s}, [s]$	Tensor desviador o de distorsión
$[S_b]$	Solicitaciones extremos barra
$[S_b^{op}]$	Solicitaciones extremos barra en HCF
$[S_c]$	Solicitaciones críticas en barra
S_p	Superficie de la placa
SAE	Society of Automotive Engineers
SEM	Microscopio electrónico de barrido (scanning electron microscope)
σ	Tensión normal
$[\sigma(t)]$	Tensión, en el punto p , en el instante t , aplicada
$\bar{\sigma}$	Tensión efectiva normal
σ_a	Amplitud de tensión normal
$\sigma_{a,o}$	Amplitud de tensión normal ($\sigma_m = 0$)
$\bar{\sigma}_a$	Amplitud de tensión efectiva normal
$\sigma_{ai} (= \sigma_a)$	al inicio de HCF
$\sigma_{ai,oe} (= \sigma_a)$	al inicio de HCF, ensayo estandar
$\sigma_{a-i} (= \sigma_a)$	de un bloque-i

$\sigma_{arm} (= \sigma_{cicl}(t))$	armónica
σ_c	Tensión normal teórica de cohesión
$\sigma_{cicl}(t)$	Tensión cíclica
σ_D	Límite de fatiga a σ_a
$\sigma_{D,o}$	Límite de fatiga ($\sigma_m = 0$) a $\sigma_{a,o}$
$\sigma_{D,o,e}$	Límite de fatiga ensayo estandar
$[\sigma_D(t)]$	Tensión en el punto p, en el instante t, adicional por HCF
σ_e	Límite elástico a tensión normal pura
σ_{eq}	Tensión equivalente normal
σ_{eqa}	Amplitud de tensión equivalente normal
σ_{eqm}	Tensión equivalente media normal
σ'_f	Parámetro de resistencia a la fatiga (Basquin)
σ_{fl}	Tensión normal de fluencia
σ_i	Tensiones principales
σ_{ia}	Amplitud de tension de tensiones principales
$\sigma_{ij}, \sigma, [\sigma]$	Tensor de tensiones
$\sigma_{ija}, \sigma_a, [\sigma_a]$	Tensor de amplitud de tensiones
$\overline{\sigma}_{ija}, \overline{\sigma}, [\overline{\sigma}]$	Tensor de tensiones efectiva
$\overline{\sigma}_{ij}, \overline{\sigma}_a, [\overline{\sigma}_a]$	Tensor de amplitud de tensiones efectiva
σ_{im}	Tensiones medias normales principales
σ_m	Tensión normal media
σ_{max}	Tensión normal máxima
σ_{min}	Tensión normal mínima
$[\sigma_p(t)]$	Estado de Tensión en un punto p, en el instante t
σ_{ru}	Amplitud de tensión necesaria para alcanzar σ_u
$\sigma(t)$	Tensión normal en función del tiempo
σ_u	Resistencia máxima normal
σ_{uc}	Resistencia máxima normal a compresión
σ_{ut}	Resistencia máxima normal a tracción
σ_{xa}	Amplitud de tensión normal, eje-x
σ_{ya}	Amplitud de tensión normal, eje-y
σ_y	Ver σ_{fl}
σ_{yt}	Tensión normal de fluencia a tracción
σ_{yz}	Tensión normal de fluencia a compresión
σ_{za}	Amplitud de tensión normal, eje-z
σ_{BH}	Tensión eaulivalente de Beltrami-Haigh
σ_H	Tensión hidrostática o esférica

$\sigma_H(t)$	Tensión hidrostática en función del tiempo
σ_{VM}	Tensión equivalente de Von Mises-Hencky
σ_{-1} ($=\sigma_{a,0}$)	de tracción alterna (simétrica, $R_f = -1$)
$\Delta\sigma$	Rango de tensión normal
$\Delta\sigma_f$	Incremento de tensión por fatiga, en una muesca
$\Delta\sigma_t$	Incremento de tensión estática, en una muesca
Σ	Sumatorio
t	Tiempo
T	Periodo
[T]	Matriz de transformación deformación –solicitud extremo barra
[T ^φ]	Matriz de transformación-deformación, en HCF
T _{ij} (θ,r)	Término tensorial de desarrollo en serie para el frente de grieta
$[T_{\sigma}^-]$	Tensor de transformación $[\Gamma_n^-]$ en $[\bar{\Gamma}_n^-]$
τ	Tensión tangencial
τ_a	Amplitud de tensión tangencial
τ_{a-i} ($=\tau_a$)	de un bloque – i
$\tau_{a,0}$	Amplitud de tensión tangencial ($\tau_m = 0$)
τ_c	Tensión tangencial teórica de cohesión
τ_e	Límite elástico a tensión tangencial pura
τ_{fl}	Tensión tangencial de fluencia
$\tau_{ha}(t)$ ($=\tau_a$)	en el instante t
τ_m	Tensión tangencial media
τ_{max}	Tensión tangencial máxima
τ_{min}	Tensión tangencial mínima
$\bar{\tau}(\vec{n}, \vec{m})$	Tensión tangencial efectivo según versores ortogonales \vec{n}, \vec{m}
τ_u	Resistencia máxima tangencial
τ_{xya}	Amplitud de tensión tangencial en plano xy

τ_y	ver τ_{fl}
τ_{yza}	Amplitud de tensión tangencial en plano yz
τ_{zxa}	Amplitud de tensión tangencial en plano zx
τ_D	Límite de fatiga a τ_a
τ_{D_o}	Límite de fatiga a ($\tau_m = 0$) a τ_{a_o}
τ_{-1} ($= \tau_{a,0}$)	de torsión alterna (simétrica, $R_f = -1$)
$\Delta \tau$	Rango de tensión tangencial
u	Densidad de energía interna
u _d	Densidad de energía interna (deformación) de distorsión
u _i	Componentes del vector desplazamiento
u _H	Densidad de energía interna (deformación) hidrostática
U	Energía interna (deformación)
U _d	Energía interna (deformación) de distorsión
U _H	Energía interna (deformación) hidrostática
V	Energía potencial
V _K	Volumen tras el ciclo N=K
V _o	Volumen inicial
V _{1m}	Energía de referencia, por tensión media, de Froustey-Lasserre
V _{2a}	Energía de referencia por amplitud de tensión alterna, de Froustey-Lasserre
w _i	Daño acumulado como trabajo neto de un nivel-i de tensión
W (=U)	elástica de deformación
W _a	Energía de deformación elástica por tensión alternante
W _m	Energía de deformación elástica media
W _T	Daño acumulado como trabajo total al fallo

$W_1 (=U_H)$	elástica de deformación
$W_2 (=U_d)$	elástica de deformación
$W_{1a} (=W_1)$	debida a la tensión alternante
$W_{2a} (=W_2)$	debida a la tensión alternante
$W_{1m} (=W_1)$	debida a la tensión media
$W_{2m} (=W_2)$	debida a la tensión media
dW^{HCF}	Trabajo en el proceso HCF
Y	Tasa de liberación de energía por daño

1 INTRODUCCIÓN

Al abordar la introducción a esta Tesis, se plantea una dificultad inmediata, puesto que no puede desligarse de una orientación metodológica previa. Efectivamente, esta tesis se ha desarrollado atendiendo a la necesidad de yuxtaponer, combinar y unificar dos metodologías u orientaciones científicas. La propia de la ciencia aplicada, en el ámbito de la tecnología de materiales, y la propia de la ciencia teórica, en el ámbito de la más rigurosa, o formalizada, ciencia de materiales.

La fatiga de materiales ha tenido un tratamiento experimental muy intenso en los últimos ciento cincuenta años. Se trata de un fenómeno de gran complejidad no sólo por la indeterminación teórica del propio concepto de fatiga, o daño, sino también por la gran profusión de resultados experimentales y formulaciones empíricas que se han desarrollado para su descripción. Considérese que no sólo se está abordando un problema relativo al medio continuo (con la dificultad que ello supone en cualquier interacción que ocurra en este medio), sino que, además, todo ese gran desarrollo experimental se ha llevado a cabo en una no muy amplia gama de materiales hasta las últimas cinco décadas, aunque sí exhaustivamente en metales, especialmente ferrosos.

Se ha planteado este trabajo desde la finalidad de formalizar un marco teórico de desarrollo, coherente con toda esta fenomenología previa. A partir de esta formalización, se ha pretendido el desarrollo de nuevas contribuciones en este campo. Como se observará, esta formalización teórica conducirá a la necesidad de abandonar el tratamiento clásico del daño en materiales iniciado desde la segunda mitad del siglo pasado y fundamentado en términos de variables internas de daño. Este nuevo punto de vista permite un tratamiento formalmente más coherente de la fatiga de materiales en alto ciclaje en procesos donde el daño se produce anisotrópicamente. Así mismo, este esquema formal permite una descripción más adecuada del límite de fatiga en procesos sometidos a estados de tensión generales. Téngase en cuenta en este sentido que la mayor parte de resultados experimentales de fatiga de materiales ha sido obtenida en ensayos uniaxiales de tensión y, por tanto, es sobre esta base experimental sobre la que se ha desarrollado la formalización teórica del daño anisótropo, cuyas referencias experimentales son limitadas y sus configuraciones experimentales difícilmente admiten una generalización sistemática.

Pero no solamente se ha desarrollado esta tesis atendiendo a la necesidad de imbricar fenomenología y formalización teórica de la fatiga en el material, o en el medio continuo. Se ha pretendido un paso adicional y se ha extendido el campo de aplicación de este trabajo al ámbito estrictamente tecnológico, proponiendo en el último capítulo un nuevo procedimiento de cálculo estructural considerando el efecto de la fatiga de alto ciclaje en sus componentes.

De acuerdo a estas consideraciones iniciales, se ha estructurado la introducción a esta tesis en tres apartados. El primero de ellos hace referencia a la justificación del propio trabajo, sus antecedentes y la exposición de sus objetivos. En el segundo de ellos se expondrá la metodología seguida para su desarrollo y el último se centra en la exposición de las referencias básicas de la fatiga.

Pero, con anterioridad al desarrollo de estos tres apartados en los que se estructura esta introducción, se ha considerado adecuada la extensión de ésta exponiendo los

condicionamientos previos, conceptuales y metodológicos, a partir de los que se ha elaborado esta memoria de Tesis.

El autor de esta Tesis proviene de estudios iniciales de Arquitectura Técnica y es actualmente profesor en la Escuela Politécnica Superior de Edificación de Barcelona (EPSB) de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC). Accedió al Doctorado que le lleva a esta Tesis en el Programa de Promoción del Conocimiento del Departamento de Física Aplicada de la Universitat Politècnica de València (UPV), mediante la realización de los cursos correspondientes de Doctorado y la obtención del Diploma de Estudios Avanzados y suficiencia investigadora (DEA). Para ello, previamente, cursó los estudios de segundo ciclo de Ingeniería de Materiales en la actual Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación (ETSIE) de la UPV. El acceso a estos estudios de segundo ciclo estuvo abierto a titulados en Arquitectura Técnica sólo a partir del curso 2002-03, a partir de una modificación de las condiciones de acceso a esta titulación promovida precisamente desde la ETSIE.

Es pues a partir de la formación académica y profesional del Arquitecto Técnico y con una formación adicional en el campo de la Ingeniería de Materiales desde la que el autor de esta Tesis se plantea el desarrollo de su formación doctoral. Como es conocido, el acceso a la investigación para Arquitectos Técnicos ha supuesto históricamente una gran dificultad, dado que no existían estudios de segundo ciclo, extensión natural del título de sólo primer ciclo de Arquitectura Técnica. Esta situación ha evolucionado drásticamente con la definición del título de Grado en Ingeniería de Edificación y con la posibilidad de acceso a estudios oficiales de Máster, que habilitan para el doctorado, para titulados en Arquitectura Técnica. Sin embargo, este cambio se produjo con posterioridad a que el autor de esta memoria decidiese formarse con mayor rigor en el campo de los materiales.

Por tanto, esta Tesis se ha desarrollado desde la orientación de unificar la formación en Arquitectura Técnica con una formación de mayor rigor científico posterior en el campo de los materiales. Pero esta necesidad de unificación no responde sólo al interés o vocación del autor. Responde, también, al interés de contribuir al desarrollo de una línea de investigación, u orientación metodológica de investigación, adecuada a unos estudios previos en el campo de la Arquitectura Técnica, como, tal y como se ha enunciado anteriormente, una extensión natural de tales conocimientos.

De forma breve, aunque contundente pero respetuosamente, se puede decir que dado el alto grado profesional, constatado históricamente, de los Arquitectos Técnicos y Aparejadores, de por sí con contenidos muy extensos, no resulta trivial la tarea de dar más profundidad teórica y formal a tales contenidos, de una forma explícita y concreta, necesaria para abordar posteriormente una especialización que comprenda la investigación.

Permítase al autor, a modo de ilustración, decir que cuando iniciaba los estudios referidos de Ingeniería de Materiales enfocados a la construcción, más de un compañero extrañado le formulaba la pregunta de si un Arquitecto Técnico, o Aparejador, podía saber más de materiales de construcción de lo que ya sabía. Tal cuestión, evidentemente era planteada sin ninguna animosidad, teniendo en cuenta que el control de calidad de los materiales de construcción es una de las competencias fuertes de esta profesión, y que los estudios de Arquitectura Técnica eran concebidos como terminales.

Planteada esta cuestión, se pretendió analizar si el problema intrínseco a la extensión conceptual y metodológica de los contenidos de una formación orientada al ejercicio de una

determinada profesión era una cuestión que sólo se planteaba en el colectivo de Arquitectos Técnicos.

Puede constatar que dicho problema acontece también en otros colectivos con estudios de doctorado históricamente consolidados, tal como indica evolutivamente [GORDON, 1978, 2004], en su publicación, *“Estructuras o por qué las cosas no se caen”*, publicación que influyó sustancialmente en la elección del tema de esta Tesis. De esta publicación es interesante entresacar alguna de sus citas a este aspecto:

- *“A mucha gente –en especial a los ingleses- no les gusta la teoría, y normalmente no se ocupan mucho de los teóricos. Esto parece especialmente aplicable a los temas de resistencia y elasticidad”*.

- *“Los materiales de construcción, la teoría de la elasticidad y el cálculo de estructuras constituyen un grupo de materias imperfectamente conocidas”*.

- *“Mis contactos con estudios en muchas escuelas de arquitectura me han demostrado que la mayoría desconocen las razones por las que sus casas se mantienen en pie. Para ellos este tipo de problemas sólo concierne a los ingenieros mientras que los suyos son objetivos “sociológicos”. “No creo que el trabajo del arquitecto o el ingeniero tenga que estar tan separado”*.

Una disputa clásica en Ingeniería, la de la practicidad, con una fuerte componente intuitiva, frente a los planteamientos teóricos o numéricos más complejos, es descrita también en [GORDON, 1978, 2004]:

- *“..., durante la primera mitad del siglo XIX, la mayoría de estos teóricos de la elasticidad eran franceses,... Como gran parte de estos trabajos eran abstractos y matemáticos, no fueron entendidos o aceptados en general por los ingenieros en activo.... Esto ocurrió especialmente en Inglaterra y Estados Unidos, donde la gente práctica era considerada muy superior a los “meros teóricos”.../ Se cuenta del ingeniero escocés Thomas Telford (1757-1834), que: Estaba singularmente distante de los estudios matemáticos, y ni siquiera estaba familiarizado con los elementos de geometría. /...Telford y sus colegas se oponían no a los métodos numéricos como tales –sentían más que nadie la necesidad de conocer como actuaban las fuerzas en sus materiales- sino a las bases de los mismos. Creían que los teóricos estaban con demasiada frecuencia tan cegados por la elegancia de sus métodos que descuidaban la exactitud de sus hipótesis de partida, por lo que daban una respuesta exacta a un planteamiento equivocado. / Un profundo, intuitivo conocimiento de la inherente perversidad de los materiales y las estructuras, es una de las más valiosas cualidades que puede tener un ingeniero. / Puentes proyectados según las mejores teorías “modernas” por politécnicos como Navier, se hundieron algunas veces. Que yo sepa, ninguno de los cientos de puentes y otras obras de ingeniería que construyó Telford... tuvieron jamás ningún percance serio.”*

- *“Generalmente, los expertos en matemáticas (el autor no se refiere a arquitectos ni a ingenieros) tienen más dificultad en el estudio de la elasticidad. ... La principal dificultad parece consistir en adquirir una cierta capacidad de imaginación para comprender y relacionar, en una estructura, las cargas aplicadas y los esfuerzos resultantes”*.

Se podrá estar más o menos de acuerdo con [GORDON, 1978, 2004], pero hay que apreciar en todo caso el enorme esfuerzo (y en clave de humor) que realiza para intentar decir lo que el

autor de este trabajo considera como primera orientación metodológica a la que debe optar, continuamente, toda disciplina de Grado (y por lo tanto también nuestra Ingeniería de Edificación), que no es otra que una coordinación evolutiva, conjuntiva y comparativa entre el planteamiento intuitivo, la teoría formal y la práctica usual, con contraste experimental siempre que sea posible. Sería un grave error despreciar cualquiera de estos tres elementos, incluida la intuición (siempre que sea contrastable, exigencia común a la teoría y práctica). Cabe recordar, al respecto, al premio Nobel de Física de 1965, R. Feynman (1918-1988), denominado por sus colegas contemporáneos como el más sobresaliente intuicionista de nuestra época, quien declaró en su discurso al aceptar el premio Nobel, que: “ *A menudo, aun en el sentido de un físico, no tuve una demostración de cómo obtener todas estas reglas y ecuaciones, de la electrodinámica convencional... Realmente nunca me senté, como lo hizo Euclides con los geómetras de Grecia y asegurarme de que ustedes las pudieran obtener de un conjunto sencillo de axiomas* ”. [SERWAY, 1993]

En este mismo aspecto se debe también nombrar al más joven de los Nobel galardonados, en el año 2010, Kostya Novoselov, Premio Nobel de Física, precisamente por la innovación en un material bidimensional, el grafeno, que **imaginó** que “*manchando una tira de celo con grafito depositado, pintado con un lápiz en un papel... se podrían encontrar pedazos de este material aislado y accesible a los modernos microscopios electrónicos*” [El Periódico de Aragón, 2010].

De igual forma es imprescindible considerar también el caso opuesto, aquel donde la teoría formal se avanza a su tiempo sin aplicación para su época. Como ejemplo sobresaliente en nuestro campo, cabe citar a Euler (1707-1783), que en dos de sus trabajos [EULER, 1744,1757] plantea y resuelve por primera vez un problema de estabilidad elástica, pandeo de una barra ideal (esbelta), sin aplicación práctica en su época dado que básicamente se construía con madera y con piedra.

Ahora bien, esa primera orientación metodológica conduce a una segunda, necesaria para acotar el concepto de *contribución* acorde al estado actual de la disciplina que se esté considerando, que contribuya claramente a su evolución. La distinción histórica entre contribución y error no es evidente en el caso de la Resistencia de Materiales, objeto de trabajo de esta Tesis. Este arduo aspecto, que marque la diferencia entre lo que es contribución y lo que es error en la evolución de esta disciplina requiere de una búsqueda exhaustiva de referencias y su análisis, lo cual constituiría claramente un trabajo de investigación en teoría del conocimiento o historia de la tecnología, aspecto que se desmarca naturalmente del objeto de esta Tesis.

A pesar de ello, de una minuciosa, pero ya acotada, búsqueda, ha de destacarse el trabajo de [HEYMAN, 2004], del que es suficiente referir por ahora los siguientes aspectos fundamentales para fijar sin ambigüedad la validez o diferencial del binomio “contribución-error”:

- La Resistencia de Materiales debe su nacimiento, como es sabido, a Galileo Galilei (1564-1642), [GALILEO, 1638], mediante el planteamiento inicial de un problema estructural, (determinación de la carga de rotura, de una viga en ménsula a flexión simétrica, de longitud L , para el caso de que la carga fuese puntual, P , situada en su extremo libre), que desemboca directamente en un problema de resistencia de materiales, dada la determinación estática del problema. La solución a la que llega Galileo (para una sección rectangular $b \times h$), $P.L = 1/2 N.h$, siendo $N = \sigma_u .bh$ la resistencia absoluta a tracción de la viga, no es en sí correcta, ya que la solución correcta debería ser $P.L = 1/6 N.h$. La razón es que Galileo asimiló implícitamente el

problema a una distribución uniforme de tensiones de rotura, σ_u , a tracción en el extremo del empotramiento, mientras que se trata realmente de una distribución de tensiones bitriangular tracción-compresión idénticos, en el caso más básico, es decir con la posición de la fibra neutra en eje de la viga, y no en el infinito¹. La figura adjunta, Fig.1/1, muestra una esquematización de este problema y los correspondientes diagramas de tensiones normales, (b) erróneo, (c) correcto).

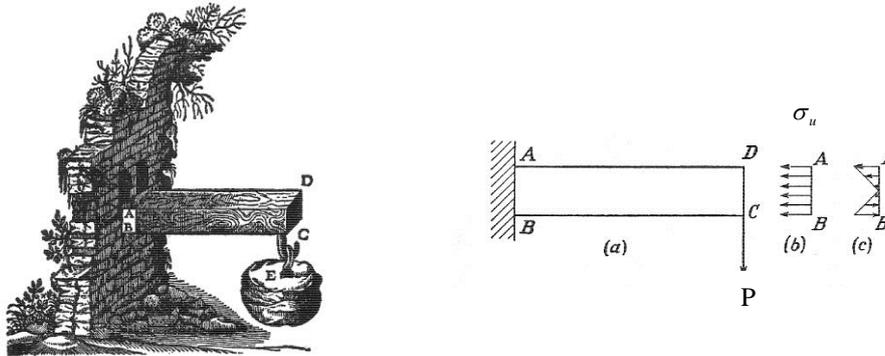


Fig.1/1. Ménsula de Galileo e interpretación de los diagramas de esfuerzos. Notación adaptada. (Figura tomada de [TIMOSHENKO, 1953])

Durante los siglos XVII y XVIII destacados científicos, un buen número de ellos ingenieros, se dedicaron entre otros problemas a “intentar corregir” el análisis expuesto de Galileo, proceso arduo que es de interés conocer mínimamente, dado que es indicativo de la magnitud del esfuerzo que representa el paso de un concepto primario a su concreción final formal. Por ello, considerando el análisis expuesto en [HEYMAN, 2004], previa normalización de la anterior expresión de Galileo $P.L = c.bh^2\sigma_u$. Siendo $c.bh^2$ el Módulo Resistente, resulta relevante presentar brevemente los aspectos más significativos de su evolución hasta su comprensión básica.

Recuérdese que, en su planteamiento, Galileo obtenía $c = \frac{1}{2}$, además de que consideraba que el material era inextensible (rígido), y por tanto se trataba éste de un problema de resistencia última de tensión de rotura, σ_u .

- Mariotte, E. (1620-1684), en publicación póstuma [MARIOTTE, 1686], concluye que la hipótesis de inextensibilidad de Galileo era incorrecta, suponiendo que el material era elástico-lineal y que para un alargamiento final del mismo se producía la rotura. En principio adopta que el eje neutro se encuentra en la base de la sección ménsula, como se ilustran en (b) en la figura, Fig.1/2, por lo que obtiene $c = 1/3$. Sin embargo posteriormente afirma que “puede imaginarse que, mientras que las fibras superiores de la ménsula están traccionadas, las de la cara inferior están comprimidas”, con lo que sitúa entonces el eje neutro en el centro de la sección, (c) en la figura, (dado que supone que la tensión de rotura σ_u , es la misma para tracción que para compresión). De este planteamiento debería haber obtenido el valor correcto del Módulo

¹ Heyman, también presenta un posible error, en un sentido figurado, al decir: “...y manteniendo la posición de la <<fibra neutra>> de Galileo en la base de la sección” según la versión castellana indicada.

Resistente, es decir con $c = 1/6$, pero debido a “un descuido singular” (como señaló [SAINT-VENANT, 1856], dos siglos después), volvió a obtener $c = 1/3$. Todo ello a pesar de haber realizado ensayos con ménsulas de madera, pero de sección circular, cuyos resultados interpretó –sin comentario alguno– como en el caso de secciones rectangulares.

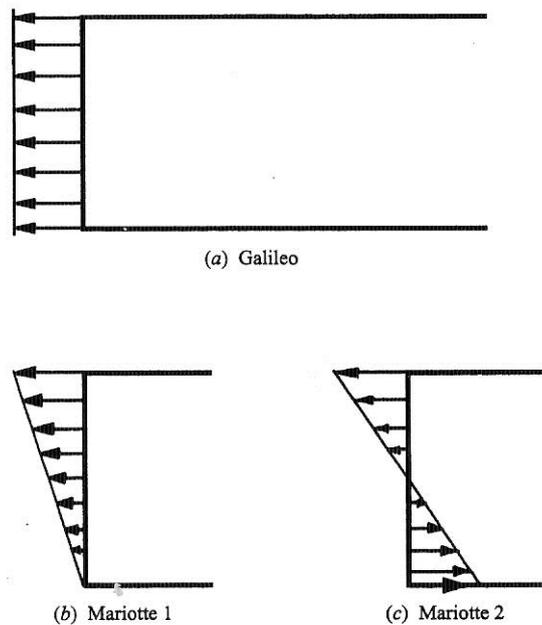


Fig.1/2. Distribución de la tensión normal de la ménsula de Galileo (Figura tomada de [HEYMAN, 2004])

- Varignon, P. (1654-1722), cuestionó la hipótesis lineal de Mariotte, [VARIGNON, 1702], pero situando de nuevo el eje neutro en la base de la sección de la ménsula. Sin embargo planteó un intento de teoría unificada de flexión, indicando que las tensiones no tenían por qué ser linealmente independientes de las deformaciones... y “como expresión general que representaba la ley de tensión–deformación, discutió (de hecho) la fórmula $\sigma = k \varepsilon^m$, para $m=0$ la tensión es constante, y se vuelve a la fórmula de Galileo, mientras que para $m=1$ se obtiene la teoría lineal de Mariotte”...
- Parent, A. (1666-1716). Aunque su trabajo fue prácticamente ignorado en su época, realizó una contribución fundamental al problema tratado de la flexión [PARENT, 1713] corrigiendo básicamente las incorrecciones esenciales hasta el momento: Empleó por primera vez la Mecánica Racional para plantear el equilibrio de la ménsula de Galileo, $\Sigma F = 0$, $\Sigma M = 0$, estableciendo que no había fuerzas horizontales. Ello a su vez le permitió obtener la situación exacta del eje neutro en la sección, considerando la ley lineal de Mariotte, pero detectando que los módulos elásticos de tracción y compresión pueden ser diferentes..., analizando tanto su influencia en el

proceso de rotura del material, como en el desplazamiento correspondiente de eje neutro. “Distinguiendo, así, claramente, entre el estado de servicio (elástico) de la viga, y el estado último que está regido por el comportamiento débil a tracción del material”.

- Coulomb, C.A. (1736-1806), no conocedor de los trabajos de Parent, presenta un análisis de la ménsula con una ley de tensiones de distribución no lineal [COULOMB, 1773], pero es el primero que considera conjuntamente tensiones normales, σ , y tangenciales, τ , indicando que éstas últimas son de poca influencia siempre que la longitud de ménsula, “brazo del par”, (cargada en su extremo), sea sustancialmente mayor que el canto de la misma, como en general acontece. Resuelve que $c = 1/6$ para una pieza de madera perfectamente elástica (caso lineal) con módulos de tracción y compresión iguales. Y, en el caso de una pieza de piedra, supone que el elemento “está compuesto de fibras rígidas, que no pueden ni comprimirse ni estirarse” considerando cierta resistencia a tracción, rotura implícita en la fibra superior en la ménsula tratada, pero infinita a compresión (de lo que es consciente que es imposible), obteniendo de nuevo $c = 1/2$. Es decir, genéricamente, parece ser que *“casi con certeza no consideró la idea de un estado elástico de la viga en servicio”*.
- Navier, C. L. (1785-1836). Definitivamente, en sus *Leçons* [NAVIER, 1826], resuelve el problema de la flexión pura (aunque no considera con claridad como actúa el cortante): establece las condiciones de equilibrio, $\Sigma F = 0$, $\Sigma M = 0$, con claridad y con ello deduce que el eje neutro contiene al centro de gravedad de la sección transversal de la viga. **Supone implícitamente** que las secciones planas permanecen planas durante la flexión (hipótesis de Bernoulli)... En síntesis da un tratamiento formal, por primera vez; primer objetivo generalizado del problema de la ménsula de Galileo (prácticamente doscientos años después), deduciendo en su análisis elástico *“su fórmula básica de flexión $M / I = E / R$ ”* (donde M , es el momento flector, I , el momento de inercia de la sección respecto al eje de dicho momento flector, eje de flexión, R , el radio de curvatura de la barra flectada, y, E , el módulo de Young del material; en cualquier sección considerada)...

El arduo camino recorrido entre el planteamiento inicial de la ménsula de Galileo, 1638, hasta una primera solución genérica satisfactoria, es decir con sentido formal, por parte de Navier, 1826, es suficiente para objetivar el punto aquí tratado. Por otra parte, sería inviable y a la vez redundante tratar de seguir la relación de la evolución desde 1826 hasta la actualidad, además de no ser objeto central de esta tesis. Quizás cabría citar, como colofón a esta temática, el excelente trabajo de Barré de Saint-Venant, (1797-1886), que realiza un análisis completo [SAINT-VENANT, 1856, 1864], aportando también soluciones avanzadas, entre otras a la torsión, y estudia *“las consecuencias de una teoría no lineal”* discutiendo modelos y explorando *“distintas teorías no-lineales semiempíricas...”* considerando la posibilidad de, también, predecir la fractura. Finalmente de forma paralela, no se debe olvidar la fundamental teoría de la Elasticidad, cuyo exponente inicial de primer orden fue Cauchy, A. (1789-1857) a partir de su publicación [CAUCHY, 1822].

Llegado este punto, ya es posible establecer la ambigüedad histórica entre “contribución” y “error”². Así, es evidente que hubiese sido un gran error, valga la redundancia, anular la teoría

² Tal como se vislumbra, no se piense que es un caso único, pues diversos científicos de cierta talla, en la disciplina tratada, por ejemplo Jakob Bernoulli (1654-1705), referente al problema del planteamiento de la curvatura de la elástica de una viga flexada [BERNOULLI, 1705], (algo irritado por perseguir mayor rigor matemático, frente a los

de Galileo (como las correcciones erróneas posteriores de otros científicos) basándose en una imperfección en el planteamiento del equilibrio resistente en el empotramiento de la ménsula, pues, a saber, fue el primero en realizar un planteamiento, con cierta profundidad, del problema, estableció los conceptos explícitos de resistencia absoluta y relativa, y quedó implícito el posterior concepto de Momento o Módulo Resistente de una barra a flexión.

Todo lo anterior indica que el problema expuesto, específico de la Resistencia de Materiales, pero paralelo a otros problemas en muchas disciplinas, no es de fácil y rápida solución, y, en lugar de hablar de contribución efectiva, sería más conveniente emplear el término de aproximación y, por lo tanto, admitir que toda contribución en este campo viene acompañada de cierto grado de un inherente error.

Por otra parte, un campo experimental tan complejo como es el que se refiere a la mecánica del medio continuo, ofrece una gran número de contribuciones, teóricas o empíricas, derivadas de muy variadas configuraciones experimentales. El desarrollo de esta Tesis ha partido de un buen conocimiento de estas referencias. Y algunas de ellas han podido configurarse como confirmaciones analógicas de los resultados de esta investigación.

Así, resulta como mínimo curioso que, al ir planteando y proponiendo enfoques o soluciones al problema tratado en esta Tesis de fatiga de alto ciclaje (HCF), básicamente en metales dúctiles, se vaya a la vez convergiendo hacia la causa o causas equivalentes que se dan en otros problemas paralelos de la resistencia de materiales. Así, como se indicará posteriormente, un factor sutilmente preponderante en la vida a fatiga de un material pasa por la reconsideración del efecto de la tensión tangencial, τ , re combinada convenientemente [CARBAJAL / SANCHEZ, 2009] con la tensión normal, σ , gradualmente en todo el proceso y no solo en la primera fase de iniciación de la grieta. Pues bien, este punto parece que tiende a coincidir sistemáticamente, tanto desde el principio del análisis de otros problemas del material hasta las más recientes referencias de nivel. Así lo constatan diversas referencias:

-Gordon, J.E. 2004, en su exposición divulgativa, anteriormente presentada, ya alerta de lo poco agradecidas que son dichas tensiones tangenciales [GORDON, 1978, 2004]: *“Y verdaderamente me atrevo a decir que muchos de nosotros podemos llegar a la conclusión de que la forma de comportarse a cortante de las cosas es algo que debe, después de todo, dejarse a los expertos. /... Es lamentable, por lo tanto, que las tensiones de cortadura que se encuentran en los libros técnicos sobre elasticidad parezcan pasarse todo el tiempo habitando dentro de objetos campaniformes o los tipos de vigas más aburridos.../.... (pero) no sólo están confinadas a las vigas... sino que se introducen en prácticamente todo lo que hacemos –algunas veces con resultados inesperados-...”*

-Guerra, R (1941-1995), , en su T.13. Flexión Simple, 13.38, [GUERRA, 1985] indica: *“La combinación de (las tensiones) $\sigma_{(y)}$, $\tau_{(y)}$, (refiriéndose a σ_x , τ_{xy} , correlativamente), precisas para que se inicien las deformaciones plásticas es de por sí un problema complejo, no resuelto aún de forma satisfactoria...”*

-El punto anterior queda corroborado genéricamente en plasticidad, también en la importante referencia ya tratada del profesor Heyman: *“Quienes se ocupaban del*

planteamientos de sus predecesores), también consideró erróneamente la posición del eje neutro en el borde de la sección...

desarrollo de la teoría plástica eran conscientes de que las tensiones de cortante afectarían al valor del momento plástico.../ Dadas las imprecisas nociones que había sobre las tensiones de cortante todavía en los decenios de 1940 y 1950, no resulta sorprendente que el problema resultara difícil.” [HEYMAN, 2004]

-En el mismo sentido, y en un nivel avanzado respecto a como se fractura un buen número de materiales, una referencia más reciente y de suma relevancia es la publicación de Pons y Karma: (en la traducción al castellano de [INFORMACIONES-229,2010]) “... han ido un paso más allá para descifrar como se fractura un material cuando se combina la rotura por abertura y por desgarre, denominada modo mixto (modo I + modo III, correspondiente a los denominados de abertura, por σ , y desgarre por τ , normal y tangencial respectivamente a la grieta)” [PONS / KARMA, 2010].

Es evidente que otro punto común fundamental, que se desprende de lo anterior, por efecto de que las tensiones alcancen ciertos valores, es la fractura del material. Conviene, pues, recordar que ésta puede producirse previa deformación plástica, con lo cual es perceptible, o sin deformación aparente en la que la fractura suele sobrevenir sin previo aviso.

Mientras que la primera, con deformación plástica, solo se produce en materiales con cierta ductilidad ante cargas estáticas o incluso cíclicas de bajo ciclaje (LCF), la segunda, por el contrario, no solo se produce en materiales frágiles sino también en materiales dúctiles ante tensiones cíclicas de alto ciclaje, es decir por fatiga HCF, sobre la que se centra esta Tesis.

Se presenta a continuación una muy simple presentación formal inicial de ambos procesos en el caso de elementos sometidos a tensión uniaxial, con un límite de fluencia σ_{fl} , tensión a partir de la que el material pierde en la secuencia de carga sus propiedades elásticas:

Proceso de deterioro plástico (material elasto-plástico perfecto)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad \forall \sigma \leq \sigma_{fl} \Rightarrow \varepsilon, \text{ elásticas recuperables}$$

$$\sigma = \sigma_{fl}, \quad \forall \varepsilon \geq \frac{\sigma_{fl}}{E} \Rightarrow \varepsilon, \text{ plásticas permanentes}$$

donde σ , son tensiones y ε deformaciones, de forma que en la zona plástica el aumento de las acciones exteriores se traducen en deformación plástica, permanente y no en aumento de tensión (ésta no sobrepasará σ_{fl}). La fractura sobreviene por la deformación máxima plástica que admita el material que irá asociada a una tensión última de rotura, σ_u .

Proceso de deterioro por fatiga HCF (básicamente metales dúctiles)

El proceso cíclico básicamente se caracteriza, en fatiga HCF, por

$$\sigma_{f1} > \sigma (\approx 10^3 - 10^4 \text{ ciclos}) \geq \sigma > \sigma_{\text{límite fatiga}} (10^6 - 10^8 \text{ ciclos}) , \quad \varepsilon_{\text{residual}} \approx 0, \text{ rotura}$$

$$\sigma \leq \sigma_{\text{límite fatiga}} , \quad \varepsilon_{\text{residual}} \approx 0 , \quad \text{sin fractura}$$

La rotura se produce por formación de fisura, generalmente iniciada en la superficie exterior, debida a concentración de tensiones, y avanza por la misma causa, en puntos irregulares del material (básicamente imperfecciones o defectos), sin deformación plástica aparente.

Es evidente, y conviene indicarlo, que en la fatiga HCF la sobretensión que se produce en los puntos de concentración de tensiones, sobrepasado un límite, se invierte en rotura - avance de la grieta- y no en deformación plástica aparente.

Esta es pues la situación clásica de la fatiga de alto ciclaje. Se produce esencialmente sin deformación aparente y, por tanto, considerando la repercusión de esta deformación, sin previo aviso. Ahora bien, como ya se ha indicado en esta introducción, esta tesis se enmarca en una formación en edificación. Si hace pocas décadas se pensaba que la fatiga de materiales no parecía tener muchos puntos de contacto con la edificación, hoy en día existen suficientes situaciones que hacen que se tenga en cuenta cada vez más este aspecto. Efectivamente, la complejidad tecnológica de la edificación contemporánea, la cada vez mayor incidencia de la construcción industrializada en este sector abocan a una consideración de la fatiga de alto ciclaje en este campo tecnológico. En este sentido y finalmente, a modo de ilustración, pueden transcribirse las siguientes referencias:

- *“Algunos edificios del área maya padecen <<fatiga>>, y no es para menos; sobre ellos reposan más de 1500 ó 1700 años, y sin embargo se mantienen en pie... / sobre los deterioros que presentan las estructuras mayas en observación”*. Instituto Nacional de Antropología e Historia (INAH) y Tecnología de Mérida (ITM) de México [INAH,2008].
- *“La cuestión lleva de la mano a hablar de fatiga, o sea, de la baja resistencia que experimentan los materiales al someterlos a un gran número de ciclos repetidos de carga y descarga o, más aún, a ciclos alternativos en los que la tensión cambia de signo, pasando de compresión a tracción o viceversa”*. Eduardo Torroja, *Razón y Ser de los tipos estructurales* [TORROJA, 1957]

1.1 Antecedentes, justificación y exposición de objetivos

En este primer punto debe entenderse que la denominación de “antecedentes” es referida estrictamente a su aspecto de mayor precisión inmediata al sentido y contenido de ésta memoria. Efectivamente, pues la disciplina que nos ocupa, fatiga de alto ciclaje básicamente en metales dúctiles, arroja tal complejidad definitiva ya en el propio contexto de sus antecedentes que un posterior epígrafe, dedicado al respecto, ha de considerarse como una descripción incisiva de aquellas concepciones, características, propiedades y particularidades del encaje mínimo esencial para facilitar la coherencia del germen expositivo de este trabajo, entre otros aspectos de carácter más definitorio.

Se entiende pues como antecedente en este epígrafe a aquella configuración explícita actual del fenómeno en estudio, sin relegar su referencia inicial. En este sentido la fatiga de alto ciclaje tiene prácticamente un total reflejo en su planteamiento histórico inicial, salvando las primeras interpretaciones sobre la superficie de fractura producida por el fenómeno. Así, en síntesis, actualmente se considera este problema cíclico bajo un enfoque con una fuerte componente de alta seguridad, dado que los elementos estructurales cuyas piezas trabajan a fatiga suelen ser estratégicos en la utilización civil cotidiana.

Es por ello que, además del alto coste del análisis experimental mediante prototipos, la ingeniería tiende a modelizar el fenómeno atendiendo al sentido empírico clásico referido como tensión-vida, como mínimo para una estimación inicial, tal como se refleja en toda Normativa de países avanzados. Así, por ejemplo, en el ámbito de la edificación, el Código Técnico de la Edificación, [CTE, 2006, 2008], dimensiona elementos metálicos mediante la metodología clásica, en base a las curvas de [WÖHLER, 1871]; aunque bien cierto es que también existe algún caso específico de concepción contemporánea, por ejemplo en la industria francesa, indistintamente del desarrollo de la teoría de daño, en base a la concepción de una variable fenomenológica de daño y de tensión efectiva de [KACHANOV, 1958] y [RABOTNOV, 1968], respectivamente, desarrollada en las últimas décadas por diversos autores, tal como se referirá posteriormente.

Ambas teorías por tanto, la clásica y la del daño, forman parte destacada en el análisis que se realiza en este trabajo que, por otra parte, no tiene ningún antecedente singular previo en el entorno inmediato de este doctorando, dadas las características comentadas en el epígrafe preliminar respecto a la tipología de conocimientos previos de los que proviene el entorno de la edificación básica, de ahí la falta de referencia inmediata a una línea de investigación adyacente en este tema. Esta característica resulta también de interés en cuanto a los objetivos considerados.

El objeto, u objetivo general, de esta tesis consiste en plantear, establecer y configurar las bases necesarias que permitan la definición y el desarrollo de un modelo teórico del proceso de fatiga por alto ciclaje en metales dúctiles, esencialmente en aceros.

Como elementos propios de tal modelo teórico, por su inmediatez en su aplicación a la fatiga de alto ciclaje, se formulan los siguientes objetivos parciales:

- 1 Desarrollo de un nuevo modelo formal de daño coherente con tales bases y susceptible de generalización teórica para procesos anisotrópicos.**

- 2 Desarrollo de un nuevo modelo formal de definición de criterios de fallo, y su evolución, en fatiga a alto ciclaje coherente con tales bases.**
- 3 Evaluación del impacto del daño por fatiga de alto ciclaje en la rigidez de elementos estructurales y desarrollo de un proceso de implementación del daño por fatiga de alto ciclaje en diseño estructural.**

1.2 Metodología

Como ya se ha indicado, parte de este trabajo consiste en una propuesta de formalización teórica del proceso de fatiga en materiales y, especialmente, de la fatiga de alto ciclaje de metales dúctiles. También se ha indicado que se trata éste de un campo muy complejo, con muchas derivaciones en varios campos tecnológicos y con una muy amplia e históricamente dilatada experimentación, especialmente dirigida a metales y estados de tensión simples. Por ello, se consideró que el desarrollo de esta memoria incluyese aquéllas referencias básicas en fatiga comunes y de conocimiento usual en el campo previo a la formación doctoral en este campo. Se ha considerado necesario por dos razones básicas. La primera de ellas es la consistencia en la nomenclatura y simbología utilizada posteriormente con tal conocimiento de partida y la segunda, no menos importante, consiste en que determinados resultados previos son consecuencia de una argumentación teórica o experimental que en el desarrollo de esta memoria son tenidas en cuenta. Por este motivo, se incluye como tercer apartado de esta introducción tales elementos teóricos básicos, no considerando que debieran formar parte de un capítulo que no tuviera tan sólo un carácter introductorio. En el desarrollo de esta memoria se hará alusión, por tanto, a los resultados expuestos en este punto de la introducción, tanto en el capítulo destinado a la descripción del estado actual de la investigación en este campo como a los capítulos posteriores destinados al desarrollo de las contribuciones originales de este trabajo de investigación.

El capítulo 2 está destinado en sus primeros epígrafes (2.1—2.3) a la descripción del estado actual de la modelización de la fatiga de alto ciclaje. En concreto, los dos primeros apartados se centran en la modelización empírica de fatiga de alto ciclaje en ensayos uniaxiales y sus extensiones a varios ejes de acción y a la modelización, también empírica, de la acumulación de daño en procesos de alto ciclaje. El tercer epígrafe, más extenso, está subdividido a su vez en 10 subapartados donde se expone el estado actual de las diversas orientaciones dadas a la investigación en fatiga y generación de daño, no específicamente ahora restringida a alto ciclaje. Como se observará, se presta especial atención a las modelizaciones energéticas, bajo la que es más coherente el tratamiento de procesos irreversibles, como es el caso del daño.

En el apartado 2.4 se presenta la primera contribución de esta Tesis. Tomando como fundamento la fenomenología y modelizaciones expuestas en los apartados precedentes de este capítulo se propone una formalización teórica apropiada para la descripción de la generación de daño en procesos de fatiga a alto ciclaje. Así, se han establecido un conjunto de hipótesis (definidas como tales a partir de una constatación experimental no demostrable teóricamente) y una serie de proposiciones derivadas de estas. Se pretende de esta manera definir un marco teórico axiomático-deductivo básico sobre el que establecer los desarrollos teóricos posteriores. En el análisis de las referencias de investigación consultadas se ha podido constatar que, frecuentemente, se parte en las modelizaciones propuestas de hipótesis no definidas, admitidas sin embargo, inherentemente al propio modelo. Un análisis comparado de estas aportaciones exige la explicitación de estas hipótesis. Es por ello que se ha optado por presentar este esquema teórico formal, evidentemente no único, dado que la selección de las hipótesis de partida dependen específicamente de las configuraciones experimentales que se toman en cuenta en cada caso. Por lo tanto, esta propuesta de modelización teórica constituye efectivamente, una aportación, pero no una contribución esencial de esta Tesis, dado su carácter de *establecida ad hoc* para el objetivo pretendido en este trabajo. Surge, sin embargo, en todo caso, de una imperiosa necesidad de clarificar los términos en que se inicia el daño y éste va incrementándose. Así, a modo de ilustración, ¿es lícito admitir, como hacen algunos autores, tensiones específicamente asociadas a generación de daño, independientes

de las propias tensiones elásticas, siguiendo las modelizaciones propias de la plasticidad, o es más adecuado hablar de deformaciones asociadas al daño? ¿Se inicia el daño desde una tensión mínima o a partir de una deformación mínima? Son aspectos sustanciales a los que, dada la dificultad de definir y describir los mecanismos de generación de daño, hay que dar algún tipo de respuesta cuando no existe una constatación experimental que determine claramente estas cuestiones.

El capítulo 3 ofrece la primera contribución sustancial de esta Tesis. A partir de la modelización teórica del proceso de fatiga de alto ciclaje definida en el capítulo anterior, se analiza el carácter teóricamente débil de una variable intrínseca de daño. Tal variable intrínseca de daño efectivamente se ha generado desde la literatura científica como asociado a ensayos uniaxiales. Sin embargo, su definición en términos superficiales, la dificultad de su extensión a configuraciones experimentales más complejas y el hecho inherente a su definición del desconocimiento del estado inicial del medio son los elementos que han determinado una propuesta de definición y evolución del daño independiente de las modelizaciones previas basadas en tal variable interna que, como se habrá expuesto en el capítulo 2, son absolutamente mayoritarias en el tratamiento de la fatiga. El autor de esta tesis considera que la variable asociada a la evolución del daño no puede ser otra que la propia tensión *real* en cada instante, renunciando de esta forma a la debilidad del argumento de considerar un estado sin daño. Se comprobará que el modelo propuesto supone una generalización del modelo clásico de daño cuando se refiere a procesos uniaxiales. Se ha resuelto igualmente en este capítulo otra dificultad intrínseca a los modelos de daño. Tal dificultad consiste en su extensión a cualquier tipo de acción externa y, consecuentemente, a la extensión a estados anisotrópicos de daño. La extensión se ha realizado teóricamente, con sujeción a la descripción básica del daño en un proceso uniaxial, hecho que permite legitimar los resultados de este capítulo con los ya referenciados en la bibliografía científica, sustentados en su mayor parte, como ya se ha indicado, en modelos uniaxiales. En la medida en que la extensión de este desarrollo lo ha permitido, se ha comprobado la adecuación del modelo propuesto a otras formulaciones anisotrópicas previas.

El capítulo 4 se destina a la exposición de una segunda contribución esencial de este trabajo. Efectivamente, en el capítulo 3 se ha establecido un nuevo modelo de inicio y evolución de daño. Ahora bien, una de las características esenciales de los procesos de alto ciclaje, la existencia de una tensión límite tal que, para valores inferiores a ésta, no es posible en ningún caso la rotura del material por aplicación cíclica de esta tensión, requiere de una formalización susceptible también de ser generalizada a cualquier tipología de ensayo. Con este fin se propone un criterio energético de inicio de fatiga, o de daño, híbrido multiaxial cuya adecuación a resultados previos más sencillos es mostrada. Se define así una nueva superficie límite de crecimiento de daño y su evolución, bajo ecuaciones formalmente equivalentes a las ecuaciones de evolución de deformación plástica.

En el capítulo 5 se introduce el concepto de concentración de tensiones, inherente a la evolución del daño por avance de fisuración en la fatiga de alto ciclaje y se propone una descripción empírica del proceso de acumulación de daño bajo la aplicación de tensión alterna. Efectivamente, se comprobará cómo la generación de daño únicamente se produce en el cuarto de ciclo correspondiente al incremento de la tensión de tracción, constituyendo los restantes tres cuartos (descarga de tracción y compresión) etapas en las que no se produce generación de nuevo daño. Se propondrá una deducción teórica de la ecuación de Basquin basada en la aplicación de la estadística de Weibull partiendo de esta función de concentración de tensiones, proporcionando de esta forma una constatación teórica de la coherencia

fenomenológica al eje Whöler-Basquin-Weibull, según queda constatada experimentalmente en la historia de la fatiga de alto ciclaje. Por otro lado, el enfoque aquí propuesto de la concentración de tensiones permite abordar aspectos referentes a la rigidez, resolviendo a este respecto el caso básico del elemento barra de directriz recta. Una última contribución queda propuesta en esta Tesis, con la aportación de un modelo de estimación estructural que contempla la rigidez de conjunto por efecto de la fatiga de alto ciclaje, frente al actual que, por el momento, este análisis de fatiga se refiere únicamente a elementos para proceder posteriormente a una estimación del efecto conjunto sobre estructuras sencillas. Con efectos ilustrativos se incluye finalmente el desarrollo de una aplicación práctica básica de la modelización propuesta.

Se expondrán como último epígrafe de los capítulos 3, 4 y 5 las conclusiones parciales correspondientes al desarrollo de éstos. Así mismo, como ya se ha enunciado, se indicarán en el epígrafe 2.5 las conclusiones relativas a la formalización del proceso de fatiga de alto ciclaje tratado en 2.4, no esenciales pero sí necesarias para el posterior desarrollo del trabajo.

El capítulo 6 está dedicado al análisis de las conclusiones parciales ya establecidas en el desarrollo de esta memoria y a la formulación de las posibles líneas de investigación que tales conclusiones podrían permitir.

1.3 Referencias básicas de la teoría de la fatiga

1.3.1 INTRODUCCIÓN

Este tercer punto de la introducción se subdividirá a su vez en dos apartados más, con la finalidad también de delimitar este amplio campo teórico y experimental.

El epígrafe 1.3.2 pretende ser una introducción a la fatiga de alto ciclaje, una primera visión del marco global en que ésta se desarrolla, que incluye un desarrollo histórico de este campo, la descripción fenomenológica de la fatiga de alto ciclaje, el tratamiento formal clásico del daño a través de una variable específica de daño y las aproximaciones semiempíricas desarrolladas para tratar el daño acumulativo, base de la fatiga, del material, contrastando este tratamiento macroscópico con elementos propios de la micromecánica con la finalidad de valorar las divergencias entre estos dos campos.

En el segundo epígrafe se exponen las referencias básicas que se han tenido cuenta en el marco de la mecánica del medio continuo en la elaboración de esta memoria. En este sentido, se han considerado cuatro apartados diferenciados, el primero de ellos relativo a los fundamentos de elasticidad, centrándose el segundo en la plasticidad, para pasar a exponer en el tercero los elementos esenciales que describen la fractura de materiales y finalizando en el cuarto con una mínima referencia a la rigidez del material. Efectivamente, la fatiga de alto ciclaje se produce sin deformaciones significativas y, por tanto, cabe situar su marco de desarrollo en el dominio elástico. Pero, como se mostrará, el proceso de generación de daño, irreversible, puede ser descrito bajo un formalismo similar al propio de la deformación plástica, igualmente irreversible. Por último una consideración de los elementos teóricos esenciales de la fractura es requerida en tanto en cuanto son necesarios, siquiera fenomenológicamente, en la descripción del daño como generación y propagación de microfisuras o microgrietas, siendo evidente su influencia sobre la rigidez del material, por extensión local.

1.3.2 UNA VISIÓN GLOBAL DEL PROBLEMA DE LA FATIGA DE ALTO CICLAJE

Abordar el análisis de la Fatiga de Materiales, desde un punto de vista de concepción teórica, requiere, previamente al desarrollo de las referencias básicas, de una presentación básica de la temática que facilite inicialmente una contextualización del problema de la fatiga y, posteriormente la revisión de su análisis bibliográfico. Este primer objetivo se desarrollará atendiendo a las clásicas preguntas del método científico: ¿Cómo y cuando se observa el problema?, ¿cómo se define?, y ¿cómo se postula de manera básica?, que en síntesis es el desarrollo de contenidos esenciales propiamente dicho. Es decir, observación y definición básica previa del problema, indicando su relevancia, que justifique una primera postulación implicando el desarrollo de las referencias básicas.

La observación del problema de fatiga de un material, si bien de una manera vaga, acontece desde la antigüedad, mucho antes de sus primeras referencias documentales sistemáticas a partir de la tercera década del s. XIX. Así, en el campo de la literatura es interesante la precisión con la que diversos escritores describen “problemas o situaciones de mecánica”. Así, por ejemplo, tal como refiere [PARTÓN, 1990], respecto a la descripción, con cierta precisión, que realiza el conocido escritor francés Beyle M.H [STENDHAL, 1838] de la fractura por fatiga en *Mémoires d'un touriste*:

*“El eje de mi carruaje se rompió inesperadamente. Yo examiné atentamente la estructura del hierro en el lugar de la fractura. **El hierro se hizo de grano grueso, por lo visto porque sirve desde hace mucho tiempo (...)**”.*

Aún no se la conocía con la denominación de fatiga, y Stendhal en ese relato no indica la causa mecánica. Cabe también mencionar al novelista español [ZAMACOIS, 1925, 1980], ya muy posterior, que describe implícitamente la causa mecánica y la importancia que tiene la calidad adecuada del material, en *Memorias de un vagón de ferrocarril*:

*“No todos los coches de mi rango podrían jactarse otro tanto. Existe entre nosotros una aristocracia que, sin vacilaciones, acusaré de advenediza: figuran en ella los vagones más jóvenes que yo, fabricados con tablas secadas imperfectamente. Yo les llamo vagones “de bazar”. Su aspecto es bueno, pero carecen de resistencia: pronto sus miembros se resisten del trabajo; crujen, gimen, sus puertas no cierran bien, sus ventanillas cesan de ajustar, **sus muelles fatigados se desmoralizan (...)**”*

Estos dos antecedentes literarios, producto de la curiosidad, permiten comprender cómo, a base de múltiples observaciones constatadas, se llega a la definición, con cierta concisión, de la fatiga de materiales. De un buen número de definiciones existente, provenientes de diversos especialistas, se observa que prácticamente todas tienden a converger. Así, en los términos que la define las normas [ASTM, 1979], la fatiga es aquel “*proceso de cambio estructural, permanente, progresivo y localizado que ocurre en un material sujeto a condiciones que producen tensiones fluctuantes y deformaciones en algún punto o puntos y que puede culminar en grietas o fractura completa tras un número suficiente de fluctuaciones* “. Esta definición, adecuada para una primera descripción sencilla del suceso, sin embargo no indica nada sobre la dificultad de su evaluación, de carácter prácticamente experimental, inherente al propio proceso mecánico de la fatiga. Una presentación básica, a la vez ágil y concreta de la problemática referida, donde ya es incipiente que debe haber una relación entre la fatiga y la duración (ciclos) de un proceso fluctuante y que no depende tan solo de la resistencia del material, se encuentra en [FEODÓSIEV, 1997], en su esencia aún vigente, tal como se cita literalmente a continuación:

*“La teoría de la resistencia de la fatiga tiene caracteres peculiares indiscutibles que la distinguen de otras ramas de la Mecánica ingenieril. Esas peculiaridades provienen del carácter aproximado y grado de confianza insuficiente de los conceptos actuales sobre los procesos de rotura por fatiga. Debido a ello, **adquieren gran importancia recomendaciones de carácter semiempírico**, en tanto que para los cálculos numéricos se introduce una serie de correcciones basadas en los resultados del experimento.*

El paso de la teoría de rotura por fatiga al cálculo de una construcción entraña obstáculos más graves que los que se han examinado <A cargas estáticas>.

*Los métodos ideados hasta ahora permiten calcular, atendiendo al número límite de ciclos, piezas relativamente simples de las máquinas: árbol, biela, émbolo, o sea, elementos similares por su forma a los modelos formalizados. Pero en lo referente al cálculo de estructuras complicadas, del tipo de las de un avión, cuando se trata de garantizar un funcionamiento seguro atendiendo no ya al número límite de ciclos sino a un plazo de servicio determinado, entonces **el divorcio entre estos problemas y la teoría expuesta en el curso de Resistencia de Materiales se torna tan grande que vienen a constituir una disciplina autónoma.***

La dificultad principal reside en la elaboración del criterio que caracterice la resistencia a la fatiga. El interrogante principal que se presenta es: ¿cómo separar (si es que se puede hacerlo) las propiedades del material de las de la pieza? ¿De qué índices de las propiedades del material debe disponerse para poder predecir el comportamiento de la pieza en las condiciones de sollicitación cíclica? ¿Qué experiencias deben efectuarse para obtener esos índices? (...).

<En el cálculo estático> se ha dedicado especial atención a la cuestión de si el estado mecánico del material en un punto queda determinado por el estado tensional en el mismo punto. Esta suposición, precisamente, permite “desvincular” las propiedades del material de las de la pieza durante el análisis de los estados límites, justificándose plenamente en el paso del estado elástico al plástico. Pero, en cuanto a los problemas de ruptura local, esa misma suposición debe aceptarse de un modo general, sólo con reservas. Más complicado todavía es el problema de la resistencia cíclica.

Actualmente, como criterio de rotura por fatiga, se vuelve a adoptar la misma tensión máxima de antes, que se confronta con el límite de fatiga y se considera responsable no ya del estado mecánico local, sino de la resistencia general de la pieza. Es obvio que semejante enfoque no proporciona la plenitud de recursos ni el grado de confianza necesarios para los cálculos prácticos. Surge la necesidad de introducir toda una serie de correcciones.”

De lo expuesto se infiere la complejidad del problema de la fatiga de materiales, pues, ya sólo a nivel del estado tensional de un punto del sólido, se produce un salto cualitativo importante entre la simple observación y definición básica de la fatiga, dado que no es posible un planteamiento intrínsecamente mecánico del problema. Así, de forma básica, queda también reflejado en la comentada referencia de [FEODÓSIEV, 1997], literalmente,

*“La naturaleza de la ruptura por fatiga es harto complicada. Está condicionada por las particularidades de la estructura molecular y cristalina de la substancia. La formación de las grietas de fatiga y su desarrollo subsiguiente tiene lugar dentro de los volúmenes del sólido conmensurables con las dimensiones de los granos cristalinos, y el carácter de la falla está íntimamente ligado con la textura del material. **De ahí que el esquema del medio continuo, utilizado con éxito en la solución de todos los problemas de la mecánica de los sólidos deformables, sólo puede tener en este caso un uso limitado.** (...) De esta suerte, precisamente las mismas heterogeneidades estructurales y desigualdades locales en la repartición de las fuerzas interiores, de cuyo promedio nos valemos y cuya influencia generalmente despreciamos, aparecen aquí como sumamente importantes, e incluso decisivas.*

Las fuerzas internas y, respectivamente, las tensiones, se suelen distinguir según los volúmenes característicos de las zonas abarcadas. Las tensiones que se equilibran dentro de volúmenes que superan considerablemente los de los granos cristalinos, se denominan tensiones de primer género. Son las tensiones cuya determinación se efectúa por métodos de la Teoría de Elasticidad o Resistencia de Materiales, en base al postulado de continuidad. Las tensiones cuyo valor varía substancialmente dentro de los volúmenes conmensurables con los de los granos cristalinos, se llaman tensiones de segundo género.

Finalmente, se suele destacar una clase más de tensiones, las llamadas tensiones de tercer género, que se originan como resultado de una alteración de la regularidad de los enlaces interatómicos en la red cristalina. La magnitud de esas

tensiones varía notablemente dentro de volúmenes mucho menores que los de los granos cristalinos. Por supuesto, no cabe entender la palabra “tensiones” en su sentido directo, por tratarse de volúmenes que no permiten la aplicación del postulado de continuidad ni el paso a superficies infinitamente pequeñas. Pero la terminología se ha asentado y no tiene sentido cambiarla.

Las tensiones de segundo y tercer género no pueden obtenerse por vía de cálculo, pero revélanse experimentalmente en la media estadística. Por lo tanto, será más correcto hablar no ya del valor de las tensiones de segundo y tercer género, sino de su nivel (...)”

Este primer contacto básico al problema de la fatiga permite visualizar su característica multidisciplinar y aceptar una clasificación elemental en base a la misma. Tal como indica [AVILÉS, 2005], pero con reservas, se pueden distinguir de forma general tres disciplinas estándar al tratar el problema, en función de su escala: una, a nivel microscópico, que la asigna a los científicos, otra a nivel mesoscópico, referida a los ingenieros de materiales, y una tercera a nivel macroscópico de referencia a los ingenieros mecánicos y estructurales, entre los que, como no, a veces se producen enfoques contradictorios.

Es necesario un inciso para comentar que la asignación del vocablo científico “exclusivo” es excesivamente restrictiva dado que en cualquiera de los tres planteamientos, de fronteras difíciles de establecer, incluso entre aspectos de la ingeniería, se debe, y si es posible, se realiza Ciencia, dado que, además, en diversas ocasiones planteamientos macroscópicos resuelven o aproximan particularidades microscópicas, y estas en conjunto potencian correcciones macroscópicas. En esencia quizás deba leerse, en vez de científicos, físicos, químicos, matemáticos,..., los cuales también analizan aspectos meso y macroscópicos, atendiendo a la naturaleza del problema, indistintamente de la preocupación individual.

El punto crítico que se ha mostrado perfila la importancia de la temática, aspecto corroborado por el alto índice –in crescendo- de investigación en fatiga de materiales, desde su inicio formal. Ello queda corroborado al revisar la cronología de los hitos más relevantes al respecto, así como un esbozo de su alta importancia social, que a continuación se enumeran sintéticamente en este trabajo, en base a [NORTON, 1999], [SURESH, 2004] y [SCHÜTZ, 1996], que podría tomarse como referencia para un tratamiento más exhaustivo de análisis histórico clásico.

1829	Albert	Primero en documentar la falla por cargas repetidas (cadenas metálicas en minas)
1839	Poncelet	Primero en utilizar el término Fatiga.
1843	Rankine	Analiza la teoría de la cristalización de la Fatiga, reconociendo características propias de la fractura por fatiga
1849	Stephenson	Analiza la responsabilidad del producto asociada con fallas por Fatiga en los ejes de los carros de ferrocarril.
1850	Braithwaite	Primero en utilizar el término Fatiga en una publicación en inglés y analiza la teoría de la cristalización.
1864	Fairbairn	Informa sobre los primeros experimentos sobre cargas repetidas.
1871	Wöhler	Publica los resultados de 20 años de su investigación (1852-1869) de las fallas de los ejes de acero de los

		vagones de ferrocarril, perfecciona la prueba a flexión giratoria, el diagrama S-N, (amplitud de tensión frente a ciclos) y define el límite de resistencia a la Fatiga, indicando que era muy inferior al de cargas estáticas
1871	Bauschinger	Inventa un extensómetro de espejo con una sensibilidad de 10^{-6} , y estudia el esfuerzo-deformación inelástico.
1874	Herbert	Comenzó a desarrollar métodos para el cálculo de fatiga a diferentes niveles de carga cíclica.
1886	Bauschinger	Propone un “límite de fluencia elástico natural” cíclico por debajo del cual no ocurre Fatiga.
1903	Ewing/Humfrey	Descubren las líneas de deslizamiento, las grietas por Fatiga y el crecimiento de grietas hasta la falla, demostrando lo incorrecto de la teoría de cristalización.
1910	Bairstow	Verifica la teoría de Bauschinger respecto a un límite de fluencia elástico natural y el límite de resistencia a la Fatiga de Wöhler.
1910	Basquin	Enuncia la ley exponencial de las pruebas de resistencia a la Fatiga (ecuación de Basquin).
1913	Inglis	Análisis tensional cuantitativo de la concentración de tensiones en placas planas con orificios elípticos.
1915	Smith/Wedgewood	Separan la deformación plástica cíclica de la deformación plástica total.
1921	Griffith	Aplica criterios energéticos para la fractura en sólidos frágiles, y relaciona la Fatiga con el crecimiento de las grietas.
1924	Palmgren	Estudia el daño acumulativo de la vida a Fatiga
1927	Moore/Kommers	Cuantifican datos de fatiga de alto ciclaje para un número significativo de materiales en “The Fatigue of Metals”.
1930	Goodman/Soderberg	Por separado determinan la influencia de los esfuerzos medios sobre la Fatiga.
1937	Neuber	Publica la ecuación de Neuber para la concentración de deformaciones en muescas (traducción al inglés en 1946).
1939	Weibull	Desarrolla los aspectos estadísticos de la Fatiga.
1945	Miner	Estudia el daño acumulativo de la vida a Fatiga (independientemente de Palmgren, 1924).
1953	Peterson	Publica “Stress Concentration Design Factors” con un procedimiento para tomar en cuenta las muescas.
1955	Coffin/Manson	Publican de manera independiente la ley de Fatiga de bajo ciclaje, con base en la deformación (ley Coffin/Manson, referencia definitiva, 1962).
1957	Irwin	Demostró que la amplitud de tensión en el punto de avance de la grieta podía ser expresada mediante una cantidad escalar denominada factor de intensidad de tensiones, K.
1961	Paris	Publican la ley de Paris de mecánica de fractura, para el crecimiento de las grietas por Fatiga, que plantea conjuntamente con Gómez y Anderson.

Por otro lado, cabe destacar que a partir de mediados del pasado S.XX, el volumen de referencias cronológicas resulta inabordable junto a que aún, el grado de relevancia, en general, no está plenamente consolidado. Sin embargo, dentro de la diversificación existente, son destacables dos concepciones relevantes, específicas, que en este trabajo se analizarán:

1955	Sines	Método básico para fatiga multiaxial simple
1958	Kachanov	Concepto de daño escalar, en base a la evolución de la sección dañada.
1968	Rabotnov	Concepto de tensión efectiva, en base a Kachanov.

En cuanto a su importancia social, la relevancia de la fatiga es prácticamente absoluta en tres ejes fundamentales propios de la seguridad y de la economía: el índice de fallos por fatiga, su coste, y los campos de aplicación que alcanza según [SURESH, 2004], [NORTON, 1999] y [DOWLING, 2007], entre otros.

El índice de fallos por fatiga es elevado, del orden del 50% (un ejemplo significativo son las turbinas de los aviones, dada sus características de trabajo, donde la fatiga hasta $10^3 - 10^4$ ciclos, bajo ciclaje, LCF, es del orden del 12%; hasta $10^6 - 10^7$ ciclos, alto ciclaje, HCF, alcanza el 24%; y otros fallos en que la fatiga los implementa llegan al 13%; frente a otros fallos por: sobreesfuerzo, 12%, daño mecánico, 12%, manufactura, 11%, defectos del material, 7%, corrosión, 8%, y térmicos, 1% [SURESH, 2004].

El coste por fallos de fatiga, queda bien patente en la siguiente cita de [NORTON, 1999], transcrita literalmente,

“La falla por fatiga es causa de un costo importante en la economía. Dowling propone, con base en datos del informe del gobierno de Estados Unidos por Reed y colaboradores^[1] que:

“El costo anual para la economía de Estados Unidos por fatiga de los materiales, en dólares de 1982, es de alrededor de 100.000 millones, correspondiendo a aproximadamente el 3% del producto nacional bruto (PNB). Estos costos provienen de la ocurrencia o prevención de fallas por fatiga en vehículos terrestres, vehículos sobre rieles, aeronaves de todo tipo, puentes, grúas, equipos de plantas generadoras de energía, estructuras de pozos petroleros submarinos y una amplia variedad de maquinaria y equipo vario, como artefactos domésticos, juguetes y equipo deportivo.”^[2]

El costo también puede implicar vidas humanas. La primera aeronave a reacción comercial para pasajeros, el Comet británico, sufrió dos accidentes graves en 1954, debido a fallas por fatiga causadas por los ciclos de presurización y despresurización de la cabina. Más recientemente (1988), un Boeing 737 de Hawaiian Airlines perdió un tercio de la parte superior de la cabina en pleno vuelo, a 25000 pies de altitud. Aterrizó con pérdidas mínimas de vidas. Hay muchos otros ejemplos recientes de falla por fatiga de tipo catastrófico. En los últimos 150 años se ha trabajado mucho a fin de determinar el mecanismo real de la falla por fatiga. Las demandas impuestas desde la Segunda Guerra Mundial sobre los materiales, en aplicaciones para naves aéreas y aeroespaciales han motivado crecientes desembolsos en la investigación científica de este tema y ahora está

razonablemente bien comprendido, aunque los investigadores siguen buscando respuestas a preguntas sobre el mecanismo de fatiga”.

[1] R.P.Reed, J.H. Smith y B.W. Christ, *The Economic Effects of Fracture in the United States: Part 1, Special Pub. 647-1, U.S. Dept. of Commerce, National Bureau of Standards, Washington, D.C., 1983.*

[2] N.E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials. Prentice Hall: Englewood Cliffs, N.J. pág 340, 1993.*

Y, en definitiva, en cuanto a sus campos de aplicación, las características de la vida a la fatiga se puede decir que se dan en la mayoría de los campos tecnológicos. Sirva la siguiente simple relación de los más representativos, en los que muchos de sus elementos y estructuras operan bajo el proceso de Fatiga, como visión global de su vasto ámbito:

Automoción

Aeronáutica y Aeroespacial

Defensa Naval

Deporte y Biomecánica (incluso con connotación médica, válvulas para el corazón, prótesis en traumatología,...).

Edificación (edificios de gran altura, ante el viento), y obra civil (puentes ante el tráfico, diques ante las olas,...).

Ferroviaria.

Generación de energía (eólica, nuclear, petrolíferas marinas,...).

Maquinaria diversa (agrícola, de construcción, de producción,...).

Básicamente, en cualquier campo en el que se produzcan tensiones cíclicas, se debe hablar de fatiga. Por ejemplo, la forma de operar de un reactor de fusión es cíclica, y con un cuadro de tensiones de origen térmico y magnético, de valor considerable, por lo que resulta vital obtener la respuesta (fatiga) de los materiales a utilizar ante tales tensiones cíclicas.

La observación y definición básica del problema de la fatiga de materiales, junto a su relevancia social, justifica una primera postulación del problema del desarrollo de las referencias básicas mediante el análisis de los contenidos explícitos fundamentales, base de este trabajo, que a continuación se aborda. Sin perjuicio de una mayor concreción teórica, que será expuesta en el siguiente párrafo, se desarrollará a continuación esta primera exposición de la fenomenología esencial del problema de la fatiga, en la que se introducirán magnitudes propias de la teoría de la elasticidad.

El planteamiento elástico elemental de un estado tensional cíclico se desarrolla en base a un estado de carga cíclica, que genere tensión normal cíclica, $\sigma_{(t)}$ (o, en su caso, tangencial pura cíclica, $\tau_{(t)}$, cuyo desarrollo de contenido es análogo en lo que sigue), en el punto analizado del sólido. Dicha tensión se supone que responde a una expresión armónica [FEODÓSIEV, 1980], de ecuación

$$\sigma(t) = \sigma_m + \sigma_{a,0} \text{sen } \omega t \quad (1.3.2.1)$$

donde t es la variable tiempo, y $\sigma_{a,0}$, σ_m y ω son constantes de estado tensional durante parte, o la totalidad del proceso cíclico; $\sigma_{a,0}$ es la amplitud de tensión para amplitud de

tensión media nula, σ_m se denomina tensión media (aunque realmente es la tensión mitad) y ω es la pulsación con la que el punto analizado recibe el mismo valor y sentido de tensión.

En general la expresión (1.3.2.1) se da en pocas ocasiones, en la realidad práctica del proceso de fatiga, pero se conserva la esencia de las constantes referidas a la vez que define un conjunto total de parámetros de concepto tensional característico de la fatiga, que aquí se define como

$$F_\sigma = \{\Delta\sigma, \sigma_a, \sigma_m, R_f, A_f\} \quad (1.3.2.2)$$

donde

$$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \quad (1.3.2.3a)$$

$$\sigma_a = \frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (1.3.2.3b)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (1.3.2.3c)$$

$$R_f = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}, \quad A_f = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \quad (1.3.2.3d)$$

siendo, σ_{\min} , σ_{\max} las tensiones mínima y máxima de cada ciclo, del proceso de fatiga, que se producen en (1.3.2.1), para $t = 0 + 2\pi n$ y $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, ($n \in N$), respectivamente. $\Delta\sigma$ es el rango de tensiones, σ_a y σ_m las ya denominadas amplitud de tensión (también denominada componente alternante del proceso) y tensión media respectivamente. R_f y A_f son dos relaciones, de tensiones y de amplitud respectivamente, de interés identificativo. Así, si,

$$\begin{aligned} \sigma_m = 0 &\Rightarrow \sigma_a \equiv \sigma_{a,0}, \quad R_f = -1 \quad \text{y} \quad A_f = \infty \Rightarrow \text{Tensión alternante (totalmente)} \\ \sigma_{\min} = 0 &\Rightarrow R_f = 0 \quad \text{y} \quad A_f = 1 \Rightarrow \text{Tensión repetida} \end{aligned} \quad (1.3.2.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \neq 0 \\ \sigma_{\min} \neq 0 \end{array} \right\} R_f \neq 0 \quad \text{y} \quad A_f \neq 0 \Rightarrow \text{Tensión fluctuante}$$

El planteamiento clásico desarrollado en ecuaciones (1.3.2.1) a (1.3.2.4) sugiere en un primer análisis que el proceso de fatiga atiende fundamentalmente a dos tipos de variables, las tensiones cíclicas actuantes y el número de ciclos, hasta que se produce el fallo. Este fue el enfoque que siguió [WÖHLER, 1871], para aceros suaves o dúctiles generando un contenido de carácter experimental básico, que actualizado, responde a las denominadas curvas de Wöhler de fatiga $\sigma - N$, (o S-N), de uso común vigente en la normativa usual, que obedece a la representación estándar de la Fig.1.3.2/1

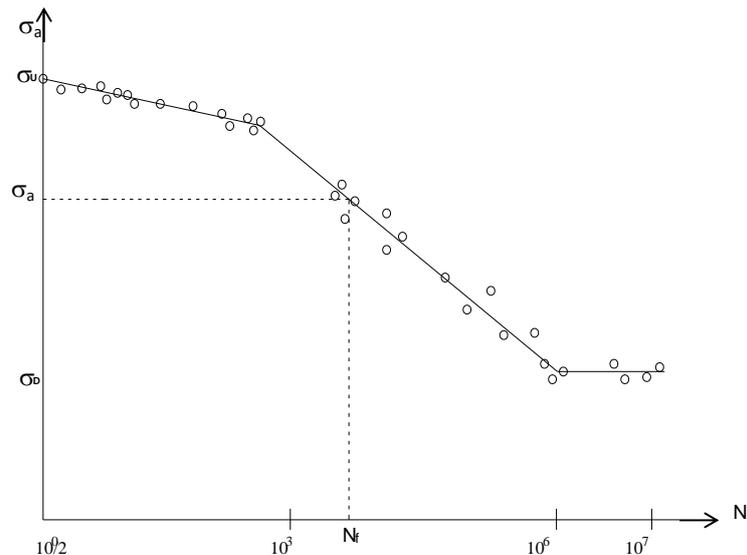


Fig.1.3.2/1 Curva de Wöhler, $\sigma - N$, en log-log, típica de un metal dúctil
 Nota: La representación de probetas es aleatoria

En las curvas de Wöhler se representa generalmente en un sistema de ejes cartesianos la amplitud de tensión, σ_a , en el eje de ordenadas, frente al número de ciclos, N , en el eje de abscisas, expresando así el número de ciclos de vida a la fatiga respecto a un estado de tensiones cíclicas de amplitud de tensión σ_a , según las ecuaciones (1.3.2.2) a (1.3.2.4). Dicha representación suele realizarse en escala logarítmica, $\sigma_a - \log N$, o $\log \sigma_a - \log N$.

La curva de Wöhler, Fig.1.3.2/1, presenta en gran número de materiales, y fundamentalmente en materiales metálicos, al menos dos zonas características. Una primera zona es la denominada de **fatiga de bajo ciclaje**, LCF, fatiga oligocíclica, que se da para valores de amplitud de tensión elevados, en un intervalo del orden de $10^3 - 10^4$ ciclos, zona en la cual se produce en el material dúctil deformaciones plásticas bien perceptibles, Fig.1.3.2/2, previo a su rotura. La segunda zona, denominada de **fatiga de alto ciclaje**, a partir de $10^3 - 10^4$ ciclos, que en ciertos metales llega hasta $10^6 - 10^7$ ciclos, punto en el cual presenta el denominado límite de fatiga, σ_D , Fig.1.3.2/1, (τ_D , en tensiones tangenciales puras), por debajo del cual, $\sigma_a < \sigma_D$, no se produce fatiga del material y por lo tanto no falla por esta causa. Sin embargo, dado que no todos presentan dicho límite de fatiga, se suele definir un límite de fatiga convencional para tales casos, como en el aluminio u otros metales no ferrosos, en los que se toma del orden de $5 \cdot 10^8$ ciclos el límite de fatiga. En la zona de alto ciclaje, HCF, la fractura se produce sin deformación plástica aparente, Fig.1.3.2/2, por lo que no se cuenta con este indicador para detectar el fallo y de ahí su importancia.

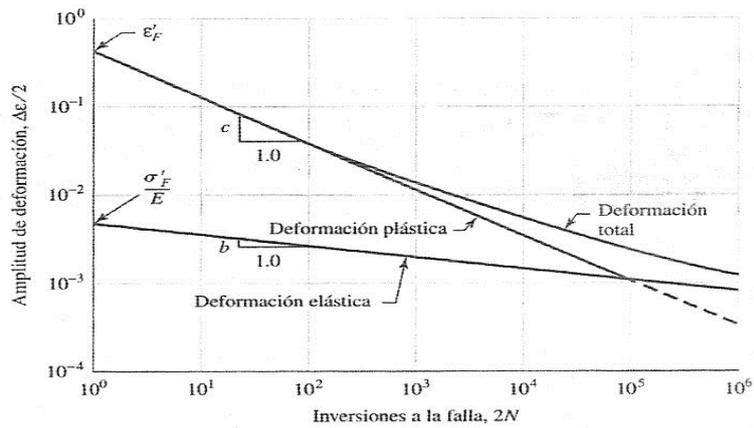


Fig.1.3.2/2 Curva $\epsilon-N$, en log-log, o deformación vida, de un acero dúctil [SHIGLEY / MISCHKE, 2002]. Implícitamente, en el desarrollo anterior, se han introducido las deformaciones, ϵ , lo que podría sugerir un análisis puramente experimental, $\epsilon-N$, del mismo tipo que las curvas $\sigma-N$, lo que en la práctica no es usual dada la dificultad de dicho tipo de ensayo y de su coste, excepto en la zona oligocíclica, reservándolo a una modelización analítica que se tratará en el análisis bibliográfico.

El problema de la fatiga multiaxial, de mayor envergadura y en estado incipiente desde un punto de vista genérico, de partida presenta la misma problemática esencial que en el caso de cargas estáticas (aun no plenamente resuelto), consistente en que se ha de trabajar con la tensión equivalente, la cual se compara a la de fallo uniaxial del ensayo correspondiente, lo que genera criterios de fallo o rotura que, en este caso, por analogía con el planteamiento estático básico, ante un estado de tensiones cíclica, σ_{ij} , en un punto del sólido, se tendrá

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{eqa} = \mathfrak{F}(\sigma_{1a}, \sigma_{2a}, \sigma_{3a}) \\ \sigma_{1a} \geq \sigma_{2a} \geq \sigma_{3a} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \sigma_{eqa} < \sigma_D & \text{ no falla} \\ \sigma_{eqa} \geq \sigma_D & \text{ falla} \end{aligned} \quad (1.3.2.5)$$

La función \mathfrak{F} , en (1.3.2.5), es la función representante de algún criterio de fallo por fatiga, que transforma el espacio de tensiones multiaxial cíclico en un espacio de tensión unidimensional cíclico, asociado al punto analizado, de amplitud de tensión equivalente σ_{eqa} , donde, (si bien, \mathfrak{F} también puede expresarse en términos de σ_{ija}), $\sigma_{1a}, \sigma_{2a}, \sigma_{3a}$ son las amplitudes de tensión de tensiones principales cíclicas del tensor de tensiones σ_{ij} cíclico, expresadas en orden decreciente, y σ_D el límite de fatiga (real o convencional) del material, según el anterior análisis del planteamiento $\sigma-N$ de [WÖHLER, 1871], Fig.1.3.2/1.

Dado el carácter tensional de la fatiga, en el que se conjugan características elásticas, como se desprende del análisis realizado, de la Fig.1.3.2/2, en especial en la zona de alto ciclaje, y para amplitudes de tensión inferiores al límite de fatiga, σ_D , real o convencional, (Fig.1.3.2/1), es también posible expresar σ_{eqa} , en (1.3.2.5), en invariantes de amplitud de tensión

$$\sigma_{eqa} = \mathfrak{F}(\sigma_{1a}, \sigma_{2a}, \sigma_{3a}) = \mathfrak{F}(I_{1a}, I_{2a}, I_{3a}) = \mathfrak{F}(J_{1a}, J_{2a}, J_{3a}) \quad (1.3.2.6)$$

donde I_{ia}, J_{ia} ($i= 1,2,3$) son respectivamente los invariantes correspondientes al tensor de amplitud de tensión, σ_{ija} , y al tensor desviador del mismo s_{ija} , respectivamente.

De igual forma en el análisis del proceso de fatiga, tanto para hipótesis sobre la función \mathfrak{S} , de (1.3.2.5), como en el seguimiento y evaluación del daño elástico, y de la fractura por fatiga, se puede requerir un enfoque energético, que a nivel básico responde al concepto de densidad de energía de deformación, u , o densidad de energía libre, f , una de cuyas expresiones en régimen elástico, tal y como se presentará posteriormente, es

$$u = f = \frac{1}{2} \sigma \circ \varepsilon \quad (1.3.2.7)$$

donde σ y ε representan los tensores correspondientes al medio con las características elásticas que se derivan del proceso en estudio del material y \circ representa una contracción tensorial. Si se admite la ley constitutiva de Hooke, de relación lineal entre tensiones y deformaciones, la densidad de energía libre, según se exprese en función del estado tensional o del de deformaciones, la ecuación (1.3.2.7) adoptará las formas

$$u = f = \frac{1}{2} \sigma \circ H \circ \sigma \quad (1.3.2.8a)$$

$$u = f = \frac{1}{2} \varepsilon \circ C \circ \varepsilon \quad (1.3.2.8b)$$

donde H y C son respectivamente los tensores de flexibilidad y de rigidez, que se relacionan inversamente entre sí, en el caso lineal. Sin entrar en este punto en la forma de tales tensores, ambos podrán expresarse en términos de las constantes elásticas módulo de Young, E , y coeficiente de Poisson, ν . Es muy útil en lo que seguirá la expresión desarrollada de (1.3.2.8a) en términos de las componentes del tensor de tensiones:

$$u = f = \frac{1}{2E} \left[\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 + \sigma_{3a}^2 - 2\nu(\sigma_{1a}\sigma_{2a} + \sigma_{2a}\sigma_{3a} + \sigma_{1a}\sigma_{3a}) \right] \quad (1.3.2.9)$$

La energía elástica puede descomponerse en dos términos. Uno de ellos, denominado tensión hidrostática, no produce deformaciones sino tan sólo cambio de volumen. La segunda de ellas, denominada como energía de distorsión, mantiene el volumen pero determina un cambio de forma y es especialmente relevante en el contexto de este trabajo. La expresión de la energía libre de distorsión por unidad de volumen es, también en términos de las componentes del tensor de tensiones,

$$u_d = f_d = \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})^2 + (\sigma_{2a} - \sigma_{3a})^2 + (\sigma_{3a} - \sigma_{1a})^2 \right] \quad (1.3.2.10)$$

Un aspecto inmediato que es necesario considerar en el desarrollo de los contenidos básicos para analizar el problema de la fatiga consiste en que la secuencia cíclica tensión-deformación deteriora, o daña, el material hasta su fractura. Esta evidencia experimental introduce el concepto de daño, que en fatiga clásica únicamente se considera como función directa del número de ciclos aplicados, distribuidos, para una mejor aproximación al contexto experimental, en bloques de ciclos de igual amplitud de tensión. De esta forma, la expresión más básica del daño acumulado, d_i , tras la aplicación del i -ésimo bloque es:

$$d_i = \frac{n_i}{N_i}, \quad n_i \leq N_i \quad (1.3.2.11)$$

donde n_i es el número de ciclos realizados por el bloque i de amplitud de tensión σ_{a-i} , de fallo a fatiga a en N_i ciclos. En base a este planteamiento lineal, formulado en la llamada teoría del daño acumulativo [PALMGREN, 1924]-[MINER, 1945], se considera el daño neto como el trabajo neto, o absorbido, w_i , durante el proceso de fallo, respecto al daño total, también considerado como el trabajo total, W_T , de dicho proceso de fallo, el cual es independiente del estado tensional con el que se alcanza. Por ello, en el sentido de [OSGOOD, 1982], [LALANNE, 2002] en sus referencias [LANGER, 1937] y [BLAND / PUTNAM, 1946], [AVILÉS 2005], resultará la ecuación

$$\frac{w_i}{W_T} = \frac{n_i}{N_i}, \quad n_i \leq N_i, \quad w_i \leq W_T \quad (1.3.2.12)$$

y puesto que para el total de los n bloques de tensión cíclica,

$$\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{W_T} = \frac{W_T}{W_T} = 1 \quad (1.3.2.13)$$

entonces, por (1.3.2.11)-(1.3.2.13), se tiene

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (1.3.2.14)$$

que indica que el daño que se acumula en el proceso de fatiga no puede superar un índice unidad. Obsérvese que esta formulación responde exclusivamente a la realidad empírica y no involucra magnitudes de tensión o de deformación en el proceso de fatiga.

En el estudio de la fatiga, este trabajo ha de considerar necesariamente un enfoque ampliamente desarrollado en las últimas décadas. Este enfoque define lo que se ha dado en llamar Mecánica del Medio Continuo Dañado y está fundamentado en la identificación del daño a través de una variable, genéricamente denominada variable D de daño, de carácter escalar e isótropo en sus inicios [KACHANOV, 1958], bajo la premisa de que en el proceso de fatiga de un material se va produciendo daño elástico indistintamente de que se produzca daño plástico. Su origen es esencialmente fenomenológico,

$$D = \frac{A_D}{A}, \quad A_D \leq A \quad (1.3.2.15)$$

donde A_D , A , son respectivamente, el área dañada y el área sin daño de una determinada sección del material. Este planteamiento del daño genera, [RABOTNOV, 1968], el concepto de tensión efectiva $\bar{\sigma}$,

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} \quad (1.3.2.16)$$

donde σ es la tensión inicial sobre el punto estudiado del material no dañado, expresión de obtención inmediata, a partir de (1.3.2.15) y del concepto de tensión normal, si se considera, por simplicidad, un modelo unidimensional, una sección de superficie A_D de material dañado sometida a una fuerza dada normal a la sección. Como se observa, la dificultad, en primer término, de esta definición consiste precisamente en la valoración de las superficies dañadas y sin dañar, por lo que se recurrió a la posibilidad de detectar este daño en términos de parámetros elásticos medibles.

Así, a partir del denominado principio de deformación equivalente [LEMAITRE, 1971], hipótesis que admite que la deformación del medio dañado ha de ser la misma que la del medio ficticio con valores efectivos, y admitiendo la ley constitutiva de Hooke, puede obtenerse una relación entre el módulo de Young real y un módulo de Young efectivo correspondiente al medio dañado,

$$D = 0, \text{ material sin daño, } \quad \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \quad (1.3.2.17)$$

$$D \neq 0, \text{ material dañado, } \quad \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E(1-D)} \quad (1.3.2.18)$$

siendo ε_e , la deformación longitudinal unitaria equivalente elástica. A partir de las dos ecuaciones anteriores es inmediata la relación

$$\bar{E} = E(1-D) \quad (1.3.2.19)$$

donde \bar{E} y E son respectivamente los módulos efectivo y de Young indicados anteriormente. De esta forma, la comparación entre el módulo de Young tras la producción de daño por fatiga y el módulo de Young inicial proporciona la medida del daño a través de la variable D .

La realidad experimental indica que en el proceso de fatiga varían las propiedades del material, al menos en la zona o zonas de los puntos de máxima amplitud de tensión. Así, de las curvas de Wöhler, Fig.1.3.2/1 se infiere que la resistencia del material ha disminuido sustancialmente, de σ_u para carga estática a σ_D para carga cíclica, aunque no ofrece información sobre ninguna otra propiedad. Sin embargo, la expresión (1.3.2.19) presenta una posible cuantificación de E en función del daño.

Puesto que el módulo de Young E es uno de los parámetros fundamentales de los materiales deformables, en nuestro caso de los metales, es esencial contrastar o contraponer esta orientación macroscópica con la derivada de un análisis a nivel atómico, puesto que éste puede igualmente proporcionar información sobre la variación del módulo elástico con daños o dislocaciones de la red cristalina del metal. Por tanto, se expondrá a continuación brevemente la obtención, en el medio microscópico, de un valor aproximado del módulo de Young, analizando la naturaleza y número de parámetros de que depende, así como el valor aproximado de las tensiones de cohesión teórica del material en cuanto a tensiones normales, σ_c , y tangenciales, τ_c , esperadas de una ordenación atómica regular, propia de los materiales cristalinos, considerando el posible efecto del daño.

Así, considerando en una red atómica regular, la interacción aislada entre dos átomos de radio atómico r_0 (sin tener en cuenta el orden de influencia de la interacción del resto de los átomos

de la red con respecto a ellos), analizando el problema conjuntamente con las curvas de Condon-Morse [CONDON / MORSE, 1929], de la energía potencial, V , y de las fuerzas de atracción-repulsión, F , [ANDERSON et al, 2002], para un pequeño desplazamiento, Δr_0 , de la posición de equilibrio producido por un incremento de fuerza, ΔF , que generará una tensión normal, σ , y una deformación elástica, ε , se obtiene

$$\sigma \approx \frac{\Delta F}{r_0^2}, \quad \varepsilon \approx \frac{\Delta r_0}{r_0} \quad (1.3.2.20)$$

Las relaciones anteriores proporcionan una estimación del módulo de Young,

$$E \approx \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\Delta F}{r_0 \Delta r_0} = \frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)_{r=r_0} \quad (1.3.2.21)$$

Y, considerando Condon-Morse,

$$V = -\frac{C_1}{r_a^{n_a}} + \frac{C_2}{r_a^{m_a}} \quad (1.3.2.22)$$

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{n_a C_1}{r_a^{n_a+1}} + \frac{m_a C_2}{r_a^{m_a+1}} \quad (1.3.2.23)$$

donde, C_1 y C_2 son constantes dependientes del material, n_a y m_a son parámetros dependientes del tipo de enlace atómico y r_a la distancia de separación interatómica.

Considerando (1.3.2.21) en la derivación de (1.3.2.23), y puesto que r_0 se obtiene para la posición de equilibrio, donde la energía potencial presenta un mínimo ($F=0$), resulta,

$$E \approx \frac{n_a C_1 (n_a - m_a)}{r_0^{n_a+3}} \quad (1.3.2.24)$$

Una primera observación de (1.3.2.24) ya indica que el problema de determinar el módulo de Young microscópicamente se dificulta sensiblemente, pues dependerá al menos de la determinación de tres parámetros C_1 , n_a , m_a , en correlación con el material y tipo de enlace, para un valor conocido de r_0 .

Si bien (1.3.2.24) es aproximada, permite un análisis lo suficientemente aceptable. En ciertos casos de enlace atómico, las distancias interatómicas varían según la dirección en un cristal único, por lo que el módulo de Young, E , dependerá también de la dirección de la tensión respecto a los ejes cristalinos. En síntesis, los monocristales son elásticamente anisotrópicos, E varía según la dirección en que se mida. Se observa así una primera estimación del ámbito diferenciado entre los planteamientos microscópico y macroscópico pues, en éste, el módulo de Young es prácticamente constante, dado que muchos materiales, como los metales, se presentan de manera que sus monocristales están orientados aleatoriamente tendiendo a una gran homogeneidad e isotropía macroscópica.

Por otro lado, la experiencia indica que la obtención de E , según planteamientos como el indicado por (1.3.2.24) supone determinar un mayor número de parámetros, C_1 , n_a y m_a en este caso, y, por tanto, una importante complejidad experimental, mientras que macroscópicamente E se obtiene directamente en un ensayo de tracción simple ($E = \sigma/\epsilon$). De ello se infiere que, en términos generales, para comportamientos de carácter macroscópico el estudio deba realizarse macroscópicamente. Evidentemente, en el caso de la fatiga esta anterior aseveración no es tan evidente, pero un enfoque estrictamente microscópico del problema parece, por ahora, inabordable.

Buscando una conexión entre los valores macroscópicos y microscópicos, una dificultad aparece ya como evidente. En la ecuación (1.3.2.24), ¿la variación por daño afecta a todos sus parámetros o tan sólo a algunos y en qué medida? Obviamente, la respuesta a esta cuestión es inabordable, precisamente por el carácter exclusivamente fenomenológico y macroscópico de la variable de daño D .

En cuanto a la vertiente de la estimación de las tensiones teóricas de cohesión σ_c y τ_c del material, de interés por ser las máximas teóricas, previo al inicio del proceso de fractura, desde el punto de vista atómico, en una red cristalina regular, es posible también realizar una simple estimación equivalente a la realizada para el módulo de Young.

Efectivamente, si en la curva de fuerza-distancia atómica de Condon-Morse, [CONDON / MORSE, 1929] se aproxima esta por media onda sinusoidal coincidente con la posición de su fuerza máxima, $F_{máx}$, que es de atracción, imponiendo que dicha onda tenga una longitud del orden de la distancia interatómica, $\lambda_L = r_0$, entre los átomos de la red cristalina, lo que implicaría que se desplazaría un átomo a la posición del contiguo en el sentido de dicha fuerza, provocándose la rotura del enlace correspondiente e influyendo en el mismo plano al resto de los enlaces, se obtendría, de acuerdo con (1.3.2.20), considerando que para pequeños desplazamientos la relación de fuerza es lineal,

$$F \approx F_{máx} \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{\Delta r_0}{r_0}\right) \approx F_{máx} 2\pi \frac{\Delta r_0}{r_0} \quad (1.3.2.25)$$

$$\sigma \approx \sigma_{máx} 2\pi \cdot \epsilon \quad (1.3.2.26)$$

Y, por la ley de Hooke en (1.3.2.26), resulta un valor aproximado para la tensión normal teórica de cohesión

$$\sigma_{máx} \approx \frac{E}{2\pi}, \quad \sigma_c = \sigma_{máx} \quad (1.3.2.27)$$

y para la tangencial teórica de cohesión, dado que $\tau_{máx} = \sigma_{máx} / 2$, en este caso, τ_c

$$\tau_{máx} \approx \frac{E}{4\pi}, \quad \tau_c = \tau_{máx} \quad (1.3.2.28)$$

La experiencia muestra que los valores teóricos de cohesión σ_c , τ_c , son muy distantes con la realidad (aun con cálculos más precisos de la tensión teórica, σ_c oscila entre $E/5$ y $E/30$), que

son muy inferiores a dicha predicción, hasta del orden de cientos de veces menor, debido a la presencia de defectos en el material, ya sean intrínsecos como dislocaciones, o de formación o manufactura, como microgrietas, entre otros, lo que de por sí implica el concepto de daño, y su influencia directa en procesos cíclicos como la fatiga, implementándolos.

Se ha aportado en este párrafo una primera exposición, muy global, del fenómeno de la fatiga de alto ciclaje. Se han expuesto las consideraciones fenomenológicas esenciales y se han introducido los elementos básicos en la descripción de este proceso, tales como la situación límite de daño, su relación con variables energéticas y una primera definición fenomenológica del concepto de daño, para pasar posteriormente a la valoración del grado de adecuación de la perspectiva macroscópica (esencialmente, en el dominio de la mecánica del medio continuo) en la descripción de este proceso frente a un análisis desde la perspectiva microscópica, atendiendo al hecho de que, esencialmente, el daño se produce en este dominio. Se ha comprobado que la aproximación macroscópica es más adecuada en la descripción del deterioro de las propiedades de rigidez mecánica del medio. En el apartado siguiente, por tanto, se expondrán aquéllos elementos de la mecánica del medio continuo que se tomarán como referencia teórica en el desarrollo de esta Tesis.

1.3.3 ELEMENTOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO PARA EL ESTUDIO DE LA FATIGA DE ALTO CICLAJE.

1.3.3.1 Elementos de Elasticidad Lineal.

La hipótesis de la continuidad del medio material permite definir el estado de tensión en un punto mediante un elemento de volumen infinitesimal, asociado a dicho punto en el sistema cartesiano de ejes ortogonales, el cual contempla en cada una de sus caras las tensiones que se generan en las mismas producto del equilibrio con el resto del sólido, como se muestra en la Fig.1.3.3/1.

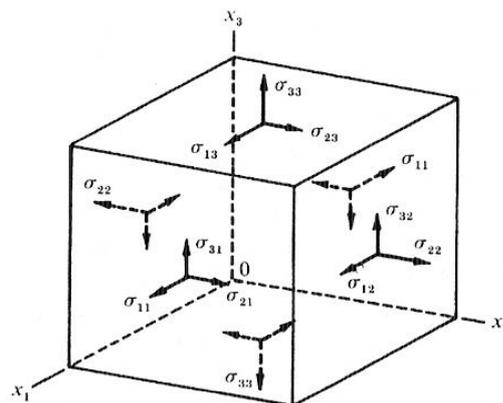


Fig. 1.3.3/1 Definición de las componentes de tensión en un elemento de volumen diferencial, dx_1 , dx_2 , dx_3 [SURESH, 2004].

El estado tensional, así definido, puede representarse mediante el tensor de tensiones, σ ,

$$\sigma = [\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.3.3.1)$$

en cuya diagonal se representan las tensiones normales, y cuyas componentes no diagonales son las tensiones tangenciales.

El equilibrio mecánico exige que el tensor de tensiones sea simétrico,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.3.3.2)$$

y que su divergencia anule a la densidad de fuerza \vec{f} , o fuerza por unidad de volumen en el punto considerado.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$$

o, vectorialmente,
$$\vec{\nabla} \sigma + \vec{f} = 0 \quad (1.3.3.3)$$

y en el caso de ausencia, o insignificancia, de dicha fuerza,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= 0 \\ \vec{\nabla} \sigma &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.3.4)$$

Puesto que el tensor de tensiones σ , de (1.3.3.1), es simétrico, entonces es diagonalizable en cualquier punto del sólido, pudiéndose elegir un sistema de ejes de coordenados (principales del tensor) de forma que sólo sus componentes diagonales no sean nulos ($\sigma_{ij}=0$, si $i \neq j$, es decir tensiones tangenciales nulas); estas tensiones, denominadas tensiones principales, que se representarán como $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, se obtienen como soluciones en la ecuación en σ_0

$$\det(\sigma - I\sigma_0) \equiv |\sigma - I\sigma_0| = 0 \quad (1.3.3.5)$$

donde I es la matriz identidad. La ecuación (1.3.3.5) adopta la forma

$$\sigma_0^3 - I_1 \sigma_0^2 - I_2 \sigma_0 - I_3 = 0 \quad (1.3.3.6)$$

donde los coeficientes I_1, I_2, I_3 son invariantes ante un giro de ejes, y toman la forma

$$I_1 = \text{Tr} \sigma = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \equiv \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) = \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}) = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - I_1^2) \equiv -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \end{aligned}$$

$$I_3 = \det [\sigma_{ij}] = \det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \equiv \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (1.3.3.7)$$

Si los valores numéricos de las tensiones principales se asignan de tal forma que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, se infiere una expresión básica para la tensión tangencial máxima, $\tau_{m\acute{a}x}$ ($\sigma_{ijm\acute{a}x}$, $i \neq j$), a partir del tric\u00edrculo de Mohr, [MOHR, 1882], Fig.1.3.3/2, que posteriormente ser\u00e1 fundamental en los criterios de plasticidad.

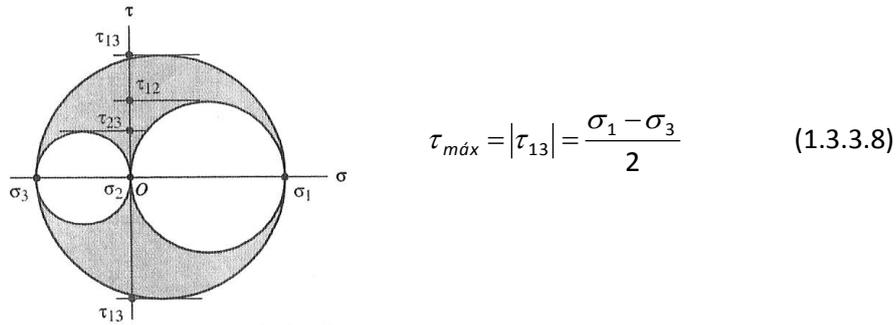


Fig.1.3.3./2 Tensiones principales y tensi\u00f3n tangencial m\u00e1xima, [NORTON, 1999]

Resulta tambi\u00e9n conveniente, expresar el tensor de tensiones σ , de (1.3.3.1), como el efecto de la suma de dos tensores

$$\sigma = \sigma_H I + s \quad (1.3.3.9)$$

donde σ_H se denomina tensi\u00f3n hidrost\u00e1tica, o esf\u00e9rica, media de las tensiones normales que solo produce cambio de volumen en el elemento,

$$\sigma_H = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{I_1}{3} \quad (1.3.3.10)$$

y s es el tensor denominado desviador o de distorsi\u00f3n que s\u00f3lo produce cambio de forma en el elemento, con una influencia clara en la deformaci\u00f3n pl\u00e1stica, que se obtiene al sustituir (1.3.3.10) en (1.3.3.9),

$$s = \sigma - \frac{I_1}{3} I \quad (1.3.3.11)$$

Operando de igual forma que para σ , en (1.3.3.5), (1.3.3.6) y (1.3.3.7), se obtienen los invariantes de s de inter\u00e9s relevante en el posterior estudio de la plasticidad, en especial J_2 ,

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \sigma_{ii} - I_1 = 0 \\
 J_2 &= \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \equiv \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\
 J_3 &= \frac{1}{3} (s_{ij} s_{jk} s_{ki}) \equiv \frac{1}{3} s_1 s_2 s_3
 \end{aligned} \quad (1.3.3.12)$$

donde s_1, s_2, s_3 son las tensiones principales del tensor desviador s .

El estado tensional en un sólido lleva asociado, en general, en cualquier punto, un estado de deformación explicitado por un tensor de deformación ε , cuyas componentes están relacionadas con las componentes u_i del vector desplazamiento, del punto donde se produce, por la ecuación

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.3.3.13)$$

El tensor de deformación en un punto adopta usualmente la forma

$$\varepsilon = [\varepsilon_{ij}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.3.3.14)$$

Por (1.3.3.13) el tensor de deformación es simétrico,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (1.3.3.15)$$

donde, para $i=j$ las deformaciones unitarias longitudinales son:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (1.3.3.16)$$

y para $i \neq j$, las deformaciones unitarias de corte, o angulares, que por (1.3.3.15) resultan

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ji} \quad (1.3.3.17)$$

Dada la estructura algebraica del tensor ε , (1.3.3.14), se puede proceder de igual forma que con el tensor σ , (1.3.3.1), pudiéndose definir y obtener deformaciones principales e invariantes del tensor de deformación ε , así como las componentes e_{ij} del tensor e , desviador de deformaciones, mediante la aplicación de las expresiones (1.3.3.5) – (1.3.3.12), sustituyendo σ por ε , s por e , y en (1.3.3.8) $\tau_{m\acute{a}x}$ por $\frac{1}{2} \gamma_{m\acute{a}x}$. A sus invariantes se les denominará de igual forma pero con una tilde, $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3$, y $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3$ respectivamente.

En (1.3.3.16) y (1.3.3.17) se observa que las seis deformaciones, que se pueden dar en el espacio, dependen únicamente de las tres componentes, u_1, u_2, u_3 , del vector desplazamiento que las ha de provocar, por lo que dichas deformaciones no pueden ser todas arbitrarias, debiendo cumplir unas condiciones denominadas de compatibilidad. Dada la importancia en Resistencia de Materiales de los estados planos de tensión y/o deformación, se indicarán a continuación las condiciones de compatibilidad para la deformación plana. Así, tomando $\varepsilon_{3i} = 0$ ($i = 1,2,3$),

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (1.3.3.18)$$

se obtienen tres deformaciones provocadas por dos componentes de desplazamiento, u_1 y u_2 , por lo que sus valores deberán estar ligados entre sí por una ecuación de compatibilidad, que se obtiene de (1.3.3.18) a partir de sus segundas derivadas respecto a las coordenadas del punto

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 0 \quad (1.3.3.19)$$

Las condiciones de compatibilidad han de entenderse como aquellas condiciones que necesariamente deben ser satisfechas por las componentes de la matriz de deformación ε para que ésta implique un estado de deformación físico posible.

En mecánica de la fractura, en el estudio del avance de una grieta, resulta de vital importancia la función de Airy, [AIRY, 1862], para poder introducir el factor de intensidad de tensiones (que caracteriza totalmente las condiciones tensionales y de deformación del frente de la grieta). Puesto que inicialmente se aparta del contexto explícito de Fatiga HCF, se describirá brevemente. En el sentido exclusivo de la teoría de la elasticidad, [TIMOSHENKO / GOODIER, 1975], [LEVI, 1991], se puede definir una función de tensión, ϕ , denominada de Airy, tal que

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (1.3.3.20)$$

de forma que, en términos de ϕ , la condición de compatibilidad de las deformaciones (1.3.3.19), se expresa biarmónicamente como

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 (\nabla^2 \phi) = 0 \quad (1.3.3.21)$$

La ecuación anterior determina la condición que ha de satisfacer un potencial de Airy físicamente admisible.

Dado que, en general, en un punto de un sólido sometido a un estado tensional corresponde correlativamente un estado de deformación, y viceversa, esto implica la existencia de una relación entre ambos estados, la cual depende de las propiedades del material. En sólidos entendidos clásicamente como elásticos, la relación entre tensiones y deformaciones sigue una ley lineal, experimentalmente consolidada, denominada ley de Hooke, que será deducida posteriormente desde un planteamiento termodinámico, y que adopta la forma

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = C \circ \varepsilon \quad (1.3.3.22)$$

donde el símbolo \circ indica la contracción tensorial, y donde también el tensor de cuarto orden C se denomina tensor de rigidez, cuyas componentes para un medio homogéneo e isótropo son

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.3.3.23)$$

donde λ y μ son las constantes elásticas o coeficientes de Lamé, que se pueden expresar en términos clásicos más usuales obtenidos en base a ensayos con sólidos homogéneos que provocan tensiones y deformaciones homogéneas

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.3.3.24)$$

donde G es el módulo de deformación transversal o de corte, o de rigidez, E el módulo de deformación longitudinal o de Young, y ν el coeficiente de Poisson, específicos del material que constituye el sólido.

De igual forma pueden expresarse las componentes de deformación, ε_{kl} , en función de las de tensión, σ_{ij} , operando con (1.3.3.22) resulta

$$\varepsilon_{kl} = H_{klij} \sigma_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = H \circ \sigma \quad (1.3.3.25)$$

El trabajo realizado por las fuerzas elásticas, dW , en cada elemento de volumen diferencial, en condiciones de deformación elástica isoterma, hipótesis generalmente admitida dada la inapreciable variación de los módulos elásticos E , G y ν con la temperatura en condiciones ambientales, se almacena todo en el elemento en forma de la denominada energía de deformación o energía potencial elástica, dU , y que responde a la energía interna del sólido, que es la denominación que se utilizará en este trabajo,

$$dU = dW = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (1.3.3.26)$$

que referida, como es usual por unidad de volumen, $u = dU / dV$, será

$$u = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{2} \sigma \circ \varepsilon \quad (1.3.3.27)$$

o, sustituyendo en la anterior (1.3.3.22) en función de las componentes de deformación, o en la (1.3.3.25) en función de las componentes de tensión,

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon \circ C \circ \varepsilon, \quad u = \frac{1}{2} \sigma \circ H \circ \sigma \quad (1.3.3.28)$$

A partir de la densidad de energía interna, u , se obtienen las relaciones

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.3.3.29)$$

Conviene separar las contribuciones a la energía interna u debidas a las tensiones hidrostática y de distorsión de acuerdo a (1.3.3.9)-(1.3.3.12),

$$u = u_H + u_d \quad (1.3.3.30)$$

donde u_H , será la energía interna debida a la tensión hidrostática σ_H y, u_d , la energía interna de distorsión debida al tensor desviador s , determinando ambas en función de las tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, y según (1.3.3.28) y (1.3.3.30) se obtiene

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \right] \\ u_H &= \frac{1-2\nu}{6E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \right] \\ u_d = u - u_H &= \frac{1+\nu}{3E} \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (1.3.3.31)$$

Comparando u_d con el desarrollo en tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ del segundo invariante J_2 del tensor desviador s de (1.3.3.12), resulta

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (1.3.3.32)$$

$$u_d = \frac{1+\nu}{E} J_2 \quad (1.3.3.33)$$

o, por (1.3.3.24),

$$u_d = \frac{J_2}{2G} \quad (1.3.3.34)$$

De igual forma, sustituyendo en (1.3.3.31) – (1.3.3.34), en función de los coeficientes de Lamé, según (1.3.3.24), se obtienen expresiones menos usuales,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\lambda + \mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \right] \\ u_H &= \frac{1}{6(3\lambda + 2\mu)} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \right] \\ u_d &= \frac{J_2}{2\mu} \end{aligned} \quad (1.3.3.35)$$

Las expresiones (1.3.3.31)-(1.3.3.35) son fundamentales en los criterios de plasticidad, pues, mientras u_H representa la energía interna producto del cambio de volumen, sin embargo u_d es la energía interna producto del cambio de forma (distorsión), siendo ésta preponderante en el fenómeno plástico, como se trata a continuación.

Expresiones equivalentes, para u , u_H , u_d y J_2 , se pueden obtener en otra orientación del sistema cartesiano ortogonal distinto al de las tensiones principales, mediante el mismo desarrollo. De igual forma se pueden expresar en otros sistemas de coordenadas no cartesianas mediante la transformación correspondiente.

1.3.3.2 Elementos de Plasticidad. Criterios.

Una característica común a cualquier material dúctil es que cuando se le somete a un estado tensional, σ , que supera su límite elástico, se produce una deformación plástica permanente, de tal forma que la deformación total se puede expresar mediante la suma

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (1.3.3.36)$$

donde ε_{ij} , ε_{ij}^e , ε_{ij}^p , son las componentes de los tensores de deformación correspondientes a la deformación total, elástica, y plástica respectivamente.

En el análisis básico del sólido plástico ideal, además de las hipótesis básicas del medio continuo, se consideran dos simplificaciones más, consistentes en no tener en cuenta los dos efectos más comunes que se suelen producir en los materiales (en los metales siempre se producen) por su falta de homogeneidad a escala microscópica. La histéresis en los ciclos de carga-descarga, o inversión (lazo que se forma en el diagrama de σ - ε , al no seguir el mismo camino en la descarga que en la carga), y el efecto de Bauschinger, [BAUSCHINGER, 1886], que consiste en la reducción del valor del límite elástico en compresión cuando previamente ha llegado a plastificarse a tracción. Así pues en lo que sigue, se considerará que no se produce histéresis y que el valor del límite elástico del material se mantiene a tracción-compresión.

El comportamiento plástico del sólido se describe mediante condiciones de plasticidad. Una condición o criterio de plasticidad es una generalización al estado multiaxial del concepto de límite elástico de un estado axial. En el continuo macroscópico que se está considerando, existen dos líneas distintas de análisis de dicho comportamiento, las teorías de flujo o incrementales y las teorías de deformación, siendo las de flujo las que ofrecen un análisis más preciso, pues las de deformación no tienen en cuenta la historia de carga ni la inversión de carga, fundamentales en Fatiga, (es decir en un proceso cíclico), por lo que aquí sólo se describirán las principales teorías de flujo y en el sentido que compete.

Cualquier teoría de flujo dispone de tres elementos comunes:

- Una condición de plasticidad (inicio de la fluencia o delimitación entre el régimen elástico y el plástico)
- Una regla de endurecimiento del material (evaluación de la evolución de la fluencia según todo el proceso de carga)
- Una regla de flujo (relación tensión-velocidad de la deformación plástica)

Dado el carácter de la Fatiga de HCF (sin deformación aparente), este estudio se centrará básicamente en las condiciones de plasticidad.

Un criterio o condición de plasticidad se formula como una condición sobre el estado de tensión en un punto, que se ha de cumplir para que comience en el punto el comportamiento plástico, y se expresa mediante una ecuación sobre las componentes de tensión

$$\mathcal{F}(\sigma) = K' \quad (1.3.3.37)$$

o de manera implícita, muy usual,

$$F(\sigma) = \mathcal{F}(\sigma) - K' = 0 \quad (1.3.3.38)$$

denominándose a $F(\sigma)$ función de fluencia, cuya representación geométrica responde a una superficie en el espacio de tensiones, y siendo K' la constante de fluencia, valor crítico para el cual se inicia la fluencia. Es importante discutir sobre el sentido de esta constante de fluencia K' , función del límite elástico del material, pues en la práctica no es una constante física, estrictamente hablando, ya que depende del criterio de plasticidad elegido. Así, en este contexto quizás fuese más acertado llamarla parámetro de fluencia.

Todas las teorías de plasticidad independientes de la velocidad de deformación plástica, postulan que la respuesta del material es elástico para $F(\sigma) < 0$. La descarga elástica (inversión) se produce cuando $F(\sigma) = 0$ y $(\partial \mathcal{F} / \partial \sigma) \cdot d\sigma < 0$; y la deformación plástica se produce cuando $F(\sigma) = 0$ y $(\partial \mathcal{F} / \partial \sigma) \cdot d\sigma \geq 0$.

Para un material isótropo, la condición de plasticidad es independiente de cualquier dirección por lo que puede expresarse tanto por sus invariantes como por sus tensiones principales (véase (1.3.3.5)–(1.3.3.7)), es decir

$$F(\sigma) = F(I_1, I_2, I_3) = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (1.3.3.39)$$

y, puesto que la experimentación indica que la superficie de fluencia es prácticamente independiente de la tensión hidrostática σ_H , entonces la condición de fluencia es sólo función de los invariantes del tensor desviador de tensiones,

$$F(\sigma) = F(J_2, J_3) = 0 \quad (1.3.3.40)$$

Además, en el caso de que el material presente la misma respuesta elástica en tracción que a compresión (es decir, que no muestre el efecto de Bauschinger), entonces la función de fluencia, por (1.3.3.40) y (1.3.3.12), deberá ser una función par de J_3 :

$$F(-s) = F(J_2, -J_3) = F(J_2, J_3) = F(s) \quad (1.3.3.41)$$

De las numerosas condiciones de plasticidad que han sido propuestas, dos de ellas, el criterio de Tresca y el criterio de Von Mises, son razonablemente sencillas y fiables, siendo las más utilizadas en la fluencia inicial de materiales dúctiles isótropos (especialmente los metales).

El Criterio de Tresca, [TRESCA, 1864], considera que el comportamiento plástico se inicia, en un punto de un sólido en el que existe un estado tensión cualquiera (de tensiones principales

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), cuando la tensión tangencial máxima alcanza un valor crítico K' en el sentido expresado en (1.3.3.38), de forma que, por (1.3.3.8) y (1.3.3.37), resulta

$$\tau_{m\acute{o}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = K' \quad (1.3.3.42)$$

Si como tensión de referencia se toma la tensión en la que se inicia la fluencia, inmediatamente posterior al límite elástico, simbolizada generalmente por σ_y para el ensayo de tracción uniaxial ($\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$), y por τ_y para el ensayo a torsión o cortadura pura ($\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0$), en ambos casos resultará la misma expresión para el valor del parámetro de fluencia K' , dado por (1.3.3.42), teniendo en cuenta que, de acuerdo con la Fig.1.3.3/3,

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y \Rightarrow K' = \frac{\sigma_y}{2} \quad (1.3.3.43)$$

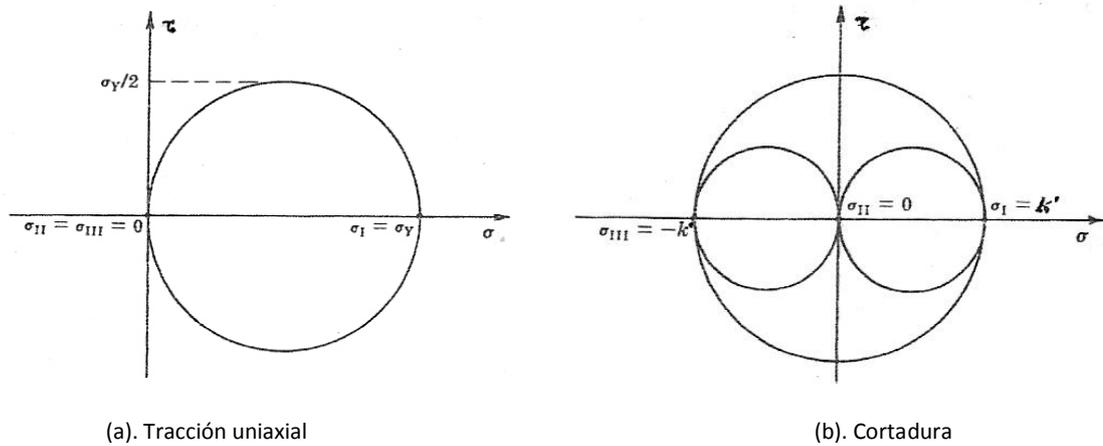


Fig.1.3.3/3 [Adaptada de [MASE, 1978], según representación de [MOHR, 1882]] (Aquí $\sigma_y, \sigma_{II}, \sigma_{III}$, son respectivamente $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)

Es decir, el Criterio de Tresca prevé que las condiciones de plastificación a tracción uniaxial y a torsión pura son iguales; sin embargo en ensayos en materiales dúctiles a torsión o cortadura pura difieren sobre el 15%, aunque del lado de la seguridad. La expresión (1.3.3.42) puede generalizarse independientemente del orden de las tensiones principales mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_y \\ \sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma_y \\ \sigma_3 - \sigma_1 = \pm \sigma_y \end{cases} \quad (1.3.3.44)$$

que conducen inmediatamente a la función de fluencia

$$F(\sigma) \equiv [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_y^2] [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_y^2] [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \sigma_y^2] = 0 \quad (1.3.3.45)$$

expresión que define a la función de fluencia como una superficie, que representada en un sistema cartesiano ortogonal de ejes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, responde a un prisma hexagonal de directriz recta por el origen de eje $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, como se representa en la Fig.1.3.3/4

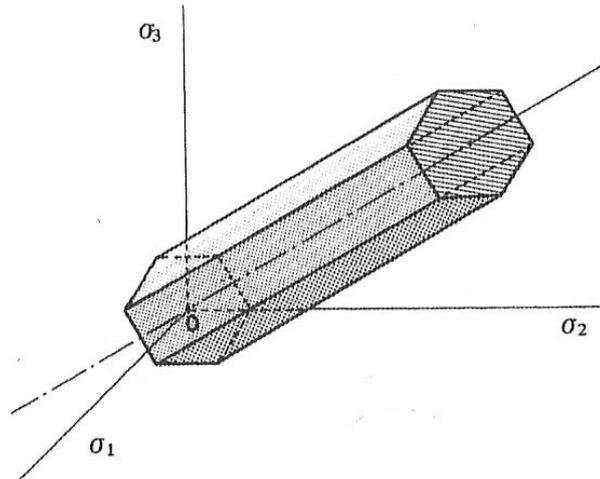


Fig.1.3.3/4 Superficie de fluencia-Tresca Estado de tensión multiaxial. [ORTIZ, 1985]

En un estado tensional plano, donde en (1.3.3.44)–(1.3.3.45) fuese $\sigma_3 = 0$, resulta el hexágono intersección del prisma con el plano $\sigma_1 \sigma_2$, como se representa en la Fig.1.3.3/5, de función de fluencia $F(\sigma)$

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_y \\ \sigma_2 = \pm \sigma_y \\ \sigma_1 = \pm \sigma_y \end{cases} \quad (1.3.3.46)$$

o,

$$F(\sigma) \equiv [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_y^2] [(\sigma_1^2 - \sigma_y^2)] [(\sigma_2^2 - \sigma_y^2)] = 0 \quad (1.3.3.47)$$

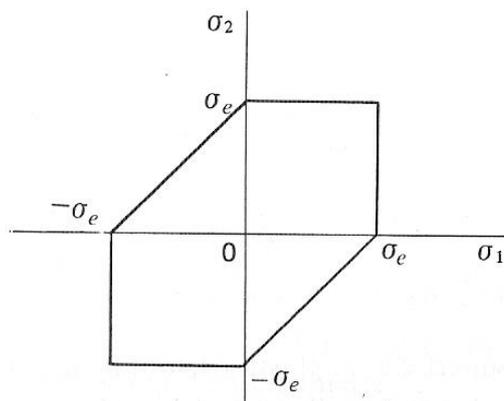


Fig.1.3.3/5 Curva de fluencia – Tresca. Estado Plano. (Aquí σ_e , es σ_y). [ORTIZ, 1985]

El Criterio de Von Mises, [VON MISES, 1913], el más utilizado en metales dúctiles, considera que el comportamiento plástico se inicia en un punto de un sólido en el que existe un estado

de tensión cualquiera (de tensiones principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), cuando la energía interna de distorsión por unidad de volumen, u_d , alcanza un valor crítico K' en el sentido expresado en (1.3.3.38), obtenido en un ensayo que evalúa la energía interna de la distorsión acumulada hasta el inicio de la fluencia.

En el estado multiaxial, tomando como referencia el ensayo de tracción uniaxial ($\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$), en coherencia con (1.3.3.31) y (1.3.3.33), se obtiene

$$6 J_2 - K' = 0 \quad (1.3.3.48)$$

expresión que responde a una función de fluencia $F(\sigma) = F(J_2) = 0$, del tipo indicado en (1.3.3.40), o expresada en función de las tensiones principales, según (1.3.3.32),

$$F(\sigma) \equiv [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - K' = 0 \quad (1.3.3.49)$$

donde a su vez, se puede definir K' mediante la tensión de referencia σ_y , en la que se inicia la fluencia para el ensayo de tracción uniaxial ($\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$), obteniendo el valor del parámetro de fluencia K' , dado por (1.3.3.49),

$$F(\sigma) \equiv [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - 2\sigma_y^2 = 0 \Rightarrow K' = 2\sigma_y^2 \quad (1.3.3.50)$$

expresión que define a la función de fluencia, según Von Mises, como una superficie que representada en el sistema cartesiano ortogonal de ejes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ responde a un cilindro de revolución de eje directriz $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, como se representa en la Fig.1.3.3/6

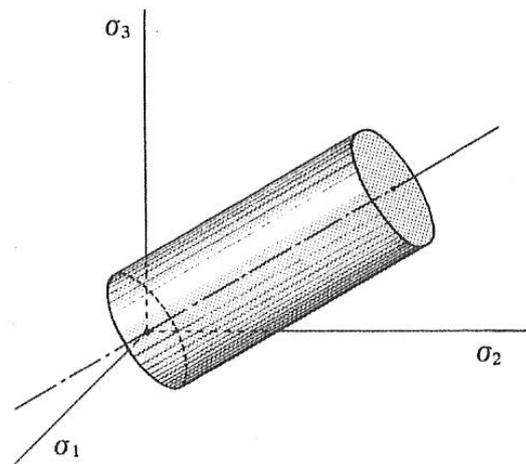


Fig.1.3.3/6 Superficie de fluencia –Von Mises. Estado de tensión multiaxial. [ORTIZ, 1985].

En un estado tensional plano, donde fuese $\sigma_3 = 0$ en (1.3.3.50), resulta la elipse de intersección del cilindro con el plano σ_1, σ_2 , como se representa en la Fig.1.3.3/7, de función de fluencia $F(\sigma)$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_y^2 \quad (1.3.3.51)$$

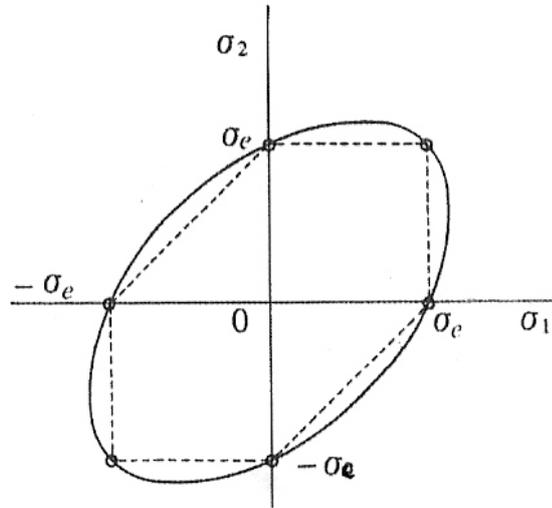


Fig.1.3.3/7 Curva de Fluencia – Von Mises. Estado Plano. En la cual se ha incluido en línea punteada, la de Tresca (aquí σ_e , es σ_y). [ORTIZ, 1985].

Como se infiere de la anterior figura, la superficie y la curva de Tresca están inscritas respectivamente en la superficie y en la curva de Von Mises. Operando de igual forma que en (1.3.3.48)–(1.3.3.50) para un estado multiaxial, pero tomando como referencia la tensión de fluencia τ_y , del ensayo a torsión o cortadura pura ($\sigma_1 = -\sigma_3$, $\sigma_2 = 0$), se obtendría, correlativamente

$$F(\sigma) \equiv J_2 - K' = 0 \quad (1.3.3.52)$$

$$F(\sigma) \equiv [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - 6K' = 0 \quad (1.3.3.53)$$

$$F(\sigma) \equiv [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - 6\tau_y^2 = 0 \Rightarrow K' = \tau_y^2 \quad (1.3.3.54)$$

y en un estado tensional plano, donde fuese $\sigma_3 = 0$ en (1.3.3.54),

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = 3\tau_y^2 \quad (1.3.3.55)$$

De lo que se desprende, ya sea comparando (1.3.3.54) con (1.3.3.50) o (1.3.3.55) con (1.3.3.51), que la relación para la fluencia entre los límites elásticos a tracción uniaxial y a torsión pura, según Von Mises, es

$$\tau_y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_y, \quad \tau_y = 0,577\sigma_y \quad (1.3.3.56)$$

relación que se ajusta con excelente precisión a los resultados experimentales en materiales dúctiles. Obsérvese que (1.3.3.56) difiere de la relación de Tresca, (1.3.3.43), en la que $\tau_y = 0,5\sigma_y$. La Fig.1.3.3/8 ilustra la validez de dichos criterios (en ella se incluyen los resultados

de un metal frágil, fundición de hierro gris representada con el símbolo Δ , al cual se adapta otro criterio exclusivo a σ_y , o normal máximo, sólo como elemento comparativo; y la indicación al cortante octaédrico, es otra forma de expresar el mismo resultado que el criterio Von Mises).

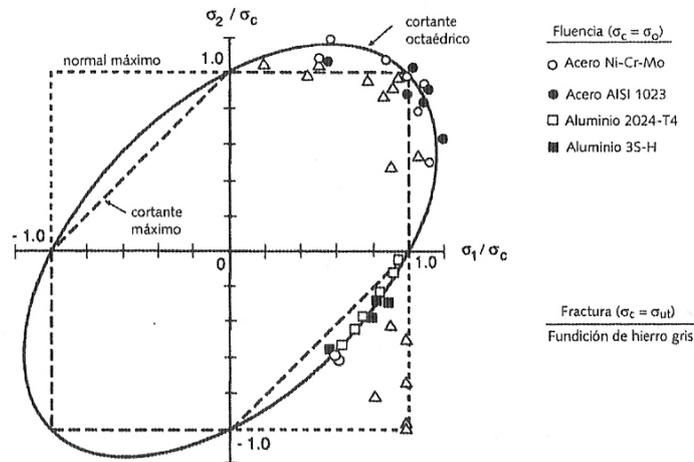


Fig.1.3.3/8 .Resultados experimentales, respecto a los criterios de Tresca y de Von Mises en metales dúctiles, aceros y aluminio, frente a uno frágil, fundición de hierro gris representada con el símbolo Δ . (Aquí σ_c es σ_y , resultante del ensayo de fluencia correspondiente). [NORTON, 1999].

De ambos criterios, y sus representaciones geométricas, se desprende que en el espacio interior de sus superficies el material se encuentra en régimen elástico, es decir $F(\sigma) < 0$, puesto que en dicho interior toda tensión considerada sería menor que $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Una vez que se ha determinado la función de fluencia $F(\sigma) = 0$, mediante un criterio como los anteriores, si se aumenta la carga comienzan las deformaciones plásticas y a partir de entonces ya no son válidas las ecuaciones de la elasticidad debido a que las deformaciones plásticas dependen de la historia completa de las cargas previamente aplicadas al material, incluso aumentando el límite elástico por el endurecimiento producido por deformación plástica previa, lo que en principio parece resultar opuesto al carácter de la Fatiga, en especial la HCF, pues el fallo le llega a tensiones cíclicas sustancialmente menores que las de su límite elástico, como anteriormente se ha descrito. Esta característica, unida a que en la Fatiga de HCF, aun habiendo una gran actividad de deformación plástica, la rotura se produce sin deformación aparente, puesto que es un proceso de acción sumativa microplástica, (es decir, tal como indica [DOWLING, 2007], la fatiga no es un fenómeno asociado al clásico concepto de plasticidad), conlleva que aquí se realice un esquema teórico básico de las ecuaciones de la plasticidad, según las teorías incrementales y las reglas de endurecimiento del material en su comportamiento post-elástico; para un estudio más completo puede recurrirse a las referencias básicas sobre este aspecto. Además, el análisis de la Fatiga HCF exige un estudio desde una concepción global distinta, basada en la deformación no elástica provocada por el daño acumulado en el material, que se tratará posteriormente. Se debe tener en cuenta que la Teoría de la Plasticidad aborda fundamentalmente problemas propios del procesado de materiales (p.e. deformación en frío de metales), y el análisis de estructuras que trabajan en régimen elasto-plástico, es decir donde las deformaciones plásticas son detectables.

Las teorías incrementales, o reglas de flujo, establecen que las relaciones plásticas tensión-deformación se presentan generalmente en términos de incremento de deformación, donde el incremento total se obtiene como suma de los incrementos de deformación sucesivos en los cuales influye si el sólido está en proceso de carga o de descarga. Para cada incremento de deformación parcial se considera, según [LÉVY 1871]-[VON MISES, 1913], (despreciando la región elástica y aceptando que los ejes principales de los incrementos de deformación coinciden con los de las tensiones principales), que dichos incrementos son proporcionales a su correspondiente tensión desviadora

$$\frac{d\varepsilon_{11}}{s_{11}} = \frac{d\varepsilon_{22}}{s_{22}} = \dots = d\lambda \quad , \quad \frac{d\varepsilon_{ij}}{s_{ij}} = d\lambda$$

es decir, tensorialmente,

$$d\varepsilon = s d\lambda \quad (1.3.3.57)$$

donde $d\lambda$ es el factor de proporcionalidad, el cual puede cambiar durante el proceso de carga-descarga, siendo pues un escalar pero no una constante fija, que se debe obtener experimentalmente. Así, las ecuaciones Lévy-Mises, (1.3.3.57), establecen la regla de flujo de un material rígido-plástico (material sin región elástica).

Por la expresión (1.3.3.36), dado el carácter de proporcionalidad expuesto, [PRANDTL,1924]-[REUSS,1930] se generalizó el incremento de deformación a cualquier régimen del sólido, descomponiéndolo en elástico y plástico

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (1.3.3.58)$$

y por (1.3.3.57), para el incremento de la deformación plástica

$$d\varepsilon^p = s \cdot d\lambda$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \cdot s \quad (1.3.3.59)$$

donde el punto indica la derivada temporal.

Las ecuaciones (1.3.3.58) y (1.3.3.59), de Prandtl–Reuss, representan la regla de flujo de un material perfectamente elastoplástico (régimen elástico lineal, hasta el límite elástico, seguido de un régimen plástico constante).

En un contexto teórico, una generalización de la ecuación (1.3.3.59) puede obtenerse a partir de la consideración de que el trabajo virtual provocado por las tensiones tangenciales a la superficie de fluencia en una deformación plástica ha de ser nulo. Ello indica que la variación de deformación plástica ha de ser proporcional al gradiente generalizado de la superficie de fluencia, normal a ésta. Es decir:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (1.3.3.60)$$

donde $d\lambda$ y $\dot{\lambda}$ son los factores de proporcionalidad.

Las ecuaciones (1.3.3.60) , junto a la hipótesis de crecimiento estable $\dot{\lambda} > 0$, conducen a un modelo elastoplástico general, definido por las ecuaciones:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \dot{\lambda} = 0 & \text{si } F(\sigma) < 0 \\ \dot{\lambda} \geq 0 & \text{si } F(\sigma) = 0 \end{cases} \quad (1.3.3.61)$$

A su vez, (1.3.3.60) y (1.3.3.61), suponen una generalización de (1.3.3.59) en el caso de que la función de fluencia F sea, como en el caso de Von Mises, función cuadrática de las tensiones.

La expresión (1.3.3.60) sugiere la identificación de fluencia como potencial plástico. Este concepto se generaliza a cualquier tipo de material, por una función potencial ϕ^p , de forma que la velocidad de deformación plástica sea su derivada, cambiada de signo, respecto a las tensiones, de tal forma que no necesariamente el potencial plástico ha de coincidir con la función de fluencia.

Tal como se ha indicado anteriormente, además de disponer de una función de fluencia y de una regla que defina los incrementos de deformación, es necesario disponer de una regla que determine el comportamiento plástico del material ante el aumento de carga, es decir que analice el endurecimiento por deformación. En un material perfectamente plástico no se produce endurecimiento por deformación, conservándose invariable la función de fluencia y, por lo tanto, la superficie de la misma en forma y tamaño manteniendo constante la carga que originó la fluencia.

Básicamente se dispone de dos hipótesis de endurecimiento por deformación, el endurecimiento isotrópico y el cinemático.

La hipótesis o regla de endurecimiento isotrópico, razonablemente para el caso de cargas proporcionales (variación constante de todas las componentes de tensión, en el tiempo), propugna que la superficie de la función de fluencia aumenta de tamaño pero mantiene su forma original (p.e, el prisma hexagonal de Tresca, y el cilindro de Von Mises, Fig.1.3.3./4 y Fig.1.3.3/6, van aumentando su tamaño uniformemente, manteniendo su forma y eje directriz invariables). La dependencia del tamaño de la superficie de fluencia bajo deformación puede determinarse mediante una ley de tensión-deformación universal

$$\sigma_e = h\left(\int d\bar{\varepsilon}^p\right) \quad (1.3.3.62)$$

que relaciona dos cantidades escalares, la tensión equivalente σ_e y el incremento de la deformación plástica equivalente $d\bar{\varepsilon}^p$, a través de la función h , la cual se determina en un ensayo de tracción uniaxial obteniendo la curva tensión–deformación plástica $\equiv h$.

La regla de endurecimiento isotrópico referido no es muy precisa en muchos materiales metálicos, a causa del efecto Bauschinger, indicado anteriormente. Es decir, una vez deformados plásticamente a tracción, al invertir la carga se produce la fluencia a compresión para valores de tensión (en valor absoluto) menores que a tracción, lo que implica que la superficie de fluencia no crece uniformemente en todas las direcciones.

La hipótesis o regla del endurecimiento cinemático, que es más efectiva en casos de inversión de carga y/o de no proporcionalidad en la carga evolutiva aplicada, postula que la superficie de fluencia inicial no cambia ni de tamaño ni de forma únicamente, se traslada a una nueva posición en el espacio de tensiones, traslación que matemáticamente se expresa según la función de fluencia inicial (1.3.3.38) desplazada un valor tensional α_p dependiente de la historia de la carga, como

$$F(\sigma - \alpha_p) = 0 \quad (1.3.3.63)$$

Complementariamente, y dado que el otro grupo de teorías de deformación (de deformación total) no contemplan la inversión de carga, fundamental en Fatiga, ni la historia de carga, por lo cual no se las considerará, resulta conveniente hacer referencia a dos leyes empíricas de tensión-deformación, de amplio uso en el análisis por endurecimiento cíclico en materiales policristalinos con cierta isotropía debida a la aleatoriedad de la distribución de los cristales, basadas en la expresión (1.3.3.36) de la descomposición de la deformación total en la suma de las partes elásticas y plásticas, para estados uniaxiales de tensión,

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K'_c} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad \text{y} \quad \Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2 \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'_c} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (1.3.3.64)$$

donde E es el módulo de Young, K'_c el coeficiente de resistencia cíclico y n' es el exponente de endurecimiento a deformación cíclica, basadas en el estudio de la estabilización del lazo de histéresis de ciclos sucesivos de inversión de carga axial. En (1.3.3.64), ε_a y σ_a son correlativamente la amplitud de la deformación total y la amplitud de la tensión normal uniaxial en un ciclo determinado del proceso, mientras que $\Delta\varepsilon$ y $\Delta\sigma$ se refieren a la propuesta de Masing [MASING, 1926], de estabilización del ciclo por endurecimiento ($\Delta\varepsilon \approx 2\varepsilon_a$ estabilizado, y $\Delta\sigma \approx 2\sigma_a$ estabilizado).

1.3.3.3 Elementos de Mecánica de la Fractura.

Por lo ya expuesto, conviene recordar aquí que se entiende por Fatiga a aquella situación en la cual los componentes de una estructura y/o mecanismo se encuentran solicitados cíclicamente entre niveles de tensión que, en fatiga de alto ciclaje, suelen ser inferiores a la del límite elástico de dichos componentes (como se puede apreciar en las curvas de Whöler, Fig.1.3.2/1), produciéndose el fallo al menos de alguno de los componentes. Este proceso tensional se traduce en deformaciones inelásticas muy puntuales o localizadas, pero de distribución aleatoria, provocando durante el proceso cíclico daños superficiales irreversibles, de carácter microplástico, concluyendo en la generación y avance de una o más microgrietas-grietas o de alguna o algunas de las ya existentes.

Por lo tanto la propagación de grietas en estructuras trabajando en régimen elástico es uno de los puntos a considerar en el proceso de Fatiga, realizándose mediante la aplicación de

conceptos concretos de Mecánica de la Fractura lineal, expuestos desde hace cuatro décadas, centrada en la evolución de la zona plástica asociada a la punta de la grieta.

Una limitación actual consiste en que la teoría asociada a la fractura se centra sólo en la propagación de una grieta, lo que en Fatiga, especialmente de materiales dúctiles, puede tener un cierto grado de imprecisión, pues estos materiales –sobre todo en Fatiga HCF– conllevan una concatenación aleatoria de microgrietas que pueden tender a más de una grieta antes de que se produzca el fallo por dominancia de una de ellas.

Así, hasta 1960, sólo existieron intentos vanos de modelizar empíricamente la propagación de grietas en función del rango de tensiones aplicado, $\Delta\sigma$, y de la longitud de la grieta, a , mediante expresiones del tipo

$$\frac{da}{dN} \propto \Delta\sigma^p a^q \quad (1.3.3.65)$$

donde p y q son constantes experimentales, da/dN el ratio de avance de la grieta en función del paso de ciclos N , y de $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$.

[PARIS et al, 1961], fueron los primeros en proponer, también mediante una ecuación empírica, que el parámetro que caracterizaba el crecimiento de la grieta, para una variación cíclica de las tensiones, no era directamente dicha variación $\Delta\sigma$ (como sistemáticamente se había propuesto en (1.3.3.65)), sino que tal parámetro debía ser la variación del factor de intensidad de tensiones, $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$, concebido en la década anterior en la Mecánica de la Fractura para caracterización de las condiciones de tensión y deformación del frente de grieta en un material elástico lineal (en placas planas y grietas de superficie plana). En consecuencia, la ley o ecuación de Paris resulta ser

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad \text{o} \quad \log \frac{da}{dN} = \log C + m \log \Delta K \quad (1.3.3.66)$$

donde m y C son constantes del material, dependientes de su micro-estructura y del medio ambiente, obtenidas experimentalmente. Así, para materiales metálicos dúctiles m suele estar comprendido entre 2 y 4, mientras que C puede depender de la relación entre las tensiones $R_f = (\sigma_{\min} / \sigma_{\max})$. Por lo tanto, el aumento de la longitud de la grieta según (1.3.3.66) depende fundamentalmente de ΔK ,

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min} \quad (1.3.3.67)$$

siendo K_{\max} y K_{\min} los valores máximo y mínimo del factor de intensidad de tensiones durante un ciclo de tensión en Fatiga, que según la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (LEFM),

$$K_{\max} = F_f \sigma_{\max} \sqrt{\pi a} \quad , \quad K_{\min} = F_f \sigma_{\min} \sqrt{\pi a} \quad (1.3.3.68)$$

y como el rango de tensiones es

$$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \quad (1.3.3.69)$$

entonces

$$\Delta K = F_f \Delta \sigma \sqrt{\pi a} \quad (1.3.3.70)$$

en las que F_f es el factor de forma o geométrico que depende de la geometría elemento-grieta.

Si se representa en una gráfica el proceso experimental de evolución de la grieta se observan las etapas de nucleación, propagación y fallo final (Fases I, II, y III respectivamente). La Ley de Paris (1.3.3.66) se ajusta a la Fase II, tal como se presenta en la Fig.1.3.3/9 donde se indica también la influencia de los mecanismos que intervienen.

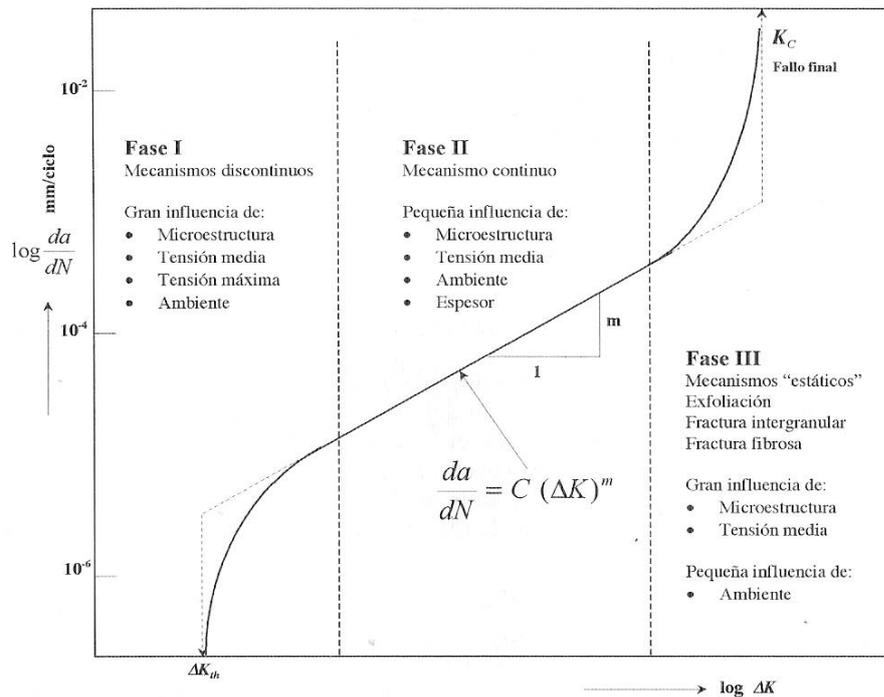


Fig. 1.3.3/9 Curva característica de propagación de grieta de material dúctil. [ARANA / GONZÁLEZ, 2002]

Vista la importancia del parámetro K , de intensidad de tensiones en el avance de grieta, conviene tener en cuenta mínimamente su concepción básica en la Mecánica de Fractura, que puede consultarse en [ROLFE / BARSOM, 1987],[ARANA / GÓNZALEZ, 2002] y/o [ANGLADA et al, 2002] entre otros, mediante planteamiento energético. Así, de acuerdo con un planteamiento termodinámico, cuando un sistema pasa de un estado de no-equilibrio a un estado de equilibrio, se produce una disminución de la energía interna del sistema. En función de este principio [GRIFFITH, 1921], en base a [INGLIS, 1913], y mediante un balance elemental de energía, establece la teoría de la Fractura para materiales frágiles, pero es finalmente [IRWIN, 1957], quien la extiende a los metales y concibe (atendiendo a [WESTERGAAD, 1939]) el factor de intensidad de tensiones K , tal como se ha definido, y que aquí se presenta desarrollada desde un planteamiento básico. Considerando la placa plana, en el sentido de rigor de [PISARENKO et al, 1985] infinita de la Fig.1.3.3/10, con la grieta indicada,

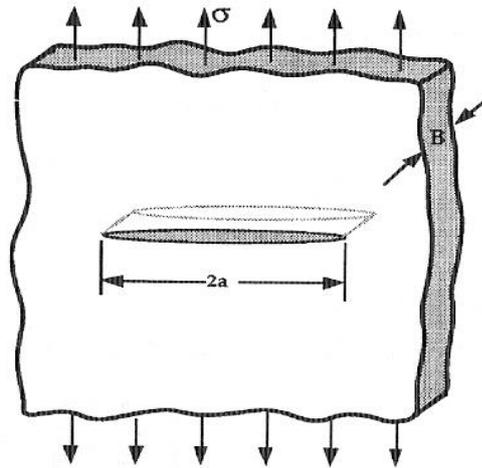


Fig.1.3.3/10 .Placa infinita, con grieta de longitud $2a \ll$ ancho placa, de espesor unitario $B=1$, sometido a un estado de tensiones axial, en posible propagación. [ARANA / GONZÁLEZ, 2002].

realizando el análisis energético del fenómeno, y considerando que es un proceso isotermo y adiabático, el trabajo de las fuerzas elásticas en la formación de la grieta supone una pérdida U_g de energía interna,

$$W = -U_g \quad (1.3.3.71)$$

y por lo tanto la energía interna U , por unidad de espesor de placa, viene dada por

$$U = U_0 - U_g \quad (1.3.3.72)$$

donde U_0 es la energía interna potencial de deformación de dicha placa sin grieta. Se puede decir, pues, que la energía interna U , de (1.3.3.72), es la energía libre disponible para poder ir transformándose en una grieta mayor, proceso que acabaría en el momento de la fractura, de tal forma que toda la energía interna se habría invertido en el avance de la grieta hasta su fractura. Por lo tanto, U es función de la longitud de la grieta, de variable a , y para un avance da de la grieta se necesitará una tasa de energía liberada,

$$Y = -\frac{dU}{da} \quad (1.3.3.73)$$

donde Y es la tasa de liberación de energía de avance de grieta, (históricamente obtenida para fractura frágil, la cual tiene un valor crítico denominado G_c que depende del material; se denomina también como tenacidad a la fractura), y que obviamente la tomará de la energía interna disponible U , de ahí el signo negativo de (1.3.3.73).

Así, en el contexto que se trata, atendiendo a (1.3.3.27) con $\varepsilon = \sigma/E$, se tiene

$$U_0 = \frac{\sigma^2}{2E} S_p \quad (1.3.3.74)$$

siendo S_p la superficie de la placa, y

$$U_g = \frac{\sigma^2}{2E} \pi a^2 \quad (1.3.3.75)$$

donde πa^2 es el área de distensión en el contorno de la grieta que, en este caso de grieta pasante centrada y de pequeña dimensión frente a las magnitudes de la placa, por homogeneidad e isotropía, resulta ser el área de un círculo de radio a . [GRIFFITH, 1921], obtuvo el valor de π a partir del planteamiento seguido de [INGLIS, 1913], considerando la grieta como un orificio elíptico, en un estudio equivalente para material frágil, concretamente vidrio.

Luego, expresando (1.3.3.72) con (1.3.3.74) y (1.3.3.75), se obtiene

$$U = \frac{\sigma^2}{2E} S_p - \frac{\sigma^2}{2E} \pi a^2 \quad (1.3.3.76)$$

y por (1.3.3.76),

$$\frac{dU}{da} = -\frac{\sigma^2}{E} \pi a \quad (1.3.3.77)$$

por lo que la tasa de liberación de energía de avance de grieta será, según (1.3.3.73),

$$Y = \frac{\sigma^2}{E} \pi a \quad (1.3.3.78)$$

la ecuación (1.3.3.78) suele expresarse como,

$$Y = \frac{K^2}{E} \quad (1.3.3.79)$$

$$K = \sqrt{YE} \quad (1.3.3.80)$$

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (1.3.3.81)$$

donde K se denomina factor de intensidad de tensiones, que evidentemente es un indicador de la tenacidad del material en tensión plana, que según la expresión (1.3.3.80) responde a una constante del material, y según la expresión (1.3.3.81) (la cual difiere solamente en el factor de forma F_f con respecto a la expresión (1.3.3.68) considerando la geometría del elemento y la grieta), indica que la tensión y el tamaño de la grieta actúan amplificándose en el frente de la misma.

Ya se ha indicado que a este caso se le denomina modo I, técnicamente el más importante, expresándose como K_I . Esto es debido a que se consideran tres casos simples de grietas, que pueden presentarse en un sólido producto de un estado de tensiones, tal como se refiere en la Fig.1.3.3/11

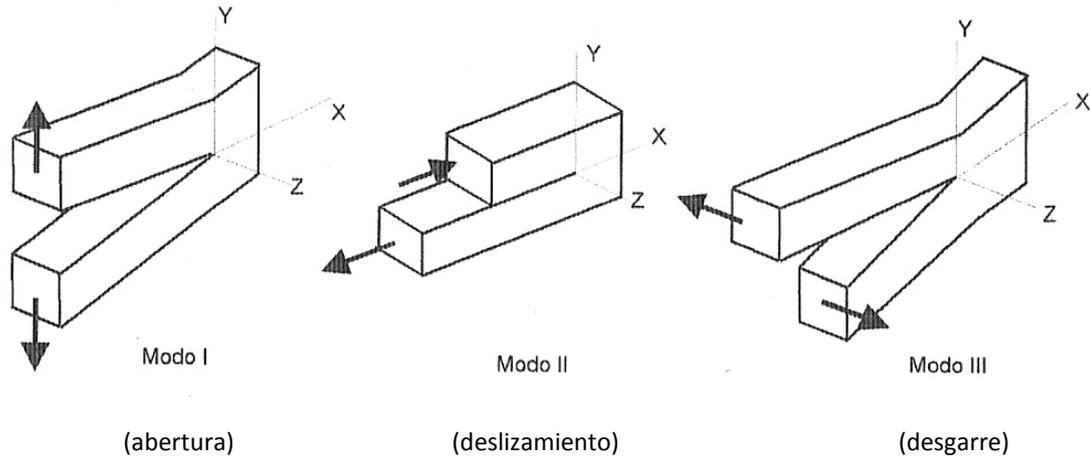


Fig.1.3.3/11. Modos de grieta . Su superposición describe el caso general de tensiones en un sólido. [ARANA/GONZÁLEZ, 2002].

[IRWIN,1957], resolvió el problema para los estados de tensión y deformación de una placa plana infinita con grieta pasante, (en base al planeamiento de [WESTERGAAD, 1939]), respecto al frente de la grieta, Fig.1.3.3/12

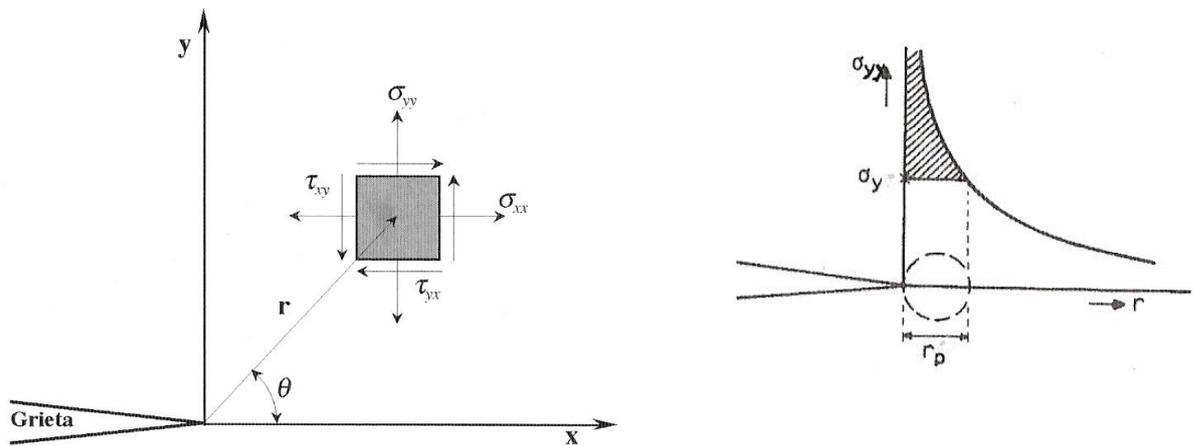


Fig.1.3.3/12 (a).Campo de tensiones en el frente de grieta, y (b).Corrección básica en la zona plástica de su punta, mediante la concepción de r_p , radio de plasticidad (que evita la singularidad tensional para $r \rightarrow 0$), en función del límite elástico σ_y , o del límite de fluencia . (Existen otros modelos de corrección) . [ARANA / GONZÁLEZ, 2002]

Así, la expresión genérica para las tensiones, como se observa en Fig.1.3.3/12a, en el frente de grieta, a distancia $r \neq 0$, y ángulo θ , es

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T_{ij}(\theta, r) \quad (1.3.3.82)$$

donde K , es el factor de intensidad de tensiones en función del Modo (ver Fig.1.3.3/11), es decir K_I , K_{II} , o K_{III} , y $f_{ij}(\theta)$ es una función tensorial del ángulo θ , mientras que $T_{ij}(\theta, r)$ es un término de desarrollo en serie dependiente de los parámetros θ , r (despreciable en grietas grandes), que también dependen del modo (I, II, ó III), a cuyo desarrollo se remite a las referencias básicas de la temática.

Así pues, como ya se avanzó, la expresión (1.3.3.81), y por tanto (1.3.3.68)-(1.3.3.70), responden al Modo I, es decir en ella $K \equiv K_I$, aunque al ser el más usual, si no se indica lo contrario, se le denomina K . El fallo se produce cuando K alcance un valor crítico de intensidad de tensiones K_{IC} , $K=K_{IC}$ en Modo I (donde K_{IC} es una constante del material que se obtiene experimentalmente). La misma concepción es extrapolable a los Modos II y III. En esencia, en los tres Modos, K es función de la longitud de grieta, la tensión aplicada, y de la geometría pieza-grieta.

Una vez especificado el sentido del factor intensidad de tensiones, K , y de la importancia que desempeña en todo el proceso de fractura, en Fatiga a partir de la Ecuación de Paris, dada su simplicidad, se puede obtener una estimación de vida, número de ciclos N_{fg} , de un componente o pieza, integrando para una grieta inicial determinada, a_i , hasta el tamaño final crítico, a_f que produce el fallo o su retirada de servicio, sustituyendo (1.3.3.70) en (1.3.3.66),

$$\frac{da}{dN} = C(F_f \cdot \Delta\sigma \sqrt{\pi a})^m \quad (1.3.3.83)$$

ordenando respecto a las variables, longitud de la grieta y número de ciclos, al ser una ecuación diferencial en variables separadas, si F_f puede considerarse constante, resulta

$$C(F_f \cdot \Delta\sigma \sqrt{\pi})^m \cdot \int_0^{N_{fg}} dN = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{a^{m/2}} \quad (1.3.3.84)$$

Para $m \neq 2$

$$N_{fg} = \frac{2}{(m-2)C(F_f \cdot \Delta\sigma \sqrt{\pi})^m} \left[\frac{1}{a_i^{(m-2)/2}} - \frac{1}{a_f^{(m-2)/2}} \right] \quad (1.3.3.85)$$

y para $m = 2$

$$N_{fg} = \frac{2}{CF_f^2 \Delta\sigma^2 \pi} \ln \frac{a_f}{a_i} \quad (1.3.3.86)$$

Como en general el factor de forma, F_f , varía con el aumento de la grieta, N_{fg} , se obtiene por integración numérica de la ecuación (1.3.3.83).

Cabe indicar que en fatiga de alto ciclaje la estimación de vida N_{fg} , por desarrollo de grieta, sólo representa un 10% de la vida total del componente, siendo el 90% de su vida el invertido en la iniciación de la misma, especialmente en materiales dúctiles.

En cuanto a las limitaciones que presenta la ecuación de Paris, además del tratamiento de grieta individual, éstas atienden a que:

1. En principio, el crecimiento de grietas debe ser en secuencias de carga con ciclos iguales.
2. La forma del ciclo y la frecuencia han de ser de avance paulatino, es decir sin producir impacto.

3. En ningún momento del ciclo se debe alcanzar el valor crítico del factor de intensidades de tensiones, K_c , o sea propagación estable de la grieta (denominada subcrítica). En general se supone que el Modo I.

En estos términos, se han llevado a cabo intentos de extensión de la Ley de Paris, (1.3.3.66) o (1.3.3.83), de manera que se puedan incluir microgrietas, y para el estudio de la longitud efectiva de la grieta. Un tratamiento actual del problema, desde un punto de vista unificado y consistente de los procesos de daño por fatiga, es sugerido en [CIAVARELLA / PUGNO, 2005], teniendo en cuenta las desviaciones de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (LEFM) utilizando la curva σ - N de Wöhler, del material, de tal forma que ambas (ley y curva) sean casos particulares de una "ley unificada" más general donde, considerando que el número de ciclos final N_f de la vida Fatiga sea equivalente al número de ciclos del fallo debido a la grieta por Fatiga N_{fg} , se tiene en tal caso, para una grieta de longitud $2a$, en correlación a (1.3.3.66) y (1.3.3.83), y adaptado para la vida a Fatiga HCF la Ley de Basquin [BASQUIN, 1910], que se detallará en el apartado 2.3, (previa transformación a la forma $\bar{C} = N\Delta\sigma^k$, donde $\bar{C} = (2\sigma_f')^{k/2}$, $k = -1/b$).

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K^*)^m, \quad \Delta K^* = F_f \Delta\sigma \sqrt{\pi(a + \Delta a/2)} \quad (1.3.3.87)$$

donde Δa es un parámetro microestructural del material, el "quantum de fractura", determinante en la longitud efectiva de la grieta. De la integración de (1.3.3.87), para una grieta de desarrollo a_i , a_f (inicial, final), y considerando $N_f = N_{fg}$, se obtiene para el caso más usual de $m > 2$ y $a_f \gg \Delta a$

$$N_{fg} \approx \frac{2}{(m-2)C(F_f \cdot \Delta\sigma \cdot \sqrt{\pi})^m} \left[a_i + \frac{\Delta a}{2} \right]^{(2-m)/2} \quad (1.3.3.88)$$

siendo, en el supuesto inicial de que $a_i \rightarrow 0$,

$$\Delta a = 2 \left(\frac{2\Delta\sigma^{k-m}}{(m-2)C(F_f \bar{C} \cdot \pi^{m/2})} \right)^{2/(m-2)} \quad (1.3.3.89)$$

y,

$$N_{fg} \approx \frac{2}{(m-2)C(F_f \cdot \Delta\sigma \cdot \sqrt{\pi})^m} \left(\frac{2\Delta\sigma^{k-m}}{(m-2)C \cdot F_f \cdot \bar{C} \cdot \pi^{m/2}} \right)^{-1} = N_f \quad (1.3.3.90)$$

donde (1.3.3.90) será la vida a Fatiga de Wöhler.

En síntesis, la expresión (1.3.3.87) representa la Ley generalizada de Paris, según [CIAVARELLA / PUGNO, 2005], la cual está supeditada a las mismas limitaciones que la Ley de Paris [PARIS et al, 1961], expuestas anteriormente. De esta concepción, sin embargo, lo que más debe resaltarse es la importancia de la curva de Wöhler, [WÖHLER, 1871], que en este caso ha sido utilizada, tal como se ha indicado, como elemento regularizador de las desviaciones de LEFM en el proceso de avance de la grieta en la Fatiga HCF.

1.3.3.4 Rigidez del material

Conviene una breve referencia al concepto de rigidez. Hasta el momento el planteamiento ha sido totalmente local, en un punto del sólido por lo que la rigidez responde a los módulos de deformación, longitudinal o de Young E , y transversal G . Y tal como se ha visto en el caso básico de daño de un material, D , por (1.3.2.19), en los términos referidos, $\bar{E} = E(1-D)$.

Sin embargo existen casos, como el de la fatiga, (tal como se ha indicado al principio del subapartado 1.3.2), en los que se considera al estado tensional que produce el fallo responsable no específicamente del estado mecánico a nivel local, sino de toda la pieza. De ello se infiere, que dada la complejidad de la fatiga, igual tratamiento básico se considerará con respecto a la rigidez, la rigidez en el momento de fallo, o de retirada de servicio, es la que se considerará para toda la pieza.

Este aspecto puede ser fundamental en estructuras de barras, muy comunes en construcción en general y de amplio uso en edificación, en particular. Para este tipo de estructuras de barras cabe entonces recordar que su dimensionado³ está muy ligado al concepto de rigidez, pues en base a la extensión global de la ley de Hooke, tenemos para un sistema de barras básicamente de directriz rectilínea, secciones constantes,

$$[A] = [K] [D] \quad (1.3.3.91)$$

donde $[A]$ es el vector de acciones totales sobre cada nudo de la estructura, $[K]$ la matriz de rigidez de la estructura compuesta por la configuración de las rigideces de cada barra en función de su acción-movimiento posible, y $[D]$ es el vector de desplazamientos que se producen en los nudos.

La expresión (1.3.3.91), generalmente denominada método de las rigideces (de los desplazamientos o de las deformaciones), constituye un sistema lineal de ecuaciones cuya solución determina $[D]$ con cuyos valores, mediante una simple transformación, permite obtener las solicitaciones finales de equilibrio en los nudos. Situación a partir de la cual ya se puede aislar cada barra pasando a ser un problema de Resistencia de Materiales la obtención del dimensionado correspondiente.

³ En un contexto de cierto paralelismo al que se trata en este trabajo en cuanto a la rigidez, es de interés la referencia exhaustiva a [FLÓREZ-LÓPEZ, 1993, 1995, 1998, 1999] y colaboraciones con [CIPOLLINA et al., 1995], [PERDOMO et al., 1999] o [MARANTE, 2002], y a [PICÓN RODRÍGUEZ, 1999], en base a la teoría del daño concentrado considerando la variable fenomenológica de daño D , en un modelo elastoplástico acoplado de daño, si bien restringido al caso monotónico de carga o con limitaciones a la fatiga de bajo ciclaje y, por tanto, con deformaciones plásticas relevantes

2 FENOMENOLOGÍA Y MODELIZACIONES DE LA FATIGA DE ALTO CICLAJE

2.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es el análisis, mediante la necesaria revisión bibliográfica de los aspectos fundamentales que caracterizan la investigación relativa a la estimación de la fatiga de materiales, dirigida esencialmente a la fatiga de alto ciclaje de metales dúctiles. Una exposición detallada de tales aspectos sobrepasa en amplia medida el objeto del presente trabajo, por lo que ha de adaptarse, para este fin, una metodología expositiva adecuada a la finalidad del estudio.

Se considera en este sentido que el estudio de la fatiga de materiales tiene por último objeto la estimación más precisa posible del comportamiento del material ante la carga cíclica que lo solicita mediante un modelo teórico bien definido. Resulta evidente el alto grado de complejidad teórica que precisaría el modelo en cuestión, si tratase de abordar el problema sin un previo análisis y control de los elementos esenciales, o estrictamente suficientes, que arrojen resultados relevantes. Así, la estimación, como en cualquier temática de carácter cuantitativo, pasa necesariamente por la identificación de aquellos parámetros que, de una u otra forma, intervienen o afectan al fenómeno, tratando de discernir entre los parámetros que son objetivos y los que son subjetivos, su interdependencia, si existe, y el grado de la misma.

En la temática que se trata en este trabajo a los parámetros objetivos primeros se les suele denominar parámetros característicos o básicos, mientras que una denominación consolidada para los parámetros subjetivos es la de factores de influencia, entendiendo aquí por “subjetividad” el hecho de que la influencia de tales parámetros no es lo suficientemente independiente como para ser planteada con el mismo grado en toda configuración experimental (es el caso, por ejemplo, de la influencia del tamaño de la pieza).

En el problema de la fatiga de materiales, cabe dedicar previamente unas líneas a esta distinción, pues, si bien el estudio de su fenomenología en el epígrafe siguiente determinará un número óptimo de valoraciones experimentales, no es menos cierto que hay que entender desde el primer momento la necesidad de acotar las condiciones iniciales y límites de aplicabilidad de tales configuraciones experimentales, dadas las características intrínsecas subyacentes en el comportamiento del material, no necesariamente ligadas al propio material, y en la forma de enfocar el problema considerado.

Entrando en esta tesitura, y como referente al subsiguiente análisis fenomenológico de los resultados expuestos en la Figura 1.3.2/1, curva $\sigma - N$ de Wöhler, [WÖHLER, 1871] se concluyó que la fatiga debida a cargas cíclicas afecta a la resistencia del material, por lo que podría pensarse que ante tensiones del mismo tipo, indistintamente del tipo de sollicitación que las produzca, la resistencia a la fatiga sería idéntica para una misma pieza. Sin embargo no es así, tal como se tratará posteriormente, mientras que en el caso de cargas estáticas independientemente del tipo de sollicitación que las produzca la resistencia del material es la misma. De igual forma ocurre en función del tamaño y otros parámetros. En síntesis, en el caso de cargas estáticas es posible “separar” las propiedades del material de las de la pieza, e indistintamente del tipo de carga, mientras que para caso de cargas cíclicas no ha sido posible, tal como se infiere de la práctica totalidad de las referencias experimentales.

Así en la primera cita de [FEODÓSIEV, 1997], epígrafe 1.3.2., se indica la especial atención que se ha dedicado a la cuestión de si el estado mecánico del material en un punto queda

determinado por el estado tensional en el mismo punto. Si se cumple dicha hipótesis, como ocurre en el caso estático, entonces las propiedades del material pueden “desvincularse” de las de la pieza. Esta característica implica que cualquier caracterización teórica del problema de la fatiga que admita la hipótesis de que el estado mecánico, como medio continuo, en un punto del material, quede determinado por el estado tensional en el mismo punto, deberá contar con parámetros de corrección, clasificados, ya constatados por la experiencia e independientes de modelos de aproximación exclusivamente estadísticos.

El aspecto fundamental de la referida imposibilidad de desvinculación de las propiedades del material respecto de las de la pieza representa un punto de inflexión esencial en la metodología a considerar en el conjunto de este trabajo. Y, dado que este trabajo de investigación parte de estimaciones experimentales existentes, puede ya indicarse que surge una clasificación genérica sencilla, centrada en dos enfoques de características propias y diferenciadas: un enfoque según la evolución del planteamiento clásico que configurará el estado mecánico del material en un punto según el estado tensión-ciclo en el punto, de acuerdo con las ecuaciones (1.3.2.3a) a (1.3.2.4) y la Figura 1.3.2/1, y otro enfoque que lo configura según la concepción de tensión efectiva, (1.3.2.16).

En el primer enfoque, la definición objetiva y subjetiva de parámetros es esencial en los términos anteriormente indicados, dado que forman parte de la concepción del análisis clásico de la fatiga de alto ciclaje, dando paso natural a la modelización clásica de forma prácticamente empírica, previa necesidad de ordenación-correlación cronológica. Pero este primer enfoque implica simultáneamente su conexión con el segundo enfoque, la revisión en torno a la variable fenomenológica de daño, descrita en la ecuación (1.3.2.15), que es de relevancia no solo en sí misma, por ser una de las líneas de investigación genéricas de las últimas décadas, sino que, también, por establecer una discusión en cuanto a la variable de daño intrínseco a considerar, cuestión de interés en este trabajo. Este segundo enfoque, a su vez, requiere de un análisis exhaustivo de la modelización en base a la teoría del daño pues presenta no solamente la consideración de fenómenos elásticos, plásticos, o elastoplásticos acoplados con daño, en el material, sino que analiza la evolución del daño en un contexto de interés para este trabajo.

En cuanto a la metodología operativa del análisis bibliográfico, es decir de su revisión, está basada en la doble conjunción de textos docentes o compendios de investigación, indicando en estos casos las referencias contenidas en ellos a las que se ha accedido o considerado, con referencias de investigación aisladas, tratadas todas ellas desde la perspectiva de su integración en un texto expositivo coherente.

De lo expuesto, cabe concluir que el análisis bibliográfico que se precisa en esta memoria es inherente a una metodología expositiva que ha de girar sobre dos ejes concatenados, estableciendo los elementos esenciales que permitan la formulación teórica de la fatiga de alto ciclaje en metales dúctiles:

I. Un primer eje, en base a trabajos acordes con la fenomenología y modelización, que permitan tratar los siguientes objetivos:

I.1 **Definir y acotar los parámetros fundamentales esenciales del problema.** Su descripción, significado empírico o hipotético considerado será vital tanto para establecer su denominación básica, su influencia, el análisis de su independencia o su correlación, si la

hubiese, como, para la necesaria síntesis formal imprescindible para la sistematización teórica formal.

I.2 **Establecer los modelos existentes en la temática.** Atendiendo a su relevancia en conjunción con su propia evolución, como efectivamente ocurre en la modelización clásica y en la intrínseca de daño, considerando aquellas derivaciones y sus hipótesis previas.

II. Un segundo eje que, en base al anterior eje, cumpla como objetivos fundamentales la obtención de:

II.1. **La clasificación sucinta, como primera esquematización de la fenomenología de la fatiga de alto ciclaje.** Es posible establecer un análisis cronológico de correlación, del que se desprenda no sólo el estado inicial de evolución en sus concepciones, con su consecuente complejidad, sino también las limitaciones formales a considerar.

II.2. **La formalización de la fenomenología de la fatiga de alto ciclaje.** En efecto, como resultado de su complejidad, incluso experimental, y la necesidad imperante de resultados en la industria prácticamente desde la segunda contienda mundial, se ha adolecido de un cuerpo formal axiomático (definiciones, hipótesis y proposiciones) en el marco de la mecánica del medio continuo, que aquí se trata de abordar contemplando unificadamente el sentido clásico y de daño.

Estos objetivos se desarrollarán en tres apartados. El primero de ellos se refiere a la exposición de la fenomenología de alto ciclaje, centrándose el segundo en las modelizaciones empíricas o semi-empíricas desarrolladas. En el tercer apartado se propone una contribución importante de este trabajo de investigación, la formalización teórica de la fenomenología de la fatiga de alto ciclaje. Posteriormente, en un último epígrafe se destacarán las principales conclusiones de la formalización propuesta.

2.2 Fenomenología de la fatiga de alto ciclaje

2.2.1 PARÁMETROS BÁSICOS EN LA DESCRIPCIÓN DE LA FENOMENOLOGÍA DE FATIGA DE ALTO CICLAJE

La relevancia del fenómeno de fatiga condujo desde sus inicios a tratar de acotarlo en base a unos parámetros objetivos propios de la mecánica del medio continuo. Sin embargo, la complejidad del proceso de fatiga, incluida la imperceptibilidad de deformación plástica aparente, en especial en la fatiga de alto ciclaje, HCF, que ocupa el mayor rango de vida del material, y la propia imperceptibilidad del proceso de fisuración, determinó que el primer parámetro clásico fuese el número de ciclos, N , de las cargas aplicadas, representadas éstas por la amplitud de las tensiones cíclicas que producen, según lo indicado por las expresiones (1.3.2.1) a (1.3.2.4) y por la Fig.1.3.2/1, es decir la ya referida expresión $\sigma - N$, [WÖHLER, 1871].

De igual forma, pero muy posteriormente, [PARIS et al,1961], se introdujo con cierta validez un segundo parámetro clásico, la longitud a de propagación de la grieta, también en función del número de ciclos, N , en el dominio de la fatiga de alto ciclaje, mediante la formulación igualmente empírica que se ha tratado con suficiente profundidad en el epígrafe 1.3.3.3. Una breve consideración de interés de ambos aspectos fenomenológicos se trata en [LAWSON /CHEN /MESHII, 1998].

De lo expuesto se desprende que el parámetro clásico, número de ciclos, N , no es en sí mismo representante del material, pues no se refiere a ninguna propiedad o característica del mismo. Es por ello por lo que ha tratado de relacionarse con las tensiones efectivas o con el avance de la grieta en el proceso de fisuración. En ambos casos, tensión o avance de grieta, aunque tiendan a tratarse implícitamente como parámetros objetivos clásicos, en realidad su dependencia de otros parámetros de, al menos, igual objetividad que ellos, también de carácter clásico, hace que la apreciación de parámetros objetivos clásicos en fatiga de materiales quede como una simple referencia histórica, como puede ser constatado en diversas referencias básicas, [NORTON, 1999], [SURESH, 2004]. Por otro lado, ya desde [PARIS et al, 1961], la longitud a de la grieta está en función del rango de la tensión $\Delta\sigma$, (1.3.2.3), por lo que cabría considerar a la amplitud de tensión como parámetro principal del proceso de fatiga⁴.

Es necesario, pues, en primer término, establecer la existencia, y en su caso, la naturaleza de los parámetros conocidos que intervienen en el proceso de fatiga, en qué forma se les considera y cuáles son sus limitaciones, dentro del marco de estudio de este trabajo, la fatiga de metales dúctiles a alto ciclaje, en el que no se considerarán factores tales como el efecto de la temperatura, elementos ambientales o factores agresivos como la corrosión, de forma explícita (aun cuando ello pudiera ser de interés en un contexto más abierto que el desarrollado en esta Tesis).

Siguiendo el curso de la fenomenología primaria, basada en la apreciación visual, y de microscopía, tal como se presentó al inicio del subapartado 1.3.2., tales parámetros objetivos no se muestran claramente durante el proceso de fatiga, ya que no se observan

⁴ El mismo análisis es válido para las deformaciones, en este caso, pues un tratamiento equivalente al expuesto para las tensiones, es decir del tipo $\varepsilon - N$, fig.1.3.2/2 del apartado 1.3.2, no surge hasta 1962, [COFFIN, 1962]-[MANSON, 1962], empíricamente.

diferenciaci3nes que arrojen datos cuantitativos relevantes atendiendo a la forma en que finalmente se produce la fractura. Su observaci3n nos lleva a que en todos los casos de sollicitaci3n c3clica, ya sea axial, flexi3n rotativa, flexi3n unidireccional, torsi3n, ..., [SAE, 1997], [NORTON, 1999] en su referencia a Metals Handbook 1975, [DIETER, 1967,1988] la fractura se produce en una secci3n plana donde las caracter3sticas presentan una tipolog3a muy com3n que generalmente se describe seg3n tres etapas, o zonas, perfectamente diferenciadas:

Etapa de nucleaci3n e iniciaci3n de microgrieta, en aquellos puntos, o zonas, en los que por concentraci3n de tensiones se producen deformaciones pl3sticas relativamente peque1as. Esta acumulaci3n de da1o se produce en defectos microestructurales, de superficie o de volumen, o en cambios bruscos de secci3n. Los que se refieren a la superficie de la pieza son los m3s comunes, como se observa en la Figura 2.2.1/1a, en la que se aprecia la nucleaci3n e inicio de la grieta en un punto perif3rico de la secci3n, donde por el efecto de la tensi3n c3clica previamente se generan intrusiones y extrusiones, como se observa en la Figura 2.2.1/1b.

Propagaci3n de la grieta, en esta etapa la superficie de fractura se caracteriza por ser de grano fino y mediante unas marcas denominadas "marcas de playa" (en la Fig 2.2.1/1a corresponde a la zona de mayor superficie, desde el inicio hasta la zona m3s basta). Si se realiza un an3lisis por Microscopia Electr3nica de Barrido, SEM, se observar3an las denominadas "estr3as de fatiga", que marcan el avance entre las marcas de playa. A su vez, esta etapa suele desarrollarse en dos fases; en la primera la grieta se propaga a trav3s de la zona en la que se origin3, en etapa 1, y en la segunda la propagaci3n se realiza en un r3gimen macrosc3picamente el3stico, fuera ya de la anterior zona, tal como se observa en la Figura 2.2.1/1c

Fractura final, cuando la zona no agrietada posee una secci3n insuficiente para soportar la tensi3n el3stica actuante se produce rotura brusca (reflejado en la Figura 2.2.1/1a, zona de menor secci3n, m3s basta, de grano grueso con planos de forma caracter3stica, con brillo, definida como de fractura fr3gil). El caso indicado corresponde a un metal d3ctil a fatiga de alto ciclaje, en la que, como caracter3stica t3pica, la fractura se produce sin deformaci3n pl3stica aparente. [FORREST, 1982]

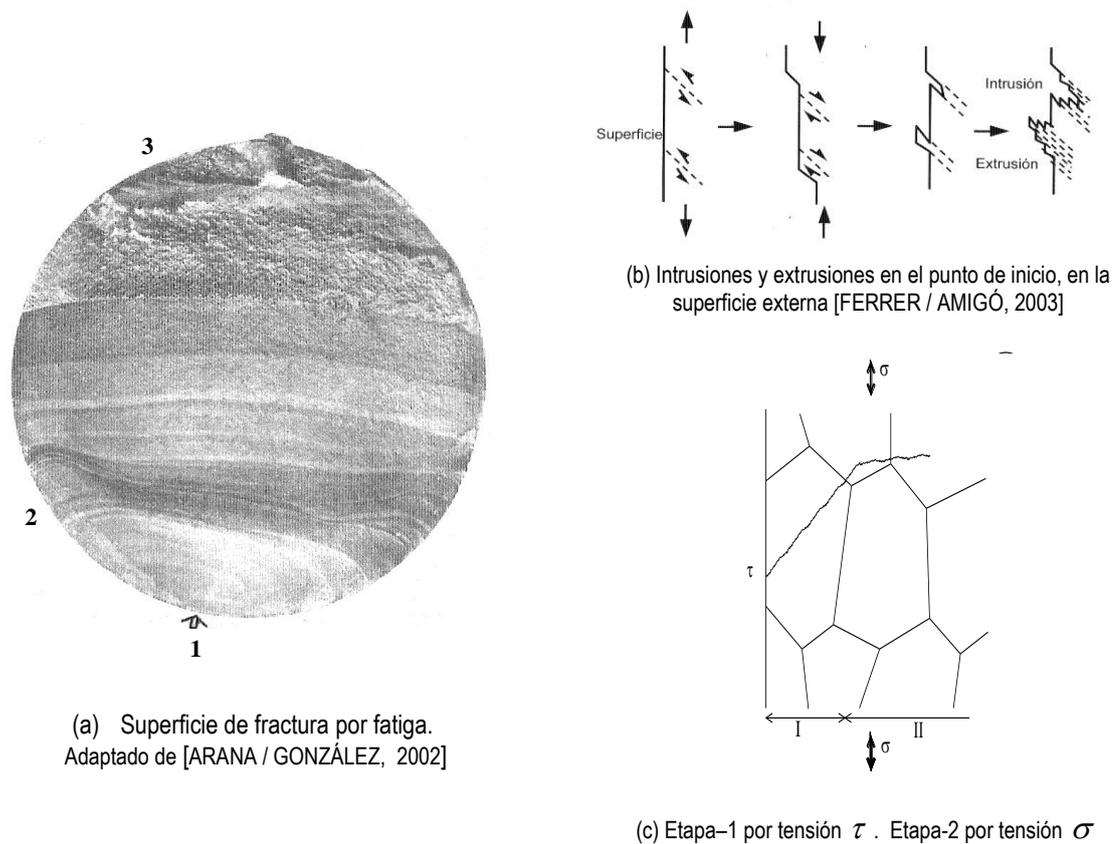


Fig.2.2.1/1. Características básicas que presenta una fractura por fatiga

Si bien, tal como se ha indicado, la forma de la fractura no arroja ningún parámetro relevante, dado que es un efecto y no la causa, sin embargo, sin entrar en los mecanismos de nucleación y crecimiento de grieta, que no son objeto de este trabajo, si que se puede considerar que el proceso de fractura lleva implícito el concepto de daño, introducido en las ecuaciones (1.3.2.11) y (1.3.2.15), lo que indica que la fatiga es un fenómeno acumulativo, pues si bien el efecto en un solo ciclo suele ser insignificante, [LALANNE, 2002], ante el estado de tensión local cíclica en puntos que presenten algún defecto, si que después de una serie de ciclos se pueden formar grietas ultramicroscópicas por concentración de tensiones desembocando en el inicio de una grieta. Obsérvese, en este mismo sentido, que los puntos más expuestos son los de la periferia de la pieza por lo que de este análisis se infiere que uno de los factores que influyen en la vida a la fatiga de un material, es decir, el número de ciclos que puede durar a un cierto nivel de amplitud de tensión o viceversa, es el grado de acabado de la superficie externa de la pieza, es decir, la densidad superficial de defectos. El grado de homogeneidad, tanto interna como superficial, ha de considerarse como parámetro con un determinado grado de objetividad, dado que, de una manera u otra, más pronto o más tarde, afectará a la resistencia de la pieza. A este tipo de parámetros se les denomina generalmente factores de influencia sobre la fatiga. En especial son de interés sus valores en el límite de fatiga, σ_D (Figura 1.3.2/1), sea real o convencional. El estudio de los mismos, bajo la definición fenomenológica directa que los identifica, se realiza en conjunto ordenadamente en el siguiente epígrafe, puesto que un análisis específico de cada uno de ellos en este punto restaría coherencia expositiva. Se considera, por tanto, que es necesario definir un

planteamiento formal para el análisis sistemático de los parámetros de la fatiga. Para ello, se considerará el siguiente criterio razonado:

Puesto que el análisis de vida a fatiga, en la concepción clásica (y de uso en normativa) se analiza, según la mecánica del medio continuo, considerando definido el estado mecánico en un punto, se adoptará como parámetro principal la tensión (amplitud de tensión), en ese punto. Dado que tal estado de tensión pertenece a un dominio variable, pero acotado, representado por un proceso cíclico que afecta al material de manera irreversible (daño acumulativo), atendiendo a distintos parámetros (de cierto grado de objetividad, o subjetivos), a tales factores se les mantendrá su denominación clásica de factores de influencia, con el grado de influencia que la propia fenomenología experimental determine.

Este criterio queda constatado si consideramos la misma gráfica [WÖHLER, 1871], como en la Figura 1.3.2/1, referida a dos piezas de igual material que presenten al menos una diferencia [ya sea de tensión media ($\sigma_a, \sigma_m, (1.3.2b,c)$), o de geometría, de textura...]. En este caso observaríamos que dicha curva, tras los ensayos correspondientes, en general habría variado sustancialmente. Un buen número de experiencias de este tipo pueden consultarse en [CAZAUD, 1957,1969], [FORREST, 1982].

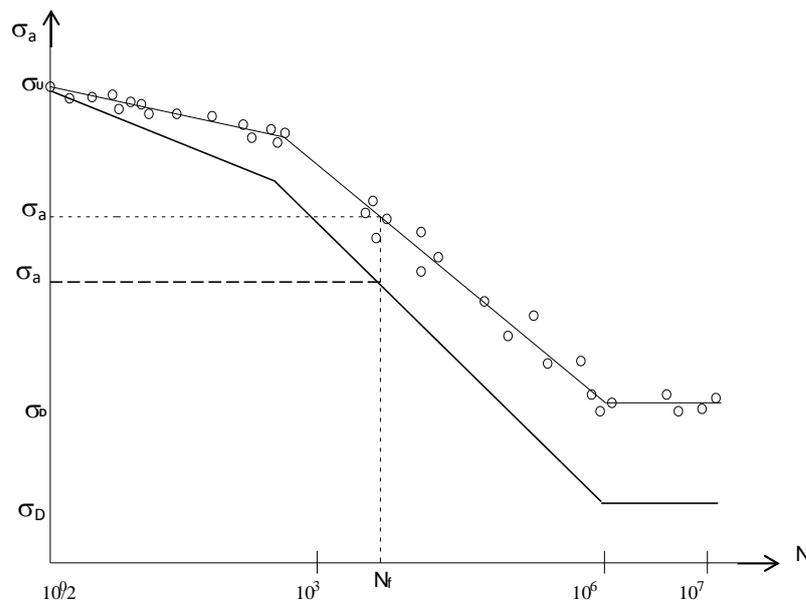


Fig 2.2.1/2. Curvas de Wöhler $\sigma - N$, log-log, de un mismo material con factores de influencia distintos. Se ha obviado la representación aleatoria de probetas en la curva inferior, por simplicidad.

En la Figura 2.2.1/2 se muestra un caso usual de lo expuesto, donde cabe destacar la característica fenomenológica esencial, la disminución de la resistencia a la fatiga a cualquier número de ciclos, siempre en índice decreciente y siendo de mayor disminución en el límite de fatiga (real o convencional), donde la superior es la estándar o de referencia.

El problema de la estimación de una resistencia (amplitud), σ_a , para un número determinado de ciclos N , o viceversa, pasa fundamentalmente por la estimación del valor de resistencia (amplitud) al inicio N_i y final, N_D , del intervalo de fatiga de alto ciclaje, es decir [$\sigma_{ai,oe}$, $\sigma_{D,oe}$]

de referencia estándar, para posteriormente poder determinar mediante los factores de influencia, y el efecto de la tensión media, las resistencias (amplitudes) [σ_{ai} , σ_D] correspondientes al mismo intervalo de una pieza del mismo material que responda a otro caso distinto del estándar (por sollicitación, geometría, textura,...). Ambas situaciones son de base fenomenológica. La segunda responde, como ya se ha indicado, al análisis de los factores de influencia, y al efecto de la tensión media, que se aborda en los apartados siguientes y, la primera, se resolvió adoptando por convenio un tipo estándar, o de referencia de ensayo normalizado.

Desde [WÖHLER, 1871], (él mismo creó su máquina), si bien actualmente se utiliza normalmente la de flexión rotativa estándar de [MOORE, 1920-1925], el ensayo⁵ normalizado que se tomó como estándar, en cuanto a la sollicitación, fue el de flexión pura rotativa alterna, tensión media nula $\sigma_m = 0$, (1.3.2.4), y respecto al material (metales), probetas normalizadas de sección cilíndrica y acabado superficial especular (pulido) y sin muescas o entallas, lo que asegura la curva de Wöhler de mayores valores de resistencia en su máximo ciclo de vida. Aunque la flexión alterna no rotativa supera la misma en un 5%, el ensayo rotativo es de menor coste.

Los resultados experimentales de fatiga muestran una acusada dispersión, que se acentúa a medida que aumenta el número de ciclos, si bien parte de la dispersión está relacionada con la propia ejecución del ensayo, errores en los procedimientos y en las condiciones requeridas: vibración de la máquina de ensayo, alineación de la probeta, sus tolerancias y otros factores metalúrgicos de la misma tales como las inclusiones. Sin embargo la mayor dispersión es debida al propio fenómeno de la fatiga, manifestándose mediante una dispersión típica formando una banda que limita la rotura de las probetas. Existen muchos estudios estadísticos al respecto, si bien parece ser que las distribuciones más adoptadas son la distribución normal de Gauss y la de Weibull [WEIBULL, 1939,1947], que reproducen más adecuadamente la dispersión de datos cuando se trata la fatiga de alto ciclaje. En general, se condiciona el límite de fatiga, $\sigma_{D,oe}$, y la banda de resistencia (amplitud) correspondiente a una probabilidad de fallo, según la precisión del ensayo realizado que se determina por el número de probetas ensayadas (un mínimo de diez es lo recomendable, distribuidas en grupos de amplitud de tensión), indicándose en tanto por ciento; la referencia más usual es $\sigma_{D,oe50\%}$, (de igual forma, por tanto para el inicio del intervalo de fatiga de alto ciclaje, $\sigma_{ai,oe50\%}$). En este estudio se denominarán explícitamente, $\sigma_{ai,oe}$, $\sigma_{D,oe}$, puesto que es el diseñador quien decide dicha probabilidad de fallo en función del proyecto considerado [CAZAUD, 1957,1969],[FORREST, 1982].

A partir de la gran cantidad de resultados existentes de los ensayos de materiales metálicos acumulados desde su inicio, existen muchas propuestas, atendiendo al ensayo estándar referido, de expresiones empíricas que proponen el límite de la fatiga (real o convenido) en función de la resistencia máxima⁶ del metal, σ_u , a tracción. Así, aunque lo más usual es que cada industria disponga de una formulación específica para un metal, o aleación de composición concreta, alguna de las relaciones sencillas propuestas, entre otras, en [CAZAUD, 1957,1969], [BATHIAS / BAÏLON, 1988], son:

⁵ No es relevante para este trabajo. Sus características básicas pueden consultarse, entre otros, en [AFANÁSIEV / MARIEN,1978] y [ANÓN, 1949]

⁶ También hay propuestas, en menor número, en función del límite elástico

<u>Relación de</u>	<u>En MPa</u>	
Mailander		$\sigma_{D,oe} = (0,49 \pm 0,20) \sigma_u$
Heywid		$\sigma_{D,oe} = 0,5 \sigma_u$

(2.2.1.1.a)

o, las indicadas en [FEODÓSIEV, 1980]

<u>Metal</u>		
Acero		$\sigma_{D,oe} \approx (0,4 - 0,5) \sigma_u$
Acero alta resistencia		$\sigma_{D,oe} \approx 4000 + \frac{1}{6} \sigma_u$ (en Kg/cm ²)
No ferroso		$\sigma_{D,oe} \approx (0,25 - 0,5) \sigma_u$

(2.2.1.1.b)

Se puede observar en las relaciones de Feodósiev que aparece un nuevo elemento, la alta resistencia. Un simple análisis nos indica que para la alta resistencia disminuye, comparativamente con resistencias usuales, el ratio de resistencia del límite de fatiga, $\sigma_{D,oe}$. Esto ocurre en todos los metales debido fundamentalmente a que se tornan más frágiles pues la alta resistencia conlleva una mayor rigidez. En este mismo sentido se ha estudiado la amplitud de tensión, $\sigma_{ai,oe}$, de inicio del intervalo de la fatiga de alto ciclaje, resultando que apenas existe dispersión y la merma de resistencia es mínima, adoptándose, en las mismas condiciones que $\sigma_{D,oe}$, indistintamente del metal, la relación

$$\sigma_{ai,oe} = 0,9 \sigma_u \quad (2.2.1.1.c)$$

Finalmente, la experiencia acumulada, resultado tanto de ensayos como de estados de servicio y de comparación de resultados, (de valoraciones del tipo (2.2.1.1.a)–(2.2.1.1.c)) ha proporcionado múltiples valoraciones empíricas, orientativas, de uso precavido, que tienden a los valores que en este resumen se presentan en la tabla 2.2.1/1, atendiendo al análisis de las valoraciones indicadas, entre otros, en [CAZAUD, 1957,1969], [FORREST, 1982], [SAE, 1997], [NORTON, 1999], [SHIGLEY / MISCKE, 2002], referidas al ensayo estándar para materiales metálicos básicos.

	$\sigma_{ai,oe}$	$\sigma_{D,oe}$
Ciclos	$N_i \approx 10^3$	Ferrosos $N_D \approx 10^6$ No Ferrosos $N_D \approx 5 \cdot 10^8$ (Convencional)
Acero forjado	$0,9 \sigma_u$	$0,5 \sigma_u \leq 700$ MPa
Acero fundido y Fundición de hierro	$0,9 \sigma_u$	$0,4 \sigma_u \leq 400$ MPa
Metales no ferrosos	$0,9 \sigma_u$	$0,4 \sigma_u \leq$ (según metal)

Observación: En la práctica, si no se dispone de un mínimo de ensayos, se tiende a aplicar una reducción del orden del 10% en $\sigma_{ai,oe}$, y del 20% en $\sigma_{D,oe}$

Tabla 2.2.1/1. Valores orientativos de amplitudes de tensión de metales, para N_i , N_D , en función de la resistencia máxima, σ_u

De la tabla 2.2.1/1, se infiere la notoria pérdida de resistencia debida al proceso de fatiga, fundamentalmente en la de alto ciclaje, donde cabe señalar que, en aquellos metales que no presentan el codo característico del límite de fatiga real, que puede observarse en la Figura 1.3.2/1 o en la Figura 2.2.1/2, curva de [WÖHLER, 1871], en los que el decrecimiento solo se suaviza (como el aluminio, cobre,...), se define un límite de fatiga que es convencional, a un número de ciclos donde la dispersión es aceptable.

2.2.2 FACTORES DE INFLUENCIA. MODIFICACIÓN DEL LÍMITE DE FATIGA.

En la sección anterior se ha acotado el parámetro fundamental de control de la resistencia a la fatiga de alto ciclaje, la amplitud de tensión, en el intervalo $\sigma_{ai,oe}$, $\sigma_{D,oe}$ de la fatiga de alto ciclaje para el estado tensional estándar de flexión rotativa alterna, de tensión media nula, $\sigma_m = 0$ (1.3.2.4), considerando el binomio pieza-material en las condiciones más favorables posibles. El objetivo del actual epígrafe consiste en analizar el fenómeno frente a las influencias posibles que puedan actuar sobre el parámetro fundamental anteriormente definido, así como los dos criterios que rigen su acotación. Estos dos criterios van a estar determinados por el propio objeto y metodología definidos en este trabajo y su concreción es necesaria ante el gran volumen de datos empíricos que podrían considerarse en un análisis exhaustivo de la fatiga a alto ciclaje.

De la extensa bibliografía, la cual para ser abordable debe tratarse por compendios y selección de sus referencias más específicas, se constata que no existe una clasificación totalmente formal de las causas o factores que influyen en la fatiga de materiales. Diversas referencias usuales [CAZAUD, 1957,1969], [FORREST, 1982], [NORTON, 1999], [SHIGLEY / MISCHKE, 2002], [ASM HANDBOOK, 1996], [SAE, 1997], [SURESH, 2004], [DOWLING, 2007], [LALANNE, 2002], [AVILÉS, 2005], presentan una clasificación global distinta a efectos de fenomenología, pero con algunas características semejantes. El problema esencial reside en lo ya referido en el epígrafe 1.3.2 [FEODÓSIEV, 1997], la imposibilidad de diferenciar claramente las propiedades del material de las de la propia pieza. Esto implica que cualquier nueva condición sobre el problema (material, geometría, entorno, etc.) puede influir en su parámetro fundamental. Esa es la causa de que tales clasificaciones suelen consistir en la ampliación de un marco previamente definido, incluyendo nuevos factores bajo denominaciones anteriores o generando una categoría provisional de factores varios, mientras que el efecto de la concentración de tensiones se ha tratado de forma diferenciada. La situación se complica, aún más, si dentro del mismo conjunto se introducen la influencia de tratamientos metalúrgicos que mejoran el comportamiento del material-pieza frente a la fatiga.

Por tanto, sin entrar en la conjetura de la clasificación de los factores de influencia, respetando la de todos los autores, (si bien cabe indicar que [SHIGLEY / MISCHKE, 2002] hacen referencia a [MARIN, 1962] en el contexto que implica su aplicación como aquí se define), y puesto que su formulación se basa en la cuantificación final de su efecto sobre el parámetro fundamental, esencialmente el límite de fatiga, bajo la formulación⁷

$$\sigma_{D,o} = C_{rD} \cdot \sigma_{D,oe} \quad (2.2.2.1a)$$

⁷ En algún caso particular también $\sigma_{ai,o} = C_{ri} \cdot \sigma_{ai,oe}$, inicio intervalo fatiga alto ciclaje.

donde⁸

$$C_{rD} = \prod_{j=1}^n C_{D,j} \quad (2.2.2.1b)$$

siendo $\sigma_{D,o}$ el límite de fatiga definitivo de la pieza analizada para tensión media nula, $\sigma_{D,oe}$ el de la pieza estándar o ideal referida en el epígrafe anterior (que cumplirá $C_{D,j} = 1$), C_{rD} el coeficiente de modificación del límite de fatiga, (en general de reducción, $0 < C_{rD} \leq 1$), resultado de aquellos factores de influencia $C_{D,j}$ sobre la pieza en concreto, a criterio del diseñador, que forman el conjunto de parámetros supuestos como sucesos independientes entre sí,

$$C_{D,j} = \{ C_{carga}, C_{superficie}, C_{tamaño, \dots} \}_n \quad (2.2.2.1c)$$

cuyos elementos han de ser mayores que cero. Cabe señalar que, entre otras influencias, en dicho conjunto (2.2.2.1c), a tenor de las referencias indicadas más arriba, se encuentran también (clasificadas de una u otra forma) elementos tales como rozamiento en partes de la pieza, temperatura, soldadura, corrosión, fiabilidad, tratamiento mecánico (laminado, granallado,...., que en este caso aumenta el límite de fatiga),...., y otros factores varios. Este concepto es extensible, en caso necesario, al inicio del intervalo de fatiga de alto ciclaje^{7,8}.

Por otra parte, en general, se analiza de forma diferenciada el efecto de las muescas o entallas sobre una pieza de igual material, denominándose a su influencia coeficiente de concentración de tensiones a la fatiga, K_f , que se aplicará de igual forma en o sobre C_{rD} según referencias.

Tal y como se desprende de la expresión (2.2.2.1c), en su análisis clásico, en el conjunto $C_{D,j}$, o en su caso⁸ $C_{i,j}$, no se presenta el efecto debido a la variación de las tensiones máxima-mínima, es decir, la variación del rango, $\Delta \sigma$, en el mismo estado tensional, es decir, la amplitud de tensión, σ_a , y la tensión media, σ_m , según las ecuaciones (1.3.2.3a)-(1.3.2.3d). Esto es debido a que en el análisis clásico su estudio es independiente de los factores de influencia, en general debido a que dichos factores se han ido incorporando, mientras que el aspecto tensional está definido desde el inicio del problema técnico analizado (de ahí su carácter de parámetro fundamental). A continuación, pues, siguiendo quizás un esquema más clásico que en la práctica usual, en primer lugar se analizarán aquellos factores de influencia más representativos del conjunto $C_{D,j}$, los incluidos en (2.2.2.1c), análisis extensible⁸ a $C_{i,j}$, y el tratamiento para muescas o entallas, puesto que actúan sobre el límite de fatiga $\sigma_{D,oe}$, con respecto a la situación de ensayo estándar, descrita en 2.2.1; posteriormente, una vez obtenido $\sigma_{D,o}$, según (2.2.2.1a), se analizará en segundo lugar el efecto de la tensión media y de la variación de la amplitud de tensión, tal y como se ha indicado anteriormente.

$C_{carga} \in C_{D,j}$ o $C_{i,j}$ **es el factor que representa la influencia supeditada a la carga**, muy usual, ya que se refiere al efecto explícito que se produce en el proceso de fatiga debido al tipo de sollicitación pura que actúa en la pieza analizada, frente a la estimación previa indicada sobre una pieza estándar a flexión pura rotativa alterna. Así, en el caso axial cíclico (tracción-

⁸ En algún caso particular, puede haber algún coeficiente $C_{i,j}$ para $\sigma_{ai,oe}$, tal que $C_{ri} = \prod_{j=1}^n C_{i,j}$

compresión), ambas amplitudes de tensión $\sigma_{ai,o}$, $\sigma_{D,o}$ inicial y final del intervalo de fatiga de alto ciclaje resultarán menores a sus correlativas estándar $\sigma_{ai,oe}$, $\sigma_{D,oe}$, referidas en la Tabla 2.2.1/1. Ello puede explicarse acudiendo a la comparación entre las distribuciones de tensiones en ambos procesos, flexión pura (diagrama lineal) y tracción-compresión pura (diagrama constante) [NORTON, 1999]. Efectivamente, dado que la tensión en todo punto de cualquier sección en el caso axial en principio siempre es la misma, y máxima, mientras que en la flexión pura en principio es nula en el centro de gravedad y máxima solo en los puntos extremos de la sección, siguiendo una ley lineal, en sollicitación axial el número de volúmenes elementales afectados por la amplitud de tensión máxima es mayor y, por lo tanto, también es mayor en este caso la probabilidad de defectos intrínsecos en dichos volúmenes. Igualmente ocurre si el axil cíclico es descentrado, pero con mayor descenso para el límite de fatiga $\sigma_{D,oe}$. Y para el caso de torsión pura, también se observa una reducción de los valores $\sigma_{ai,oe}$, $\sigma_{D,oe}$, iniciales, referidos en la Tabla 2.2.1/1. Dicha reducción, por otra parte, se ajusta con buena precisión a la teoría de la energía de distorsión, equivalente a la de falla estática, de [VON MISES, 1913], tal y como se precisará en el posterior análisis que se realizará sobre los métodos. Resultados experimentales extensos de base empírica, en menor número para torsión, se pueden consultar en [NORTON, 1999], [SHIGLEY / MICHKE, 2002], [CAZAUD, 1957,1969], [FORREST, 1982], [AVILÉS, 2005]. Un resumen estimado de valores orientativos del coeficiente de variación, o factor de influencia, por efecto del tipo de sollicitación pura, se presenta como resultado de este análisis en la Tabla 2.2.2/1

	C_{carga} = se aplica según (2.2.2.1a) y (2.2.2.1b)	
	Para $\sigma_{ai,o}$	Para $\sigma_{D,oe}$
Flexión	1	1
Axial	Centrada	0,833
	Descentrada	0,778
Torsión ⁹	0,9	0,577

Tabla 2.2.2/1 Valores orientativos del factor de influencia denominado C_{carga} .

$C_{superficie} \in C_{D,j}$ o $C_{i,j}$ es el factor que representa la influencia exclusivamente supeditada al acabado de la superficie de la pieza, que partiendo del resultado estándar (que, para este parámetro, recuérdese que está basado en un pulido perfecto de la probeta para que no se presente en la superficie ninguna marca, rallado, poro o imperfección), se aplicará únicamente sobre el límite de fatiga $\sigma_{D,oe}$, (Tabla 2.2.1/1), según (2.2.2.1a) y (2.2.2.1b). Existen variados tipos de tratamiento empírico de datos experimentales sobre este factor, de los que cabe destacar los que se presentan en forma de diagramas, muy completos, donde entrando en el

⁹ En el caso de torsión el valor de 10^0 a 10^3 ciclos, se suele reducir un 10%. Y, para fundición de hierro, es necesario adoptar $C_{carga}=0,8$ en lugar de 0,577.

eje de abscisas en general con la resistencia a tracción, σ_u , del material, básicamente acero con aclaraciones para otros metales dúctiles, se busca la intersección hasta una de las curvas de acabado (suele haber de pulido comercial o rectificado fino, maquinado o laminado en frío, laminado en caliente, como sale de la forja,...y a veces con alguna curva auxiliar de corrosión específica) obteniéndose en el eje de ordenadas el factor $C_{superficie}$, como presenta [NORTON, 1999] en referencia a [JUVINALL, 1967], o mediante el tratamiento de datos mediante formulación empírica, en ocasiones aproximadas de las propias curvas, como la presentada por [SHIGLEY / MISCHKE, 2002], según datos experimentales de [NOLL / LIPSON, 1946], y un estudio de regresión de Mischke, que propone la función empírica adimensional

$$C_{superficie} = \frac{A_s}{\sigma_u^{b_s}} \quad (2.2.2.2)$$

donde σ_u , es la resistencia máxima a tracción de la pieza en MPa, y (A_s, b_s) , dos parámetros que dependen del tipo de acabado superficial, tal que (A_s, b_s) , es (1.58, 0.086) para el esmerilado, rectificado o pulido fino, (4.450, 0.265) para el maquinado o estirado en frío, (56.100, 0.719) para el laminado en caliente, y (271.00, 0.995) para material forjado.

Por otro lado [NORTON, 1999], indica que a la fundición de hierro no le afecta el acabado superficial pudiéndose utilizar $C_{superficie} = 1$, debido a que su formación interna presenta discontinuidades que minimizan prácticamente el factor de influencia superficial. Otra tabulación de datos, considerando la composición del acero, se puede encontrar en [CAZAUD, 1957, 1969] y [FORREST, 1982].

$C_{tamaño} \in C_{D,j}$ o $C_{i,j}$, es el factor que representa la influencia exclusivamente asociada al tamaño de la pieza, o sus dimensiones, también denominado factor efecto de escala. Este factor está ligado al gradiente de tensión, pues está ampliamente probado experimentalmente que, ante un mismo valor de amplitud de tensión, cuanto mayor es la pieza menor resistencia a fatiga presenta, hecho claramente determinado (como en el caso del factor de influencia por carga) con la probabilidad de existencia de mayor número de defectos en un volumen mayor, si bien sobre este último aspecto existen opiniones que difieren (un análisis más completo se puede encontrar en [FORREST, 1982] en base a [WEISMAN / KAPLAN, 1950]). Este enfoque tiene una concordancia cualitativa aceptable con los resultados experimentales existentes, pero teniendo en cuenta que para sollicitación axial, dado su gradiente de tensión nulo, no le afecta la influencia del tamaño, es decir el factor será la unidad, si bien a partir de cierto tamaño puede apreciarse la influencia de este factor, que se estabiliza para todo tipo de sollicitación. Un problema adicional en cuanto a la cuantificación de este factor de influencia es la propiedad abstracta implícita en “la forma”, es decir cómo resolver la dificultad de expresar en un solo parámetro el efecto de las dimensiones condicionadas a la forma que presentan secciones diferentes, generalmente en comparación con el diámetro de la probeta cilíndrica estándar. [SHIGLEY / MISCHKE, 2002], a partir de establecer una correlación empírica entre la sección circular y las dimensiones de otras formas usuales de sección, mediante un parámetro equivalente al diámetro de la sección circular, denominado dimensión efectiva o diámetro equivalente, d_e , presenta una formulación por intervalos en función del mismo, pero supeditada a su obtención para cada tipo de sección, atendiendo a [KUGUEL, 1961] (según un criterio de equivalencia entre la zona de máxima tracción de la sección circular de la probeta rotativa, con la sección estudiada, que estima en un 5%), que también comenta [NORTON, 1999], en su referencia a [SHIGLEY / MISCHKE, 2002], pero referida a una sola formulación, indicando que, basada en el acero, es de aplicación dudosa para materiales no ferrosos.

Consideraciones en torno a la forma se pueden consultar también en [CAZAUD, 1957,1969] y [LALANNE, 2002] en base a [BRAND / SUTTERLIN, 1980] [BRAND, 1981]. Atendiendo a estas características, un resumen estimado de valores orientativos del coeficiente de variación, o factor de influencia, por efecto del tamaño, se presenta como resultado elemental de este tipo de análisis en la Tabla 2.2.2/2.

$C_{tamaño} =$ se aplica según (2.2.2.1a) y (2.2.2.1b)		
Diámetro equivalente ¹⁰ d_e , en mm.	Flexión, torsión	Axial
$d_e \leq 8$	1	1
$8 \leq d_e \leq 50$	0,8	1
$50 \leq d_e \leq 250$	0,7	0,8
> 250	0,6	0,7

Tabla 2.2.2/2. Valores orientativos del factor de influencia denominado $C_{tamaño}$

El análisis realizado de los factores de influencia carga, superficie y tamaño, es suficiente para darnos una perspectiva del alto grado de empirismo del fenómeno de la fatiga, puesto que el tratamiento del resto de factores de influencia, ya indicados a continuación de (2.2.2.1c), es de la misma tipología: determinación experimental de dichos factores. Sin embargo, es importante el análisis diferenciado del comportamiento a fatiga de aquellas piezas que por diseño presentan la singularidad de muescas o entallas, que se suele definir, [NORTON, 1999], en presencia de perforaciones, orificios, ranuras, cambio abrupto de sección, etc., y cuya influencia sobre la resistencia a fatiga, siempre reduciéndola, se representa con el coeficiente K_f .

El coeficiente K_f , denominado **factor de concentración de tensiones a la fatiga**, si bien se define como la relación entre el límite de fatiga de una probeta sin muescas o entallas y otra probeta de iguales características sin tales irregularidades, no sólo es una extensión natural del factor de concentración de tensiones geométrico o teórico, K_t , en el caso análogo de piezas sometidas a cargas estáticas de tratamiento usual en la Mecánica de la Fractura¹¹, sino que además están íntimamente relacionados [FORREST, 1982],[CAZAUD, 1957,1969]. Esta relación es compleja, tal como se desprende de las dos primeras etapas de la fractura por fatiga, descritas en la Fig.2.2.1/1, y se trata mediante el concepto de sensibilidad a las muescas, q , del material en función de la geometría. Esta relación se ha definido, en base a los trabajos de [NEUBER, 1946], [KUHN / HARDRATH, 1952] y [PETERSON, 1974], según [NORTON, 1999], como

$$q = \frac{\Delta\sigma_f}{\Delta\sigma_t} \quad (2.2.2.3a)$$

¹⁰ d_e , de manera orientativa se puede obtener igualando el área de la sección estudiada con la de un círculo. Para una mayor concreción, pueden consultarse [NORTON, 1999], [SHIGLEY / MISCHKE, 2002].

¹¹ Sobre K_t existen diversas referencias [NORTON, 1999], [SHIGLEY / MISCHKE,2002]..., que facilitan su valor por medio de diagramas y tablas, en función del radio de la muesca y el menor espesor de la sección de la pieza, ante distintos tipos de carga y geometría.

donde se expresa que el incremento de tensión por fatiga $\Delta\sigma_f$ es proporcional a un incremento de tensión estática $\Delta\sigma_t$ en la muesca o entalla como respuesta a un mismo valor de tensión, σ , tal que el incremento correspondiente en el caso de fatiga y en el caso estático resulta de la diferencia entre la tensión amplificada y la aplicada,

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_f &= K_f \cdot \sigma - \sigma \\ \Delta\sigma_t &= K_t \cdot \sigma - \sigma\end{aligned}\quad (2.2.2.3b)$$

A partir de (2.2.2.3a) y (2.2.2.3b) es inmediata la relación

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad (2.2.2.3.c)$$

por lo que¹²

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \quad (2.2.2.4)$$

donde el factor de concentración de tensiones a fatiga, K_f , está expresado en función del correspondiente factor de concentración de tensiones teórico o geométrico y la sensibilidad respecto a la entalla analizada.

De (2.2.2.4) se desprende que un material que tenga sensibilidad a la muesca nula, $q=0$, o en el caso de no tener muescas, es decir una pieza como las analizadas anteriormente de (2.2.1.1a) a (2.2.2.2), no tendría influencia por muesca. También cabe decir que los materiales dúctiles son poco sensibles a la muesca, y los materiales frágiles son muy sensibles a la muesca, lo que concuerda con los conocimientos básicos experimentales de los materiales. Por otra parte, el uso del factor de concentración de tensiones geométrico, K_t , en el enfoque clásico de la fatiga, tiende a ser conservador.

De igual forma que para los valores de K_t , los valores de la sensibilidad a la entalla, q , se encuentran definidos mediante diagramas y tablas, para el material correspondiente, en general metales, en función del radio de la muesca, r_m aunque es muy común la referencia a la fórmula de [KUHN / HARDRATH, 1952] en base a [NEUBER, 1946] y [PETERSON, 1974],

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{a_m/r_m}} \quad (2.2.2.5)$$

donde $\sqrt{a_m}$, es una constante dimensional propia del material (metal), expresada en \sqrt{mm} , también tabulada o en diagrama disponible en [NORTON, 1999], [SHIGLEY / MISCHKE, 2002].

La aplicación del factor de concentración de tensiones de fatiga, K_f , a la determinación de la amplitud de tensión, se realice considerándolo dentro del conjunto de coeficientes de modificación $C_{D,j}$ (2.2.2.1c), o independientemente, como en general se aplica, siempre actúa

¹² La formulación es válida para todo tipo de sollicitación y tensión, pero las constantes K_f y K_t serán distintas en cada tipo.

reduciendo la amplitud de tensión en un factor $1/K_f$. En el caso de materiales frágiles actúa tanto sobre $\sigma_{ai,oe}$ y $\sigma_{D,oe}$, (dado que estos son más sensibles a las muescas) mientras que en materiales dúctiles, solo actúa sobre $\sigma_{D,oe}$, (puesto que, por las mismas razones, al inicio de intervalo de fatiga de alto ciclaje la ductilidad aún controla una tendencia nula de la sensibilidad inherente). En ambos el efecto $1/K_f$ se aplica análogamente a (2.2.2.1a)¹³, según lo expuesto.

Una vez definidos y tratados los parámetros o factores de influencia conocidos o más característicos, y analizada su influencia sobre el parámetro principal clásico, la amplitud de tensión (1.3.2.3b), (v.g. número de ciclos de vida a fatiga a alto ciclaje), según el planteamiento o hipótesis de estado tensional cíclico con $\sigma_m = 0$, (1.3.2.3c), se procederá, de acuerdo a la metodología propuesta, al análisis que involucra exclusivamente al aspecto tensional en su contexto fenomenológico, análisis que se concreta en: influencia de la frecuencia de la sollicitación, influencia de la tensión media $\sigma_m \neq 0$ (1.3.2.3c), influencia de la variación de la amplitud de tensión σ_a (1.3.2.3b), e influencia o planteamiento ante estados de tensión multiaxiales cíclicos.

La influencia de la frecuencia, en los metales, no se considera importante dentro de los límites razonables en los que se desarrolla, generalmente, el proceso de fatiga de alto ciclaje. Se supone, pues, que el efecto de daño que se da en un material, para un número fijado de ciclos, es independiente de la frecuencia con la que se realice, es decir, del tiempo total invertido, siendo este aspecto de sumo interés para obtener resultados en ensayos con mayor rapidez que la realidad requerida en servicio, con la posibilidad de extrapolar resultados. Este supuesto, suficientemente documentado en [FORREST, 1982], [CAZAUD, 1957,1969], [LALANNE, 2002], es debido a que los metales tienen un bajo ciclo de histéresis mecánica siendo a su vez buenos conductores térmicos, baja reactividad, por lo que disipan con facilidad el calor generado por fricción interna entre cristales y formación-avance de la grieta, según se indica en la Figura 2.2.1/1, así como por amortiguamiento sólido y amortiguamiento estructural [THOMSON, 1982] en base a [KIMBALL, 1929] y [LAZAN, 1968], por lo que se puede considerar que la energía disipada por ciclo es independiente de la frecuencia, en un gran rango de frecuencia. A ello cabe añadir que la duración de la propagación de la deformación es despreciable frente a la de su causa; conjuntamente con que la velocidad de deformación es despreciable frente a velocidad de oscilación de la tensión.

En el siguiente resumen, del análisis realizado de resultados experimentales, se concluye la hipótesis de influencia despreciable de la frecuencia en la fatiga de metales en el marco objeto de este trabajo.

De los resultados de [WYSS, 1953], tabulados en [FORREST, 1982], de ensayos a resistencia a la fatiga de diversos aceros de diferente composición, se desprende que

$$1.01 \leq \frac{\sigma_D(10000cpm)}{\sigma_D(350cpm)} \leq 1.07 \quad (2.2.2.6a)$$

¹³ Considerándose, en su caso, las notas 7 y 8

y en aleaciones de Al-Cu

$$1 \leq \frac{\sigma_D(80000cpm)}{\sigma_D(350cpm)} \leq 1.03 \quad (2.2.2.6b)$$

Incluso a altas frecuencias, [JENKIN, 1925] y [JENKIN / LEHMANN, 1929] observan, tras el análisis que se presenta tabulado en [CAZAUD, 1957,1969], una mínima influencia de la frecuencia en el límite de fatiga, frente a un amplio rango de frecuencias en los siguientes metales.

$$\text{acero dulce:} \quad 1 \leq \frac{\sigma_D(60000cpm)}{\sigma_D(3000cpm)} \leq 1.067$$

$$\text{hierro Armco,} \quad 1 \leq \frac{\sigma_D(60000cpm)}{\sigma_D(3000cpm)} \leq 1.081$$

$$\text{cobre} \quad 1 \leq \frac{\sigma_D(120000cpm)}{\sigma_D(3000cpm)} \leq 1.130 \quad (2.2.2.6c)$$

donde cabe destacar, según (2.2.2.6c), el buen comportamiento de metales como el cobre, de límite fatiga convencional inferior a otros metales (≈ 80 MPa), que al doble de alta frecuencia solamente existe una variación del orden de 1MPa, (de hecho a 60.000 rpm se mantiene en 1,08 en el entorno del resto referencias). [FORREST, 1982] indica que dicho efecto sobre el límite de fatiga, (2.2.2.6a) a (2.2.2.6c), puede estar relacionado con la forma de la onda del ciclo de tensión que, si bien en el proceso experimental responde aproximadamente a una onda armónica simple, (1.3.2.1), podría haber ciertas modificaciones en la misma, pero de difícil evidencia, pues, como [CAZAUD, 1957,1969] refiere genéricamente, el ciclo de histéresis que se produce es más estrecho cuanto más corto es el periodo y, en su referencia previa de [CAQUOT, 1933], al ser más corto el periodo, menor es la modificación de la materia o como él mismo indica, textualmente, *“con ciclos repetidos rápidamente, el metal no tiene tiempo de fluir, de manera que todo ocurre como si el metal fuese más rígido”*.

La influencia de la tensión media, $\sigma_m \neq 0$ (1.3.2.3c), propia de los procesos de fatiga, es considerada como el efecto que produce en el material una amplitud de tensión σ_a (1.3.2.3b) alternando sobre una pieza sometida a una tensión constante estática de valor igual a la tensión media σ_m (1.3.2.3c).

Este planteamiento, que no es lineal, es decir, que no cumple el principio de superposición, permite analizar el problema a partir del estudio realizado con componente de tensión media nula, $\sigma_m = 0$, y corregirlo en función de los resultados experimentales obtenidos. La fenomenología indica que, generalmente, en los metales, una componente de tensión media de tracción, $\sigma_m > 0$, reduce la vida a fatiga debido a que favorece el desarrollo de fractura por fatiga, referido según Fig. 2.2.1/1, por reducir el margen del intervalo de tensión, en los puntos

de avance de la grieta, para alcanzar la tensión crítica a partir de la cual se supera la tenacidad a la fractura del material K_{Ic} , en relación a los modos I, II, III (como se ha indicado en Fig 1.3.3/11), aspecto éste que no acontece para la componente de tensión media de compresión $\sigma_m < 0$, y por lo tanto su influencia en la fatiga de alto ciclaje tiende a ser incluso beneficiosa (favorece, normalmente, cierto grado de cerradura o ajuste de la grieta, por ciclo, aunque también influye en la fricción de las superficies de fractura), tal como comúnmente se indica en la literatura básica de fatiga. Los resultados experimentales avalan el análisis de la fenomenología expuesta anteriormente, que a continuación se resumen específicamente, centrándose en la fatiga de alto ciclaje (en la fatiga de bajo ciclaje, Fig. 1.3.2/1, las tensiones son lo suficientemente elevadas para producir importantes deformaciones plásticas por lo que el efecto de la tensión media tiende a debilitarse, tal como se infiere de [FORREST, 1982], [LALANNE, 2002], [CAZAUD, 1957,1969], etc.).

Así, la Fig. 2.2.2/1, responde a la fenomenología típica del comportamiento a fatiga de alto ciclaje (metales), para amplitud de tensión normal, σ_a (1.3.2.3b) y tensión media, $\sigma_m \neq 0$ (1.3.2.3c), ante cualquier tipo de sollicitación pura, excepto para torsión pura que se comentará posteriormente.

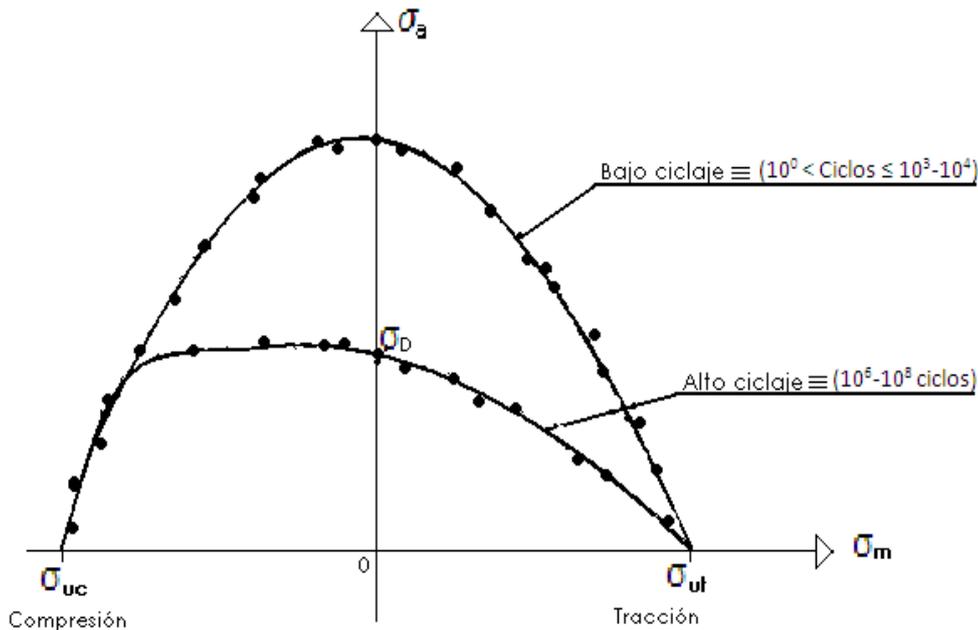


Fig.2.2.2/1. Comportamiento de los metales dúctiles en fatiga en la relación $\sigma_{D,o} (\sigma_m = 0) - \sigma_m$, para flexión pura (rotativa y no rotativa) y axial pura.

En la Figura 2.2.2/1, se representa la influencia de la tensión media, $\sigma_m \neq 0$, a partir de conocer el límite de fatiga σ_D resultado de ensayos reales de ambas situaciones, con $\sigma_m = 0$ (de límite $\sigma_{D,o}$) y $\sigma_m \neq 0$, (1.3.2.3c), para la fatiga de alto ciclaje de metales dúctiles (en el caso de fatiga de bajo ciclaje se ha representado una curva tipo de rotura, en el mismo caso, como información comparativa), para flexión pura (rotativa y no rotativa) y axial puro. En ella se observa que la rotura por fatiga se produce según una nube de puntos (σ_m, σ_D) bien localizada atendiendo a la evolución de la tensión media, σ_m , en su intervalo $[\sigma_{uc}, \sigma_{ut}]$ posible de tracción o de compresión, siendo su resultado inherente a la fenomenología anteriormente

comentada, que se puede expresar, como aquí se propone para un metal dúctil en fatiga alto ciclaje, en el dominio

$$\sigma_D \begin{cases} \text{Decrece} & \text{si } \sigma_m \in [0, \sigma_{ut}] \text{ tracción} \\ \text{Crece, o constante} & \text{si } \sigma_m \in \sigma_{uc} \cdot [\alpha, 0[\text{ compresión} \\ (0 \leq \alpha < 1) \end{cases} \quad (2.2.2.7a)$$

donde α será un parámetro del material (metal). Es de considerar que no existe influencia destacable debido a tensiones medias en el caso de torsión pura¹⁴ $\tau_m \neq 0$, formulación equivalente a (1.3.2.3c) como ya se indicó, en metales dúctiles, siempre que no se sobrepase su límite de fluencia, es decir en un gráfico equivalente al de la Fig.2.2.2/1 para $\tau_D - \tau_m$, los resultados experimentales según [SMITH, 1942],[FORREST, 1982], arrojan una nube localizada de puntos de rotura, paralela al eje de abscisas τ_m , en el intervalo $[0, \tau_{fl}]$ completo, por lo que puede concluirse que, para un metal dúctil, en fatiga alto ciclaje

$$\tau_D, \text{ constante } \forall \tau_m \in [0, \tau_{fl}] \quad (2.2.2.7b)$$

donde τ_{fl} , es la tensión tangencial de fluencia, ($\tau_{fl} = 0,577 \cdot \sigma_{fl}$, por [VON MISES, 1913], al ser τ_m componente estática). Si bien, para $\tau_{fl} < \tau_m \leq \tau_u$, el gráfico presenta una distribución de rotura más cercana a la de $\sigma_D - \sigma_m$, [FEODÓSIEV, 1980]. Con carácter complementario es interesante considerar que un material frágil (fundición,...) presenta una nube de puntos, $\sigma_D - \sigma_m$, del tipo de la Fig.2.2.2/1, similar en la zona de compresión, aunque más acusada, y de curvatura contraria en la zona de tracción de inflexión cercana en $\sigma_m = 0^+$

Para gráficos y tablas de un buen número de metales se puede consultar la referencia [FORREST, 1982].

La cuantificación analítica sistemática de la influencia de la tensión media en la fatiga de alto ciclaje se abordará en el análisis bibliográfico de la modelización de la fatiga en el siguiente epígrafe.

La influencia de la variación, o efecto de las fluctuaciones, de la amplitud de tensión σ_a (1.3.2.3b), es considerada experimentalmente mediante bloques, o niveles, de amplitud de tensión constantes, dada la mayor dificultad que entraña, prácticamente inabordable, de establecer un dominio de fluctuaciones consonante con la arbitrariedad de la realidad operante. Dichos bloques se seleccionan por escalones, primero de dos en dos, después de tres en tres, etc. Se trata de un proceso arduo, que arroja resultados difíciles de clasificar experimentalmente (solo en cuanto a su clasificación). En pleno estudio, su análisis sobre la influencia en el proceso de fatiga clásico se basa a nivel básico en el concepto de daño acumulativo en base a la proporción del número de ciclos transcurridos del proceso n_i , frente al número de ciclos totales N_i para producirse la rotura por fatiga a alto ciclaje de cada bloque- i , atendiendo a la curva de [WÖHLER, 1871], (Fig.1.3.2/1), del material, tal como se trató en los

¹⁴ Suele ser también usual realizar su análisis mediante el estado biaxial cíclico que lo representa, tal como se trata en el análisis de estados multiaxiales.

conceptos básicos (1.3.2.11) a (1.3.2.14). El ensayo más simple se realiza con dos escalones, es decir con dos amplitudes de tensión, σ_{a_1} , σ_{a_2} , según (1.3.2.3b), distintas, una a continuación de la otra, con duración de n_1 , n_2 ciclos correspondientemente, tratando de determinar si su efecto conjunto contempla alguna relación. Sin embargo la gráfica esperada de Wöhler no es la misma si se invierten la actuación de los bloques, por lo que la ley lineal indicada, (1.3.2.11) a (1.3.2.14) no es representativa de la influencia de la variación o fluctuación de la amplitud de tensión, tal como se estudiará en el análisis de los métodos en el siguiente apartado. En síntesis, esta característica del fenómeno de la fatiga todavía no está definida satisfactoriamente, si bien se cuentan con resultados experimentales que claramente indican que cuando a un bloque de determinado nivel de amplitud de tensiones, le sigue otro bloque de mayor nivel de amplitud, o varios de nivel siempre creciente, entonces la ley lineal (1.3.2.14) no cumple por exceso, y en caso contrario, secuencia de bloques de nivel de amplitud de tensión decreciente, no cumple por defecto, lo que muestra implícitamente como afecta el orden de aplicación de los bloques de tensión a la resistencia a la fatiga. Resultados de experimentos al respecto se pueden consultar en [BATTELLE, 1941], como refiere [FORREST, 1982]. En éste, y en [CAZAUD, 1957,1969] se pueden consultar también resultados de [KOMMERS, 1945] y [MOORE / JASPER, 1924] referentes al concepto *sobrefatiga* y *subfatiga*, derivado del análisis de la variación o fluctuación de la amplitud de tensión, cuando se aplica en menor escala alrededor del límite de fatiga. Así Cazaud indica que [MOORE / JASPER, 1924] demostraron que en la aplicación, un número considerable de veces, de niveles de tensión de amplitudes de tensión alterna ligeramente superior al límite de fatiga, éste decrece, efecto denominado *sobrefatiga*; y en caso contrario el límite de fatiga aumenta limitadamente, efecto denominado *subfatiga*, considerado éste como un efecto de adaptación del metal a la fatiga, que, como contrapartida, provoca la ruptura del material si se sobrepasa dicho límite adaptado¹⁵.

Influencia de estados de tensión multiaxiales. Hasta este punto, el análisis de la fatiga se ha realizado en el supuesto de sollicitación pura, lo que produce un estado unitensional, σ o τ , lo cual atiende al enfoque clásico, además de ser el más extendido dada su amplia gama de aplicaciones. El caso genérico de sollicitaciones cíclicas combinadas, que producen estados de tensión denominados multiaxiales cíclicos (que contemplan los denominados biaxiales y los triaxiales), ha de considerar además que tales tensiones pueden ser sincrónicas, estando o no en fase, o asincrónicas. Dada su complejidad, apenas existen datos experimentales (las máquinas de ensayo son complejas y de coste muy elevado). El tipo denominado de tensiones multiaxiales simples, es decir de cargas periódicas, sincrónicas y en fase, que presentan las características de que sus direcciones principales no cambian con el tiempo, es el más estudiado y, entre ellos, el más conocido es el biaxial simple, en especial del que se deriva la torsión pura, caracterizado por la amplitud de las tensiones principales

$$\sigma_{1a} = -\sigma_{3a} \quad , \quad \sigma_{2a} = 0 \quad , \quad \sigma_{1a} \geq \sigma_{2a} \geq \sigma_{3a} \quad (2.2.2.8)$$

El resto de casos, que no entran en el tipo multiaxial simple se denominan multiaxiales complejos, los cuales por ahora no tienen tratamiento explícito y los casos más básicos se tratan de asimilar empíricamente y con correcciones a los multiaxiales simples.

¹⁵ Cabe comentar que en metales dúctiles puede llegar a elevarse el límite de fatiga hasta un 30%, en axial alterna, (en un efecto equivalente a la acritud por deformación), si bien en flexión rotativa es poco apreciable (y en fibras externas).

El enfoque de los estado multiaxiales simples, presentan el mismo problema inicial que para el caso estático, tampoco se dispone de un ensayo de resistencia que caracterice el material en un punto con respecto al conjunto de tensiones que intervienen (por ejemplo mediante sus tensiones principales), lo cual ya de por sí en fatiga presenta el problema, como se ha tratado, de no poder separar las propiedades de la pieza de la del material. No queda, pues, otra solución que, en este planteamiento, acudir al concepto de tensión equivalente, es decir asimilar el estado multiaxial a uno uniaxial equivalente, según (1.3.2.6); en este caso surgen los criterios de fatiga, cuya modelización se analiza en el siguiente apartado, de los que a nivel básico caben resaltar los resultados experimentales en cuanto al estado biaxial simple general, que incluye el particular asociado a la torsión (2.2.2.8), al cual se ha referido el comportamiento experimental en base a la energía de distorsión (1.3.2.10) resultado de equipararla a la equivalente de un ensayo uniaxial, atendiendo a la amplitud de tensiones correspondientes, tal como se indica en la Figura 2.2.2/2 adaptada de resultados existentes en diversas publicaciones [NORTON, 1999], [FORREST, 1982], [SAE, 1997], [SHIGLEY / MISCHKE, 2002], [DOWLING, 2007].

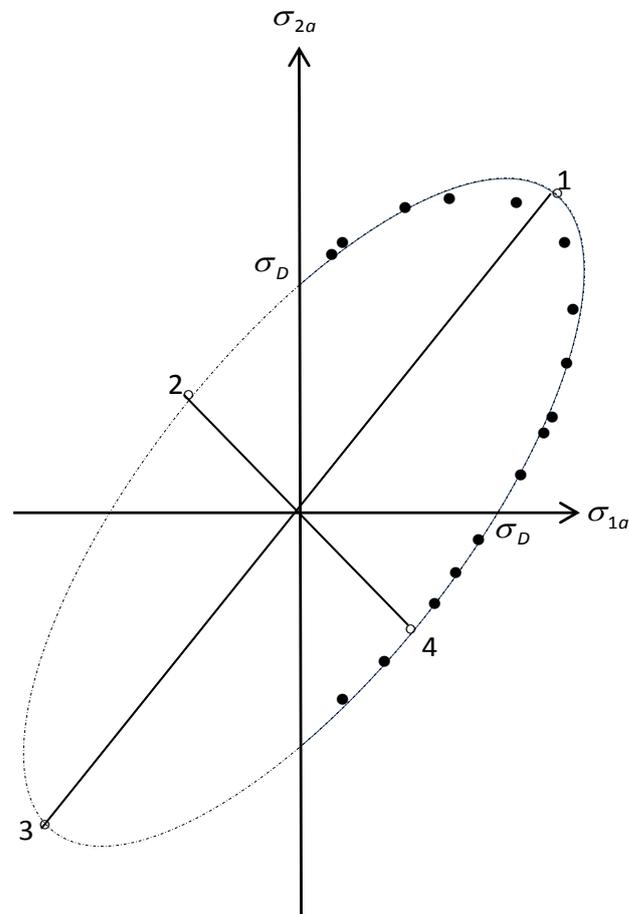


Fig. 2.2.2/2. Rotura a fatiga de alto ciclaje, en estado biaxial general, que contiene el asociado a torsión pura en particular.

2.2.3 UNA PRIMERA ESQUEMATIZACIÓN DE LA FENOMENOLOGÍA DE HCF

Las características propias del fenómeno de fatiga, y en particular de la HCF, tal como se desprende de la sección precedente, obligan no solo a establecer unas conclusiones inherentes a sus resultados experimentales, que permitan el desarrollo de posteriores modelizaciones teóricas, sino que requieren también establecer una concreción primaria básica que permita delimitar los diversos ámbitos o campos conceptuales bajo los que tales resultados empíricos son presentados.

Este objetivo, que va más allá de una simple enumeración de conclusiones y que es necesario para discernir posteriormente tanto el carácter de las modelizaciones preexistentes consideradas como aquellos elementos que las determinan (variables, condiciones, limitaciones,...), prácticamente solo es posible desde un planteamiento que conjugue unitariamente la complejidad de los resultados experimentales con sus formalizaciones teóricas. Ello exige en primera instancia la realización de una clasificación que presente, como mínimo, la interrelación interdisciplinar de la fenomenología descrita, de su cronología (establecida en el epígrafe 1.3.2) y de su descripción (expuesta en los apartados 2.2.1 y 2.2.2).

Por ello, se presenta en la Figura 2.2.3/1 una esquematización de los resultados experimentales descritos en el apartado anterior, que permita situar las diversas propuestas de formalización o modelización de la fatiga por alto ciclaje que se presenta en el apartado 2.3.

En este contexto se aborda a continuación, pretendiendo aportar, una clasificación de conclusiones en base fenomenológica que explique intrínsecamente las circunstancias de la evolución primaria esencial de la temática, lo que conduce y condiciona prácticamente hasta las últimas cuatro décadas. Clasificación, de la que posteriormente se puedan inferir decisiones formales (variables, hipótesis, planteamientos...) a la vez de que la propia clasificación sea susceptible de desarrollos o ampliaciones posteriores, en principio no objeto de este trabajo, salvo referencia al respecto. En síntesis, Figura 2.2.3/1:

- En primer lugar se aísla, acotándola explícitamente, la **conclusión fundamental** inherentemente implícita en el grado de validez de la concepción clásica del modelo local de tensión, ante el comportamiento del material en estados de tensión cíclica. Este aspecto es producto de las **conclusiones en base fenomenológica**, lo que conlleva una identificación tanto descriptiva como experimental del fenómeno, con su implicación conceptual en correlación cronológica que explique la evolución de las **concepciones formales paralelas** de carácter más analítico.
- A continuación se disciernen los **niveles de actuación** que, producto de la revisión indicada en la clasificación, básicamente en mecánica del medio continuo, (indicada en el diagrama como **MMC-macro**), presenta una secuencia inicial en el intento de cercar el binomio esencial **mecanismo-causa** del fenómeno. Así, en una doble vertiente, trata de entroncar la **modelización teórica** en el enclave experimental a la vez que, de una manera genérica, intenta establecer comparativas con un nivel de **estimación atómica**, (en el diagrama, **ATOM-micro**), en cuanto a las propiedades constitutivas base del material, resistencia y rigidez. El resultado de estas actuaciones establece un último nivel de actuación, siempre en el marco denominado como **MMC-macro**, y en continua evolución en cuanto a la **descripción de la sección de fractura**, en nuestro caso de HCF, y del tratamiento formal derivado al respecto: análisis de la **fractura y de la concepción de daño**.

- Definitivamente, como se infiere del propio esquema, la secuencia explicitada en el mismo, **Mecanismo-causa → Modelización Teórica → Concepciones paralelas Formales (fractura, daño)** conduce a comprender la utilización de los **parámetros** que tratan de modelizar la resistencia a la fatiga de alto ciclaje, justificándose la aproximación a su objetividad-subjetividad como resultado del complejo entramado evolutivo identificativo analizado.

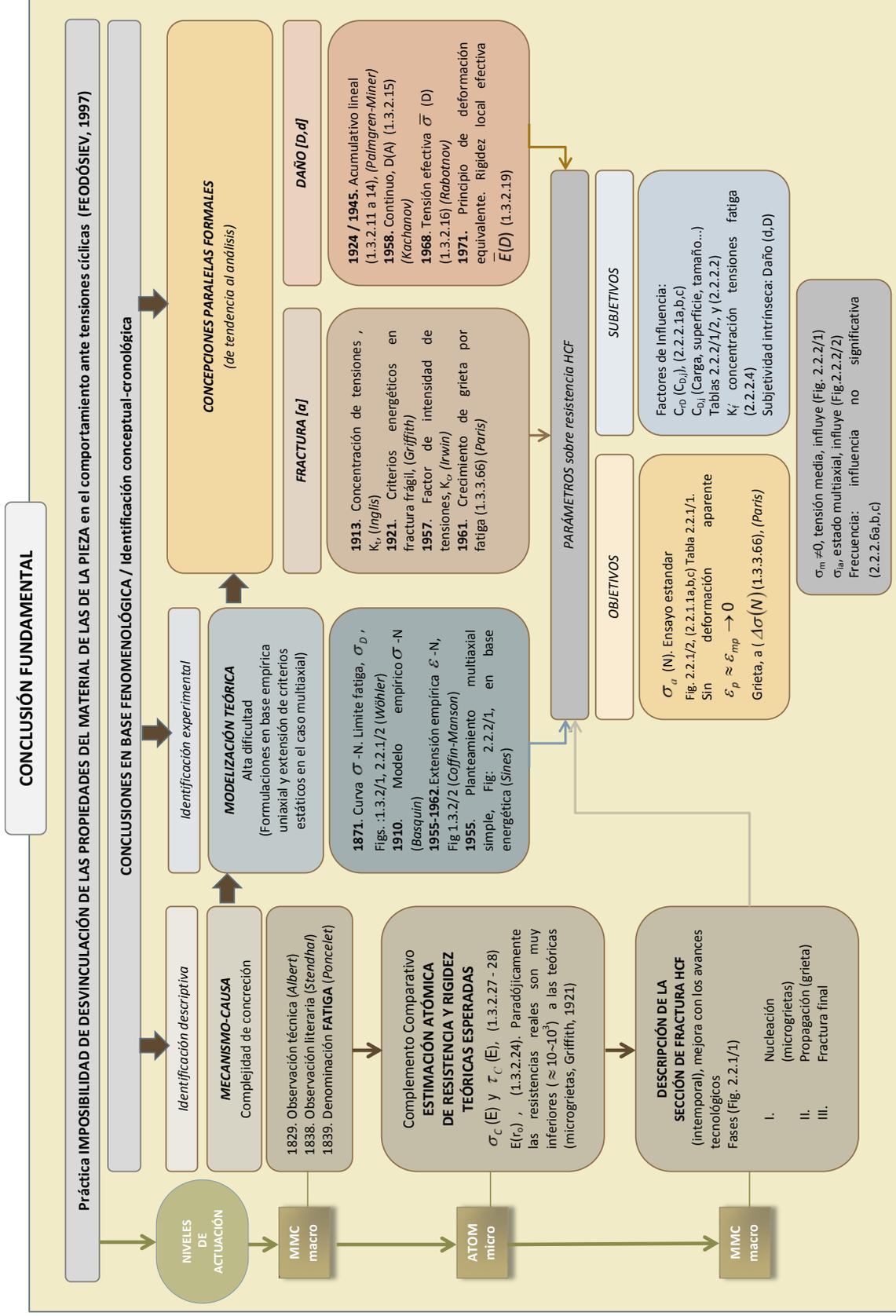


Fig. 2.2.3/1. Esquema: Conclusiones relativas a la experimentación HCF

2.3 Modelización de la fatiga de alto ciclaje

La elección de uno u otro enfoque en el complejo campo de la fatiga requiere de una mínima revisión de aquellas teorías más referidas de entre las diversas que tratan de explicar el mecanismo de la fatiga, en general a partir de la fenomenología descrita anteriormente, en el apartado 2.2, aunque sin resultados suficientemente concluyentes.

Así, en metales, atendiendo a las referencias de [CAZAUD, 1957,1969], se propone una clasificación de tales enfoques, todos ellos de carácter esencialmente macroscópico, fundamentada en el contexto teórico en que se sitúan: Mecánicas, Físicas, Estadísticas, y de Daño, siendo las Mecánicas y las de Daño las que se considerarán, de acuerdo a los objetivos planteados, en este trabajo.

Las Teorías Mecánicas atienden a la discusión de tres principios fundamentales de la resistencia de materiales frente a fractura y fatiga: homogeneidad de la materia, regularidad de la distribución de los esfuerzos y el comportamiento de la ley de Hooke. Sin entrar en detalle cabe citar, al respecto, las siguientes:

La teoría de los esfuerzos secundarios de [GRIFFITH, 1921], que analiza la homogeneidad de la materia y la distribución de los esfuerzos, (influencia de la multitud de ínfimos defectos en el material, no considerados macroscópicamente y que dan lugar a una importante merma de la tensión teórica de cohesión, tal como se estimó en las ecuaciones (1.3.2.25)-(1.3.2.28).

La teoría de la histéresis de las deformaciones pseudoelásticas, resultado de la discusión de la ley de Hooke que, en el caso de fatiga, se ha tratado de relacionar con el límite de fatiga, sin resultados concluyentes, aunque resulta de interés indicar que el bucle de histéresis es significativamente menor en el tramo de la fatiga de alto ciclaje, es decir decrece hacia el límite de fatiga, como se desprende de [LANDGRAF, 1970], según [DOWLING, 2007], (Fig. 2.3/1)

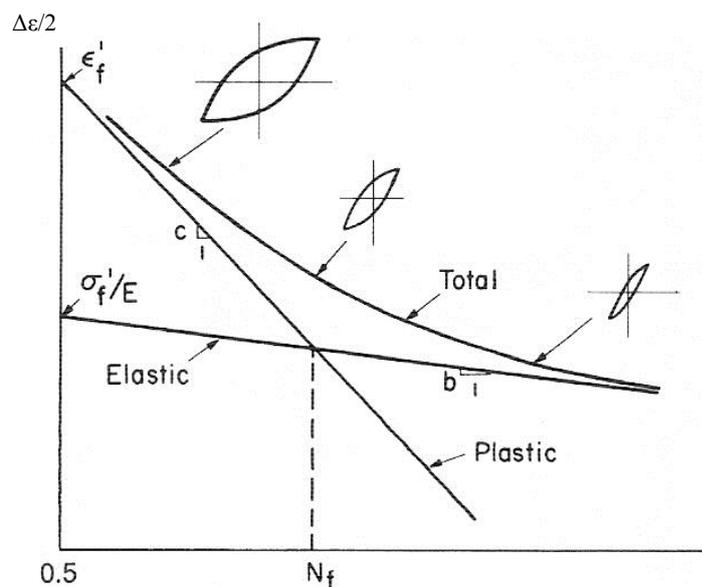


Fig 2.3/1 Comportamiento de la histéresis de las deformaciones pseudoelásticas en fatiga [DOWLING, 2007, en base a LANDGRAF, 1970]

La teoría del deslizamiento molecular, que propugna que el proceso de fatiga es debido al deslizamiento progresivo, en el interior de los cristales del metal, siguiendo planos cristalinos preferentes (donde el metal presenta menor homogeneidad o cerca de inclusiones de impurezas), según [EWING / HUMFREY, 1903] y [MESNAGER, 1922] como se refiere en [CAZAUD, 1957,1969]

La teoría de la acritud, o de endurecimiento por deslizamiento e histéresis, propuesta por [GOUGH / HANSON, 1923] en base a [BAUSCHINGER, 1886] y [BAIRSTOW, 1910], como se refiere en [CAZAUD, 1957,1969] que explica en ciertas condiciones el aumento del límite de fatiga del metal, aunque no su obtención genérica.

La teoría del amortiguamiento interno, semejante a la anterior, conjuntamente con la de la histéresis de las deformaciones pseudoelásticas, pretendía adoptar la disipación de energía en un ciclo como índice de resistencia a la fatiga, tal como indica [FEODÓSIEV, 1997], [CLAZAUD, 1957,1969], [FLÖP, 1936]; dicha hipótesis no prosperó pues el desarrollo de una grieta por fatiga está condicionado por el valor máximo de las deformaciones locales y no por su valor medio, que es el adoptado en la cuantificación de la disipación de energía por ciclo.

Para finalizar esta reseña a las teorías mecánicas, entre otras de las diversas existentes (habría quizás que destacar la de [APHANASIEW, 1940,1941,1946,1948], según [CAZAUD, 1957,1969], que establece que los granos individuales de los metales policristalinos pueden presentar límites diferentes al deslizamiento, dada la anisotropía de los cristales en función de la dirección de la fuerza aplicada, y la anisotropía del propio módulo de Young en monocristales, según lo expuesto en el análisis de la ecuación (1.3.2.24)), cabe una mención más, la referente a la Teoría de la propagación de la fisura por fatiga en alto ciclaje, pero en un sentido más actual, [PARIS et al,1961]. Dada su relevancia, ya ha sido tratada en las referencias básicas incluidas en el apartado 1.3.3.3, puesto que además de establecer un modelo de estimación de la vida a fatiga de alto ciclaje, involucra al rango de las tensiones cíclicas.

Tanto las teorías físicas como las estadísticas no serán consideradas en este trabajo, salvo alguna reseña específica directa.

Las teorías físicas, en base a numerosos trabajos de la disciplina de la metalografía, se centran básicamente en el inicio y propagación primaria de las fisuras por fatiga (etapa-1, véase la Fig 2.2.1/1 en 2.2.1), producto de las intrusiones-extrusiones por proceso cíclico que se postulan en *“un gran número de mecanismos fundados sobre la teoría de las dislocaciones”* según [COTTRELL / HULL, 1957], [MOTT, 1958], [KENNEDY, 1961], entre otros, referidos en [CAZAUD, 1969].

Por otro lado, las teorías estadísticas, propiamente dichas, opuestamente a las teorías mecánicas expuestas (fundamentadas en la resistencia de un medio continuo homogéneo), parten de la heterogeneidad de los materiales como causa esencial de la dispersión que se produce en el fallo por fatiga de piezas idénticas, con la finalidad de reproducir el diagrama de Wöhler (Fig.1.3.2/1) mediante razonamientos estrictamente estadísticos, tal como refiere [CAZAUD, 1969], que no incluyen la formulación de hipótesis sobre el comportamiento o estructura del material.

En síntesis, ambos enfoques físico y estadístico, tal como se ha indicado, se apartan sustancialmente del objetivo de este trabajo, el primero por la limitación en el alcance de sus propuestas y el segundo por su tratamiento exclusivamente estocástico.

Las Teorías de Daño suponen, en su medida, otro de los puntos de interés para este trabajo. Los modelos esenciales acordes o de interés para su objetivo se enuncian y desarrollan más adelante, en este apartado, teniendo como punto de partida las referencias básicas desarrolladas, al respecto, en el subapartado 1.3.2, atendiendo a los conceptos expuestos de daño, según [PALMGREN, 1924]-[MINER, 1945], indicados en las ecuaciones (1.3.2.11)-(1.3.2.14), y el tratamiento fenomenológico de [KACHANOV, 1958], señalado en la ecuación (1.3.2.15) y su posterior aplicación básica, la introducción del concepto de tensión efectiva $\bar{\sigma}$, [RABOTNOV, 1968], definida en la expresión (1.3.2.16), y módulo de elasticidad longitudinal efectivo [LEMAITRE, 1971], indicado en las ecuaciones (1.3.2.17)-(1.3.2.19).

La insuficiencia metodológica que se desprende de las teorías expuestas en cuanto a la dificultad de acotar el mecanismo de fatiga determina que la metodología de referencia adoptada en este trabajo quede restringida prácticamente al aspecto fenomenológico (en el que resulta de especial interés los modelos clásicos de fatiga, en este caso de alto ciclaje en metales dúctiles, de base unidimensional altamente empírica, y su posible extensión multiaxial), por una parte, y, por otra, a los modelos basados en teoría del daño (básicamente isótropo de variable escalar, en medio continuo homogéneo, y con posibilidad de acoplamiento con los modelos de fatiga). La revisión relevante de ambas modelizaciones, esencialmente referida al ámbito de tensión-vida, se trata a continuación.

2.3.1 MODELIZACIÓN CLÁSICA DE LA FATIGA DE ALTO CICLAJE, UNIAXIAL CON EXTENSIÓN MULTIAXIAL

La base experimental de la fatiga expresada en las Figuras 1.3.2/1 y 2.2.1/2, curvas de Wöhler, (epígrafes 1.3.2 y 2.2.1), en este caso de metales con límite de fatiga, sugiere que se puede obtener una función de aproximación de la tensión en función del número de ciclos de vida (tensión-vida)¹⁶, que en el caso uniaxial responde a dicha curva $\sigma - N$, en general representando la amplitud de tensiones, σ_a , según la ecuación (1.3.2.3b), en función del número de ciclos, N , de fallo, (algunos autores la definen en función de σ_{max} del ciclo), denominación que se sigue en este trabajo.

$$\sigma = f(N) \quad (2.3.1. 1a)$$

donde σ será la amplitud de tensiones σ_a , y N el número de ciclos al fallo por fatiga de alto ciclaje. Particularmente interesa, (por facilidad, economía y estudios comparativos, tal como se refirió en subapartado 2.2.1, al respecto), que inicialmente σ_a esté referida a resultados experimentales con tensión media nula, $\sigma_m = 0$, es decir $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$, o, de acuerdo con (1.3.2.3c) y (1.3.2.3d), con $R_f = -1$, denominándola en ese caso como $\sigma_{a,o}$, y que aquí, para facilitar su identificación, se expresará como

$$\sigma_{a,o} = f_o(N) \quad , \quad \text{si} \quad \sigma_m = 0 \quad (2.3.1.1b)$$

tratándose posteriormente la influencia de la tensión media. Es decir, genéricamente, se considerará la expresión formal

¹⁶ También se puede formular en clave de deformación-vida, ϵ -N, pero esta es más propia del análisis de la fatiga de bajo ciclaje, como se referirá brevemente más adelante.

$$\sigma_a = f(N) \quad (2.3.1.1c)$$

en la que ya se suponen aplicados los factores de influencia $C_{D,j}$, (o, si corresponde⁸ $C_{i,j}$), definidos en (2.2.2.1c), incluyendo en su caso la concentración de tensiones a fatiga, K_f , (2.2.2.4)¹⁷

Una vez establecido el marco de definición, (indistintamente de la posible obtención de la función (2.3.1.1a), mediante modelos de regresión), la modelización clásica empírica según diversos autores de referencia genérica [NORTON, 1999], [SHIGLEY / MISCHKE, 2002], [LALANNE, 2002], [SAE, 1997], [DOWLING, 2007], [AVILÉS, 2005], etc. ha sido propuesta mediante múltiples expresiones analíticas, siendo una muestra relevante las siguientes, para el tramo de fatiga de alto ciclaje en metales con límite de fatiga real o convencional:

Expresión de Wöhler [WÖHLER,1871], $\sigma \equiv \sigma_a \equiv \sigma_{a,o}$,

$$\sigma = C_w - d_w \cdot \log N \quad (2.3.1.2a)$$

o, con $C_w = \frac{\log b_w}{\log e^{a_w}}$ y $d_w = \frac{1}{\log e^{a_w}}$,

$$N \cdot e^{a_w \sigma} = b_w \quad (2.3.1.2b)$$

donde (2.3.1.2a) representa el tramo de fatiga de alto ciclaje, recta de pendiente d_w , en escala semilogarítmica, $\sigma - \log N$, y (2.3.1.2b) el mismo tramo en función exponencial. Dicho tramo se inicia en el punto de inflexión con el tramo de bajo ciclaje, hasta el límite de fatiga, y siendo a_w y b_w constantes que dependen de la geometría-material-carga de la pieza.

Expresión de Basquin [BASQUIN,1910], $\sigma \equiv \sigma_a \equiv \sigma_{a,o}$

$$\sigma = A_b \cdot N^{B_b} \quad (2.3.1.3.a)$$

o, con $A_b = 2^b \cdot \sigma_f'$ y $B_b = b$,

$$\sigma = \sigma_f' (2N)^b \quad (2.3.1.3b)$$

La expresión (2.3.1.3b) puede expresarse en escala $\log \sigma - \log N$ (ver Figs. 1.3.2/1 y 2.2.1/2) en el tramo de alto ciclaje, mediante la recta,

$$\log \sigma = \log \sigma_f' + b \log 2N \quad (2.3.1.3c)$$

siendo las expresiones (2.3.1.3b) y (2.3.1.3c) las más usuales en el análisis de la fatiga de alto ciclaje, donde según definición de [SHIGLEY / MISCHKE, 2002], σ_f' es el coeficiente de resistencia a la fatiga, y b , exponente de resistencia a la fatiga, son constantes dependientes de

¹⁷ Si se parte de (2.3.1.1b) y, posteriormente se trata la influencia de la tensión media, σ_m , para la obtención de σ_a en (2.3.1.1c), ya se consideran aplicados estos factores en el proceso de obtención de $\sigma_{a,o}$

las características de geometría-material-carga, que representan, respectivamente, el esfuerzo real correspondiente a la ruptura en una inversión del esfuerzo ($N=1/2$), y a la pendiente de la recta de la ecuación (2.3.1.3c). Para estos valores, en metales, (diversas clases de aceros, aluminios, titanio, magnesio, etc.), existe una importante base de datos; un buen número de ellos tabulados se pueden consultar, con sus referencias, en [SHIGLEY / MISCHKE, 2002], [SAE, 1997], [LALANNE, 2002], [DOWLING, 2007], entre otros, teniendo en cuenta la composición y el tratamiento del material.

Tal pendiente, b , de la ecuación (2.3.1.3c) también es la de la recta de la deformación elástica, representada en la Fig.1.3.2/2, de la curva ε - N , deformación-vida, anteriormente indicada. Esta curva es más propia del análisis de la fatiga de bajo ciclaje, zona oligocíclica, pero es conveniente realizar una breve referencia a la misma, dado que se basa en una extrapolación-ampliación de la metodología clásica aquí expuesta.

Efectivamente, dicha curva ε - N responde a la propuesta de [COFFIN, 1962]-[MANSON, 1962], en analogía con la Ley de Basquin, [BASQUIN, 1910] referida, dado que la amplitud de las deformaciones en función del rango (en virtud de la expresión equivalente a (1.3.2.3a) – (1.3.2.3b), atienden, según [SHIGLEY /MISCHKE, 2002], [SAE, 1997], [BANANTINE et al,1990], [DOWLING, 2007], entre otros, a

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} \quad (2.3.1.4a)$$

donde $\Delta\varepsilon/2$, es la amplitud de las tensiones total, en el proceso cíclico, y $\Delta\varepsilon_e/2$ y $\Delta\varepsilon_p/2$ las amplitudes de deformación elástica y deformación plástica correspondientes, tal que, por el carácter de deformación elástica que rige la fatiga de alto ciclaje (de acuerdo con el análisis fenomenológico tratado en el punto 2.2 de este trabajo) y en base a la ley de Basquin, reflejada en la ecuación (2.3.1.3b), y la ley de Hooke, resulta

$$\frac{\Delta\varepsilon_e}{2} = \frac{\sigma_f}{E} (2N)^b \quad (2.3.1.4b)$$

y, por analogía, para la amplitud de deformación plástica, $\Delta\varepsilon_p$, se tiene

$$\frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_f (2N)^c \quad (2.3.1.4c)$$

donde, ε'_f y c , son, respectivamente, según la analogía expuesta, la deformación real que corresponde a la rotura en una inversión ($N=1/2$), y el exponente de ductilidad a la fatiga (pendiente de la recta de deformación plástica, Fig. 1.3.2/2), tal que atendiendo a (2.3.1.4a), con (2.3.1.4b) y (2.3.1.4c), se obtiene

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c \quad (2.3.1.5)$$

La ecuación (2.3.1.5) es la ley de Coffin-Manson.

Este modelo, de deformación-vida, ε - N , es de utilidad restringida, y a fatiga de bajo ciclaje, pues requiere el conocimiento de las deformaciones, lo que resulta muy complejo cuando se presentan muescas o entallas, de las que no existen datos, tablas o diagramas, prefiriéndose en ese caso otra metodología (elementos finitos). Por otro lado, (2.3.1.5) está limitada a que la tensión media sea nula, $\sigma_m = 0$, aspecto que se tratará posteriormente, y los datos tabulados existentes de ε_f' y c están presentados bajo este condicionante en las referencias ya indicadas en lo ya expuesto sobre la expresión de [BASQUIN, 1910] en este mismo apartado.

Básicamente, en este trabajo, es de interés la estimación del punto de transición entre la fatiga de bajo ciclaje y la de alto ciclaje, que se reduce a la determinación del punto de intersección de las rectas de deformación elástica y deformación plástica (Fig.1.3.2/2 y Fig. 2.3/1), lo que significa que las amplitudes de tensión elástica y plástica deben coincidir, es decir

$$\frac{\Delta\varepsilon_e}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} \quad (2.3.1.6a)$$

Y, por (2.3.1.4b) y (2.3.1.4c), resultará $N_t = N$,

$$N_t = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_f'}{\sigma_f'} E \right)^{1/b-c} \quad (2.3.1.6b)$$

donde N_t , representa el número de ciclos en los que se estima que se producirá la transición de la fatiga de bajo ciclaje a la de alto ciclaje, para tensión media nula, (que en metales de cierta ductilidad se estima en 10^3 – 10^4 ciclos, tal como se indicó en el epígrafe 2.2)

Existen otras expresiones de la fatiga uniaxial de alto ciclaje, de tensión vida σ - N , del mismo orden y sentido que la de [WÖHLER, 1871] y [BASQUIN, 1910], referidas en publicaciones científicas, de comportamiento equivalente y posiblemente más ajustado en ciertos casos específicos; entre las más comunes cabe citar someramente, según [LALANNE, 2002] o [MIRICA et al, 2003], en expresiones adoptadas de [WEIBULL,1961], que indistintamente de su posible expresión logarítmica, las siguientes:

Expresión de Stromeyer [STROMEYER,1914], $\sigma \equiv \sigma_a \equiv \sigma_{a,o}$

$$\sigma = \sigma_D + C_{st} \cdot N^{bst} \quad (2.3.1.7)$$

donde σ_D , es el límite de fatiga real o convencional, y C_{st} y b_{st} constantes de geometría-material-carga de la pieza.

Expresión de Palmgren [PALMGREN,1924], $\sigma \equiv \sigma_a \equiv \sigma_{a,o}$

$$\sigma = \sigma_D + \left(\frac{C_p}{N + A_p} \right)^{bp} \quad (2.3.1.8)$$

con la característica propia de introducir empíricamente tres constantes C_p , A_p y b_p , en vez de dos como en los modelos anteriores, logrando un mejor ajuste que (2.3.1.7), donde A_p es una constante de ciclo y C_p , b_p , constantes de geometría-material-carga de la pieza.

Expresión de Weibull [WEIBULL,1949], $\sigma \equiv \sigma_a \equiv \sigma_{a,o}$

$$\sigma = \sigma_D + C_{wb} (N + B_{wb})^{b_{wb}} \quad (2.3.1.9)$$

en la que se puede observar, como característica propia que involucra también, como (2.3.1.8), tres constantes de geometría-material-carga de la pieza, b_{wb} , C_{wb} , y B_{wb} , (B_{wb} , constante de ciclo distinta de 1/4), en vez de dos. Ello es debido al análisis estadístico que [WEIBULL,1939], realizó para corregir cierta tendencia de dispersión de la distribución Normal de Gauss, a mayor número de ciclos, (tal como se indicó en 2.2), introduciendo dicha tercera constante, B_{wb} , en el contexto observado. En esta ecuación, σ_D es también el límite de fatiga real o convencional.

Expresión de Bastenaire [BASTENAIRE/WEISZ,1957] $\sigma \equiv \sigma_a \equiv \sigma_{a,o}$

$$N = \frac{A_{bt}}{(\sigma - \sigma_D) e^{C_{bt}(\sigma - \sigma_D)^{-b_{bt}}}} \quad (2.3.1.10)$$

donde, de igual forma que en las expresiones anteriores, σ_D es el límite de fatiga real o convencional, y A_{bt} , C_{bt} , y b_{bt} son constantes de geometría-material-carga de la pieza.

Hasta este punto se han presentado las expresiones o leyes de ajuste al modelo de tensión uniaxial, expresiones características independientemente de que el ajuste se haya realizado, con tensión media nula o no. Sin embargo si la expresión representativa de la ley de ajuste, como el resto de las expuestas (ecuaciones (2.3.1.2a) a (2.3.1.10)), están referidas a tensión media nula, $\sigma_m = 0$, es decir $\sigma \equiv \sigma_{a,o}$, tal como acontece en el proceso de ensayos a fatiga (aspecto éste indicado en 2.2), pero la pieza analizada se estima que deberá trabajar a una tensión media σ_m no nula, se deberá tener en cuenta la influencia de dicha tensión media, atendiendo a la fenomenología descrita en el punto 2.2.1 de este trabajo, según se observa en la Fig.2.2.2/1, para la fatiga de alto ciclaje en metales dúctiles. Por lo tanto, deberá obtenerse la amplitud de tensión σ_a , en función de $\sigma_{a,o}$ (que responderá a una expresión considerada entre las ecuaciones (2.3.1.2a) – (2.3.1.10) para $\sigma \equiv \sigma_{a,o}$) y de la tensión media σ_m , en el contexto expuesto al inicio de este subapartado, referente al significado de las ecuaciones (2.3.1.1b) – (2.3.1.1c).

Existen diversos modelos de carácter empírico que abordan el ajuste de la influencia de la tensión media σ_m , atendiendo a Fig 2.2.2/1, a su zona de tensiones de tracción (amplitud de tensión, $0 < \sigma_a \leq \sigma_{ut}$, $\sigma_{ut} = \sigma_u$ resistencia máxima, o última, a tracción), tanto analíticos como gráficos.

En este trabajo sólo se considerarán los modelos analíticos más usuales expuestos en las referencias básicas [NORTON, 1999], [SHIGLEY / MISCHKE, 2002], [DOWLING, 2007], [BANNANTINE et al, 1990], [AVILÉS, 2005], [LALANNE, 2002], [PINTADO, 1992]. Estos modelos

analíticos conducen a representaciones gráficas tales como el diagrama de Haigh [HAIGH,1915,1917], [SURESH, 2004], cuya representación más básica atiende a la Figura 2.3.1/1, que puede utilizarse para la determinación gráfica de los valores de amplitud de tensión, σ_a , de tensión media σ_m , para un número de ciclos particular fijado,

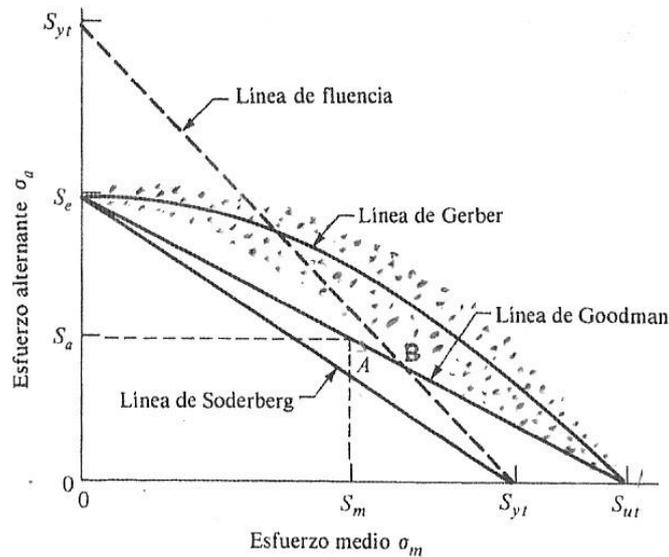


Fig.2.3.1/1. Diagrama de Haigh, representativo de los modelos de ajuste característicos, $S_a \equiv \sigma_a$, en función de $S_e \equiv \sigma_{a,o}$ (de $\sigma_{a,o}$) y σ_m , en fatiga de alto ciclaje de materiales dúctiles. (Adaptado de [SHIGLEY / MISCHKE, 2002])

Atendiendo a la determinación genérica de la expresión de amplitud de tensión, σ_a , en función de la tensión media σ_m y de la expresión $\sigma_{a,o}$ correspondiente a tensión media nula, y de la resistencia máxima a tracción σ_u del material, las expresiones analíticas referidas que se considerarán son:

Método de Gerber [GERBER,1874]

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{a,o}} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_u}\right)^2 = 1 \quad (2.3.1.11a)$$

o

$$\sigma_a = \sigma_{a,o} \left(1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_u}\right)^2 \right) \quad (2.3.1.11b)$$

que responde a una parábola.

Método de Goodman [GOODMAN,1899] (suele denominarse método modificado de Goodman)

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{a,o}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_u} = 1 \quad (2.3.1.12a)$$

o

$$\sigma_a = \sigma_{a,o} \left[1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right] \quad (2.3.1.12b)$$

Si se utiliza en (2.3.1.12b) la expresión de [BASQUIN, 1910] para $\sigma \equiv \sigma_{a,o}$, indicada en la ecuación (2.3.1.3c), muy usual,

$$\sigma_a = (\sigma'_f - \sigma_m) (2N)^b \quad (2.3.1.12c)$$

Las ecuaciones (2.3.1.12b) y (2.3.1.12c) responden a una recta, y dada su sencillez, y su ajustado margen de seguridad (aunque algo conservador, como se aprecia en el diagrama de Haigh de la Fig.2.3.1/1), es uno de los más utilizados, en especial con una variación, para evitar la zona de fluencia plástica, consistente en limitar la tensión media al valor de la tensión de fluencia del material, $\sigma_m \leq \sigma_{fl}$ (S_{yv} en la Fig. 2.3.1/1, hasta el punto B de intersección con la recta de Goodman).

Método de Soderberg [SODERBERG,1939]

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{a,o}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{fl}} = 1 \quad (2.3.1.13a)$$

o

$$\sigma_a = \sigma_{a,o} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_{fl}} \right) \quad (2.3.1.13b)$$

que responde también a una recta, aunque se considera demasiado conservador a tenor del exceso de margen de seguridad que se desprende del diagrama de Haigh, Fig.2.3.1/1.

El planteamiento expuesto anteriormente, el ajuste de la influencia de la tensión media σ_m , reflejado en las expresiones (2.3.1.11a)-(2.3.1.13b) ha dado lugar miméticamente, según el mismo modelo, a otros ajustes que pueden responder a casos específicos. Así, según [AVILÉS, 2005] y [LALANNE, 2002], cabe destacar:

La elipse de Von Mises-Hencky, (o ajuste de [MARIN, 1956])

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{a,o}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)^2 = 1 \quad (2.3.1.14)$$

La curva de Kececioglu [KECECIOGLU et al., 1975]

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{a,o}} \right)^{Ke} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)^2 = 1 \quad (2.3.1.15)$$

en la que K_e es un parámetro del material.

La curva de Bagci, [BAGCI, 1981]

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{a,o}} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{fl}} \right)^4 = 1 \quad (2.3.1.16)$$

en la que σ_{fl} es la tensión de fluencia.

Es de interés la referencia a la generalización y extensión de las anteriores propuestas indicada en [LALANNE, 2002] , según una expresión genérica de la forma

$$\left(\frac{\sigma_a}{l_1 \sigma_{a,o}} \right)^{m_1} + \left(\frac{\sigma_m}{l_2 \sigma_u} \right)^{m_2} = 1 \quad (2.3.1.17)$$

donde en función de parámetros de ajuste l_1 , m_1 , l_2 , m_2 , se caracterizan las distintas expresiones de la modelización expuesta, de entre las que también cabe citar la de [MARIN,1956], con $m_1 = l_1 = l_2 = 1$, y l_2 constante dependiente del material (1,5 en múltiples aceros). Así la expresión genérica (2.3.1.17) de base empírica recorre diversas particularidades materiales.

Para finalizar el planteamiento uniaxial, cabe hacer una breve referencia sobre la modelización de la influencia de la tensión media, σ_m , en el modelo de deformación-vida, uniaxial, ε - N , propuesto por [COFFIN, 1962]-[MANSON, 1962], centrado básicamente para fatiga de bajo ciclaje. En la ecuación (2.3.1.6b) el número de ciclos N_t , de transición-bajo-alto ciclaje, está condicionado por el hecho de que la ecuación de Coffin-Manson (2.3.1.5) está limitada a tensión media nula, $\sigma_m = 0$. La resolución para tensión media no nula puede consultarse entre otros, en [BANNANTINE et al, 1990] que recoge las propuestas de [MORROW, 1968],

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma_f' - \sigma_m}{E} (2N)^b + \varepsilon_f' (2N)^c \quad (2.3.1.18)$$

en referencia evidente a la ecuación (2.3.1.12c) de Goodman. Sin embargo en (2.3.1.18) no se refleja la influencia σ_m en el comportamiento plástico en bajo ciclaje, como se observa en su segundo sumando. Este aspecto está resuelto con mayor exactitud, en un contexto elasto-plástico, por [MANSON / HALFORD, 1981],

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma_f' - \sigma_m}{E} (2N)^b + \varepsilon_f' \left(\frac{\sigma_f' - \sigma_m}{\sigma_f'} \right) (2N)^{c/b} \quad (2.3.1.19)$$

Los elementos de las ecuaciones (2.3.1.18) y (2.3.1.19) guardan una clara correspondencia con la ecuación (2.3.1.5) de Coffin-Manson.

Otras propuestas, como la de [SMITH / WATSON / TOPPER, 1970], o el análisis elasto-plástico monotónico propuesto en [RAMBERG / OSGOOD, 1943], pueden consultarse también [SAE, 1997].

El análisis realizado de la fatiga de alto ciclaje en metales dúctiles, según la metodología argumentada en el inicio de este apartado 2.3, basada en la modelización clásica de tensión-vida en estado tensional uniaxial, puede en general de forma análoga extrapolarse al estado tensional tangencial puro; sin embargo, dado el carácter tensional biaxial propio de este estado, (tal como indican sus tensiones principales), es necesario considerar el análisis del estado tensional multiaxial (denominación que comprende al biaxial y al triaxial), como se expondrá a continuación. En cuanto al daño en el estado uniaxial clásico, será tratado posteriormente.

El análisis multiaxial de la fatiga de alto ciclaje, en metales dúctiles, es de especial interés en este trabajo. Su planteamiento usual macroscópico, tal como se indicó brevemente en el apartado 2.2, guarda correspondencia con el del fallo multiaxial ante cargas estáticas, pues está centrado también en el establecimiento de criterios de fallo (considérese aquí que, por otra parte, tampoco este problema está satisfactoriamente resuelto en el caso estático). La existencia de numerosos criterios de fatiga, incluso divergentes, tal y como indica [ELLYIN, 1997], exige una mínima selección inicial de los trabajos de metodología y modelización multiaxial en la fatiga de alto ciclaje, basada en la concreción de elementos que definan y acoten tan amplia temática.

En este contexto, el trabajo de [WEBER, 1999] presenta una interesante clasificación de los criterios de fatiga multiaxial, estableciendo treinta y siete criterios distribuidos en tres grandes grupos de modelización: empíricos, globales y de plano crítico, y en su caso, alguna subclasificación. Se considerará pues inicialmente este esquema, con sus correspondientes denominaciones e irán introduciéndose, en la exposición que sigue, diversas matizaciones derivadas de otras referencias documentales.

Si bien los criterios empíricos se apartan de la línea de este trabajo, es interesante considerarlos tan sólo como muestra de la estructura metodológica de los criterios generales de fallo, dentro de un marco restringido básicamente al estado biaxial simple. En este campo, los criterios empíricos presentan una buena predicción para el límite de fatiga, σ_d , en casos particulares de carga, de los que cabe destacar uno de los más clásicos, según [CAZAUD et al.1969,], [BATHIAS / BAÏLON, 1980], [ELLYIN, 1997], entre otras referencias: el criterio de [GOUGH / POLLARD, 1935], para tensiones medias nulas, $\sigma_m = 0$, $\tau_m = 0$

$$\left(\frac{\sigma_{a,o}}{\sigma_{D,o}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{a,o}}{\tau_{D,o}} \right)^2 = 1 \quad (2.3.1.20)$$

donde $\sigma_{a,o}, \tau_{a,o}$, son las tensiones normales y tangenciales de un estado combinado de flexión y torsión, siendo $\sigma_{D,o}, \tau_{D,o}$ los límites de fatiga relativos a la flexión pura y torsión pura correspondiente. La implementación a tensiones medias no nulas de este tipo de criterios empíricos, resulta de mayor complejidad, si bien [MARIN, 1956], según [BATHIAS / BAÏLON, 1980], propone la relación

$$\left(\frac{\overline{\sigma_a}}{\sigma_D}\right)^{P_1} + \left(M \frac{\overline{\sigma_m}}{\sigma_u}\right)^{P_2} = 1 \quad (2.3.1.21a)$$

donde P_1 , P_2 y M son valores procedentes de ajustes experimentales. Esta expresión se formula por analogía a la propuesta por el mismo autor para la fatiga uniaxial (ya comentada a raíz de la ecuación (2.3.1.17), para $P_1=1$, $P_2=2$, $M=1$, y que coincidiría con Goodman, si $P_1=P_2=M=1$, y con Gerber, si $P_1=M=1$, $P_2=2$, correspondientes a las ecuaciones (2.3.1.12a) y (2.3.1.11a)). Sin embargo, Marin propone que, para $P_1=P_2=2$, $M=1$, y $\overline{\sigma_a}, \overline{\sigma_m}$ las tensiones equivalentes de Von Mises para flexión y torsión combinadas, el siguiente criterio de fatiga:

$$\frac{\sigma_{a,o}^2 + 3\tau_{a,o}^2}{\sigma_{D,o}^2} + \frac{\sigma_m^2 + 3\tau_m^2}{\sigma_u^2} = 1 \quad (2.3.1.21b)$$

siendo $\sigma_{a,o}, \tau_{a,o}$, las amplitudes de tensión correspondientes a la flexión y torsión puras para $\sigma_m = 0$ y $\tau_m = 0$, y σ_m, τ_m , las tensiones medias según (1.3.2.3c) acordes a cada tipo de tensión. En realidad, (2.3.1.21b) se obtiene por una composición semiempírica, dado que Von Mises parte de un concepto energético, tal y como se analizará posteriormente.

De lo anterior se infiere que la estructura de los criterios empíricos tiende, al menos, para tratar de evolucionar, a incorporar ciertas hipótesis (por ejemplo energéticas), lo que conduce a los otros dos grandes grupos indicados anteriormente [WEBER, 1999], denominados como globales y de plano crítico, que suponen un planteamiento multiaxial generalizado.

Si bien, en la clasificación de [WEBER, 1999] se diferencia entre criterios macroscópicos y energéticos (en este trabajo no se consideran los microscópicos), es necesario indicar que algunos criterios, como el de Sines, considerados como macroscópicos, como posteriormente se analizará, parten del concepto energético de Von Mises. Por ello, se considera en esta memoria que, en la citada clasificación, los criterios globales energéticos han de considerarse como estrictamente energéticos, mientras que los criterios globales macroscópicos pueden comprender algunos de base energética. Bajo esta concepción, esencial en este trabajo, antes de abordar las referencias relevantes de ambos criterios, se realizará una revisión de tales criterios.

En dicho contexto cabe recordar que, dado que los criterios globales macroscópicos se basan en los invariantes del tensor de amplitud de tensiones, o en los de su tensor desviador, introducidos en las ecuaciones (1.3.2.5) y (1.3.2.6), la función de fluencia plástica se utiliza implícitamente, en la práctica usual, para el estudio del fallo del material ante acciones estáticas que provocan estados de tensión multiaxial. En el caso de materiales dúctiles, hay que mencionar en este sentido los conocidos criterios de [TRESCA, 1864] y de [VON MISES, 1913], plasmados en las ecuaciones (1.3.3.47) y (1.3.3.50).

Dado el buen comportamiento de dichos criterios, desde un principio se optó por analizar su comportamiento confrontándolos con resultados experimentales de rotura por fatiga ante tensiones multiaxiales, obteniéndose ajustes fiables en diversos casos básicos en metales dúctiles, en particular bajo el criterio de Von Mises, Fig. 2.3.1/2, que en estado de tensión biaxial con tensión media nula, $\sigma_m = 0$, responde a la elipse que limita el fallo por fatiga de alto ciclaje,

$$\left(\sigma_{1a,o}^2 - \sigma_{1a,o}\sigma_{2a,o} + \sigma_{2a,o}^2\right)^{1/2} = \sigma_{D,o} \quad (2.3.1.22)$$

donde el primer término es la amplitud de tensión equivalente, $\sigma_{eqa,o}$, siendo $\sigma_{1a,o}, \sigma_{2a,o}$, las amplitudes de tensión principales del tensor de amplitudes de tensión, y $\sigma_{D,o}$ el límite de fatiga uniaxial correspondiente, para tensión media nula $\sigma_m = 0$.

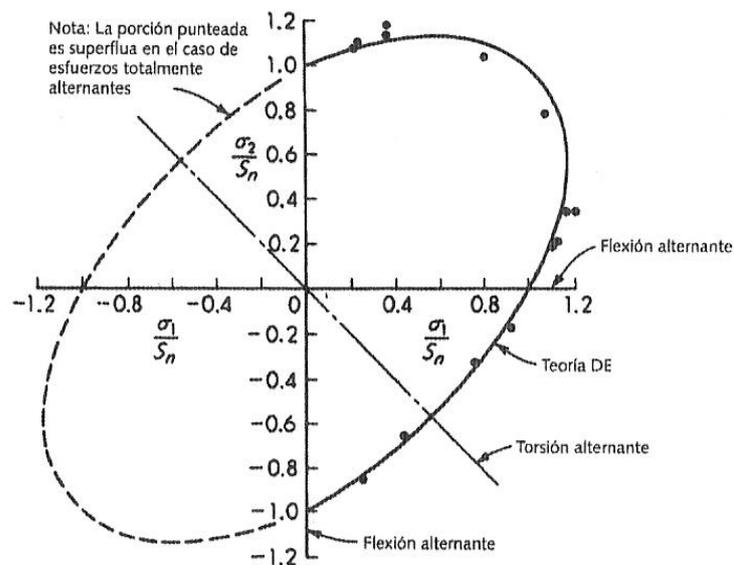


Fig. 2.3.1/2 . Resultados experimentales respecto al Criterio de Von Mises, de un acero dúctil, ante tensiones alternantes (tensión media, $\sigma_m = 0$) debidas a sollicitaciones de torsión y biaxiales a flexión combinados, alternantes. (S_n es la resistencia a la Fatiga para n ciclos). [NORTON, 1999]

Análogamente, el criterio de Von Mises para el estado triaxial, atendiendo a su amplitud de tensión equivalente $\sigma_{eqa,o}$, representa una superficie cilíndrica de ecuación

$$\left[\frac{1}{2}\left((\sigma_{1a,o} - \sigma_{2a,o})^2 + (\sigma_{1a,o} - \sigma_{3a,o})^2 - (\sigma_{2a,o} - \sigma_{3a,o})^2\right)\right]^{1/2} = \sigma_{D,o}$$

o, en su forma reducida

$$(3J_{2a,o})^{1/2} = \sigma_{D,o} \quad (2.3.1.23)^{18}$$

donde, $\sigma_{i\alpha,o}$ ($i=1,2,3$) son las amplitudes de tensión principales, según la ecuación (1.3.3.32), J_{2a} , el segundo invariante de las amplitudes de tensión del tensor desviador, y $\sigma_{D,o}$ el límite de fatiga uniaxial correspondiente, para tensión media nula, $\sigma_m = 0$.

Se considera, pues, similarmente al planteamiento para cargas estáticas, que el fallo por fatiga se produce cuando dicha tensión equivalente iguala o supera el límite de fatiga $\sigma_{eqa,o} \geq \sigma_{D,o}$.

Puesto que el análisis de la fatiga ante estados de tensión multiaxial está en una fase de estudio prácticamente incipiente, en buena parte tanto por su dificultad teórica como por el considerable coste de su investigación experimental, es necesario presentar sintéticamente sus características y resultados básicos, según las referencias de [NORTON, 1999], [AVILES, 2005], [SAE, 1997], [ELLYIN, 1997], [SURESH, 2004], [WEBER, 1999], [PINTADO, 1992], [DOWLING, 2007], [BATHIAS/ BAÏLON, 1980], [LEMAITRE / CHABOCHE, 1985], [BANNANTINE, et al 1990], [FORREST, 1982], [CAZAUD, 1969].

Los estados de tensión multiaxial, biaxial y triaxial, generados normalmente por combinaciones de carga, presión interna, y concentración de tensiones por geometría, suelen clasificarse en dos grupos: los estados multiaxiales simples, que atienden a cargas periódicas, sincrónicas y en fase, que no provocan tensiones combinadas en las que la dirección de sus tensiones principales no varían con el tiempo, y los estados multiaxiales complejos, caracterizados por variación de las direcciones de las tensiones principales con el tiempo y/o asincrónicas y/o fuera de fase, de las que apenas se dispone de resultados experimentales, por lo que, actualmente, el estudio en este campo queda reducido a la primera categoría.

En este contexto, las referencias básicas comúnmente utilizadas en el diseño o fatiga multiaxial simple, desde un punto de vista conservador, se resumen en la aplicación de dos criterios, el de Von Mises expuesto para $\sigma_m = 0$, y transcrito en las ecuaciones (2.3.1.22) y (2.3.1.23), y el método de Sines, de acuerdo con los manuales usuales utilizados en aplicaciones industriales, como [SAE, 1997].

Sines [SINES, 1955] propone un criterio de fatiga de alto ciclaje, cuya expresión más general es

$$(3J_{2a})^{1/2} = \sigma_{D,o} (1 - \alpha_s I_1) \quad (2.3.1.24)$$

siendo $(3J_{2a})^{1/2}$ la tensión equivalente de Von Mises, análoga a la indicada en (2.3.1.23), es decir J_{2a} , es el segundo invariante de las amplitudes de tensión del tensor desviador, I_1 , es el primer invariante del tensor de tensiones estático, $I_1 = 3\sigma_H$, (siendo σ_H la tensión hidrostática, según la ecuación (1.3.3.10)), y que, por lo tanto, representa a la tensión media equivalente

¹⁸ La tensión equivalente $\sigma_{eqa,o}$, en (2.3.1.22) y (2.3.1.23) en ocasiones se representa en ejes cartesianos XYZ, [NORTON, 1999]: estado biaxial, $(\sigma_{xa,o}^2 + \sigma_{ya,o}^2 - \sigma_{xa,o}\sigma_{ya,o} + 3\tau_{xya,o}^2)^{1/2} = \sigma_{D,o}$, estado triaxial, $\left[\frac{1}{2} \left((\sigma_{xa,o} - \sigma_{ya,o})^2 + (\sigma_{ya,o} - \sigma_{za,o})^2 - (\sigma_{za,o} - \sigma_{xa,o})^2 + 6(\tau_{xya,o} + \tau_{yza,o} + \tau_{zxa,o}) \right) \right]^{1/2} = \sigma_{D,o}$

($I_1 = \sigma_{eqm} = \sigma_{1m} + \sigma_{2m} + \sigma_{3m} = \sigma_{xm} + \sigma_{ym} + \sigma_{zm}$), $\sigma_{D,o}$ el límite de fatiga uniaxial correspondiente para tensión media nula, $\sigma_m = 0$; y α_s un parámetro de ajuste que en el caso de [SINES, 1955], responde a $\alpha_s = 1/\sigma_u$. Un análisis más completo de (2.3.1.24) indica que el término $(1 - \alpha_s I_1)$ es en realidad el equivalente al del modelo de ajuste asociado al método de [GOODMAN, 1899], expresado en el segundo término de la ecuación (2.3.1.12b). Ello implica que, en el caso de que la tensión media equivalente sea nula, es decir $I_1 = 0$, el criterio de Sines desemboca en el criterio de Von Mises, dado en (2.3.1.23) o (2.3.1.22) en el caso biaxial, lo que igualmente ocurre cuando se adapta el segundo término de (2.3.1.24) a cualquier de los métodos de ajuste indicados en las ecuaciones (2.3.1.11a)-(2.3.1.17). En el mismo sentido, desarrollos o planteamientos equivalentes pueden consultarse en [AVILÉS, 2005], [BATHIAS / BAÏLON, 1980], [LEMAITRE / CHABOCHE, 1985].

Es de interés indicar que, desde el punto de vista práctico, el criterio de Sines, según referencias de [NORTON, 1999], no considera el efecto de las tensiones medias tangenciales en su tratamiento de σ_{eqm} (ya que solo utiliza la tensión hidrostática), lo cual se ajusta experimentalmente a los resultados obtenidos en barras, de sección circular, lisas y pulidas (a flexión y torsión combinadas) pero no en barras con muescas o entallas; para evitar esta situación (concentración de tensiones), en un sentido más conservador del lado de la seguridad, [NORTON, 1999] propone una generalización completa del criterio de Von Mises, definida por las ecuaciones

$$\sigma_{eqa} = (3J_{2a})^{1/2}, \quad \sigma_{eqm} = (3J_{2m})^{1/2} \quad (2.3.1.25)$$

$$(3J_{2a})^{1/2} = f_m [\sigma_{D,o}, (3J_{2m})^{1/2}] \quad (2.3.1.26)$$

donde J_{2a} , J_{2m} son, respectivamente, el segundo invariante de las amplitudes de tensión y de las tensiones medias de los tensores de fatiga uniaxial para tensión media no nula, $\sigma_{D,o}$ el límite de fatiga para $\sigma_m = 0$, y f_m una función o modelo de ajuste general, que puede ser el de [GOODMAN, 1899], el de [SINES, 1955], u otro cualquiera de los indicados en las ecuaciones (2.3.1.11a) – (2.3.1.17). Es decir, la ecuación (2.3.1.25), de la tensión media equivalente, σ_{eqm} , contempla el efecto de las tensiones tangenciales medias, no consideradas en Sines, (2.3.1.24), mediante la adaptación del criterio de Von Mises a la fatiga, también para dichas tensiones medias.

Los criterios globales energéticos relacionan el daño, fallo por fatiga, con la energía elástica de deformación, W , expresada como suma de la energía hidrostática W_1 y desviadora W_2 , según la ecuación (1.3.3.30)

$$W = W_1 + W_2 \quad (2.3.1.27)$$

Entre ellos, es interesante, por su nivel de desarrollo, citar el criterio de Frouestey-Lasserre [FROUSTEY / LASSERRE / DUBARD, 1992], según [WEBER, 1999], dado por el siguiente conjunto de ecuaciones, en las que el fallo por fatiga se produce si $E_{FL} \geq 1$,

$$E_{FL} = \sqrt{\frac{V_{2a}}{A_{FL}} + \frac{V_{1m}}{B_{FL}}} \quad (2.3.1.28a)$$

$$V_{1m} = \frac{W_m}{G_{FL}(W_{1m}/W_m, \beta_{FL})}, \quad V_{2a} = \frac{W_a}{F_{FL}(W_{1a}/W_a, \beta_{FL})} \quad (2.3.1.28b)$$

$$W_m = W_{1m} + W_{2m} = \frac{1-2\nu}{6E} I_{1m}^2 + \frac{1+\nu}{E} J_{2m}^2 \quad (2.3.1.28c)$$

$$W_a = W_{1a} + W_{2a} = \frac{1-2\nu}{6E} \frac{1}{T} \int_0^T I_{1a}^2(t) dt + \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{T} \int_0^T J_{2a}^2(t) dt$$

siendo A_{FL} , B_{FL} y β_{FL} tres constantes a determinar en función de los límites de fatiga a tracción alternada simétrica, tracción repetida y torsión alternada simétrica, respectivamente, G_{FL} y F_{FL} dos funciones de las energías elásticas de deformación de la tensión media estática (hidrostática), W_m , y de la alternada, W_a , según sus invariantes I_{1m} , J_{2m} , I_{1a} , J_{2a} . En (2.3.1.28c), E es el módulo de Young, ν el coeficiente de Poisson y T el período del ciclo multiaxial considerado.

En síntesis, los criterios macroscópicos y energéticos incluyen el efecto de la tensión hidrostática en la fatiga, mediante el uso de términos aditivos.

Los criterios de plano crítico según [ELLYIN, 1997], [WEBER, 1999] tratan de determinar la posible orientación del plano crítico, o de fractura final, además de estimar la vida a fatiga. Presentan el inconveniente de que tanto la definición del plano crítico como la expresión de la función de fatiga asociada al mismo son exclusivos de cada criterio. Como referencia de criterio de plano crítico cabe citar el criterio de [DAN VANG, 1973] y [DAN VANG et al, 1989], el primero introducido en la industria francesa, según [WEBER, 1999], cuya primera versión presenta la función de fatiga en la forma:

$$E_{DV1} = \max_h(E_h) \quad (2.3.1.29)$$

siendo E_h un indicador de daño por plano, definido por

$$E_h = \max_t \left\{ \frac{\tau_{ha}(t) + \alpha_{DV} \sigma_H(t)}{\beta_{DV}} \right\} \quad (2.3.1.30a)$$

donde $\tau_{ha}(t)$, es la parte alternada de la tensión tangencial, $\sigma_H(t)$ la tensión hidrostática, en el instante t , y α_{DV} , β_{DV} , constantes del material dadas por

$$\alpha_{DV} = 3 \left(\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{2} \right), \quad \beta_{DV} = \tau_{-1} \quad (2.3.1.30b)$$

siendo σ_{-1} , τ_{-1} , los límites de fatiga a tracción alternada simétrica y a torsión alternada simétrica, respectivamente. Este criterio será válido siempre que $(\tau_{-1}/\sigma_{-1}) > 0,5$.

Las comprobaciones experimentales efectuadas, con diversos criterios globales y de plano crítico, [WEBER, 1999], [MORENO et al, 2008], no se decantan de manera general por ninguno de ellos, obteniéndose resultados dispares, incluso de baja fiabilidad (en la referencia indicada de Weber, pueden consultarse un buen número de datos comparativos).

Brevemente, para finalizar este análisis de fatiga multiaxial, en cuanto a los estados de tensión multiaxiales complejos, y considerando de nuevo las dificultades que la investigación en este campo supone, [SAE, 1997] propone dos posibles criterios para la determinación de la amplitud de tensión equivalente, uno basado en Tresca (SALT) y otro en Von Mises (SEQA) según [ASME, 1974], para el caso biaxial, que combina tensiones uniaxiales (básicamente de flexión) con tangenciales de torsión, de amplitud σ_{xa} y τ_{xya} , y considerando la relación de fase entre ellos, ϕ_f ,

$$SALT = \frac{\sigma_{xa}}{\sqrt{2}} \left[1 + Q_s^2 + \left(1 + 2Q_s^2 \cos 2\phi_f + Q_s^4 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (2.3.1.31)$$

$$SEQA = \frac{\sigma_{xa}}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{3}{4} Q_s^2 + \left(1 + \frac{3}{2} Q_s^2 \cos 2\phi_f + \frac{9}{16} Q_s^4 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (2.3.1.32)$$

donde $Q_s = 2\tau_{xya}/\sigma_{xa}$

Tal y como se desprende de este epígrafe, el análisis clásico de la fatiga de alto ciclaje, esencialmente dominante en tensión-vida, indica el alto grado de complejidad que puede adquirir una modelización, incluso en el caso más básico de amplitud de tensión constante, sea o no nula la tensión media. Esta complejidad se refleja en el amplio número de expresiones de carácter empírico o semiempírico existentes. Este nivel de complejidad, claramente se eleva cuando se considera la necesidad de aproximación a la realidad mecánica. Efectivamente, el proceso cíclico opera generalmente con variación de grupos cíclicos de amplitudes de tensión constante, pero distinta en tales grupos. Este hecho obliga a la consideración de su influencia en el proceso del deterioro del material. Esta es la razón de la introducción del primer concepto clásico de daño en HCF como una extensión natural de lo expuesto y, posteriormente, en un contexto generalizado. Ambos tratamientos metodológicos y sus consecuentes modelos teóricos más relevantes se exponen en los apartados siguientes.

2.3.2 MODELIZACIÓN CLÁSICA DEL DAÑO ACUMULATIVO POR FATIGA DE ALTO CICLAJE

Dentro del contexto de este trabajo, se considera el análisis del daño según lo que se infiere de la naturaleza fenomenológica de la fatiga de alto ciclaje, expuesta en el apartado 2.2, que, de manera explícita y como se comenta al respecto de la Figura 2.2.1/1, según [LEMAITRE / CHABOCHE, 1985], *“El daño de fatiga corresponde al nacimiento y crecimiento de microfisuras, generalmente intracristalinas en los metales, bajo el efecto de sollicitaciones cíclicas hasta el arranque de una fisura macroscópica”*. De esta simple observación se desprende que el daño, como deterioro del material, es acumulativo en la fatiga y que aumenta con el número de ciclos para niveles de amplitud de tensión mayores que el límite, real o convencional de fatiga. Sin embargo la variable, o conjunto mínimo de variables, que cuantifiquen el problema del daño aún no está satisfactoriamente determinada. De ahí que se deba especificar que la variable utilizada, que generalmente se denotará por D , o d , de carácter genérico

(independientemente de que sea escalar o tensorial), puede tener un significado distinto según el planteamiento metodológico adoptado, si bien suele contener implícitamente alguna propiedad o parámetro del material, tales como la resistencia o la rigidez, entre otras.

En este trabajo, tal como se puede inferir de las referencias básicas, y sus ecuaciones representativas (1.3.2.11) y (1.3.2.15) o la obtenida a partir de la ecuación (1.3.2.19), se consideran inicialmente dos líneas o planteamientos metodológicos: el análisis del daño acumulativo, según la extensión natural de la teoría clásica expuesta en el subapartado anterior 2.3.1 en modelización $\sigma-N$, y el análisis de la teoría formal del daño, considerando la variable, D , escalar en medido continuo isótropo, de carácter fenomenológico. Ambas líneas se tratan en este trabajo, presentando los modelos más acordes con su planteamiento formal y, en este epígrafe, se tratará, específicamente, el estudio clásico del daño acumulativo en procesos de fatiga por alto ciclaje.

La modelización clásica del daño acumulativo por fatiga, en especial la de alto ciclaje, surge ante la necesidad de dar respuesta a un estado de tensiones cíclicas más acorde con la realidad experimental, que generalmente no son de amplitud de tensión constante, hipótesis de partida en los modelos usuales analizados en el subapartado anterior 2.3.1 para $\sigma-N$. Por el contrario, tales tensiones son variables, bien por bloques o de forma aleatoria, situación que deriva en una complejidad teórico-práctica-experimental de un coste inabordable de forma directa hasta el momento. Esto justifica, desde el punto de vista clásico ya referido, que el análisis de daño acumulativo sea una extensión de este planteamiento clásico que, tal como se indicó en las referencias previas, queda definido en [PALMGREN, 1924]-[MINER, 1945], en las ecuaciones (1.3.2.11) a (1.3.2.14), bajo una hipótesis de que el daño total que se produce sobre la pieza hasta su fractura es el mismo independientemente del bloque de tensiones cíclicas aplicado. Este planteamiento conduce a una regla lineal de daño con acumulación también lineal, indicado en la ecuación (1.3.2.14), en función del índice del daño individual de cada grupo o nivel de amplitud de tensión, el cual se asimila a la proporción entre el número de ciclos que componen el bloque analizado y el número de ciclos total, o de vida, que soportaría la pieza si actuase únicamente ese bloque individual, extendido sumativamente al resto de bloques o niveles de amplitud de tensión que actúen en todo el proceso cíclico.

El comportamiento de esta primera estimación generalmente denominada regla lineal de Palmer-Miner, o regla de Miner, y se concreta en la ecuación (1.3.2.14), que, habiendo sido obtenida para materiales metálicos, no es muy precisa, como se desprende de la amplia documentación experimental en este campo. Así, [SHIGLEY / MISCHKE, 2002] y [AVILÉS, 2005], entre otros, indican que el daño acumulativo atendiendo a esta regla lineal oscila en un intervalo $]0.7, 2.2[$, es decir, puede diferir significativamente de la unidad, aunque según [LALANNE, 2002], parece generalmente aceptado que conduce a resultados admisibles para la estimación por daño al inicio de las grietas en el caso de tensiones cíclicas aleatorias.

La inexactitud de la regla lineal de Palmgren-Minner, independientemente del modelo, $\sigma-N$, utilizado según el subapartado anterior 2.3.1, y de la propia dispersión inherente a la naturaleza estadística de la fatiga, reside fundamentalmente en que supone que el orden de aplicación de los bloques o niveles de amplitud de tensión diferente no afecta al daño causado a la pieza, a la vez que admite que el orden de la secuencia de aplicación de dichos bloques de tensión afecta a la resistencia máxima de la pieza. Diversas referencias de interés al respecto pueden consultarse en [LALANNE, 2002].

La complejidad que se infiere, mostrada en el estudio previo ya expuesto, de la concepción del daño, en este caso acumulativo, requeriría de un análisis específico, que, en conjunto, se aleja del objeto de este trabajo.

Sin embargo, cabe señalar que la ley lineal de Palmgren-Miner, además de suponer la introducción del concepto daño, admite una mayor precisión del modelo del daño acumulativo, que inicialmente se basó en un gran número de correcciones-modificaciones aisladas, incluso de carácter únicamente lineal (*Linear Damage Rule*), que se abordarán aquí desde una óptica más formalista, más de conjunto. No obstante, hay que indicar que la ley lineal de Palmgren-Miner, a pesar de sus limitaciones, sigue siendo una ley aceptada universalmente y de referencia común en la normativa de todos los países (considérese, a modo de ejemplo, el Código Técnico de la Edificación, [CTE, 2006,2008]).

Efectivamente, dada su sencillez frente a otros modelos¹⁹ más sofisticados pero no definitivos, y bajo uso cauteloso, arroja una primera estimación del daño acumulado, por fatiga de alto ciclaje, de interés básico y profesional, [SAE, 1997], [GDOUTOS et al, 2003].

Una vez definidos los elementos básicos de la fenomenología del daño acumulativo, las diferentes modelizaciones pueden agruparse genéricamente [LALANNE, 2002], [FATEMI/YANG, 1998] en tres tipos:

Daño acumulativo no lineal de acumulación lineal, Fig.2.3.2/1(a).

Independientemente del estado tensional, ya que es válido para todos los bloques o niveles de amplitud de tensión, la evolución del daño se mantiene en la misma curva. Este modelo en su variación de mínima trayectoria de daño acumulado D , resulta el daño acumulativo lineal de Palmgren-Miner, que responde a la diagonal punto-rama de la Figura.

Daño acumulativo no lineal de acumulación no lineal, Fig.2.3.2/1(b).

Cada bloque o nivel de tensión, individualmente, tiene su propia curva, y su actuación secuencial produce un cambio de acumulación de daño, dependiendo, pues, de los bloques o niveles de amplitud de tensión.

Daño acumulativo con interacción

Un modelo de este tipo, según [BATHIAS / BAÏLON, 1980], supone que la aplicación de los bloques o niveles de tensión en la secuencia del proceso de fatiga, pueda variar la ley de acumulación individual de daño en el cambio de, al menos, un bloque a otro. (No representado en la Figura 2.3.2/1, dada la arbitrariedad posible de la variación).

¹⁹ Una idea al respecto, aun dentro de un marco de sencillez, puede consultarse en [SHIGLEY / MISCHKE, 2002], [AVILÉS, 2005], referente al método de [MANSON, 1965], explicitada en la referencia de [COLLINS, 1981]

(tal como indica [LALANNE, 2002], entre otros autores), es posible definir un marco conjunto del que se deriven los modelos más significativos del daño acumulativo en la fatiga de alto ciclaje, acorde con la clasificación anteriormente presentada (daño acumulativo no lineal, con acumulación lineal o no lineal, y con interacción), es decir, de la progresión del daño. Un planteamiento inicial de este aspecto, de interés para este trabajo, se puede establecer a partir del enfoque de [ELLYIN, 1997], equivalentemente indicado por [LEMAITRE / CHABOCHE, 1985]. De acuerdo a este planteamiento inicial, es posible definir genéricamente un incremento del daño neto, dw (en el sentido tratado en la referencia básica, (1.3.2.12)), en función del estado instantáneo del daño existente, w , del parámetro que modela el proceso de la fatiga de alto ciclaje, ψ , (que responderá a algún modelo como los del anterior subapartado 2.3.1, o a una ley experimental específica), al número de ciclos transcurridos, n , (que implícitamente está afectado por la historia del material desde daño nulo), al incremento de ciclos, dn , y a alguna propiedad, p , del material (como la expuesta en los modelos del subapartado 2.3.1, $\sigma'_f, \sigma_u, \varepsilon'_f$, etc.) tal que

$$dw = F(w, \psi, n, dn; p) \quad (2.3.2.2)$$

donde intrínsecamente w , ψ , n y dn serán variables del estado de evolución del daño, y p un parámetro.

La variación parcial del daño, dw , en la función.(2.3.2.2), con respecto al incremento de ciclos, dn , se asimila, en la práctica, en muchos casos, a una función lineal de su razón,

$$\frac{dw}{dn} = f(\psi; p) \cdot \frac{w}{n} \quad (2.3.2.3a)$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{dw}{w} = f(\psi; p) \cdot \frac{dn}{n} \quad (2.3.2.3b)$$

donde, puesto que el proceso del daño es irreversible, (2.3.2.3b) indica que la función f ha de verificar que $f(\psi; p) \geq 0$ para cualquier ψ y p propio de cada material. La integración de la función (2.3.2.3b) ilustra los posibles modelos de daño acumulativo, atendiendo a la clasificación previamente establecida.

Modelos de Daño acumulativo no lineal de acumulación lineal

Si $f(\psi, p) = m$, constante en todos los bloques o niveles de amplitud de tensión existentes, la integración de (2.3.2.3b) en variables separadas resulta, para todo el proceso

$$d_i = \left[\frac{n_i}{N_i} \right]^m, \quad m, \text{ constante } \forall i, \quad (2.3.2.4a)$$

y por (2.3.2.1b), el daño total será

$$D = \sum_i^n \left[\frac{n_i}{N_i} \right]^m \quad (2.3.2.4b)$$

lo que se corresponde con la Figura 2.3.2/1a, de acumulación lineal, es decir independiente de los niveles de tensión actuantes, siendo n_i, N_i los ciclos, realizados y de rotura respectivamente. Clásicamente, los modelos derivados de (2.3.2.4a) y (2.3.2.4b) reciben la denominación de **Regla de Palmgren-Miner modificada** que puede consultarse, entre muchas referencias, en [LALANNE, 2002].

En base a este resultado se proponen implementaciones empíricas de tipo combinación lineal, $D = \sum_j A_j \left(\frac{n_j}{N_j} \right)^{m_j}$, donde A_j, m_j son parámetros que se ajustan experimentalmente. Cabe observar que en el caso en que $f(\psi, p) = 1$, ($m=1$), en todos los bloques o niveles, se obtendría el modelo del daño acumulativo lineal, ecuación de Palmgren-Miner, (1.3.2.14).

Modelos de Daño acumulativo no lineal de acumulación no lineal

Similar a la resolución anterior de (2.3.2.3b), pero siendo $f(\psi_i, p) = m_i$, función de la amplitud de tensión del bloque o nivel, i , de expresión

$$d_i = \left[\frac{n_i}{N_i} \right]^{m_i} \quad (2.3.2.5a)$$

pero de carácter recurrente; así, siguiendo [ELLYIN, 1997], la obtención del daño total D , en el caso de dos bloques o niveles de amplitud de tensión, considerando que produzcan el daño exacto para la rotura de la pieza, debe verificarse que el daño de ambos niveles debe ser complementario,

$$\left(\frac{n_1}{N_1} \right)^{m_1} = \left(1 - \frac{n_2}{N_2} \right)^{m_2} \quad (2.3.2.5b)$$

por lo que,

$$\frac{n_2}{N_2} = 1 - \left(\frac{n_1}{N_1} \right)^{\frac{m_1}{m_2}} \quad (2.3.2.5c)$$

o,

$$\left(\frac{n_1}{N_1} \right)^{\frac{m_1}{m_2}} + \frac{n_2}{N_2} = 1 \quad (2.3.2.5d)$$

Este modelo, que atiende a la Figura 2.3.2/1b, fue uno de los primeros propuestos para la resolución de la acumulación no lineal del daño, por dependencia de las amplitudes de tensión de los bloques o niveles, por [MARCO / STARKEY, 1954] en base a los trabajos de [RICHART /

NEWMARK,1946]²⁰. Una generalización puede consultarse en [ELLYIN, 1997], que documenta la relación

$$d_i = \left[d_{i-1}^{\frac{m_i-1}{m_i}} + \frac{n_i}{N_i} \right]^{m_i}, \quad d_0 = 0 \quad (2.3.2.6a)$$

De forma que, por (2.3.2.1b), el daño total será

$$D = \sum_i^n \left[d_{i-1}^{\frac{m_i-1}{m_i}} + \frac{n_i}{N_i} \right]^{m_i} \quad (2.3.2.6b)$$

En este mismo grupo, de acumulación no lineal de daño, es necesario citar el método de Henry, [HENRY, 1955], pero bajo un planteamiento empírico basado en dos hipótesis: la curva de fatiga de alto ciclaje, $\sigma-N$, puede ser representada mediante una función hiperbólica $\sigma - \sigma_D = \frac{C_H}{N}$, si $\sigma \leq 1,5\sigma_D$, y sus parámetros C_H y σ_D , constante inicial y límite de fatiga del material respectivamente, varían por efecto de la acumulación de daño, disminuyendo la resistencia a la fatiga y variando C_H proporcionalmente a σ_D . De acuerdo a ello, se puede estimar el daño D , según [CAZAUD, 1957,1969], [BATHIAS / BAÏLON, 1980] y [LALANNE, 2002], entre otros, en expresión de este último,

$$\frac{D}{D_c} = \frac{n/N}{1 + \frac{\sigma_D(1-n/N)}{\sigma - \sigma_D}} \quad (2.3.2.7)$$

donde D_c , es un posible daño crítico, valor para el cual la pieza se fractura por completo, que ha de determinarse experimentalmente. Si $D_c \neq 1$ el método se denomina modificado de Henry. Este método tiene un uso limitado a aquellos materiales que no presentan un límite de fatiga bien definido, es decir convencional, como el aluminio y aleaciones ligeras.

El análisis expuesto para la acumulación no lineal del daño, dependiente de las amplitudes de los bloques o niveles de tensión, sugiere la modificación de la curva $\sigma-N$. Una propuesta al respecto, basada en la alternativa aproximada del concepto de convergencia de las curvas de isodaño en el límite de fatiga, que analiza como se modifica la curva $\sigma-N$, fue presentada por [SUBRAMANYAN, 1976] y [HASHIN / ROTEM, 1978], según referencia de [ELLYIN, 1997], que incluye aportaciones tabuladas, tanto suyas como de otros autores.

Modelos de Daño acumulativo con interacción

Aunque de forma algo más tangencial, conviene citar una referencia significativa a este tipo de modelización, centrado en el método de [CORTEN / DOLAN, 1956], primeros autores que desarrollaron este enfoque basado en la variación posible de la ley de acumulación de daño,

²⁰ Estas referencias, así como una expresión generalizada de aproximación del resultado recurrente, para cualquier número de bloques, se puede encontrar en [COLLINS, 1981].

atendiendo, como se indica en [CAZAUD, 1957,1969], [LALANNE, 2002] a la nucleación de poros, producto de los bloques o niveles de mayor amplitud de tensión, desarrollándose posteriormente en forma de fisuras. La expresión general del índice de daño d_i , por bloque i , según [LALANNE, 2002], [LEMAITRE / CHABOCHE, 1985], o [COLLINS, 1981], responde a

$$d_i = m_{ni} r_i n^{a_i} \quad (2.3.2.8a)$$

y el daño total, de acuerdo con (2.3.2.1b)

$$D = \sum_i^n m_{ni} r_i n^{a_i} \quad (2.3.2.8b)$$

donde m_{ni} , es el número de núcleos-daño constante del material, r_i , una constante relativa a la propagación de la grieta, ambas constantes para un determinado nivel de amplitud de tensión, y a_i una constante del material independiente del nivel de tensión. El desarrollo de la ecuación (2.3.2.8a) puede seguirse en las referencias indicadas. Los resultados experimentales confirman que esta teoría sobreestima la vida a fatiga de alto ciclaje, en una proporción del orden de 2.5, según referencia de [HILLBERRY, 1970], indicada en [LALANNE, 2002].

Para una consulta más detallada de los modelos de daño acumulativo, en fatiga de alto ciclaje se puede acudir a las múltiples referencias tabuladas en [FATEMI / YANG, 1998], y [LALANNE, 2002]. Para una introducción al daño tridimensional puede consultarse [LEMAITRE / CHABOCHE, 1985], o a las tablas de datos experimentales incluidas en [FORREST, 1982]. Hay que indicar también el continuamente elevado número de artículos, con proposiciones y/o variantes, que se han venido publicando al respecto y que no serán considerados en el desarrollo de este trabajo.

Tal como se indicó al inicio de este subapartado, una vez analizada la línea metodológica clásica bajo el concepto de daño acumulativo y su modelización, a continuación se abordará la segunda línea metodológica de interés para este trabajo, basada en la teoría formal del daño y su modelización.

2.3.3 ELEMENTOS BÁSICOS DE LA MODELIZACIÓN DEL DAÑO

2.3.3.1 Localidad y no localidad de un modelo teórico.

El comportamiento no lineal del material puede ser debido bien a procesos de naturaleza estrictamente plástica o a procesos derivados de la estructura dañada del material. Ambos procesos son descritos bajo el formalismo de la mecánica del medio continuo (teoría clásica de plasticidad y mecánica del medio continuo dañado); es por ello que es posible el desarrollo de un formalismo unificado que pueda describir ambos procesos. Los modelos de mecánica del daño describen la evolución temporal de la variable de daño, que representa la densidad de daño; experimentalmente, esta evolución temporal conduce a la acumulación localizada del daño, antecedente directo de la manifestación de la fatiga en el material. Han sido publicados diversos modelos que explican la acumulación microscópica del daño en material. Estos modelos pueden ser clasificados en dos categorías: los modelos que se han basado en un estudio mecánico microscópico (modelos *micromecánicos*) y aquéllos otros que se han desarrollado bajo la hipótesis del continuo (modelos *fenomenológicos*).

En ambos casos, es necesario establecer en primer lugar algunas consideraciones previas relativas a la modelización del medio continuo; efectivamente, la descripción realizada hasta este punto en este trabajo se ha limitado a un modelo de carácter local. En los modelos locales, la tensión en un punto dado únicamente depende de los valores de las deformaciones y, en todo caso, si la historia del material ha de ser tenida en cuenta, de sus valores previos, y de la temperatura. Este tratamiento, claramente intuitivo, sólo puede ser formulado bajo la hipótesis de que el material se comporta como un continuo a escalas arbitrariamente pequeñas. De esta forma, el medio se considera descompuesto en un infinito conjunto de volúmenes diferenciales, cada uno de los cuales puede ser estudiado de forma independiente, produciéndose la interacción entre ellos sólo a través de ecuaciones de balance, bajo transferencias de masa, momento, energía o entropía.

Los modelos no locales pueden ser clasificados bajo dos grandes categorías, *modelos no locales de carácter integral* y *modelos no locales de tipo gradiente o de orden superior*. El primero de ellos se desarrolla bajo la hipótesis de que las leyes elásticas en un punto de un medio continuo han de incluir valores medios promediados de las variables de estado en un cierto entorno del punto. Los modelos de tipo gradiente (también denominados de orden superior) consideran que el comportamiento elástico viene también determinado por los gradientes de las propias variables de estado. El carácter no local es evidente en cualquiera de estas dos aproximaciones y un rasgo común de esta no-localidad es la presencia en estos modelos de una longitud característica (denominada también longitud del material), presente en las ecuaciones de estado, que mide, en términos descriptivos, el alcance de la extensión al estado de los puntos del entorno del punto considerado.

Un riguroso estudio de teorías de carácter no local se encuentra en [ROGULA, 1982]. Es interesante indicar aquí esquemáticamente el concepto de localidad de una teoría y de sus extensiones no-locales. Una ecuación fundamental en cualquier teoría física puede ser escrita bajo la forma

$$Au = f \quad (2.3.3.1)$$

en la que f es la variable que describe la entrada del sistema, u la variable respuesta y A el operador general que describe el comportamiento del sistema. El carácter local de la ecuación (2.3.3.1) puede definirse por la condición de que dos variables de entrada iguales para todos los puntos de un entorno abierto de un determinado punto x , tienen asociada por la expresión (2.3.3.1) la misma variable respuesta; cualquier operador diferencial cumple esta condición, dado que una derivada de cualquier orden no cambia en un punto si la función que se deriva sólo cambia fuera de un entorno de este punto. El operador A correspondiente a un modelo elástico clásico es diferencial. Ello puede observarse tomando, por simplicidad formal, las ecuaciones correspondientes al problema elástico unidimensional,

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= u'(x) \\ \sigma'(x) + f(x) &= 0 \\ \sigma(x) &= C(x)\varepsilon(x) \end{aligned} \quad (2.3.3.2)$$

donde las derivadas se refieren a la variable espacial x , y cuya combinación conduce a la ecuación fundamental

$$- [C(x)u'(x)]' = f(x) \quad (2.3.3.3)$$

formalmente similar a (2.3.3.1). Una extensión no local y unidimensional de la relación deformación-tensión, dada por la última de las expresiones (2.3.3.2) debe formularse como:

$$\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(x, \xi) \varepsilon(\xi) d\xi \quad (2.3.3.4)$$

con lo que la ecuación fundamental adopta la forma

$$-\left[\int_{-\infty}^{\infty} C(x, \xi) u'(\xi) d\xi \right]' = f(x) \quad (2.3.3.5)$$

en la que el operador A del sistema es de tipo integro-diferencial, bajo el que no se da la condición general de localidad.

De acuerdo con las anteriores consideraciones, podría establecerse una primera distinción entre teorías locales y no locales: las primeras están descritas por operadores diferenciales y las segundas por operadores integro-diferenciales. Sin embargo, existe una acepción aún más general del término localidad. Una teoría es estrictamente local cuando sus leyes fundamentales son invariantes frente a transformaciones de escala de las coordenadas espaciales. La ecuación fundamental (2.3.3.3) es invariante cuando las variables espaciales se multiplican por un determinado parámetro positivo, factor de escala, y la fuerza $f(x)$ se divide por el mismo factor de escala. Este comportamiento invariante denota la inexistencia de una longitud característica (o longitud natural) de la ley y, por tanto, confiere un carácter local a la teoría. De esta forma, una teoría invariante ante una transformación de escala de las variables espaciales se denomina *estrictamente local*. Una teoría local, en el primer sentido considerado, que no muestre esta invariancia se denomina *débilmente no local*. Un ejemplo de carácter débilmente no local es el de teorías gobernadas por ecuaciones diferenciales de órdenes superior, las que se han denominado como teorías tipo gradiente. En ellas, generalmente, la longitud característica puede obtenerse a partir de los coeficientes de los términos de derivadas de los diferentes órdenes, que, a su vez, tienen diferentes dimensiones físicas. En el contexto de este trabajo se distinguirán entonces modelos estrictamente locales, modelos débilmente no locales, que describen teorías tipo gradiente o de orden superior y modelos fuertemente no locales, descritos generalmente por leyes de carácter integro-diferencial.

2.3.3.2 Modelos de elasticidad no local.

Un primer modelo de elasticidad no local fue introducido por los trabajos de [EDELLEN / GREEN / LAWS, 1971], [EDELLEN / LAWS, 1971], [ERINGEN, 1972], [ERINGEN / EDELLEN, 1972]; en ellos se consideraba un carácter no local a muchas variables, constituyendo así un modelo extraordinariamente complejo; fueron introducidas posteriormente simplificaciones en las que el carácter no local quedaba reducido a las relaciones tensión-deformación, mientras que las relaciones de equilibrio o de cinemática mantenían un carácter local [ERINGEN / KIM, 1974], [ERINGEN / SPEZIALE / KIM, 1977]. Los principios variacionales de estas teorías han sido expuestos por [POLIZZOTTO, 2001]. En este modelo, se obtiene una teoría no local de elasticidad no lineal a partir de la energía elástica W de un cuerpo de volumen V definida por

$$W = \frac{1}{2} \int_V \int_V \varepsilon^T(x) C(x, \xi) \varepsilon(\xi) dx d\xi \quad (2.3.3.6)$$

de tal forma que la variación de energía elástica con el tiempo, obtenida por derivación de (2.3.3.6) respecto al tiempo viene dada por

$$\dot{W} = \int_V \int_V \dot{\varepsilon}^T(x) C^{sim}(x, \xi) \varepsilon(\xi) dx d\xi \quad (2.3.3.7)$$

donde $C^{sim}(x, \xi) = \frac{1}{2} [C(x, \xi) + C^T(\xi, x)]$ es la parte simétrica del tensor de rigidez generalizada (simetrización que alcanza no sólo a las componentes del tensor sino también al orden de las variables). La expresión (2.3.3.6) puede ser escrita como

$$\dot{W} = \int_V \dot{\varepsilon}^T(x) \sigma(x) dx \quad (2.3.3.8)$$

$$\sigma(x) = \int_V C^{sim}(x, \xi) \varepsilon(\xi) d\xi \quad (2.3.3.9)$$

donde $\sigma(x)$ es el tensor de tensiones en el punto x considerado; la ecuación (2.3.3.9) es la ecuación constitutiva de la elasticidad no local. La aplicación del principio de trabajos virtuales conduce a las mismas expresiones formales de la elasticidad local, dado que la forma de la expresión (2.3.3.8) es esencialmente la misma. Suele establecerse como aproximación que la rigidez generalizada se exprese como

$$C^{sim}(x, \xi) = C \cdot \alpha(x, \xi) \quad (2.3.3.10)$$

donde $\alpha(x, \xi)$ se denomina función de atenuación, simétrica en el orden de variables, aceptándose con ello que tal atenuación es independiente de la dirección, hipótesis válida en un cuerpo homogéneo macroscópico. Así, la expresión (2.3.3.9) puede transformarse a la forma

$$\sigma(x) = C \bar{\varepsilon}(x) \quad (2.3.3.11)$$

$$\bar{\varepsilon}(x) = \int_V \alpha(x, \xi) \varepsilon(\xi) d\xi \quad (2.3.3.12)$$

En (2.3.3.12) el vector $\bar{\varepsilon}(x)$ recibe el nombre de vector deformación no local. En un cuerpo infinito e isótropo, la función atenuación únicamente depende de la distancia entre los puntos, de tal forma que puede escribirse

$$\alpha(x, \xi) = \alpha_\infty(\|x - \xi\|) \quad (2.3.3.13)$$

$$\int_\infty \alpha_\infty(r) dV = 1 \quad (2.3.3.14)$$

Es usual que se adopte para la función de atenuación la forma de una distribución Gaussiana,

$$\alpha_{\infty}(r) = (\ell\sqrt{2\pi})^{-N} \exp\left(-\frac{r^2}{2\ell^2}\right) \quad (2.3.3.15)$$

donde N es el número de dimensiones espaciales que se consideren y ℓ un cierto parámetro con dimensiones de longitud. La función de distribución (2.3.3.15) supone una interacción a cualquier distancia (cuerpo infinito). Por razones de eficacia en la implementación en algoritmos de elementos finitos puede adoptarse una función de distribución polinomial, [BAZANT / OZBOLT, 1990],

$$\alpha_{\alpha}(r) = c \cdot \left\langle 1 - \frac{r^2}{R^2} \right\rangle^2 \quad (2.3.3.16)$$

donde R es un parámetro que mide el alcance de la interacción y c es un coeficiente de normalización, de acuerdo a (2.3.3.14). La función corchete de Macauley en (2.3.3.16) se define como $\langle x \rangle = \max(0, x)$. La forma de la función de atenuación no está definida teóricamente; la elección de una determinada expresión responderá generalmente a criterios de adecuación experimental.

2.3.3.3 Modelos micromecánicos de evolución del daño.

El primer modelo de evolución de daño sustentado en un análisis mecánico de partículas microscópicas fue formulado por [GURSON, 1977], a partir del estudio del crecimiento de un hueco esférico en un medio elastoplástico ideal. Este modelo fue modificado y extendido, en el contexto todavía de una teoría de carácter local, y bajo argumentaciones de carácter semifenomenológico, por las aportaciones, principalmente, de [TVERGAARD, 1981,1982], [CHU / NEEDLEMAN, 1980], [KOPLIC / NEEDLEMAN, 1988], [NEEDLEMAN / TVERGAARD, 1984], bajo las que se obtuvo un mejor ajuste con los procesos experimentales y simulaciones numéricas relativas a la nucleación de cavidades y a la coalescencia. Estos trabajos han conducido al modelo denominado de **Gurson-Tvergaard-Needleman**, ampliamente utilizado en la literatura científica y aplicaciones tecnológicas [CUESTA / ALEGRE / BARBÁCHANO, 2010], [ORAL / ANLAS / LAMBROS, 2012]. Esta modelización conduce a un criterio de fallo, obtenido cuando la función Γ , definida por

$$\Gamma = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_M^2} + 2q_1 f^* \cosh\left[\frac{l_1}{2\sigma_M}\right] - 1 - (q_1 f^*)^2 \quad (2.3.3.17)$$

es nula. En esta función, σ_y representa la tensión equivalente o de referencia de Von Mises, l_1 el primer invariante del tensor de tensiones, σ_M la tensión de fallo de la matriz del material y f^* la fracción efectiva de volumen de huecos, definida por

$$f^* = f^*(f) = \begin{cases} f & f \leq f_c \\ f_c + \frac{1/q_1 - f_c}{f_f - f_c} (f - f_c) & f \geq f_c \end{cases} \quad (2.3.3.18)$$

en la que f_c representa el valor límite en el que se inicia la coalescencia de huecos y f_f el valor límite de fallo. El desarrollo de cavidades o huecos en este modelo se realiza por crecimiento y nucleación, viniendo descrita la evolución del parámetro f por la ecuación

$$\dot{f} = (1-f)Tr\dot{\varepsilon}^p + A\dot{\varepsilon}_M^p \quad (2.3.3.19)$$

donde ε^p es el tensor de deformación plástica, ε_M^p es un parámetro micromecánico denominado deformación plástica equivalente de la matriz de material y A es el coeficiente de nucleación de huecos, dado por la expresión

$$A = \frac{f_n}{s_n \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_M^p - \varepsilon_n)^2}{s_n^2}\right) \quad (2.3.3.20)$$

en la que f_n representa la fracción de volumen de nucleación de poros, ε_n la deformación plástica media en que comienza la recohesión de las inclusiones en la matriz inicial y s_n la desviación estándar.

Una revisión del modelo local de Gurson-Tvergaard-Needleman, así como de su extensión no-local fundamentando termodinámicamente ha sido presentado por [REUSCH / SVENDSEN / KLINGBEIL, 2003] y desarrollado continuamente [REUSCH/ HORTIG/SVENDSEN, 2008] , sobre la base de formalizaciones termodinámicas anteriores [SVENDSEN, 1999, 2001]. La extensión no local se basa en este trabajo en un campo escalar D variable con el tiempo de daño del medio continuo con valores en el intervalo entre 0 y 1. Un valor nulo indicaría el estado sin daño, mientras que el valor unidad representaría el estado totalmente dañado (es decir, un material constituido únicamente de huecos). La incorporación de este campo en el modelo local se fundamenta en la hipótesis de que el efecto de este campo en la condición límite es el mismo que el de la fracción efectiva de volumen de huecos f^* en el modelo local, de forma que la expresión (2.3.3.17) se modificaría en la forma

$$\Gamma = \frac{\sigma^2}{\sigma_M^2} + 2q_1 D \cosh\left[\frac{l_1}{2\sigma_M}\right] - 1 - (q_1 D)^2 \quad (2.3.3.21)$$

En ese trabajo se propone la forma para la densidad de energía libre f

$$f = \frac{1}{2} \lambda_1' i_1^2 + \mu_2' + \frac{1}{2} \alpha_D \ell_D^2 \bar{\nabla} D \circ \bar{\nabla} D \quad (2.3.3.22)$$

donde i_1' y i_2' son los dos primeros invariantes del tensor de deformación, y λ y μ los coeficientes de Lamé. El coeficiente α_D representa un factor de escala característico de energía, y ℓ_D una longitud característica. Se observa aquí el carácter no local de esta aproximación, por la necesidad de introducir un factor de escala de longitud o longitud

característica. La densidad de producción de daño, que determina la cinética del proceso, adquiere en este trabajo la expresión

$$\dot{\omega}_N = \alpha_D (\tau_1 \dot{f}^* - \tau_D \dot{D}) \quad (2.3.3.23)$$

en función de un factor de escala temporal τ_D para el proceso de daño de naturaleza no local. Por último, τ_1 es un tiempo característico sobre el cual el proceso inelástico contribuye al desarrollo del daño, al incremento de la variable D .

Como se observa, la extensión del modelo de [GURSON, 1977], propuesta en este trabajo es de naturaleza débilmente no local, al incluir el tercer término en la expresión de la densidad de energía libre, cuya expresión en elasticidad clásica se reduce únicamente a los dos primeros términos. Una expresión similar en un trabajo relativamente reciente de [HAMIÉL et al, 2004], fundamentado también en el modelo micromecánico propuesto por [LYAKHOVSKY et al, 1997]. En ese trabajo se propone la expresión para la densidad de energía libre,

$$f = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2' - \gamma I_1 \sqrt{I_2'} \quad (2.3.3.24)$$

en términos también de los coeficientes de Lamé. El tercer término de (2.3.3.24) incorpora por tanto la elasticidad no lineal. En [LYAKHOVSKY et al, 1997] se analizan las condiciones a imponer a los tres parámetros λ , μ , γ para asegurar la convexidad de la función (2.3.3.24). En [HAMIÉL et al, 2004], se introduce la variable de daño de forma semejante a la considerada en [REUSCH / SVENDSEN / KLINGBEIL, 2003], por medio de una variable escalar D de daño con valores entre cero y uno. La diferencia de perspectiva metodológica entre ambos trabajos consiste en que en [HAMIÉL et al, 2004], se admite que los coeficientes de Lamé y el coeficiente γ son todos ellos dependientes de la variable de daño D , mientras que en (2.3.3.22) la incorporación del daño sólo aparece en el tercer término. Posteriores trabajos de estos autores mantienen esta misma orientación metodológica [HAMIÉL / LYAKHOVSKY / BEN-ZION, 2011]. Por otra parte, el carácter no-local se manifiesta con mayor carácter físico, al introducir el gradiente de la variable de daño y magnitudes características de la perspectiva micromecánica propia del modelo de [GURSON, 1977]. Se han descrito numerosas aproximaciones no locales a dicho modelo. De entre ellas, es interesante analizar la de carácter integral expuesta por [TVERGAARD / NEEDLEMAN, 1995], en la que la fracción de volumen de cavidades de Gurson se hace dependiente del grado de homogeneidad del entorno del punto, y la de tipo gradiente de [RAMASWAMY / AVARAS, 1998].

Se ha desarrollado una muy fuerte investigación, especialmente en mecánica de fractura, en el campo de teorías micromecánicas de carácter no local. Un muy interesante trabajo de análisis de estos resultados ha sido realizada por [BAZANT / JIRASEK, 2002] y numerosos artículos de investigación son recogidos en [JIRASEK / BAZANT / BITTNER / MAZARS, 2007]

En cualquier caso, se comprueba en estos trabajos que la extensión no local del modelo micromecánico de [GURSON, 1977], se realiza a través de la introducción de una variable interna de daño, elemento sustancial en los modelos de daño denominados fenomenológicos, que serán expuestos en el siguiente punto de este trabajo.

2.3.3.4 Modelos fenomenológicos de evolución del daño.

Los modelos fenomenológicos están basados en el desarrollo de [KACHANOV, 1958], que, en un medio isótropo, introdujo una variable escalar de daño y el concepto de tensión efectiva. Este modelo ha sido desarrollado para materiales frágiles [KRAJCINOVIC / FONSEKA, 1981], y para materiales dúctiles [LEMAITRE, 1985] Posteriormente se han desarrollado modelos de plasticidad, [VOYIADJIS / PARK, 1997], fundamentados en la denominada mecánica del medio continuo dañado (*continuum mechanics damage*), cuerpo teórico desarrollado a partir de estas sustanciales contribuciones. En este esquema, la variable daño $D(n)$ de una superficie elemental, identificada por su vector unitario normal n , se concibe como la densidad superficial relativa en ese punto de daños y cavidades en esa sección. Si se considera el daño como isótropo, esta variable es únicamente un escalar D independiente de la orientación de la superficie. Si se considera, por simplicidad, un modelo unidimensional, una sección de superficie S de un material dañado sometida a una fuerza dada, esta sometida a una tensión σ . La tensión efectiva $\bar{\sigma}$ es la resultante de aplicar esta misma fuerza a una superficie efectiva igual a la real menos la densidad superficial de daño D . Entonces, la relación siguiente es inmediata, introducida en (1.3.2.16),

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} \quad (2.3.3.25)$$

Admitiendo ahora el principio de que la deformación del medio dañado ha de ser la misma que la del medio ficticio con los valores efectivos, puede obtenerse una relación entre el módulo de Young real E y un módulo efectivo correspondiente a un medio no dañado, relación indicada en (1.3.2.19),

$$\bar{E} = E(1-D) \quad (2.3.3.26)$$

donde se ha supuesto implícitamente que el módulo de Poisson permanece constante en el proceso de daño, [DE VREE / BREKELMANS / VAN GILS, 1995]. La ecuación (2.3.3.26) permite estimar el grado de daño de un material por evaluación de su módulo reducido de Young. El criterio de fallo se establece cuando la variable de daño D iguala un valor crítico D_c , propiedad intrínseca del material, determinado experimentalmente y que suele situarse en el intervalo entre 0.15 y 0.85, [LEMAITRE, 1996]. Hay que indicar aquí que el concepto de fallo no indica fractura, sino el momento en que cesa la hipótesis fundamental de distribución continua del daño, es decir, cuando el proceso de daño se concentra en el crecimiento de un defecto dominante. Este punto, en fatiga, coincide con el momento de iniciación de una grieta microscópica. El hecho de que el daño crítico D_c se postule como una propiedad intrínseca del material, [CHOW / WEI, 1991,2001, 2004], [UPADHYAYA / SRIDHARA,2012]] permite, tras su evaluación en un contexto experimental simple, su uso en la predicción del tiempo de fallo en situaciones más complejas.

El modelo anterior es aplicable en medios isótropos en los que el coeficiente de Poisson permanece constante en el proceso de carga. Una generalización de la expresión (2.3.3.25) ha sido introducida en gran cantidad de trabajos (ver, por ejemplo, [CHOW / WEI, 1999]; o [VOYIADJIS / PARK, 1997] [CATAN / VOYIADJIS,2001]) para medios no isótropos, en la que los tensores de tensión y tensión efectiva están relacionados a través de un tensor de daño, de cuarto orden,

$$\bar{\sigma}_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} \Leftrightarrow \bar{\sigma} = M \circ \sigma \quad (2.3.3.27)$$

Una de las expresiones, bastante utilizada en la literatura posterior, para este tensor fue propuesta por [CORDEBOIS / SIDOROFF, 1979],

$$M_{ijkl} = 2 \left[(\delta_{ik} - D_{ik}) \delta_{jl} + \delta_{ik} (\delta_{jl} - D_{jl}) \right]^{-1} \quad (2.3.3.28)$$

donde $D_{ij} = \sqrt{D_i D_j}$ y cada término D_i representa la densidad superficial de daño sobre el correspondiente plano ortogonal. Se han postulado otras formas para el tensor M dependientes de una única variable escalar de daño D y algún otro parámetro de anisotropía.

En una reciente publicación [VOYIADJIS / YOUSEF / KATTAN, 2012] se han propuesto 23 diversas expresiones para un tensor de daño de cuarto orden en función de la asunción de la hipótesis de deformación elástica equivalente o de energía elástica equivalente, con diferentes rangos de validez en función de las variables internas de daño adoptadas.

En cualquier caso, isótropo o anisótropo, el modelo desarrollado ha de contemplar la evolución temporal de la variable (o variables) de daño. Los procedimientos que describen el crecimiento de la variable de daño pueden ser agrupados en dos grandes categorías. En la primera de ellas, la evolución se postula a través de una ecuación cinética, expresada, en términos muy generales como

$$\dot{D} = f(D, x, \omega) \quad (2.3.3.29)$$

donde x denota el conjunto de variables internas y ω el conjunto de parámetros del material. Así, en el trabajo inicial de [KACHANOV, 1958], se postula como ecuación cinética de crecimiento del daño bajo tensión uniaxial la siguiente:

$$\dot{D} = A \left(\frac{\sigma}{1-D} \right)^n \quad D=0, t=0 \quad (2.3.3.30)$$

en la que A y n son constantes del material y σ es la tensión nominal aplicada. Esta hipótesis se ha venido desarrollando hasta trabajos muy posteriores, [JUNG / XING, 1995], [DARABI / AL-RUB / LITTLE, 2012].

La segunda línea de análisis de la evolución temporal del daño se sitúa en el contexto formal de la termodinámica irreversible. Efectivamente, el proceso de acumulación de daño ha de ser necesariamente descrito como una evolución irreversible del sistema. Es conveniente por ello introducir un breve esquema termodinámico que permita el análisis de los diversos trabajos que han sido desarrollados en este sentido.

2.3.3.5 Formalismo termodinámico en Mecánica del Medio Continuo.

En la literatura técnica de mecánica clásica del medio continuo no es habitual la derivación de los resultados desde una fundamentación termodinámica, limitándose los aspectos energéticos usualmente a aplicaciones concretas en la metodología de análisis estructural. Sin embargo, una presentación general de la mecánica del medio continuo desde el punto de vista

termodinámico proporciona un lenguaje más adecuado a la investigación en este campo. En este punto se expondrá esquemáticamente el marco termodinámico que se adoptará en el tratamiento y análisis de esta investigación.

Si se considera la mecánica del medio continuo clásica, de carácter entonces local, que presupone fuerzas internas de corto alcance (radio de acción nulo), la fuerza sobre un elemento diferencial de volumen, o vector densidad de fuerza, es ejercida únicamente a través de las tensiones sobre planos ortogonales, de tal forma que es válida la relación

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \Leftrightarrow \mathbf{f} = \vec{\nabla} \sigma \quad (2.3.3.31)$$

y, consecuentemente, el trabajo producido por las fuerzas elásticas al producirse una variación infinitesimal de la deformación es

$$dw = -\sigma_{ik} d\varepsilon_{ik} \Leftrightarrow dw = -\sigma \circ d\varepsilon \quad (2.3.3.32)$$

Se indicará por u la energía interna por unidad de volumen o densidad de energía interna. Una variación du de la densidad energía interna es igual al calor recibido por el elemento diferencial de volumen menos el trabajo realizado por las fuerzas elásticas,

$$du = dq - dw \quad (2.3.3.33)$$

Si el proceso es reversible,

$$dq = T ds \Rightarrow du = T ds + \sigma \circ d\varepsilon \quad (2.3.3.34)$$

donde s es la densidad de entropía y T la temperatura del elemento diferencial de volumen considerado. De esta forma, la función de estado energía interna u es función de las variables de estado entropía y tensor de deformación, $u = u(s, \varepsilon)$.

Si el proceso es irreversible, la cantidad de calor es menor al producto de la temperatura por la variación de entropía, de forma que, en este tipo de proceso,

$$du < T ds + \sigma \circ d\varepsilon \quad (2.3.3.35)$$

La energía interna no es adecuada en la descripción de procesos gobernados por variaciones de temperatura, dado que es función de estado de la entropía y del tensor de deformación. Por ello se define la densidad de energía libre f mediante la expresión

$$f = u - Ts \quad (2.3.3.36)$$

de forma que su variación en un proceso reversible es

$$df = -s dT + \sigma \circ d\varepsilon \quad (2.3.3.37)$$

ecuación que define a f como función de la temperatura y del tensor de deformación, $f = f(T, \varepsilon)$. En un proceso irreversible,

$$df < -sdT + \sigma \circ d\varepsilon \quad (2.3.3.38)$$

Si un sistema es descrito por su densidad de energía libre, es decir, descrito por sus variables temperatura y deformación, cualquier variación respecto a su estado de equilibrio (caracterizado por valores constantes de sus variables de estado) vendrá caracterizada por una variación nula o negativa de su energía libre,

$$df \leq 0 \quad (2.3.3.39)$$

de forma que en el estado de equilibrio, f alcanza un valor máximo.

Puede ser conveniente en un determinado proceso caracterizar el sistema por las variables temperatura y tensión, de modo que la variación del estado del sistema se describa por una variación de la temperatura o del estado de tensión. Por esta razón se define la función de estado entalpía libre g por la relación

$$g = f - \sigma \circ \varepsilon \quad (2.3.3.40)$$

y su variación en un proceso reversible

$$dg = -sdT - \varepsilon \circ d\sigma \quad (2.3.3.41)$$

que define a la función de estado entalpía libre como función de las variables termodinámicas temperatura y estado de tensión, $g = g(T, \sigma)$. En un proceso irreversible,

$$dg < -sdT - \varepsilon \circ d\sigma \quad (2.3.3.42)$$

Si un sistema, descrito por su estado de tensión y su temperatura, sufre cualquier variación respecto a su estado de equilibrio, entonces experimenta una variación nula o negativa de su entalpía libre,

$$dg \leq 0 \quad (2.3.3.43)$$

de forma que en el estado de equilibrio, g alcanza un valor máximo.

Es posible generalizar la expresión (2.3.3.33) si el sistema va a ser descrito por más variables. En forma general,

$$du = dq - dw + \sum_i \Lambda_i \circ d\lambda_i \quad (2.3.3.44)$$

en la que λ_i son nuevas variables y Λ_i sus correspondientes fuerzas generalizadas (que pueden tener ambas naturaleza escalar, vectorial o tensorial). Como posteriormente se indicará la expresión (2.3.3.44) se utilizará en la introducción de términos de daño y plasticidad. La relación (2.3.3.36) que define la energía libre no sufre variación y es posible definir nuevas funciones de entalpía libre para las nuevas variables introducidas:

$$g_i = f - \Lambda_i \circ \lambda_i \quad (2.3.3.45)$$

o para cualquier conjunto de estas variables.

Usualmente es más adecuado manejar la temperatura como variable termodinámica. En este caso, las funciones termodinámicas a utilizar son la energía libre $f = f(T, \varepsilon)$ o la entalpía libre $g = g(T, \sigma)$, según se considere como variable termodinámica el estado de deformación o de tensión. En procesos reversibles a temperatura constante, es inmediato, por (2.3.3.37) y (2.3.3.41), que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T = \sigma_{ij} \quad (2.3.3.46)$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right)_T = -\varepsilon_{ij} \quad (2.3.3.47)$$

relaciones que indican que el tensor de tensiones tiene el significado de fuerza generalizada correspondiente a la variable generalizada tensor de deformaciones (2.3.3.46) o el significado inverso en (2.3.3.47).

2.3.3.6. Expresión local de la densidad de energía libre en un medio elástico lineal.

Si se considera un sólido elástico deformado a una misma temperatura que el mismo sólido sin deformar, la expresión (2.3.3.46) es válida en todo el proceso de deformación. Dado que en ausencia de deformación, las tensiones son nulas, no es posible que la energía libre dependa linealmente de las componentes del tensor de deformación. Por ello, si únicamente se admite un desarrollo en series de potencias de hasta segundo orden, necesariamente f sólo puede contener términos cuadráticos del tensor de deformación. Dado que f es un escalar, y que con las componentes de un tensor simétrico sólo pueden generarse dos escalares independientes, f ha de ser de la forma [LANDAU / LIFSHITZ, 1969], suponiendo nula la energía libre del cuerpo sin deformar:

$$f = \frac{\lambda}{2} (I_1')^2 + \mu I_2' \quad (2.3.3.48)$$

en función de los dos invariantes del tensor de deformación. Aunque no es unívoca la elección de los dos escalares anteriores en la representación de la densidad de energía libre, la expresión (2.3.3.48) se ha impuesto históricamente: los coeficientes λ y μ se denominan coeficientes de Lamé.

Aplicando a (2.3.3.48) la expresión general (2.3.3.46), se obtiene la relación que liga al tensor de tensiones con el de deformaciones,

$$\sigma_{ij} = K \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) \quad (2.3.3.49)$$

que, en forma tensorial, puede expresarse como

$$\sigma = C \circ \varepsilon$$

$$C_{ijkl} = K\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) \quad (2.3.3.50)$$

en la que C es el tensor de módulos elásticos o tensor de rigidez, en función del módulo K de compresión hidrostática, $K = \lambda + 2\mu/3$ y el coeficiente μ , denominado módulo de rigidez. La expresión (2.3.3.50), representa la dependencia lineal del tensor de tensiones frente al de deformaciones y se conoce como ley de Hooke.

Es importante hacer notar que a partir de la expresión (2.3.3.48) pueden deducirse las relaciones:

$$f = \frac{1}{2}\sigma \circ \varepsilon \quad (2.3.3.51)$$

y, por tanto,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)_{\tau} = \varepsilon_{ij} \quad (2.3.3.52)$$

que sólo son válidas cuando se admite comportamiento lineal o, lo que es equivalente, cuando se admite la ley de Hooke.

2.3.3.7 Modelos locales elásticos de daño.

En medios elásticos isótropos dañados puede establecerse el denominado **principio de equivalencia de energía elástica**, [CORDEBOIS / SIDOROFF, 1979], y [SKRZYPEK, 1999], según el cual la densidad de energía libre del material elástico dañado es la misma que una ficticia con valores efectivos correspondientes al material sin dañar. Es decir, de acuerdo con (2.3.3.51),

$$f = \frac{1}{2}\bar{\sigma} \circ \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\sigma \circ \varepsilon \quad (2.3.3.53)$$

donde los tensores $\bar{\sigma}$ y $\bar{\varepsilon}$ son los tensores de tensión y deformación efectivos, respectivamente. Esta suposición, junto con la hipótesis básica (2.3.3.25) conduce inmediatamente a la relación

$$\bar{\varepsilon} = (1-D)\varepsilon \quad (2.3.3.54)$$

y a un tensor efectivo de rigidez \bar{C} cuya relación con el tensor de rigidez nominal C es:

$$\bar{C} = C(1-D)^2 \quad (2.3.3.55)$$

La expresión (2.3.3.53) puede expresarse únicamente en términos del tensor de deformación, forma más coherente atendiendo a la definición de la energía libre como potencial termodinámico, utilizando (2.3.3.50),

$$\bar{\sigma} = C \circ \bar{\varepsilon} \quad (2.3.3.56)$$

$$f = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \circ \bar{\sigma} = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \circ C \circ \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} (1-D)^2 \varepsilon \circ C \circ \varepsilon \quad (2.3.3.57)$$

ya que es igualmente válida la relación

$$\sigma = \bar{C} \circ \varepsilon \quad (2.3.3.58)$$

La expresión (2.3.3.57) proporciona la densidad de energía libre del material dañado en términos de la variable escalar de daño D y del tensor de deformación ε . Se trata por tanto de una aproximación metodológica en la introducción del daño en la densidad de energía libre, fundamentada en las expresiones básicas (2.3.3.25) y (2.3.3.51). Una aproximación metodológicamente diferente es la ya referida (2.3.3.24),

$$f = \frac{\lambda}{2} I_1'^2 + \mu I_2' - \gamma I_1' \sqrt{I_2'}$$

generalización de la densidad de energía elástica (2.3.3.51), en la que los coeficientes de Lamé y el último coeficiente son funciones implícitas de la variable, isotropa o no, de daño. En cualquier caso, ambas aproximaciones incorporan una nueva variable propia del material, escalar o tensorial, en la densidad de energía libre, considerada como variable interna.

En esta misma línea se han descrito resultados basados en la forma general que ha de adoptar la densidad de energía libre considerando una variable de daño de forma explícita en su desarrollo. Así, en [VÁN, 2001], se introduce la densidad de energía libre como función de una variable vectorial de daño, \vec{D} , de la forma:

$$f = (\delta + k_\delta D^2) I_1' + \left(\mu + \frac{k_\mu}{2} D^2 \right) I_2' + \frac{1}{2} (\lambda + k_\lambda D^2) I_1'^2 + \frac{\alpha}{2} D^2 + \frac{1}{2} (\beta + k_\beta I_1') D \circ \varepsilon \circ D + \frac{\gamma}{2} (D \circ \varepsilon)^2 \quad (2.3.3.59)$$

como la expresión local más general considerando una variable vectorial de daño. Como se observa, es una generalización de la expresión clásica (2.3.3.48), en la que los coeficientes λ y μ son los coeficientes de Lamé. El primer término está relacionado con la energía hidrostática del material, indicando el coeficiente δ el término independiente del daño. Los parámetros k_δ , k_μ , k_λ , k_β afectan a la parte de la energía dependiente del daño en cada término. El coeficiente α afecta a la densidad de energía D^2 atribuida directamente al daño; el quinto término puede interpretarse como la energía de formación del daño mientras que el último término se refiere a la energía de rotación del vector daño. Posteriores trabajos de este autor en esta línea se han desarrollado hasta muy recientemente [VÁN / VÁSÁRHELYI, 2010].

Un modelo como el desarrollado en este trabajo permite la introducción de hipótesis micromecánicas bajo las que determinar el valor de los diez parámetros considerados. El

tensor de tensión se obtendría por diferenciación de la expresión (2.3.3.59) respecto al tensor de deformación, obteniéndose

$$\begin{aligned} \sigma = & (\delta + k_\delta D^2)I + (2\mu + k_\mu D^2)\varepsilon + (\lambda + k_\lambda D^2)I_1 I \\ & + (\beta + k_\beta I_1)D \times D + k_\beta (D \circ \varepsilon \circ D)I + \\ & + \frac{\gamma}{2}(D \times \varepsilon \circ D + D \circ \varepsilon \times D) \end{aligned} \quad (2.3.3.60)$$

donde I es el tensor identidad y el símbolo \times indica un producto tensorial, como generalización de la ecuación (2.3.3.49) considerando el daño.

Esta misma línea metodológica se ha desarrollado en numerosos trabajos. Permiten una aproximación micromecánica al modelo continuo. Se suele también introducir como función de estado la densidad de entalpía libre (o densidad de energía de Gibbs), que adopta como variable de estado las tensiones. Así, a modo de ilustración, [SHAO / RUDNICKI, 2000], introducen una densidad de entalpía libre en un modelo que considera daño anisótropo mediante un tensor de segundo orden D ,

$$\begin{aligned} g = & \frac{1+\nu}{2E} Tr(\sigma \cdot \sigma) - \frac{\nu}{2E} I_1^2 + a_2 Tr(\sigma \cdot \sigma \cdot D) + \\ & + a_3 I_1 Tr(\sigma \cdot D) + a_4 Tr(D) Tr(\sigma \cdot \sigma) \end{aligned} \quad (2.3.3.61)$$

donde los valores del coeficiente de Poisson y el módulo de Young se refieren a los valores en el material no dañado y los parámetros a_2 , a_3 y a_4 son propios del material.

La definición de una densidad de energía o entalpía libres no son necesarias, especialmente si únicamente se está buscando un criterio de fallo. Así, una relación entre deformaciones y tensiones en un modelo anisótropo de daño se introduce en [LITEWKA / SZOJDA, 2004], de la forma

$$\varepsilon = -\frac{\nu}{E} I_1 I + \frac{1+\nu}{E} \sigma + a((D \circ \sigma) \cdot I + D I_1) + 2b(\sigma \cdot D + D \cdot \sigma) \quad (2.3.3.62)$$

donde los parámetros a y b se determinan experimentalmente para cada material y D es el tensor de segundo orden propio del daño en un modelo anisótropo.

En cualquier caso, la introducción de la variable de daño como variable interna permite, mediante el formalismo de la termodinámica irreversible, obtener la evaluación del crecimiento del daño, a través de la introducción de potenciales disipativos, procedimiento que se analizará en el siguiente apartado.

2.3.3.8 Potencial disipativo de daño.

El primer principio de la termodinámica, puede expresarse también en la forma

$$\dot{u} = \sigma \circ \dot{\varepsilon} + \dot{q} \quad (2.3.3.63)$$

donde el punto indica la derivada temporal, siendo por tanto \dot{q} la variación temporal de la densidad de calor en un punto, por lo que puede escribirse de la forma

$$\dot{u} = \sigma \circ \dot{\varepsilon} + r - \vec{\nabla} \bar{q} \quad (2.3.3.64)$$

donde r representa la variación temporal de la producción local de calor y \bar{q} el vector flujo de calor. Por otra parte, se admite ahora que la función densidad de energía interna en un punto es función del estado de deformación en ese punto, de la entropía y de un conjunto de variables internas. Para una mayor simplicidad formal se supondrá una única variable escalar interna D , es decir, $u = u(\varepsilon, s, D)$. No se consideran en este punto deformaciones plásticas; la generalización de los procedimientos expuestos en este punto a deformaciones elasto-plásticas será inmediata y se expondrá en el siguiente apartado.

El segundo principio de la termodinámica puede escribirse de la forma,

$$\Phi = T \cdot \dot{s} - \dot{q} - \frac{\vec{\nabla} T}{T} \bar{q} \geq 0 \quad (2.3.3.65)$$

en la que Φ se denomina tasa o velocidad de producción de entropía, concepto central en el desarrollo de la denominada Termodinámica Clásica Irreversible.

Considerando las ecuaciones (2.3.3.63) y (2.3.3.65), el segundo principio adoptaría la forma

$$\Phi = T \cdot \dot{s} + \sigma \circ \dot{\varepsilon} - \dot{u} - \frac{\vec{\nabla} T}{T} \bar{q} \geq 0 \quad (2.3.3.66)$$

Considerando ahora la variación de la energía interna u en función de la variación de la energía libre f , (2.3.3.66) toma la forma conocida como desigualdad de Clausius-Duhem

$$\Phi = \sigma \circ \dot{\varepsilon} - \dot{f} - s \cdot \dot{T} - \frac{\vec{\nabla} T}{T} \bar{q} \geq 0 \quad (2.3.3.67)$$

En (2.3.3.67), la igualdad sólo se produce en un proceso reversible; en general, por tanto, la variación de energía libre en cualquier proceso ha de verificar la desigualdad anterior. Ha de tenerse en cuenta que únicamente se ha considerado como trabajo el elástico, de acuerdo con (2.3.3.63), reversible por definición; es posible extender la ecuación (2.3.3.67) involucrando otras contribuciones energéticas de carácter reversible. En (2.3.3.67), la energía libre es función de la deformación, de la temperatura y de la variable de daño. Su variación temporal viene dada, por tanto, por

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \circ \dot{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} \quad (2.3.3.68)$$

Se define en este punto la fuerza generalizada conjugada de la variable de daño D , en el sentido termodinámico de este término como

$$Y = -\frac{\partial f}{\partial D} \quad (2.3.3.69)$$

que recibe el nombre de tasa de disipación de energía por daño, y tiene dimensiones de energía al ser la variable de daño D adimensional. Teniendo en cuenta además que $s = -\frac{\partial f}{\partial T}$,

se concluye que

$$\dot{f} = \sigma \circ \dot{\varepsilon} - Y\dot{D} - s\dot{T} \quad (2.3.3.70)$$

Como se indicará posteriormente, la expresión puede adoptar diferentes formas de acuerdo a las variables internas consideradas que, en este punto, únicamente se han reducido a la variable escalar de daño. Sustituyendo (2.3.3.70) en (2.3.3.67) se obtiene la desigualdad de Clausius-Duhem para procesos de deformaciones elásticas locales con una variable escalar de daño,

$$\Phi = Y\dot{D} - \frac{\bar{\nabla}T}{T}\bar{q} \geq 0 \quad (2.3.3.71)$$

que, admitiendo la hipótesis usual de distribución uniforme de temperatura, tomaría la forma

$$\Phi = Y\dot{D} \geq 0 \quad (2.3.3.72)$$

La ecuación (2.3.3.72) indica que la tasa de disipación de la energía por daño multiplicada por la velocidad de crecimiento de la variable de daño ha de adoptar valores positivos o nulos. La ecuación (2.3.3.70) define implícitamente la velocidad de crecimiento del daño como función de la tasa de disipación Y . La ecuación (2.3.3.72) no determina la evolución del daño, que exige la adopción de una nueva hipótesis termodinámica, denominada generalmente como principio de máxima disipación.

Una clara exposición de este principio en las teorías de daño puede encontrarse, por ejemplo, en [NGUYEN / TRIANTAFYLIDIS, 1989]. Se adopta la hipótesis de que la tasa de disipación de energía Y permanece dentro o en límite de una superficie convexa definida mediante la desigualdad $F(Y) \leq 0$. El principio de máxima disipación establece entonces que la tasa de producción de entropía es la máxima para todas las posibles tasas de disipación de energía:

$$(Y - Y^*)\dot{D} \geq 0 \quad \forall Y^* \in C \quad C \equiv \{Y^* / F(Y^*) \leq 0\} \quad (2.3.3.73)$$

Se admite además una dependencia débil de F respecto a Y , con lo que la ecuación (2.3.3.73) es equivalente a:

$$\dot{D} = \lambda \frac{\partial F}{\partial Y} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \lambda = 0 & \text{si } F(Y) < 0 \\ \lambda \geq 0 & \text{si } F(Y) = 0 \end{cases} \quad (2.3.3.74)$$

Las ecuaciones (2.3.3.74), denominadas también como ecuaciones de Kuhn-Tucker, pueden expresarse en la forma

$$\dot{D} = \lambda \frac{\partial F}{\partial Y} \quad \lambda \geq 0 \quad F(Y) \leq 0 \quad \lambda F(Y) = 0 \quad (2.3.3.75)$$

Las ecuaciones (2.3.3.74) o (2.3.3.75) se complementan con la condición de contorno

$$\dot{Y}D = 0 \Rightarrow \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Y} \dot{Y} = \dot{\lambda} \dot{F} = 0 \quad (2.3.3.76)$$

Las ecuaciones (2.3.3.74)-(2.3.3.76) determinan el modelo usualmente aplicado en la evolución de la variable de daño. Pueden considerarse una extensión del modelo de deformación plástica a otras variables internas (en este caso, la variable de daño) que provocan efectos disipativos. Estos modelos han recibido el nombre genérico de *GSM* (*Generalized Standard Models*) y se deben sustancialmente a [HALPHEN / NGUYEN, 1975]. Han sido posteriormente generalizados a modelos dependientes de la velocidad de deformación o de daño, principalmente a través de [GERMAINE, 1973], y [GERMAINE / NGUYEN / SUQUET, 1983], de tal forma que la velocidad de daño puede formalmente obtenerse a través de una función potencial $\phi^D(Y)$,

$$\dot{D} = -\frac{\partial \phi^D}{\partial Y} \quad (2.3.3.77)$$

que, bajo las condiciones en que (2.3.3.77) puede formularse, verifica la condición básica (2.3.3.72).

En general, los modelos de potencial disipativo de daño han sido formulados en un contexto elasto-plástico y desde la aplicación a diferentes tipos de medios. Como ejemplo, el potencial definido por [LEMAITRE, 1985],

$$\phi^D = \frac{S}{a+1} \left(\frac{-Y}{S} \right)^{a+1} \dot{\varepsilon}^p \quad (2.3.3.78)$$

donde S y a son parámetros del material y $\dot{\varepsilon}^p$ es la deformación plástica uniaxial, conduce a la ley de crecimiento

$$\dot{D} = \left(\frac{K^2}{2ES} (\dot{\varepsilon}^p)^{2/M} \right)^a \dot{\varepsilon}^p \quad (2.3.3.79)$$

en la que K y M son los parámetros de Ramberg-Osgood definidos a través de la relación

$$\varepsilon = \left(\frac{\sigma}{E} \right) + \left(\frac{\sigma}{K} \right)^M \quad (2.3.3.80)$$

donde ε es la deformación total, suma de componentes elásticas y plásticas y E es el módulo elástico sin dañar. En esta línea han sido introducidos diferentes potenciales por [CHOW / WEI, 1991], [CHABOCHE, 1988], [HANSEN / SCHREYER, 1994], [TIE-JUN, 1992], [WOO / LI, 1992].

Considérese un aspecto esencial en estos modelos: el potencial de daño $\phi^D(Y)$ puede ser formulado sin necesidad de admitir explícitamente una expresión determinada para la densidad de energía interna o de energía libre. En otros trabajos, [HAMIEL et al, 2004], [DEGROOT / MAZUR, 1962], [MALVERN, 1969], se establece un modelo más sencillo: se

admite que la evolución de la variable de daño D debe venir relacionada con la tasa de disipación de energía a través de una relación de la forma

$$\dot{D} = -C \cdot \frac{\partial f}{\partial D} = C \cdot Y \quad (2.3.3.81)$$

en la que el coeficiente C es una función positiva de las variable de daño para un estado de deformación dado y f es la densidad de energía libre. Estos últimos procedimientos sí exigen la adopción de hipótesis en la formalización de una expresión para la densidad de energía libre, de acuerdo a la expresión (2.3.3.81).

Se ha descrito en este apartado el contexto termodinámico general bajo el que se formulan los potenciales disipativos de daño mediante los cuales puede llegar a establecerse una ecuación cinemática o de evolución del daño. Este formalismo permite la incorporación de más términos disipativos en la tasa de producción de entropía Φ y de su acoplamiento con el modelo de daño. De hecho, los modelos de daño se han desarrollado considerando generalmente plasticidad o viscosidad. Se describen así modelos viscoelásticos, viscoplásticos o elastoplásticos acoplados con modelos de daño y para diferentes tipos de materiales. Es muy amplia la investigación llevada a cabo en la última década sobre este aspecto; los potenciales adoptados son diversos y, frecuentemente, establecidos con carácter semiempírico para la descripción de procesos que afectan a materiales o estructuras de materiales específicos. A modo de ilustración, un modelo elastoplástico de daño, acoplado con fricción interna que describe el rozamiento entre superficies dañadas ha sido introducido en [DESMORAT / RAGUENEAU, 2005], en el que la evolución de la variable de daño viene descrita por la ecuación

$$\dot{D} = \left(\frac{Y}{S} \right)^s \dot{\varepsilon}^\pi \quad (2.3.3.82)$$

donde S y s son parámetros constitutivos del material (considérese las semejanzas formales con la expresión (2.3.3.78)) y $\dot{\varepsilon}^\pi$ representa la variación temporal de la deformación por fricción. En la siguiente sección se establecerá genéricamente el marco teórico bajo el que abordar los modelos acoplados de elasticidad, plasticidad y daño, objeto esencial de las investigaciones de fatiga de bajo y alto ciclaje.

2.3.3.9 Modelos locales elastoplásticos acoplados con modelos de daño.

En términos genéricos, los modelos de acoplamiento elástico y plástico con el daño, se ajustan a tres hipótesis fundamentales. En primer termino, se admite que el estado de deformación puede descomponerse en una deformación elástica y otra plástica

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

si bien, aunque no es usual en modelos de daño, se introduce en algunos trabajos, [CAROL / WILLIAM 1997], [YAZDANI / SCHREYER, 1990], una deformación debida al daño, de forma que la deformación total adopta la expresión

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^d \quad (2.3.3.83)$$

La segunda hipótesis se establece en la definición de la densidad de energía interna o energía libre, si bien, como ya se ha indicado, esta hipótesis puede obviarse cuando se pretende analizar tan sólo condiciones límites derivadas del crecimiento de la variable de daño. Las expresiones de la densidad de energía libre son diversas, como lo son la selección de las variables de estado. Una expresión general, que asume la hipótesis de deformación debida al daño, puede obtenerse del trabajo de [IBRAHIMBEGOVIC et al, 2003], en la que la densidad de energía libre se descompone en energía elástica, plástica y de daño y un término energético dependiente de la deformación por daño y de la propia variable de daño,

$$f(\varepsilon, \varepsilon^p, \varepsilon^d, D, \xi^p, \xi^d) = \frac{1}{2} \varepsilon^e \circ C \circ \varepsilon^e + f^d(\varepsilon^d, D) + \Xi^p(\xi^p) + \Xi^d(\xi^d) \quad (2.3.3.84)$$

donde las variables ξ^p, ξ^d son deformaciones acumulativas plásticas y de daño, respectivamente. La expresión equivalente a (2.3.3.84) en la que no se considera la deformación por daño como variable de estado puede observarse, por ejemplo, en [BORINO et al, 1999],

$$f = f^e + \Xi^p(\xi^p) \quad (2.3.3.85)$$

donde la densidad de energía elástica adopta la forma cuadrática usual dependiente de la deformación elástica, donde la dependencia con la variable de daño se establece en el tensor de rigidez,

$$f^e = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon^p) \circ C(D) \circ (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (2.3.3.86)$$

Una expresión semejante a (2.3.3.85) subyace en la definición de la densidad de energía como suma de los términos de densidad de energía elástica y de energía plástica, este último como forma cuadrática de la deformación plástica, [CHABOCHE, 2003],

$$f = f^e + f^p \quad (2.3.3.87)$$

$$f^p = \frac{1}{2} \varepsilon^p \circ C^p(D) \circ \varepsilon^p \quad (2.3.3.88)$$

expresión en la que el acoplamiento entre plasticidad y daño se establece de forma análoga al del comportamiento elástico y el daño, dado por (2.3.3.86).

Los modelos formulados, en cuanto a la definición de la densidad de energía libre, oscilan entre dos procedimientos metodológicos extremos; en un caso la dependencia con el daño de la energía elástica y plástica aparece implícita en las expresiones cuadráticas clásicas energéticas y, en el otro, esta dependencia se desliga de las expresiones clásicas introduciendo términos energéticos adicionales y, ocasionalmente, términos de deformación exclusivamente dependientes del daño.

En cualquier caso, la introducción del comportamiento plástico supone siempre la consideración de la energía interna como función de la deformación plástica, de tal forma que su fuerza generalizada correspondiente sería

$$f = f(\varepsilon, \varepsilon^p, D) \Rightarrow \sigma^p = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p} \quad (2.3.3.89)$$

La tercera hipótesis adoptada se refiere al principio de máxima disipación plástica. La generalización de la expresión (2.3.3.72) introduciendo la disipación por plasticidad es

$$\Phi = \sigma^p \dot{\varepsilon}^p + Y \cdot \dot{D} \geq 0 \quad (2.3.3.90)$$

de modo que la generalización del principio de máxima disipación conduciría a

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}^p \frac{\partial F}{\partial \sigma^p} \quad \dot{\lambda}^p \geq 0 \quad F(\sigma^p) \leq 0 \quad \dot{\lambda}^p F(\sigma^p) = 0 \quad (2.3.3.91)$$

como ecuación que gobierna la evolución de la deformación plástica, en el modelo de deformaciones independientes de la velocidad. De forma semejante a la introducida en el caso del daño, puede definirse un potencial plástico ϕ^p del que se deriva la ley de crecimiento de la deformación plástica,

$$\dot{\varepsilon}^p = - \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma^p} \quad (2.3.3.92)$$

Las expresiones anteriores han sido indicadas aquí desde un punto de vista integrador de las diferentes aproximaciones desarrolladas en el acoplamiento de plasticidad y daño. Por ello, desde la finalidad y límites que atañen a este trabajo, se ha prescindido de la necesaria formalización matemática existente en los desarrollos que han dado lugar a las actuales formas de aplicación del principio de máxima disipación por daño y plasticidad. Considérese también que las formas bajo las que puede presentarse estos desarrollos difieren de acuerdo a las hipótesis que se adoptan referidas, principalmente, a las expresiones de las densidades de energía. Un desarrollo riguroso del contexto formal de la plasticidad puede encontrarse, por ejemplo, en [POLIZZOTTO, 1998], en [CHABOCHE, 2003] o en [IBRAHIMBEGOVIC et al, 2003].

Los contextos en que se ha desarrollado esta metodología son muy diversos, de acuerdo al tipo de proceso o material que se esté estudiando y, a menudo, incorporan elementos semiempíricos necesarios en su ajuste con datos experimentales. Así, en [LEMAITRE et al, 1999], se analiza la evolución del daño en procesos de fatiga a bajo y alto ciclaje. En la fatiga a bajo ciclaje, dado que puede considerarse que la aparición de microgrietas se produce en un contexto gobernado por deformación plástica a nivel mesoscópico, existe un fuerte acoplamiento entre el daño y la deformación plástica, entendida ésta en su contexto clásico. Obviando la definición de una densidad de energía libre, se postulan los valores de la tasa de disipación de energía por daño Y , y de la velocidad de crecimiento de daño,

$$\dot{D} = \left(\frac{Y}{S}\right)^s \dot{\xi}^p \quad \xi^p \geq \xi_D^p \quad (2.3.3.93)$$

$$Y = \frac{\sigma_y^2 R_v}{2E(1-D)^2} \quad (2.3.3.94)$$

$$R_v = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_y}\right)^2 \quad (2.3.3.95)$$

$$\xi_D^p = \varepsilon_D^p \cdot \frac{\sigma_u - \sigma_f}{\sigma_y - \sigma_f} \quad (2.3.3.96)$$

expresiones en las que ξ^p es la deformación plástica acumulada y ξ_D^p el umbral mínimo para la deformación plástica a partir del que se produce daño. Este umbral mínimo, de acuerdo a (2.3.3.96) depende de la deformación plástica límite para la aparición de daño, ε_D^p , ponderado por el cociente de la diferencia entre las tensiones última y límite y la diferencia entre la tensión equivalente de Von Mises y la tensión límite. A su vez, la ecuación (2.3.3.94) define la tasa de disipación de energía por daño en función de la tensión equivalente de Von Mises, el módulo de Young, la variable de daño y la denominada función de triaxialidad, R_v , definida en (2.3.3.95) en términos del módulo de Poisson y el cociente entre las tensiones hidrostática y equivalente de Von Mises.

En este trabajo también se describe la evolución de daño en un proceso de fatiga de alto ciclaje, en el que no se aprecian a nivel mesoscópico deformaciones plásticas, por lo que se recurre al uso de deformaciones y tensiones microscópicas, obtenidas por procedimientos clásicos de homogeneización, y recurriendo a procedimientos micromecánicos. Sin embargo, la ecuación de evolución es semejante a (2.3.3.93),

$$dD = \left(\frac{Y^\mu}{S}\right)^s d\xi^\mu \quad \xi^\mu \geq \xi_D^p \quad (2.3.3.97)$$

donde el súper-índice μ hace referencia a los valores obtenidos mediante homogeneización de procesos micromecánicos.

2.3.3.10 Modelos no locales elásticos o elastoplásticos acoplados con modelos de daño.

En este apartado se abordará el estudio de las extensiones no locales en modelos elásticos o elastoplásticos con daño desde el interés metodológico que estas aproximaciones puedan presentar y, muy especialmente, las que se sitúen en el esquema termodinámico que se ha expuesto en los puntos anteriores, que se considera adecuado para el desarrollo de este trabajo. Por ello, no se describirán con amplitud estos modelos sino, tan sólo, sus aportaciones metodológicas esenciales. Una ilustrativa extensión no local del modelo elástico acoplado con el daño modelizado mediante la variable escalar de daño D ha sido expuesta por [PEERLINGS et al, 2004], donde se generaliza la densidad de energía libre local con daño mediante la expresión

$$f(\varepsilon, \bar{\varepsilon}, D) = \frac{1}{2}(1-D)\varepsilon \circ C \circ \varepsilon + \frac{1}{2}(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \circ \bar{C}_0 \circ (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) + \frac{1}{2}(\bar{\nabla} \bar{\varepsilon}) \circ \bar{C}_1 \circ (\bar{\nabla} \bar{\varepsilon}) \quad (2.3.3.98)$$

en la que a la densidad de energía libre clásica dañada (primer término), se le añade un segundo término dependiente de una nueva variable interna $\bar{\varepsilon}$ que no es considerada como un valor medio, propio de una teoría no local de carácter integral, sino como una nueva variable interna, responsable de las desviaciones no locales de la velocidad de generación de daño. El tensor \bar{C}_0 tiene el mismo carácter que el tensor de rigidez, de tal forma que este segundo término se interpreta como una desviación respecto a la energía local. El último término depende del gradiente de la deformación $\bar{\varepsilon}$ y de un tensor de sexto orden y representa la contribución no local dependiente de la variación con la posición de la deformación $\bar{\varepsilon}$. La expresión (2.3.3.98) puede ser simplificada mediante la introducción de dos parámetros escalares h , de dimensión equivalente al módulo de Young, y l , de dimensión de longitud, admitiendo una forma proporcional a la identidad para los nuevos tensores introducidos,

$$f(\varepsilon, \bar{\varepsilon}, D) = \frac{1}{2}(1-D)\varepsilon \circ C \circ \varepsilon + \frac{1}{2}h(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 + \frac{1}{2}hl\|\bar{\nabla} \bar{\varepsilon}\|^2 \quad (2.3.3.99)$$

En este trabajo, se obtiene una tasa de producción de entropía dada por la ecuación (2.3.3.72) y una tasa de disipación de energía por daño Y definida por

$$Y = \frac{1}{2}\varepsilon \circ C \circ \varepsilon \quad (2.3.3.100)$$

de acuerdo con la relación general (2.3.3.69).

Como se observa, se trata éste de un modelo simple, acorde con el formalismo termodinámico común a los actuales desarrollos en este campo, que trata el efecto no local sobre el daño, y esta es su principal aportación, mediante la introducción de una nueva variable interna, a diferencia de los modelos clásicos no locales, que introducen valores medios integrales de las variables de estado. Una aproximación metodológica diferente ha sido desarrollada en [SANTAOJA, 2000]. El carácter no local se limita a la variable de daño, introduciendo su gradiente como una de las variables de estado de la densidad de energía libre,

$$f = f(\varepsilon - \varepsilon^p, D, \bar{\nabla} D, T) = \frac{1}{2}(1-D)(\varepsilon - \varepsilon^p) \circ C \circ (\varepsilon - \varepsilon^p) + \frac{k}{a}(\bar{\nabla} D)^2 \quad (2.3.3.101)$$

donde ε es la deformación total y ε^p la deformación inelástica, k es una constante y a un parámetro del material. El conjunto de fuerzas generalizadas relativas a estas variables son

$$\sigma = \frac{\partial f}{\partial(\varepsilon - \varepsilon^p)} \quad Y = -\frac{\partial f}{\partial D} \quad \bar{\zeta} = -\frac{\partial f}{\partial(\bar{\nabla} D)} \quad (2.3.3.102)$$

La tasa de producción de entropía viene dado ahora añadiendo el término correspondiente a la nueva variable introducida,

$$\Phi = \sigma \circ \dot{\varepsilon}^p + Y \cdot \dot{D} + \bar{\zeta} \cdot \bar{\nabla} \dot{D} \geq 0 \quad (2.3.3.103)$$

Siguiendo un esquema formal absolutamente similar al desarrollado para teorías locales, es posible introducir una función potencial ϕ del que deriven las derivadas temporales de las variables de estado:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad \dot{D} = -\frac{\partial \phi}{\partial Y} \quad \bar{\nabla} \dot{D} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}} \quad (2.3.3.104)$$

La ecuación (2.3.3.103) representa la desigualdad de Clausius-Duhem con un gradiente de daño. De las dos últimas ecuaciones, (2.3.3.103)-(2.3.3.104), se inferiría la condición para la función potencial

$$\bar{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial Y} = -\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}} \quad (2.3.3.105)$$

restricción que casi imposibilita la selección de una adecuada función potencial. En este trabajo se presenta una solución a este problema mediante la introducción de una fuerza generalizada alternativa definida por la relación

$$\eta = Y - \bar{\nabla} \bar{\zeta} \quad (2.3.3.106)$$

con la que la desigualdad de Clausius-Duhem adoptaría la forma

$$\Phi = \sigma \circ \dot{\varepsilon}^p + \eta \cdot \dot{D} \geq 0 \quad (2.3.3.107)$$

de forma que la ley de evolución del daño vendría ahora dada por la variación de una función potencial respecto a la nueva variable,

$$\dot{D} = -\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (2.3.3.108)$$

que remplazaría a (2.3.3.77) en el caso de admitir la influencia del gradiente del daño en su propia evolución temporal.

2.3.3.11 Conclusiones relativas a la modelización del daño

Se ha expuesto en los epígrafes de este apartado 2.3.3 los elementos básicos de la modelización del daño y de la evolución del proceso de fatiga. Así mismo, en los apartados 2.1 y 2.2 se han expuesto las principales modelizaciones de carácter semiempírico o empírico de la fenomenología observada en la fatiga de alto ciclaje. Se está, por tanto, ahora en condiciones de definir los elementos básicos de la modelización teórica del daño y de su evolución congruentes con la fenomenología de HCF descrita previamente.

Se han observado dos posibles modelizaciones de la evolución del daño, bajo diferentes orientaciones metodológicas. La primera de ellas se basa en postular una ecuación cinética de

daño, y la otra, en definir un potencial termodinámico para el proceso irreversible de la evolución de daño, introduciendo ambas una variable, escalar o tensorial de daño D . Estas dos líneas aparecen en los dos principales modelos actuales, micromecánicos y fenomenológicos, atendiendo a su vez a dos posibles enfoques, local o no local. Por ello, es necesaria una preliminar selección entre las diversas modelizaciones tratadas.

El planteamiento micromecánico, tanto local en base a [GURSON, 1977], y sus continuadores, como en su extensión no local, [REUSCH et al., 2003], u otras equivalentes a ésta, [LYAKHOVSKY et al, 1997], y [HAMIEL et al., 2004], expresiones (2.3.3.17)-(2.3.3.24), así como su implementación en los modelos locales de daño de variable vectorial del daño, considerada en los trabajos de [VÁN, 2001], y [SHAO / RUDNICKI, 2000], expresiones (2.3.3.59)-(2.3.3.61), no es, en principio, de interés bajo los objetivos que se pretenden, pues presenta cierta dependencia semiempírica de ajustes continuos, de tipo experimental o por simulación, además de que linda con el criterio microscópico, es decir, más alejado del planteamiento propiamente macroscópico de la Mecánica del Medio Continuo. Sin embargo, se considerará, como punto de comparación, en especial para la formulación de una densidad de energía libre, las expresiones (2.3.3.22) y (2.3.3.24).

Lo anterior parece implicar que la línea a seguir será la fenomenológica que, si bien es la que básicamente se adoptará, requiere sin embargo de puntualizaciones precisas.

Así, el planteamiento fenomenológico fuerte apuesta en la investigación en las últimas décadas, presenta aún cierta dependencia débil de la variable daño D , isotropa o anisótropa, con respecto al formalismo en el que se encuadre, lo que no deja de ser congruente, dada la abstracción implícita en la definición de esta variable (representa desde fallos en el material, impurezas e incrustaciones, hasta efectos tales como los debidos a descentramientos diferenciales de la posición de las cargas, ya que no están definidos ni determinados en ninguna otra variable); es decir, no se sabe – ningún autor lo menciona explícitamente- cuál es el grado de dependencia del daño en cada formulación presentada. Así se observa que la variable D , [KACHANOV, 1958], indistintamente en modelos locales o no locales, sin causa formal aparente se introduce como factor minorante de la tensión nominal, [RABOTNOV, 1968], (2.3.3.25)-(2.3.3.26), o en las diversas expresiones de la densidad de energía libre, ya sea como sumando en extensión no local, [REUSCH et al., 2003], (2.3.3.22), como factor individual del término debido a la energía elástica, [CORDEBOIS / SIDOROFF, 1979], (2.3.3.57), como término individual en [IBRAHIMBEGOVIC et al, 2003], (2.3.3.84), como factor que varía las constantes elásticas implícitas en la matriz de rigidez, [BORINO et al, 1999], (2.3.3.86), incluso en su análoga de plasticidad, [CHABOCHE, 2003], (2.3.3.87), o en cualquier otra hipótesis conjunta, de tipo gradiente o integral, [PEERLING et al., 2004], (2.3.3.98), o [SANTAOJA, 2000], (2.3.3.101).

En una primera reflexión de lo anterior se puede inferir que la ubicación formal de la variable de daño D , con diferente grado de influencia, en la formulación del proceso, afecta, o puede afectar, indistintamente a todas las variables, evidenciándose de esta forma la “deslocalización teórica efectiva” de la variable D de daño, o su carácter abierto a cualquier modelización.

Por otro lado, tal como se ha indicado, junto a la revisión del planteamiento fenomenológico expuesto es factible comentar dos aspectos clásicamente asentados en Mecánica del Medio Continuo y Fatiga. El primero de ellos, el más básico, es el concepto de tensión local convencional, ampliamente utilizado ante cargas estáticas, admitida como la tensión media del ensayo correspondiente, y extendida, u homogeneizada, a todo el material. Sin embargo, es

evidente que existen valores de tensión local inferiores a dicha tensión media, lo que combinando con el segundo aspecto referido a la fatiga, en especial la HCF, en la que se opera con valores inferiores a dicha tensión media, es factible pensar que dichas tensiones locales de valor inferior (en la que en su estado inicial no existía deformación aparente contabilizada) incidan en el inicio y posterior avance del deterioro por Fatiga (indistintamente de que algunos de sus puntos puedan detenerse en su evolución, por alguna causa subyacente, frente a otro punto del material), por concentración de tensiones.

Haciendo una salvedad más en cuanto al aspecto clásico de la Fatiga HCF, respecto al concepto de daño expuesto, es también posible considerar que en su formulación empírica clásica, [BASQUIN, 1910], en su ecuación (2.3.1.3.c), el coeficiente b , pendiente decreciente de la recta en *Log-Log*, lleva incluido implícitamente dicho concepto de daño, aún siendo una expresión local homogeneizada a toda la pieza.

Conjugando las anteriores conclusiones, es posible definir el marco posterior para estudiar un modelo macroscópico, es decir, en el contexto de la Mecánica del Medio Continuo, para la Fatiga HCF (materiales metálicos, isótropos y homogéneos) y la metodología de actuación en base a la siguiente definición e hipótesis iniciales:

1. Elasticidad Local: El estado tensional elástico de todo punto dependerá de su distribución aleatoria y, en principio, no de una influencia relevante de la tensión de los puntos adyacentes, refiriéndose exclusivamente al estado tensional local.
2. Modelo no plástico: El hecho de que la Fatiga HCF no muestre con carácter general deformaciones plásticas aparentes y que el margen o intervalo de tensiones aplicadas es inferior a las tensiones de fluencia aconsejan definir un modelo en el que no se aborden cuestiones específicas de acoplamiento estrictamente plástico.
3. Elección de la variable tensión elástica como variable de control del proceso de evolución de daño en HCF. Ello aparece justificado al menos por las dos razones siguientes: en primer término, se ajusta con mayor facilidad a la propia metodología experimental previa (Wöhler, Basquin) y, en segundo lugar, es evidente que la variable elástica de mayor variación en un proceso de Fatiga de HCF es la tensión y no la deformación, que transcurre sin apenas variaciones medias significativas en este proceso
4. Consecuentemente, la función termodinámica adecuada a la descripción de la fatiga HCF ha de ser la densidad de entalpía libre g
5. Los modelos presentados muestran una dependencia de la densidad de energía o entalpía con el daño D , bien en forma explícita, como términos adicionales a la expresión clásica en términos de los parámetros de Lamé o bien implícita en la matriz de rigidez C o la de flexibilidad H , adoptándose así la expresión clásica de la energía elástica en forma cuadrática. Ambas formulaciones son equivalentes; en principio, una expresión desarrollada en términos de los parámetros de Lamé puede permitir un mayor detalle en la forma de la dependencia, pero, en el contexto de la Fatiga HCF, puede que esta dependencia no sea relevante. En cualquier caso, no se han encontrado en este trabajo elementos determinantes de discriminación de una de ellas frente a la otra.

6. Por último, en este proceso de investigación, se tendrá como referente fundamental la teoría del potencial disipativo del daño, las tasas de disipación de energía y de producción de entropía, y la función de potencial disipativo por daño, en el contexto de la termodinámica irreversible, expuesta como el tratamiento más adecuado en este campo. La elección de un potencial de daño, y la correspondiente ecuación de evolución han de ser evaluadas, claramente, atendiendo a la regularidad observada en el contexto enunciado de la Fatiga de HCF.
7. Cuestionamiento de la elección de la variable D de daño, isótropo o anisótropo, por su carácter abierto, en una formalización teórica de la evolución de la fatiga en HCF.

2.4 Contribución a la formalización de la fenomenología de la Fatiga de Alto Ciclaje.

Los apartados previos de este capítulo muestran las dificultades esenciales que surgen en la configuración o definición de un marco teórico o formal que permita abordar el estudio de la evolución del daño en la fatiga de alto ciclaje. Tales dificultades en gran parte son las propias o inherentes a todo campo de conocimiento que aborde el comportamiento del medio continuo antes acciones externas o internas. Efectivamente, la modelización de procesos en el medio continuo que afectan a diversos tipos de acciones físicas (mecánica, térmica, electromagnética, especialmente) requieren actualmente de nuevas formulaciones de acoplamiento de tales interacciones (de forma absolutamente semejante a cómo se plantea el acoplamiento elástico o plástico con el daño) que son objeto actual de extensas y complejas investigaciones. Tales modelizaciones están fuertemente condicionadas por la especificidad del propio campo de investigación. Así, las hipótesis de que se parten en el tratamiento de la evolución del daño se formulan, en gran cantidad de casos, atendiendo a las propiedades específicas del material que se esté considerando, y su generalización, o extrapolación, a otras configuraciones experimentales no es, en absoluto, inmediata. Una dificultad adicional, también común en mayor o menor grado a todas las disciplinas que tratan con el medio continuo, pero que afectan especialmente al campo de estudio de este trabajo, la constituye el grado de validez de las hipótesis básicas del medio continuo que se pone en cuestión cuando el fenómeno estudiado viene también afectado por la composición, discontinua, del medio. Como se ha observado en los apartados previos de este capítulo, la generación del daño, íntimamente ligado a la fatiga, tiene, naturalmente, su origen en la estructura, microscópica, del material, pero su estudio requiere un tratamiento macroscópico, el propio de la mecánica del medio continuo. La generalización macroscópica de resultados propios de la estructura microscópica del medio debe requerir una metodología que, en el momento actual, no está definida. Esta tesis se sitúa en este campo e incide precisamente en esta dificultad. Pero, además, es necesario considerar que esta tesis también se sitúa, por la naturaleza de su objeto, en un campo interdisciplinar o, más estrictamente, inter-metodológico. Efectivamente, ha de considerar, paralelamente, resultados circunscritos al campo de la ingeniería con procedimientos y procesos situados en la física aplicada o, incluso, propios de la física teórica. Se ha podido constatar, y este ha sido el objeto de la exposición desarrollada en los apartados previos de este capítulo, por las razones anteriormente mencionadas, la inexistencia de este contexto teórico o formal al que referirse en este trabajo. La objetivación de los parámetros, mínimos pero necesarios, que han de gobernar el proceso de la fatiga, representa pues una primera complicación, a la que no ayuda la prisa “natural” de la industria por obtener avances significativos. Así, en palabras de [SHIGLEY / MISCHKE, 2002], *“los ingenieros utilizan la ciencia para resolver sus problemas si la ciencia está disponible. Pero disponible o no, el problema se debe resolver y cualquiera que sea la forma que tome la solución bajo estas condiciones se llama ingeniería”*.

El objetivo, pues, de este apartado, consiste en establecer el esquema teórico básico que servirá de marco de desarrollo de esta tesis. Para ello, se asumirá un conjunto mínimo de hipótesis, que se indicarán con la referencia **h#**, que se derivarán de las referencias teóricas o experimentales expuestas en los epígrafes anteriores. Tales hipótesis llevarán asociadas, por implicación, una serie de proposiciones o conclusiones que se indicarán, respectivamente, en la forma **p#**, indicando explícitamente la hipótesis y/o proposiciones en que se fundamentan. Las definiciones previas adoptadas se indicarán con la notación **D#**. Se expondrán estos resultados en forma de tabla, indicando expresamente la referencia a los apartados de los capítulos en que estos elementos formales se apoyan.

Epígrafe	D#	h#	p#	
1.3.2	D1: d			
			Se define como daño local la alteración de la continuidad y/o homogeneidad y/o isotropía del medio continuo en un punto y se mide a través de un índice de daño d cuyo valor nulo indica la inexistencia de daño local.	
	D2: ε_D	<p>$h1: \Delta d \geq 0$</p> <p>$h2: (\varepsilon \geq \varepsilon_D) \Leftrightarrow (\Delta d > 0)$</p>	<p>El daño local es una magnitud irreversible.</p> <p>La generación de daño local se produce si y sólo si el estado de deformación es igual o superior a un estado ε_D denominado límite de fatiga.</p>	
		$h3: F(t) \Rightarrow \sigma(t)$	Toda sollicitación externa $F(t)$ determina instantáneamente un estado local de tensiones $\sigma(t)$ en cada punto.	
			$p1: F_{cicl}(t) \Rightarrow \sigma_{cicl}(t)$	Toda sollicitación externa cíclica determina un estado local cíclico de tensiones en cada punto.
		$h4: \sigma_{cicl}(t) \Rightarrow \varepsilon(t)$		Un estado cíclico de tensiones locales determina un estado de deformación local no necesariamente cíclico.
			$p2: d = \sum_{i=1}^N \Delta d_i$	Bajo una sollicitación externa de N ciclos, el daño local d es la suma de las variaciones de daño local producidas en cada ciclo.
	D3: d_M	$h5: d \leq d_M$		El daño local en cada punto debe estar acotado superiormente por un valor, denominado daño local máximo .
	D4: MMC_A			$D1$ supone extender el campo conceptual y metodológico de la Mecánica del Medio Continuo admitiendo que las hipótesis de continuidad, homogeneidad e isotropía del medio no pueden aplicarse en grado absoluto (Mecánica del Medio Continuo Ampliada)
				$p3: \langle F_{cicl} \rangle \Rightarrow \langle MMC_A \rangle$
		$h6: \langle MMC_A \rangle \Rightarrow \langle \exists(\varepsilon_e, \varepsilon_p) \rangle$	Un medio continuo sometido a una sollicitación externa cíclica ha de ser considerado en el marco teórico de la Mecánica del Medio Continuo Ampliada.	
		$h7: (\varepsilon_e \geq \varepsilon_D) \Rightarrow (\Delta d_e > 0)$ $\varepsilon_p \Rightarrow (\Delta d_p > 0)$	El contexto teórico y formal en MMC de la deformación elástica o plástica es extendido a la MMC_A .	
D5: d_e, d_p			Se diferencian las variaciones de daño producidas por la deformación elástica y por la deformación plástica, y sus valores actuales d_e y d_p . Toda deformación plástica lleva asociado un incremento de daño.	

	$D6: \sigma_{arm} \equiv \sigma(t) = \sigma_m + \sigma_{a,0} \text{sen } \omega t$	$h8: \langle \sigma_{cicl} \rangle \equiv \langle \sigma_{arm} \rangle$		El análisis de la fatiga de materiales ante tensiones cíclicas se hace equivalente al análisis ante tensiones armónicas , con parámetros $\sigma_m, \sigma_{a,0}, \omega$
		$h9: \langle \varepsilon_{cicl} \rangle \Leftrightarrow \langle \varepsilon_e \rangle$		En un proceso de sollicitaciones externas cíclicas, las deformaciones son cíclicas si y sólo si tales deformaciones son elásticas.

Epígrafe	D#	h#	p#	
1.3.2	$D7: M$	$h10: \forall F(t), \forall P, Q \in M \quad d_{MP}(t) = d_{MQ}(t)$		En una muestra M sometida a un proceso cíclico de cargas $F(t)$ el daño máximo posible en cada punto es el mismo en cada instante.
	$D8: \sigma_u$			Se define como estado de tensión de rotura intrínseco el necesario para que se produzca la rotura del material en ausencia de generación de daño cíclico.
	$D9: \sigma_a(d)$			Se define como estado de tensión efectiva de rotura el necesario para que se produzca la rotura del material en un proceso cíclico de generación de daño.
		$h11: \partial_d \sigma_a(d) \leq 0$		La tensión efectiva de rotura es función decreciente del daño existente en cada punto de la muestra M .
	$D10: N$		$p4: d = d(N), \Delta d / \Delta N \geq 0$	En un proceso de sollicitación cíclica, el daño acumulado en cada punto es función creciente del número N de ciclos aplicados .
			$p5: \sigma_a(d) = \sigma_a(N), \Delta \sigma_a / \Delta N \leq 0$	El estado de tensión de rotura es función decreciente del número N de ciclos aplicados en un proceso de sollicitación cíclica.
		$h12: \exists \sigma_a(N)$		En el contexto de la $MIMC_A$ existe una única función que determina el estado de tensión efectiva de rotura en función del número de ciclos N en un proceso de sollicitación cíclica para una muestra M arbitraria. Esta función se denomina función de fatiga y a su representación superficie de fatiga .

$D11: C_w(N)$			Se define como C_w el conjunto de resultados experimentales que muestran la variación de la tensión efectiva unidimensional de rotura con el número N de ciclos en una muestra M arbitraria sometida a una carga cíclica $F(t)$ tipificados como curvas de Whöhler.
	$h13: \sigma_a(N) \in C_w(N)$		La función $\sigma_a(N)$ debe ajustarse al comportamiento estándar de la curva de Whöhler en el caso unidimensional.
	$h14: \sigma_a(N) = \sigma_{a,LC}(N \leq N_i) \cup \sigma_{a,HC}(N_i < N \leq N_D) \cup \sigma_{a,D}(N > N_D)$ $\sigma_{a,D}(N > N_D) = cte$		La función de fatiga se descompone en tres intervalos, denominados de bajo ciclaje, de alto ciclaje y de límite, este último constante.
	$h15: (\sigma_{a,LC}) \Rightarrow \langle \varepsilon_p \rangle \wedge ((\sigma_{a,HC}) \wedge (\sigma_{a,D})) \Rightarrow \langle \varepsilon_e \rangle$		La superficie de fatiga de bajo ciclaje actúa en el campo de deformaciones plásticas, la de alto ciclaje y la límite, deformaciones elásticas.
$D12: \sigma_a(N) \equiv \sigma_{a,HC}(N)$			El estudio de tensiones alternas queda limitado al campo de alto ciclaje.
		$p6: \sigma_a(N) \leq \sigma_D \Leftrightarrow \varepsilon \leq \varepsilon_D$	Una estado de tensión inferior al límite no genera daño
	$h16: d_M = 1$		El intervalo de variación de la función escalar de daño está acotada superiormente por un valor igual a la unidad.
		$p7: \sigma = \sigma_a(N) \Leftrightarrow d = 1$	Una tensión es igual a la efectiva de rotura si y sólo si el daño alcanza el valor 1.

Epígrafe	D#	h#	p#
2.2.1	$D13: V_F$		
		$h17: \{N, \sigma, \varepsilon, a\} = V_F$	Se define el conjunto mínimo V_F de variables necesarias para modelizar el proceso de fatiga de materiales en el marco de la MMC_A . El número de ciclos, el estado de tensión, el estado de deformación V_i , en su caso, la longitud de grieta componen V_F

	<p>D14: V_{HCF}</p>			<p>Se define el conjunto mínimo V_{HCF} de variables necesarias para modelizar el proceso de fatiga a alto ciclaje de materiales en el marco de la MMC_A.</p>
		<p>h18: $\{N, \sigma\} = V_{HCF}$</p>		<p>La modelización del proceso de fatiga a alto ciclaje debe realizarse a través de las variables N y σ</p>
	<p>D15: $\sigma_{a,0e}(N): \sigma_{a,0e}, \sigma_{D,0e}$</p>		<p>p8: $\sigma_{a,0e}(N) = \sigma_{a,0e}(N; \sigma_u, \sigma_{ai,0e}, \sigma_{D,0e})$</p>	<p>Todo material viene caracterizado por una única superficie límite estándar $\sigma_{a,0e}(N)$ que vendrá determinada por los tres parámetros tensionales $\sigma_u, \sigma_{ai,0e}, \sigma_{D,0e}$</p>
			<p>p9: $\sigma_{cicl} > \sigma_D \Rightarrow \Rightarrow \exists! N / \sigma_{cicl} = \sigma_a(N; \sigma_u, \sigma_i, \sigma_D)$</p>	<p>Todo estado de tensión cíclico superior al límite de fatiga provocará rotura en un proceso cíclico.</p>
			<p>p10: $\sigma_{cicl} < \sigma_D \Rightarrow \Rightarrow \forall N \sigma_{cicl} < \sigma_a(N; \sigma_u, \sigma_i, \sigma_D)$</p>	<p>Todo estado de tensión cíclico inferior al límite de fatiga no podrá provocar rotura en un proceso cíclico indefinido.</p>
<p>2.2.2</p>	<p>D16: $C(\sigma_{a,0e})$</p>			<p>Se define un conjunto $C(\sigma_{a,0e})$ de coeficientes modificadores de la superficie límite estándar de cada material.</p>
	<p>D17: $C_{carga}, C_{superficie}, C_{tamaño}$: K_f</p>	<p>h19: $C(\sigma_{a,0e}) = \{C_{i,j}, C_{D,j}, K_f\}$ $\wedge \forall j, 0 < C_{i,j}, C_{D,j} \leq 1$</p>		<p>Los coeficientes modificadores son, usualmente, C_{carga}, $C_{superficie}$, $C_{tamaño}$. De forma independiente, el factor de concentración de tensiones a fatiga, K_f.</p>
	<p>D18: $C_r = [C_{r1}, C_{rD}]$ = $[\Pi_j C_{i,j}, \Pi_j C_{D,j}]$</p>			<p>Se define el coeficiente modificador global.</p>
		<p>h20: $\sigma_{ai,0e} = f_{exp}^{i,0e} \cdot \sigma_u, f_{exp}^{i,0e} \leq 1$</p>		<p>La amplitud de tensión estándar de inicio HCF es función de la tensión de rotura (generalmente una constante)</p>
		<p>h21: $\sigma_{D,0e} = f_{exp}^{D,0e} \cdot \sigma_u, f_{exp}^{D,0e} < 1$</p>		<p>La amplitud de tensión límite HCF es función de la tensión de rotura σ_u (generalmente una constante)</p>

		$h22: \sigma_{a,o}(N) = C_r \cdot \sigma_{a,oe}(N)$ $\sigma_{ai,0} = C_{ri} \cdot \sigma_{ai,0e}$ $\sigma_{D,0} = C_{rd} \cdot \sigma_{D,0e}$			Las tensiones efectivas de rotura en una muestra se obtienen aplicando el coeficiente modificador global a las tensiones efectivas estándares de rotura, definidas al inicio y final del proceso HCF.
	D19: $VA(\sigma_{arm})$				Se define el conjunto de variables de la sollicitación armónica

Epigrafe	D#	h#	p#		
2.2.2			p11: $\{\sigma_m, \sigma_a, \omega\} = VA(\sigma_{arm})$		Toda sollicitación armónica se caracteriza por la pulsación ω , la tensión media σ_m y la amplitud de tensión σ_a .
		h23: $\partial_{\omega} \sigma_a(N) = 0$			La superficie límite es independiente de la frecuencia.
		h24: $\sigma_m^n > 0 \Rightarrow \partial_{\sigma_m}(\sigma_D) \leq 0$			El límite de fatiga decrece con esfuerzos medios normales de tracción crecientes.
		h25: $\sigma_m^n < 0 \Rightarrow \partial_{\sigma_m}(\sigma_D) \approx 0$			El límite de fatiga no se modifica con esfuerzos medios normales de compresión.
		h26: $\sigma_n^t < \sigma_{fi}^t \Rightarrow \partial_{\sigma_m}(\sigma_D) \approx 0$			El límite de fatiga no se modifica con esfuerzos tangenciales medios inferiores a la tensión tangencial de fluencia.
	D20: $\{\sigma_{cicl}\}_i$				Bloque de tensiones cíclicas caracterizadas por una determinada amplitud de tensión
	D21: d_i, d_{i0}				Daño acumulado por la aplicación de un bloque de tensiones cíclicas de amplitud de tensión. Daño inicial de la pieza, generalmente escogido como nulo
		h27: $d_i + d_j \neq d_j + d_i$			El daño acumulado es dependiente del orden de aplicación de bloques de tensiones cíclicas (el daño acumulado no es lineal si las amplitudes de las tensiones cíclicas aplicadas difieren entre sí).

	$D22: [\sigma_D]$	$h28: \sigma_D \in [\sigma_D]$			El límite de fatiga puede alterarse por aplicación de bloques cíclicos de tensión alterna de valor próximo al límite nominal de fatiga en un intervalo del límite de fatiga .
2.3.1				$p12: \sigma_a^{n,t}(N) = \sigma_a^{n,t} [C_r \cdot \sigma_{a,0e}^{n,t}(N; k_r), \sigma_m^{n,t}]$	La modelización de fatiga de alto ciclaje por tensiones normales o tangenciales unidireccionales considerará como elementos correctores a la superficie límite estándar los factores coeficiente modificador global, factor de concentración de tensiones y tensión media.
	$D23: \sigma_{cicl} = \sigma_{ija}$				Se generaliza el análisis tensional cíclico a estados de tensión multiaxial cíclicos, representados por su tensor de amplitudes de tensión $\sigma_{ija} (i, j = 1, 2, 3)$
	$D24: \mathfrak{S}(\sigma)$	$h29: \exists \mathfrak{S}(\sigma) / \forall N$ $\mathfrak{S}(\sigma) = \mathfrak{S}(\sigma_{ija}) = \mathfrak{S}(\sigma_{ia}) = \mathfrak{S}(l_{ia}) \equiv \sigma_a^{n,t}(N)$		$p13: \mathfrak{S}(\sigma) \leq \sigma_D, \forall N$	El estado multiaxial cíclico puede ser analizado mediante un criterio de tensión equivalente, congruente escalarmente con su referente experimental uniaxial $\sigma_a^{n,t}(N)$, según una función de transformación $\mathfrak{S}(\sigma): R^3 \rightarrow R$, invariante al sistema de referencia en todo ciclo N
2.3.2	$D25: dw$				La modelización de fatiga de alto ciclaje en el ámbito cíclico multiaxial es acorde a considerar un criterio de fatiga, de tensión equivalente $\mathfrak{S}(\sigma)$, que expresa la superficie límite de fatiga
	$D26: n, n_i, N_i, d_{i0}$ $f_n(n_i / N_i) = d_i$	$h30: \exists f_n(n_i / N_i) = \int_{d_{i0}}^{d_i} dw$			Diferencial de trabajo neto o absorbido durante el proceso de fallo
					Se define para cualquier bloque-i una función de daño acumulativo f_n , independientemente de su amplitud de tensión, de variable principal la razón n_i / N_i , cociente entre el número de ciclos realizados y el número final de ciclos hasta rotura, igual al incremento del daño neto, a partir del instante considerado como inicial.

				<p>El daño acumulativo total D, por extensión natural de p2 al conjunto de n-bloques, es la suma del daño acumulativo de cada bloque-i cíclico, acorde con la homogeneidad de la función f_n definida en D26</p> <p>El incremento del daño neto es función de los parámetros: w daño instantáneo, $\psi \equiv \sigma_a^{n,t}(N)$ o experimental, n ciclos y su incremento dn, y $p(\sigma_f, \sigma_u, \varepsilon_f, \dots)$ referente a alguna propiedad del material.</p>
			$h31: D = \sum_{i=1}^n d_i$	$p14: dw = F(w, \psi, n, dn; p)$
2.3.3			$h32: W = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^t(x) \varepsilon(x) dx$	<p>En el proceso de inicio y generación de fatiga en procesos de alto ciclaje se adoptará un modelo de elasticidad lineal.</p>
	$D28: g = g(\sigma_{ij}, T)$		$h33: \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right)_T = -\varepsilon_{ij}$	<p>El formalismo termodinámico adoptado en el estudio de la HCF adoptará como variable de control la tensión efectiva y como función termodinámica la densidad de entalpía libre. El tensor de deformaciones tiene el carácter de fuerza generalizada.</p>
			$h34: \Phi = -\dot{\varepsilon} \sigma_D \geq 0$	<p>El potencial disipativo en la generación de daño en HCF no incluye términos adicionales correspondientes a una variable interna de daño independiente de la tensión elástica efectiva.</p>

2.5 Conclusiones relativas a la fenomenología y modelización de la fatiga de alto ciclaje

En los primeros tres epígrafes de este capítulo se ha presentado una amplia revisión de la fenomenología de la fatiga y de los modelos adoptados para su descripción. Naturalmente, no toda ella está centrada en la fatiga de alto ciclaje, pero únicamente se han incluido aquellas referencias que pueden considerarse necesarias para la adecuada descripción de un proceso tan complejo como el de la fatiga de alto ciclaje. Así, aún en aspectos laterales, la fenomenología y las modelizaciones expuestas son de interés para situar con concreción el marco en el que el proceso de fatiga de alto ciclaje puede ser modelizado. Se ha pretendido que esta exposición fuese lo suficientemente completa como para establecer el marco de actuación en el que se va a seguir desarrollando esta memoria de tesis doctoral.

En la descripción de la fatiga de alto ciclaje es necesario considerar simultáneamente las dos orientaciones descritas: la micromecánica, que atiende al presupuesto de describir las interacciones mecánicas presentes en la generación de daño (entendido éste como microfisuras desde las que pueden originarse grietas que provocan la rotura del material) desde un punto de vista de la estructura microscópica del material. Frente a esta orientación, la metodología que ha sido denominada como fenomenológica pretende la descripción de la fatiga desde el análisis del continuo. Ello, como se ha indicado, ha dado lugar a la denominada mecánica del medio dañado. En la práctica totalidad de los trabajos de investigación que se han documentado parten del presupuesto de aislar las tensiones elásticas, propias del medio continuo, de las desviaciones que pueden sufrir éstas en un medio dañado, es decir, introduciendo una variable interna adicional de daño. Desde esta perspectiva, se ha comprobado que es necesaria una descripción termodinámica del proceso, dada la naturaleza irreversible de la generación de daño. En esta situación, son muy valiosos los modelos que se han desarrollado en el dominio de la plasticidad, dado que estos responden igualmente al campo de la termodinámica irreversible. Es en este punto donde aparece la primera dificultad que se considera en este trabajo. Efectivamente, en el campo de la plasticidad, las deformaciones plásticas son físicamente existentes. El proceso de deformación plástica está perfectamente descrito en términos de las deformaciones plásticas que pueden, por tanto, ser contempladas como variables internas diferentes de las deformaciones elásticas. La fatiga a alto ciclaje se produce sin deformaciones plásticas aparentes. Ha de situarse pues en el dominio elástico. Ahora bien, en este dominio elástico las consecuencias de la fatiga de alto ciclaje, esa generación de “daño” que acabará provocando la rotura del material sólo es perceptible por la propia fenomenología del proceso de alto ciclaje: a partir de una determinada tensión, es suficiente aplicar un determinado número de ciclos para que la pieza acabe, sin deformación aparente o significativa, sufriendo rotura. El desarrollo de esta tesis parte del cuestionamiento metodológico de la introducción de una variable interna, independiente de la tensión elástica, que describa esta generación de daño. Y, en este sentido, hay que considerar que la investigación en este campo ha estado fuertemente dirigida según este criterio. Como se ha expuesto en 2.3.3, esta variable interna de daño, en su modelo más básico, el correspondiente a ensayos uniaxiales o en una extensión anisotrópica, con la introducción de un “tensor de daño”, está presente en todas las modelizaciones. Ahora bien, si las variables internas de daño se consideran independientes de las tensiones mecánicas (elásticas) será necesario formular las correspondientes teorías o modelos de acoplamiento de la interacción elástica con el daño, así como las leyes que marcan la evolución de estas nuevas variables internas.

Se trata entonces de un problema metodológicamente difícil, aun cuando se cuenta con la ayuda de modelos consolidados de acoplamiento elástico-plástico y esencialmente “débil” por la ambigüedad con la que es introducida esta variable de daño. Como se ha visto, el daño es introducido a partir de ensayos uniaxiales, y se ha explicado en términos de una reducción de la superficie efectiva (es decir, la superficie que puede ser tratada desde el punto de vista de la mecánica del medio continuo, que exige la uniformidad de tal medio) y, por tanto, el incremento de la tensión en cada punto de la sección dañada. Es obviamente, un planteamiento consistente con todas aquéllas configuraciones experimentales situadas en un contexto de tensiones uniaxiales, pero muy complicado en su extensión a todo tipo de acciones externas, admitiendo intrínsecamente la anisotropía del medio.

El desarrollo de esta tesis partirá entonces de situar el marco teórico referencial de la fatiga de alto ciclaje en la mecánica del medio continuo dañado, en lo que se ha denominado en el apartado 2.4 como mecánica ampliada del medio continuo. En ella se admiten formalmente todas las leyes constitutivas de esta teoría, pero se admite la hipótesis de que la tensión en un punto aumenta conforme aumenta el número de ciclos de tensión aplicados a una muestra de material. No se establecen pues hipótesis adicionales relativas a la constitución o naturaleza de este daño, pues no existen, en alto ciclaje, evidencias empíricas de esta fatiga antes de la rotura del material. Se trata, pues, en definitiva, de ampliar la mecánica del medio continuo tan sólo en lo que se refiera a la asunción de esta evidencia experimental.

En este contexto, es evidente que la variable de control ha de ser la tensión, pues ello es coherente con el proceso experimental de la fatiga de alto ciclaje. Desarrollos energéticos de esta concepción obligarán por tanto a considerar como función de estado la densidad de entalpía libre y a las deformaciones como fuerzas generalizadas. Ello es consecuente con el interés de describir el proceso por el hecho constitutivo que lo determina: la evolución del valor de la tensión en cada punto de un material sometido a esfuerzos cíclicos.

En el apartado 2.4 se ha expuesto con detalle el modelo formal que se va a adoptar entonces. Puede considerarse como una contribución original de esta Tesis, aun cuando no se trata de uno de sus objetivos esenciales, tal y como se expuso en la introducción a este trabajo de investigación. Las definiciones establecidas son las imprescindibles para formular cada una de las 34 hipótesis de trabajo establecidas. Evidentemente, estas hipótesis están sólo basadas en consideraciones experimentales, pero no pueden ser derivadas de ninguna hipótesis anterior. Como se ha observado, se presentan también un número más limitado de proposiciones, derivadas de tales hipótesis, que no se presentan como todas las que podrían ser obtenidas a partir de tales hipótesis, sino tan sólo las que son de interés en el desarrollo de este trabajo.

3 CONTRIBUCIÓN A UNA NUEVA MODELIZACIÓN DEL DAÑO

Como ya se ha indicado previamente, se aborda en este capítulo un tratamiento diferenciado del daño en procesos de alto ciclaje basado en una concepción fenomenológica, específica de la mecánica del medio continuo, en el que la variable daño no es considerada a priori como una variable interna a considerar en el desarrollo de una formalización teórica. La variable D de daño, $D \in [0,1]$ es considerada por diversos autores como una variable débilmente fundada. Así, [WEBER, 1999] indica que tal variable es arbitraria y [AVILÉS, 2005] indica, más contundentemente, que “*sin que se sepa muy bien qué es exactamente <el daño>*”. Por otra parte, el contexto inicial de la introducción de esta variable es el propio de la generación de daño en procesos uniaxiales y está asociada a la consideración de una disminución del área en la que son válidos los principios de la mecánica del medio continuo, al admitirse una sección no dañada y, por tanto, uniforme. Por último, la extensión de este modelo a procesos de carga arbitrarios o a situaciones propias de la anisotropía del medio es compleja.

Sin embargo, los resultados de la modelización de la fatiga que consideran esta variable interna de daño son muy numerosos y bien documentadas sus consideraciones y referencias experimentales. Es por ello por lo que se aborda esta contribución en esta tesis partiendo del presupuesto de una coherencia con tales resultados. Y, desde este punto de vista, se considera como punto de partida en el primer epígrafe de este capítulo la definición del daño en procesos uniaxiales, para extender este concepto tensorialmente en su segundo epígrafe.

3.1 Función de daño uniaxial

Considerando, estrictamente, la Teoría de Daño Continuo, de acuerdo con las referencias básicas establecidas en los primeros dos capítulos de esta memoria de Tesis, es posible entonces plantear la duda razonable del grado de adecuación de la variable fenomenológica de daño, $D[0,1]$ de [KACHANOV, 1958], según la ecuación (1.3.2.15), y de su inmediata aplicación en la concepción de tensión efectiva, $\bar{\sigma}$, de [RABOTNOV, 1968], como se indica en la ecuación (1.3.2.16). Tal duda razonable está fundamentada en los argumentos que se exponen a continuación.

Efectivamente, aparece como evidente que la cuantificación del daño en un material no puede dejar de considerar el historial previo de la muestra en la que este daño se evalúa. La evolución del daño es irreversible y, en este sentido, la velocidad de crecimiento del daño en un instante debe depender del valor que adopte en ese instante esa variable de daño. Esta argumentación ha de inducir un cuestionamiento de los conceptos introducidos en [KACHANOV, 1958] y [RABOTNOV, 1968], la variable fenomenológica D de daño y tensión efectiva $\bar{\sigma}$, respectivamente. Así, la ecuación (1.3.2.15) no contempla la existencia de un daño previo y la ecuación (1.3.2.16) está expresada en términos de esa variable D .

Un análisis del grado de validez formal de la variable fenomenológica D de daño, de [KACHANOV, 1958], ecuación (1.3.2.15), independiente del análisis del concepto de tensión efectiva $\bar{\sigma}$, de [RABOTNOV, 1968], ecuación (1.3.2.16), muestra la inherente dificultad de generalización de la variable D , dado que Kachanov la presenta supeditada al área dañada, A_D , frente al área inicial, A , de la sección de un sólido en estudio de daño, lo que debilita la posible relación entre dichas áreas, la dañada y la inicial, A_D y A , con una función genérica que provoque tal daño, por lo que tal formulación incluye en sí misma la imposibilidad de analizar la propia evolución de daño. Por otra parte, la tensión efectiva de Rabotnov, $\bar{\sigma}$, (1.3.2.16) sugiere de forma implícita una evolución del daño al expresar dicha tensión efectiva $\bar{\sigma}$ en función de una tensión inicial, σ , invariable, referente al material sin dañar, $D=0$, y de la variable fenomenológica de daño $D[0,1]$. Ahora bien, la definición de una tensión efectiva inicial, sin daño, carece de un significado experimental claro, pues es imposible caracterizar experimentalmente una muestra de material sin daño, ya que ello supondría conocer la historia tecnológica de cada muestra de material.

Sin embargo, el análisis fenomenológico sistematizado en el punto 2.4 de este trabajo arroja la percepción de que el paso de la tensión inicial σ , al de la efectiva $\bar{\sigma}$, por efecto intrínseco del daño D , puede ser dependiente del propio proceso evolutivo. En otros términos, cabe suponer que los estados de tensión efectiva correspondientes a dos procesos de fatiga asociados al mismo valor de la variable daño no sean el mismo, pues su proceso evolutivo haya sido diferente.

Así, a partir de la ecuación que establece la dependencia con la variable daño D de la tensión efectiva $\bar{\sigma}$,

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} \quad (3.1.1)$$

puede obtenerse la variación de ésta con la variable daño,

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dD} = \frac{\sigma}{(1-D)^2} \quad (3.1.2)$$

La expresión (3.1.2) puede expresarse, considerando (3.1.1) como:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dD} = \frac{\bar{\sigma}}{1-D} \quad (3.1.3)$$

La ecuación (3.1.3) no contiene ahora ninguna hipótesis sobre una tensión efectiva inicial, correspondiente a un valor nulo de la variable de daño. Sin embargo, contiene una variable de daño que admite valores en el intervalo $[0,1]$ de acuerdo a la definición en términos de área no dañada y dañada correspondiente a [KACHANOV, 1958].

La ecuación (3.1.3) puede ser generalizada a través de la definición de una función de daño, ϕ_D . Tal función de daño es específica para cada proceso de deterioro de material y se introduce con la finalidad de explicitar la forma más general de la relación de las tensiones efectivas (es decir, de las tensiones en cada momento de un proceso de fatiga del material) con el estado de daño del material. Efectivamente, este estado de daño quedaría caracterizado por una función escalar y adimensional de daño ϕ_D de la que dependería implícitamente la tensión efectiva a través de la ecuación, semejante a (3.1.3),

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\phi_D} = -\frac{\bar{\sigma}}{\phi_D} \quad (3.1.4)$$

La ecuación (3.1.4) puede considerarse en su forma integral,

$$\bar{\sigma} \phi_D = C_0 \quad (3.1.5)$$

En (3.1.5), el valor de la constante C_0 , con dimensiones de esfuerzo, es establecido para cada material dependiente de alguna condición de contorno para el proceso de tensión-daño en estudio, generalmente respecto al inicio del proceso.

Así pues, se postula en este trabajo que la cuantificación del daño en un material sometido a esfuerzos monoaxiales ha de realizarse con carácter general a través de una función adimensional de daño, de carácter escalar, dependiente del proceso experimental llevado a cabo.

La variación de la tensión en un proceso de fatiga vendrá dada en términos de esta función de daño, según se indica en la ecuación (3.1.5), de naturaleza hiperbólica. Esta función de daño es pues independiente de los modelos de tensión y de daño de [RABOTNOV, 1968] y [KACHANOV, 1958], dados por las ecuaciones (1.3.2.15) y (1.3.2.16). La ecuación (3.1.5) reproduce sin embargo la ecuación de Rabotnov (1.3.2.16) cuando se admiten las hipótesis

$$\phi_D = (1-D) \quad (3.1.6)$$

$$\sigma = C_0, (D = 0) \quad (3.1.7)$$

Considerando la anterior argumentación, se enuncia en este trabajo la siguiente hipótesis:

H1

En todo estado tensional unidimensional sobre un sólido continuo en el que se genera daño puede definirse una función escalar de daño ϕ_D , dada por las ecuaciones

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\phi_D} = -\frac{\bar{\sigma}}{\phi_D} \quad (3.1.8a)$$

o, en forma integral,

$$\phi_D = \frac{C_0}{\sigma} \quad (3.1.8b)$$

donde C_0 es una constante escalar, propia del material, con dimensiones de esfuerzo, y dependiente de la configuración experimental tratada.

Esta hipótesis se enuncia con un carácter absolutamente general. Es necesario comprobar que reproduce resultados experimentales previos. Tales resultados, en el contexto de este trabajo, se refieren al comportamiento estático y al comportamiento en fatiga de alto ciclaje.

Así, es evidente la congruencia de la hipótesis **H1** ante tensiones de carácter estático. La comprobación de este hecho es inmediata, atendiendo a las ecuaciones (3.1.1) y (3.1.7), considerando el modelo de [RABOTNOV, 1968].

Ha de comprobarse también que **H1** es consistente con el comportamiento experimental propio de la fatiga de alto ciclaje. Ello requerirá que al menos una de las modelizaciones de este proceso, consideradas en el apartado 2.3 sea congruente con la ecuación (3.1.8.b) o su forma diferencial (3.1.8.a).

Se considerará a este efecto la modelización de [BASQUIN, 1910], un buen referente ya que es una de las más usuales en fatiga de alto ciclaje ante tensión unidimensional, definida por la ecuación (2.3.1.3b), donde $\sigma \equiv \sigma_a$ o σ_{a_0} es la amplitud de tensión en función de la tensión media σ_m , de acuerdo con la ecuación (1.3.2.3c). Considerando, por sencillez, $\bar{\sigma} = \sigma$ en cualquier instante del proceso de daño en HCF y admitiendo formalmente una variación continua de la variable N,

$$\bar{\sigma} = \sigma_f' (2N)^b \rightarrow \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = b \frac{dN}{N} \quad (3.1.9a)$$

Considerando ahora la ecuación (3.1.4) admitiendo como única variable del proceso de variación temporal de la tensión la función de daño ϕ_D , la ecuación (3.1.9a) es compatible con (3.1.8.a) si se admite una variación de la función de daño con el número de ciclos dada por la ecuación

$$b \frac{dN}{N} + \frac{d\phi_D}{\phi_D} = 0 \quad (3.1.9b)$$

o, en su forma integral

$$\phi_D = \frac{C}{N^b} \quad (3.1.9c)$$

donde C, es una constante escalar de integración a determinar atendiendo a la ecuación (1.3.1.3b) de [BASQUIN, 1910] y a la ecuación general (3.1.8b). Para determinar esta constante se considerará la situación en ausencia de daño, estrictamente por fatiga, coincidente en la expresión de Basquin a un valor de $N=1/2$. En esta situación, se obtienen las ecuaciones de valor inicial

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(N=1/2) &= \sigma'_f \\ \sigma'_f \cdot \phi_D(N=1/2) &= C_0 \\ \phi_D(N=1/2) &= C \cdot 2^b \end{aligned} \quad (3.1.10a)$$

La constante escalar C en la ecuación (3.1.9b) está entonces relacionada con la tensión constante C_0 en (3.1.8) por medio de la expresión

$$\sigma'_f \cdot C \cdot 2^b = C_0 \quad (3.1.10b)$$

Hasta este momento no se ha tenido en cuenta en la definición de la función escalar ϕ_D la definición de su intervalo de variación. La elección de un valor para esta función correspondiente al valor inicial propio de un estado no dañado puede realizarse arbitrariamente. Así, la elección de un valor igual a la unidad para la función de daño sería coherente con la hipótesis (3.1.6) y, en ese caso, se obtendrían los valores iniciales dados por las expresiones

$$\begin{aligned} C &= 2^{-b} \\ C_0 &= \sigma'_f \end{aligned} \quad (3.1.10c)$$

Por otra parte, la ecuación (3.1.8a) asegura la continuidad de la evolución de la tensión con la función de daño, así como la convexidad de la función de crecimiento de daño, pues son válidas las relaciones

$$\frac{d^2 \bar{\sigma}}{d\phi_D^2} = -\frac{d\bar{\sigma}}{d\phi_D} = \frac{\bar{\sigma}}{\phi_D} \quad (3.1.11a)$$

$$\frac{d^n \bar{\sigma}}{d\phi_D^n} = (-1)^n \frac{\bar{\sigma}}{\phi_D} \quad (3.1.11b)$$

3.2 Función tensorial de daño

La expresión (3.1.8a) ha sido introducida en un contexto uniaxial, por coherencia con los fundamentos empíricos previos. En ella se introduce una función escalar de daño ϕ_D que determina la variación de la tensión efectiva $\bar{\sigma}$ definida en una dirección. El propósito de esta sección es proponer una extensión de la hipótesis **H1** en un contexto multiaxial.

Se supondrá entonces una dependencia genérica de las componentes del tensor de tensiones efectivo $[\bar{\sigma}]$ con cada una de las componentes de un tensor de daño, de carácter adimensional, $[\phi_D]$.

Para el desarrollo de este objetivo, se admitirá en primer término la siguiente hipótesis **H2**.

H2

En un estado multiaxial de tensiones que genera daño en un punto de un medio continuo se admitirá que toda superficie en ese punto mantendrá su orientación durante el proceso de evolución del daño, de forma que su vector unitario normal \vec{n} permanezca invariable en este proceso.

Bajo esta hipótesis puede definirse con coherencia el tensor de tensiones efectivo $[\bar{\sigma}]$ cuyas componentes representan las tensiones normales y tangenciales en un sistema de referencia ortogonal externo e invariable. Así, a modo de ilustración, la tensión normal efectiva $\bar{\sigma}_x$ se refiere a la experimentada sobre una superficie perpendicular al eje ortogonal x, sin que éste haya experimentado ninguna variación respecto al mismo eje en la configuración no dañada.

La hipótesis **H2** permite inmediatamente establecer una relación entre el vector tensión efectiva $[\bar{T}_n]$ correspondiente a una superficie definida por un vector unitario \vec{n} y la tensión no dañada correspondiente a esa misma superficie $[T_n]$. Efectivamente,

$$\begin{aligned} [\bar{T}_n] &= [\bar{\sigma}][n] \Rightarrow [\bar{\sigma}]^{-1}[\bar{T}_n] = [n] \\ [T_n] &= [\sigma][n] \Rightarrow [\sigma]^{-1}[T_n] = [n] \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

es decir,

$$[\bar{T}_n] = [\bar{\sigma}][\sigma]^{-1}[T_n] \quad (3.2.2)$$

Por tanto, a partir de la hipótesis **H2** es inmediata la siguiente proposición **P1**

P1

Las tensiones dañada $[\bar{T}_n]$ y sin dañar $[T_n]$ correspondientes a un misma superficie definida por su vector unitario normal \vec{n} en un punto sometido a un estado general de tensiones generador de daño están relacionadas mediante un mismo tensor $[\bar{T}_\sigma]$ común a cualquier superficie y dependiente, por tanto, exclusivamente, de la evolución del daño, de acuerdo con la expresión

$$[\bar{I}_n] = [\bar{\sigma}] [\sigma]^{-1} [I_n] = [\tau_{\bar{\sigma}}] [I_n] \quad (3.2.3)$$

En este marco se pretende entonces una generalización de la hipótesis **H1**, fuertemente fundamentada en los resultados experimentales ya señalados, extendiéndola, admitiendo precisamente la extensión empírica de tales resultados, a esfuerzos normales en una dirección arbitraria, bajo la hipótesis **H3** que se enuncia a continuación.

H3

La generalización de la expresión (3.1.8a) a tensiones uniaxiales en una dirección arbitraria determinada por el vector unitario normal \bar{n} será de la forma

$$d\bar{\sigma}(\bar{n}) = -\frac{\bar{\sigma}(\bar{n})}{\phi_D(\bar{n})} d\phi_D(\bar{n}) \quad (3.2.4)$$

donde $\bar{\sigma}(\bar{n})$ es la tensión normal efectiva en un plano perpendicular al vector unitario \bar{n} y $\phi_D(\bar{n})$ es una función escalar de daño asociada a la dirección \bar{n} .

Como se observa, esta hipótesis está soportada por la admisión de una función escalar de daño $\phi_D(\bar{n})$ dependiente entonces del plano considerado. La definición de una función variable con la dirección considerada requiere la existencia de un tensor de daño, por lo que se formula la siguiente hipótesis **H4**.

H4

La función escalar de daño $\phi_D(\bar{n})$ asociada a una tensión normal a un plano definido por el vector unitario \bar{n} se obtendrá a través de un tensor de daño de segundo orden $[\phi_D]$ como la forma cuadrática asociada a ese vector \bar{n} ,

$$\phi_D(\bar{n}) = n^j \phi_{D,ij} n^i \quad (3.2.5)$$

Considérese que no se ha establecido, bajo las hipótesis definidas hasta este momento, ninguna consideración relativa a la simetría del tensor de daño.

La ecuación (3.2.3) establece que la tensión efectiva correspondiente a un determinado plano dependerá del daño generado. Tal tensión efectiva es dependiente exclusivamente del tensor de tensión efectiva. Por ello, las componentes de este tensor de tensión efectiva dependerán del tensor de daño previamente definido. Ahora bien, no existe ningún argumento teórico para establecer la naturaleza de esta dependencia. Así, no puede fundamentarse ninguna hipótesis restrictiva relativa a la dependencia de las tensiones efectivas con determinadas componentes del tensor de daño. Por ello, se formulará la siguiente hipótesis **H5**.

H5

Cada componente del tensor $[\bar{\sigma}]$ de tensión efectiva en un punto es función de todas las componentes del tensor de daño $[\phi_D]$.

A partir de estas hipótesis, y dado que

$$\bar{\sigma}(\bar{n}) = n^i \bar{\sigma}_{ij} n^i \quad (3.2.6)$$

$$d\bar{\sigma}(\bar{n}) = n^i d\bar{\sigma}_{ij} n^i \quad (3.2.7)$$

la variación de la componente ij del tensor de tensión, función de las componentes del tensor de daño, podrá expresarse como

$$d\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \phi_{D,kl}} d\phi_{D,kl} \quad (3.2.8)$$

Por otra parte, el diferencial de la función escalar de daño en la dirección considerada puede expresarse en términos del diferencial del tensor de daño,

$$d\phi_D(\bar{n}) = n^i d\phi_{D,ij} n^i \quad (3.2.9)$$

La expresión (3.2.4) puede entonces escribirse como

$$n^i d\bar{\sigma}_{ij} n^i = -\frac{n^j \bar{\sigma}_{ij} n^i}{\phi_D(\bar{n})} d\phi_D(\bar{n}) \quad (3.2.10)$$

El desarrollo de la expresión (3.2.10) en términos de las componentes del vector unitario \bar{n} es:

$$d\bar{\sigma}_{ij} \phi_{D,kl} n^i n^j n^k n^l = -\bar{\sigma}_{ij} d\phi_{D,kl} n^i n^j n^k n^l \quad (3.2.11)$$

La ecuación (3.2.11) ha de verificarse para cualquier vector unitario, de forma que es necesario que se verifique la igualdad

$$d\bar{\sigma}_{ij} \phi_{D,kl} = -\bar{\sigma}_{ij} d\phi_{D,kl} \quad (3.2.12)$$

La expresión anterior admite un desarrollo del diferencial de las componentes del tensor de tensión:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \phi_{D,pq}} d\phi_{D,pq} \phi_{D,kl} = -\bar{\sigma}_{ij} d\phi_{D,kl} \quad (3.2.13)$$

La ecuación (3.2.13) puede verificarse para cualesquiera componentes del tensor de daño y su correspondiente diferencial siempre que entre estos valores exista la relación

$$d\phi_{D,kl} = ds_D \cdot \phi_{D,kl} \quad (3.2.14)$$

en términos de una única variable de evolución de daño, s_D de la que dependen todos los términos del tensor de daño.

Considerando esta última relación en (3.2.13), se obtiene

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \phi_{D,pq}} \phi_{D,pq} \quad (3.2.15)$$

La ecuación (3.2.15) constituye la generalización de la hipótesis (3.1.8a) para un estado tensional general.

Como conclusión, se han demostrado las siguientes proposiciones

P2

Cada una de las componentes del tensor de daño varía atendiendo a la ecuación

$$d\phi_{D,kl} = ds_D \cdot \phi_{D,kl} \quad (3.2.14)$$

donde la variable s_D es una variable de evolución de daño común a todas las componentes.

Expresada esta última proposición en otros términos, cada componente del tensor de daño evoluciona independientemente del resto de componentes bajo una misma ley de crecimiento.

P3

Entre las componentes del tensor de tensión efectiva y del tensor de daño existe la relación general

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \phi_{D,pq}} \phi_{D,pq} \quad (3.2.15)$$

que puede interpretarse como la ecuación de evolución del tensor de tensión con respecto al daño en un contexto multiaxial.

Se ha propuesto en (3.2.15) una extensión multiaxial de la hipótesis de existencia de una función de daño en esfuerzos normales uniaxiales (3.1.4). Esta extensión se ha desarrollado admitiendo una función de daño dependiente de la dirección de la tensión considerada y ello ha exigido la introducción de un tensor de daño.

No se ha analizado en ningún caso, ya que este análisis no ha sido requerido a partir de las hipótesis introducidas, la simetría del tensor de daño introducido. Por lo tanto, desde la extensión para tensiones normales en cualquier dirección definida por la ecuación (3.2.1) no se infiere la simetría del tensor de daño. Se formulará a continuación una hipótesis **H6** de la que se derivará tal simetría.

H6

El esfuerzo tangencial efectivo asociado a dos direcciones ortogonales \vec{n} y \vec{m} , $\tau(\vec{n}, \vec{m})$, varía en función del daño de acuerdo a la ecuación

$$d\bar{\tau}(\vec{n}, \vec{m}) = -\frac{\bar{\tau}(\vec{n}, \vec{m})}{\chi_D(\vec{n}, \vec{m})} d\chi_D(\vec{n}, \vec{m}) \quad (3.2.16)$$

en la que $\chi_D(\vec{n}, \vec{m})$ es una función de daño asociada al esfuerzo tangencial correspondiente a las direcciones \vec{n} y \vec{m} . La función $\chi_D(\vec{n}, \vec{m})$ se obtiene a partir del tensor de daño por la relación tensorial

$$\chi_D(\vec{n}, \vec{m}) = m^i \phi_{D,ij} n^i \quad (3.2.17)$$

La función de daño $\chi_D(\vec{n}, \vec{m})$ debe coincidir con la correspondiente a las direcciones \vec{m} y \vec{n} , $\chi_D(\vec{m}, \vec{n})$, por lo que se infiere inmediatamente la simetría del tensor de daño.

$$\begin{aligned} \chi_D(\vec{n}, \vec{m}) = \chi_D(\vec{m}, \vec{n}) &\Rightarrow \\ m^i \phi_{D,ij} n^i = n^j \phi_{D,ij} m^i = m^j \phi_{D,ji} n^i &\Rightarrow \quad (3.2.18) \\ \phi_{D,ij} = \phi_{D,ji} \end{aligned}$$

Así pues, la simetría del tensor de daño se infiere de la existencia de una función simétrica de daño asociada a esfuerzos tangenciales en direcciones ortogonales, por lo que puede formularse la siguiente proposición.

P4

La extensión a un contexto tensorial general de la hipótesis (3.1.8a), y, por lo tanto, la generalización de su base empírica a cualquier tipología de esfuerzo, requiere la simetría del tensor de daño.

En este mismo contexto es evidente la siguiente proposición

P5

Entre las componentes del tensor de tensión efectiva y del tensor de daño existe la relación general

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \phi_{D,pq}} \phi_{D,pq} \quad (3.2.15)$$

que puede interpretarse como la ecuación de evolución del tensor de tensión con respecto al daño en un contexto tensorial general.

Una configuración experimental relevante consiste en la generación y evolución de daño de carácter isótropo. Ha de situarse en el contexto del formalismo desarrollado en esta situación.

Si el daño es isótropo, en un contexto multiaxial, la ecuación (3.2.4) debe establecer que la función de daño debe ser la misma para cualquier dirección definida por un vector unitario \vec{n} , es decir, debe verificarse la relación

$$\phi_D(\vec{n}) = \phi_D \quad (3.2.19)$$

donde ϕ_D es una función de daño para esfuerzos normales en cualquier dirección. Como consecuencia, puede formularse la siguiente proposición

P6

La forma más general de un tensor de daño que asegure la isotropía en el daño provocado por esfuerzos normales en cualquier dirección es

$$[\phi_D] = \begin{bmatrix} \phi_D & \chi_1 & \chi_2 \\ -\chi_1 & \phi_D & \chi_3 \\ -\chi_2 & -\chi_3 & \phi_D \end{bmatrix} \quad (3.2.20)$$

De acuerdo a este último resultado, las componentes del tensor efectivo de tensiones sólo pueden ser función de cuatro funciones de daño. Una aplicación inmediata de la ecuación (3.2.15) a esta situación conduce a la proposición siguiente

P7

La ecuación que determina la evolución del tensor efectivo de tensión con respecto a la función de daño en una situación de isotropía de daño provocado por tensiones efectivas normales en cualquier dirección es

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \phi_D} = -\frac{\bar{\sigma}_{ij}}{\phi_D} \quad (3.2.21)$$

Las siguientes dos proposiciones son evidentes en la situación de isotropía en su contexto tensorial más general,

P8

El tensor de daño isótropo en un contexto tensorial general es

$$[\phi_D] = \phi_D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.22)$$

de forma que todas las componentes del tensor de tensiones serían dependientes de una única función de daño ϕ_D .

P9

La ecuación que determina la evolución del tensor efectivo de tensión con respecto a la función de daño en una situación de isotropía de daño provocado por tensiones efectivas de cualquier tipología es

$$\frac{d\bar{\sigma}_{ij}}{d\phi_D} = -\frac{\bar{\sigma}_{ij}}{\phi_D} \quad (3.2.23)$$

La ecuación anterior es una generalización inmediata de la ecuación (3.1.4) a todas las componentes del tensor de tensión y su forma integral es inmediata:

$$[\bar{\sigma}] \phi_D = [C_0] \quad (3.2.24)$$

De acuerdo a (3.2.24), puede establecerse una relación general para medios en los que se produce daño isótropo entre los tensores de tensión efectiva y de tensión sin dañar. Efectivamente, la ecuación (3.2.24) puede escribirse como

$$[\bar{\sigma}] \phi_D = [\sigma] \phi_{D0} \quad (3.2.25)$$

en la que ϕ_{D0} es el valor inicial de la función de daño. Entonces el tensor efectivo de tensiones es proporcional en cada instante al tensor sin dañar, es decir,

$$[\bar{\sigma}] = \frac{\phi_{D0}}{\phi_D} [\sigma] \quad (3.2.26)$$

En este caso, el tensor $[T_{\bar{\sigma}}]$ definido en la ecuación (3.2.3) tomará la forma

$$[T_{\bar{\sigma}}] = [\bar{\sigma}] [\sigma]^{-1} = \frac{\phi_{D0}}{\phi_D} [I] \quad (3.2.27)$$

donde $[I]$ es el tensor identidad. La consecuencia inmediata de esta relación consiste en que el vector tensión efectivo correspondiente a cualquier superficie es también proporcional al vector tensión de la misma superficie antes del proceso de daño,

$$[\bar{T}_n] = [\bar{\sigma}] [\sigma]^{-1} [T_n] = \frac{\phi_{D0}}{\phi_D} [T_n] \quad (3.2.28)$$

En consecuencia, una medida del grado de anisotropía en el daño en una determinada dirección puede consistir en la medida de la componente ortogonal al vector tensión inicial del vector tensor dañado, de acuerdo con la siguiente proposición

P10

Se producirá un proceso de generación de daño anisótropo en un subespacio de dimensión igual o superior a 2 si para toda dirección \vec{n} perteneciente a dicho subespacio se verificará la relación

$$[\bar{\Gamma}_n] - \frac{[\bar{\Gamma}_n]^t [\Gamma_n]}{[\Gamma_n]^t [\Gamma_n]} [\Gamma_n] \neq [0] \quad (3.2.29)$$

La ecuación (3.2.29) puede escribirse, atendiendo a (3.2.3), como

$$\left([T_{\bar{\sigma}}] - \frac{[\Gamma_n]^t [T_{\bar{\sigma}}] [\Gamma_n]}{[\Gamma_n]^t [\Gamma_n]} [I] \right) [\Gamma_n] \neq [0] \quad (3.2.30)$$

por lo que se puede concluir la siguiente proposición **P11**.

P11

La anisotropía del proceso de daño queda restringida al subespacio complementario del subespacio propio del tensor $[T_{\bar{\sigma}}]$.

De esta forma, la valoración del grado de isotropía de daño puede realizarse a través del estudio del tensor $[T_{\bar{\sigma}}]$. Si, por ejemplo, este tensor tiene, en cada instante, tres valores propios iguales, la dimensión del espacio isótropo de daño es 3, es decir, todo el espacio. Si el tensor tiene dos valores propios iguales, existe una dirección en la que se rompe la isotropía existente en un determinado plano. Si, por último, el tensor $[T_{\bar{\sigma}}]$ tiene tres valores propios diferentes, el daño es totalmente anisótropo.

Una revisión de los planteamientos de daño continuo anisotrópico formulados a través de la tensión efectiva referida a los ejes principales, o tensiones principales efectivas, y en términos de variables escalares de daño D , muestra una adecuación de estos modelos a la conclusión formulada en **P11**.

Efectivamente, según [LEMAITRE, 1996], en el modelo formulado en 1973 en [HAYHURST / LECKIE, 1973], [LECKIE / HAYHURST, 1974, 1977], se introduce un tensor de tensiones principales efectivas con una única variable de daño,

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 1-D \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 \quad (3.2.31)$$

El tensor $[T_{\bar{\sigma}}]$ adopta en este caso la expresión

$$[T_{\bar{\sigma}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(1-D) \end{bmatrix} \quad (3.2.32)$$

que mantendría la isotropía en el daño en todas las direcciones contenidas en el plano 12 del sistema de referencia adoptado.

De una forma similar, según [LEMAITRE, 1996], en el modelo establecido en [MURAKAMI / OHNO, 1981], [MURAKAMI, 1983], el tensor dañado, que adopta la expresión

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 / (1-D_1) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 / (1-D_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 / (1-D_3) \end{bmatrix} \quad (3.2.33)$$

que tendría un tensor asociado $[\mathcal{T}_{\bar{\sigma}}]$ dado por

$$[\mathcal{T}_{\bar{\sigma}}] = \begin{bmatrix} 1 / (1-D_1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 / (1-D_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 / (1-D_3) \end{bmatrix} \quad (3.2.34)$$

que determinaría una grado de anisotropía espacial.

Por el contrario, un tensor efectivo principal en la forma

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 / (1-D) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 / (1-D) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 / (1-D) \end{bmatrix} \quad (3.2.35)$$

como es introducido por [RABOTNOV, 1968], en la referencia ya indicada en [LEMAITRE / CHABOCHE, 1985], conduciría a un tensor asociado $[\mathcal{T}_{\bar{\sigma}}]$ múltiplo de la identidad y, por tanto, representativo de una isotropía en todas las direcciones.

La introducción del tensor $[\mathcal{T}_{\bar{\sigma}}]$ establece una relación entre los vectores tensión efectivo y sin dañar asociados a una misma superficie de vector unitario ortogonal \bar{n} , de acuerdo a lo indicado en la relación (3.2.3). Ahora bien, es también de interés teórico y práctico la obtención de una relación entre los tensores de tensiones efectivo y sin dañar. Tal relación puede obtenerse a partir de la expresión (3.2.15).

Las componentes del tensor de daño pueden obtenerse a partir de (3.2.15),

$$\phi_{D,pq} = -J_{kl,pq}^{-1} \bar{\sigma}_{kl} \quad (3.2.36)$$

La expresión (3.2.36) referida a un instante inicial, adoptaría la forma

$$\phi_{D0,pq} = -J_{0kl,pq}^{-1} \sigma_{kl} \quad (3.2.37)$$

De acuerdo a la expresión (3.2.14), los tensores de daño inicial y efectivo son proporcionales,

$$\phi_{D,pq} = s_D \phi_{D0,pq} \quad (3.2.38)$$

De forma que, considerando (3.2.36) y (3.2.37) se obtiene

$$J_{kl,pq}^{-1} \bar{\sigma}_{kl} = s_D J_{0kl,pq}^{-1} \sigma_{kl} \quad (3.2.39)$$

y, por tanto,

$$\bar{\sigma}_{kl} = s_D J_{kl,ij} J_{0pq,ij}^{-1} \sigma_{pq} \quad (3.2.40)$$

Así pues, puede formularse la proposición siguiente

P12

El tensor de tensión efectiva puede obtenerse en términos del tensor de tensión sin dañar a través de un tensor de cuarto orden y del valor de una magnitud escalar representativa de la evolución del daño:

$$\bar{\sigma}_{ij} = s_D J_{ij,kl} J_{0pq,kl}^{-1} \sigma_{pq} \quad (3.2.40a)$$

donde

$$J_{ij,kl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \phi_{D,kl}} \quad (3.2.40b)$$

Este resultado general es también formalmente coherente con trabajos previos donde se postula una relación entre ambos tensores de tensiones. Así, en [CHABOCHE, 1978] según [LEMAITRE, 1996] y [LEMAITRE / CHABOCHE, 1985], en el contexto de una “definición termodinámica de un tensor de daño de cuarto orden”, o de “una teoría de daño anisótropo”, se propone la relación

$$\bar{\sigma}_{ij} = (I_{ijkl} - D_{ijkl})^{-1} \sigma_{kl} \quad (3.2.41)$$

donde se introduce un tensor de daño de cuarto orden, en base a argumentos de carácter esencialmente empírico.

3.3 Consideraciones relativas a la elección de la variable tensión efectiva como variable de control del proceso de daño

En el apartado 3.2 se ha propuesto una modelización del proceso de daño admitiendo como primera hipótesis (**H1**) una función de daño escalar, fundamentada ésta en el tratamiento fenomenológico del daño en ensayos de tensión uniaxial. A partir de esta primera hipótesis, se ha desarrollado un conjunto de hipótesis y proposiciones derivadas de ella para extender esta modelización de forma que fuera aplicable a ensayos de carácter tensorial general. Se ha expuesto igualmente la coherencia de tales proposiciones e hipótesis con desarrollos previos documentados en la literatura científica. El objetivo de este epígrafe consiste en presentar una serie de consideraciones asociadas a la descripción, propuesta en este capítulo, de la variable tensión efectiva como variable determinante o de control del proceso de daño. Como se ha observado, ello supone en primera instancia que deja de ser formalmente necesaria la introducción de variables intrínsecas de daño. Estas consideraciones parciales se identificarán bajo la nomenclatura **C3.#**.

C3.1. El análisis del proceso tensional-daño en un sólido continuo no establece ningún argumento que priorice una variable sobre otra salvo la limitación del dominio de deformación aparente o no aparente.

Puesto que el planteamiento tensional-daño tiene como característica común inmediata, en cualquiera de sus enfoques ante tensiones estáticas o dinámicas, la presencia de deformaciones, entonces, en el caso de que el proceso de daño se produzca sin deformación aparente, como ocurre en la fatiga de alto ciclaje, el control o estimación del daño tiende a realizarse indistintamente por tensión (efectiva) o por una variable fenomenológica del daño D .

C3.2. La elección de la variable de control del proceso tensional-daño en sólido continuo se fundamenta formalmente en este trabajo en la discriminación de la variable fenomenológica de daño D frente a la variable de tensión efectiva σ , en consistencia con el análisis empírico unidimensional.

El planteamiento básico unidimensional de la relación entre ambas variables, tensión y daño, dentro del contexto del continuo y distribución uniforme de estas dos variables, establece que la definición fenomenológica del daño D como variable intrínseca escalar, en términos de [KACHANOV, 1958] y [RABOTNOV, 1968], no solo no presenta una mejor definición del problema que la variable tensión $\bar{\sigma}$, sino que plantea unas condiciones iniciales tecnológicas indeterminadas de historia-daño, a la vez que una dependencia con la razón directa de superficies, no dañada y dañada. Frente a ello, se propone en este trabajo el modelo fundamentado en la hipótesis **H1**, que supone la introducción de una función escalar de daño propia de cada proceso uniaxial. Tal hipótesis lleva asociada la elección de la tensión efectiva $\bar{\sigma}$ como variable de control de la evolución del daño.

C3.3. La elección de la variable tensión efectiva σ como variable de control del proceso de generación de daño de acuerdo con la expresión (3.1.5) es coherente con la descripción experimental que conduce, en fatiga de alto ciclaje unidimensional, a la curva de WÖHLER $\sigma-N$ en metales dúctiles.

La importancia de la resolución del estado tensional unidimensional, mediante una variable consistente, tal como ya se ha referido, es esencial en cualquier análisis, sea estático o dinámico, dado su referente experimental que permite criterios de equivalencia ante estados biaxiales y triaxiales, en los cuales la variable σ de tensión presenta ventajas significativas frente a la fenomenología del daño, cuando se tiende a evoluciones de daño de carácter anisotrópico en general o de acuse de debilidad de la variable D de daño en ensayos isotrópicos. La consistencia de la variable σ de tensión en estas tendencias, como acontece en la fatiga de alto ciclaje, de alta corroboración experimental en metales dúctiles, está asegurada en los términos del enunciado de esta misma consideración parcial.

C3.4. La extensión multiaxial de la formalización unidimensional del tratamiento del daño, evidencia la complejidad de su desarrollo en términos de una variable fenomenológica tensorial $[D]$ de daño, transfiriendo a esta extensión la debilidad inherente a la variable escalar D de daño en el caso uniaxial. Por tanto, la consistencia de la estimación del proceso generalizado de daño en términos de una variable tensorial de tensión efectiva $[\sigma]$ es superior a la fundamentada en una variable tensorial empírica de daño $[D]$.

Esta consistencia formal del tratamiento de la fatiga en procesos multiaxiales en términos del tensor tensión efectiva $\bar{\sigma}_{ij}$ como variable de control de tales procesos frente a una variable tensorial de daño D_{ij} puede visualizarse en el siguiente diagrama, Figura 3.3/1. Esencialmente, esta inconsistencia formal viene determinada por la inexistencia de una adecuada descripción diferencial del proceso de daño en un contexto multiaxial. En el esquema representado en la Figura 3.3/1, la función $\bar{f}(n_i)$ para toda componente de un vector unitario \bar{n} , en un estado de tensión-daño local en un punto p , es la tensión efectiva \bar{f}_i correspondiente a un conjunto de acciones exteriores sobre el sólido, S_p^3 . El tensor efectivo asociado, respecto a un sistema de referencia cartesiano ortogonal arbitrario $x \perp y \perp z$ no principal, de componentes de tensión efectiva, $\bar{\sigma}_{ij}$, no responde directamente a una definición tensional-daño de las imágenes efectivas de la base de dicho sistema de referencia $x \perp y \perp z$, puesto que cada tensión efectiva $\bar{\sigma}_{ij}$, $i \neq j$, admitiendo la simetría de [CAUCHY, 1822], propia del continuo, representa un estado biaxial diferente cuyos valores principales no son coincidentes con los del tensor genérico triaxial $\bar{\sigma}_{ij}$. Por lo tanto, cabe inferir la imposibilidad de obtención directa de la función efectiva \bar{f} (simbolizada por una línea discontinua en este esquema), estando esta obtención condicionada a la previa determinación de las tensiones efectivas principales $\bar{\sigma}_{oi}$, las cuales pueden ser obtenidas en un espacio tensional-daño de una función daño ϕ_{Doi} .

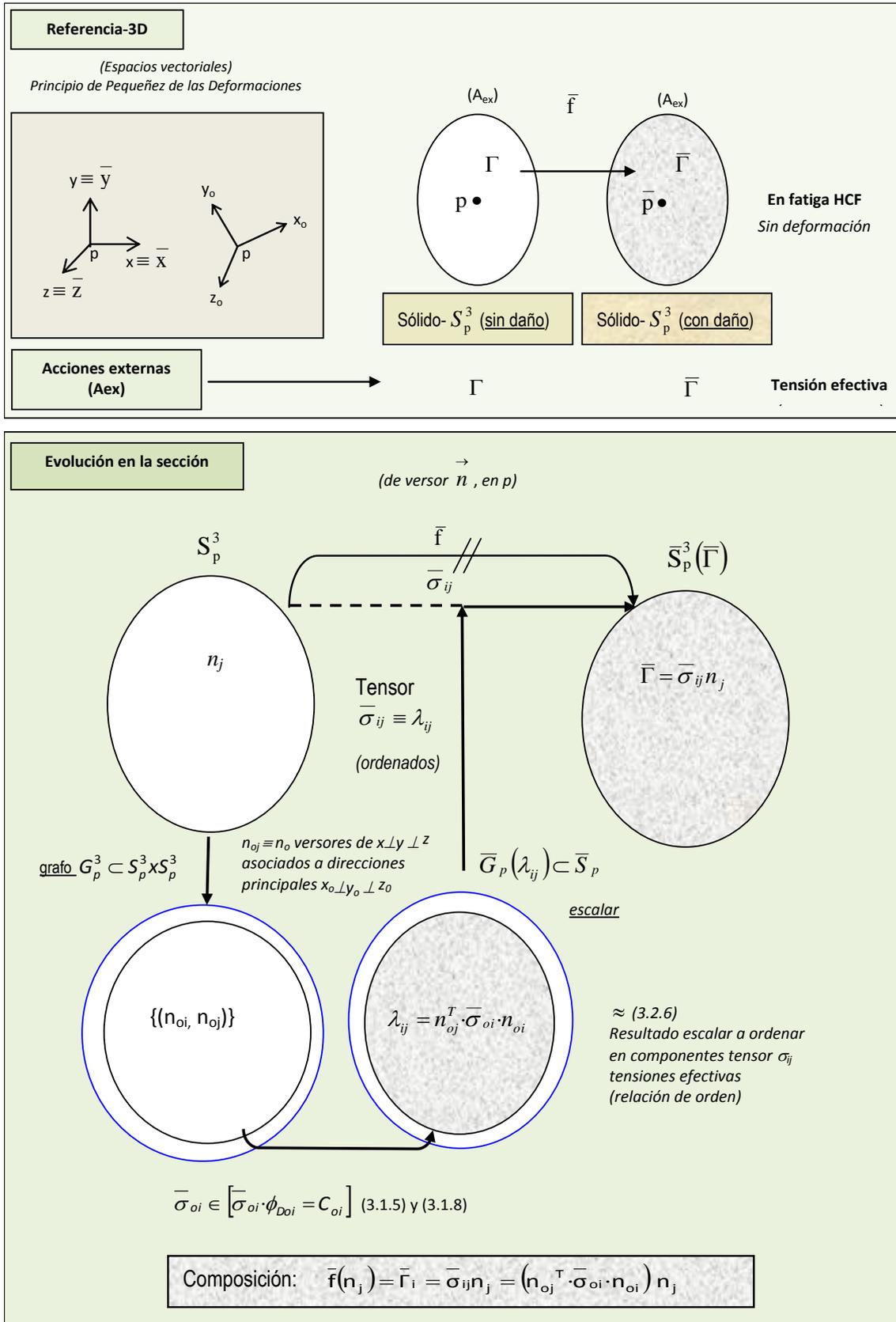


Fig 3.3/1. Esquema Funcional del Tratamiento Generalizado del Daño : función efectiva \bar{f} y tensión efectiva $\bar{\Gamma}$

C3.5. La consideración anterior establece una indefinición en las hipótesis previas aceptadas cuando se considera como variable de daño la fenomenológica D : El Jacobiano, J , de la transformación de coordenadas por daño, D , que debería coincidir bajo la hipótesis de [KACHANOV, 1958] con el valor $\phi_D = 1-D$. Sin embargo, mientras que, si bien está definida la pequeñez de las deformaciones en el continuo, no está definida la transformación de coordenadas $\bar{x} = x(D)$, $\bar{y} = y(D)$ en función del daño, por lo que no existe dicho Jacobiano.

Es en este punto donde reside la esencia de la debilidad de la variable fenomenológica- D , independientemente de la causa que produzca la variación de área efectiva de Kachanov (cuyo análisis se ha realizado en términos estrictamente geométricos). Así, dado que el Jacobiano se considera geoméricamente como un factor local de modificación del área, entonces,

$$\int_{\bar{A}} d\bar{x} d\bar{y} = \int_A \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\bar{x},\bar{y})} \right| dx dy \quad (3.3.1)$$

y dado que, por la ecuación (1.3.2.15) de Kachanov, el área efectiva viene dada por:

$$\bar{A} = (1-D)A \quad (3.3.2)$$

donde en el instante analizado, el área efectiva \bar{A} y el daño D son constantes. De la integración de (3.3.1) resulta

$$\begin{aligned} \bar{A} &= J.A & J &= \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\bar{x},\bar{y})} \right| = cte \neq 0 & \Rightarrow J &= 1-D \\ \bar{A} &= (1-D)A \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

La relación (3.3.3) indica que por la existencia formal de una variable de daño, D , en el sentido de Kachanov, debería existir un Jacobiano, J , acorde a la transformación de coordenadas (x,y) en (\bar{x}, \bar{y}) tal que las relacionase, al menos, a través del daño, D . Esta transformación no está definida en Kachanov ni en su extensión en Rabotnov (ecuaciones (1.3.2.16) y (3.1.1) y refleja la debilidad formal de la variable fenomenológica D de daño.

Estas cinco primeras consideraciones parciales, tras la modelización, realizada en términos siempre de la tensión efectiva, son suficientes para asumir, en lo que se refiere a la modelización de la fatiga de alto ciclaje, que la variable tensión efectiva es más consistente que la variable fenomenológica de daño, adoptándose, consecuentemente, en este trabajo, como variable de control del proceso de generación de daño en HCF la variable tensional de tensión efectiva²¹.

²¹ Existen modelos constitutivos de daño, en el campo plástico, como alternativa a la plasticidad clásica, denominados modelos endocrónicos que se reducen básicamente a un modelo de Maxwell y/o Kelvin-Voigt, de resorte más amortiguador, característicos de la viscoelasticidad o viscoplasticidad. Estos modelos, en general se

3.4 Conclusiones

CP3.1

Se ha propuesto en este capítulo una nueva formulación del daño en materiales sometidos a procesos de alta fatiga. En esta nueva formulación, la única variable de control es la tensión efectiva en cada punto, y no se considera la existencia de una variable de daño, escalar o tensorial, interna e independiente de la tensión elástica. Por el contrario, se admite que el tensor efectivo de tensión es función de un tensor simétrico de daño.

CP3.2

La evolución de la tensión efectiva en un proceso multiaxial requiere de la definición de una función tensorial simétrica de daño, $[\phi_D]$ de acuerdo a la ecuación

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \phi_{D,pq}} \phi_{D,pq}$$

CP3.3

Las componentes del tensor de daño varían todas ellas de acuerdo a una única expresión, dependiente de una función escalar temporal s_D ,

$$d\phi_{D,kl} = ds_D \cdot \phi_{D,kl}$$

CP3.4

En caso de isotropía de daño, se ha comprobado que el tensor de daño isótropo tiene la forma

$$[\phi_D] = \phi_D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde ϕ_D es una función escalar de daño, cuya evolución viene dada por

$$d\phi_D = ds_D \cdot \phi_D$$

utilizan para resolución numérica, de aplicación en mecánica del suelo (Geomateriales y análisis sísmico), que implícitamente contienen estas mismas consideraciones, aún sin mencionarlas.

CP3.5

Es posible la definición de un tensor $[T_{\bar{\sigma}}]$ que relacione la tensión asociada a un estado de daño con la tensión asociada a un estado de daño inicial,

$$[\bar{T}_n] = [\bar{\sigma}][\sigma]^{-1}[T_n] = [T_{\bar{\sigma}}][T_n]$$

donde $[\bar{T}_n], [T_n], [\bar{\sigma}], [\sigma]$ son las tensiones dadas sobre una misma superficie definida por su vector unitario normal \bar{n} y los tensores de tensión correspondientes, respectivamente, a un instante arbitrario y al instante considerado como inicial. Este tensor, común a todos los elementos de superficie en un mismo punto es únicamente dependiente de la evolución temporal del proceso de generación de daño.

CP3.6

En términos del tensor $[T_{\bar{\sigma}}]$, la anisotropía del proceso de daño queda restringida al subespacio complementario del subespacio propio del tensor $[T_{\bar{\sigma}}]$.

CP3.7

Se ha comprobado que esta modelización generaliza los procedimientos derivados de la suposición de una variable de daño D y los resultados de generalización multiaxial propuestos en términos de estas variables internas y se han establecido diversas consideraciones relativas a la contrastación entre ambas metodologías.

4 CONTRIBUCIÓN A UNA NUEVA MODELIZACIÓN DE CRITERIOS DE FALLO EN ALTO CICLAJE

La síntesis desarrollada, en el apartado 2.4 de esta memoria, con la consecuente aportación de y proposiciones inherentes al fenómeno de la fatiga, esencialmente fatiga de alto ciclaje en metales dúctiles, evidencia un estado actual en el desarrollo de la mecánica del sólido que aún no permite un modelo claro del fenómeno de la fatiga. Luego, dado que el objeto de este apartado es presentar una contribución a esta modelización, en lo que se refiere a la situación en la que se produce el fallo o rotura del material, es necesario en primer término considerar que esta contribución a la modelización de criterios de fallo se realizará, en consonancia también con lo establecido en el capítulo 3 de este trabajo, desde un punto de vista fenomenológico, propio del medio continuo dañado y, por tanto, considerando los procedimientos energéticos como los más adecuados a esta modelización.

Es interesante explicitar en este punto que el uso de procedimientos energéticos (en definitiva, la definición de una densidad de energía o entalpía en cada punto del medio continuo considerado) es especialmente potente en la definición de procesos de acoplamiento de interacciones o elementos fenomenológicos. Se ha podido constatar en la revisión bibliográfica establecida en el capítulo 2 que un procedimiento generalmente utilizado en la modelización es la definición de términos adicionales, propios en este caso del daño, en la definición de la densidad de energía elástica (es decir, términos no descritos a través de los coeficientes de Lamé). Pero adicionalmente a esta valoración inicial, en el caso de la fatiga de alto ciclaje, es necesario tener en cuenta además las dificultades asociadas a una descripción en términos de tensiones, y su evolución, en la generación de microfisuras y en su evolución.

Tal y como ocurre en la mecánica de la fractura, pero añadiendo además la especial dificultad inherente a la detección de daño en HCF, es imposible actualmente establecer la ecuaciones de equilibrio de fuerzas en la punta de una grieta, y, por lo tanto, la evolución de ésta.

La mayor complejidad experimental y teórica propia de estados multiaxiales requiere de la concepción de una tensión equivalente como variable comparativa con resultados experimentales uniaxiales normalizados, en los que los métodos energéticos, en particular la consideración de una energía de distorsión, han proporcionado resultados satisfactorios en materiales metálicos dúctiles.

Así pues se tratará este capítulo con un primer epígrafe en el que se analizará el fallo, desde el punto de vista energético, en procesos multiaxiales. En el segundo epígrafe se propondrá una nueva definición de una superficie límite de crecimiento de daño en el espacio de tensiones (es decir, una superficie convexa en este espacio en cuyo interior no es posible la aparición de daño en un proceso cíclico) y la evolución temporal de esta superficie de límite de crecimiento de daño.

4.1 Fallo energético en estados de tensión multiaxial

Tal como se ha introducido anteriormente, uno de los planteamientos de interés resulta de la revisión referente a los criterios multiaxiales, centrándose en los energéticos, lo que determina que, según las referencias básicas, únicamente se considere en primer término, y para metales dúctiles, el criterio de distorsión de Von Mises [VON MISES, 1913]-[HECKY, 1924] derivado del caso estático. Sin embargo, como se comprobará, es factible considerar la posibilidad de una influencia derivada de la energía total de deformación, U . Efectivamente, el criterio multiaxial de Beltrami-Haigh [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919] establece la energía total de deformación por unidad de volumen, u , como indica la ecuación (1.3.2.9), está limitada a un valor máximo, en el estado multiaxial estático, utilizando para ello el resultado del ensayo uniaxial,

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)] \leq \frac{\sigma_{fl}^2}{2E}$$

o, expresado en términos equivalentes,

$$I_1^2 - 2(1+\nu)I_2 \leq \sigma_{fl}^2 \quad (4.1.1a)$$

donde σ_i , I_i , ($i=1,2,3$) son las tensiones principales y los invariantes de las mismas, respectivamente, y σ_{fl} la tensión de fluencia²² del material, en este caso dúctil.

La ecuación (4.1.1a) representa en el espacio tridimensional de tensiones un elipsoide, denominado de [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919] de semiejes mayor y menores, respectivamente, dados por las siguientes expresiones

$$\frac{\sigma_D}{\sqrt{1-2\nu}}, \frac{\sigma_D}{\sqrt{1+\nu}}, \frac{\sigma_D}{\sqrt{1+\nu}} \quad (4.1.1b)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson, en el dominio usual y, por tanto, limitado a un valor inferior a 0.5. En el estado biaxial, una de las tensiones principales es nula, con lo que su representación en el espacio de tensiones es una elipse, denominada igualmente de [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919] con semiejes mayor y menor dados por las expresiones

$$\frac{\sigma_D}{\sqrt{1-\nu}}, \frac{\sigma_D}{\sqrt{1+\nu}} \quad (4.1.1c)$$

Este criterio estático, que básicamente no ha sido considerado en la fatiga multiaxial, y con limitaciones a la zona de mayor tracción, en la que tiene un buen comportamiento, indica que

²² En esta memoria se mantiene el contenido usual para el caso estático suponiendo el fallo dúctil, (que para materiales frágiles sería el de la tensión de rotura).

en el interior de dicha zona, elipsoide o elipse, no se produce fluencia del material (zona elástica).

Cabe un análisis del criterio en función de los invariantes del tensor de tensiones, utilizado en el caso estático mediante la denominación, de ejes I_1 y $I_2^* = sig\{I_2\} \cdot \sqrt{|I_2|}$, que atendiendo, al desarrollo de [GUERRA, 1985], y de [BRESLER / PISTER, 1957] según [POPOV, 1990], para [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919] al tratar la ecuación (4.1.1a) en su forma de invariantes, se obtienen las zonas inecuacionales de ramas, (Fig.4.1/1a),

$$\text{Elipse: } \frac{I_1^2}{\sigma_{fl}^2} + \frac{(\sqrt{|I_2|})^2}{\sigma_{BH}^2} = 1, \quad \text{si } I_2 < 0$$

$$\text{Hipérbola: } \frac{I_1^2}{\sigma_{fl}^2} - \frac{(\sqrt{|I_2|})^2}{\sigma_{BH}^2} = 1, \quad \text{si } I_2 > 0 \quad (4.1.1d)$$

$$\text{con } \sigma_{BH} = \frac{\sigma_{fl}}{\sqrt{2(1+\nu)}}$$

El criterio de [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924], atendiendo a la ecuación (1.3.3.50) de las referencias básicas, puede expresarse en términos de los invariantes del tensor de tensiones, I_1, I_2 , o de su desviador, J_2 , como:

$$I_1^2 - 3I_2 \leq \sigma_{fl}^2$$

o

$$3J_2 \leq \sigma_{fl}^2 \quad (4.1.2a)$$

y admite una representación en el denominado diagrama de interacción, en el mismo sistema de referencia $I_1, I_2^* = sig\{J_2\} \cdot \sqrt{|J_2|}$, con las zonas inecuacionales de ramas (Fig.4.1/1b),

$$\text{Elipse: } \frac{I_1^2}{\sigma_{fl}^2} + \frac{(\sqrt{|I_2|})^2}{\sigma_{VM}^2} = 1, \quad \text{si } I_2 < 0$$

$$\text{Hipérbola: } \frac{I_1^2}{\sigma_{fl}^2} - \frac{(\sqrt{|I_2|})^2}{\sigma_{VM}^2} = 1, \quad \text{si } I_2 > 0 \quad (4.1.2b)$$

$$\text{con } \sigma_{VM} = \frac{\sigma_{fl}}{\sqrt{3}}$$

En la representación 4.1/1, denominada como diagrama de interacción de criterios energéticos, los invariantes del tensor de tensiones I_1, I_2 , referentes a las inecuaciones (4.1.1d)

y (4.1.2b), respectivamente, la zona sombreada, interior delimitada, es la zona elástica. La exterior, limitada superiormente por las asíntotas, es la zona plástica y la exterior delimitada inferiormente por las asíntotas es la zona no posible, dado que en esa zona no se verifica que la densidad de energía u sea mayor o igual a cero.

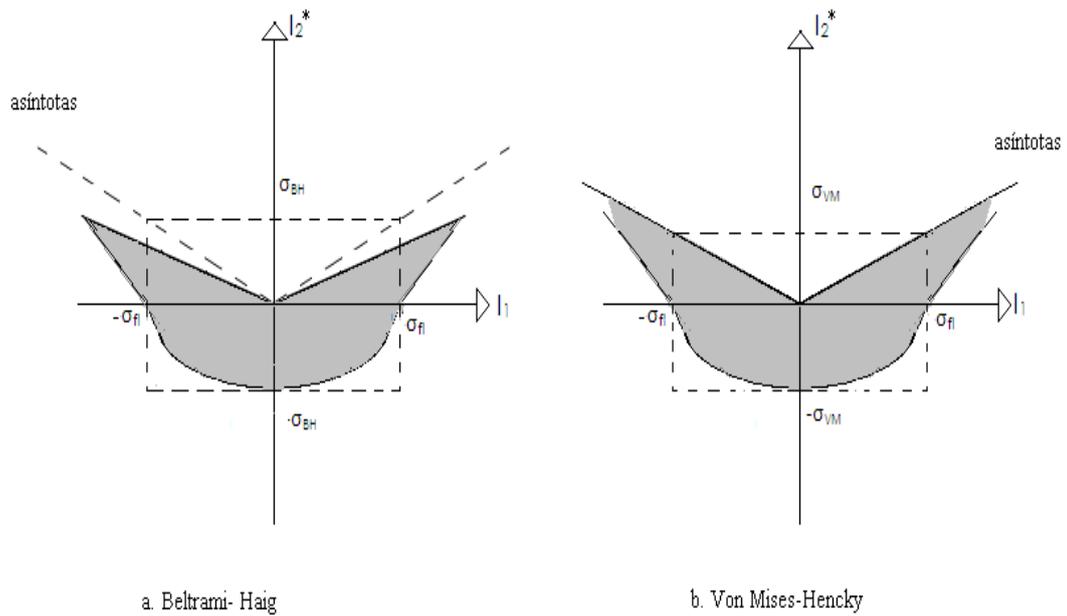


Fig.4.1/1. Diagramas de interacción de los criterios energéticos de Beltrami-Haigh y Von Mises-Hencky

4.2 Superficie límite de crecimiento de daño

En el capítulo 3 y apartado 4.1 se han considerado los elementos característicos esenciales que, conjuntamente con el análisis bibliográfico, establecen la base de trabajo en cuanto al objetivo fijado de contribuir con un modelo teórico en la fatiga de alto ciclaje en metales dúctiles, una vez justificada la elección de la variable como la variable de tensión. Dada la complejidad existente en esta temática, como se desprende del análisis precedente, se hace necesario definir con precisión y claridad la hipótesis que conforma el modelo presentado, según se detalla en el siguiente epígrafe.

4.2.1 PREMISAS ESPECÍFICAS E HIPÓTESIS CONTRIBUTIVA BÁSICA

La extensión del concepto de límite de daño al ámbito multiaxial simple, en el modelo de continuo macroscópico con la tensión como variable de daño, exige la adopción de la premisa previa consistente en admitir la posibilidad de una modelización que conjugue hipótesis empíricas y teóricas, basada en la definición de un criterio energético cuyas variables sean las tensiones normales y tangenciales.

Efectivamente, la revisión exhaustiva de la fenomenología, centrada en aquellos aspectos que presentan comportamientos o facetas más concretos, en metales dúctiles con límite de fatiga, esencialmente los ferrosos, lleva a considerar que una observación más explícita de la segunda etapa de la superficie por fractura en fatiga por alto ciclaje, (Fig 2.2.1/1), bajo la perspectiva de la concreción de la causa, a nivel tensorial (no a nivel de estructura de la materia), por la cual se produce el avance en estrías entre las marcas de playa, permite concluir que, en realidad, el análisis usual que se realiza al respecto, en el que se indica que en la Etapa-1 este crecimiento se produce por tensión tangencial, τ , y en la Etapa-2 por tensión normal σ , (Fig.2.2.1/1c), es incompleto, dado que las estrías presentan –aisladamente- una regularidad sospechosamente equivalente, a menor escala, de lo que ocurre en la transición de la Etapa-I con la Etapa-II, es decir, que **en la segunda etapa cabe pensar, en una cierta influencia de variable del tipo de tensión tangencial, τ** , tal como se presenta y propone en la Fig 4.2.1/1 siguiente,

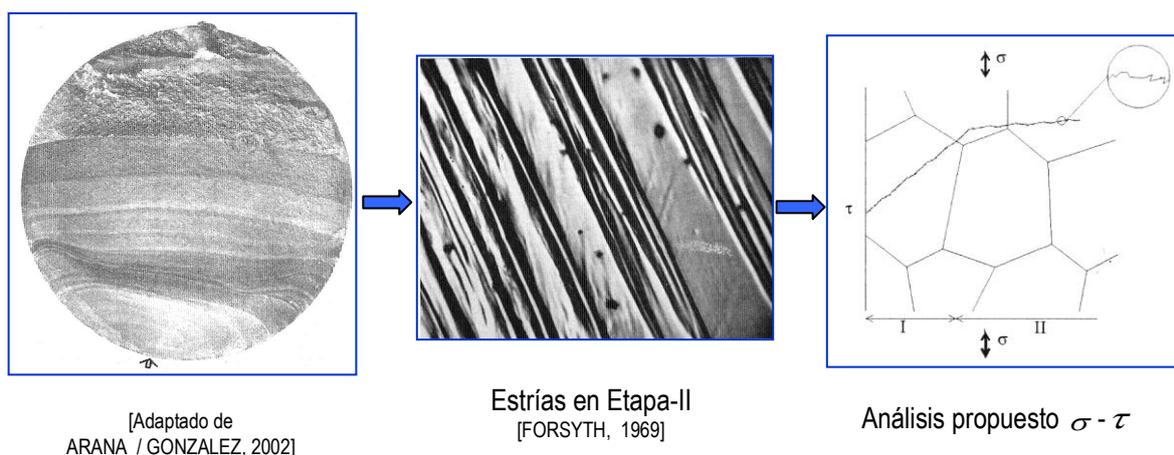


Fig 4.2.1/1. Posible influencia en Etapa-II de la tensión τ , en la fractura por fatiga HCF. (Compárese con la Fig 2.2.1/1)

El análisis propuesto anteriormente adquiere mayor sentido si se consideran referencias de las que se puede inferir, implícita o cualitativamente y de forma puntual. Así [LEMAITRE / CHABOCHE, 1985] indican, textualmente, que **“El daño es igualmente sensible a la energía de cizallamiento [distorsión], pero también a la energía de deformación volúmica, dado que el crecimiento de las cavidades y de las fisuras son mecanismos muy sensibles a la tensión hidrostática”**. En realidad, Lemaitre y Chaboche, en la anterior referencia, citan tangencialmente dicho aspecto, pues a continuación realizan lo que denominan restitución de la energía volúmica a la energía de distorsión, desembocando en la conocida energía total de deformación, aspecto que guarda relación con lo expuesto a continuación. El siguiente punto del planteamiento lleva a tratar de establecer una hipotética relación, no empírica, entre las tensiones normales, σ , y tangenciales τ , **en el ámbito de la fatiga multiaxial simple desde la perspectiva de la obtención de un criterio energético**.

De esta forma, es de interés una revisión exhaustiva de los criterios energéticos desde su propio origen. La revisión debe estar condicionada a la mejor respuesta posible, según la base experimental existente, a las dos características fenomenológicas fundamentales observadas, a saber:

- La posible interacción entre tensiones normales y tangenciales $\sigma - \tau$.
- La influencia de la tensión hidrostática σ_H sobre los mecanismos de crecimiento de cavidades y fisuras (apuntados por la cita ya referida de Lamaitre-Chaboche).

Esta concepción de la revisión realizada induce a considerar que cierta parte de la influencia de las tensiones sobre el proceso de deterioro por fatiga de alto ciclaje tiende a un criterio como el de [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919], criterio éste no considerado, por otra parte, en fatiga y que, en el caso de carga estática está limitado al estado triaxial, y a su zona de tracción, tal y como se ha expuesto en el apartado 4.1.

Sin embargo, la referencia clásica básica por excelencia, resultante de la distorsión, es el criterio de [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924], aun siendo, como ya se ha indicado, numerosas las referencias en este sentido.

Bajo esta perspectiva, en nuestro contexto, y una vez observados los resultados experimentales, Fig. 4.2.1/2 (extendida de la Fig. 2.2.2/2), que se refieren a un estado biaxial, se infieren dos características fundamentales. Por un lado, el criterio de [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924], elipse 1-4, en su intervalo de tracción, en la zona de dominio de la tensión tangencial (σ_{1a} , $-\sigma_{2a}$), presenta un buen ajuste. Pero, en la zona del dominio de tensiones normales (σ_{1a} , σ_{2a}) se produce un desajuste por exceso; es decir, se produce rotura antes de lo previsto por este criterio. Por otra parte, en el ajuste bajo el criterio de [BELTRAMI, 1885]-[HAIG, 1919], elipse 1'-4', en las mismas condiciones que en el anterior análisis realizado para [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924], se observa, precisamente, un comportamiento recíproco o conjugado al mismo; es decir, en la zona de dominio de la tensión normal (σ_{1a} , σ_{2a}) se observa por defecto un ajuste más acorde a la realidad de la fatiga por alto ciclaje, mientras que en la zona del dominio de tensiones tangenciales (σ_{1a} , $-\sigma_{2a}$), su previsión es deficiente, y por exceso, frente a la rotura. Por último, este criterio puede hacerse extensible a estados triaxiales de tracción, diferenciándose entonces de la deficiencia en este sentido del criterio de [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924]

En síntesis, Beltrami-Haig estima la tendencia de la influencia por tensiones normales con mayor precisión, incluso por defecto, que Von Mises-Hencky, mientras que este último criterio estima con buena precisión la tendencia de la influencia por tensiones tangenciales.

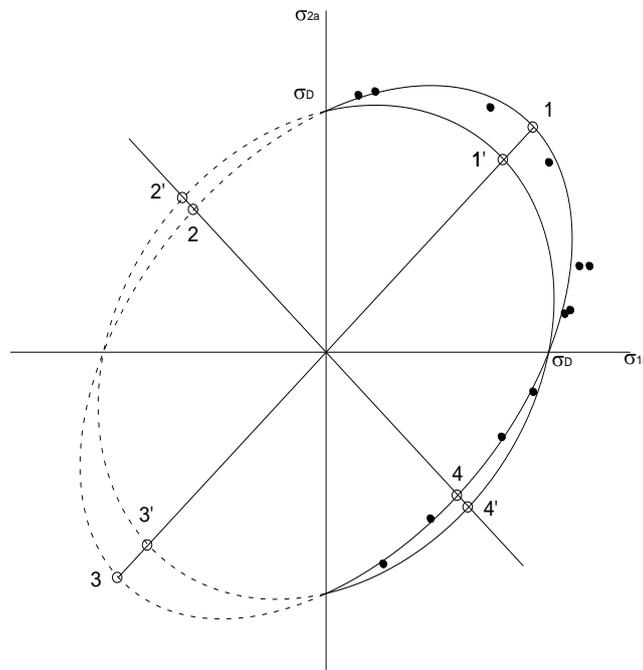


Fig 4.2.1/2 Fractura HCF, acero dúctil, $\sigma_{1a}\sigma_{2a}$, $\sigma_m=0$ (zona continua)

El comportamiento híbrido observado en los términos expuestos, en fatiga multiaxial simple alternante de alto ciclaje, ante planteamientos de criterios energéticos en base a la energía de deformación, hace pensar en una combinación²³ de aspecto metodológico, considerando dicha hibridación conjuntamente con la observación fenomenológica de la interacción entre tensiones $\sigma - \tau$, para lo cual será preciso definir alguna hipótesis contributiva que refleje dicha interacción $\sigma - \tau$, de la que pueden formar parte los criterios energéticos de [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924], y de [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919] en clave de amplitud de tensiones, dado que su dominio y recorrido funcional, en el intervalo de tensiones que produzcan tracción, cumplen los requisitos posibles para una interacción del tipo descrito, tal como se establece a continuación.

Tomando como base estos antecedentes, se formula la siguiente hipótesis

²³ En el caso estático, para el estado triaxial de tensiones, [HUBER, 1904] ya observó una posibilidad, pero proponiendo, exclusivamente para el triaxial estático, una utilización mixta de ambos criterios, [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924] y [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919], zonificada por intervalos discontinuos de utilización, sin llegar a plantearse la hibridación, posiblemente por el explícito tratamiento, básicamente estático, de los materiales metálicos de su época y el carácter significativamente incipiente de resultados experimentales al respecto.

H7

En un estado de tensión alternante multiaxial simple sobre materiales dúctiles, que produzca fatiga de alto ciclaje, se puede establecer una función local que quede definida por las siguientes características:

- La variable de control es tensional, en base a las tensiones actuantes, por amplitud de tensión indistintamente del sistema de referencia, o por los invariantes correspondientes a dichas amplitudes.
- La función local, análogamente a la ecuación (1.3.2.5), responderá a un criterio de fatiga, $\mathfrak{F}(\sigma)$, de carácter energético, global macroscópico y que tendrá por lo tanto el significado de una amplitud de tensión equivalente, σ_{eqa} , expresada en amplitudes de tensión o en sus invariantes correspondientes.
- El criterio de fatiga, $\mathfrak{F}(\sigma)$, indicado, deberá ser un criterio que, en base tensional, contemple la interacción entre tensiones normales y tensiones tangenciales, en el sentido fenomenológico observado en la fractura por fatiga de alto ciclaje. La interacción debe considerarse en el sentido de influencia entre tensiones de diferente tipología, es decir, en un sentido híbrido.

Cabe observar que el análisis realizado en este epígrafe ha permitido definir una hipótesis de carácter condicional más abierto que el que inicialmente se podría perfilar, con el consecuente rango de generalización, ya que ha sido posible aislar la concepción del criterio energético híbrido, a determinar, del de sus elementos de hibridación, los cuales podrán ser cualesquiera siempre que cumplan con la condición correspondiente, si bien, en este caso se optará por los criterios descritos, como elementos de hibridación, dadas sus propiedades al respecto, en metales dúctiles.

4.2.2 FUNCIÓN DE VARIACIÓN DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA EN HCF

Sea un estado material-solicitud que responde al perfil definido en la hipótesis H7, y que presenta una analogía, en cuanto resultados experimentales, equivalente a los observados para metales ferrosos dúctiles; entonces, se podrá considerar una función del tipo característico

$$F(\sigma) = \mathfrak{F}(\sigma) - \sigma_D = 0 \quad (4.2.2.1.a)$$

tal que

$$\mathfrak{F}(\sigma) = \mathfrak{F}(\sigma_{1a}, \sigma_{2a}, \sigma_{3a}) = \mathfrak{F}(I_{1a}, I_{2a}, I_{3a}) \quad (4.2.2.1.b)$$

siendo la función $F(\sigma)$ la función representante de una superficie límite de crecimiento de daño, bajo control de variable tensional, con σ_D límite de fatiga unidimensional, y que por lo tanto, responde a una base experimental que admite una representación de [WÖHLER, 1871], detallada en las Figuras 1.3.2/1 o 2.2.1/2, o una estimación bajo relaciones del tipo empírico correspondiente al ajuste clásico de la curva de Wöhler. En este caso, la función $\mathfrak{F}(\sigma)$ en (4.2.2.1.a) y (4.2.2.1.b) coincide con el concepto de tensión equivalente, a nivel de amplitudes de tensión o de sus invariantes, σ_{eqa} , establecida en (1.3.2.5). De ello se infiere que $\mathfrak{F}(\sigma)$ se derivará desde un criterio energético, global y macroscópico, atendiendo a las características de la hipótesis H7, por lo que en el contexto de este trabajo se denominará como Función de Variación de Energía de Deformación Elástica, *EDEVF* a la función $F(\sigma)$ que se determinará a

continuación, en su expresión general triaxial para materiales dúctiles con límite de fatiga real o convencional.

De lo ya expuesto es inmediata la consideración de que la función $F(\sigma)$ en (4.2.2.1.a) queda determinada mediante la adopción de un criterio de carácter híbrido para la función $\mathfrak{Z}(\sigma)$, a partir de los criterios de [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919] y de [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924], para lo que es necesario establecer una interacción viable entre las tensiones normales y tangenciales, σ y τ , es decir, una variabilidad continua entre ambas. Efectivamente, es posible obtener una función de tales características considerando el sentido implícito que subyace tanto en la concepción de un criterio energético, como en el tipo de función que representa. Para lo cual, previamente se generalizará al espacio tridimensional la Figura 4.2.1/2, que conducirá a la representación de la Fig.4.2.2/1 de las funciones asociadas a los criterios de [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924] y [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919], cilindro y elipsoide intersectado respectivamente, respecto en un sistema de referencia cartesiana ortogonal, de ecuaciones equivalentes a (4.1.2a) y (4.1.1a), que, en el contexto de la fatiga multiaxial responden, según lo expuesto en (4.2.2.1.a) y (4.2.2.1.b), a

$$3J_{2a} - \sigma_D^2 = 0 \quad (4.2.2.2)$$

$$I_{1a}^2 - 2(1+\nu)I_{2a}^2 - \sigma_D^2 = 0 \quad (4.2.2.3)$$

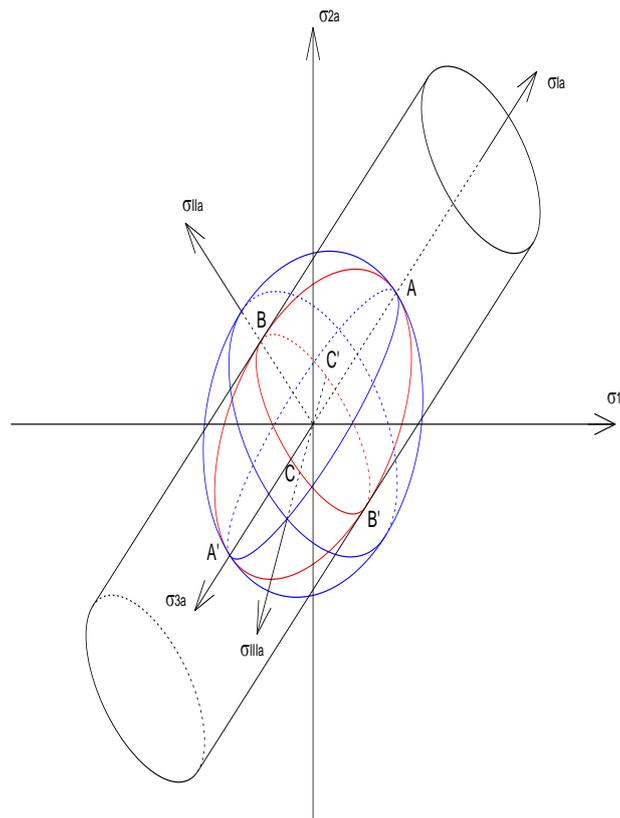


Fig.4.2.2/1. Cilindro de [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924] y elipsoide de [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919], correspondientes a sus criterios, para HCF alternante ($\sigma_m = 0$), conteniendo la Superficie de daño, de función $F(\sigma) = 0$

donde, $I_{1\sigma}, I_{2\sigma}$ son invariantes de las amplitudes de tensión del estado tensional, $J_{2\sigma}$ el invariante de las amplitudes de tensión del tensor desviador, σ_D el límite de fatiga simple asociado, y ν el coeficiente de Poisson.

Del análisis realizado es posible inferir el modelo de función que cumplirá el criterio híbrido a determinar. Para ello basta con considerar las condiciones de contorno y condiciones inherentes a una función energética con variables σ y τ .

Efectivamente, imponiendo las condiciones de contorno que cumplan los puntos principales resulta, según Beltrami A-A', en los que la energía de deformación elástica es máxima ($\sigma_{1a} = \sigma_{2a} = \sigma_{3a}$), y según Von Mises B-B'-C-C', donde la energía de distorsión es máxima, y nula la debida a la tensión hidrostática. Así, la función a determinar deberá cumplir que para el resto de valores de amplitud de tensión $\sigma_{1a}, \sigma_{2a}, \sigma_{3a}$, la energía de deformación elástica habrá de variar conjuntamente entre dichos valores A-A'-B-B'-C-C'. Esta función, que caracterizará al criterio energético y por lo tanto a la EDEVF, deberá verificar además las condiciones inherentes:

1. Ser continuamente derivable, al menos de clase C^2 , y convexa.
2. Ser cuadrática.
3. Estar expresada en términos de un tensor simétrico H^* (forma Hookiana equivalente), dado el régimen elástico en el que se desarrolla la HCF.

De acuerdo a estas tres condiciones, imponiendo las condiciones de contorno expuestas y según las condiciones propias 2 y 3, es posible pensar también en un nuevo elipsoide, indicado en la Figura 4.2.2/1, elipsoide tangente, contenido en [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924] y [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919], de eje mayor $AA' = 2\sigma_D / (1 - 2\nu)^{1/2}$, y de ejes menores $BB' = CC' = 2(2/3)^{1/2} \sigma_D$, cuya ecuación en función de dichos ejes resulta ser²⁴,

$$\frac{\sigma_{Ia}^2}{(\sigma_D / \sqrt{1 - 2\nu})^2} + \frac{\sigma_{IIa}^2}{(\sqrt{2/3} \cdot \sigma_D)^2} + \frac{\sigma_{IIIa}^2}{(\sqrt{2/3} \cdot \sigma_D)^2} = 1$$

o, de forma equivalente,

$$2(1 - 2\nu)\sigma_{Ia}^2 + 3\sigma_{IIa}^2 + 3\sigma_{IIIa}^2 - 2\sigma_D^2 = 0 \quad (4.2.2.4)$$

La expresión (4.2.2.4) permite definir la función EDEVF, $F(\sigma) = 0$, requerida, que expresa la superficie límite de crecimiento de daño, en ejes principales del cilindro y elipsoides correspondientes, $\sigma_{Ia}, \sigma_{IIa}, \sigma_{IIIa}$, que no coinciden con los ejes principales del estado tensional multiaxial, en cuyo sistema de referencia, $\sigma_{1a}, \sigma_{2a}, \sigma_{3a}$, considerando una transformación entre sus bases ortonormales, responderá a

²⁴ En el ámbito de plasticidad restringida, $\nu < 0.5$

$$\sigma_{ia} = [\xi]_{i,i} \sigma_{ia} \quad (4.2.2.5a)$$

$$\sigma_{ia} = [\xi]_{i,i}^{-1} \sigma_{ia} \quad (4.2.2.5b)$$

donde $[\xi]_{i,i}$, $i=I,II,III$, $i=1,2,3$, es la matriz que relaciona ambos sistemas de referencia, resultando

$$\frac{1}{6} [A(\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 + \sigma_{3a}^2) - 2B(\sigma_{1a}\sigma_{2a} + \sigma_{2a}\sigma_{3a} + \sigma_{3a}\sigma_{1a})] - \sigma_D^2 = 0 \quad (4.2.2.6a)$$

La expresión (4.2.2.6a) puede expresarse en las formas equivalentes

$$\frac{A}{6} \left[I_{1a}^2 - 2 \left(1 + \frac{B}{A} \right) I_{2a} \right] - \sigma_D^2 = 0 \quad (4.2.2.6b)$$

$$\frac{1}{6} [\sigma_a]^T [H^*] [\sigma_a] - \sigma_D^2 = 0 \quad (4.2.2.6c)$$

donde $\sigma_{1a}, \sigma_{2a}, \sigma_{3a}$ son las amplitudes de las tensiones principales; I_{1a}, I_{2a} , su primer y segundo invariantes y σ_D el límite de fatiga simple considerado. Los parámetros A y B vienen dados por

$$A = 4(2 - \nu), \quad B = (1 + 4\nu) \quad (4.2.2.6d)$$

y los tensores representados son

$$[\sigma_a] = \begin{bmatrix} \sigma_{1a} \\ \sigma_{2a} \\ \sigma_{3a} \end{bmatrix}, \quad [H^*] = A \begin{bmatrix} 1 & -\nu^* & -\nu^* \\ -\nu^* & 1 & -\nu^* \\ -\nu^* & -\nu^* & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.2.6e)$$

siendo ν , el coeficiente de Poisson, y $[H^*]$, $\nu^* = B/A$, por analogía, las formas equivalentes a $[H]$ y ν en éste contexto teórico.

Cualquiera de las ecuaciones (4.2.2.6a) a (4.2.2.6c) representa, en el sistema de referencia de las amplitudes de tensión principales, a la función *EDEVF*. Esta función representa la superficie límite de crecimiento de daño en un modelo macroscópico de fatiga de alto ciclaje, de tensiones medias nulas, para tensiones que no estén en el dominio de la compresión. Analizando este dominio, atendiendo a las amplitudes de tensión principal, resultará para *EDEVF* en HCF,

$$I_{1\sigma} = \sigma_{1\sigma} + \sigma_{2\sigma} + \sigma_{3\sigma} > 0, \quad \forall \sigma_{i\sigma} \quad (i=1,2,3) \quad (4.2.2.6f)$$

La inequación (4.2.2.6f) expresa la condición que deben cumplir las amplitudes de tensión, $\sigma_{i\sigma}$ ($i=1,2,3$), para que exista tracción en el punto del sólido analizado, lo que se identifica geoméricamente con la mitad del elipsoide obtenido de (4.2.2.4) o (4.2.2.6a-6c) de versor positivo de su eje principal mayor (parte superior en la Fig 4.2.2/1, ABCBC), al cual deberá descontársele el intervalo natural correspondiente al criterio de orden de las tensiones principales adoptado, generalmente el expresado en (1.3.2.5), en el caso triaxial simple de tensiones medias nulas estudiado.

Una vez definida y determinada la función EDEVF $F(\sigma)$, en su planteamiento genérico, HCF multiaxial simple de tensiones medias nulas, expresada por las ecuaciones (4.2.2.4) a (4.2.2.6f), en el contexto material que nos ocupa, resulta conveniente, como a continuación se abordará, su análisis específico triaxial, biaxial y uniaxial, así como la evolución del daño atendiendo a la superficie a la que representa; y, finalmente, su estudio en el caso común de tensión media no nula.

4.2.3 ANÁLISIS TRIAXIAL, BIAxIAL Y UNIAxIAL DE LA FUNCIÓN DE VARIACIÓN DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA EN HCF

Mediante el diagrama de interacción por invariantes, indicado en 4.1, se obtiene una visión conjunta inmediata de los estados de tensiones triaxial, biaxial y uniaxial del comportamiento de la función EDEVF, $F(\sigma)$, dado que su expresión en invariantes representa unificadamente a dichos estados de tensión, por lo que será utilizada para derivar, a partir del correspondiente análisis tensional, conclusiones específicas.

Por tanto, según lo introducido en el apartado 4.1, atendiendo a la expresión en invariantes, en base a la ecuación (4.2.2.6b), y considerando la denominación indicada para la ecuación (4.2.2.6e) de $\nu^* = B/A$, resulta la siguiente expresión

$$\frac{A}{6} [I_{1\sigma}^2 - 2(1+\nu^*)I_{2\sigma}] - \sigma_D^2 = 0 \quad (4.2.3.1)$$

Realizando una primera ordenación,

$$\frac{I_{1\sigma}^2}{\left(\frac{\sigma_D}{\sqrt{\frac{A}{6}}}\right)^2} - \text{sig}\{I_{2\sigma}\} \frac{(\sqrt{|I_{2\sigma}|})^2}{\left(\frac{\sigma_D}{\sqrt{\frac{A}{6} \cdot 2(1+\nu^*)}}\right)^2} = 1 \quad (4.2.3.2a)$$

y, operando en esta ecuación según los valores de los parámetros A y B de la ecuación (4.2.2.6d), considerando su expresión en un sistema cartesiano plano de ejes $I_{1\sigma}$ de abscisas, e $I_{2\sigma}^* = \text{sig}\{I_{2\sigma}\} \sqrt{|I_{2\sigma}|}$ de ordenadas, se obtienen las siguientes zonas inequacionales de ramas y singularidades, con sus denominaciones correspondientes,

Elipse,
$$\frac{I_{1a}^2}{\sigma_{c1}^2} + \frac{(\sqrt{|I_{2a}|})^2}{\sigma_{c2}^2} = 1, \quad \text{si } I_{2a} < 0 \quad (4.2.3.2b)$$

Hipérbola,
$$\frac{I_{1a}^2}{\sigma_{c1}^2} - \frac{(\sqrt{|I_{2a}|})^2}{\sigma_{c2}^2} = 1, \quad \text{si } I_{2a} > 0 \quad (4.2.3.2c)$$

Asíntotas hipérbola,
$$\sigma_{c1} \sqrt{|I_{2a}|} + \sigma_{c2} I_{1a} = 0$$

(cónica degenerada)

$$\sigma_{c1} \sqrt{|I_{2a}|} - \sigma_{c2} I_{1a} = 0 \quad (4.2.3.2d)$$

tal que $\sqrt{|I_{2a}|} \geq 0$

donde
$$\sigma_{c1} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{2(2-\nu)/3}}, \quad \sigma_{c2} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{3}} \quad (4.2.3.2e)$$

La función *EDEVF* propuesta, en HCF responde al dominio del diagrama de interacción en invariantes, primero y segundo de las amplitudes de tensión, que cumplan las ecuaciones (4.2.3.2b,c,d), referentes a las cónicas de semiejes σ_{c1} , σ_{c2} dados en (4.2.3.2e), dependiendo del límite de fatiga de ensayo uniaxial, σ_D y del coeficiente de Poisson, ν , lo que responde a la representación dada en la Figura 4.2.3/1, pero limitada al dominio de tracción, es decir, $I_{1a} > 0$, según la ecuación (4.2.2.6f)

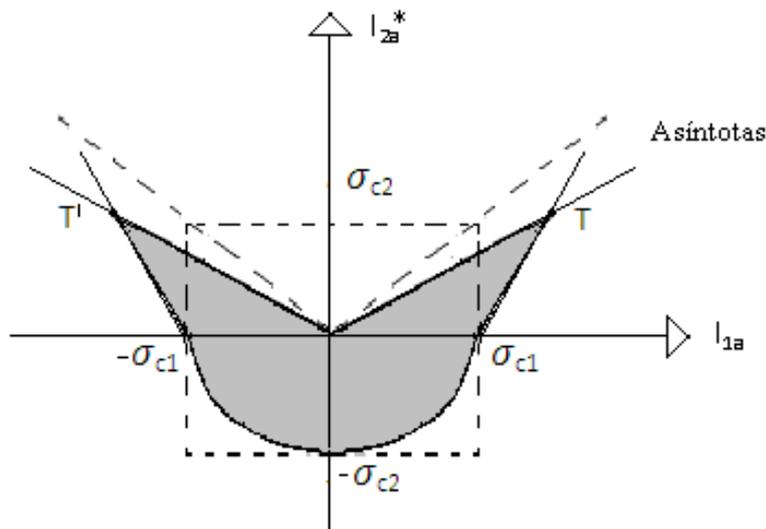


Fig. 4.2.3/1. Diagrama de interacción de la función *EDEVF*, en HCF, en invariantes I_{1a} , I_{2a} , ($I_{2a}^* = \text{sig}\{I_{2a}\}\sqrt{|I_{2a}|}$), de las amplitudes de tensión, según ecuaciones (4.2.3.2b,c,d,e). Los puntos, T-T', corresponden a la equitensión (triaxial)

La representación de función *EDEVF*, en HCF multiaxial de tensiones medias nulas, Fig.4.2.3/1, corrobora su carácter energético, en el contexto de la Mecánica del Medio Continuo Ampliada, tal como se desprende de su analogía con la Figura 4.1/1 (representaciones tipo de [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919] y de [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924] en el caso estático, de

extrapolación directa al cíclico). Ello confirma la hibridación que según la hipótesis introducida en el epígrafe 4.2.1, contempla conjuntamente la influencia, y su variación, entre tensiones normales y tangenciales, $\sigma - \tau$, evitando la problemática de la equitensión a tracción triaxial ilimitada de [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924], restringida en la Fig. 4.2.3/1 al intervalo **OT**, entre el origen **O** y el punto **T**, dominio²⁵ de tracción cíclica analizado, de primer invariante de amplitudes de tensión no nulo, ya indicado en (4.2.2.6f). En síntesis, el dominio indicado en la Fig.4.2.3/1, está limitado por la proyección, en el plano invariante, de la superficie límite de crecimiento de daño a la que representa la función EDEVF.

Otros dos valores característicos, de interés en este análisis, que se pueden inferir de dicho diagrama de interacción en invariantes, son los que se esperan para la tracción cíclica uniaxial y biaxial. Dentro de esta última, el caso particular de torsión pura, es decir, para igual valor absoluto de amplitud de tensión, pero de signo contrario, se abordará en breve, desde el punto de vista genérico tensional implícito en la ecuación (4.2.2.6a), dado que permite un análisis más ordenado.

Así, en un primer análisis, de forma sintética en términos de invariantes, el caso de tracción cíclica uniaxial se da cuando $I_{2a} = 0$, (puesto que solo una amplitud de tensión principal será no nula), resultando de las ecuaciones (4.2.3.2a,b,c,d) que la tensión uniaxial cíclica límite sería igual a σ_{c1} , en la Figura 4.2.3./1. De igual forma, el caso biaxial que da lugar a la torsión pura se da cuando $I_{1a} = 0$, (una amplitud de tensión principal nula y las otras dos de igual valor y signo contrario), resultando de las ecuaciones (4.2.3.2.a,b,c,d) que la amplitud de tensión cíclica límite, en valor absoluto, es σ_{c2} , también en la misma Figura 4.2.3./1. Ambos resultados se comentarán, dentro del análisis tensional, a continuación.

El análisis de la función EDEVF, desde el punto de vista genérico tensional, atiende básicamente a la discriminación del estado tensional en base a la ecuación (4.2.2.6a), puesto que facilita el tratamiento directo de la variable tensional correspondiente, aunque en la representación gráfica de los estados triaxial, biaxial y uniaxial no se disponga de un diagrama de interacción único y de simple expresión como el de invariantes (tratado previamente en la Figura 4.2.3/1. Si bien la ecuación (4.2.2.6a) por sí misma permitirá apreciar la forma geométrica real de la superficie límite de crecimiento de daño que representa la función EDEVF, en el sistema ortogonal cartesiano cuyos ejes coinciden con las ejes principales de amplitudes de tensión, $\sigma_{1a} \perp \sigma_{2a} \perp \sigma_{3a}$, coincidentes en general con los correspondientes a las deformaciones principales, tal como ya se ha indicado para los estados de fatiga multiaxial en los subapartados 1.3 y 2.2

En este marco específico, discriminaremos tensionalmente, en primer lugar el estado triaxial, en segundo el uniaxial, dejando para el final el biaxial dadas las características propias que presentan, en general y en el ámbito de la técnica en particular, ya referidas en los subapartados indicados anteriormente. Luego, puesto que ecuación tensional base de la función EDEVF, según la variable de amplitud de tensión, es la (4.2.2.6a),

$$\frac{1}{6} \left[A(\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 + \sigma_{3a}^2) - 2B(\sigma_{1a}\sigma_{2a} + \sigma_{2a}\sigma_{3a} + \sigma_{3a}\sigma_{1a}) \right] - \sigma_D^2 = 0 \quad (4.2.2.6a)$$

²⁵ En el dominio de equicompresión cíclica, no relevante en HCF, dicho dominio tendería al criterio energético de distorsión de [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924], Fig.4.1/1.b, no presentándose, pues, el punto T' de la Fig.4.2.3/1.

en la que los parámetros, A y B , atienden a la ecuación (4.2.2.6d) y σ_D es el límite de fatiga experimental de tracción uniaxial correspondiente:

En el estado tensional triaxial. En este estado, cuya superficie límite de crecimiento de daño según la función EDEVF que la representa es el elipsoide representado en la Figura 4.2.2/1, los puntos o valores relevantes se reducen al punto **A** de máximo valor de amplitud tensional cíclico a tracción, puesto que la zona de compresión no se considera. En este punto **A**, al coincidir con la dirección del versor de la trisectriz del sistema de referencia tensional, se obtiene en la ecuación (4.2.2.6a), ya que en este caso se cumple la condición $\sigma_{1a} = \sigma_{2a} = \sigma_{3a} \equiv \mathfrak{Z}(\sigma)$,

$$\text{Punto A (Fig.4.2.2/1),} \quad \frac{1}{6} [A(3\sigma_{1a}^2) - 2B(3\sigma_{1a}^2)] - \sigma_D^2 = 0$$

y, con los valores $A = 4(2-\nu)$, $B = 1+4\nu$ dados en la ecuación (4.2.26d), resulta

$$\mathfrak{Z}(\sigma) \equiv \sigma_{1a} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{3(1-2\nu)}} \quad (4.2.3.3a)$$

que, si se admite, como es propio de un acero estructural dúctil estándar, que $\nu \approx 0,3$, toma la forma

$$\mathfrak{Z}(\sigma) \equiv \sigma_{1a} = 0,91 \sigma_D \quad (4.2.3.3b)$$

La ecuación (4.2.3.3a), de plasticidad restringida $\nu < 0,5$, es un resultado evidente, ya que el punto **A** en la Figura 4.2.2/1 coincide con el vértice del semieje mayor de la elipse de [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919], que es condición de contorno en la función híbrida propuesta, EDEVF.

Por lo tanto, la ecuación (4.2.3.3a) ya se ajustaba a la fenomenología tratada, como corrobora la experiencia en el caso de metales dúctiles con límite de fatiga uniaxial σ_D , que en un acero dúctil estándar de coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, se estima con buena concordancia experimental al valor de la ecuación (4.2.3.3b), donde la función $\mathfrak{Z}(\sigma)$, regidora de la superficie límite de crecimiento de daño $F(\sigma)$, representa la amplitud de tensión equivalente máxima del criterio energético híbrido que conforma la función EDEVF.

El análisis tensional en los puntos **B-B'** y **C-C'** del elipsoide de EDEVF, Fig.4.2.2/1, se tratará posteriormente en el estado biaxial, dado que su valor de amplitud de tensión asociado es análogo al de cualquier punto de la sección transversal, del elipsoide estudiado, que contenga a dichos puntos **B-B'** y **C-C'**.

En el estado tensional uniaxial. La función EDEVF, cuya superficie límite de crecimiento de daño se reducirá a un punto sobre el eje de la amplitud de tensión correspondiente, ya que las

otras dos amplitudes de tensión serán nulas Así, eligiendo $\sigma_{2a} = \sigma_{3a} = 0$ y $\sigma_{1a} \neq 0$ como valor representativo de la amplitud de tensión uniaxial, se obtendrá en la ecuación (4.2.2.6a),

$$H = [\text{eje}_{\sigma_{a1}} \cap F(\sigma)] \quad , \quad \frac{1}{6} [A \sigma_{1a}^2 - 2B \cdot 0] - \sigma_D^2 = 0$$

Donde **H** es el punto de intersección entre el eje asociado a la tensión principal no nula y la función EDEF, $F(\sigma)$, cuya representación gráfica en la Figura 4.2.2/1 sólo hubiera sido posible acudiendo a procedimientos descriptivos en un contexto especializado.

Con los valores $A = 4(2-\nu)$, $B = 1+4\nu$ dados en la ecuación (4.2.26d), resulta

$$\mathfrak{Z}(\sigma) \equiv \sigma_{a1} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{\frac{2(2-\nu)}{3}}} \quad (4.2.3.4a)$$

valor que representa al punto **H**.

La ecuación (4.2.3.4a), si se admite de nuevo, como es propio de un acero estructural dúctil estándar, que $\nu \approx 0,3$, toma la forma

$$\mathfrak{Z}(\sigma) \equiv \sigma_{1a} = 0,94 \sigma_D \quad (4.2.3.4b)$$

La ecuación (4.2.3.4a) estima un valor (que se corresponde, por otra parte, con σ_{c1} , de la ecuación (4.2.3.2e) del diagrama de interacción de la función EDEFV en invariantes, Fig.4.2.3/1) del límite de fatiga uniaxial ligeramente inferior al esperado, σ_D , según la amplitud de tensión equivalente asociada a la función regidora del proceso, $\mathfrak{Z}(\sigma)$, derivada de la función EDEFV dada en (4.2.2.1ab).

Esta característica, que en el planteamiento estático se consideraría, como máximo, como una estimación de carácter aproximado, sin embargo, paradójicamente, en el planteamiento cíclico, puede considerarse dentro de un orden de aproximación²⁶ coherente con el fenómeno de la fatiga de alto ciclaje, dado que la dispersión avalada experimentalmente se ajusta al dominio de dicha estimación (una visualización de ello se puede observar posteriormente en la Fig. 4.2.3/4). Una prueba de dicho orden de magnitud, en el ámbito de la seguridad, la ofrece la valoración resultante para un acero dúctil estándar, de coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, tal como expresa la ecuación (4.2.3.4b).

²⁶ No se debe olvidar que en el ámbito del diseño de elementos estructurales, y más específicamente, en el ámbito de la construcción (ingeniería y arquitectura), se considera como excelente una aproximación en torno a una divergencia del 6 % , en general. No en vano, en este caso, se acepta como de buena aproximación el criterio de [TRESKA, 1864], de uso ampliamente aceptado en estados de cargas estáticas ,ecuación (1.3.3.45), cuya aproximación diverge hasta un 15% en el entorno de seguridad.

En el estado tensional biaxial. La función EDEVF requerirá en este estado un análisis propio más explícito, puesto que su superficie límite de crecimiento de daño se reduce a una curva contenida en el plano biaxial que se considere, resultado de la intersección de la correspondiente genérica triaxial con dicho plano biaxial, que en nuestro caso deberá responder a una elipse, diferente de la elipse de Von Mises, por analogía derivada de la geometría específica de la hibridación considerada, (elipsoide de [BELTRAMI, 1985]-[HAIGH, 1919] y cilindro de [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924], Fig.4.2.2/1. Es decir, el estado tensional cíclico biaxial, en HCF, debe poder ser derivado²⁷ del ciclo triaxial considerado.

En este contexto, tomando como referencia biaxial el plano $\sigma_{1a} \perp \sigma_{2a}$, ($\sigma_{3a} = 0$), se obtendrá a partir de la ecuación de la función EDEVF (4.2.2.6a), la expresión

$$\frac{1}{6} [A(\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2) - 2B \sigma_{1a} \sigma_{2a}] - \sigma_D^2 = 0 \quad (4.2.3.5a)$$

La ecuación (4.2.3.5a) representa a la función EDEVF, en el plano biaxial tensional considerado, en el dominio de tracción $I_{1a} = 0$, y responde a una superficie (curva) límite de crecimiento de daño en HCF, que geoméricamente se identifica con una cónica no degenerada que se corresponde con una elipse, Fig.4.2.3/2, cuya expresión canónica, atendiendo a los valores de A y B dados en la ecuación (4.2.2.6d), resulta

$$\frac{\sigma_{Ia}^2}{\left(\sqrt{\frac{6}{7-8\nu}} \sigma_D\right)^2} + \frac{\sigma_{IIa}^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_D\right)^2} = 1 \quad (4.2.3.5b)$$

²⁷ Lo que implica una continuidad combinada biaxial-triaxial, no necesariamente lineal ni determinada por la evolución y nivel de daño, en ensayos normalizados, pero sí de estimación de valor representativo equivalente, con desviaciones controlables y tendencia media ajustada, fundamentalmente en dicha superficie límite de fatiga (aspecto implícito que puede ser inferido del macroscópico, tal y como se indica en 2.4).

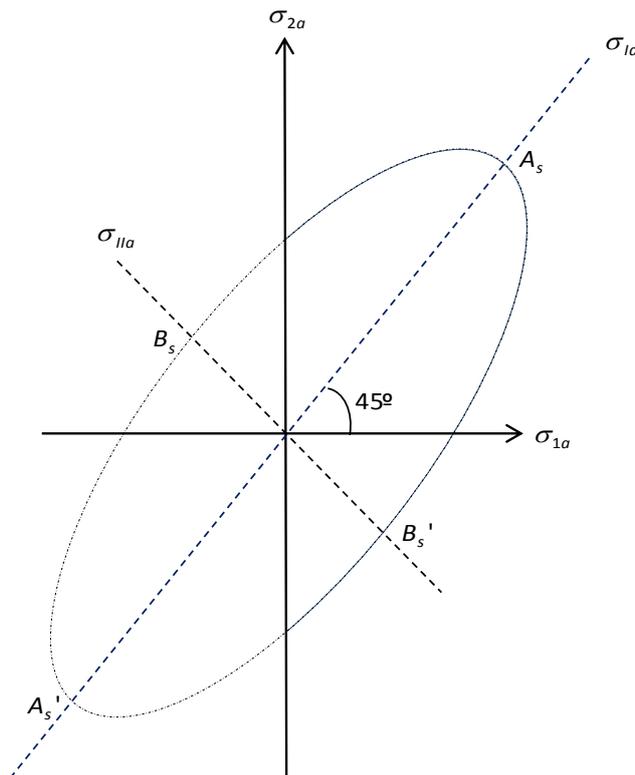


Fig. 4.2.3/2. Estado tensional biaxial según EDEVF, en HCF definida, $\sigma_{3a} = 0$. Los resultados experimentales no se han incluido por tratarse de los indicados en la Figura 4.2.1/2

La ecuación (4.2.3.5b) es congruente con el planteamiento del modelo energético propuesto, dado que cumple que los versores entre ejes principales de la elipse y del estado tensional biaxial analizado no varían respecto a la hibridación considerada, $\angle \sigma_{ia}, \sigma_{ia} = 45^\circ$, ($i, I=1,2$), como proyección de sus análogos de [BELTRAMI,1885]-[HAIGH, 1919] y [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924] (Fig.4.2.2/1), en dicho plano biaxial. Ello asegura la condición básica en fatiga multiaxial simple consistente en la coincidencia de las direcciones principales (genéricamente hablando, para que se conserven las direcciones principales de tensión y deformación, será suficiente que coincidan tales direcciones en los elementos funcionales de la hibridación).

Mostrada ya esta congruencia, se puede abordar la estimación de los puntos principales del estado biaxial según la función EDEVF, que corresponden a los puntos A_s y B_s' , extremos de los semiejes de la elipse resultante de la intersección del elipsoide de EDEVF con el plano $\sigma_{3a} = 0$, Fig.4.2.3/2, en el sentido del dominio de tracción considerado en HCF, $I_{1a} = 0$, dado que los valores de tensión en los puntos de intersección con los ejes, σ_{1a}, σ_{2a} , se corresponden con los obtenidos en el análisis uniaxial, según la ecuación (4.2.3.4ab).

Luego, para el punto A_s , donde $\sigma_{1a} = \sigma_{2a} \equiv \sigma_{As}$, en la ecuación (4.2.3.5a) se tiene

$$\text{Punto } \mathbf{A}_s \text{ (Fig.4.2.3/2), } \quad \frac{1}{6} \left[A(2\sigma_{As}^2) - 2B\sigma_{As}^2 \right] - \sigma_D^2 = 0$$

Con los valores $A = 4(2-\nu)$, $B = 1+4\nu$ dados en la ecuación (4.2.26d), resulta

$$\sigma_{As} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{\frac{7-8\nu}{3}}} \quad (4.2.3.5c)$$

que, si se admite, como es propio de un acero estructural dúctil estándar, que $\nu \approx 0,3$, toma la forma

$$\sigma_{As} = 0,81 \sigma_D \quad (4.2.3.5d)$$

donde σ_{As} será la amplitud de tensión equivalente estimada, $\mathfrak{T}(\sigma)$, en consonancia con las ecuaciones (4.2.2.1ab), asociada a la función de EDEVF en el estado tensional biaxial, si $\sigma_{1a} = \sigma_{2a} > 0$, es decir, en la zona de tracción. El valor obtenido es de buena estimación en HCF, del lado de la seguridad, tal como se desprende de los resultados experimentales, Fig.4.2.1/2, que, en un acero dúctil estándar se corresponde con la estimación dada por la ecuación (4.2.3.5d), respecto al límite de fatiga experimental uniaxial, σ_D .

La expresión (4.2.3.5c), como era de esperar, muestra su carácter de semieje mayor de la elipse dada por la ecuación (4.2.3.5b), Fig.4.2.3/2

De igual forma, para el punto \mathbf{B}'_s en el que $\sigma_1 = -\sigma_2 \equiv \sigma_{B'_s}$, en la ecuación (4.2.3.5a) se tendrá

$$\text{Punto } \mathbf{B}'_s \text{ (Fig.4.2.3/2), } \quad \frac{1}{6} \left[A(2\sigma_{B'_s}^2) + 2B\sigma_{B'_s}^2 \right] - \sigma_D^2 = 0$$

y, con los valores $A = 4(2-\nu)$, $B = 1+4\nu$ dados en la ecuación (4.2.26d), resulta

$$\sigma_{B'_s} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{3}} \quad (4.2.3.5e)$$

donde $\sigma_{B'_s}$, como era de esperar, coincide con el valor de condición de contorno impuesta en los puntos $\mathbf{B-B}' - \mathbf{C-C}'$, de la superficie cilíndrica de [VON MISES, 1913] –[HENCKY, 1924], Fig.4.2.2/1, respecto a la hibridación correspondiente a la energía de distorsión, que conforma la función EDEVF genérica, en el caso de torsión pura. Este valor también se puede inferir del diagrama de interacción en invariantes, Fig.4.2.3/1, definido como σ_{c2} en la ecuación (4.2.3.2e).

En este punto de desarrollo es necesario plantearse ahora la cuestión de la unicidad de la solución obtenida, de acuerdo con la definición y planteamiento desarrollado en base a las ecuaciones (4.2.2.1a,b) para la superficie límite de crecimiento de daño genérico considerando los mismos elementos de hibridación (criterios de [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919] y de [VON MISES, 1913]-[HENCKY, 1924]) y bajo las mismas condiciones de contorno impuestas por la fenomenología observada en fatiga de alto ciclaje de metales dúctiles con límite de fatiga. Es decir, es necesario plantearse si la función *EDEVF* dada en las ecuaciones (4.2.2.6a,b,c,d) expresada en términos de amplitudes de tensión principales, es única para los estados de tensión triaxial, biaxial y uniaxial, implicando por tanto que sus soluciones uniaxial y biaxial, indicadas en las ecuaciones (4.2.3.4a) y (4.2.3.5a), respectivamente, también son únicas.

Esta última cuestión es fundamental, dado que, independientemente del desarrollo formal considerado, es posible pensar en el desarrollo un argumento paralelo partiendo de un planteamiento a priori totalmente equivalente.

Efectivamente, es suficiente observar la Fig.4.2.1/2, para plantearse la posibilidad de la obtención de una solución genérica desde el análisis biaxial, puesto que las elipses en ella representadas responden a los criterios energéticos considerados. Así, en primera instancia, se podrá obtener la función de carácter energético relativa a la hibridación de las correspondientes biaxiales de [BELTRAMI, 1885]-[HAIGH, 1919] y [VON MISES,1913]-[HENCKY, 1924], lo que responderá también a una elipse en la que las condiciones de contorno inducidas de este planteamiento requerirán las amplitudes de tensión asociadas a los puntos **1'-3'** y **2-4**, Fig.4.2.1/2.

Tal elipse debería coincidir con la obtenida en el planteamiento inicial, de ecuación (4.2.3.5a). En caso contrario, habría que admitir alguna de estas dos posibilidades.

- Falta de unicidad de la solución, lo que significaría una insuficiencia de, o en, las premisas establecidas, es decir, la admisión del desarrollo de un modelo débil.
- La existencia de alguna característica errónea, adicional o insuficientemente considerada en una de las dos soluciones, a determinar, si es factible.

La discriminación entre estas dos opciones, dependería, exclusivamente, de la existencia de la solución genérica triaxial a partir de la biaxial obtenida en los términos expuestos y, en dicho supuesto de existencia, que su dominio se encuentre contenido en el contexto fenomenológico de la fatiga de alto ciclaje.

La confirmación de estas dos premisas indicaría que la modelización propuesta sería débil. Efectivamente, si tal dominio difiere del asociado a la fatiga de alto ciclaje, ello implicaría la validez inmediata del planteamiento y solución inicial genérica, *EDEVF* dados en la ecuación (4.2.3.5a) y sus derivadas biaxial y uniaxial. Esto supondría admitir la segunda posibilidad anteriormente descrita.

Así, se abordará a continuación la obtención de una solución genérica a partir del planteamiento del fenómeno estudiado desde su posición biaxial, considerando explícitamente el resultado fenomenológico implícito en la Fig.4.2.1/2, del que se infiere que los semiejes mayor y menor de la elipse que debería contemplar la hibridación estrictamente plana, en el caso de la supuesta congruencia de este planteamiento, y consecuentemente con

los criterios de [BELTRAMI, 1885]–[HAIGH,1919] y [VON MISES, 1913]–[HENCKY, 1924], para el estado tensional biaxial, $\sigma_{3a} = 0$, en las ecuaciones (4.2.2.2) y (4.2.2.3), la aplicación de las condiciones de contorno proporciona, respectivamente, los valores del semieje mayor (**origen-1'**) $= \sigma_D / \sqrt{1-\nu}$, y semieje menor (**origen-2**) $= \sigma_D / \sqrt{3/2}$, por lo que la elipse en sus ejes principales responderá a la ecuación

$$\frac{\sigma_{Ia}^2}{\left(\frac{\sigma_D}{\sqrt{1-\nu}}\right)^2} + \frac{\sigma_{IIa}^2}{\left(\frac{\sigma_D}{\sqrt{3/2}}\right)^2} = 1 \quad (4.2.3.6a)$$

donde σ_{Ia} , σ_{IIa} , corresponden a las amplitudes de tensión en el sistema cartesiano ortogonal de ejes principales de la elipse, (tal que **dirección-I** y **dirección-II** se corresponden respectivamente con **origen-1'** y **origen-2** de la Fig.4.2.1/2, y σ_D es el límite de fatiga experimental uniaxial.

La ecuación (4.2.3.6a), mediante una transformación entre bases ortonormales respecto de los ejes principales de las amplitudes de tensión σ_{1a} , σ_{2a} , en forma equivalente a la indicada en las ecuaciones (4.2.2.5a,b), se transforma en

$$\frac{1}{4} \left[(5-2\nu)(\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2) - 2(1+2\nu)(\sigma_{1a}\sigma_{2a}) \right] - \sigma_D^2 = 0 \quad (4.2.3.6b)$$

Las ecuaciones (4.2.3.6 a,b), deberían coincidir respectivamente con las ecuaciones (4.2.3.5 b,a) de la función EDEVF, derivadas del estado tensional triaxial genérico de la ecuación (4.2.2.6a), con $\sigma_{3a} = 0$. En la Figura 4.2.3/3 se manifiesta esta no coincidencia, que podría, como ya se ha indicado, poner en duda la unicidad de tal solución genérica.

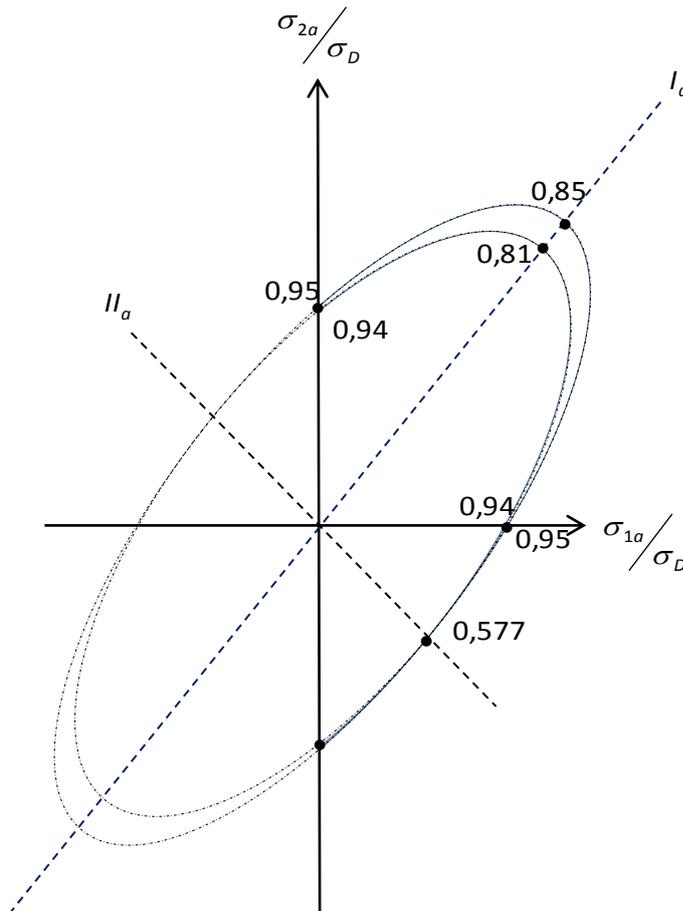


Fig. 4.2.3/3. Estado tensional biaxial según derivación triaxial inicial (elipse interna), y según biaxialidad estricta cuestionable (elipse externa). Problema de la unicidad de la solución de EDEVF.

Un primer argumento para establecer la unicidad de la solución genérica, ecuación (4.2.2.6a), y sus correspondiente biaxial dada en la ecuación (4.2.3.5a), podría residir en que, en un macroscópico elástico, la teoría de la elasticidad impone implícitamente la condición de la inferencia de las leyes biaxiales a partir de las triaxiales, dado que los estados planos de tensión no implican estados planos de deformación (puesto que existirá deformación en la dirección de tensión nula, consecuencia de la variación transversal ligada al coeficiente de Poisson, ν).

Sin embargo, en un sentido categóricamente estricto, este argumento no se puede considerar concluyente en el caso de la fatiga ante tensiones cíclicas, ni siquiera en la de alto ciclaje, puesto que, aunque se produce en régimen elástico, (sin deformación plástica aparente), tal régimen no explica de forma satisfactoria el proceso de deterioro.

Entonces, ha de considerarse el problema de la unicidad de la solución dentro del marco descrito y, por lo tanto, plantearse que la discrepante solución biaxial obtenida, dada en la ecuación (4.2.3.6 b,a), pudiese ser posible, lo que conduce a considerar la posible existencia de

otra expresión equivalente para la superficie límite de crecimiento de daño genérico, triaxial, de la cual se derive dicha biaxial.

En términos explícitos, ha de obtenerse una expresión genérica que cumpla el planteamiento energético definido, por lo que, si existe, deberá responder, geoméricamente, también a un elipsoide que, atendiendo a la ecuación (4.2.3.6b) y por analogía con la inferencia de un estado tensional triaxial equivalente a la transformación de la ecuación (4.2.2.6a) en la ecuación (4.2.3.5a), y operando inversamente mediante la restitución de la amplitud de tensión σ_{3a} , en la ecuación (4.2.3.6b) deberá tener por ecuación

$$\frac{1}{4}[(5-2\nu)(\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 + \sigma_{3a}^2) - 2(1+2\nu)(\sigma_{1a}\sigma_{2a} + \sigma_{2a}\sigma_{3a} + \sigma_{3a}\sigma_{1a})] - \sigma_D^2 = 0 \quad (4.2.3.6c)$$

La expresión (4.2.3.6c) atiende a una cuádrica no degenerada, elipsoide en este caso como cabía esperar, y su sentido de estado tensional triaxial con base energética (como se ha requerido, donde su intersección en el plano $\sigma_{3a} = 0$) evidencia de donde proviene, acorde con el planteamiento dado en la ecuación (4.2.3.6b,a).

Por tanto, la ecuación (4.2.3.6c) puede cuestionar la unidad de la solución inicial obtenida en la ecuación (4.2.2.6a), o entrar en competencia con la misma como posible representante de la función $EDEVF, F(\sigma)$, puesto que es consistente con las ecuaciones (4.2.2.1a,b).

Obviamente, las expresiones (4.2.2.6a) y (4.2.3.6c) no coinciden, de acuerdo con la ecuación (4.2.2.6d), pues $A \neq 5 - 2\nu$, $B \neq 1 + \nu$.

Ahora bien, se podría argumentar que la expresión (4.2.3.6c), no cumple como hibridación triaxial de los criterios energéticos considerados de [BELTRAMI, 1885]–[HAIGH, 1919] y [VON MISES, 1913]–[HENCKY, 1924].

Sin embargo, este mismo argumento se podría utilizar en sentido contrario atendiendo al estado tensional biaxial, puesto que su obtención inferida de la triaxial propuesta la ecuación (4.2.3.5a), no responde a una posible hibridación de dichos criterios energéticos en su expresión biaxial.

La discriminación no puede ser ya teórica en el contexto formalizado y requiere, pues, un análisis de carácter empírico, lo que implica atender a los valores que arroje, para el estado tensional triaxial analizado, la función determinada por analogía, ecuación (4.2.3.6c), desde la hibridación biaxial estricta considerada, frente a la estimación experimental esperada.

Así, estudiando el valor que se espera para la dirección de tracción máxima, que por analogía al elipsoide EDEVF, se corresponderá con el extremo del eje mayor, de versor positivo según la trisectriz, del elipsoide asociado a dicha función (4.2.3.6c), (punto equivalente al punto **A** de la Figura 4.2.2/1, que se denominará **A_d**). Es decir, para $\sigma_{1a} = \sigma_{2a} = \sigma_{3a} \equiv \sigma_{A_d}$ en la ecuación (4.2.3.6c) resultará

$$\frac{1}{4} \left[(5-2\nu)(3\sigma_{Ad}^2) - 2(1+2\nu)(3\sigma_{Ad}^2) \right] - \sigma_D^2 = 0$$

y, operando, se obtendrá

$$\sigma_{Ad} = \frac{\sigma_D}{3\sqrt{\frac{1-2\nu}{2}}} \quad (4.2.3.7a)$$

que, si se admite, como es propio de un acero estructural dúctil estándar, que $\nu \approx 0,3$, adopta el valor

$$\sigma_{Ad} = 1,054 \sigma_D \quad (4.2.3.7b)$$

La ecuación (4.2.2.7a), de plasticidad restringida, ofrece una estimación cuyo valor esperado tiende a presentar un desajuste respecto a la fenomenología tratada, en corroboración experimental en acero dúctil con límite de fatiga uniaxial, la expresión (4.2.3.7b) estima que el valor límite de crecimiento de daño, correspondiente al punto A_d analizado, máximo a tracción de su superficie asociada, sobrepasaría sin daño o ruptura local su límite de fatiga, σ_D , lo cual no es posible, induciendo así a pensar que el planteamiento de hibridación biaxial estricto, como alternativa a la discusión de la unicidad de la solución inicial obtenida, de carácter de hibridación triaxial, no es categóricamente correcto, o al menos incompleto, puesto que, por el contrario, dicha solución en base a la hibridación triaxial inicial propuesta, función *EDEVF*, arroja una estimación en base experimental consecuente con el fenómeno, que en dicho punto análogo, **A** (Fig.4.2.2/1), resulta ser muy ajustada, según la apreciación dada en la ecuación (4.2.3.3b), $0,91\sigma_D$, resultante del mismo análisis²⁸.

Definitivamente entonces se puede concluir positivamente sobre la unicidad de la solución propuesta, función *EDEVF*, dada por las ecuaciones (4.2.2.4) y (4.2.2.6a,b,c,d,e), en el contexto establecido²⁹.

Una vez visto el comportamiento de ambos planteamientos tratados, referente a la unicidad de la solución propuesta, cabría avanzar una posible explicación respecto a la divergencia del supuesto planteamiento de hibridación biaxial estricta frente a la hibridación triaxial (más allá

²⁸ Obsérvese que para la solución propuesta, se le denomina $\mathfrak{Z}(\sigma)$, en consonancia con las ecuaciones (4.2.2.1a,b), en la estimación triaxial, pues proviene de un criterio híbrido de otros triaxiales; sin embargo, σ_{Ad} no se corresponde con la hibridación triaxial sino con la supuesta discriminatoria biaxial.

²⁹ Un análisis más exhaustivo de las funciones triaxiales, inicial en ecuaciones (4.2.2.6a-d) y la discriminatoria (4.2.3.6c), comportaría la posibilidad de un campo material ideal teórico, respecto al rango del coeficiente de Poisson, tal que el valor de la tensión equivalente no supere el límite de fatiga experimental, σ_D , en el primer caso para $\nu \leq 0,333$, mientras que en el segundo caso solo sería factible si $\nu \leq 0,277$, sobre el que no constan evidencias triaxiales accesibles (que por otra parte deberían cumplirse no solo en la dirección de máxima tracción posible, sino ajustarse al resto de direcciones según el elipsoide asociado)

de la propia referencia experimental, y de la consideración del régimen elástico en virtud del continuo adoptado y la fenomenología inherente a la HCF).

Así, si se observa que las intersecciones del elipsoide de [BELTRAMI,1885]– HAIGH, 1919] y del cilindro de [VON MISES, 1913]–[HENCKY, 1924], Fig.4.2.2/1, con cualquiera de los planos coordinados asociados ortogonalmente a las amplitudes de tensión $\sigma_{1a}, \sigma_{2a}, \sigma_{3a}$, (en este caso con el plano $\sigma_{a3} = 0$), Fig.4.2.1/2, generan sendas elipses, aun proviniendo de cuádricas de distinto tipo, una de ellas degenerada, ha de concluirse que, mientras el gradiente de la superficie límite de crecimiento de daño en el caso de [VON MISES, 1913]–[HENCKY, 1924], no varía en sus puntos (es constante), sin embargo, el gradiente correspondiente a la de [BELTRAMI, 1885]–[HAIGH, 1919] sí varía en aquellos puntos de diferente sección transversal de su superficie.

Esta injerencia gradienta, siempre en el contexto definido para fatiga de alto ciclaje en materiales dúctiles, queda patente en la hibridación triaxial, dada en las ecuaciones (4.2.2.4) y (4.2.2.6a-e), observándose que dicha hibridación comporta por extensión una hibridación gradienta de resultante minimizada en la dirección del eje mayor del elipsoide correspondiente, punto **A** en Fig.4.2.2/1, frente al del elipsoide, ecuación (4.2.3.6c), producto de considerar una hibridación biaxial estricta de partida, según las ecuaciones (4.2.3.6a,b).

Efectivamente, la superficie (curva), límite de crecimiento de daño, derivada del elipsoide de [BELTRAMI, 1885]–[HAIGH, 1919], no tiene impuesta *a priori* ninguna condición sobre la evolución del gradiente de la superficie de la que proviene. Será ésta por tanto una condición de contorno sobre su “restitución” triaxial posterior.

La asimilación por analogía a la triaxial -paso de la ecuación (4.2.3.6b) a la ecuación (4.2.3.6c)- después de dicha hibridación biaxial estricta, libre de la anteriormente señalada ecuación de contorno, tiende a una maximización gradienta en la dirección del eje mayor del elipsoide resultante, ofreciendo un valor sobrestimado frente al de hibridación triaxial, tratada ésta, como ya se ha indicado, en correspondencia con la fenomenología experimental.

Un anticipo de esta apreciación se encuentra implícita en la Figura 4.2.3/3, en la que se observa que la elipse resultante de la posible hibridación biaxial estricta descrita contiene a la elipse derivada de la hibridación triaxial propuesta, resultado que, ligado a la convexidad de la superficie límite de crecimiento de daño y a la tipología de elipsoide propia del planteamiento energético expuesto, confirma la valoración indicada.

En la Figura 4.2.3/4 se resume el análisis anteriormente realizado, respecto a cada estado tensional, triaxial, biaxial y uniaxial, en base a la función EDEVF como función asociada a la superficie límite de crecimiento de daño, en fatiga de alto ciclaje, bajo tensión alternante, en metales dúctiles con límite de fatiga, σ_D , atendiendo a su estimación ante un acero dúctil estándar característico.

La analogía formal de la expresión de la función EDEVF con la expresión clásica de deformación elástica justifica la elección de la denominación dada a esta función.

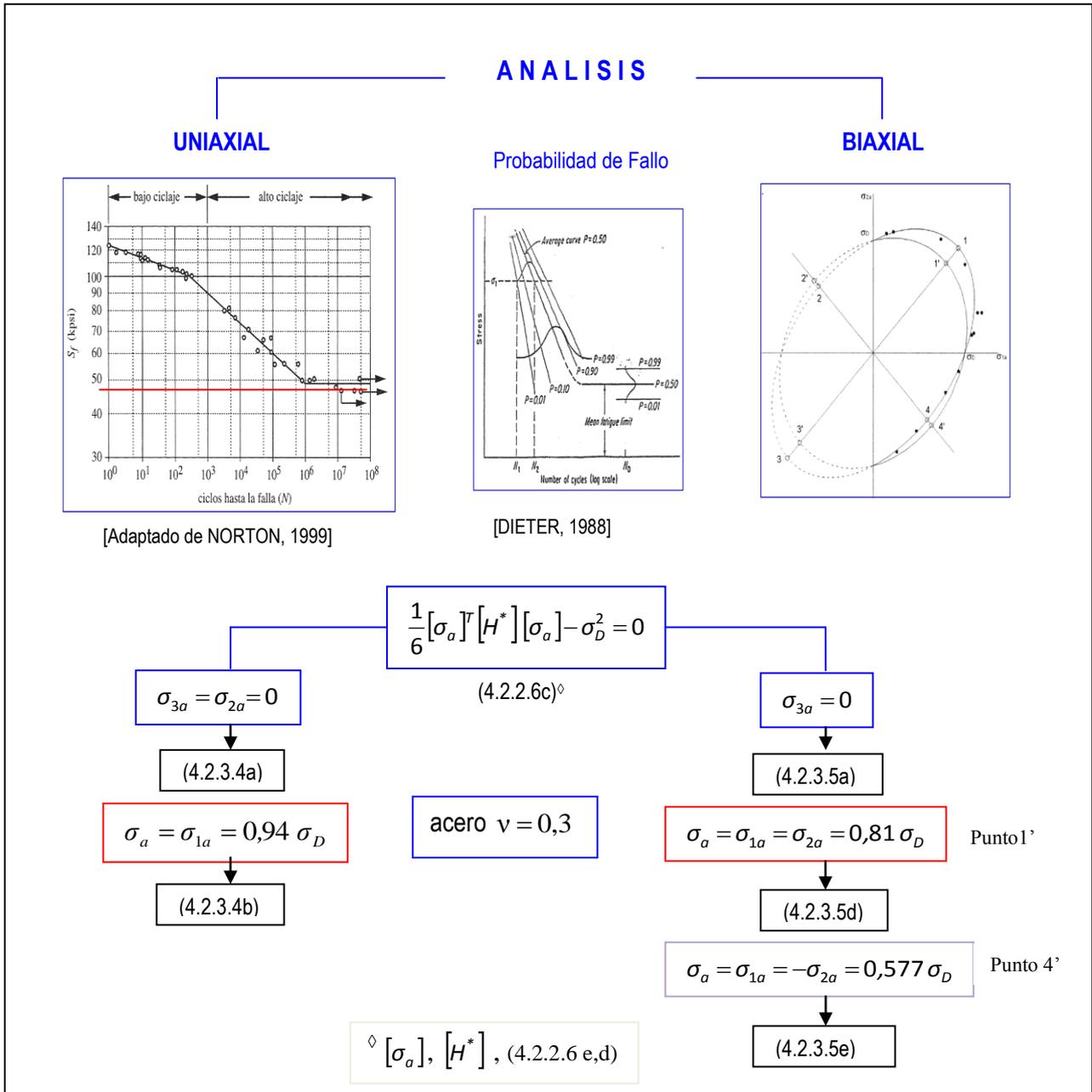


Fig.4.2.3/4. Función EDEVF propuesta. Variación de la energía de deformación elástica, de expresión formalmente análoga a la energía de deformación, en la estimación de la HCF, $\sigma_m = 0$, de un acero dúctil estándar

La ecuación (4.2.2.6c) utilizada en la Figura 4.2.3/4, para la función EDEVF, presenta en su configuración matricial un paralelismo análogo entre las matrices, $[H]$, en la ecuación constitutiva de Hooke (1.3.3.2), y $[H^*]$ en las ecuaciones (4.2.2.6e,d). De este paralelismo se infiere la existencia de un parámetro adimensional ν^* , que, en función del propio coeficiente de Poisson, ν , (responsable éste de la respuesta transversal del material), establece su

influencia en la fatiga multiaxial simple de alto ciclaje (régimen elástico), de acuerdo con el planteamiento energético desarrollado en este estudio. Por tanto, se concluye que el efecto de la fatiga de alto ciclaje, afecta al propio régimen elástico, y, en particular, al efecto transversal representado por el coeficiente de Poisson. Ello requiere un análisis específico de dicho parámetro ν^* , de interés por su influencia en la superficie límite de crecimiento del daño, análisis que se aborda a continuación³⁰. Efectivamente, en la expresión tratada de EDEVF, (4.2.2.6e,d), se definió ν^* como

$$\nu^* = B/A \quad , \quad A = 4(2-\nu) \quad , \quad B = 1+4\nu$$

de lo que resulta

$$\nu^* = \frac{1+4\nu}{4(2-\nu)} \quad (4.2.3.8)$$

La ecuación (4.2.3.8) define, pues, el parámetro ν^* , en función del coeficiente de Poisson, lo que, de acuerdo con lo expuesto, establece un cierto índice de la influencia sobre las propiedades elásticas de la variación de energía de deformación elástica acorde con la hibridación propuesta, en base a (4.2.2.2)-(4.2.2.3), y consecuencia esencialmente de la interacción $\sigma-\tau$ propuesta. Resulta de interés un estudio de la función $\nu^* = f(\nu)$ obtenida en (4.2.3.8). Un simple análisis de su evolución, recordando que el dominio del coeficiente de Poisson es $0 < \nu \leq 0,5$, se puede observar en la gráfica de la Fig.4.2.3/5

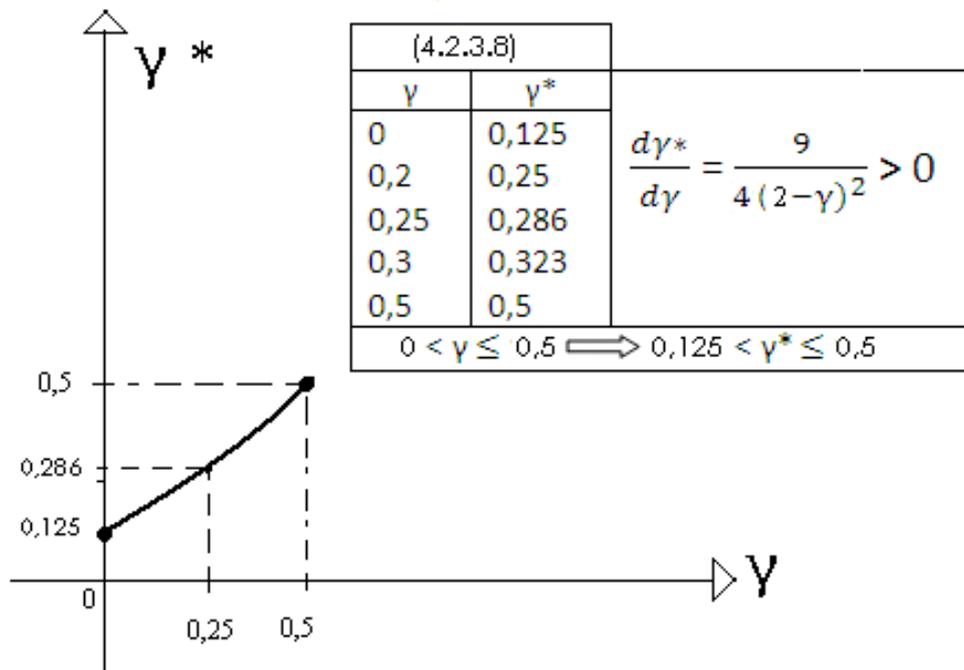


Fig. 4.2.3/5. Análisis del parámetro ν^* , en su campo de existencia

³⁰ De hecho, un sentido de apariencia equivalente, pero no trabajado ni consolidado en este aspecto, aparece implícitamente deslabonado prácticamente en toda la literatura del tratamiento genérico del daño, incluso con el uso de la variable fenomenológica, de daño, D, definida en (1.3.2.15) como se puede inferir de [LEMAITRE / CHABOCHE, 1985] (y/o de las referencias individuales a ambos autores)

Del análisis del parámetro ν^* , en la Figura 4.2.3/5, se desprenden de forma inmediata las siguientes conclusiones coherentes con la tendencia experimental observada fundamentalmente en el rango de los metales dúctiles:

- La influencia de la variación de la energía de deformación elástica tiende a minimizarse cuando el material es de alta plasticidad, como era de esperar, igualándose para $\nu=0,5$ (materiales de plasticidad ideal).
- En materiales de naturaleza más frágil, siempre en el dominio de los materiales dúctiles, esta influencia es inmediata (tal como es conocido en la mecánica de la fractura). Efectivamente, según el modelo *EDEVF*, si $\nu \rightarrow 0 \Rightarrow \nu^* \approx 0,125$. Si bien estos valores en el dominio frágil pueden no ser concluyentes, pues el modelo está basado en materiales dúctiles y más concretamente en metales. No siendo objeto de este trabajo el análisis frágil, la anterior consecuencia no deja de ser representativa de la regularidad del modelo propuesto.
- En la zona del dominio usual de los metales dúctiles, en el intervalo de $\nu \in]0,28, 0,35[$, se obtiene una variación para $\nu^* \in]0,31, 0,36[$, es decir, una mínima variación que oscila entre el 3,5% y el 10%. En concreto, para el acero estándar tratado, $\nu=0,3$, $\nu^*=0,323$, esta oscilación es del 7,67%, lo que confirma la regularidad del modelo en el análisis de la fatiga de alto ciclaje (régimen elástico, $\varepsilon_p \approx \varepsilon_{mp} \rightarrow 0$, dado el poco incremento de la relación ν^*/ν).

Cabe notar, para finalizar este análisis, que la regularidad observada es patente en la apreciación clásica de que, en metales dúctiles, la concreción experimental entre su resistencia máxima, σ_u , y su límite de fatiga, σ_D , tienda a una razón prácticamente constante en el caso de tensión media nula (0,5 en aceros dúctiles y 0,4 en metales dúctiles no ferrosos, tal como viene indicado en la Tabla 2.2.1/1, donde $\sigma_{D,oe}$ es σ_D , para $\sigma_m=0$).

4.2.4 ANÁLISIS BÁSICO DE LA EVOLUCIÓN DEL DAÑO, SEGÚN $F(\sigma)$ DE *EDEVF*

Puesto que la superficie límite de crecimiento de daño por definición es única, de acuerdo con la hipótesis **H7**, es lícito pensar tanto en la evolución de dicha superficie en su fase de crecimiento del daño, hasta la rotura, como en la posible existencia de alguna relación metodológica con otros procesos de daño conocidos. Se tratará por tanto esta cuestión a continuación.

Dado que la función *EDEVF* propuesta, ecuaciones (4.2.2.6a,b,c,d,e) ha de considerarse como una función de aproximación al problema estrictamente real, $F(\sigma)$ de (4.2.2.1a,b), y por lo tanto perteneciente a un conjunto de funciones de aproximación a dicha superficie límite de crecimiento de daño, es necesario considerarla en un contexto variacional. En este contexto, se puede considerar a la función *EDEVF* como función condición para que se dé la HCF local, es decir, ha de considerarse que el trabajo de daño por fatiga por unidad de volumen debe de presentar un valor estacionario (extremo condicionado) en función de la variable de daño, en este caso, según lo indicado en 3.3 y 4.2.1, la amplitud de tensión σ_{ija} . De esta forma, son de aplicación las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} dW^{HCF} &= \sigma_{ija} d\varepsilon_{ij}^{HCF} \\ F(\sigma_{ija}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.4.1)$$

donde dW^{HCF} , es el trabajo en el proceso de fatiga de alto ciclaje, por unidad de volumen, $d\varepsilon_{ij}^{HCF}$, es la deformación inherente al daño cíclico en HCF (y por lo tanto de característica microplástica, $\varepsilon_{ij} \approx \varepsilon_{mp}$) y $F(\sigma_{ija})=0$ la función representativa considerada de la superficie límite de crecimiento de daño. Aplicando el procedimiento de Lagrange, resulta la relación estacionaria

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ija}} [dW^{HCF} - d\lambda \cdot F(\sigma_{ija})] = 0 \quad (4.2.4.2)$$

siendo $d\lambda$ el multiplicador de Lagrange asociado al rango diferencial de la función dW^{HCF} referida, obteniéndose de (4.2.4.2), considerando (4.2.4.1),

$$d\varepsilon_{ij}^{HCF} = d\lambda \frac{\partial F(\sigma_{ija})}{\partial \sigma_{ija}} \quad (4.2.4.3a)$$

o

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{HCF} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ija}} \quad (4.2.4.3b)$$

donde (4.2.4.3a,b) expresan la evolución del crecimiento de daño, en términos de velocidad de deformación “elástica”, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{HCF}$, a partir de la superficie límite de crecimiento de daño definida $F(\sigma)=0$, (4.2.2.1a), exigiendo su convexidad, según el dominio establecido por el multiplicador de Lagrange, asociado linealmente a tal velocidad de crecimiento,

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\lambda} &= 0 \quad \text{si} \quad F(\sigma_{ija}) < 0 \\ \dot{\lambda} &\geq 0 \quad \text{si} \quad F(\sigma_{ija}) = 0 \end{aligned} \right. \quad (4.2.4.3c)$$

donde $\dot{\lambda}$, (al igual que $d\lambda$), expresa la proporcionalidad entre los gradientes de trabajo de deformación, por unidad de volumen y el avance de la superficie límite de crecimiento de daño, es decir, el “coste” en términos adimensionales, dependiente del material y de la carga.

Es inmediato establecer la analogía existente entre el fenómeno de HCF con los procesos de la evolución del crecimiento de deformación plástica, o del estudio del daño como variable fenomenológica D , acordes con la Teoría de la Plasticidad³¹ y las de Kuhn-Tucker, ecuación (2.3.3.74), de la teoría del daño continuo, correspondientemente.

³¹ [HILL, 2003] realiza un planteamiento equivalente, desde el punto de vista estacionario previa imposición de hipótesis plástica.

Sin embargo, el interés en este análisis básico de la evolución del crecimiento del daño por HCF, reside en dos aspectos esenciales.

El primero, inmediato pero fundamental, reside en la validación del modelo por consideraciones fenomenológicas. Así, mientras que la Teoría de la Plasticidad exige que no exista cambio de volumen en la fase plástica, y por lo tanto, que la tensión hidrostática no intervenga en su función de fluencia, ecuación (1.3.3.40), esta misma condición no es necesaria en HCF, pues, ya la cumple al no producirse deformación aparente, lo que en este caso resulta esencial para la validez inicial de la función *EDEVF* propuesta, (4.2.2.6. a,b,c,d,e), compatible con el tratamiento de la tensión hidrostática en el criterio de [BELTRAMI, 1885]–[HAIGH, 1919], validez que podrá generalizarse cuando se considere la ampliación de *EDEVF* para procesos de tensión media no nula.

El segundo aspecto, no menos significativo, hará evidente una paradoja inherente al planteamiento de la evolución del crecimiento del daño según las ecuaciones obtenidas para su estudio (4.2.4.3 a,b,c), que requieren formalmente la existencia de solución para todas sus incógnitas. En síntesis, la ecuación (4.2.4.3,a,b) debe ser resoluble en $\dot{\epsilon}_{ij}^{32}$, y en su parámetro asociado $\dot{\lambda}^{33}$ según un estado de carga cíclica de amplitud de tensión σ_{ija} , para el material tratado. Este aspecto resulta de interés por cuanto, de su análisis, cabe la posibilidad de extraer conclusiones sobre la naturaleza de las funciones de tipo $F(\sigma)$, como (4.2.2.1a), puesto que representan en la práctica a modelos hipotéticos de comportamiento ajustado a cierto tipo de materiales. A continuación se aborda este punto en el caso de la función propuesta, *EDEVF*, (4.2.2.6a,b,c,d,e).

Luego, considerando (4.2.2.6 a,c,d,e) de *EDEVF*, en (4.2.4.3b), según $F(\sigma_{ija})=0$ de (4.2.4.1), se obtiene, particularizando a las amplitudes de tensión principales, σ_{ia} , γ , por lo tanto, respecto a sus deformaciones principales ϵ_i ,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_i &= \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ia}} \\ F(\sigma_{ia}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.4.4a)$$

que operando, con $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ia}}$, resulta, en formalismo matricial,

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \\ \dot{\epsilon}_3 \end{bmatrix} &= \dot{\lambda} \frac{1}{3} A \begin{bmatrix} 1 & -\nu^* & -\nu^* \\ -\nu^* & 1 & -\nu^* \\ -\nu^* & -\nu^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1a} \\ \sigma_{2a} \\ \sigma_{3a} \end{bmatrix} \\ F(\sigma_{ia}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.4.4b)$$

³² De aquí en adelante se omitirá el superíndice HCF, por sencillez formal

³³ Sorprendentemente, en la práctica normal de la Teoría de la Plasticidad y de la Teoría de Daño continuo, se ha obviado el formalismo inherente al multiplicador de Lagrange, factor de proporcionalidad en este caso $\dot{\lambda}$, obteniéndose experimentalmente lo que produce un vacío formal en el análisis del mismo, esencialmente en cuanto a las limitaciones del modelo matemático-físico, del que surge.

o, según (4.2.2.6 e y c),

$$\left. \begin{aligned} [\dot{\epsilon}] &= \frac{1}{3} \lambda [H^*] [\sigma_a] \\ \frac{1}{6} [\sigma_a]^T [H^*] [\sigma_a] - \sigma_D^2 &= 0 \end{aligned} \right\} (4.2.4.4c)$$

donde la resolución del sistema condicionado (4.2.4.4c), es posible dentro del continuo tratado, pues su estructura formal, por analogía con los procesos elásticos, permite asegurar la inversibilidad de $[H^*]$. De acuerdo a ello, la ecuación (4.2.4.4c) puede escribirse como

$$\left. \begin{aligned} \lambda [\sigma_a] &= 3 [H^*]^{-1} [\dot{\epsilon}] \\ \frac{1}{6} [\sigma_a]^T [H^*] [\sigma_a] - \sigma_D^2 &= 0 \end{aligned} \right\} (4.2.4.4d)$$

$$\frac{1}{2\lambda} [\sigma_a]^T [H^*] [H^*]^{-1} [\dot{\epsilon}] - \sigma_D^2 = 0, \quad \lambda = \frac{[\sigma_a]^T [\dot{\epsilon}]}{2\sigma_D^2} \quad (4.2.4.4e)$$

o, en términos de las componentes de las tensiones y deformaciones principales

$$\lambda = \frac{\sigma_{1a} \dot{\epsilon}_1}{2\sigma_D^2} \quad (4.2.4.4f)$$

de forma que (4.2.4.4d) adopta la expresión

$$\frac{\sigma_{1a} \dot{\epsilon}_1 + \sigma_{2a} \dot{\epsilon}_2 + \sigma_{3a} \dot{\epsilon}_3}{2\sigma_D^2} \begin{bmatrix} \sigma_{1a} \\ \sigma_{2a} \\ \sigma_{3a} \end{bmatrix} = \frac{3}{A(1+\nu^*)(1-2\nu^*)} \begin{bmatrix} (1-\nu^*) & \nu^* & \nu^* \\ \nu^* & (1-\nu^*) & \nu^* \\ \nu^* & \nu^* & (1-\nu^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \\ \dot{\epsilon}_3 \end{bmatrix}$$

y, operando,

$$\begin{bmatrix} \left[A^* \left(\frac{\sigma_{1a}}{\sigma_D} \right)^2 - (1-\nu^*) \right] & \left[A^* \frac{\sigma_{1a}\sigma_{2a}}{\sigma_D^2} - \nu^* \right] & \left[A^* \frac{\sigma_{1a}\sigma_{3a}}{\sigma_D^2} - \nu^* \right] \\ \dots\dots & \left[A^* \left(\frac{\sigma_{2a}}{\sigma_D} \right)^2 - (1-\nu^*) \right] & \left[A^* \frac{\sigma_{2a}\sigma_{3a}}{\sigma_D^2} - \nu^* \right] \\ \dots\dots\dots & \text{(SIMETRICA)} & \left[A^* \left(\frac{\sigma_{3a}}{\sigma_D} \right)^2 - (1-\nu^*) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \\ \dot{\epsilon}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con

$$A^* = A(1+\nu^*)(1-2\nu^*)/6 \quad (4.2.4.4g)$$

Las expresiones (4.2.4.4efg) resultan de interés puesto que tratan de explicar la evolución teórica del daño a partir de la función representativa de la superficie de límite de crecimiento de daño por HCF. Proporcionan un amplio abanico de vías de análisis que se escapa del objeto de este trabajo, pero de las que, sin embargo, indistintamente de que posteriormente se traten aspectos particulares inherentes al problema abordado, cabe referirse sucintamente a las siguientes consecuencias, incluida una posible paradoja derivada de la propia resolución formal realizada:

- La expresión del factor $\dot{\lambda}$ deducida según la función *EDEVF* en (4.2.4.4ef) resulta ser directamente proporcional a la potencia del propio proceso de fatiga, que no puede ser, por definición, negativa, e inversamente proporcional al cuadrado del límite de fatiga, por lo que, necesariamente, han de verificarse las ecuaciones (4.2.4.4c).
- Sin embargo, la ecuación (4.2.4.4g) es un sistema homogéneo, de solución trivial ($\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = 0$) en la mayor parte de las configuraciones experimentales. Efectivamente, la expresión tensorial en (4.2.4.4g) depende del material y su determinante, en un caso general, no será nulo. Ahora bien, este tensor puede tener determinante nulo, en cuyo caso las velocidades de deformación no pueden ser determinadas, necesitándose, por tanto, condiciones adicionales para obtener la velocidad de crecimiento de daño, hecho totalmente coherente con la naturaleza de irreversibilidad de este proceso de generación de daño, en el contexto formal de los modelos de Kuhn-Tucker, con la posibilidad que ello genera en la definición de modelos de acoplamiento elástico-daño, plástico-daño o elastoplástico-daño.
- Una aproximación uniaxial, $\sigma_a = \sigma_{1a}$, permite concluir que la condición de determinante nulo implica la condición

$$\left(-1+2\nu^*\right)\left(-A^*\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_D}\right)^2+1-2\nu^{*2}-\nu^*\right)=0 \quad (4.2.4.5)$$

Dado que el primer factor ha de ser no nulo, ya que se está considerando un material dúctil, pero lejos de la plasticidad pura, entonces

$$\begin{aligned} \left(-A^*\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_D}\right)^2+1-2\nu^{*2}-\nu^*\right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_D}\right)^2 &= \frac{(1+\nu^*)(1-2\nu^*)}{A^*} = \frac{6}{A} = \frac{3}{2(2-\nu)} \end{aligned} \quad (4.2.4.6)$$

donde se han tenido en cuenta las expresiones (4.2.4.4g) y (4.2.2.6d). La expresión (4.2.4.6) proporciona una amplitud de tensión uniaxial dada por

$$\sigma_a = \sigma_D \cdot \sqrt{\frac{3}{2(2-\nu)}} \quad (4.2.4.7)$$

coincidente con el límite de fatiga esperado por la función *EDEVF* en el caso uniaxial, según indica la expresión (4.2.3.4a). Se obtiene por tanto en el caso uniaxial un

resultado coherente con el hecho de que sólo la tensión límite de crecimiento de daño va a proporcionar una velocidad de crecimiento de daño positiva, aunque sin determinar. Un análisis de las condiciones asociadas al subespacio propio correspondiente en (4.2.4.3g) conduce a las ecuaciones:

$$\dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_3 = -\nu^* \varepsilon_1 \quad (4.2.4.8)$$

donde el subíndice 1 se corresponde con la dirección asignada al esfuerzo uniaxial, y de acuerdo con (4.2.3.8). La expresión obtenida en (4.2.4.8) guarda un paralelismo formal absoluto con las expresiones de régimen elástico de deformación en las direcciones transversales a la de una tensión normal determinada.

Los resultados (4.2.4.7) y (4.2.4.8) abren la posibilidad de que puedan ser generalizadas en un modelo multiaxial,

4.2.5 FATIGA MULTIAXIAL HCF, PARA TENSIONES MEDIAS NO NULAS, CONSIDERANDO LA FUNCIÓN EDEVF

Del análisis bibliográfico realizado con respecto al tratamiento de la influencia del efecto de la tensión media no nula, y su resolución a partir del estado equivalente en amplitudes de tensión, de tensión media nula, realizado en la sección 2.3.1, se desprende que el modelo propuesto, para fatiga multiaxial de alto ciclaje, EDEVF (4.2.2.6 a,b,c,d,e) para tensión nula, es un modelo susceptible de ser generalizado a una configuración del tipo (2.3.1.25)-(2.3.1.26), de tal forma que, procediendo por analogía, considerando las expresiones (4.2.2.6b) según $\mathfrak{S}(\sigma)$ de (4.2.2.1a), se obtiene

$$\sigma_{eqa} = \mathfrak{S}(\sigma) = \left[\frac{A}{6} \left(I_{1a}^2 - 2 \left(1 + \frac{B}{A} \right) \right) I_{2a} \right]^{1/2} \quad (4.2.5.1a)$$

$$\sigma_{eqm} = \left[\frac{A}{6} \left(I_{1m}^2 - 2 \left(1 + \frac{B}{A} \right) \right) I_{2m} \right]^{1/2} \quad (4.2.5.1b)$$

$$\sigma_{eqa} = f_m \left[\sigma_D, \sigma_{eqm} \right] \quad (4.2.5.2)$$

donde I_{1a} , I_{2a} , A y B responden a los términos de la función EDEVF propuesta en las ecuaciones (4.2.2.6 a,b,c,d,e), y por extensión natural³⁴, I_{1m} , I_{2m} son el primer y segundo

³⁴ Resulta evidente que, dada la enorme gama de metales dúctiles, incluidas aleaciones, que a expensas de otro planteamiento teórico, e industrial de costo factible, se deje abierta la utilización del tipo de función, σ_{eqm} , para tensiones medias no nulas, como ajuste más adecuado a la experiencia, por lo que aquí solamente se ha tratado de expresar en (4.2.5.2) la aplicabilidad de EDEVF de forma global, considerando la hibridación de (4.2.2.2) y (4.2.2.3), extensible a las tensiones medias. Sin embargo, se puede aceptar según (4.2.5.2), con EDEVF (4.2.5.1a), cualquier otra función de las referencias en este punto.

invariantes de las tensiones medias, luego con carácter de componente estática, y f_m una función de ajuste que puede ser cualquiera de las indicadas en (2.3.1.11a) a (2.3.1.17), como efecto sobre el límite de fatiga, σ_D , de ensayo uniaxial considerado para tensiones medias nulas.

De este tratamiento se infiere que la superficie límite de crecimiento de daño se ve afectada por las tensiones medias, reduciéndose su dominio no dañado, a la vez que su forma geométrica no queda bien definida al depender del modelo de ajuste expresado en (4.2.5.2), característica que dificultará un análisis semejante al realizado en el punto anterior para el factor de proporcionalidad λ .

4.3 Conclusiones

CP4.1

La fenomenología estricta, previa a la fractura decisiva, en la fatiga de alto ciclaje de metales dúctiles, conduce a considerar el avance del daño mediante procesos de deformación propios de tensiones normales y tangenciales en actuación conjunta de acción gradual, asociadas al estado tensional cíclico impuesto, postulándose por tanto, como variables del sistema, las componentes del tensor de amplitudes de tensión σ_{ija} .

CP4.2

El planteamiento de variable tensional admite la revisión de los criterios de fallo, por fluencia o rotura, tanto de carga estática como cíclica, entre los que no existe ninguno que predomine especialmente ante estados de multiaxiales de fatiga de alto ciclaje, asociando la función que define el criterio de fallo a una superficie de crecimiento de daño.

CP4.3

Una función de tensión equivalente en base a un criterio energético, en variable de tensión, facilita la definición y análisis de la evolución del crecimiento del daño, o limitación, si existe, del mismo, dada su característica de continuidad e inserción en una formalización termodinámica.

CP4.4

La superficie de crecimiento de daño en base a una función de tensión equivalente de criterio energético adecuado es congruente con la distribución energética debida a las dos tipologías de tensión que rigen el proceso, normal y tangencial, facilitando el análisis de hibridaciones acordes a una fenomenología comparativa entre ambas tipologías.

CP4.5

Se ha postulado la hibridación entre los criterios base de Beltrami – Haigh y de Von Mises – Hencky como acción gradual entre las amplitudes de tensión normal y tangencial sobre el material, con condiciones de contorno máximas normales para el primero y máximas tangenciales para el segundo, con nulidad recíproca en ambos casos. La función así obtenida, *EDEVF*, que modeliza la superficie límite de crecimiento de daño, presenta las dos siguientes propiedades:

- Unicidad, con óptimo ajuste experimental indistintamente de que el estado tensional sea uniaxial, biaxial, o triaxial
- Invariancia de la estructura característica del régimen elástico, usual en la HCF, estableciendo un parámetro ν^* , función del coeficiente de Poisson, básicamente en el rango de la ductilidad

CP4.6

Una función de las características de criterio energético de daño de variable tensional, como variable interna, presenta un paralelismo formal, a considerar, con modelos de plasticidad y daño, posibilitando la formulación de nuevas modelizaciones de acoplamientos elásticos o plásticos con el daño.

CP4.7

EDEVF, como función de aproximación, admite el análisis variacional que determina la analogía con la expresión de la evolución del crecimiento de daño de Kuhn-Tucker. Se ha definido este modelo de crecimiento de daño dependiente de la potencia del proceso de fatiga, delimitándose así mismo las condiciones que determinan la irreversibilidad del proceso de fatiga a alto ciclaje.

CP4.8

Se ha comprobado la extensión del modelo EDEVF, desarrollado para tensión media nula, a procesos sometidos a tensión media no nula.

5 CONTRIBUCIÓN A LA VARIACIÓN DE LA RIGIDEZ DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES POR FATIGA DE HCF

Una de las magnitudes esenciales en el cálculo estructural es la rigidez de sus elementos. En los puntos anteriores de esta memoria se ha definido un contexto formal de tratamiento de la fatiga en procesos de alto ciclaje. Este contexto formal no contempla explícitamente la introducción de una variable de daño, incidiendo en que la descripción fenomenológica puede realizarse atendiendo exclusivamente a la tensión aplicada. Dada entonces la importancia que ejerce la rigidez, y su forma diferenciada de manifestarse cuantitativamente en la práctica totalidad de problemas asociados con el análisis estructural en construcción, y en especial si puede afectar a su vida en servicio, resulta de interés inmediato su estudio.

El objetivo, pues, de este apartado, es la revisión básica de la influencia de la fatiga de alto ciclaje en la rigidez efectiva del material, desde un punto de vista global sobre la pieza y su consideración sobre elementos básicos estructurales. Ello permitirá la definición de un procedimiento de análisis de los efectos de la fatiga de alto ciclaje en sistemas estructurales.

El desarrollo metodológico de este objetivo incluirá la introducción de un índice de concentración de tensión por fatiga. Se comprobará que su aplicación en procesos de alto ciclaje permite reproducir la expresión clásica de [BASQUIN, 1910] admitiendo una distribución de [WEIBULL, 1939, 1949, 1961] de este índice en función del número de ciclos aplicado. En términos de este mismo índice se definirá posteriormente la rigidez efectiva de una barra sometida a fatiga por alto ciclaje, a partir de la que podrá abordarse posteriormente un procedimiento sistemático para la evaluación de los efectos sobre los esfuerzos internos en una estructura sometida, en su comportamiento en servicio, a procesos de fatiga por alto ciclaje.

5.1 Índice de concentración de tensión por fatiga en la evolución de la HCF

El estado de tensión existente en un punto, $[\sigma_p(t)]$, de un material sometido a un proceso de alto ciclaje, en el contexto del continuo puede expresarse como

$$[\sigma_p(t)] = [\sigma_D(t)] + [\sigma(t)] \quad (5.1.1)$$

donde $[\sigma(t)]$ es el estado de tensión correspondiente a la tensión exterior o tensión aplicada, según (1.3.2.1), y $[\sigma_D(t)]$ es el estado de tensión adicional existente en el punto, provocada por el propio proceso de fatiga. La ecuación (5.1.1) sólo responde entonces a la consideración evidente de la variación del tensor de tensiones en un punto de un medio sometido a HCF. Es también evidente que esta variación tensional va a depender del propio estado de tensión en el punto derivado del estado de cargas aplicado.

Admitiendo un proceso de generación de daño isótropo en cada instante del proceso HCF, es válida la ecuación

$$[\sigma_p(t)] = \frac{\phi_{D0}}{\phi_D(t)} [\sigma(t)] \quad (3.2.26)$$

La consideración simultánea de las ecuaciones (3.2.26) y (5.1.1) indica que se puede definir una función temporal $K_\varphi(t)$, adimensional, siempre en el contexto de daño isótropo, definida por las expresiones:

$$[\sigma_D(t)] = K_\varphi(t) [\sigma(t)] \quad (5.1.2)$$

$$K_\varphi(t) \geq 0 \quad \dot{K}_\varphi(t) \geq 0 \quad (5.1.3)$$

$K_\varphi(t)$ puede denominarse como **índice de concentración de tensión por fatiga**. El valor positivo de esta función indica un aumento del valor absoluto de cualquier componente del tensor de tensiones, igual para todas ellas en un proceso isótropo, mientras que la exigencia de que su derivada temporal sea positiva se introduce para asegurar el crecimiento de este índice con el tiempo, de acuerdo con el carácter irreversible del proceso de fatiga. La tensión efectiva en un punto puede expresarse en función de este índice, de acuerdo a (5.1.1), como

$$[\sigma_p(t)] = (1 + K_\varphi(t)) [\sigma(t)] = \frac{\phi_{D0}}{\phi_D(t)} [\sigma(t)] \quad (5.1.4)$$

En un proceso de fatiga a alto ciclaje, en el análisis de la rotura local-global, $[\sigma_p(t)] \rightarrow [\sigma_u]$, donde $[\sigma_u]$ es el estado tensional en el punto P asociado a la tensión de rotura. La ecuación (5.1.4) adquiere la forma, limitada ahora al contexto del ensayo uniaxial,

$$\sigma_u = (1 + K_\varphi(t)) \sigma(t) \quad (5.1.5)$$

La función $K_\varphi(t)$ es creciente, por lo que la tensión aplicable³⁵ $\sigma(t)$ será decreciente. Si se trata de una tensión cíclica, el índice de concentración de tensiones $K_\varphi(t)$ crece, en un ciclo, desde un valor inicial $K_\varphi(t)$ a un valor $K_\varphi(t+T)$, donde T es el período de la carga cíclica y, por su carácter irreversible, no retorna al valor $K_\varphi(t)$, sino que se estabiliza en $K_\varphi(t+T)$, siendo este último valor el valor de partida para el incremento correspondiente al siguiente ciclo. De esta forma, el factor $K_\varphi(t)$ es, en realidad, dependiente del número de ciclos aplicados en el proceso.

De hecho, analizando la ecuación (5.1.5) en su evolución en un período, se puede representar la tensión aplicada como, en la forma más sencilla,

$$\sigma(t) = \sigma_a(t) \text{sen}(\omega t) \quad (5.1.6)$$

De esta forma, admitiendo que, en este ciclo, la amplitud $\sigma_a(t) = \sigma_a$ permanece constante, la variación con el tiempo de la ecuación (5.1.5) conduce a

$$0 = \dot{K}_\varphi(t) \text{sen}(\omega t) - (1 + K_\varphi(t)) (\omega \cos(\omega t)) \quad (5.1.7)$$

Ahora bien, atendiendo a la fenomenología de la generación de daño, sólo ha de considerarse la ecuación (5.1.6) en sus valores de tracción, limitándose entonces su argumento al intervalo $0 \leq \omega t \leq \pi$. Por otra parte, la ecuación (5.1.7) sólo proporcionará un valor positivo dentro del anterior intervalo cuando la ecuación (5.1.3) indica que sólo se producirá crecimiento de la función $K_\varphi(t)$ en el intervalo $0 \leq \omega t \leq \pi/2$. Por tanto, expresado en otros términos, el daño será creciente en cada ciclo en aquéllos instantes en que la tensión de tracción sea creciente, es decir, sólo en la cuarta parte de un intervalo.

Así, el índice de concentración de tensiones crece a medida que aumenta cada ciclo de fallo aplicado y ello sólo en la zona de tensiones de tracción crecientes; consecuentemente, la amplitud de la tensión cíclica aplicable (5.1.6) decrecerá con cada ciclo de aumento al fallo. Por ello, se podrá representar tanto el índice de concentración de tensiones como la amplitud de la tensión aplicada como funciones del número de ciclos realizados N , tal como se presenta a continuación.

La síntesis más usual de la fenomenología del proceso de fatiga, descrita en 2.2 y 1.3, se expresa mediante la representación de [WÖHLER, 1871] que, en metales dúctiles con límite de fatiga, responde a la Fig.1.3.2/1 (o Fig.2.2.1/2), de acuerdo con las expresiones (1.3.2.3a, b,c), donde σ_u , es la tensión última a rotura del material y σ_D , su límite de fatiga, expresados ambos valores en amplitud de tensión, en función del número de ciclos N . Recuérdese que toda amplitud de tensión se ajusta a la expresión $\sigma_a(N) = \sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$, siendo σ_{\max} , σ_{\min} , las tensiones máxima y mínima del ciclo. La curva de Wöhler, (Fig.2.2.1/2), estima entonces el número de ciclos para los que se produce la rotura para una amplitud de tensión $\sigma_a(N)$ (o viceversa), en régimen elástico, característica acorde con la fatiga HCF. Dado que la

³⁵ Se considera el análisis sobre los resultados experimentales característicos, según epígrafe 2.2.1, para grupos de probetas a distintos niveles de amplitud de tensión, donde la variable t estará acorde con el número de ciclos, N , para los que se produce el fallo, como se infiere de lo expuesto posteriormente en este apartado.

rotura se produce cuando se alcanza un valor de tensión σ_u , entonces puede plantearse genéricamente, de acuerdo a lo expuesto anteriormente,

$$\sigma_u = (1 + K_\varphi(N)) \sigma_a(N) \quad (5.1.8)$$

En la expresión (5.1.8), se denominará al término $(1 + K_\varphi(N))$ **como factor de amplificación de la tensión cíclica** necesario para que una determinada amplitud de tensión produzca rotura por HCF. La expresión (5.1.8) no debe confundirse con la forma análoga de [INGLIS, 1913] ni derivaciones posteriores de la misma referentes a tensión por carga estática, como su correspondiente factor de concentración de tensiones geométrico, K_t , ni con la denominación típica del factor de reducción de la resistencia a fatiga, K_f , usuales en fractura y fatiga de materiales). Por el contrario en (5.1.8), $K_\varphi(N)$, es el índice de concentración de tensión por fatiga del elemento en proyecto en el contexto anteriormente definido.

La ecuación (5.1.8) establece por tanto la evidencia empírica del decrecimiento con el número de períodos aplicados de la tensión necesaria para producir la rotura del material. Ha de considerarse entonces su adecuación a las leyes empíricas que gobiernan el fenómeno de la HCF. Así, se considerará ahora cómo de la expresión (5.1.8) puede inferirse, utilizando una distribución estadística de [WEIBULL, 1939, 1949, 1961], la expresión fundamental de [BASQUIN, 1910].

Como se ha indicado, el índice de concentración de tensiones por fatiga y, por lo tanto, el factor de amplificación de la tensión cíclica crece en cada ciclo aplicado; consecuentemente, la amplitud de la tensión cíclica aplicada en (5.1.8) decrecerá con cada período. Por ello, expresando la variación respecto al número de ciclos aplicados en la ecuación (5.1.8), se obtiene

$$0 = \frac{\Delta K_\varphi(N)}{\Delta N} \sigma_a(N) + (1 + K_\varphi(N)) \frac{\Delta \sigma_a(N)}{\Delta N} \Rightarrow \frac{\Delta K_\varphi(N)}{(1 + K_\varphi(N))} = - \frac{\Delta \sigma_a(N)}{\sigma_a(N)} \quad (5.1.9)$$

Es necesario en este punto establecer alguna hipótesis sobre la evolución con respecto al número de ciclos del factor concentrador de tensiones. Si se admite una evolución dada por una distribución de Weibull,

$$1 + K_\varphi(N) = \left(\frac{N - N_0}{N_1} \right)^a \quad (5.1.10)$$

se obtendría:

$$\Delta K_\varphi(N) = \frac{a}{N_1} \left(\frac{N - N_0}{N_1} \right)^{a-1} \Delta N = \frac{a}{N_1} \frac{1 + K_\varphi(N)}{\left(\frac{N - N_0}{N_1} \right)} \Delta N = \frac{a}{(N - N_0)} (1 + K_\varphi(N)) \Delta N \quad (5.1.11)$$

Es decir,

$$\frac{\Delta K_{\varphi}(N)}{(1 + K_{\varphi}(N))} = a \frac{\Delta N}{N - N_0} \quad (5.1.12)$$

con lo que la ecuación (5.1.9) adoptaría la forma:

$$\frac{\Delta \sigma_a}{\sigma_a} = -a \frac{\Delta N}{N - N_0} \quad (5.1.13)$$

cuya integración conduciría a:

$$\sigma_a(N) = C(N - N_0)^{-a} \quad (5.1.14)$$

Adoptando, por comodidad, el valor $N_0 = 0$, la expresión (5.1.14) sería:

$$\sigma_a(N) = CN^{-a} \quad (5.1.15)$$

Cuando $N=N_1$, y de acuerdo a (5.1.10), la tensión aplicada coincide con la tensión de rotura, de forma que se obtendría:

$$\sigma_a(N) = \sigma_u \left(\frac{N}{N_1} \right)^{-a} \quad (5.1.16)$$

que coincide con la expresión de Basquin, generalizada al caso en que la numeración de los ciclos en el proceso de fatiga se iniciase en un valor N_1 , es decir, admitiendo la existencia de un daño inicial en el proceso de experimentación.

5.2 Coeficiente o índice de eficiencia a fatiga. Rigidez efectiva de una barra a fatiga de alto ciclaje.

En este apartado se definirán dos magnitudes de interés en la aplicación de daño por fatiga de alto ciclaje en elementos estructurales.

Índice de eficiencia a la fatiga

La ecuación descrita anteriormente en (5.1.8)

$$\sigma_u = (1 + K_\varphi(N)) \sigma_a(N) \quad (5.2.1)$$

permite definir el cociente

$$\varphi_N = \frac{1}{1 + K_\varphi(N)} = \frac{\sigma_a(N)}{\sigma_u} \quad (5.2.2)$$

como **coeficiente o índice de eficiencia a la fatiga**. Este índice es el valor inverso del factor de amplificación de la tensión cíclica definido anteriormente.

Analizando la expresión (5.2.2) para el caso de tensiones puras básicas (tal que, en este análisis, el símbolo σ se referirá indistintamente a tensión normal o tensión tangencial), se obtendrá que

$$\sigma_a(N) = \frac{F_a}{A} \quad , \quad \sigma_u = \frac{F_a}{A_N} \quad (5.2.3)$$

donde, F_a es la amplitud de la acción exterior, axial pura o cortante puro indistintamente, sobre una barra elemental de directriz recta, de material homogéneo e isótropo con límite de fatiga. A , A_N , son su área inicial de la sección recta transversal, sin daño, y el área final residual sin daño de la misma sección dañada previa al instante de fractura (a N ciclos).

Sustituyendo (5.2.3) en (5.2.2), resulta

$$\frac{F_a}{A_N} = (1 + K_\varphi(N)) \frac{F_a}{A} \quad \Rightarrow \quad \varphi_N = \frac{1}{1 + K_\varphi(N)} = \frac{A_N}{A} \quad (5.2.4)$$

En el caso de que se considere el límite de fatiga, este valor se representará simplemente como φ ,

$$\varphi = \frac{\sigma_D}{\sigma_u} \quad (5.2.5)$$

y se denominará como **coeficiente o índice de eficiencia al límite de fatiga** en HCF. En términos de áreas, este coeficiente adopta el valor

$$\varphi = \frac{A_R}{A} \quad (5.2.6)$$

siendo A_R el área residual no dañada en el límite de fatiga.

Rigidez efectiva de una barra a fatiga HCF

Tal como indica la fenomenología típica de la fatiga HCF en metales dúctiles, referida en el epígrafe 2.2 , la fractura más común se presenta sin deformación aparente, donde la zona de rotura, si bien presenta algunas características de situación dentro del área A_N de rotura final (según la sollicitación actuante, de axil, flexión, torsión...), sin embargo no se produce nunca de manera idénticamente parametrizable, lo que determina la imposibilidad de abordar un tratamiento genérico. Así, dado que la zona de rotura no es unívocamente identificable, no se ha entrado en cuestiones dependientes de la misma. Sin embargo, el resultado obtenido, (5.2.2)-(5.2.6), con el planteamiento realizado en el anterior punto, permitirá el análisis de la rigidez efectiva de una barra a fatiga HCF, problema fundamental en la resolución de estructuras, que involucra directamente a los módulos de deformación unitaria longitudinal, E , y transversal, G , *a priori* afectados por el daño durante el proceso de fatiga.

Una revisión del fenómeno de fatiga HCF, en el caso básico de amplitudes de tensión constantes, puede permitir un planteamiento inicial de la influencia de la fatiga en su rigidez. Así, en cuanto a las hipótesis a considerar, además de adoptar el principio de equivalencia de las deformaciones de [LEMAITRE, 1971, 1996], pues se produce sin deformación plástica aparente, ε_p , es decir, que a nivel local resulta

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad , \quad \varepsilon_p \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx \varepsilon_e \quad (5.2.7)$$

(donde ε , ε_e , son las deformaciones longitudinal unitaria total y elástica, principio extensible a la variación angular unitaria γ , γ_e), deberá considerarse aquí, a nivel global de barra, también otra hipótesis complementaria. Para ello ha de admitirse una nueva nueva hipótesis.

H8

El volumen de la barra se mantiene prácticamente constante en cada uno de los ciclos de fatiga:

$$V_k \approx V_0 \quad , \quad k = 1 \dots N \quad (5.2.8)$$

siendo V_k el volumen tras el ciclo k , y V_0 , el volumen inicial.

De esta forma (considérese la nota a pie de página número 42),

$$dF_a = dK \cdot d_e \quad (5.2.9)$$

donde, dF_a , es la amplitud de la fuerza generalizada, axial en el caso de ser debida a tensiones normales, y cortante si es debida a tensiones tangenciales, sobre cada fibra longitudinal de la barra de longitud L y de sección dA , tal como se indica en la Fig.5.2/1.(a, b, c y d) adjunta, dK la rigidez de esta fibra y d_e su correspondiente deformación.

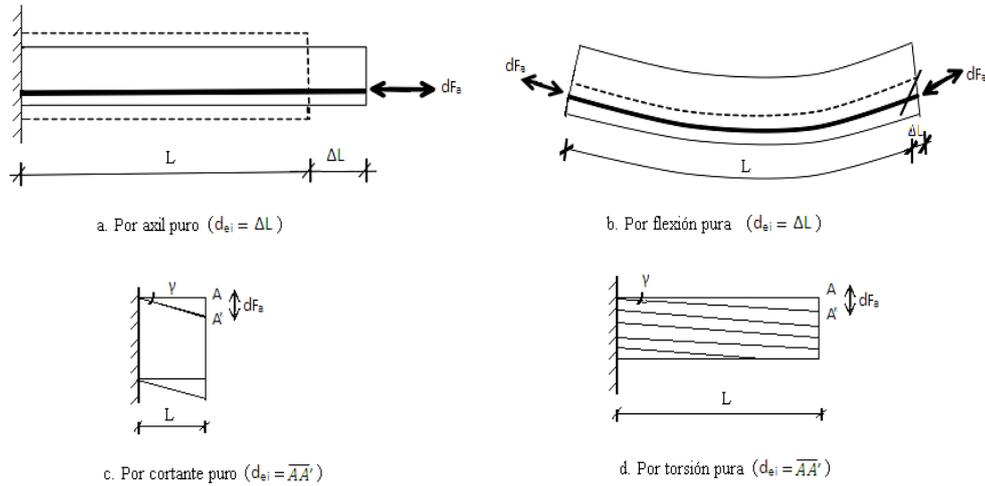


Fig.:5.2/1. Análisis de la Ley de Hooke ampliada a nivel de barra en HCF

Es evidente que la integración de la expresión (5.2.9) en el caso de sollicitación axial pura conduce al resultado,

$$F_a = K \cdot \Delta L \quad (5.2.10)$$

Siendo K la rigidez efectiva de la barra, F_a la amplitud de fuerza axial aplicada sobre la superficie y ΔL el incremento de longitud de la pieza. De igual forma podría operarse para el resto de casos incluidos en la Figura 5.2/1 obteniéndose las expresiones clásicas equivalentes correspondientes a la flexión, cortante y torsión puras básicas. Sin embargo en HCF el proceso es más complejo y ha de ser abordado atendiendo a las hipótesis establecidas en (5.2.7) y (5.2.8).

El análisis de la rigidez efectiva en el proceso de daño elástico de la fatiga HCF, (considerando que implícitamente ya se cumple el principio equivalente al de [SAINT-VENANT, 1855], en su memoria sobre la torsión, y/o el principio de distribución uniforme del daño, [LEMAITRE, 1996] , y puesto que la rigidez decrece mientras la deformación crece durante el proceso de fatiga, atendiendo a (5.2.7), (5.2.8), (5.2.9)) partirá entonces de que, dado que la acción externa no sufre cambio, en cualquier instante cíclico, i , se cumplirá la ecuación

$$dF_a = dK_i \cdot d_{ei} \quad i \leq N_{falla} \quad (5.2.11)$$

donde N_{falla} es el número de ciclos en el que se produce el fallo por HCF. La deformación genérica d_{ei} tendrá relación con su deformación unitaria, d_u , invariable en el contexto de (5.2.7), de tal forma que (5.2.11) adopta la expresión

$$dF_a = dK_i \cdot d_u \cdot L_i \quad i \leq N_{falla} \quad (5.2.12)$$

donde $d_u = \varepsilon$, la deformación longitudinal unitaria del caso axial, o $d_u = \gamma$ la variación angular unitaria en el caso de torsión o cortante puro (Fig.5.2/1.a,b,c,d) . Por lo tanto, puesto que por la hipótesis (5.2.8) del volumen invariable, $V_i = V_o = L_i \cdot A_i$, (para el área, A_i , de la sección en el ciclo i), se obtiene

$$dF_a = dK_i \cdot d_u \frac{V_o}{A_i} \quad i \leq N_{fallo} \quad (5.2.13)$$

La expresión (5.2.13) relaciona, en una fibra de una barra de directriz recta, la fuerza externa dF_a sobre dicha fibra con su rigidez dK_i , en la fatiga HCF, donde por las hipótesis (5.2.7) y (5.2.8) la deformación unitaria d_u de la misma y el volumen V_o de referencia de la barra donde se encuentra contenida se mantienen invariables en dicho proceso, mientras la sección A_i decrece por daño elástico (o, en su caso, por fisuración). Tomando el valor límite de fallo de la sección, $i = N_{fallo}$, según (5.2.4),

$$A_i = A_N = \varphi_N \cdot A \quad (5.2.14)$$

dada la invariancia de la acción externa, es inmediato, considerando (5.2.9), que

$$dF_a = dK \cdot d_u \frac{V_o}{A} \approx dK_N \cdot d_u \frac{V_o}{\varphi_N A} \quad (5.2.15)$$

de cuya simplificación resulta

$$dK = \frac{dK_N}{\varphi_N} \Rightarrow dK_N = \varphi_N \cdot dK \quad (5.2.16)$$

que indica que la rigidez efectiva, dK_N , en el momento de fallo, de una fibra de la barra analizada a fatiga HCF, es igual al índice de eficiencia a la fatiga, φ_N , por la rigidez inicial, dK , de dicha fibra. Extendiendo dicha expresión, por las hipótesis genéricas de régimen elástico, a todo el volumen de control, por simple integración de (5.2.16),

$$K_N = \varphi_N \cdot K \quad (5.2.17)$$

que expresa la relación lineal, propia del régimen elástico, entre la rigidez efectiva final de una barra a fatiga HCF y su rigidez inicial. Tal rigidez efectiva final cumple efectivamente que $K_N \leq K$, decreciente para N creciente, en base al índice φ_N que por (5.2.2) cumple $0 < \varphi_N \leq 1$ pues $\sigma_a(N) \leq \sigma_u$, y, evidentemente, en el límite de fatiga

$$K^\varphi = \varphi \cdot K \quad (5.2.18)$$

para toda rigidez de barra estructural, en régimen elástico, donde las rigideces iniciales de la barra sin daño, K , son las clásicas de aplicación en cálculo estructural que pueden ser consultadas en [VAZQUEZ, 1992], entre muchos otros. El formalismo expuesto en esta sección permite el desarrollo de un modelo de aplicación directa en el análisis estructural de barras³⁶, que se describirá en el siguiente apartado.

³⁶ Puede ser de interés en este punto la consulta de la nota a pie de página del final del epígrafe 1.3.3.4, que, a su vez, confirma lo expuesto

5.3 Modelo K^φ : Análisis estructural de barras considerando la variación de rigidez por fatiga HCF

Un modelo de análisis ampliamente utilizado, especialmente en estructuras hiperestáticas, es el denominado método de las rigideces (o de deformaciones, o de desplazamientos), tal y como se ha indicado en 1.3.3.4, el cual puede consultarse entre otros en [VAZQUEZ, 1992]. Este procedimiento, aun en caso de existir fatiga, se basa en resolver en primer término el caso estático inicial, obteniendo sus solicitaciones en los extremos de barras en función de los movimientos en los nudos, para luego obtenerlas en la totalidad de cada barra. Posteriormente, se impone en cada barra el efecto de la fatiga en su dimensionado, de tal forma que tal procedimiento no contempla el efecto de la fatiga en servicio, obviando la variación final de las solicitaciones por variación de las rigideces de las barras, ante este efecto, en el conjunto de la estructura.

El procedimiento propuesto en esta sección, que se denominará método K^φ , contiene al método de las rigideces, pero contemplando a su vez el análisis del efecto de la fatiga sobre las solicitaciones finales por variación de la rigidez de las barras. Como se observará, la solución final para las solicitaciones obtenidas por el método K^φ , y que se utilizarán para el dimensionado, es la envolvente de las solicitaciones de ambas situaciones de servicio.

Sea entonces una estructura de barras cuyo material tiene límite de fatiga σ_D y, tal como se indica simbólicamente en la Fig.5.3/1., se desarrollarán paralelamente las situaciones *a* y *b*, a través de las relaciones constitutivas de acciones-deformaciones,

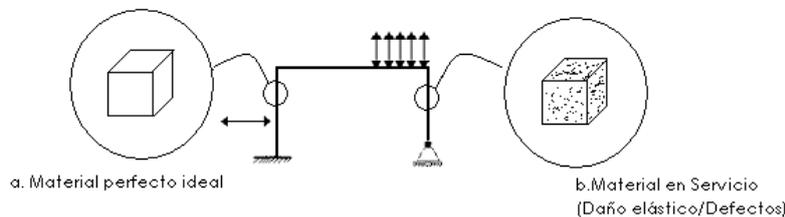


Fig.:5.3/1. Estructura simbólica a analizar por: a. Método de las rigideces y b. Modelo K^φ

$$[A]=[K][D] \quad (5.3.1.a)$$

$$[A]=[K^\varphi][D_\varphi] \quad (5.3.1.b)$$

siendo $[A]$ el vector de acciones, idénticas en ambas consideraciones (acciones en los nudos, y acciones iniciales opuestas de los extremos de barras, A_0^E , debidas a las acciones sobre las barras), $[D]$ y $[D_\varphi]$ los vectores deformación correlativos, respectivamente, a las situaciones sin daño y dañada, y $[K]$ y $[K^\varphi]$, las matrices de rigidez en función de las rigideces de las barras, correspondientes al modelo de rigidez y al propuesto con daño elástico por fatiga HCF, respectivamente. En este último caso, la rigidez de barra quedará determinada por la expresión (5.2.18), $K^\varphi = \varphi K$, donde por (5.2.5) $\varphi = \sigma_D / \sigma_u$ es el coeficiente o índice de eficiencia al

límite de fatiga, atendiendo a las expresiones (2.2.2.1a,b,c), y al valor de la expresión $C_{rD} = C_{carga} \cdot C_{superficie} \cdot C_{tamaño} \dots$, característicos del material a fatiga HCF, tipificados en las tablas y diagramas usuales de esta temática, [Tablas, 2.2.1/1, 2.2.2/1 y 2.2.2/2], considerando también la expresión (2.2.2.2) , a partir de las que se puede obtener el valor estimado del límite de fatiga σ_D .

La resolución de los sistemas de ecuaciones que configuran (5.3.1.a) y (5.3.1.b) nos proporcionaran los vectores de deformación $[D]$ y $[D_\phi]$, respectivamente

$$[A] = [K][D] = [K^\phi][D_\phi] \quad (5.3.2)$$

de forma que

$$[D_\phi] = [M][D] \quad (5.3.3)$$

con

$$[M] = [K^\phi]^{-1}[K] \quad (5.3.4)$$

siendo $[M]$ la matriz nexo que establece la compatibilidad de deformaciones del paso “continuo” del material sin daño al dañado, que implica la existencia de una función continua, como acontece en la fatiga HCF, expresada por el producto de la rigidez inicial del conjunto , $[K]$ y la de flexibilidad³⁷ restante del conjunto, $[K^\phi]^{-1}$.

En ambos casos, una vez obtenidas las deformaciones $[D]$, $[D_\phi]$, se determinarán por el proceso de cálculo usual, en cada caso, las sollicitaciones $[S_b]$ $[S_b^\phi]$, en extremos de barras (momentos, cortantes y axiles). Tal proceso de cálculo se realiza atendiendo a una matriz de transformación , $[T]$, $[T^\phi]$, a las deformaciones que actúan sobre cada barra y a las acciones iniciales de extremo de barra, $[A_0^E]$, resultando en cada caso

$$[S_b] = [A_0^E] + [T][D] \quad (5.3.5.a.)$$

$$[S_b^\phi] = [A_0^E] + [T^\phi][D_\phi] \quad (5.3.5.b.)$$

Utilizando ahora (5.3.3) en (5.3.5.b) se obtiene

$$[S_b^\phi] = [A_0^E] + [T^\phi][M][D] \quad (5.3.6)$$

La ecuación anterior presenta mayor interés teórico que práctico, pues generalmente la matriz $[T^\phi]$ es rectangular (pero congruente con $[M]$). Su interés teórico se muestra en la coherencia

³⁷ A la matriz inversa de la rigidez se le denomina generalmente matriz de flexibilidad.

del planteamiento del problema, pues indica que el paso de las deformaciones sin daño $[D]$, que se dan al inicio de la vida de la estructura, a las solicitaciones finales con daño $[S_b^\phi]$, considerando el proceso en servicio, es compatible.

Finalmente, como en cualquier problema estructural de estas características, previa obtención de las solicitaciones de toda la barra, para cada barra, se debe pasar al dimensionado considerando las solicitaciones críticas que, en este caso, resultan de dos conjuntos de valores para cada barra

$$S_c = \text{máx} \{S_b, S_b^\phi\} \quad (5.3.7)$$

donde S_c , solicitaciones críticas de cada barra, conforman la envolvente de cada barra, en función de S_b y S_b^ϕ , solicitaciones debidas al caso inicial, o estático sin daño y al final con daño por fatiga HCF, correspondientemente. Su mejor visualización se obtiene mediante los diagramas clásicos de solicitaciones (momentos, cortantes, axiles), representando en éstos S_b y S_b^ϕ y trazando la envolvente final S_c , según (5.3.7). El resultado final conforma la envolvente global, para cada solicitación, de la estructura. Esta concepción está en la línea actual³⁸ de los estados límite.

A continuación, a modo únicamente ilustrativo, se desarrolla un ejemplo básico práctico aplicado.

³⁸ Coincidiendo así con [HEYMAN, 2011] que expone, referido a la superficie de cedencia, al considerar el daño plástico acoplado al estado elasto-plástico restringido, la importancia de trabajar en esta dirección.

5.4 Ilustración de aplicación del método K^{ϕ}

La estructura básica propuesta en la figura siguiente Fig.5.4/1, puede considerarse suficientemente ilustrativa de la aplicación del procedimiento expuesto en el apartado anterior.

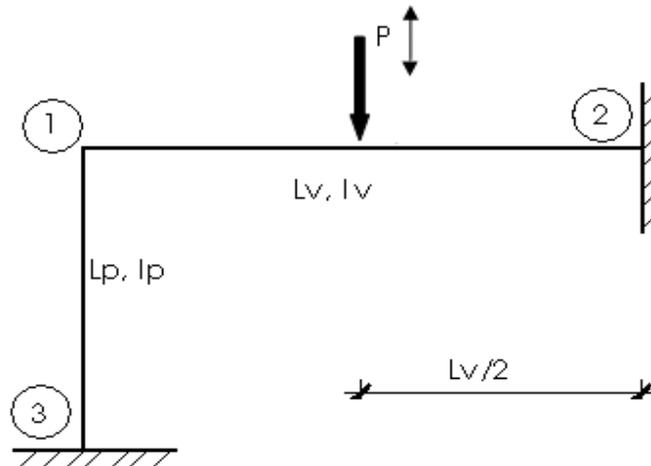


Fig.:5.4/1 Semipórtico plano

con las siguientes características e hipótesis de cálculo:

Nudos:

(1) rígido, (2) y (3) empotrados

Barras ortogonales:

Viga-12, Longitud $L_v = 2L$, Inercia $I_v = 2I$ en el plano de flexión

Pilar-13, Longitud $L_p = L$, Inercia $I_p = I$ en el plano de flexión

Material:

Acero, de tensión última (tracción~compresión) $\sigma_u = 410 MPa$, y de módulo de Young $E = 210 GPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, igual en ambas barras, con acabado superficial maquinado, de coeficiente por tamaño de la sección $C_{tamaño} = 0,75$, y sin entallas (Atendiendo a las referencias indicadas en este trabajo, o a la expresión (2.2.2.2) y a las tablas 2.2.1/1, 2.2.2/1 y 2.2.2/2)).

Acciones:

Carga Puntual P , alternante ($P_{media} = 0$)

Situación:

A temperatura ambiente, y sin agentes corrosivos.

Resolución: Pórtico intraslacional en el que se considera de influencia despreciable el efecto del cortante, y el acortamiento-alargamiento de las barras, en cuanto a las deformaciones. (Esta hipótesis permite utilizar el método de las rigideces simplificado, que conserva la misma estructura matricial expuesta).

Siguiendo el anterior apartado 5.3, se resuelve en primer término, atendiendo al modelo usual, hasta la obtención de las solicitaciones, sin contemplar por tanto el efecto de la fatiga HCF en esta fase; y en segundo lugar, atendiendo al modelo propuesto, que considera efectivamente el efecto de la fatiga HCF, se obtendrán igualmente las solicitaciones, analizando finalmente en conjunto ambos resultados.

Así, por (5.3.1a), y según la hipótesis de resolución, se obtiene

$$[0] - [M_{12}^E + M_{13}^E] = [K_{33}^{12} + K_{33}^{13}] \vartheta_1 \quad (5.4.1)$$

que expresa correlativamente acciones, rigidez y deformaciones y en la que las acciones en extremo de barra son los momentos de empotramiento perfecto,

$$M_{12}^E = -M_{21}^E = P \cdot Lv/8 \quad , \quad -M_{13}^E = M_{31}^E = 0 \quad (5.4.2)$$

y las rigideces de las barras, según el cálculo estructural, [VAZQUEZ, 1992]

$$\begin{aligned} K_{33}^{12} &= 4Elv/L_v \quad , \quad K^{12} = 0,5 \cdot K_{33}^{12} = 2Elv/L_v \\ K_{33}^{13} &= 4Elp/L_p \quad , \quad K^{13} = 0,5 \cdot K_{33}^{13} = 2Elp/L_p \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Sustituyendo (5.4.2) y (5.4.3), en (5.4.1), y operando atendiendo a los datos de las barras del pórtico, se obtiene el ángulo de giro en el nudo-1

$$\vartheta_1 = -M_{12}^E / (K_{33}^{12} + K_{33}^{13}) \Rightarrow \vartheta_1 = -PL^2 / 32EI \quad (5.4.4)$$

valor que, de acuerdo al cálculo estructural [VAZQUEZ, 1992] el momento en los extremos de las barras son, sustituyendo (5.4.2), (5.4.3) y (5.4.4) con sus valores,

$$\begin{aligned} M_{12} &= M_{12}^E + K_{33}^{12} \cdot \vartheta_1 \Rightarrow M_{12} = 0,1250PL \\ M_{21} &= M_{21}^E + K^{12} \cdot \vartheta_1 \Rightarrow M_{21} = -0,3125PL \\ M_{13} &= M_{13}^E + K_{33}^{13} \cdot \vartheta_1 \Rightarrow M_{13} = -0,1250PL \\ M_{31} &= M_{31}^E + K^{13} \cdot \vartheta_1 \Rightarrow M_{31} = -0,0625PL \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

(M_{12} , M_{21} , M_{13} , M_{31} , están aquí desglosados, para facilitar su comprensión, como se deriva de la expresión (5.3.5.a))

Llegado este punto, se obtendrían también los valores de las solicitaciones cortantes y axiles en extremo de cada barra, con solo imponer el equilibrio en cada barra y cada nudo, (con lo que a la vez se obtienen las reacciones de fuerza en los empotramientos) y el momento flector máximo en el vano, en la posición de la carga, obteniéndose:

Cortantes

$$\begin{aligned} T_{12} &= 0,4063 P \quad (-) \quad , \quad T_{21} = 0,5937 P \\ T_{13} &= -T_{31} = 0,1875 P \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Axiles

$$\begin{aligned} N_{12} = T_{13} &= 0,1875 P \quad (-) \\ N_{13} = T_{12} &= 0,4063 P \quad (-) \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

Momento en el centro de la viga

$$M_{(L/2)} = 0,2812 PL \quad (5.4.8)$$

Según el modelo usual, con los valores más desfavorables de las solicitaciones obtenidas, consideradas cíclicamente, (previa representación de los diagramas de solicitaciones, si se desea), se pasa a la fase del diseño a fatiga de cada barra aisladamente³⁹ (según las características e hipótesis del material...), sin haber tenido en cuenta la variación posible, por comportamiento en servicio del material de dichas solicitaciones, que se refleja mediante la variación de la rigidez efectiva de las barras. Es precisamente esta estimación, más acorde con la realidad (pues considera el efecto de la vida en servicio, del conjunto estructural, desde el planteamiento inicial) la que aborda el modelo propuesto K^φ , tal como se formalizó en el anterior apartado 5.3.

Puesto que el procedimiento K^φ no difiere en su expresión matricial, ello implica que, según la ecuación (5.3.1.b) y las hipótesis de resolución, se obtendrá una expresión matricial del mismo tipo que la (5.4.1), es decir

$$[0] - [M_{12}^E + M_{13}^E] = [K_{33}^{\varphi 12} + K_{33}^{\varphi 13}] \cdot \vartheta_1^\varphi \quad (5.4.9)$$

donde los momentos de empotramiento perfecto, $M_{12}^E = -M_{21}^E$, $-M_{13}^E = M_{31}^E$, son, evidentemente, los mismos que los obtenidos en (5.4.2), pero, sin embargo, la matriz de rigidez, y por lo tanto la deformación, diferirá de las iniciales (5.4.3) del modelo usual, dado que contemplan la evolución del material a fatiga HCF. Es decir, en (5.4.9) se obtendrán, según (5.2.18), las rigideces

$$\begin{aligned} K_{33}^{\varphi 12} &= \varphi_{12} \cdot K_{33}^{12} \quad , \quad K^{\varphi 12} = \varphi_{12} \cdot K^{12} \\ K_{33}^{\varphi 13} &= \varphi_{13} \cdot K_{33}^{13} \quad , \quad K^{\varphi 13} = \varphi_{13} \cdot K^{13} \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

donde K_{33}^{12} , K^{12} , K_{33}^{13} y K^{13} , son las rigideces (5.4.3), y φ_{12} y φ_{13} , los coeficientes o índices de eficiencia límite a la fatiga HCF, atendiendo a la expresión (5.2.5), de las barras correspondientes, y que deberán calcularse teniendo en cuenta las características e hipótesis del material. Así, considerando la recomendación de la normativa (basada en [WÖHLER, 1871]), según (5.2.5) y las referencias indicadas para el material en el enunciado de esta aplicación [de las que se han tomado los valores de los coeficientes más acordes usuales,

³⁹ En el diseño usual, una vez dimensionado cada elemento de la estructura a fatiga, se construyen prototipos, de parte o de la totalidad de las estructura, sometiéndolos a pruebas y ajustes reiterativos, en un proceso complejo, caro y no siempre posible.

atendiendo al estado solicitado de cada barra, según los valores –a nivel de estimación- determinados, de (5.4.5) a (5.4.8)], de tal forma que se obtendrá:

Para $\varphi_{12} = \frac{\sigma_{D12}}{\sigma_u}$, deberá determinarse σ_{D12} . Puesto que, en general, en las vigas el efecto del axil se considera despreciable, bastará considerarlo como de mínimo efecto centrado en cuanto a los coeficientes de reducción, y dominante –si es menor- el correspondiente de flexión. Luego, como en fatiga HCF, en este caso

$$\sigma_{D12} = \sigma_{D,0.12} \cdot C_{rD}, \quad C_{rD} = C_{carga} \cdot C_{superficie} \cdot C_{tamaño} \quad (5.4.11)$$

donde $\sigma_{D,0.12}$ es límite de fatiga HCF del material estándar, según tabla 2.2.1/1, (aquí, acero a flexión, tal límite será $0,5\sigma_u$. Recordando que σ_u es la resistencia o tensión última del material, conocida, y que los coeficientes de reducción valdrán, en este caso, $C_{carga} \approx 0,9$, $C_{superficie} \approx 0,8$ y $C_{tamaño} = 0,75$, (facilitados en el enunciado de este problema, debido a las referencias citadas en el mismo, de recomendada consulta), se obtendrá, finalmente, según (5.4.11), el límite de fatiga σ_{D12} ,

$$\begin{aligned} \sigma_{D,0.12} &= 205 \text{ MPa}, \quad C_{rD} \approx 0,54 \\ \sigma_{D12} &= 110,70 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

Considerando ahora (5.2.5) con (5.4.12),

$$\varphi_{12} = 110,70 \text{ MPa} / 410 \text{ MPa} \Rightarrow \varphi_{12} = 0,27 \quad (5.4.13)$$

Para $\varphi_{13} = \frac{\sigma_{D13}}{\sigma_u}$, siguiendo el mismo proceso que para la viga, de (5.4.11) a (5.4.13), donde se considera que en el pilar domina el axil, pero sin ser despreciable la flexión, adoptando los valores más desfavorables, según las referencias citadas para el material en el enunciado, se tendrá $\sigma_{D,0.13}$ (axial) = $0,45\sigma_u$, y C_{carga} (axil descentrado) $\approx 0,7$, $C_{superficie} \approx 0,8$, y $C_{tamaño} = 0,75$, de forma que

$$\sigma_{D,0.13} = 184,5 \text{ MPa}, \quad C_{rD} \approx 0,42, \quad \sigma_{D13} = 77,49 \text{ MPa} \quad (5.4.14)$$

Considerando de nuevo (5.2.5) con (5.4.14),

$$\varphi_{13} = 77,49 \text{ MPa} / 410 \text{ MPa} \Rightarrow \varphi_{13} = 0,189 \quad (5.4.15)$$

Una vez obtenidos los índices de eficiencia límite a la fatiga HCF, de las barras de la estructura, se puede resolver definitivamente (5.4.9), obteniendo previamente las rigideces con (5.4.10) y

(5.4.3), sustituyéndolas en (5.4.9), junto a (5.4.2), y operando, atendiendo a los datos del pórtico, se obtendrá el ángulo que gira el nudo (1), cuando tiende al límite de fatiga HCF⁴⁰,

$$\vartheta_1^\varphi = -M_{12}^E / (K_{33}^{\varphi 12} + K_{33}^{\varphi 13}) \Rightarrow \vartheta_1^\varphi = -0,1362 PL^2 / EI \quad (5.4.16)$$

Y operando de igual forma que en (5.4.5), pero con los valores correspondientes a (5.4.2), (5.4.10), (5.4.13) y (5.4.15), se obtiene:

$$\begin{aligned} M_{12}^\varphi &= M_{12}^E + K_{33}^{\varphi 12} \cdot \vartheta_1^\varphi \Rightarrow M_{12}^\varphi = 0,1029 PL \\ M_{21}^\varphi &= M_{21}^E + K_{33}^{\varphi 12} \cdot \vartheta_1^\varphi \Rightarrow M_{21}^\varphi = -0,3236 PL \\ M_{13}^\varphi &= M_{13}^E + K_{33}^{\varphi 13} \cdot \vartheta_1^\varphi \Rightarrow M_{13}^\varphi = -0,1029 PL \\ M_{31}^\varphi &= M_{31}^E + K_{33}^{\varphi 13} \cdot \vartheta_1^\varphi \Rightarrow M_{31}^\varphi = -0,0515 PL \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

($M_{12}^\varphi, M_{21}^\varphi, M_{13}^\varphi, M_{31}^\varphi$ están aquí desglosados, para facilitar su comprensión, como se deriva de la expresión (5.3.5.b)

Finalmente la obtención de las solicitaciones cortantes y axiles, y momento en el centro de la viga por imposición de equilibrio en barras y nudos como en (5.4.6) a (5.4.8), resultaría:

Cortantes

$$\begin{aligned} T_{12}^\varphi &= 0,3896 P \quad (-) \quad , \quad T_{21}^\varphi = 0,6104 P \\ T_{13}^\varphi &= -T_{31}^\varphi = 0,1544 P \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

Axiles

$$\begin{aligned} N_{12}^\varphi &= T_{13}^\varphi = 0,1544 P \quad (-) \\ N_{13}^\varphi &= T_{12}^\varphi = 0,3896 P \quad (-) \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

Momento en el centro de la viga

$$M_{(L/2)}^\varphi = 0,2868 PL \quad (5.4.20)$$

⁴⁰ ϑ_1^φ también se podría haber determinado según (5.3.3).

El análisis de los resultados de las solicitaciones de ambos modelos, (5.4.5) a (5.4.8) y (5.4.17) a (5.4.20), indica que existen ciertas variaciones, puesto que la variación de la rigidez en servicio de fatiga HCF (supuesto un proceso de cierta homogeneidad) indica una variación en la distribución de dichas solicitaciones, cuyo reflejo significativo previo se observa en la relación entre las deformaciones obtenidas, $\theta_1^\varphi / \theta_1$, en las expresiones (5.4.4) y (5.4.16), más del cuádruple en este caso. Así, mientras algunas aumentan su valor, por ejemplo $M_{21}^\varphi > M_{21}$, otras disminuyen, como $M_{12}^\varphi < M_{12} \dots$, lo cual indica que los índices φ , son indicativos del desequilibrio estructural que se produce, dado que afectan a las rigideces parciales, y por lo tanto a la rigidez del conjunto, siempre y cuando al menos exista un índice φ distinto al resto, cuestión más factible cuanto mayor número de barras compongan la estructura.

Es evidente que si el índice φ fuese el mismo en todas las barras, en este caso particular, los resultados de ambos modelos coincidirían, por lo que el dimensionado final sería válido a partir del procedimiento usual (no sufriría ningún “desequilibrio” si la construcción se ejecuta correctamente).

Sin embargo, en el caso genérico que se trata, en el que esta diferencia ha de admitirse, para efectuar el dimensionado es necesario cuestionar qué valores han de adoptarse. Es evidente que deben ser los valores de la envolvente de cada tipo de solicitación, solicitaciones críticas S_c según (5.3.7), es decir los valores críticos (máximos) más desfavorables correspondientes a ambos modelos, pues mientras el modelo usual supone que la estructura no varía en servicio, por características del material y sobre el material (ambiente), es decir solo considera variación intrínseca a posteriori, hipótesis solo cierta en el instante inicial, sin embargo no ocurre así a medida que avanza el proceso de fatiga en el cual está claramente afectado el comportamiento del material, y sobre el material, como la experiencia demuestra continuamente.

Es en este punto donde el modelo K^φ incide estimando los valores de las solicitaciones, especialmente los críticos (máximos) que deben ser considerados frente al modelo usual. Es por ello por lo que ha de trazarse el Diagrama Envolvente de cada solicitación crítica, atendiendo a (5.3.7), teniendo en cuenta la situación cíclica más desfavorable de cada barra (tensiones de tracción), a partir de lo cual se realizará el dimensionado.

Para finalizar, en nuestro caso, como muestra práctica, se representará el Diagrama Envolvente de Momento de flectores, Fig.5.4/2., considerando la situación cíclica más desfavorable (indiferente para la viga, en este caso, pero traccionando el pilar), bajo los valores de $P = 100 \text{ KN}$ y de $L = 4 \text{ m}$

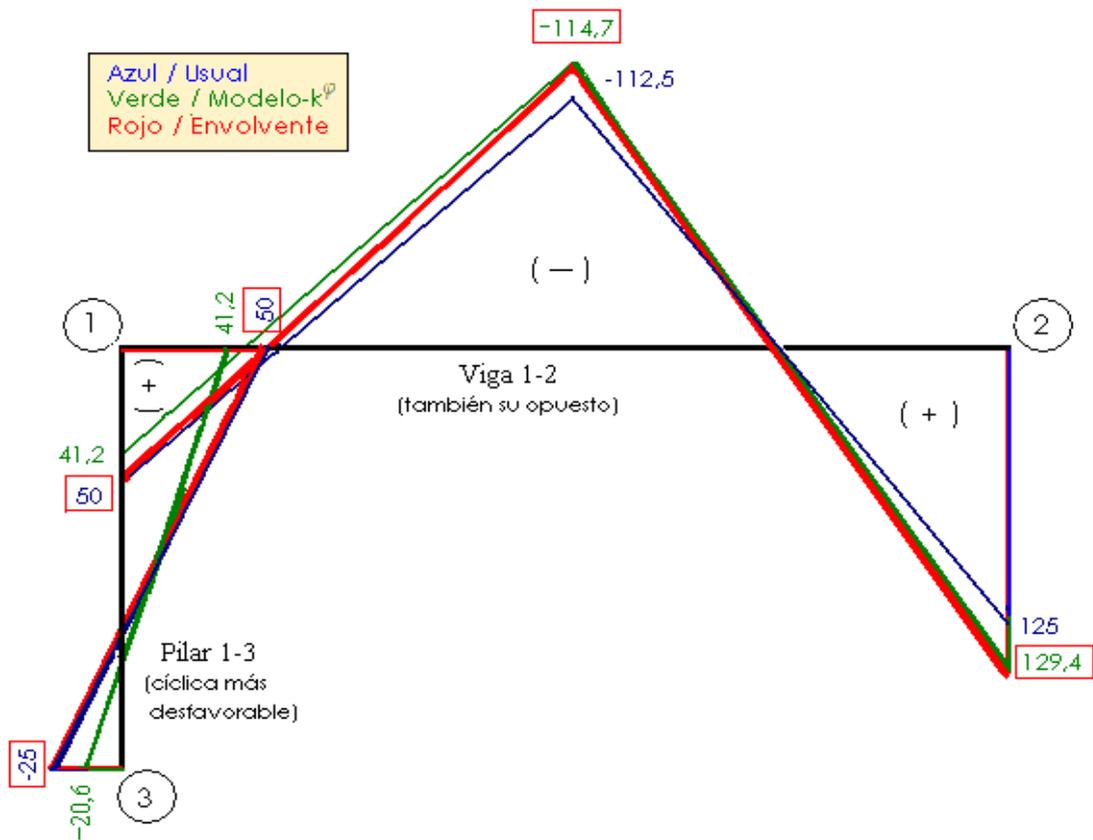


Fig.. 5.4/2. Diagrama de Momentos flectores (mKN), atendiendo al análisis K^p

Posteriormente, una vez construidos los diagramas/envolventes de axiles y cortantes, de forma análoga al de momentos expuesto, se realizaría el dimensionado⁴¹ correspondiente.

⁴¹ En el que cabe la posibilidad de considerar el enfoque multiaxial referido en el apartado 4.3 de este trabajo

5.5 Conclusiones

CP5.1

Se ha definido un índice de concentración de tensión por fatiga, K_φ , que, en cada punto y en cada instante determina la relación entre las tensiones aplicadas a una muestra material y la tensión existente en ese punto. Este índice puede expresarse, en cualquier configuración experimental de daño isótropo, en términos de la función de daño ϕ_D .

CP5.2

Se ha definido un factor de amplificación de tensión por fatiga $(1 + K_\varphi)$ como la relación entre la tensión de rotura y la tensión aplicada en cada instante de un proceso cíclico. Tal relación es coherente con la expresión de Basquin asociada a la descripción fenomenológica de la fatiga a alto ciclaje.

CP5.3

Se ha definido el coeficiente o índice a fatiga de alto ciclaje φ_N que relaciona la amplitud de la tensión en régimen elástico, $\sigma_a(N)$, debida a acciones exteriores invariables en cada ciclo, con la tensión de rotura, σ_u , del material dúctil con límite de fatiga que atienda a la curva de Wöhler. Este índice representa, en un proceso uniaxial, un factor de medida entre la sección dañada y la sección inicial.

CP5.4

Se admite la ley de Hooke ampliada al dominio del medio continuo dañado en un proceso de fatiga a alto ciclaje. Su expresión más básica, $\sigma = \bar{E} \varepsilon$, induce constitutivamente a la revisión⁴² de la rigidez efectiva.

CP5.5

La rigidez efectiva global de un sólido decrece a consecuencia del daño en un proceso de fatiga a alto ciclaje. Se ha mostrado la determinación de la rigidez global de un elemento estructural sometido a fatiga de alto ciclaje en términos del coeficiente o índice de eficiencia a la fatiga.

CP5.6

En una estructura de barras, es posible considerar que la rigidez global del conjunto, ante acciones cíclicas que generen fatiga de alto ciclaje, dependa de una matriz de rigidez de características equivalentes a la de acciones no cíclicas atendiendo al efecto de índices relativos a la concentración de tensiones por fatiga.

⁴² Particularmente, [LEMAITRE, 1996], establece $\bar{E} = (1 - D)E$, como se indica en las ecuaciones (1.3.2.18), (1.3.2.19), referida a la variable D , de daño, fenomenológica.

CP5.7

El efecto en un conjunto estructural de barras de la variación de la rigidez de las mismas, a fatiga de alto ciclaje, admitido su límite de resistencia a la fatiga, es la variación posicional del equilibrio, afectando ello globalmente a la estabilidad de forma, independientemente de la de cada barra, y a las deformaciones, lo que conlleva la evaluación del estado crítico de las sollicitaciones del binomio estático-cíclico, en base a un buen comportamiento en servicio de la estructura.

CP5.8

Se ha propuesto un modelo de estimación del efecto de la fatiga de alto ciclaje de una estructura de barras cuya formalización algebraica responde a un homeomorfismo susceptible de ser implementado con carácter general. Este método permite un diseño estructural⁴³ coherente con la existencia de fatiga a alto ciclaje y una esquematización del mismo se muestra en la Figura 5.5.1

⁴³ Si bien en edificación, salvo en edificios de gran altura o en casos de vibración, el efecto de la fatiga no se considera, sin embargo no debe olvidarse que en las uniones (empotramientos, nudos,...), en sus elementos de unión, como en estructura metálica (tornillos, soldadura,...) este efecto puede magnificarse, comúnmente referido en el ámbito estructural. Este aspecto queda patente en el anterior caso práctico, donde mientras en el centro de la envolvente el efecto es sólo del orden del 2%, sin embargo, en el nudo rígido el efecto es 10 veces superior, siendo pues significativa y de especial interés su estimación mediante el índice φ , influyendo a la vez, debido a defectos del material (intrínsecos, de fabricación,...) en procesos patológicos de diversa índole. Este aspecto queda patente en la referencia del [INAH, 2008] de México, donde se cita literalmente: “*Algunos edificios del área maya padecen “fatiga”,...*”, planteándose un plan de estudio al respecto. En este contexto, otra propiedad sorpresivamente relevante del coeficiente o índice de eficiencia al límite de la fatiga HCF, es la previsión “intemporal” (efecto de “ciclaje lento”) a través de los siglos de los efectos de la fatiga de esta índole por lenta variación de la rigidez global estructural, producto de la variación de la misma en sus elementos resistentes (lo que sugiere un nuevo concepto: comportamiento al servicio histórico)

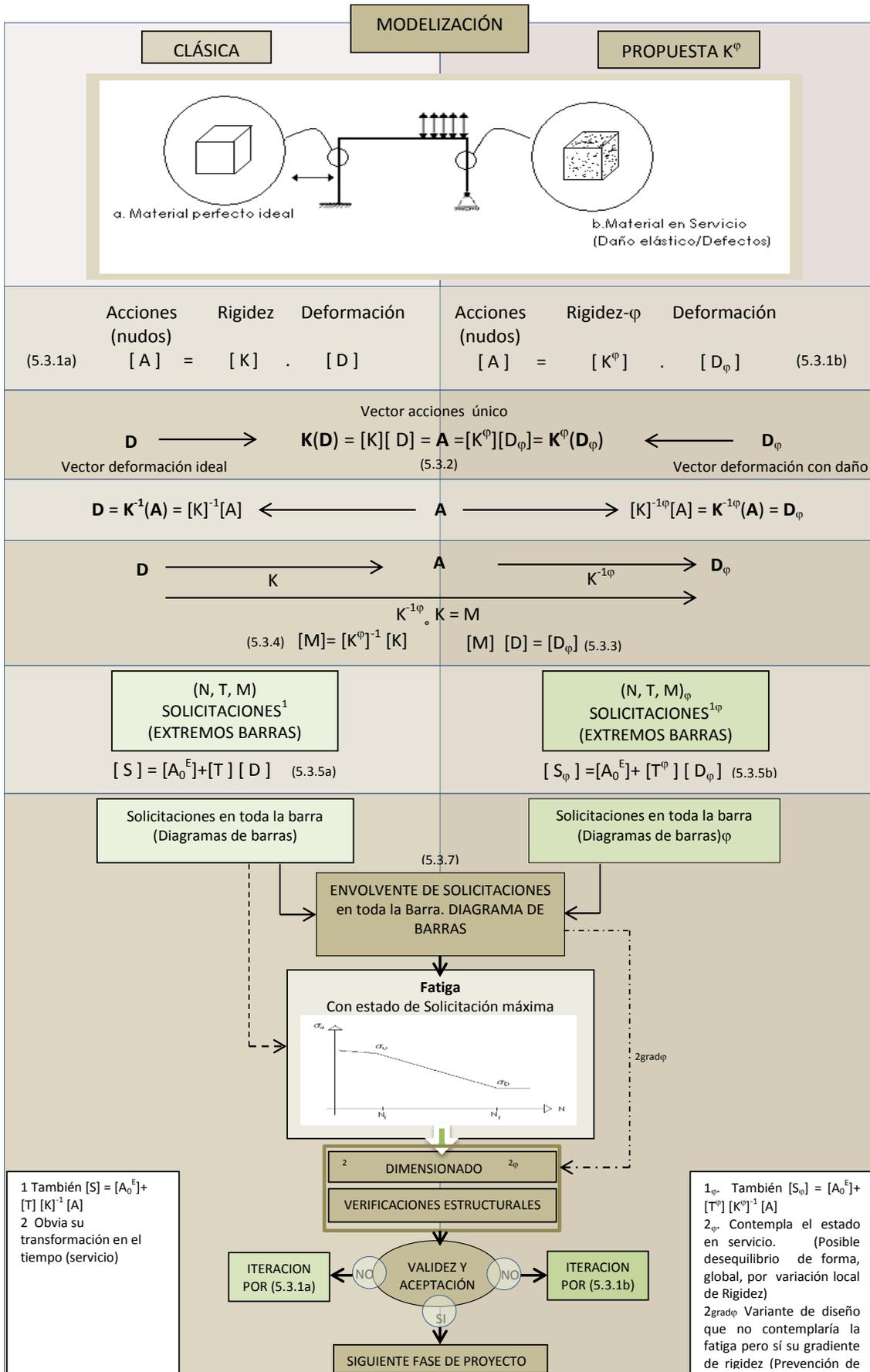


Fig.: 5.5/1 Esquemización del proceso de estimación de fatiga de alto ciclaje en estructuras

6 ANÁLISIS DE CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE DESARROLLO

En este capítulo se analizarán las conclusiones parciales ya establecidas en los capítulos 3, 4 y 5, dado que, al haber sido obtenidas éstas desde el objeto específico que define el contenido de cada uno de esos capítulos, no han incluido enunciados de proposiciones que pudieran derivarse del conjunto de todas ellas. No obstante, hay que considerar que cada conclusión parcial de esos capítulos se considera como una de las conclusiones de esta Tesis, por lo que no será incluida de nuevo en este capítulo una relación de todas ellas. Por otra parte, también será un objeto de este capítulo la formulación, a partir de estas conclusiones, de propuestas de avance en la investigación en diferentes aspectos sobre esta materia.

La **CP3.1** establece una contribución sustancial de esta Tesis. Se propone un modelo de daño que no incluye una variable interna independiente de daño, escalar o tensorial, para la densidad de entalpía libre, optando por una única variable, la de tensión efectiva (entendida ésta como tensión real, en un medio con o sin daño) de control y, por tanto, como única variable de las funciones termodinámicas que definen el estado del sistema material. Es necesario en este punto realizar un análisis de esta hipótesis fundamental en el conjunto de todas las conclusiones establecidas desde el interés de enmarcar todas ellas en el necesario contexto termodinámico.

El primer y segundo principio de la termodinámica, expuestos en las ecuaciones

$$\dot{u} = \sigma \circ \dot{\varepsilon} + \dot{q} \quad (2.3.3.63)$$

$$\Phi = T \cdot \dot{s} - \dot{q} - \frac{\nabla T}{T} \cdot \bar{q} \geq 0 \quad (2.3.3.65)$$

han de permitir la definición de una tasa de producción de entropía Φ coherente con este formalismo, ya que, como se indica en (2.3.3.68), la elección de una variable independiente de daño D condiciona esencialmente esta tasa de producción de entropía. Es importante en este punto considerar que en las referencias analizadas la variación de energía libre (2.3.3.63) no incluye referencias al proceso irreversible de producción de daño. Efectivamente, en (2.3.3.35) se indica que si el proceso es irreversible,

$$du < Tds + \sigma \circ d\varepsilon \quad (2.3.3.35)$$

basándose únicamente en el hecho de que en tales procesos la cantidad de calor es menor al producto de la temperatura por la variación de entropía. La contracción del tensor de tensiones por el tensor de deformaciones en (2.3.3.35) se refiere al trabajo elástico (reversible). Ahora bien, por la propia formulación de este primer principio, podría considerarse que el trabajo realizado en el material puede tener una componente de producción de daño, no reversible, por lo tanto. Ahora bien, ello no resta validez a la expresión (2.3.3.35) en el contexto de la mecánica del medio dañado puesto que, admitiendo la producción de daño la desigualdad (2.3.3.35) seguiría manteniéndose.

Por la misma razón, la variación de densidad de energía libre, función de la temperatura y de las deformaciones, $f = f(T, \varepsilon)$, en un proceso irreversible, verifica la desigualdad

$$df < -sdT + \sigma \circ d\varepsilon \quad (2.3.3.38)$$

La expresión representativa del segundo principio termodinámico toma la forma descrita en la ecuación (2.3.3.67), que, admitiendo una distribución uniforme de temperatura, toma la forma

$$\Phi = \sigma \circ \dot{\varepsilon} - \dot{f} - s \cdot \dot{T} \geq 0 \quad (2.3.3.67)$$

En el contexto de esta tesis se admitirán entonces las relaciones

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T = \bar{\sigma}_{ij} \quad (6.1)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \right)_T = \varepsilon_{ij} \quad (6.2)$$

Donde se ha indicado explícitamente el tensor de tensiones reales o efectivas con la notación $\bar{\sigma}$, en concordancia con lo indicado en el capítulo 3. Obsérvese que tal tensión real o efectiva, siempre de naturaleza elástica, puede provocar o no producción de daño. En este sentido, se considerará la ecuación (5.1.1),

$$[\sigma_p(t)] = [\sigma_D(t)] + [\sigma(t)] \quad (5.1.1)$$

en la que se ha identificado como $[\sigma_D(t)]$ el tensor de tensiones que es determinante en la producción del daño en el proceso de fatiga. Puede identificarse entonces el tensor real o efectivo $\bar{\sigma}$ con el tensor σ_p , de tal forma, que, por (6.1),

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T = \sigma_{Dij} + \sigma_{ij} \quad (6.3)$$

De esta forma, la tasa de producción de entropía por fatiga, teniendo en cuenta que $s = -\frac{\partial f}{\partial T}$, adopta la expresión

$$\Phi = -\sigma_D \circ \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad (6.4)$$

Identificándose entonces la tasa de producción de entropía con el trabajo destinado a la producción de daño por unidad de tiempo

$$\dot{w}_D = -\sigma_D \circ \dot{\varepsilon} \quad (6.5)$$

La expresión (6.5) está referida al trabajo realizado por las tensiones internas, tal y como se refleja en la ecuación (2.3.32). Es conveniente, no obstante, considerar estas mismas expresiones derivadas de las tensiones aplicadas externas, variables que controlan el proceso. La expresión (6.4) y (6.5) adoptarían las formas, entonces,

$$\Phi = \sigma_D \circ \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad (6.6)$$

$$\dot{w}_D = \sigma_D \circ \dot{\varepsilon} \quad (6.7)$$

Es importante considerar la semejanza de este formalismo con el equivalente de deformación plástica. Así, la ecuación (6.2) es la formalmente equivalente a la ecuación (2.3.3.89),

$$\sigma^p = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p} \quad (2.3.3.89)$$

y la ecuación (6.6) formalmente equivalente a la expresada en (2.3.3.90) para modelos de plasticidad (aunque esté situada esta última expresión en el contexto más amplio de acoplamiento plástico con daño),

$$\Phi = \sigma^p \dot{\varepsilon}^p \geq 0 \quad (2.3.3.90)$$

De esta forma, el modelo propuesto en esta Tesis guarda un paralelismo sustancial con los modelos de deformación plástica. De esta forma, el principio de máxima disipación, en concordancia con (2.3.3.91) conduce en el contexto de esta Tesis a:

$$\dot{\varepsilon} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_D} \quad \lambda \geq 0 \quad F(\sigma_D) \leq 0 \quad \lambda F(\sigma_D) = 0 \quad (6.8)$$

expresión absolutamente equivalente a las ecuaciones (4.2.4.3b) y (4.2.4.3c) en el tratamiento de la función límite de daño. En este mismo contexto entonces es posible definir un potencial da daño, ϕ^D , de forma que la velocidad de crecimiento del daño (medida en este caso como velocidad de crecimiento del daño elástico asociado a procesos de fatiga de alto ciclaje), sería, entonces

$$\dot{\varepsilon} = - \frac{\partial \phi^D}{\partial \sigma_D} \quad (6.9)$$

La ecuación (6.9) permite entonces establecer un paralelismo claro con el contexto de la deformación plástica. El potencial de daño admite entonces diversas expresiones, que justificarán los modelos de crecimiento de daño propuestos.

Se abre así una primera perspectiva de desarrollo posterior a partir de estas consideraciones. La formulación de un potencial de daño en términos de las tensiones que generan daño en un proceso de fatiga a alto ciclaje es entonces un campo abierto de investigación, considerando, entre otras, las líneas expuestas en los epígrafes 2.3.3.7, 2.3.3.8, 2.3.3.9 y 2.3.3.10 de esta memoria.

La **CP3.2** establece la ecuación que ha de verificar la evolución de la tensión real en cada punto dependiente de un tensor de daño,

$$\bar{\sigma}_{ij} = - \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \phi_{D,pq}} \phi_{D,pq} \quad (3.2.15)$$

cuya aplicación a cualquier tipo de esfuerzos supone la exigencia de la simetría del tensor de tensiones. Habida cuenta de esta conclusión parcial, es lícito considerar una función potencial de daño, de acuerdo a lo indicado en la expresión (6.9), pero dependiente en última instancia del tensor simétrico de daño en cada punto.

Así, un desarrollo de la ecuación (3.2.15) conduciría a

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = -\frac{\partial \phi^D}{\partial \sigma_{D,ij}} = -\frac{\partial \phi^D}{\partial \phi_{D,pq}} \cdot \frac{\partial \phi_{D,pq}}{\partial \sigma_{D,ij}} \quad (6.10)$$

La ecuación (6.6) puede desarrollarse, considerando (6.10), como

$$\Phi = \sigma_{D,ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{D,ij}}{\partial \phi_{D,kl}} \phi_{D,kl} \frac{\partial \phi^D}{\partial \phi_{D,pq}} \cdot \frac{\partial \phi_{D,pq}}{\partial \sigma_{D,ij}} = \frac{\partial \phi^D}{\partial \phi_{D,kl}} \phi_{D,kl} \geq 0 \quad (6.11)$$

La ecuación anterior expresa la tasa de disipación de entropía en términos de las derivadas parciales del potencial de daño con relación a las componentes del tensor de daño y del propio tensor de daño en cada instante.

Una conclusión más avanzada puede obtenerse si, como se indica en **CP3.3**, las componentes del tensor de daño en cada instante obedecen a la ecuación

$$\frac{d\phi_{D,kl}}{ds_D} = \phi_{D,kl} \quad (6.12)$$

de tal forma que

$$\Phi = \sigma_{D,ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \phi^D}{\partial \phi_{D,kl}} \phi_{D,kl} = \frac{\partial \phi^D}{\partial \phi_{D,kl}} \frac{d\phi_{D,kl}}{ds_D} = \frac{d\phi^D}{ds_D} \geq 0 \quad (6.13)$$

La ecuación (6.13) establece entonces que la velocidad de generación de daño se corresponde con la variación del potencial de daño definido en términos de la variable temporal s_D introducida en la hipótesis **H5** de este trabajo, que permite concluir la proposición **P2**. Este resultado permite definir a la función temporal $s_D(t)$ como **función de evolución del daño**.

Se obtiene así un elemento de desarrollo de investigaciones posteriores. Efectivamente, cada una de las componentes del tensor de tensiones de daño en cada punto se han considerado en este trabajo como función de un tensor, simétrico, de daño, cuya evolución temporal depende de **una única función de evolución del daño** $s_D(t)$. Por tanto, la elección de un determinado potencial de daño consiste en definitiva en:

- Establecer la dependencia de las componentes del tensor de tensión efectiva de las componentes del tensor isótropo de daño.
- Establecer la función de evolución de daño $s_D(t)$

Se trata, evidentemente, de un nuevo formalismo de evaluación de la fatiga en alto ciclaje. El desarrollo de este modelo abre un claro campo de investigación experimental. En el caso general, será necesario establecer la dependencia de las componentes del tensor de tensión respecto a 6 parámetros de daño, mientras que si se impone como condición la isotropía del daño, este problema se reduce a la determinación de tales funciones en términos de una única variable de daño, según se describe en la **CP3.4** y en la determinación de tales componentes, se deberán tener en cuenta las conclusiones **CP3.5** y **CP3.6** cuando se estén considerando diversos grados de anisotropía.

Pero, por otra parte, la evolución de las tensiones en términos de la función de evolución de daño $s_D(t)$ puede expresarse como:

$$\dot{\sigma}_{D,ij} = \frac{\partial \dot{\sigma}_{D,ij}}{\partial \phi_{D,pq}} \frac{d\phi_{D,pq}}{dt} = \frac{\partial \dot{\sigma}_{D,ij}}{\partial \phi_{D,pq}} \dot{s}_D \phi_{D,pq} \quad (6.14)$$

Es decir,

$$\dot{\sigma}_{D,ij} = -\dot{s}_D \sigma_{D,ij} \quad (6.15)$$

La ecuación (6.15) establece por tanto que la evolución del tensor de tensiones responde a la función de evolución de daño $s_D(t)$ y a un valor inicial de la tensión en cada punto. Este resultado puede tenerse claramente en consideración en la determinación experimental de los potenciales de daño.

El hecho de que todas las componentes del tensor de daño (o de todas las componentes del tensor de tensiones de daño) varíen de acuerdo a una misma función temporal, contrariamente a la posibilidad de que tales componentes dispusieran de una ley propia de evolución guarda, por otra parte, un paralelismo formal evidente con las ecuaciones de plasticidad, de Lévy-Mises, expresadas en la fórmula (1.3.3.57),

$$\frac{d\varepsilon_{p,ij}}{d\lambda} = s_{ij} \quad (6.16)$$

que indica que cada componente del tensor de deformación plástica varía dependiendo únicamente de la componente correspondiente del tensor desviador bajo una única evolución temporal del parámetro λ . Es decir, expresado en otros términos, el tensor de deformación plástica va a venir determinado por un valor inicial del tensor desviador (la elección de este valor inicial es, claramente, una cuestión de condiciones de contorno arbitrarias).

En este mismo sentido se enmarca la conclusión **CP3.5**, que indica la posibilidad de definir un tensor $[T_{\bar{\sigma}}]$ en cada punto que relacione la tensión existente en ese punto en cualquier superficie con una tensión anterior en el proceso de evolución de daño en ese mismo punto y para la misma superficie. Claramente, la elección de ese estado inicial es arbitraria, pero se ha considerado conveniente establecer esta proposición considerando la posibilidad de un estado inicial "sin daño". El motivo no es otro que permitir un paralelismo entre el formalismo propuesto en esta Tesis con el correspondiente a aquellas teorías que consideran una variable interna de daño cuyo valor nulo indica un estado sin dañar. En diversas secciones de esta memoria se ha indicado la debilidad de la argumentación basada en un estado *sin daño*. No obstante, esta Tesis se cierne a los procesos de generación y evolución de daño en fatiga de alto ciclaje para, especialmente, materiales dúctiles. La fenomenología recogida en los capítulos 1 y 2 de esta memoria permite establecer unos valores límites de tensión a partir de los cuales el proceso de daño va aumentando. Considerar que los valores de tensión inferiores a estos valores son valores de tensión asociados a estados *sin daño* es perfectamente admisible en este contexto.

En el capítulo 4 se ha obtenido una superficie límite de crecimiento desde argumentos energéticos considerando tanto la influencia de las componentes normales como tangenciales de las tensiones. Estas influencias han quedado patentes en las referencias experimentales

descritas y el procedimiento desarrollado recoge el acoplamiento o *hibridación* entre tales componentes en la delimitación de la superficie límite de crecimiento de daño en procesos de fatiga de alto ciclaje en metales dúctiles (CP4.1-CP4.4). Se trata por tanto de una contribución novedosa, pues este procedimiento no ha sido desarrollado en la literatura científica previa. Se ha comprobado su adecuación a resultados experimentales en diferentes tipos de ensayos y se ha argumentado la unicidad de la solución propuesta, denominada como función *EDEVF*, y su adecuación al marco teórico formal del régimen elástico, propio de la fatiga de alto ciclaje (CP4.5). Se ha descrito anteriormente que bajo la admisión de la tensión efectiva o real como única variable en el proceso de descripción y avance del daño supone una similitud formal absoluta con el dominio de las tensiones que provocan deformaciones plásticas (CP4.6). De acuerdo a esta función, todo estado tensional que, en el espacio de tensiones, permanezca en el interior de la función *EDEVF* no provoca crecimiento de daño. La expresión más sintética para esta función ha sido presentada en las ecuaciones (4.2.2.6c) a (4.2.2.6e), que pueden resumirse en una única forma:

$$\frac{1}{6} [\sigma_a]^T \begin{bmatrix} 4(2-\nu) & -(1+4\nu) & -(1+4\nu) \\ -(1+4\nu) & 4(2-\nu) & -(1+4\nu) \\ -(1+4\nu) & -(1+4\nu) & 4(2-\nu) \end{bmatrix} [\sigma_a] - \sigma_D^2 = 0 \quad (6.17)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson, restringido a un valor inferior a 0,5, σ_D es el límite de fatiga simple adoptado y los vectores tensión están referidos a sus tensiones principales, considerándose, por sencillez, como magnitudes vectoriales. Múltiples conclusiones y consideraciones han sido desarrolladas sobre la expresión (6.17) y se ha considerado de especial relevancia la adopción de una nueva variable ν^* , definida, en término del coeficiente de Poisson, por

$$\nu^* = \frac{1+4\nu}{4(2-\nu)} \quad (4.2.3.8)$$

Se ha analizado la aplicación de esta función límite en ensayos triaxiales, biaxiales y monoaxiales, contrastando las conclusiones obtenidas con resultados experimentales previos y consolidados en el campo de los metales dúctiles.

Como ya se expuso, el modelo de crecimiento responde a la ecuación

$$\dot{\epsilon} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_a} \quad \lambda \geq 0 \quad F(\sigma_a) \leq 0 \quad \lambda F(\sigma_a) = 0 \quad (6.8)$$

y ha sido concluido que el parámetro λ en estas ecuaciones puede expresarse en términos de la tasa de producción de entropía, que, de acuerdo con la ecuación (4.2.4.4e) y la ecuación (6.6),

$$\dot{\lambda} = \frac{\Phi}{\sigma_D^2} \quad (6.17)$$

tal y como se concluyó en CP4.7. Puede establecerse una consideración adicional teniendo en cuenta la ecuación (6.13),

$$\Phi = \frac{d\phi^D}{ds_D} \geq 0$$

con lo que

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_D^2} \frac{d\phi^D}{ds_D} = \frac{1}{\sigma_D^2} \frac{\dot{\phi}^D}{\dot{s}_D} \quad (6.18)$$

que expresa una relación entre las derivadas temporales del parámetro λ , del potencial del daño ϕ_D y de la función de evolución del daño s_D , que podría ser de interés en desarrollos posteriores de modelos que involucren el potencial de daño.

Recogiendo la evidencia experimental proporcionada por las curvas de Wöhler se ha propuesto en esta Tesis un **índice de concentración de tensión** por fatiga, $K_\phi(t)$ que expresa la proporcionalidad entre la tensión aplicada al cuerpo y la tensión generadora de daño en un proceso de fatiga de alto ciclaje. Esta hipótesis está soportada por la expresión (6.15) que muestra que la evolución del tensor de daño es la misma para todas sus componentes. En función de ello, admitiendo una tensión inicial correspondiente a la obtenida en cada punto por aplicación de una carga externa en el momento inicial de la producción de daño por fatiga, la integración de la ecuación (6.15) desde este punto inicial mostrará la proporcionalidad entre el tensor de daño en cada instante y el tensor de tensiones aplicado en cada instante (o tensor de tensiones inicial). De hecho, como se indica en la ecuación (5.1.4), si el proceso de daño es isótropo, la tensión total (suma de la tensión aplicada y la tensión generada por daño) puede expresarse en términos de la tensión aplicada por un factor de proporcionalidad dependiente de los valores de la función escalar de daño ϕ_D .

Por otra parte, se ha comprobado que este resultado, recogido en las expresiones

$$[\sigma_D(t)] = K_\phi(t) [\sigma(t)] \quad (5.1.2)$$

$$K_\phi(t) \geq 0 \quad \dot{K}_\phi(t) \geq 0 \quad (5.1.3)$$

admitiendo que este índice de concentración de tensión evolucione con el número de ciclos aplicados de acuerdo a una distribución de Weibull, dada por la ecuación (5.1.10), puede reproducirse la ecuación de Basquin como ecuación que aproxime los resultados de Wöhler. Pero, por otra parte, la ecuación ya referenciada

$$\dot{\sigma}_{D,ij} = -\dot{s}_D \sigma_{D,ij} \quad (6.15)$$

establece la evolución del tensor de tensiones de daño en términos de ese mismo tensor en cada instante. Puede establecerse un paralelismo entre este resultado obtenido en (5.1.13) como consecuencia de la adopción para el índice de concentración por fatiga de una evolución propia de una distribución de Weibull,

$$\frac{\Delta\sigma_a}{\sigma_a} = -a \frac{\Delta N}{N - N_0} \quad (5.1.13)$$

compatible con (6.15) si se adopta para la función de evolución de daño una dependencia en función del número de ciclos aplicados de la forma:

$$\frac{\Delta s_D(N)}{\Delta N} = \frac{a}{N - N_0} \quad (6.19)$$

Expresiones semejantes a (6.19) pueden desarrollarse desde la perspectiva de la reproducción de las diversas expresiones empíricas reproducidas en el epígrafe 2.3.1.

La definición en (5.2.2) del coeficiente o índice de eficiencia a la fatiga y la asunción de la hipótesis **H8** de invariancia del volumen de un elemento sometido a fatiga de alto ciclaje posibilita la deducción de las expresiones (5.2.17) y (5.2.18)

$$K_N = \varphi_N \cdot K \quad (5.2.17)$$

$$K^\varphi = \varphi \cdot K \quad (5.2.18)$$

que establecen relaciones lineales entre la rigidez efectiva final de una barra sometida a fatiga de alto ciclaje, en cualquier instante en el que se ha de producir la rotura del elemento ante un estado tensional superior o igual al límite de fatiga, con la rigidez inicial de la barra. Uno de los elementos de interés de las anteriores expresiones consiste en que suponen una generalización del modelo de daño de Kachanov, inicialmente reducido a áreas normales a esfuerzos simples de tracción. En el proceso de deducción de estas relaciones se ha mostrado (5.2.14) que la hipótesis de Kachanov sería una consecuencia de la hipótesis admitida de invariancia del volumen. Considérese no obstante que esta hipótesis está restringida a la fatiga por alto ciclaje, en la que no se producen deformaciones plásticas. El establecimiento de las relaciones lineales (5.2.17) y (5.2.18) abren un campo de investigación novedoso centrado en el efecto de la fatiga de alto ciclaje sobre la rigidez de elementos estructurales.

Efectivamente, es evidente que un análisis de la anterior acepción **CP5.5** lleva a considerar su posible extrapolación práctica tecnológica a entramados básicos de estructuras de barras. Su consecuencia inmediata es la **CP5.6**, puesto que es ampliamente conocida la relación de dependencia existente entre la rigidez global del conjunto estructural y la rigidez de sus elementos, generalmente expresada, en el régimen elástico en que se sitúa este trabajo, según la expresión (5.3.1a)

$$[A] = [K][D] \quad (5.3.1a)$$

Este modelo, en el que la consideración de la fatiga HCF en el dimensionado de sus elementos es a posteriori, es, pues, consecuente con el efecto de la fatiga sobre la rigidez final del conjunto a partir de sus elementos, según lo expuesto y expresado en (5.2.17)-(5.2.18), de lo que se infiere la expresión (5.3.1b)

$$[A] = [K^\varphi][D_\varphi] \quad (5.3.1b)$$

permitiendo concluir, además de la estimación del efecto de la fatiga HCF sobre la estructura **CP5.7**, la necesidad de plantear un nuevo modelo que contemple ambas situaciones, la estática inicial que responde estrictamente a (5.3.1a), y la resultante final por HCF que respondería a (5.3.1b). Es decir, en síntesis, un modelo que refleje el resultado del comportamiento en servicio de la estructura ante el fenómeno de la fatiga de alto ciclaje. La conclusión **CP5.8** responde a la formalización de este esquema, lo que configura el **modelo- K^φ**

como contribución sustancial al análisis estructural básico asumiendo la estimación final sobre las solicitaciones críticas del conjunto estructural, S_c , a través de sus barras,

$$S_c = \text{máx} \{S_b, S_b^p\} \quad (5.3.7)$$

La expresión (5.3.7) expresa la **envolvente del conjunto estructural**, atendiendo al problema del dimensionado de la estructura más acorde con su comportamiento en servicio y, por lo tanto, abriendo una nueva perspectiva de investigación en concordancia con extrapolar e implementar su estudio a las siguientes dos vías:

- *Detectar procesos patológicos inherentes al comportamiento por gradiente de HCF intemporal, no definidos hasta el momento, en estructuras cuyo dimensionado haya sido simplemente estático. Esta línea conlleva una fuerte componente experimental.*
- *Establecer formalismos que consideren el análisis estructural que incorpore el efecto de la fatiga de alto ciclaje mediante el método de los elementos finitos (MEF). Ello ha sido considerado únicamente de forma implícita en este trabajo a través del elemento-barra, puesto que el estado de la fatiga de alto ciclaje, incipiente en estos momentos salvo en el análisis de grietas en entallas, impone una rigidez global del elemento-barra. Cualquier otro enfoque de discretización requeriría del conocimiento local de rigidez y deformación, que conllevaría necesariamente una fuerte componente experimental, a la vez que una modelización teórica de las funciones de forma, dado que éstas dependen de la evolución de las deformaciones locales. Todo ello supone también un nuevo campo de desarrollo o investigación.*

7 REFERENCIAS

AFANÁSIEV, A.M. / MARIEN, V.A. 1978. "Prácticas de laboratorio sobre resistencia de materiales". Editorial Mir. Moscú.

AIRY, G.B., 1862. Brit.. Assoc. Advencement Sci. Rept.

ANGLADA, M.J. / ALCALÁ, J. / LLANES, L.M. / MATEO, A.M. / SALÁN, M.N. 2002. "Fractura de materiales". Ediciones UPC. Barcelona.

ANDERSON, J.C. / LEAVER, K.D. / RAWLINGS, R.D. / ALEXANDER, J.M. 2002. "Ciencia de los Materiales". 2ª ed. Editorial Limusa.

ANÓN. 1949. "Manual on fatigue testing". ASTM STP: 91.

APHANASIEW, J. 1940, 1941, 1946, 1948. J. Tech Physique URSS, nº10, p. 1553 (1940); nº4, p. 349 (1941); p. 157 (1946), analysé dans The Engineer's Digest, vol. 9 nº 3, p. 96 (1948).

ARANA, J.L / GONZÁLEZ, J.J. 2002. "Mecánica de la Fractura". Universidad del País Vasco.

ASM HANDBOOK, 1996. "Vol 19: Fatigue and Fracture". ASM International.

ASME. 1974. "Boiler and Pressure Vessel Code", Sec. III, Div. I, Subsection NA, ASME, New York, NY, 1974.

ASTM. 1979. "Definitions of Terms Relating to Fatigue Testing and the Statistical of Fatigue Data".

AVILÉS, R. 2005. "Análisis de Fatiga en Máquinas". Thomson.

BAGCI, C. 1981. "Fatigue design of machine elements using the Bagci Line defining the fatigue failure superficie line (mean stress diagram)". Mechanism and Machine Theory Volum. 16, Issue, 4, 1981, pages 339-359. Elsevier. Ltd.

BAIRSTOW, L. 1910. "Les limites élastiques du fer et de l'acier dans le cas de variations cycliques des efforts", Phil. Trans. Royal Society, vol. 210, p.35.

BANNANTINE, J.A. / COMER, J.J. HANDROCK, J.L. 1990. "Fundamentals of Metal Fatigue Analysis". Prentice Hall, Englewood Cliffs. New Jersey.

BASQUIN, O.H. 1910. "The exponential law of endurance test". Proceedings of the American Society for Testing and Materials 10, 625-30.

BASTENAIRE, F. / WEISZ, M. 1957. "Contribution à l'étude de l'aspect statistique de la fatigue". Communication présentée aux journées d'automne de la Société française de métallurgie. (Publications de l'Institut de recherches de la sidérurgie, 189, décembre 1958).

BATHIAS, C. / BAÏLON, J-P. 1980. "La fatigue des materiaux et des structures". Maloine S.A. Éditeur. París.

BATTELLE MEMORIAL INSTITUTE. 1941. "Prevention of the Failure of Metals under Repeated Stress". John Wiley. Nueva York. Chapman and Hall, Londres.

BAUSCHINGER, J. 1886. "Ueber die Veränderungen der Elastizitätsgrenze und der festigkeit des Eisens und Stahls durch Strecken, Quetschen, Erwärmen Abkühlen und durch oftmals wiederholte Belastung". Mitt: Mech-Tech Lab. XIII München.

BAZANT, Z.P. / OZBOLT, J. 1990. "Nonlocal microplane model for fatigue, damage, and size effect in structures", J. Eng. Mech., 116(11), 2485-2505.

BAZANT, Z.P. / JIRASEK, M. 2002. "Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress". Journal of Engeng. Mech., 1119-1149.

BELTRAMI, E. 1885. Rend. Ist. Lomb. 18, 704

BERNOULLI, J. 1705. "Véritable hypothese de la résistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort". Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 176-186. París, 1706. (En Opera(2 vols), n. CII, vol. 2, 976-989.).

BEYLE, M.H. (STENDHAL), 1838, 1879. "Memories d'un touriste". 2 Volumes. Calmann Lévy. (1879). París.

BLAND, R.B. / PUTNAM, A.A. 1946. "Cumulative damage in fatigue. Discussion on Ref.104". Journal of Applied Mechanics. Trans ASME, Vol.13, p A169/A171.

BORINO, G. / FUSCHI, P. / POLIZZOTTO, C. 1999. "A thermodynamic approach to nonlocal plasticity and related variational approaches", J.Appl.Mech, 66, 952-963.

BRAND, A. / SUTTERLIN, R. 1980. "Calcul des pièces à la fatigue, méthode du gradient", CETIM.

BRAND, A. 1981. "Approche classique du problème de fatigue. Définitions. Diagrammes. Facteurs d'influence". Mécanique-Matériaux-Electricité, nº 375/376/377, (3-4-5), p. 151/166.

BRESLER, B. / PISTER, K. 1957. "Failure of Plain Concrete under Combined Stresses", Transactions of the American Society of Civil Engineers, 122, pág. 1049.

CAQUOT, A. 1933. "L'exploitation par l'ingénieur de la résistance de la matière". Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France.

CARBAJAL, E.C. / SANCHEZ, R. 2009. "Surface growth limit damage in a macroscopic model of high cycle fatigue", 1st International Conference on Construction and Buiding Research, pp 1-11. EUAM. Technical University of Madrid (UPM).

CAROL, I. / WILLIAM, K. 1997. "Application of analytical solutions in elasto-plasticity to localization analysis of damage models", COMPLAS 5, Computational Plasticity, 714-719, Barcelona.

CAUCHY, A. 1822. “[Observación: La Memoria de Cauchy fue comunicada, pero no publicada]”. Academia de París, septiembre, 1822. (Véase, Timoshenko, 1953).

CAZAUD, R. 1957. “La Fatiga de los Metales”. Aguilar. Madrid

CAZAUD, R. 1969. “La Fatigue des Métaux”. 5^{ème} édition (remise a jour par Pomey, G. / Rabbe, P. / Janssen, Ch.). Dunod. París.

CHABOCHE, J.L. 1988. “Continuum damage mechanics”. I and II, Journal of Applied Mechanics, 55, 59-72.

CHABOCHE, J.L. 2003. “Thermodynamics of local state; overall aspects and micromechanics based constitutive relations”. Technische Mechanik, 23, 113-129.

CHOW, C.L. / WEI, Y. 1991. “A damage mechanics model of fatigue crack initiation in notched plates”. Theor. Appl. Fract. Mech., 16, 123-133.

CHOW, C.L. / WEI, Y. 1999. “Constitutive modelling of material damage for fatigue life predictions”. Int. J. Damage Mech. 8, 355-375.

CHOW, C.L. / WEI, Y. 2001. “A Damage-Coupled TMF Constitutive Model for Solder Alloy”, International Journal of Damage Mechanics, vol 10

CHOW, C.L. / WEI, Y. 2004. “Damage-Coupled viscoplastic constitutive modelling for solder materials”, Journal of Chinese Institute of Engineers, vol. 27

CHU, C.C. / NEEDLEMAN, A. 1980. “Void nucleation effects in biaxially stretched sheets”. J.Engng.Mat.Technol, 102, 249-256.

CIAVARELLA, M / PUGNO, N. 2005. “A Generalized Paris’ Law For Fatigue Crack Growth”. Associazione Italiana per l’Analisi delle Sollecitazioni. XXXIV. Politécnico de Milano.

CIPOLLINA, A. / LÓPEZ-INOJOSA, A. / FLÓREZ-LÓPEZ, J. 1995. “A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames”. Computers & Structures, 54 (6), 1113-1126.

COFFIN, L.F. 1962 (ver Tavernelli, J.F. and Coffin, L.F. 1962).

COLLINS, J.A. 1981. “Failure of Materials i Mechanical Design”. John Wiley and Sons. New York.

CONDON, E.U. / MORSE, P.M. 1929. “Quantum Mechanics”. McGraw Hill.

CORDEBOIS, J.P. / SIDOROFF, F. 1979. "Anisotropic elastique induite par endommagement, Comportement mécanique des solides anisotropes", N^o 295, Colloques internationaux du CNRS, Editions du CNRS, Grenoble, France, 761-774.

CORTEN, H. / DOLAN T. 1956. “Cumulative fatigue damage”. IME-ASME-Int. Conf. on Fatigue of Metals, London, September 1956, p. 235/246.

COTTRELL, A.H. / HULL, D. 1957. “Extrusion and Intrusion by Cyclic Slip in Copper”, Proc. Roy. Soc., A 242, p. 211 à 213.

COULOMB, C.A. 1773. "Essai sur une application des règles de maximis & minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture". Mémoires de Mathématique & de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences l' par divers Savans & las dans ses Assemblés, vol. 7, 343-82. París, 1776.

CTE. 2006, 2008. "Código Técnico de la Edificación" 1a y 2a Ed. (BOE 28 de marzo de 2006, y 18 de octubre de 2008). Ministerio de la Vivienda. Madrid.

CUESTA, I.I. / ALEGRE, J.M. / BARBÁCHANO, H. 2010. "Aplicación del modelo de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) para la simulación del ensayo miniatura de punzonado sobre probetas prefisuradas", Revista de Metalurgia, vol. 46, 53-63

DANG VAN, K. 1973. "Sur la résistance à la fatigue des métaux". Sciences et techniques de l'Armement. Nº 47, 3^{ème} fascicule, pp. 641-722.

DANG VAN, K. / GRIVEAU, B. / MESSAGE, O. 1989. "On a new multiaxial fatigue criterion: theory and application. Biaxial and Multiaxial Fatigue. EGF 3 (Edited by M.W. Brown and K.J. Miller), London: Mechanical Engineering Publications, pp. 479-496.

DARABI ,M. K. / ABU AL-RUB, R.K./ LITTLE, D.N. 2012 "A continuum damage mechanics framework for modeling micro-damage healing", International Journal of Solids and Structures 49 ,492–513

DE VREE, J.H.P. / BREKELMANS, W.A.M. / VAN GILS, M.A.J. 1995. "Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics". Comput. and Struct., 55 (4), 581-588.

DEGROOT, S.R. / MAZUR, P. 1962. " Nonequilibrium Thermodynamics", North Holland, Amsterdam.

DESMORANT, R. / RAGUENEAU, F. 2005. "Constitutive modelling of damage, internal friction and fatigue for quasi-brittle materials", Euromech Colloquium 460, Numerical Modelling of Concrete Cracking, Innsbruck, Austria.

DIETER, G.E. 1967. "Metalurgia Mecánica". Ed. Aguilar. Madrid

DIETER, G.E. 1988. "Mechanical Metallurgy".McGraw-Hill. London

DOWLING, N.E. 2007. "Mechanical behavior of materials: engineering methods for deformation, fracture and fatigue". Third edition. Pearson Prentice Hall.

EDELEN, D.G.B / GREEN A.E. / LAWS. N. 1971. "Monlocal continuum mechanics". Arch. Ration. Mech. Anal., 43, 36-44.

EDELEN, D.G.B / LAWS, N. 1971. "On the thermodynamics of systems with nonlocality". Arch. Ration. Mech. Anal., 43, 24-35.

EL PERIÓDICO DE ARAGÓN, 10 DE OCTUBRE DE 2010. Entrevista a Kostya Novoselov, premio Nobel de Física del 2010.

ELLYIN, F. 1997. "Fatigue damage crack growth and life prediction". 1st, ed. Chapman & Hall. London.

ERINGEN, A.C. 1972. "Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves". Int. J. Eng. Sci., 10, 425-435.

ERINGEN, A.C. / EDELEN, D.G.B. 1972. "On nonlocal elasticity". Int. J. Eng. Sci., 10, 233-248.

ERINGEN, A.C. / KIM, B.S. 1974. "Stress concentration at the tip of a crack" Mech. Res. Commun., 1, 233-237.

ERINGEN, A.C. / SPEZIALE, C.G. / KIM, B.S. 1977. "Crack-tip problem in nonlocal elasticity". J. Mech. Phys. Solids, 25, 339-355.

EULER, L. 1744. "Methodus inveniendi lineas curvas Maximi Minimive proprietate I gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti". Additamentum I. Lausana y Ginebra.

EULER, L. 1757. "Sur la force des colonnes". Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, vol. 13, 252-282. Berlín.

EWING, J.A. / HUMFREY, J.C.W. 1903. "Rupture des métaux par efforts répétés". Phil. Trans. Royal Society, vol. 200, p.241.

FATEMI, A. / YANG, L. 1998. "Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials". Int. J. Fatigue Vol. 20 No 1, pp. 9-34. Elsevier Science Ltd.

FERRER, C / AMIGÓ, V. 2003. "Tecnología de Materiales". Editorial UPV. Universidad Politécnica de Valencia.

FEODÓSIEV, V.I. 1980. "Resistencia de Materiales". 2ª ed. Editorial MIR. Moscú.

FEODÓSIEV, V.I. 1997. "Resistencia de Materiales en 10 lecciones". URSS. (Reedición de 1969. Hayka).

FLÓREZ-LÓPEZ, J. 1993. "Modelos de daño concentrado para la simulación del colapso de pórticos planos". Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, 9 (9), 143-159.

FLÓREZ-LÓPEZ, J. 1995. "Simplified model of unilateral damage for RC frames". Journal of Structural Engineering, ASCE, 121 (12), 1765-1772.

FLÓREZ-LÓPEZ, J. 1998. "Frame analysis and continuum damage mechanics". Journal of Eur. Mech., 17 (2), 269-284.

FLÓREZ-LÓPEZ, J. 1999. "Plasticidad y Fractura en Estructuras Aperticadas". Monografía de Ingeniería Sísmica. Editor A. H. Barbat. Monografía CIMNE IS-35. Universidad Politécnica de Madrid.

FÖPPL, O. 1936. "L'importance pratique de la capacité d'amortissement des métaux et spécialement des aciers". Iron and Steel Inst. Meeting, septembre 1936.

FORREST, P.G. 1982. "Fatiga de los Metales". Urmo Ed. Bilbao.

FORSYTH, P.J.E. 1969. "The Physical basis of metal fatigue". Blackie and Son, cop. London

FROUSTEY, C. / LASSERRE, S. / DUBAR, L. 1992. "Essais de fatigue multiaxiaux et par blocs validation d'un critère pour les matériaux métalliques. MAT-TEC 92, Grenoble.

GALILEO GALILEI. 1638, 1976. "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. Leyden. En castellano: "Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias". Editora Nacional (1976). Madrid.

GDOUTOS, E.E. / RODOPOULOS, C.A. / YATES, J.R. 2003. "Problems of Fracture Mechanics and Fatigue". Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands.

GERBER, H. 1874. "Bestimmung der zualässigen Spannungen in Eisen-Konstruktionen". Zeitschrift des Bayerischen Architekten und Ingenieur-Vereins 6, 101-10.

GERMAINE, P. 1973. "Cours de Mécanique des Milieux Continus". Vol.1, Masson, Paris.

GERMAINE, P. / NGUYEN, Q.S. / SUQUET, P. 1983. "Continuum thermodynamics". J.of Applied Mechanics, 50, 1010-1020.

GOODMAN, J. 1899. "Mechanics Applied to Engineering". London: Longmans Green.

GORDON, J.E. 1978, 2004. "Estructuras o por qué las cosas no se caen". Calamar Ediciones (2004). Madrid.

GOUGH, H.J. / HANSON, D. 1923. "La tenue des métaux sous les efforts répétés, Proc. Roy., Soc., A., vol.104, p. 539.

GOUGH, H.J. / POLLARD, H.V. 1935. "Strength of metals under combined alternating, stresses". Proc. Inst. Mech. Engrs., 131, 3-54

GRIFFITH, A.A. 1921. "The phenomenon of rupture and flow in solids". Philosophical Transactions of the Royal Society, London A221, 163-97.

GUERRA, R. 1985. "Resistencia de Materiales". T.10, T.13. Apuntes de Cátedra. UPC. Barcelona. (Existe versión previa UPV, Valencia).

GURSON, A.L. 1977. "Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – yield criteria and flow rules for porous ductile media". J.Engng.Mat.Technol. 99, 2-15.

HAIGH, B.P. 1915. "Report on alternating stress tests of a sample of mild steel received from the British Association Stress Committee". Report of the British Association. 85, 163-170.

HAIGH, B.P. 1917. "Experiments on the fatigue of brasses". Journal of the Institute of Metals. 18, 55-57.

HAIGH, B.P. 1919. Brit. Ass. Reports, Section G.

HALPHEN, B. / NGUYEN, Q.S. 1975. "Sur les matériaux standards généralisés" . J.Mécanique, 14, 1, 39-63.

HAMIEL, Y. / LIU, Y. / LYAKHOVSKY, V. / BEN-ZION, Y. / LOCKNER, D. A. 2004. "Viscoelastic damage model with applications to stable and unstable fracturing". Geophys. J. Int., 159, 1155-1165.

HAMIEL, Y. / LYAKHOVSKY, S. / BEN-ZION, Y. 2011. "The Elastic Strain Energy of Damaged Solids with Applications to Non-Linear Deformation of Crystalline Rocks", Pure Appl. Geophys., 168, 2199-2210

HANSEN, N.R. / SCHREYER, H.L. 1994. "A thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage". Int.Journ.of Solids and Struct., 31, 3, 359-389.

HASHIN, Z. / ROTEM, A. 1978. "A cumulative damage theory of fatigue failure". Mater. Sci. Engng., 34, 147-60

HAYHURST, D.R. / LECKIE, F.A. 1973. "The effect of creep constitutive and damage relationships upon the rupture time of a solid circular torsion bar. J. Mech. Phys. Solids 21, 431-446.

HENCKY, H. 1924. Zeits. ang. Math. Mech. 4 , 323.

HENRY, D.L. 1955. "A theory of fatigue-damage accumulation in steel". Transactions of the ASME, 77, p. 913/918.

HEYMAN, J. 2004. "Análisis de Estructuras. Un estudio histórico". Instituto Juan de Herrera, ETSAM. Madrid.

HEYMAN, J. 2011. "Teoría básica de estructuras". Instituto Juan de Herrera, ETSAM. Madrid.

HILL, R. 2003. "The Mathematical Theory of Plasticity". Clarendon Press, Oxford. (Reimpresión de First published in Oxford Classics Series, 1998, respecto al original de 1950).

HILLBERRY, B.M. 1970. "Fatigue life of 2024 T3 aluminium alloy under narrow-and broad-band random loading. Effects of environment and complex load history on fatigue life". ASTM-STP 462, p.167/183.

HUBER, M.T. 1904. Czasopismo techniczne; Lemberg, 22, 81.

IBRAHIMBEGOVIC, A. / MARKOVIC, D. / GATUINGT, F. 2003. "Constitutive model of coupled damage-plasticity and its finite element implementation", European J.Finite Elem., Vol. 12-4 pp. 381-405.

INAH, Agosto 2008. "Modelos digitales de edificios mayas". Web, inah.gob.mx

INFORMACIONES-229, 2010. "La fractura dels materials, amb tots els detalls". Revista de la UPC. Barcelona, p. 8-9. Abril 2010.

INGLIS, C.E. 1913. "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners". Transactions of the Institute of Naval Architects 55, 219-41.

IRWIN, G.R. 1957. "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate". Journal of Applied Mechanics 24, 361-4.

JENKIN, C.F. 1925. "High-Frequency Fatigue Tests", Proc. Royal Soc. London, v. 109, p. 119 à 143.

JENKIN, C.F. / LEHMANN, G.D. 1929. "High-Frequency Fatigue", Proc. Royal Soc. London, v. 125, p. 83 à 119.

JIRASEK, M. / BAZANT, Z.P. / BITNAR, Z. / MAZARS, J. 2007. "Fracture and Damage in Quasibrittle Structures", Taylor and Francis

JUNG, Z. / XING, Z. 1995. "The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics". Engng. Fract. Mech. 50 (1), 131-141.

JUVINALL, R.C. 1967. "Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength". McGraw-Hill. New York.

KACHANOV, L.M. 1958. "On the creep fracture time". Izv. Akad. Nauk. USSR, 8, 26-31.

KATTAN, P.I. / VOYIADJIS G.Z. 2001 "Decomposition of damage tensor in continuum damage mechanics", Journal of Engineering Mechanics, September.

KECECIOGLU, D. / CHESTER, L.B. / DODGE, T.M. 1975. "Combined Bending-Torsion Fatigue Reliability of AISI 4340 steel shafting with $k_t=2.34$ ". Journal of Engineering for Industry. Trans. ASME, May 1975, pp. 748-760

KENNEDY, A.J. 1961. "Possible Dislocation Gating Mechanisms for Fatigue Extrusion". Phil. Mag. 6, p. 49 à 53.

KIMBALL, A.L. 1929. "Vibration Damping, Including the Case of Solid Damping". Trans. ASME, APM 51-52.

KOMMERS, J.B. 1945. "L'effet d'overstress sur l'endurance de l'acier", Proc. A.S.T.M., Vol. 45, p. 532.

KOPLIC, J. / NEEDLEMAN, A. 1988. "Void growth and coalescence in porous plastic solids". Int.J.Solids Struct., 24, 835-853.

KRAJCINOVIC, D. FONSEKA, G.U. 1981. "The continuous damage theory of brittle materials". Part 1: General theory. Journ. Appl. Mech., 48, 809-815.

KUGUEL, R. 1961. "Relation between Theoretical Stress Concentration Factor and Fatigue Notch Factor Deduced from the Concept of Highly Stressed Volume". Proc. ASTM, Vol 61, pp 732-748.

KUHN, P. / HARDRATH, H.F. 1952. "An Engineering Method for Estimativa Notch-size Effect in Fatigue Tests on Steel". Technical Observe 2805, NACA, Washington, D.C.

LALANNE, C. 2002. "Fatigue Damage". Mechanical Vibration and Shock, Vol.IV . Hermes Penton Science. London.

LANDAU, L.D. / LIFSHITZ, E.M. 1969. "Teoría de la Elasticidad". (Vol.7 de Física Teórica). Ed. Reverté.

LANDGRAF, R.W. 1970. "The Resistance of Metals to Cyclic Deformation". Achievement of High Fatigue Resistance in Metals and Alloys. ASTM STP 467, Am. Soc. for Testing and Materials, West Conshohocken, PA, pp. 3-36.

LANGER, B.F. 1937. "Fatigue failure from stress cycles of varying amplitude". J.App. Mech, vol.4, nº4, A.160 to A. 162.

LAWSON, L. / CHEN, E.Y. / MESHII, M. 1998. "Near-Threshold Fatigue – A Review". International Journal of Fatigue and presented as an invited review at the Second International Conference on Fatigue Damage of Structural Materials, Hyannis, M.A. Int. J. Fatigue, 21 Suppl, S15-S46.

LAZAN, B.J. 1968. "Damping of Materials and Members in Structural Mechanics" (Elmsford, N.Y.: Pergamon Press).

LECKIE, F.A. / HAYHURST, D.R. 1974. "Creep rupture of structures". Proc. Soc. London, A340, 323-347

LECKIE, F.A. / HAYHURST, D.R. 1977. "Constitutive Equations for Creep Rupture". Acta Metallurgia. Vol.25, 1059-1070.

LEMAITRE, J. 1971. "Evaluation and dissipation of damage in metals submitted to dynamic loading". Proceedings I.C.M.. Vol.1. Kyoto.

LEMAITRE, J. A. 1985. "A continuous damage mechanics model for ductile fractura". J. Eng. Mater. Tech., 107, 83-89.

LEMAITRE, J. / CHABOCHE, J-L. 1985. "Mecánica des matériaux solides". Dunod. París.

LEMAITRE, J. A. 1996. "A Course on Damage Mechanics". Second Edition. Springer-Verlag.

LEMAITRE, J. / SERMAGE, J.P. / DESMORAT, R. 1999. "A two scale damage concept applied to fatigue", Int. Journal Fract., 97, 67-81.

LEVI, E. 1991. "Elementos de Mecánica del Medio Continuo". Ed. Limusa.

LÉVY, M. 1871. Journ. Math. pures et app, 16, 308.

LITEWKA, A. / SZOJDA, L. 2004. "Damage and failure of brittle solids", XXI ICTAM, 15-21 August, 2004, Warsaw, Poland.

LYAKHOVSKY, V. / RECHES, Z. / WEINBERGER, R. / SCOTT, T.E. 1997. "Nonlinear elastic behaviour of damaged rocks". Geophys. J. Int., 130, 157-166.

MALVERN, L.E. 1969 "Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

MANSON, S.S. 1962. "Discussion of: Experimental Support for Generalized Equation Predicting Low Cycle Fatigue". Trans ASME, J. Basic Eng., vol 84, nº4, p.p. 533-537.

MANSON, S.S. 1965. "Interfaces Between Fatigue, Creep, and Fracture", Proceedings of International Conference on Fracture, Vol. 1, Japanese Society for Strength and Fracture of Metals, Sendai, Japan, September, 1965, and International Journal of Fracture Mechanics, March 1966.

MANSON, S.S. / HALFORD, G.R. 1981. "Practical Implementation of the Double Linear Damage Rule and Damage Curve Approach for Treating Cumulative Fatigue Damage". Int. J. Fract., Vol 17, No. 2, 1981, pp.169-172, R35-R42.

MARANTE, M.E. / FLÓREZ-LÓPEZ J. 2002. "Model of damage for RC elements subjected to biaxial bending". Engineering Structures, 24 (9), 1141-1152.

MARCO, S.M. / STARKEY, W.L. 1954. "A Concept of Fatigue Damage". ASME Transactions, 76 (1954): 627.

MARIN, J. 1956. "Interpretation of fatigue strengths for combined stresses". International Conference on Fatigue of Metals. IME-ASME.

MARIN, J. 1962. "Mechanical Behavior of Engineering Materials". Prentice Hall, Englewood Cliffs. Nueva Jersey.

MASE, G.E. 1978. "Mecánica del Medio Continuo". McGraw-Hill.

MASING, G. 1926. "Eigenspannungen und verfestigung beim Messing". Proceedings of the Second International Conference of Applied Mechanics, pp 332-5. Zurich.

MARIOTTE, E. 1686. "Traité du mouvement des eaux". París.

MESNAGER, A. 1922. "Deformación y rotura de los sólidos". Revue de Métallurgie, Mémoires, vol. 19, págs 366 y 425.

MINER, M.A. 1945. "Cumulative damage in fatigue". Journal of Applied Mechanics, 12, 159-64.

MIRICA, R.F. / DOBRE, G. / SANDU, C. / DOBRE D. 2003. "On modeling the gear damage accumulation process". International conference POWER TRANSMISSIONS '03. Varna, vol. I, pp. 65-68.

MOHR, O. 1882. "Über die Darstellung des Spannungszustandes and des Deformationszustandes eines Körperelementes". *Zivilingenieur*, p.113.

MOORE, R.R. 1920-1925. (Véase Cazaud 1957, 1969)

MOORE, H.F. / JASPER, T.M. 1924. *Bulletins nº 124-136-142, Engineering Exp. Station, Univ. Illinois*

MORENO, B. / ZAPATERO, J. / RODRIGUEZ, A. 2008. "Modelos de plano crítico en fatiga biaxial: predicción de la orientación de la grieta. *Anales de Mecánica de la Fractura*. 25, vol 1, 361-366.

MORROW, J. 1968. "Fatigue Design Handbook", *Advances in Engineering*. Vol. 4, Society of Automotive Engineers, Warrendale, Pa., 1968, Sec. 3.2, pp. 21-29.

MOTT, N.F. 1958. "Une théorie sur l'origine des fissures de fatigue". *Acta Metallurgia*, vol. 6, p. 195.

MURAKAMI, S. / OHNO, N. 1981. "A Continuum Theory of Creep and Creep Damage". *Proceedings of 3M IUTAM Symposium on Creep in Structures*, pp. 422-444, Springer, Berlin.

MURAKAMI, S. 1983. "Notion of Continuum Damage Mechanics and its Application to Anisotropic Creep Damage Theory". *ASME J. Eng. Mater. Technol.*, 105, pp. 99-105

NAVIER, C.L. 1826. "Résumé des leçons donnés à l'École des Ponts et Chaussées, sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines". París (2ª edición, 1833; 3ª edición, con notas y apéndice de B. de Saint-Venant, 1864)

NEEDLEMAN, A. / TVERGAARD, V. 1984. "An analysis of ductile rupture in notched bars". *J.Mech.Phys.Solids.*, 32, 461-490.

NEUBER, H. 1946. "Theory of Notch Stresses". J.W. Edwards Publisher Inc.: Ann Arbor Mich.

NGUYEN, Q.S. / TRIANTAFYLIDIS, N. 1989. "Plastic bifurcation and postbifurcation analysis for generalized standard continua". *J.Mech.Phys.Solids*, 37, 5, 545-566.

NOLL, C.J. / LIPSON, C. 1946. "Allo wable Working Stresses". *Society for Experimental Stress Analysis*, Vol. 3, núm 2, p.29.

NORTON, R.L. 1999. "Diseño de máquinas". 1ª Edición. Prentice Hall Hispanoamericana.

ORAL, A. / ANLAS, G. / LAMBROS, J. 2012. "Determination of Gurson-Tvergaard-Needleman Model Parameters for Failure of a Polymeric Material", *International Journal of Damage Mechanics*

ORTIZ, L. 1985. "Elasticidad", 2ª Edición ETSII, Universidad Politécnica de Madrid.

OSGOOD, C.C. 1982. "Fatigue Design", 2nd edn. New York: Pergamon Press.

PALMGREN, A. 1924. "Die Lebensdauer von Kugellagern". *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure* 68, 339-41.

- PARENT, A. 1713. "Essais et recherches de Mathématique et de Physique". 3 vols. París.
- PARIS, P.C / GÓMEZ, M.P / ANDERSON, W.P. 1961. "A rational analytic theory of fatigue". The Trend in Engineering 13, 9-14.
- PARTÓN, V.Z. 1990. "Mecánica de la destrucción". Editorial Mir. Moscú.
- PEERLINGS, R.H.J. / MASSART, T.J. / GEERS, M.G.D. 2004. "A thermodynamically motivated implicit gradient damage framework and its application to brick masonry cracking". Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 193, 3403-3417.
- PERDOMO, M-E. / RAMIREZ, A. / FLÓREZ-LÓPEZ, J. 1999. "Simulation of damage in RC frames with variable axial forces", Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 28 (3), 311-328.
- PETERSON, R.E. 1974. "Stress-concentration factors". John Wiley & Sons: Nueva York.
- PICÓN RODRIGUEZ, R.A. 1999. "Evolución de la Degradación de Rigidez en Pórticos de Concreto Armado". Tesis de Maestría en Ingeniería Estructural. Universidad de Los Andes. Facultad de Ingeniería. Mérida, Venezuela.
- PINTADO, J.M. 1992. "Fallos en servicio de los materiales metálicos". Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial. Madrid.
- PISARENKO, G.S. / YÁKOVLEV, A.P. / MATVÉEV, V.V. 1985. "Manual de resistencia de materials". Editorial Mir. Moscú.
- POLIZZOTTO, C. 1998. "A maximum reduced dissipation principle for non associative plasticity", Re.Mat Acc.Lincei, s.9, v.9, 115-129.
- POLIZZOTTO, C. 2001. "Non local elasticity and related variational principles. Int. J. Solids Struct., 38, 7359-7380.
- PONS, A.J. / KARMA, A. 2010. "Helical crack-front instability in mixed-mode fracture". Letter Nature 464: 85-89, March 2010.
- POPOV, E.P. 1990. "Introducción a la Mecánica de Sólidos". Editorial Limusa. México.
- PRANDTL, L. 1924. Proc. 1st Int. Cong. App. Mech. Delft, 43.
- RABOTNOV, Y.N. 1968. "Creep Rupture", Proceedings International Congress of Applied Mechanics XII, pp.342-349. Springer-Verlag. Berlín.
- RAMASWAMY, S. / AVARAS, N. 1998. "Finite element implementation of gradient plasticity models". Part I: Gradient-dependent yield functions, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 163, 11-32.
- RAMASWAMY, S. / AVARAS, N. 1998. "Finite element implementation of gradient plasticity models". Part II: Gradient-dependent evolution equations, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 163, 33-53.

RAMBERG, W. / OSGOOD, W.R. 1943. "Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters", Tec. Note 902. National Advisory Comm. Aeronaut., Washington, D.C.

REUSCH, F. / SVENDSEN, B. / KLINGBEIL, D. 2003. "A non-local extension of Gurson-based ductile damage modelling". Comput. Mater. Sci., 26, 219-229.

REUSCH, F./HORTIG, C./SVENDSEN, B. 2008. Nonlocal Modeling and Simulation of Ductile Damage and Failure in Metal Matrix Composites, Journal of Engineering Materials and Technology, vol. 130

REUSS, A. 1930. Zeits. ang. Math. Mech, 10, 266.

RICHART, F.E. / NEWMARK, N.M. 1946. "An Hypothesis for the Determination of Cumulative Damage in Fatigue" ASTM Proceedings 48 (1946): 767

ROGULA, D. 1982. "Introduction to nonlocal theory of material media", Nonlocal theory of material media. CISM courses and lectures. D.Rogula, ed., Springer, Wien, 268, 125-222.

ROLFE, S.T / BARSOM, J.M. 1987. "Fracture and Fatigue Control in Structures". Prentice-Hall, Inc., 2nd. Ed.

SAE, 1997. "Fatigue Design Handbook". 3rd ed. Edited by Rice, R.C. USA.

SAINT-VENANT, B. DE. 1855. "Mémoire sur la torsion des prismes...", Comptes rendues de l'Académie des Sciencies, Mémoires des Savants étrangers, vol.14, 233-560. París.

SAINT-VENANT, B. DE. 1856. "Mémoire sur la flexion des prismes...", Journal de mathématiques de Liouville, 2nd series, vol.1, 89-189.

SAINT-VENANT, B. DE. 1864. "Navier's <<Résumé des Leçons...>>". 3d ed.

SANTOJA, K. 2000. "Thermomechanical formulation for the gradient theory", VII Finnish mechanics days, Tempere, Finland.

SCHÜTZ, W. 1996. "A History of Fatigue. Engineering Fracture Mechanics". Vol.54, nº2, p.p. 263-300.

SERWAY, R.A. 1993. "Física". Tomo II. Tercera edición revisada. Mc Graw-Hill.

SHAO, J.F. / RUDNICKI, J.W. 2000. "A microcrack based continuous damage model for brittle geomaterials", Mechanics of materials, 32, 607-619.

SHIGLEY, J.E / MISCHKE C.R. 2002. "Diseño en ingeniería mecánica". 6ª Edición. Mc Graw-Hill.

SINES, G. 1955. "Failure of Materials under Combined Repeated Stresses with Superimposed Static Stresses". NACA TN3495, National Advisory Committee for Aeronautics.

SKRZYPEK, J.J. 1999. "Material damage models for creep failure analysis and design of structures, Creep and damage in materials and structures". International Centre for Mechanical Sciences (CSIM) Courses and Lectures, Springer-Verlag, 399, 97-166.

SMITH, J.O. 1942. "Effect of Range of Stress on Fatigue Strength". Univ. Illinois Engg. Expt. Station Bulletin 334.

SMITH, K.N. / WATSON, P. / TOPPER, T.H. 1970. "A Stress-Strain Function for the Fatigue of Metals". Journal of Materials, ASTM, vol.5, no. 4, pp. 767-778

SODERBERG, C.R. 1939. "Factor of safety and working stress". Transactions of the American Society of Mechanical Engineers 52, 13-28.

STENDHAL, 1838. (véase Beyle, M.H. 1838, 1879).

STROMEYER, C.E. 1914. "The determination of fatigue limits under alternating stress conditions". Proc. Roy. Soc. London A90, 411-425.

SUBRAMANYAN, S. 1976. "A cumulative damage rule based on the knee point of the S-N curve". J. Engng. Mater. Technol., Trans. ASME, 98, 313-22

SURESH, S. 2004. "Fatigue of Materials". 2ª Edición. (Reimpresión con correcciones). Cambridge University Press.

SVENDSEN, B. 1999. "On the thermodynamics of thermoelastic materials with additional scalar degrees of freedom". Continuum Mech. Thermodyn., 4, 247-262.

SVENDSEN, B. 2001. "Formulation of balance relations and configurational fields for materials with microstructure via invariance". Int.J.Solids Struct, 35, 1183-1200.

TAVERNELLI, J.F. AND COFFIN, L.F. 1962. "Experimental Support for Generalized Equation Predicting Low Cycle Fatigue". Trans ASME, J.Basic Eng., Vol 84, nº4, p.p. 533-537.

TIE-JUN, W. 1992. "Unified CDM model and local criterion for ductile fracture". I and II, Eng.Fract.Mech., 42, 1, 177-193.

TIMOSHENKO, S.P. 1953. "History of strength of materials". Mc Graw Hill. New York.

TIMOSHENKO, S. / GOODIER, J.N. 1975. "Teoría de la Elasticidad". 2ª ed. Ediciones Urmo.

THOMSON, W.T. 1982. "Teoría de las Vibraciones: Aplicaciones". Prentice-Hall. México.

TORROJA, E. 1957. "Razón y Ser de los tipos estructurales". 1ª Ed. Instituto de Ciencias de la Construcción. Eduardo Torroja (Nota: actualmente edita CSIC). Madrid.

TRESCA, H. 1864. Comptes Rendus Acad. Sci. París, 59.

TVERGAARD, V. 1981. "Influence of Voids on Shear Band Instability Under Plane Strain Conditions" Int.J.Frac, 17(4), pp 389-407.

TVERGAARD, V. 1982. "On Localization in Ductile Materials Containing Spherical Voids". Int.J.Frac, 18.

TVERGAARD, V. / NEEDLEMAN, A. 1995. "Effects of non-local damage in porous plastic solids", Int.J.Solids Struct. 32, 1063-1077.

UPADHYAYA, Y.S. / SRIDHARA, B.K. 2012. "Fatigue Crack Initiation and Propagation Life Prediction of Materials", International Conference on Mechanical, Electronics and Mechatronics Engineering (ICMEME'2012), Bangkok

VÁN, P. 2001. "Internal thermodynamic variables and failure of microcracked materials", Internal Report, Budapest University of Technology.

VÁN, P./ VÁSÁRHELYI, B. 2010." Relation of rock mass characterization and damage", Rock Engineering in Difficult Ground Conditions – Soft Rocks and Karst – Vrkljan (ed) Taylor & Francis Group, London.

VARIGNON, P. 1702. "De la résistance des solides..." Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 66-94. París, 1704.

VÁZQUEZ, M. 1992. "Cálculo Matricial de Estructuras". Edita: Colegio de Ingenieros Técnicos de Madrid.

VOYIADJIS, G.Z. / PARK, T. 1997. "Anisotropic damage effect tensors for the symmetrization of the effective stress tensor". J. Appl. Mech., 64, 1, 106-110.

VOYIADJIS, G.Z. / YOUSEF, M.A. / KATTAN, P.I. 2012. "New tensor for Anisotropic Damage in Continuum Damage Mechanics", Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 134.

VON MISES, R. 1913. Göttinger Nachrichten, math.-phys. Klasse, 582

WEBER, B. 1999. "Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque", Thèse: INSA, Lyon.

WEIBULL, W. 1939. "A statistical theory of the strength of materials". Proceedings 151. Stockholm: Royal Swedish Academy of Engineering Sciences.

WEIBULL, W. 1947. "A statical representation of fatigue failures in solids". Trans. of Royal Institute of Technology, Sweden, No. 27.

WEIBULL, W. 1949. "A statistical representation of fatigue failures in solids". Trans. Roy. Swed. Inst. Tech. 27.

WEIBULL, W. 1961. "Fatigue Testing and Analysis of Results". Ed Pergamon Press. Oxford.

WEISMAN, M.H. / KAPLAN, M.H. 1950. "Fatigue Strength of Steel Through the Range from ½ to 30000 Cycles of Stress". Proc. Amer. Soc. Test. Mat. 50, 649.

WESTERGAARD, H.M. 1939. "Bearing pressures and cracks". Journal of Applied Mechanics 61, A49-53.

WÖHLER, A. 1871. "Text to Determine the Forces Acting on Railway Carriage Axles and the Capacity of Resistance of the Axles". Engineering 11, 199.

Nota: Este resumen comprende la actividad principal de Wöhler que se publicó en varios artículos entre 1858-1870 (véase Schütz, 1996).

WOO, C.W. / LI, D.L. 1992. "A general stochastic dynamic model of continuum damage mechanics". Int.Journ.of Solids and Struct., 29, 23, 2921-2932.

YAZDANI, S. / SCHREDER, H. 1990. "Combined plasticity and damage mechanics model for plain concret", ASCE J.Engng.Mech., 116, 1435-1450.

WYSS, T. 1953. "Influence of Testing Frequency on the Fatigue Strength of Steels and Light Alloys". Amer. Soc. Tes. Mat. Bull. 188 (1953) 31.

ZAMACOIS, E. 1925, 1980. "Memorias de un vagón de ferrocarril". 1a edición. Plaza y Janes S.A, Edit(1980). Barcelona.