

LA ORIENTACIÓN DE LAS IGLESIAS ROMÁNICAS: LOS MÉTODOS DE GISEMUNDUS DE RIPOLL (F. 850)

THE ORIENTATION OF THE ROMANESQUE CHURCHES: THE METHODS OF GISEMUNDUS DE RIPOLL (F. 850)

Josep Lluís i Ginovart, Cinta Lluís Teruel, Iñigo Ugalde Blázquez

doi: 10.4995/ega.2022.14057

Existen pocas evidencias sobre el conocimiento científico en la praxis de la geometría medieval. Entre estas se encuentran los métodos del trazado de la orientación de los edificios sacros. Ejemplo de ello son un grupo de iglesias situadas en el Valle de Arán (s. XI-XIII) construidas de Este a Oeste con gran precisión ($91,41^\circ \pm 1,91^\circ$). Dado el perfil montañoso que impide observar el orto solar, estas iglesias han sido trazadas mediante sistemas de observación o instrumentales heredados de Vitruvio, Higinio Gromático, Gisemundo, o Gerberto de Aurillac. Se concluye que el método de fuentes gromáticas, el *Ars geometria Gisemundus* (c.800), copiado en el monasterio de Ripoll, es el que, desde el punto de vista geométrico, permite trazar la orientación de E-O con menos error.

PALABRAS CLAVE: GISEMUNDO,
GNOMON, ORIENTACIÓN, ROMÁNICO,
VALLE DE ARÁN

*There is little evidence of an understanding of scientific knowledge in the praxis of medieval geometry. Among these are the methods of tracing the orientation of sacred buildings. An example of this is a group of churches located in the Arán Valley (11c-13c) built from East to West with great precision ($91.41^\circ \pm 1.91^\circ$). Given the mountainous profile that prevents observing the solar ortho, these churches have been traced observation or instrumental systems by inherited from Vitruvius, Higinio Gromático, Gisemundo, or Gerberto de Aurillac. It is concluded that the method of gromatic sources, the *Ars geometria Gisemundus* (c.800), copied in the monastery of Ripoll, is the one that, from the geometric point of view, allows the orientation of E-O to be traced with the least error.*

KEYWORDS: GISEMUNDUS, GNOMON,
ORIENTATION, ROMANESQUE,
ARAN VALLEY



Tabla 1. Azimut iglesias con alineación equinoccial
1. Sant Andreu de Saldarú, Equinoccio (2018), 8:45 h. GTM (Google Earth Pro). *Ars gromatica siue geometria Gisemundi*

Table 1. Azimut churches with equinoctial alignment
1. Sant Andreu de Saldarú, Equinox (2018), 8:45 am. GTM (Google Earth Pro) *Ars gromatica siue geometria Gisemundi*

La investigación quiere precisar los estudios ya realizados sobre el tema (Lluis i Ginovart, et al 2019) desarrollando específicamente el método del copista de Gisesmundo (fl. 850) del monasterio de Ripoll, cercano al Valle de Arán, haciendo hincapié en la facilidad y precisión de su trazado. Siendo un autor estudiado desde la historia de la ciencia, Rudolf Beer (1863-1913) dio la primera referencia del *Ars gromatica Gisemundi* en *Die Handschriften des Klosters Santa Maria de Ripoll, I* (1907), en donde reconoce la singularidad de este tratado de agrimensura (fol. 76-86) (Beer 1907). Sin embargo, aún no ha sido evaluado desde la perspectiva de su aplicación geométrica, su precisión y la comparación de su error respecto a los otros métodos que pudieran haber sido utilizados en el siglo XII.

Evidencias geométricas en el periodo románico

Las fuentes teóricas de la geometría en el periodo románico quedan restringidas a las traducciones de los *Elementa de Euclides* (326 aC-265aC) por Adelardo de Bath (1075-1166) hacia 1142 y la del *Almagesto de Ptolomeo* (c.85-165) de Gerardo de Cremona (1114-1187) (Folkers 1987, 87-114). Su praxis tiene pocas referencias directas. Una de estas es el trazado de la orientación de las iglesias que, de acuerdo con las liturgias del *Gemma animae* (c.1120) de Honorio de Autun, el *Rationale divinorum officiorum* (c.1150) de Jean Beleth, el *Mitralis de Officio* (1190) de Sicardo, obispo de Cremona, y el *Prochiron, vulgo rationale divinorum officiorum* (1291) de Guillermo de Durando, deben hacerlo en la dirección equinoccial. En el Valle

de Arán, las iglesias de Santa Eulària d'Unha, Santa Maria d'Arties, Sant Pèir de Betlan, Sant Andrèu de Casau y Sant Miquèu de Vilamòs están orientadas en la dirección canónica, con un azimut más probable ($e_a = 91,41^\circ$). (Tabla 1) (Fig. 1).

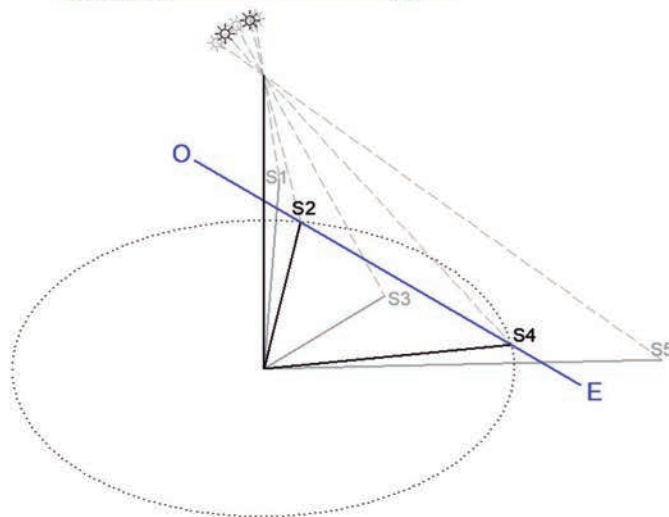
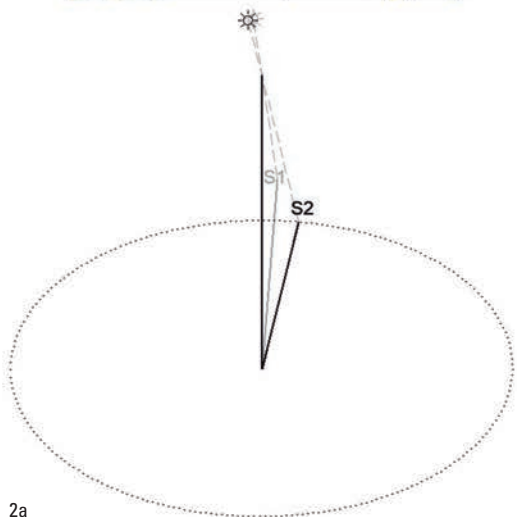
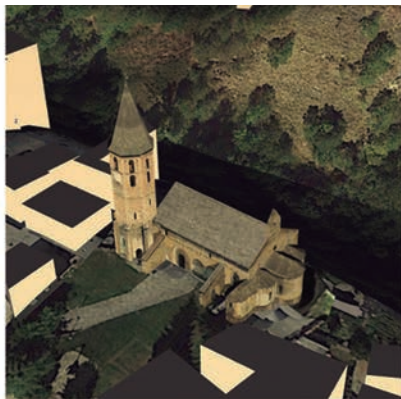
La topografía montañosa del valle no permite el replanteo mediante la observación del orto solar. Por esta razón, el trazado de gran precisión de la orientación de sus iglesias, se debió a que se conservó el conocimiento tardo-clásico transcrito en los *scriptorios* monásticos. En estu-

The research aims to specify the studies already carried out on the subject, (Lluis i Ginovart, et al 2019), developing specifically the method of the Gisesmundo copyist (fl. 850) from the Ripoll monastery, near the Aran Valley, emphasizing the ease and precision of its layout. Being an author studied from the history of science, Rudolf Beer (1863-1913) gave the first reference to the *Ars gromatica Gisemundi* in *Die Handschriften des Klosters Santa Maria de Ripoll, I* (1907), where he recognizes the uniqueness of this treatise on surveying (fol. 76-86) (Beer 1907). However, it has not yet been evaluated from the perspective of its geometric application, its precision,

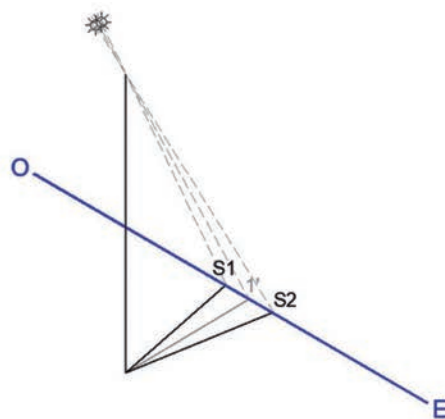
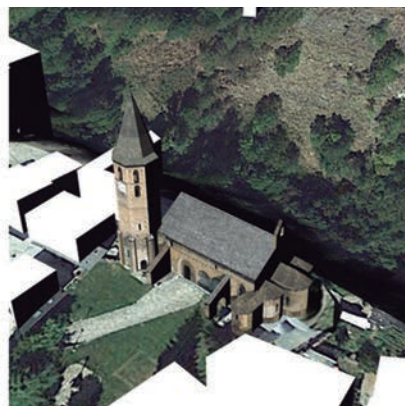
Iglesias con orientación equinoccial			
Patronaje Iglesia	Azimut (As) (As) (TLS)	Azimut (Ag) Google Earth Pro	Azimut (A) (A)=1/2 (As+Ag)
Santa Eulària d'Unha	92,58°	93,15°	92,87°
Santa Maria d'Arties	91,68°	92,56°	92,12°
Sant Andrèu de Casau	90,00°	90,59°	90,30°
Sant Pèir de Betlan	92,71°	92,88°	92,80°
Sant Miquèu de Vilamòs	90,00°	87,97°	88,99°

Tabla / Table 1





2a



2b



2a. *Ars gromatica* Gisemundo, c880: Método M_7 . Sant Andreu de Salardú, Equinoccio (2018), S_1 8:45 h, S_2 15:15 h GTM (Google Earth Pro)
 2b. *Ars gromatica* Gisemundo, c880: Método M_8 . Sant Andreu de Salardú, Equinoccio (2018), S_1 11:00 h, S_2 13:00 h, $1'$ 12:00h GTM (Google Earth Pro)

2a. *Ars gromatica* Gisemundo, c880: Method M_7 . Sant Andreu de Salardú, Equinox (2018), S_1 8:45 a.m., S_2 3:15 p.m. GTM (Google Earth Pro)
 2b. *Ars gromatica* Gisemundo, c880: Method M_8 . Sant Andreu de Salardú, Equinox (2018), S_1 11:00 am, S_2 1:00 pm, $1'$ 12: 00h GTM (Google Earth Pro)

dios previos, como el de *Orientation of the romanesque churches in the región of Val d'Aran*, se recoge una clasificación de los métodos de trazado descritos por Vitruvio (M_1 , M_2), los métodos gromáticos (s. I-III) (M_3 , M_4 , M_5 , M_6), los del *scriptorio* de Ripoll de Gisesmundo (M_7 , M_8), los de la obra apócrifa de Gerberto (M_9 , M_{10}), y la posible utilización de la brújula (M_{11}). (Lluis i Ginovart 2019).

Rudolf Beer (1863-1913) dio la primera referencia del *Ars gromatica Gisemundi* (M_7 , M_8) de Gise-mundo en *Die Handschriften des Klosters Santa Maria de Ripoll, I* (1907), reconociendo la singularidad de este tratado de agrimensura (fol. 76-86) (Beer 1907). Fue difundido en Catalunya en el Boletín de la Real Academia de Buenas Letras de Barcelona (1910) (Beer; Barnils 1910, 49-50.) pero fue Carl Olof Thulin (1871-1921) quien lo introdujo dentro del *Corpus agrimensorum Romanorum* (Thulin 1911). También fue estudiado y editado en parte por Josep Maria Millàs Vallicrosa (1897-1970) (Millàs 1931, 327-335). Del *Ars gromatica Gisemundi*, cuyos orígenes codicológicos se sitúan en la geometría de Pseudo-boecio (s. VIII), se conservan dos copias: el *Codex Parisinus* BN 8812 (c. 800-833) de la Francia meridional (110/097) y el *Codex Riuipullensis* 106 (c. 850-900) del cenobio de Ripoll (118/096) (Toneatto 1995:999-1112). Su parte introductoria remite a la *Demonstratio artis geometricae* de Pseudo-boecio y a unas excerpts del *De limitibus* de Higinio Maior (fl. 98-102) (Toneatto 1982) y del *Corpus Agrimensorum Romanorum*, en donde aparece la metodología de la orientación (fol.77r25-77v 10) (Andreu 2012:58)

El códice *Ripollensis* de Gise-mundo contiene trazos de escritura visigótica. Se ha identificado la labor de un agrimensor altomedieval de fuentes cercanas a Higinio Maior que, lejos de ser un mero copista, conocía los fundamentos de esta disciplina tanto a nivel teórico como práctico (Olesti 2017:257-274). En la obra aparecen dos métodos para poder orientar elementos:

Método (M_7). Gise-mundo recomienda tomar la sombra meridiana durante la hora sexta. El método sigue el procedimiento basado en una sombra y su traslación sobre un círculo de referencia. A la salida del sol se produce una sombra alargada (S_1) que se irá acortando (S_2) tendiendo hacia el interior del círculo (S_3). Posteriormente, la sombra vuelve a alargarse hasta coincidir nuevamente con la circunferencia (S_4) y seguirá alargándose hasta desaparecer (S_5). La unión de los dos puntos de contacto de la sombra sobre la circunferencia (S_2 , S_4) forma la línea este-oeste. Este método determina una orientación equinoccial a través de dos sombras. Su ejecución requiere cuatro operaciones geométricas (Fig. 2a).

Método (M_8). Gise-mundo determina el trazado mediante dos sombras muy próximas cercanas al mediodía. Toma las marcas de referencia (S_1 , S_2) que, según dice, pudieran ser observadas en escuadra. Una vez examinadas las longitudes, iguala la más larga (S_1) y la más corta (S_2) mediante una señal ($1'$). La unión de las dos marcas (S_1 , S_2) forma la línea este-oeste. El método, por tanto, determina una orientación equinoccial mediante dos sombras a través de un procedimiento instrumental cuya ejecución necesita de dos operaciones geométricas (Fig. 2b).

and the comparison of its error with other methods that may have been used in the 12th century.

Geometric evidence in the Romanesque period

The theoretical sources of geometry in the Romanesque period are restricted to the translations of *Euclid's Elementa* (326 BC-265 BC) by Adelard of Bath (1075-1166) around 1142 and that of *Ptolemy's Almagest* (c.85-165) by Gerardo de Cremona (1114-1187) (Folgers 1987, 87-114). Its praxis has few direct references. One of these is the tracing of the orientation of the churches. According to the liturgies of the *Gemma animae* (c.1120) of Honorius of Autun, the *Rationale divinatorum officiorum* (c.1150) of Jean Belet, the *Mitralis de officio* (1190) of Sicardo, bishop of Cremona, and the *Prochiron, vulgo rationale divinatorum officiorum* (1291) of Guillermo de Durando, must do it in the equinoctial direction. In the Arán Valley, the churches of Santa Eulària d'Unha, Santa Maria d'Arties, Sant Pèir de Betlan, Sant Andrèu de Casau and Sant Miquèu de Vilamòs are oriented in the canonical direction, with a more likely azimuth ($ea = 91.41^\circ$). (Table 1) (Fig. 1). The mountainous topography of the valley does not allow stakeout by observing the solar ortho. For this reason, the precise layout of the orientation of its churches was due to the fact that the late-classical knowledge transcribed in the monastic *scriptories* was preserved. In previous studies, such as that of *Orientation of the romanesque churches in the region of Val d'Aran*, a classification of the tracing methods described by Vitruvius (M_1 , M_2), the gromatic methods (I-III centuries) (M_3 , M_4 , M_5 , M_6), those of the Ripoll de Gisesmundo script (M_7 , M_8), those of Gerberto's apocryphal work (M_9 , M_{10}), and the possible use of the compass (M_{11}). (Lluis i Ginovart 2019).

Rudolf Beer (1863-1913) gave the first reference to Gise-mundo's *Ars gromatica Gisemundi* (M_7 , M_8) in *Die Handschriften des Klosters Santa Maria de Ripoll, I* (1907), recognizing the uniqueness of



this surveying treatise (fol. 76- 86) (Beer 1907). It was published in Catalonia in the Bulletin of the Royal Academy of Good Letters of Barcelona (1910) (Beer; Barnils 1910, 49-50.), but it was Carl Olof Thulin (1871-1921) who introduced it into the *Corpus agrimensorum Romanorum* (Thulin 1911). It was also studied and partly edited by Josep Maria Millàs Vallicrosa (1897-1970) (Millàs 1931, 327-335). Of the *Ars gromatica Gisemundi*, whose codicological origins lie in the geometry of Pseudoboethius (8th century), two copies are preserved: the Codex Parisinus BN 8812 (c. 800-833) from southern France (110/097) and the *Codex Riuipullensis* 106 (c. 850-900) from the monastery of Ripoll (118/096) (Toneatto 1995: 999-1112). Its introductory part refers to Pseudoboethius's *Demonstratio artis geometricae* and some excerpts from Higinio Maior's *De limitibus* (fl. 98-102) (Toneatto 1982) and *Corpus Agrimensorum Romanorum*, where the orientation methodology appears (fol. 77r25- 77v 10) (Andreu 2012: 58). The *Ripollensis* codex of Gisemundo contains traces of Visigothic writing. The work of an early medieval surveyor from sources close to Higinio Maior has been identified who, far from being a mere copyist, knew the fundamentals of this discipline both at a theoretical and practical level (Olesti 2017: 257-274). In the work, there are two methods to be able to orient elements.*

Method (M7). Gisemundo recommends taking the meridian shadow during the sixth hour. The method follows the procedure based on a shadow and its translation on a reference circle. At sunrise, there is an elongated shadow (S_1) that will be shortened (S_2) tending towards the inside of the circle (S_3). Subsequently, the shadow lengthens again until it coincides with the circumference (S_4) and will continue to lengthen until it disappears (S_5). The union of the two points of contact of the shadow on the circumference (S_2, S_4) forms the east-west line. This method determines an equinoctial orientation through two shadows. Its execution requires four geometric operations (Fig. 2.a).



3

Los instrumentos de trazado

Entre los instrumentos que pudieron ser utilizados tenemos constancia de la *groma*, la *metae*, el *signa* y el *perpendicularis*, referidos en el *De arte mensoria* de Frontino (Thulin 1913, 15-19.) y la *Limitis repositio* de Nypsius (*La.* 286) (Blume; Lachman; Rudorff 1848.). Sin embargo, la *groma* no aparece en las *Etymologiarum* (c.630) de San Isidoro de Sevilla (Lindsay. 1911) por lo que su supervivencia durante los siglos (XI-XIII) resulta dudosa.

Los replanteos en *De limitibus constituendi* de Higinio Gromatico se ejecutan *lineam autem per metas extendemus et per eam ad perpendicularum cultellabimus* (*La.* 192), operación que es completada extendiendo un cordel entre estaca y estaca y tirando sobre él una plomada. Similar expresión se encuentra en el *De limitibus* de Frontino: *pertice aequalite ad perpendicularum cultellare debemus, tum ad permensum rigorem extendere lineam* (*La.* 33-34) (Guillaumin. 2015). Estos elementos aparecen en las *Etymologiarum*: el cordel, *linea* (*Etym.* XIX.XVIII.3); la *regula*, regla (*Etym.* XIX.XVIII.2); el *circinus*, compas (*Etym.* XIX.



XVIII.10); y la escuadra, *norma* (*Etym.* XIX. XVIII.1).

Otra referencia será el tratado de agrimensura *La siensa de atemenar* (1401) de Berand Boysset (1355-1415) que dedica una parte a la construcción de la escuadra con regla y compás (CBM. 237, fol. 216 r) y sin instrumentos (CBM 327, fol. 218 r, fol 220 r). En el mismo tratado existen operaciones de aplomado *perpendicularum* o alineación *extendere lineam* en los mismos términos que en la agrimensura romana (Portet 2004, 221-231) (Fig. 3). Los métodos operativos, una vez desaparecidas la *groma* y la escuadra óptica de Heron de Alejandria (c.20-62), se redujeron al *cadrim* de Boysset (CBM 327, fol. 269 v), muy similar a ellas.

Los otros métodos tardo-clásicos, aparte de los del *Ars Gromatica Gisemundi* mencionados, son:

De Vitrubio (c.80- 20 aC): El método (M_1), en *De architectura* (*Vitr.* LI.VI.6), que determina la orientación meridiana a través de dos sombras y cuya ejecución necesita de seis operaciones geométricas (Cantor 1875, 66-69) (Fig. 4). El método (M_2), en *De architectura* (*Vitr.* LI.VI.12), que determina una orien-



3. Berand Boysset (1355-1415) La siensa de atermenar (1401). Proceso geométrico de trazados
 4. Marco Vitrubio Polión (c.15 aC), Método (M_1). Sant Andreu de Salardú, Equinoccio (2018), S_1 8:45 h, S_2 15:15 h GTM (Google Earth Pro)

3. Berand Boysset (1355-1415) The siensa of atermenar (1401) Geometric tracing process
 4. Vitruvian Pollio Frame (c.15 BC), Method (M_1) Sant Andreu de Salardú, Equinox (2018), S_1 8:45 a.m., S_2 3:15 p.m. GTM (Google Earth Pro)

tación equinoccial mediante tres sombras con una ejecución de quince operaciones geométricas (Fig. 5).

De Higino Gromático (c.100): El método (M_3), en *De limitibus constituendi* (La. 166-208), que determina una orientación meridiana mediante un procedimiento de observación de la *hora prima*. El método (M_4), en *De limitibus constituendi* (La. 188), que determina una orientación meridiana mediante observación durante la *hora sexta*. El método (M_5), en *De limitibus constituendi* (La. 188-189), que determina una orientación meridiana a través de dos sombras con una ejecución de seis operaciones geométricas, similar al (M_1). El método (M_6), en *De limitibus consti-*

tuendi (La. 189-191), que determina una orientación equinoccial mediante quince operaciones geométricas (Guillaumin 2005: 240-241), similar al (M_2).

Los métodos apócrifos de Gerberto, del *Geometria Incerti Auctoris* (c.1000) son: El método (M_9) similar al (M_1) de Vitruvio, al (M_5) de Higino el Gromático y al (M_7) de Gisemundo; y el método (M_{10}), similar al (M_2) y al (M_6).

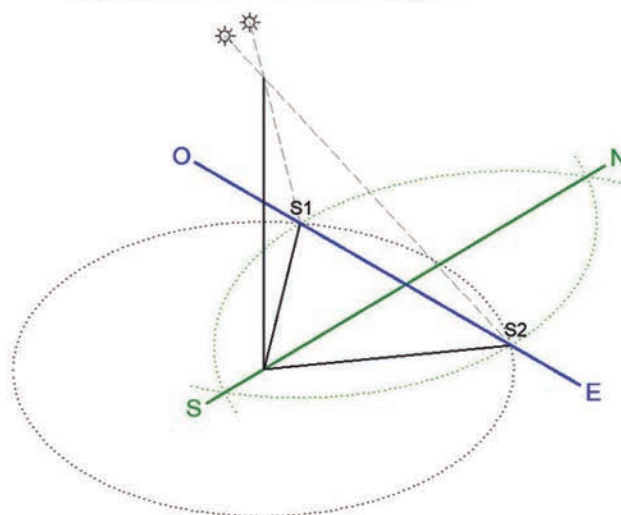
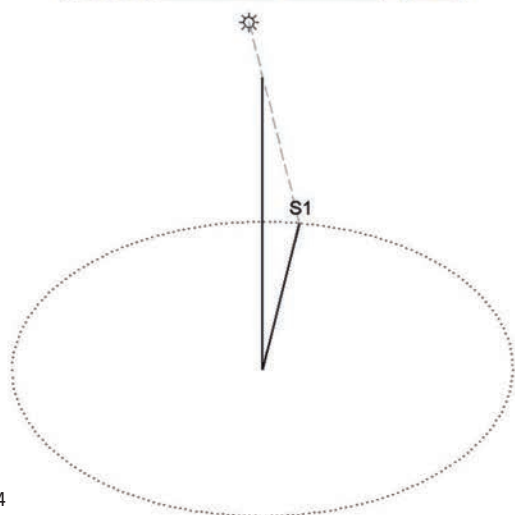
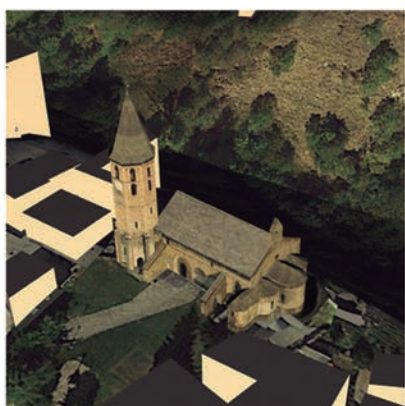
Cabe plantear también la utilización de la brújula (c. 1150) (M_{11}), que determinará una orientación meridiana a través de la alineación de una aguja imantada.

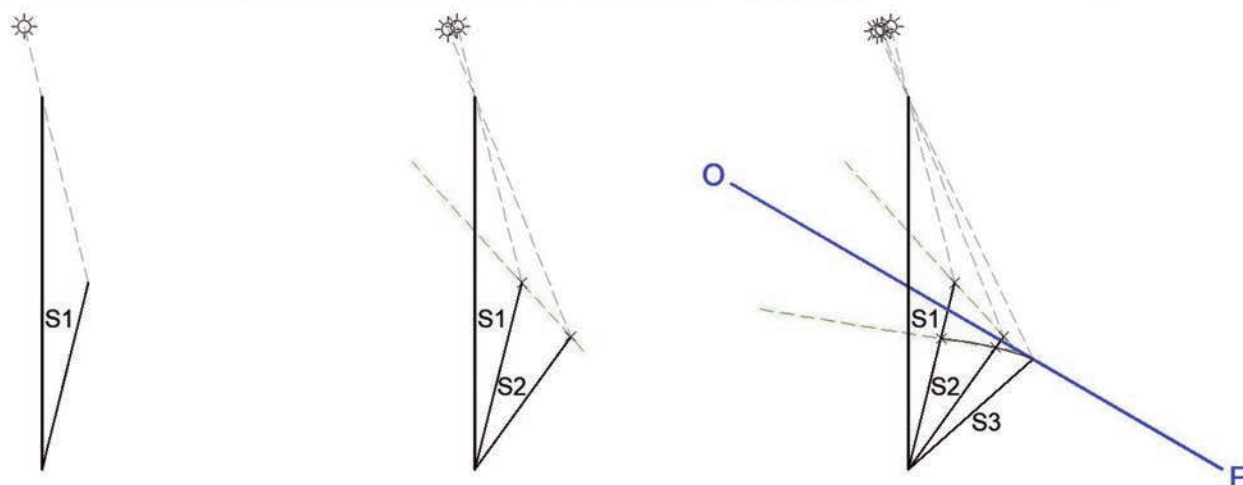
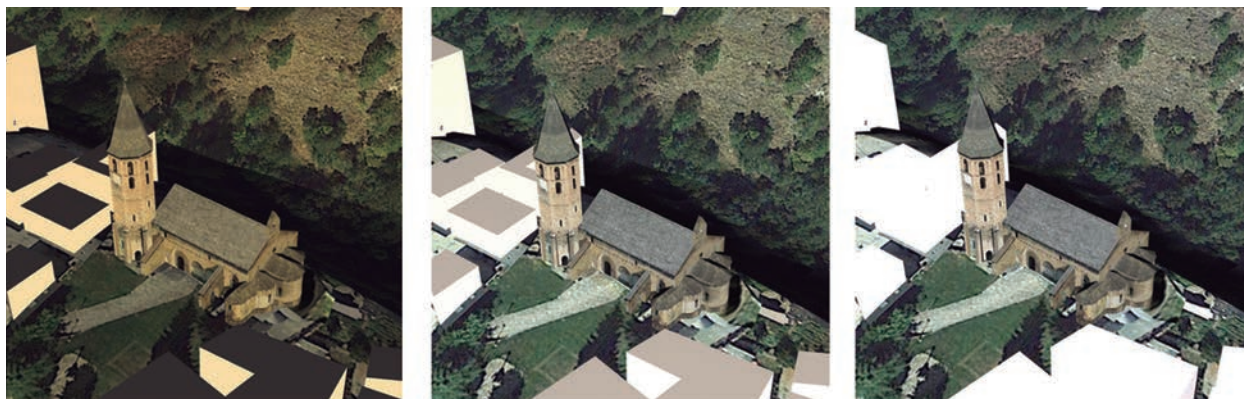
Los once métodos descritos anteriormente se basan tanto en la observación solar directa como en

Method (M_8). Gisemundo determines the path through two very close shadows near noon. He takes the reference marks (S_1 , S_2) that, according to him, could be observed squarely. After examining the lengths, he matches the longest (S_1) and the shortest (S_2) through a signal (1'). The union of the two marks (S_1 , S_2) forms the east-west line. The method, therefore, determines an equinoctial orientation through two shadows using an instrumental procedure whose execution requires two geometric operations (Fig. 2.b).

The plotting instruments

Among the instruments that could be used we have evidence of the *groma*, the *metae*, the *signa* and the *perpendicularis*, referred to in Frontino's *De arte mensoria* (Thulin 1913, 15-19.) And *Nypsius's Limitis repositio* (La. 286) (Blume; Lachman; Rudorff 1848.).





5

However, the *groma* does not appear in the *Etymologiarum* (c.630) of San Isidoro de Sevilla (Lindsay. 1911) so its survival during the centuries (11c-13cc) is doubtful. The stakeouts in Higinio Gromatico's *De limitibus constituendi* are performed *lineam autem per metas extendemus et per eam ad perpendicularum cultellabimus* (La. 192), an operation that is completed by extending a string between stake and stake and pulling a plumb line over it. A similar expression is found in Frontino's *De limitibus: pertice aequilite ad perpendicularum cultellare debemus, tum ad permensum rigorem extendere lineam* (La. 33-34) (Guillaumin. 2015). These elements appear in the *Etymologiarum*: the cordel, *linea* (Etym. XIX.XVIII.3); the *regula*, ruler (Etym. XIX. XVIII.2); the *circinus*, compass (Etym. XIX. XVIII.10); and the set square, *norma* (Etym. XIX. XVIII.1).

Another reference will be the surveying treatise *La siensa de atermenar* (1401) by Berand Boysset (1355-1415) which dedicates a part to the construction of the square with a ruler and compass (CBM. 237, fol. 216 r) and without instruments (CBM 327, fol. 218 r, fol 220 r). In the same treatise there are operations of

sistemas operativos a partir de la observación de sombras. Si analizamos los resultados de la (Tabla 1) el error medio cuadrático (e_c) es de $1,91^\circ$, con un rango estadístico de $[89,50^\circ-93,32^\circ]$. La tolerancia máxima ($e_{m,max}$) es de $3,32^\circ$, y por tanto, el error máximo establecido de las cinco iglesias seleccionadas es del 0,92% (Tabla 2), mientras que en los asentamientos romanos era de un grado (0,28%) (Orfila 2017).

Análisis de los resultados

Los métodos (M_3 , M_4 , M_{11}) son métodos de apreciación y por tanto no son estrictamente geométricos, por ello no se incluyen en el análisis de los errores, al tratarse de valores de observación y, por tanto, de difícil calibración. Los métodos (M_3 y M_4) son los más sencillos y directos pero, también, los menos precisos. El primero resulta poco fiable a la hora de determinar la altura del sol respecto al orto o la fecha de observación en

que se produjo el fenómeno. El segundo, puede resultar impreciso al determinar el momento exacto en que se produce la sombra más corta durante la hora sexta.

En cuanto a la brújula, en la actualidad se establece una desviación respecto al Norte verdadero de $[+0^\circ,51'E; +0^\circ, 55' E]$ con un error $[\pm 0^\circ 21']$ y con una traslación anual hacia el Este de $(0^\circ 10')$. En la época de datación de estas iglesias, la corrección a realizar del Norte verdadero estaría en el intervalo $[+16^\circ; +22^\circ]$. Es decir, la declinación magnética de los siglos XI y XIII estaría en un intervalo de $[16^\circ - 22^\circ]$, por lo que resulta bastante improbable.

Los trazados instrumentales (M_1 , M_5 , M_7 , M_9) vienen determinados a partir de dos sombras, una pre-meridiana y otra post-meridiana, que se proyectan sobre una circunferencia a fin de garantizar que sus longitudes sean iguales. Se distinguen en que Vitruvio tomará la primera sombra cinco horas antes del me-



5. Marco Vitrubio Polión (c.15 aC), Método (M₂). Sant Andreu de Salardú, Equinoccio (2018), S₁ 8:45 h, S₂ 10:00 h, S₃ 11:00 h GTM (Google Earth Pro)

Tabla 2. Tolerancias de los métodos de trazados de la orientación

5. Vitruvian Pollio Frame (c.15 BC), Method (M₂) Sant Andreu de Salardú, Equinox (2018), S₁ 8:45 am, S₂ 10:00 am, S₃ 11:00 am GTM (Google Earth Pro)

Table 2. Tolerances of the orientation plotting methods

diodía, de forma tal que determina el radio de la circunferencia y genera un círculo de gran diámetro, por lo que el gnomon podía ser de escasa magnitud. En cambio, en los otros métodos se traza primero la circunferencia y se espera a los momentos en que la sombra entra y sale de la misma. Una vez encontrados los dos puntos, se presentan nuevas variaciones: Vitruvio (M₁) realiza una decusación que unirá al centro de la circunferencia para determinar así el meridiano; así también Higinio (M₅), pero a partir del punto medio de la recta que resulta de unir ambos puntos, con un margen de error del ($e_{M1,5} = 0,15\%$). El más sencillo es el método (M₇) de Gisemundo que directamente une los dos puntos para determinar el eje equinoccial, pudiendo tener un margen de error en su trazado ($e_{M7} = 0,23\%$) menor a los métodos M₁ y M₅. Por su parte, el método (M₈), basado en dos sombras muy próximas cercanas a la hora sexta, podría resultar aún más sencillo, pues se basa, tan sólo, en unir los extremos de dos sombras cercanas de

longitudes equivalentes. Sin embargo, es impreciso siendo el trazado con el mayor margen de error ($e_{M8} = 0,46\%$) de todos los métodos.

Los trazados instrumentales (M₂, M₆ y M₁₀) utilizan tres sombras para determinar la orientación mediante procedimientos geométricos complejos, por lo que por su instrumentación de quince operaciones los llevaría a una tolerancia mucho menor ($e_{M2,6,10} = 0,06\%$).

El trazado de la orientación sacra

Es probable que para el trazado de estos métodos se hayan utilizado los instrumentos referidos en la *Etymologiarum* (XIX.18) y transmitidos al *De Universo* (XXI.11) de Harbanus Maurus (c. 776-856). Así, en los métodos M₁, M₅ y M₉, tras realizar la bisección del ángulo, y apoyándose en el jalón, se marcaría el eje equinoccial a través de una *pertice aequilite ad perpendicularum* mediante plomo y escuadra (CBM 327, fol. 142 r), obteniéndose un porcentaje de tolerancia de

plumb *perpendicularum* or *extendere lineam* alignment in the same terms as in Roman surveying (Portet 2004, 221-231) (Fig. 3). The operational methods, once the groma and the optical square of *Heron of Alexandria* (c.20-62) had disappeared, were reduced to the Boysset *cadrim* (CBM 327, fol. 269 v), very similar to them. The other late-classical methods, apart from those mentioned of the *Ars Grammatica Gisemundi* are:

From Vitruvius (c.80-20 BC): The method (M₁), in *De architectura* (Vitr, LI.VI.6), which determines the meridian orientation through two shadows and whose execution requires six geometric operations (Cantor 1875, 66-69) (Fig. 4). The method (M₂), in *De architectura* (Vitr, LI.VI.12), which determines an equinoctial orientation by means of three shadows with an execution of fifteen geometric operations (Fig. 5). De Higinio Gromático (c.100): The method (M₃), in *De limitibus constituendi* (La. 166-208), which determines a meridian orientation through a procedure of observation of the prime hour. The method (M₄), in *De limitibus constituendi* (La. 188), which determines a meridian orientation by observation during the sixth hour. The method (M₅), in *De limitibus constituendi* (La. 188-189), which determines a meridian orientation through two shadows with an execution of six geometric operations,

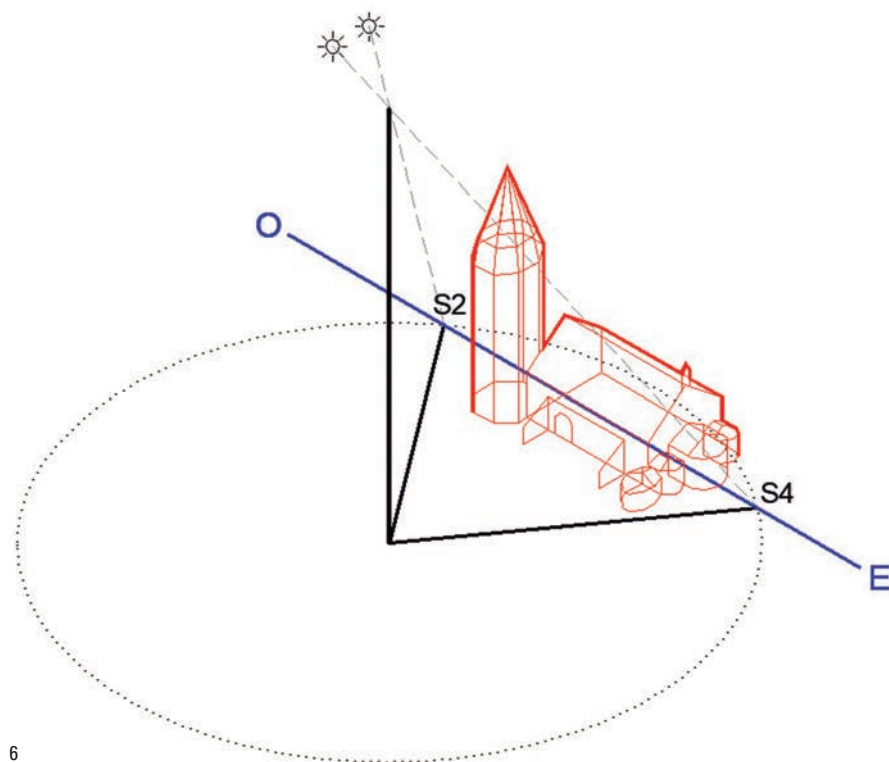
Tipo orientaciones y tolerancia en los métodos de trazado						
Método	Autor	Tipo orientación	Tipo trazado	Características	Operaciones geométricas	Error (max) =0,92%
M1	Vitruvio	Meridiana	Instrumental	2 sombras	6	0,15
M2	Vitruvio	Equinoccial	Instrumental	3 sombras	15	0,06
M3	Higinio Gromatico	Meridiana	Observación	Hora pima	-	-
M4	Higinio Gromatico	Equinoccial	Observación	Hora sexta	-	-
M5	Higinio Gromatico	Meridiano	Instrumental	2 sombras	6	0,15
M6	Higinio Gromatico	Equinoccial	Instrumental	3 sombras	15	0,06
M7	Gisemundo	Equinoccial	Instrumental	2 sombras	4	0,23
M8	Gisemundo	Equinoccial	Instrumental	2 sombras	2	0,46
M9	Apocrifo de Gerberto	Meridiana	Instrumental	2 sombras	6	0,15
M10	Apocrifo de Gerberto	Equinoccial	Instrumental	3 sombras	15	0,06
M11	Brújula	Meridiana	Observación	Brújula	-	-

Tabla / Table 2

similar to (M_7). The method (M_6), in *De limitibus constituendi* (La. 189-191), which determines an equinoctial orientation through fifteen geometric operations (Guillaumin 2005: 240-241), similar to (M_2). The apocryphal methods of Gerberto, from the *Geometria Incerti Auctoris* (c.1000) are: The method (M_9) similar to the (M_1) of Vitruvius, to the (M_5) of Higinio the Gromatic and to the (M_7) of Gisemundo; and method (M_{10}), similar to (M_2) and (M_6). It is also worth considering the use of the compass (c. 1150) (M_{11}), which will determine a meridian orientation through the alignment of a magnetized needle. The eleven methods described above are based on both direct solar observation and operational systems from shadow observation. Analyzing the results of (Table 1), the mean square error (e_s) is 1.91° , with a statistical range of $[89.50^\circ - 93.32^\circ]$. The maximum tolerance ($e_{m,max}$) is 3.32° , and therefore, the maximum established error of the five selected churches is 0.92% (Table 2), while in the Roman settlements it was one degree ($0,28\%$) (Orfila 2017).

Analysis of the results

The methods (M_3 , M_4 , M_{11}) are assessment methods and, consequently, are not strictly geometric, so they are not included in the error analysis, as they are observation values and, therefore, difficult to calibrate. The simplest and most direct methods are (M_3 and M_4), but they are also the least precise. The first is unreliable when determining the sun's height with respect to the sunrise or the observation date on which the phenomenon occurred. The second can be imprecise when determining the exact moment when the shortest shadow occurs during the sixth hour. Regarding the compass, at present a deviation is established with respect to true North of $[+ 0^\circ, 51'E; + 0^\circ, 55'E]$ with an error $[\pm 0^\circ 21']$ and with an annual translation towards the East of $(0^\circ 10')$. At the time of dating these churches, the correction to be made from the true North would be in the interval $[+ 16^\circ; + 22^\circ]$. In other words, the magnetic declination of the 11th and 13th centuries would be in an interval of $[16^\circ - 22^\circ]$, so it is quite unlikely.



hasta ($e_{M_{1,5,7}} = 0,15\%$). *La siensa de atermenar* de Berand Boyssset ilustra cómo este mismo eje se trazaría con el jalón y realizando un *extendere lineam* mediante el empleo de jalones (CBM 327 fol. 251 r), pudiendo haber sido utilizado en los métodos, M_7 ($e_{M_7} = 0,23\%$) y M_8 ($e_{M_8} = 0,46\%$).

En cuanto a los métodos instrumentales, se observa que los más simples desde el punto de vista geométrico para determinar la línea equinoctial son los métodos M_7 (Fig. 6) y M_8 de Gisemundo, aunque en el M_8 se opere con sombras muy próximas y pueda llevar a inexactitud. Los métodos (M_1 , M_5 , M_9) necesitan de seis operaciones con el compás, aunque si el trazado se realiza en un intervalo anterior a la hora tercia o posterior a la hora nona, el ángulo sugerido por la proyección solar permite una bisectriz precisa, con lo que puede trazarse la meridiana con mucha exactitud. Por su parte, los métodos M_2 , M_6 y M_{10} son los de mayor complejidad geométrica llegando a requerir de hasta quince operaciones. Este hecho, sumado al que

las sombras están muy próximas y los ángulos son muy similares, son los que hubieran producido un mayor error relativo. Se asigna a estos métodos el error máximo del cálculo ($e_{m,max} = 3,32^\circ$), y representa tan solo un arco de circunferencia ($arc_{r0,50}=0,034$ m) de un metro de diámetro.

Orígenes del trazado de Gisemundo

Los métodos con mayor tolerancia para absorber posibles errores del replanteo son los M_7 y M_8 de Gisemundus, por lo que estas *ecclesiae ad orientem* debieron ser replanteadas, o bien, mediante dos sombras, pre y post meridiana, trazadas solamente con un *extendere lineam*, o bien alineadas, próximas a la hora sexta, mediante *extendere lineam* y *pertice aequalite ad perpendicularum*, usando una plomada y una escuadra.

Dentro de este contexto, el método M_7 es profundamente práctico, las cinco sombras observadas trazan figuradamente la analema del curso solar. Parte de una construcción geométrica de tan solo dos

6 . Método M_7 de Gisemundo iglesia *ad orientem*
 7 Analema ediciones De architectura: a) Giovanni Giocondo (1511) fol. 92. b) Miguel de Urrea (1582) p. 120. c) José Ortiz y Sanz (1787), Lámina L.II.

6 . Gisemundo's M_7 method: *ad orientem* church
 7. Analema editions De architectura: a) Giovanni Giocondo (1511) fol. 92. b) Miguel de Urrea (1582) p. 120. c) José Ortiz y Sanz (1787), Plate L.II.

principios básicos: el trazado de una circunferencia y disponer de un gnomon escuadrado sobre el plano donde se ha situado la circunferencia. El artífice traza la circunferencia a primera hora de la mañana, con un diámetro menor que la sombra arroja en aquel momento (sombra 1). Esta es, la única operación geométrica que ha de realizar. Luego solo tiene que observar, marcar el punto donde la sombra coincida con la circunferencia (sombra 2), y esperar a que la trayectoria del sol se acerque a la base del gnomon (sombra 3). Posteriormente, volverá a marcar el punto donde el extremo de la sombra vuelva a coincidir con la circunferencia (sombra 4) y así, uniendo los puntos (2-4) ya obtiene la orientación E-O, sin necesidad de utilizar la última sombra más alargada de la tarde (sombra 5).

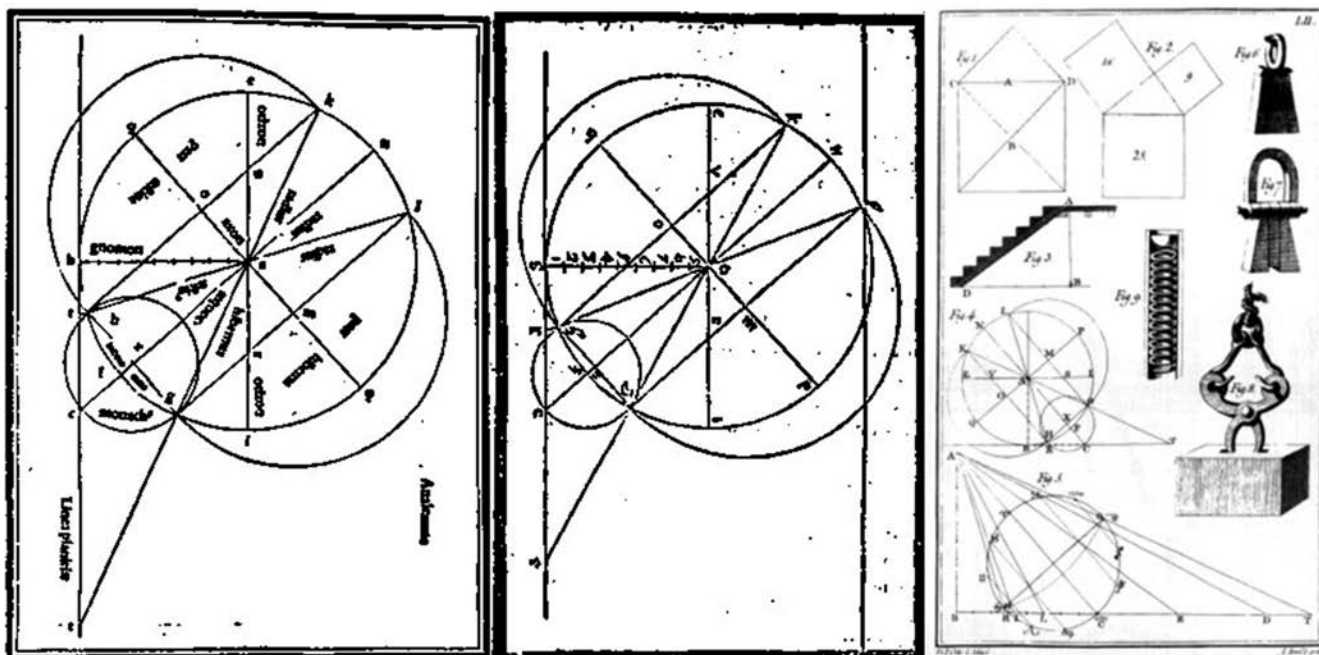
La construcción M_7 del *Ars gromatica Gisemundi* (c.800) es eminentemente práctica y derivada de la experiencia gromática. Su teoría no está descrita sino que parte de

los principios de Marco Vitrubio Polión (c.80-c.20 aC) que reclama saber astronomía y conocer el uso del *gnomon* para determinar los equinoccios y solsticios (*Vitr,L.I*). Vitrubio definió la construcción de relojes solares (*Vitr,L.IX, 7*). El concepto basado en el trazado del *analemma* aparece por primera vez representado en la edición de Giocondo (1511) (L.IX, VIII) [fol. 92]. Marco Cetio Faventino recoge la tradición de la construcción de relojes, definiendo el de doble hacha o plecino y el semicircular o de cuadrante (*Fave. XXIX*) (Fig. 7).

Conclusión

El error máximo establecido en las iglesias sobre el eje Este-Oeste es del (0,92%) mientras que en los asentamientos romanos, el error en la orientación era de 1° , que representaría el (0,28%). Si tomamos el error promedio de estas edificaciones, ($1,66^\circ$), se deduce que han sido realizadas con unos métodos de base

The instrumental paths (M_1, M_5, M_7, M_9) are determined from two shadows, one pre-meridian and one post-meridian, which are projected on a circumference in order to guarantee that their lengths are equal. They are distinguished in that Vitruvius will take the first shadow five hours before noon, in such a way that it determines the radius of the circumference and generates a large diameter circle, so the gnomon could be of small magnitude. In the other methods, the first step is to draw the circumference and then to wait for the shadow to enter and leave it. Once the two points have been found, new variations are presented: Vitruvius (M_1) performs a decussation that will join the center of the circumference to determine the meridian; so does Higinio (M_5), but from the midpoint of the line that results from joining both points, with a margin of error of ($e_{M1,5} = 0.15\%$). The simplest is Gisemundo's method (M_7) that directly joins the two points to determine the equinoctial axis, and may have a margin of error in its tracing ($e_{M7} = 0.23\%$) less than the M_1 and M_5 methods. For its part, method (M_9), based on two very close shadows close to the sixth hour, could be even simpler, since it is based only on joining the ends of



two close shadows of equivalent lengths. However, it is imprecise, being the plot with the highest margin of error ($e_{M_8} = 0.46\%$) of all the methods.

The instrumental tracings (M_2 , M_6 and M_{10}) use three shadows to determine the orientation through complex geometric procedures, and their instrumentation of fifteen operations would lead them to a much lower tolerance ($e_{M_{2,6,10}} = 0.06\%$).

The tracing of the sacral orientation

It is likely that the instruments referred to in the *Etymologiarum* (XIX.18) and transmitted to *De Universo* (XXI.11) by Harbanus Maurus (c. 776-856) have been used for the tracing of these methods. Thus, in the M_1 , M_5 y M_9 methods, after bisecting the angle, and leaning on the pole, the equinoctial axis would be marked through a *peritice aequilite ad perpendicularum* using lead and square (CBM 327, fol. 142 r), obtaining a tolerance percentage of up to ($e_{M_{1,5,7}} = 0.15\%$). The *siensa de atermenar* by Berand Boysset illustrates how this same axis would be traced with the pole and making an *extendere lineam* by means of the use of poles (CBM 327 fol. 251 r), which could have been used in the methods, M_7 ($e_{M_7} = 0.23\%$) and M_8 , ($e_{M_8} = 0.46\%$). Regarding the instrumental methods, it is observed that the simplest from the geometric point of view to determine the equinoctial line are the Gisemundo's M_7 (Fig. 6) and M_8 methods, although the M_8 operates with very close shadows and can carry to inaccuracy. The methods (M_1 , M_5 , M_9) require six operations with the compass, although if the plot is made in an interval before the third hour or after the ninth hour, the angle suggested by the solar projection allows a precise bisector, with which the meridian can be traced with great accuracy. For their part, the M_2 , M_6 and M_{10} methods are the most complex geometrically, requiring up to fifteen operations. This fact, added to the shadows being very close and the angles very similar, is what would have produced a greater relative error. These methods

científica próximos a los desarrollados por la técnica romana. No es posible determinar qué método fue utilizado para su orientación pero el grado de precisión impone un conocimiento práctico muy desarrollado a la hora de replantar el edificio. El método (M_7) del *Ars gromatica Gisemundi* (c.800) es, desde el punto de vista geométrico, el más sencillo, ya que traza directamente la dirección Este-Oeste, y era conocido, al menos en la Francia meridional (c.800-833) y en Ripoll (c. 850-900), siendo una readaptación que sancionó la aplicación práctica del método meridiano de Vitruvio. ■

Referencias

- CBM. Carpentras Bibliothèque Municipale (*De Uni.*) Rabano Mauro. 1864. De Universo. (*Etym.*) Lindsay. 1911. *Etymologiarum sive Originum libri XX*. (*Fave.*) Rose. 1899. N. Ceti Faventivi. *Liber artis architectonae*. Valentinus Rose. (*La.*) Lachman. 1848. *Die Schriften der Römischen Feldmesser Herausgegeben und erläutert von F. Blume, K. Lachmann, und A. Rudorff*. (*Vitr.*) Rose. 1899. *Vitruvii. De architectura Libri Decem*. Valentinus Rose.
- ANDREU, R. 2012. *Edició crítica, traducció i estudi de l'Ars gromatica siue geometria Gisemundi*. Tesis Doctoral codirigida por los doctores Cándida Ferrero y Oriol Olesti. Departamento de Ciencias de la Antigüedad y de la Edad Media. Universidad Autónoma de Barcelona.
- BEER, R 1907. *Die Handschriften des Klosters Santa Maria de Ripoll*, Vol. I. Viena: A. Hölder.
- BEER, R; BARNILS, P. 1910. *Los manuscritos del monastir de Santa Maria de Ripoll*. Barcelona: Estampa de la Casa Provincial de Caridad.
- BLUME; LACHMAN; RUDORFF. 1848. *Die Schriften der Römischen Feldmesser Herausgegeben und erläutert von von F. Blume, K. Lachmann, und A. Rudorff. Erster Band*. Berlín: Bei Georg Reimer.
- CANTOR, M. 1875. *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Eine historisch-mathematische Untersuchung, von dr. Moritz Cantor*. Leipzig: B.G.Teubner.
- FAVENTIVI, C. 1899. N. *Ceti Faventivi. Liber artis architectonae*. En Valentinus Rose (ed). *Vitruvii. De architectura Libri Decem*. Leipzig: In aedibus B. G. Teubneri, 283-309.
- FOLKERTS M. 2003. The importance of the Latin Middle Ages for the Development of Mathematics. En: *Essays on Early Medieval Mathematics*, Cap. I. Aldershot: Ashgate, 1-24.
- GUILLAUMIN, J.Y., ed. 2005. *Hyginus Gromaticus: Les arpenteurs romains. Tome I: Hygin le Gromaticus. Frontin*. París: Les Belles Lettres,
- GUILLAUMIN, J.Y. 2015. Le discours des agrimensores latins: caractéristiques et sources, transmission et adaptation. *Studia Philologica Valentina* 17,14: 9-34.
- LINDSAY, W. M. 1911. *Isidori Hispalensis episcopi. Etymologiarum sive Originum Libri XX. Oxonii*. Oxford: Oxford University Press.
- LLUIS I GINOVART, J (et al). 2019. Orientation of the romanesque churches in the region of Val d'Aran, Spain (11th–13th centuries). *Archaeometry* 61,1: 226-241.
- MILLÀS, J.M. 1931. *Assaig d'història de les idees físiques i matemàtiques a la Catalunya medieval*, Vol. I, Barcelona: Institució Patxot.
- OLESTI, O. 2017. Héritage et tradition des pratiques agrimensuriques : l'Ars Gromaticus de Gisemundus. *Dialogues d'histoire ancienne*, 43-1: 257-274.
- ORFILA, M (et. alt). 2017. Urbanizar en época romana: ritualidad y practicidad. Propuesta de un procedimiento homologado de ejecución, *SPAL*, 26: 113-34.
- PORTEY, P. 2004. *Bertrand Boysset, la vie et les oeuvres techniques d'un arpenteur médiéval* (v. 1355- v. 1416). París: Éditions Le Manuscrit.
- RABANO MAURO. 1864. De Universo libri viginti duo. En: *Patrologia Latina*, Vol. 111. París, J.P. Migne.
- THULIN, C.O. 1911. *Die Handschriften des Corpus agrimensorum Romanorum*. Berlín: Akademie der Wissenschaften, 87.
- THULIN, C. 1913. *Corpus Agrimensorum Romanorum*. Leipzig: In aedibus B. G. Teubneri.
- TONEATTO, L. 1982. Note sulla tradizione del Corpus Agrimensorum Romanorum. I Contenuti e struttura dell'Ars Gromaticus de Gisemundus (IX sec.). *Mélanges de l'école française de Rome Année* 94-1: 191-313.
- TONEATTO, L. 1995. *Codices artis mensurae. I manoscritti degli antichi opuscoli latini d'agrimensura (V-XIX sec.)*. Spoleto: Centro Italiano di studi sull'alto medioevo.
- VITRUBIO, M. 1899. *Vitruvii. De architectura Libri Decem. Iterum editit Valentinus Rose*. Leipzig: In aedibus B. G. Teubneri.



are assigned the maximum error of the calculation ($e_{m,max} = 3,32^\circ$), and it represents only a circumference arc ($arc_{r0,50} = 0,034$ m) of one meter in diameter.

Origins of Gisemundo's layout

The methods with the greatest tolerance to absorb possible errors in the setting out are the M_7 and M_8 of Gisemundus, so these *ecclesiae ad orientem* had to be reconsidered, or, by means of two shadows, pre and post meridian, traced only with an *extendere lineam*, or well aligned, close to the sixth hour, by *extendere lineam y pertice aequilite ad perpendicularum*, using a plumb line and a square.

Within this context, M_7 is a practical method, the five observed shadows figuratively trace the analemma of the solar course. It starts from a geometric construction of only two basic principles: the drawing of a circumference and having a gnomon squared on the plane where the circumference has been located. The architect draws the circumference first thing in the morning, with a diameter smaller than the shadow cast at that time (shadow 1). This is the only geometric operation that he has to perform. Then he only has to observe, mark the point where the shadow coincides with the circumference (shadow 2), and wait for the path of the sun to approach the base of the gnomon (shadow 3). Subsequently, it will mark the point where the end of the shadow again coincides with the circumference (shadow 4) and thus, joining the points (2-4), it can already be obtained the EW orientation, without the need to use the last shadow that is longer in the afternoon (shadow 5).

The M_7 construction of the *Ars gromatica Gisemundi* (c.800) is eminently practical and derived from gromatic experience. His theory is not described but starts from the principles of Marco Vitruvius Pollio (c.80-c.20 BC) who claims to know astronomy and to know the use of the *gnomon* to determine the equinoxes and solstices (*Vitr.* L.I). Vitruvius defined the construction of sundials (*Vitr.* L.IX,

7). The concept based on the layout of the *analemma* appears for the first time represented in the edition of Giocondo (1511) (L. IX, VIII) [fol. 92]. Marco Cetio Faventino collects the tradition of the construction of clocks, defining the double ax or plecino and the semicircular or quadrant (*Fave.* XXIX) (Fig. 7).

Conclusion

The maximum error established in the churches on the East-West axis is (0.92%) while, in the Roman settlements, the error in the orientation was 1° , which would represent (0.28%). If we take the average error of these buildings, ($1,66^\circ$), it follows that they have been made with scientifically based methods close to those developed by the Roman technique. It is not possible to determine which method was used for its orientation, but the degree of precision imposes a highly developed practical knowledge when rethinking the building. The method (M_7) of the *Ars gromatica Gisemundi* (c. 800) directly traces the east-west direction and was known, at least in southern France (c. 800-833) and in Ripoll (c. 850-900), as a readaptation that sanctioned the practical application of the Vitruvian meridian method, therefore, is considered the simplest method. ■

References

- CBM. Carpentras Bibliothèque Municipale (*De Uni.*) Rabano Mauro. 1864. De Universo. (*Etym.*) Lindsay. 1911. Etymologiarum sive Originum libri XX. (*Fave.*) Rose. 1899. N. Ceti Faventivi. Liber artis architectonae. Valentinus Rose. (*La.*) Lachman. 1848. Die Schriften der Römischen Feldmesser Herausgegeben und erläutert von F. Blume, K. Lachmann, und A. Rudorff. (*Vitr.*) Rose. 1899. Vitruvii. De architectura Libri Decem. Valentinus Rose.
- ANDREU, R. 2012. *Edició crítica, traducció i estudi de l'Ars gromatica sive geometria Gisemundi*. Doctoral thesis co-directed by Dr. Cándida Ferrero and Dr. Oriol Olesti. Departamento de Ciencias de la Antigüedad y de la Edad Media. Universidad Autònoma de Barcelona.
- BEER, R 1907. *Die Handschriften des Klosters Santa Maria de Ripoll*, Vol. I. Viena: A. Hölder.
- BEER, R; BARNILS, P. 1910. *Los manuscritos del monaster de Santa María de Ripoll*. Barcelona: Estampa de la Casa Provincial de Caridad.
- BLUME; LACHMAN; RUDORFF. 1848. *Die Schriften der Römischen Feldmesser Herausgegeben und erläutert von F. Blume, K. Lachmann, und A. Rudorff. Erster Band*. Berlin: Bei Georg Reimer.
- CANTOR, M. 1875. *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmessenkunst. Eine historisch-mathematische Untersuchung, von dr. Moritz Cantor*. Leipzig: B.G.Teubner.
- FAVENTIVI, C. 1899. *N. Ceti Faventivi. Liber artis architectonae. En Valentinus Rose (ed). Vitruvii. De architectura Libri Decem*. Leipzig: In aedibus B. G. Teubneri, 283-309.
- FOLKERTS M. 2003. The importance of the Latin Middle Ages for the Development of Mathematics. In: *Essays on Early Medieval Mathematics*, Cap. I. Aldershot: Ashgate, 1-24.
- GUILLAUMIN, J.Y., ed. 2005. *Hyginus Gromaticus: Les arpenteurs romains. Tome I: Hygin le Gromaticus. Frontin*. Paris: Les Belles Lettres,
- GUILLAUMIN, J.Y. 2015. Le discours des agrimensores latins: caractéristiques et sources, transmission et adaptation. *Studia Philologica Valentina* 17,14: 9-34.
- LINDSAY, W. M. 1911. *Isidori Hispalensis episcopi. Etymologiarum sive Originum Libri XX. Oxonii*. Oxford: Oxford University Press.
- LLUIS I GINOVART, J (et al). 2019. Orientation of the romanesque churches in the region of Val d'Aran, Spain (11th–13th centuries). *Archaeometry* 61,1: 226-241.
- MILLÀS, J.M. 1931. *Assaig d'història de les idees físiques i matemàtiques a la Catalunya medieval*, Vol. I, Barcelona: Institutió Patxot.
- OLESTI, O. 2017. Héritage et tradition des pratiques agrimensoriques: l'Ars Gromaticus de Gisemundus. *Dialogues d'histoire ancienne*, 43-1: 257-274.
- ORFILA, M (et. alt). 2017. Urbanizar en época romana: ritualidad y practicidad. Propuesta de un procedimiento homologado de ejecución, *SPAL*, 26: 113-34.
- PORTET, P. 2004. *Bertrand Boysset, la vie et les oeuvres techniques d'un arpenteur médiéval* (v. 1355- v. 1416). Paris: Éditions Le Manuscrit.
- RABANO MAURO. 1864. De Universo libri viginti duo. En: *Patrologia Latina*, Vol. 111. Paris, J.P. Migne.
- THULIN, C.O. 1911. *Die Handschriften des Corpus agrimensorum Romanorum*. Berlin: Akademie der Wissenschaften, 87.
- THULIN, C. 1913. *Corpus Agrimensorum Romanorum*. Leipzig: In aedibus B. G. Teubneri.
- TONEATTO, L. 1982. Note sulla tradizione del Corpus Agrimensorum Romanorum. I Contenuti e struttura dell'Ars Gromaticus de Gisemundus (IX sec.). *Mélanges de l'école française de Rome Année* 94-1: 191-313.
- TONEATTO, L. 1995. *Codices artis mensoriae. I manoscritti degli antichi opuscoli latini d'agrimensura (V-XIX sec.)*. Spoleto: Centro Italiano di studi sull'alto medioevo.
- VITRUBIO, M. 1899. *Vitruvii. De architectura Libri Decem. Iterum edidit Valentinus Rose*. Leipzig: In aedibus B. G. Teubneri.