

NUEVA APROXIMACIÓN A LAS SUPERFICIES CONVOLUTAS
A NEW APPROACH TO CONVOLUTE SURFACES

*Francisco González Quintial, Andrés Martín Pastor,
Antonio Sánchez Parandiet*

doi: [10.4995/ega.2022.15068](https://doi.org/10.4995/ega.2022.15068)



La investigación que se presenta forma parte de la exploración de las posibilidades que ofrecen las superficies desarrollables en la construcción de Arquitectura enfocadas principalmente a la fabricación digital. Este tipo de superficies han sido profusamente tratadas en los últimos años, asociadas tanto a la búsqueda de sistemas de discretización de superficies libres y formas complejas con facetas planas o tiras desarrollables como a la utilización de estas formas geométricas como elemento de composición proyectual. Esta asociación de geometría y construcción no es nueva y se puede encontrar en los propios fundamentos que llevaron a la formulación de la Geometría Descriptiva como herramienta aplicada a la construcción. A través de una profunda revisión de la geometría tradicional pre-computacional basada en la Geometría Descriptiva clásica, se ha procedido a reinterpretar los procedimientos gráficos tradicionales. Mediante la instrumentalización a través de los

Las superficies desarrollables han tenido una atención especial en los últimos años asociadas en muchos casos a la construcción de superficies de forma libre, en un proceso de discretización que permita una construcción más racional de este tipo de Arquitectura. Se trata de procesos geométricos ya abordados previamente y enfocados en temas no solamente arquitectónicos, sino de construcción en ge-

nuevos procesos computacionales de trabajo es posible alcanzar niveles de desarrollo que previamente quedaban meramente planteados a nivel de formulación teórica. Concretamente se desarrolla y reformula la idea de las superficies desarrollables que se apoyan en dos directrices en el espacio, es decir, es decir tiras desarrollables, que son conocidas en la bibliografía tradicional española como superficies convolutas.

PALABRAS CLAVE: GEOMETRÍA, SUPERFICIES DESARROLLABLES, APROXIMACIÓN ALGORÍTMICA, FABRICACIÓN DIGITAL

This research is part of an exploration of the opportunities that developable surfaces offer in Architecture, with a specific focus on digital fabrication. Convolute surfaces have been subject to increasing attention over recent years. This attention is related to both a search for discretization systems for free surfaces and complex shapes with flat facets or developable strips, and with the use of these geometric shapes as

neral, como idea en las esculturas de Ilha Koman y Richard Serra e incluso podemos encontrar estos conceptos en los tratados de corte de Juan de Alcega **1**. La propia aproximación a las superficies desarrollables inicial formulada por Monge **2** está fundamentada en la persecución de un fin práctico. La creación de la “Geometría Constructiva” en el sentido que la expone Sakarovich, **3** pretende re-

an element for design composition. Making connections between geometry and construction is not new, and can be identified in the very foundations that led to the formulation of descriptive geometry as a tool applied to construction. Through an in-depth review of traditional pre-computational geometry based on classical descriptive geometry, this research reinterprets traditional graphic procedures. Through instrumentalisation using computational work processes, it is now possible to achieve in practice a level of development in this area that was until relatively recently contemplated only at a theoretical level.

Specifically, this research develops and reformulates the concept of developable surfaces resting on two directrices in space, that is, developable strips. These surfaces are referred to as convolute surfaces in much of the current Spanish bibliography.

KEYWORDS: GEOMETRY, DEVELOPABLE SURFACES, ALGORITHMIC APPROACH, DIGITAL FABRICATION

Developable surfaces have received particular attention in recent years. In many cases, this has been due to their association with the construction of free-form surfaces, through processes of discretization which facilitate more rationalized construction processes for this type of architecture. These are geometric processes which have already been addressed, and not only in terms of architecture. The sculptures of Ilha Koman and Richard Serra also demonstrate these ideas. We can even find an engagement as far back as the court treatises of Juan de Alcega **1**. The initial approach to developable surfaces formulated by Monge **2**

was based on the pursuit of a practical end. The emergence of "Constructive Geometry" as understood by Sakarovich 3, was an attempt to resolve, among other issues, the execution of cuts in stone through the use of this type of surface.

The studies on developable surfaces carried out by Euler contain a double analytical and differential approach. They demonstrate a high degree of intuition and a need to visualize the concepts that help define these ideas. As stated by Lawrence 4, however, there is no practical or constructive element, as is the case with Monge.

There are numerous contemporary approaches from differential geometry to the resolution of geometric problems, materialized through the mathematical principles of Architectural Geometry developed by Pottman 5, 6, specifically those associated with the definition of developable envelopes. This said, we affirm that, as with the case with Ehler, these are neither more productive nor more interesting than alternative approaches based more on classical, intuitive and constructive geometric perspectives. As explained below, these approaches can be developed and complemented through the use of digital drawing tools and parametric processes that systematize and develop said theoretical foundations.

Along the same lines as Taibo 7, we agree that "the movement of a plane in space, according to any law, always generates a developable ruled surface, which is an envelope of the different positions on the mobile plane". Conditions or rules must be applied to this movement in order to generate different types of developable surfaces, as is described in the classical bibliography. Specifically, one of the approaches to defining a developable surface results from supporting the plane in motion simultaneously tangent at least at one point to two directrix curves in space, whether these are flat or warped. The line joining the pairs of points of tangency can be considered the generatrix of a warped ruled surface. Some authors, including Izquierdo Asensi 8, have referred to this type of surface. They denote these developable strips with the particular name of *convolute surfaces* or simply *convolutes*. It should be noted that this term is found only in the Spanish bibliography. An equivalent term in English was not identified in this research. In

solver entre otros la ejecución de cortes en piedra mediante la utilización de este tipo de superficies.

Los estudios realizados por Euler, sobre las superficies desarrollables, tienen un doble enfoque analítico y diferencial, en ellos existe un alto grado de intuición y necesidad de visualización del concepto que ayuda a la definición de estas ideas, pero a la vez, como expone Lawrence 4, no existe esa faceta práctica o constructiva en el sentido que Monge emplea.

En este sentido, podemos afirmar que las numerosas aproximaciones actuales desde la Geometría Diferencial a la resolución de problemas geométricos, puesta en valor a través de los principios matemáticos de la Geometría Arquitectónica desarrollados por Pottman 5, 6 y en concreto aquellos asociados a la definición de envolventes desarrollables, no resultan más fructíferos e interesantes que otros tipos de aproximación fundamentados más en los planteamientos geométricos clásicos, intuitivos y de carácter constructivo, que como se expone a continuación pueden resultar desarrollados y complementados mediante el uso de herramientas digitales de dibujo y procesos paramétricos que sistematizan y desarrollan dichos fundamentos teóricos.

Siguiendo el texto de Taibo 7, podemos aceptar que "el movimiento de un plano en el espacio, según una ley cualquiera, engendra siempre una superficie reglada desarrollable, la cual es superficie envolvente de las distintas posiciones del plano móvil". Particularmente, es necesario introducir diferentes condicionantes o leyes a este movimiento para generar distintos tipos de superficies desarrollables tal como se describen en la biblio-

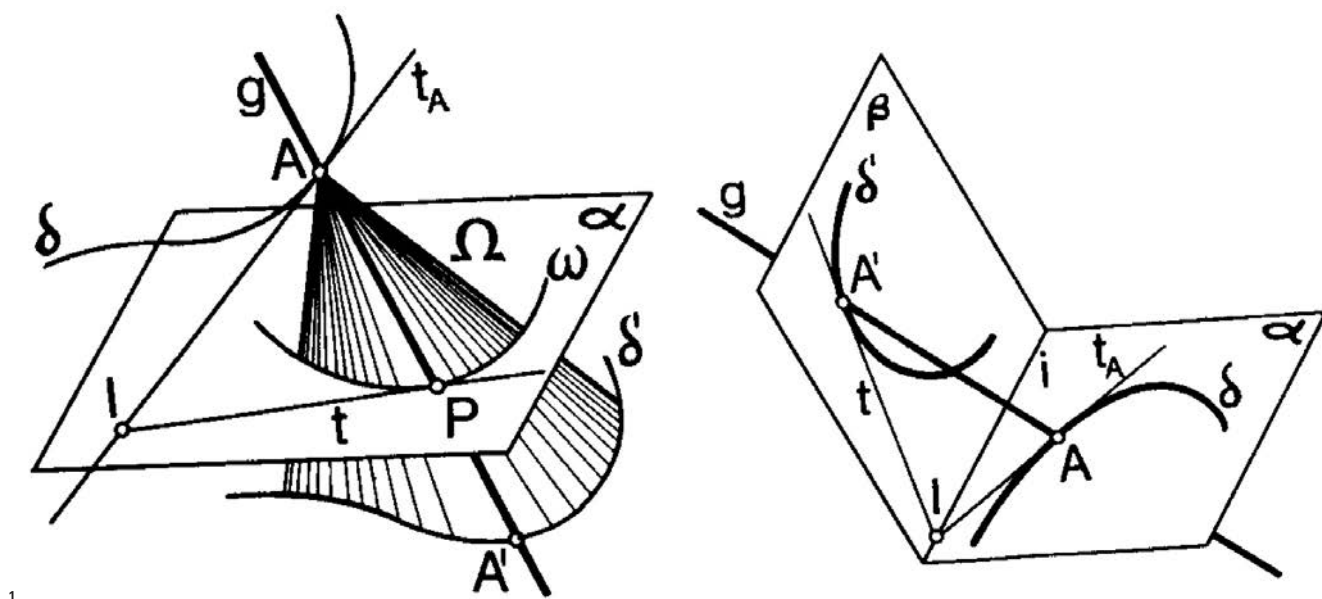
grafía clásica. De forma específica, una de las aproximaciones para definir una superficie desarrollable resulta apoyando el plano en movimiento simultáneamente tangente y al menos en un punto a dos directrices curvas en el espacio, ya sean estas planas o alabeadas. La línea que une los pares de puntos de tangencia se puede considerar como la generatriz de la superficie reglada alabeada. Algunos autores como Izquierdo Asensi 8, se han referido a este tipo de superficies, podríamos hablar de tiras desarrollables, con el nombre particular de superficies *convolutas* o simplemente *convolutas*. Cabe señalar que este término se encuentra únicamente en la bibliografía española, no habiéndose encontrado término tan particular en otros idiomas. En la bibliografía tradicional sobre Geometría Descriptiva se definen a nivel teórico los procesos que llevan a la obtención manual de este tipo de superficies desarrollables mediante el uso de sistemas gráficos. Dichos procedimientos gráficos se basan en la utilización de elementos auxiliares al trazado, principalmente un cono proyectante que permite utilizar una proyección plana de una de las curvas, a fin de simplificar el trazado de las rectas tangentes comunes a ambas. Estos trazados gráficos, no presentan dificultad cuando al menos una de las curvas es plana. El proceso de trazado se convierte en algo mucho más complejo cuando las curvas son alabeadas, en cuyo caso, el procedimiento se convierte en algo inabordable sin el uso de herramientas digitales (Fig. 1).

Las superficies convolutas, como se ha señalado resultan de gran utilidad en el trazado de desarrollos industriales, entre ellos la construcción naval. Sin embargo, este



1. Método general de trazado de convolutas. (Izquierdo Asensi, fig. 15.6 pag. 113)

1. General method for plotting convolutes. (Izquierdo Asensi, fig. 15.6 page 113)



concepto geométrico no resulta siempre bien entendido. Un ejemplo donde se combina producción industrial y creación escultórica se puede encontrar analizando la obra de Richard Serra, concretamente la pieza denominada Torsión Elíptica IV, podríamos entender esta, a través de sus propias palabras recogidas en la entrevista realizada por Forster 9, como el resultado de una búsqueda empírica de la forma realizada por el escultor, que sin saberlo y reclamando su invención reproduce un sistema de uso común en el trazado geométrico. Torsión Elíptica IV, está construida a partir de lámina de acero corten de 2 pulgadas (5 cm.) de espesor, tiene aproximadamente 12 pies (3,65 m.) de altura sobre una traza elíptica de 33 pies (10,05 m.) de eje mayor y 22 (6,70 m.) de eje menor. Su silueta superior es una elipse idéntica, rotada 90 grados. La envolvente, entendida como superficie desarrollable, como se puede comprobar por la linealidad de su contorno, se genera a partir de la generatriz trazada entre los puntos

de tangencia, superiores e inferiores, de un plano que se apoya en ambas elipses.

Sin embargo, analizando el esquema conceptual del diseño mostrado en la Exposición Brancusi-Serra realizada entre los años 2011 y 2012 en el Museo Guggenheim de Bilbao, nos damos cuenta de que el dibujo que pretende explicar geoméricamente la génesis de la escultura, representa realmente una superficie alabeada, generada literalmente por la torsión de un cilindro elíptico. La superficie obtenida mediante este proceso no es por tanto una superficie desarrollable como la que muestra la construcción final, sino una superficie reglada alabeada. Lo que muestra el modelo gráfico (Fig. 3) no se puede construir a partir de una chapa de acero sin deformar el material mediante un proceso de curvado en dos direcciones, algo por otro lado posible en un material dúctil como el metal. La doble curvatura aparece en ciertas obras de Serra si bien este no es el caso, como se observa en los modelos físicos.

the conventional bibliography of descriptive geometry, processes for obtaining this type of developable surfaces manually through the use of graphic systems are defined at a theoretical level. These graphical procedures are based on the use of elements auxiliary to the sketch. A projecting cone allows a flat projection of one of the curves to be used, in order to simplify the layout of the tangent lines common to both. These graphical sketches do not present serious difficulties when at least one of the curves is flat. The plotting process becomes much more complex when curves are warped, in which case the procedure becomes untenable without the use of digital tools. (Fig. 1)

Convolute surfaces, as has been pointed out, are very useful for industrial design applications, including shipbuilding. This geometric concept is not, however, always well understood. Industrial production and sculpture are combined in the work of Richard Serra, specifically the piece called *Elliptical Torsion IV*. In an interview with Forster 9, the artist himself described the work as the result of an empirical search for a shape which, while aiming for originality, unintentionally, reproduced a system in common use for geometric design work. *Elliptical Torsion IV* is constructed from 2" (5 cm) thick corten steel sheet. It is approximately 12" (3.65 m) high, on elliptic with a 33" (10.05 m) major axis and a 22" (6.70 m) minor axis. Its upper silhouette is an identical ellipse, rotated 90 degrees. The envelope can be identified as



a developable surface through the linearity of its contour. It is generated from the generatrix drawn between the upper and lower points of tangency of a plane that rests on both ellipses. When analyzing the conceptual plan of the design exhibited in the Brancusi-Serra Exhibition held at the Guggenheim Museum in Bilbao between 2011 and 2012, we realized that the drawing that tries to explain the genesis of the sculpture geometrically, in fact depicts a warped surface, literally generated by the torsion of an elliptical cylinder. The surface obtained through this process is therefore not a developable surface as was physically created in the final construction, but rather a warped ruled surface. The form depicted in the graphic model (Fig. 3) cannot be manufactured from a steel sheet without deforming the material by means of a two-way bending process. This process is in fact possible when working with a ductile material such as steel sheet. Double curvature is represented in some of Serra's works, although this is not true in this case, as can be observed in the physical models.

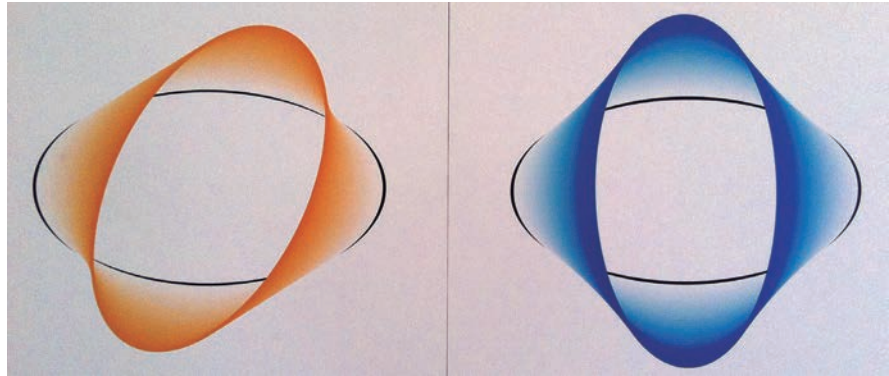
Elliptical Torsion IV was conceived and constructed as a *convolute*. The two ellipses, upper and lower, are rotated 90 degrees and generatrices are present between both borders, belonging to the plane tangent to ellipses. Below, an explanatory graphic model of the generation of the *convolute* and its development are detailed. (Fig. 4) The similarity can be identified by comparing the image of the physical scale model and the following illustrations where the generatrices of the convolute are even intuited on the metal part in a manner analogous to the model. (Fig. 3. Right) The difficulty of the design sketch described by Izquierdo Asensi has led to a proposal for a transcription of these methods, based on an auxiliary cone. This transcription can be used for tracing *convolute* surfaces using parametric tools as an instrument that allows us to go one step further in the handling of geometries "beyond paper". The results have been proven viable, as demonstrated in the works of González-Quintial **10, 11**. Moreover, a new formulation of the problem has been identified in the process, as described below.

Geometric Foundations

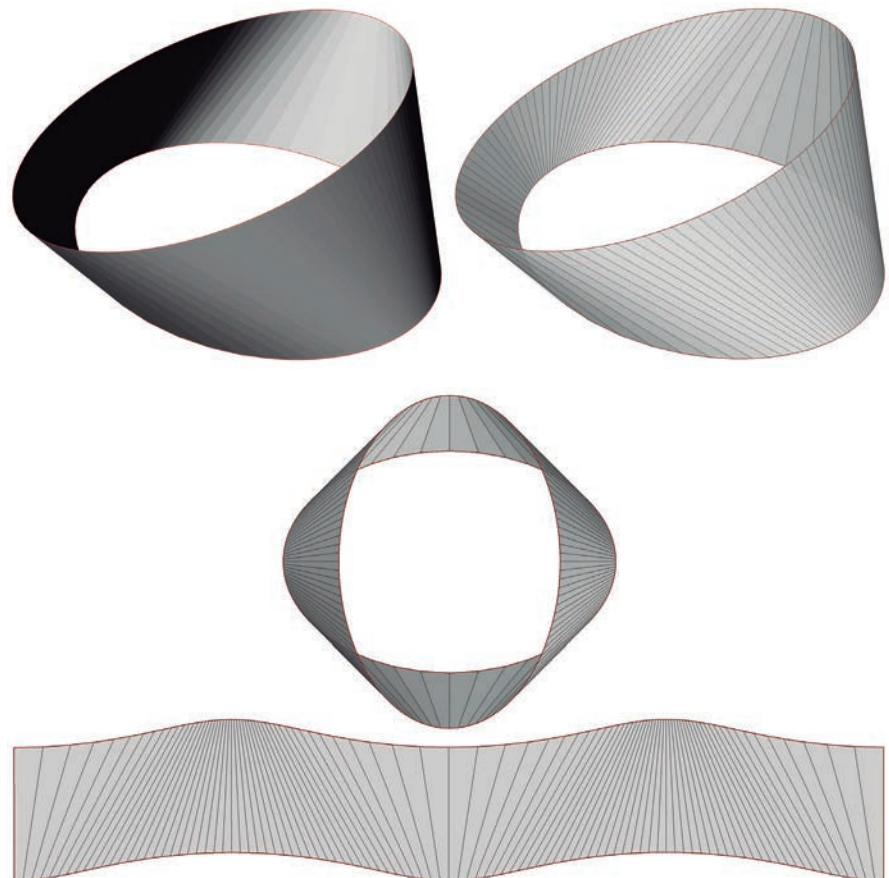
The developable tangential surface is the surface obtained through transition along the different tangents to a curve. This said,



2



3



4



2. Construcción de la pieza a escala 1:1 y modelo físico de Torsión Elíptica IV. (Imagen derecha de los autores)

3. Esquema conceptual de la geometría de la pieza. Brancusi-Serra. Exposición Guggenheim. Bilbao. 2011. <https://www.guggenheim-bilbao.eus/exposiciones/brancusi-serra> (Imagen de los autores)

4. Modelo de Torsión Elíptica IV. Desarrollado mediante la aplicación del algoritmo que transcribe el proceso descrito por Izquierdo Asensi. Modelo en planta y desarrollo de la superficie convoluta

2. Construction of the piece at 1:1 scale and physical model of Elliptical Torsion IV. (right-hand image by the authors)

3. Conceptual diagram of the geometry of the sculpture. Brancusi-Serra. Guggenheim exhibition. Bilbao. 2011. <https://www.guggenheim-bilbao.eus/exposiciones/brancusi-serra> (Image by the authors)

4. Elliptical Torsion Model IV. Developed by applying the algorithm that transcribes the process described by Izquierdo Asensi. Plan perspective and development of the convolute surface

Torsión Elíptica IV se concibe y construye como una convoluta. Los dos elipses, superior e inferior se encuentran giradas 90 grados y entre ambos bordes aparecen generatrices, pertenecientes al plano tangente a dichas elipses. A continuación, se muestra un modelo gráfico explicativo de la generación de la convoluta y su desarrollo. (Fig. 4) Puede apreciarse la similitud comparando la imagen del modelo físico a escala y las ilustraciones siguientes donde incluso se intuyen sobre la pieza metálica, las generatrices de la convoluta de forma análoga al modelo (Fig. 3. Dcha.).

La dificultad de trazado descrita por Izquierdo Asensi, ha llevado a plantear una transcripción de dichos métodos, basados en el cono auxiliar, para el trazado de superficies convolutas utilizando herramientas paramétricas como instrumento que permite ir un paso más allá en el manejo de geometrías “más allá del papel”. Los resultados han sido aceptables como se recoge en los trabajos de González-Quintal 10, 11, pero, además, en el proceso se ha encontrado una nueva formulación del problema, tal como se describe a continuación.

Fundamentos Geométricos

La superficie tangencial desarrollable es aquella que se obtiene por transición de las diferentes tangentes a una curva. Aunque podríamos llegar a definir todas las superficies desarrollables como superficies tangenciales, ya lo sean a una curva propia, impropia o estar reducida a un punto. Estos son los casos generales de superficies tangenciales o los particulares del cilindro y el cono respectivamente. La superficie tangencial, desde el punto de vista de su generación, es la única superficie desarrollable obtenida mediante el movimiento no de un plano, sino de una recta asociada a una curva, de una forma diferente al sistema general planteado previamente, en el que una superficie desarrollable se obtendría mediante el movimiento de un plano en el espacio.

Siguiendo el planteamiento del problema sobre la generación de superficies desarrollables *convolutas* entre dos curvas, tomando esas dos curvas cualesquiera alabeadas en el espacio podemos generar sus superficies tangenciales desarrollables de forma directa. Y estas dos superficies, siempre que no sean planas y además estén contenidas en planos paralelos, en cuyo caso tendrán una intersección impropia, se cortarán a lo largo de una tercera curva en el espacio. Desde cada uno de los puntos de esta curva de intersección podemos trazar sendas rectas tangentes a ambas curvas iniciales, es decir que dado un punto de la curva intersección existirán, al menos dos rectas que se corten en él y sean tangentes a ambas curvas directrices. Estas dos rectas tangentes determinan un plano a su vez tangente a las curvas y de esta

we could define all developable surfaces as tangential surfaces, whether they are to a proper or improper curve or reduced to a point. These are the general cases of tangential surfaces or the particular cases of the cylinder and the cone respectively. The tangential surface, from the point of view of its generation, is the only developable surface obtained by the movement not of a plane, but of a line associated with a curve, in a different way from the general system previously proposed, in which a developable surface would be obtained through the movement of a plane in space.

Following the approach to the problem of the generation of *convolute* developable surfaces between any two curves, given these two curves warped in space, we can generate their developable tangential surfaces directly. Furthermore, these two surfaces, as long as they are not flat and contained in parallel planes, in which case they will have an improper intersection, will intersect along a third curve in space. From each of the points of this intersection curve, we can draw lines tangent to both initial curves, that is, given a point on the intersection curve, there will be at least two lines that intersect it and are tangent to both directrix curves. These two tangent lines determine a plane that is in turn tangent to the curves and, thus, the segment determined by the two points of tangency in both guide curves constitutes a generatrix of the *convolute* developable surface.

Through the use of computational tools, in our case Grasshopper, the tracing of the developable tangent surfaces of both curves is direct, as is the intersection between both surfaces. It is necessary to take into account that the developable surfaces include two sheets formed by the extensions in both directions determined by the tangent vector at each point (Fig. 5). In this case it is necessary to generate the two sheets of the surface and properly obtain the corresponding curve at the intersection.

Once the curve at the intersection is obtained, we can obtain as many pairs of tangents, or tangent planes, as points along said tangent curve. It is interesting at this point to note that the direction of the tangent coincides with one of the main curvature directions of the surface, in this case the direction with zero curvature, that is, the direction that makes the curvature value of the developable surface



zero. In other words, it is the direction that coincides with the tangent to the osculating circle, which in this direction has an infinite radius. If we understand the developable surface as a parametric surface, we can easily obtain both main directions as well as the directions u and v of the surface, which greatly simplifies obtaining the tangent lines. The question of obtaining tangents to curves from external points posed an important problem in earlier approaches. This question was resolved satisfactorily using the methodology described above. Following this procedure for the generation of tangents, obtaining the segment that determines the *convolute* developable surface follows directly. It is just a matter of joining the points of tangency to the curves to obtain the generatrices of the developable surface. (Fig. 6)

It is important to note that with this procedure we not only generate the developable surface between two flat or warped curves, (Fig. 7) but we can also understand which geometric conditions define the conditions of the developable surface that we obtain between the given curves.

From the point of view of constructability, the limitation of obtaining a developable surface suitable for construction appears within those limits imposed by the conditions of relative curvature of the curves that constitute the directrices. This issue, which may a priori represent a weakness in the method, allows us to reflect on a fundamental question in the relationship between geometry and construction. We should remember that, inevitably, there are various purely geometric limitations which provoke the appearance of areas where a developable surface is not appropriate for the tracing of a strip suitable for physical construction. This does not mean that the developable surface does not exist or cannot be determined, simply that the receding edge is very close to one of the curves or appears directly in the space between them, which invalidates its use for the purposes proposed. As stated by Glaeser **12**, this issue appears not infrequently in the study of developable strips. Pérez et al. **13**, and Bo et al. **14**, among others, note that various solutions have been proposed that involve so-called *quasi-developable surfaces*. These actually seek to provide a developable solution to the distortion zone where the receding edge appears. As such, this question is outside

forma, el segmento determinado por los dos puntos de tangencia en ambas curvas directrices constituye una generatriz de la superficie desarrollable *convoluta*.

Mediante el uso de herramientas computacionales, en nuestro caso Grasshopper, resulta directo el trazado de las superficies tangentes desarrollables de ambas curvas, así como la intersección entre ambas superficies. Es necesario tener en cuenta que las superficies desarrollables tienen dos hojas formadas por las dos prolongaciones en ambos sentidos determinados por el vector tangente en cada punto (Fig. 5). De esta forma es necesario generar las dos hojas de la superficie y obtener adecuadamente la curva de intersección correspondiente.

Una vez obtenida la curva de intersección podemos obtener tantos pares de tangentes, o planos tangentes, como puntos obtengamos a lo largo de dicha curva tangente. Es interesante en este punto hacer notar que la dirección de la tangente coincide con una de las direcciones de curvatura principal de la superficie, en este caso la dirección con curvatura cero, es decir la que hace cero el valor de curvatura de la superficie desarrollable, dicho de otro modo, aquella dirección que coincide con la tangente al círculo osculador que en esta dirección tiene radio infinito. Si entendemos la superficie desarrollable como una superficie paramétrica podemos obtener de forma sencilla ambas direcciones principales como direcciones u y v de la superficie, lo que simplifica en gran medida la obtención de las rectas tangentes. La cuestión de la obtención de tangentes a las curvas desde puntos exteriores planteaba un problema importante en las anteriores apro-

ximaciones, cuestión esta que se ve resuelta muy satisfactoriamente de este modo. Tras este procedimiento de generación de tangentes, la obtención del segmento que determina la superficie desarrollable *convoluta* es directo, basta unir los puntos de tangencia a las curvas para obtener las generatrices de la desarrollable. (Fig. 6)

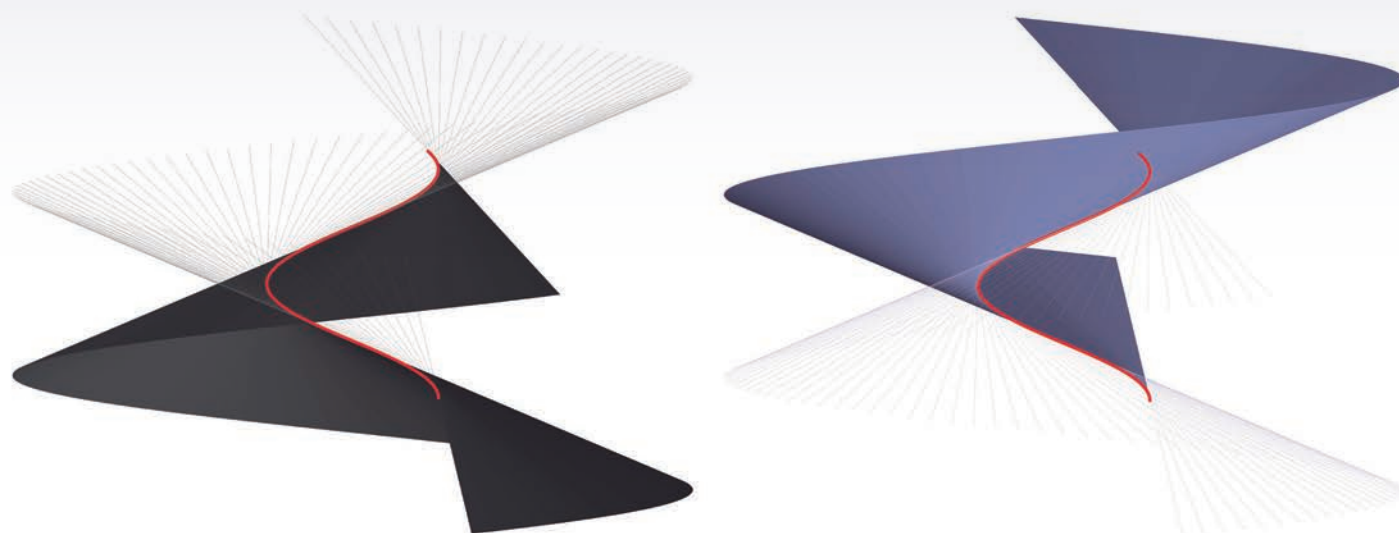
Es importante remarcar que con dicho procedimiento no solo generamos la superficie desarrollable entre dos curvas planas o alabeadas, (Fig. 7) sino que también podemos comprender cuales son los condicionantes geométricos que definen las condiciones de la superficie desarrollable que vamos a obtener entre dichas curvas.

Por supuesto, desde el punto de vista de la constructibilidad, la limitación de la obtención de una superficie desarrollable apta para ser construida se encuentra dentro de las propias impuestas por las condiciones de curvatura relativa de las curvas que constituyen las directrices. Esta cuestión que puede resultar a priori una debilidad del método, nos permite realizar una reflexión sobre una cuestión fundamental en la relación geometría y construcción. Debemos recordar que existen diversas limitaciones puramente geométricas que hacen inevitable la aparición de zonas donde la superficie desarrollable no es adecuada al trazado de una tira apta para ser construida. Esto no significa que la superficie desarrollable no exista o no se pueda determinar, simplemente que la arista de retroceso se encuentra muy próxima a una de las curvas o aparece directamente en el espacio comprendido entre ambas lo que invalida su uso para los fines que se proponen. Esta cuestión se pone de



5. Helicoide recto desarrollable. La tangente genera dos hojas de la misma superficie, funcionando la espiral como arista de retroceso

5. Developable straight helix. The tangent generates two sheets of the same surface, the spiral functioning as a receding edge



5

manifiesto en el estudio de las tiras desarrollables con cierta frecuencia como señala Glaeser 12, tratándose de solventar el problema se proponen diversas soluciones que apuntan hacia las denominadas superficies *quasi-desarrollables*, como exponen Pérez et al. 13, y Bo et al. 14, entre otros, y que en realidad pretenden dar una solución desarrollable a la zona de distorsión donde aparece la arista de retroceso, quedando esta cuestión fuera del objetivo de este estudio. Cabe señalar que esta distorsión también aparece en otra cuestión importante de tipo geométrico-constructivo como es el de las tiras rectificantes sobre geodésicas como señalan Martín Pastor y González Quintial 15.

Aplicación del sistema. Desarrollo de modelos físicos.

Como se ha señalado más arriba, el objetivo principal de este desarrollo geométrico persigue una aplicación práctica en la construcción de la Arquitectura. Se reivindica de

esta forma el objetivo formulado por Monge en su Geometría Descriptiva, como procedimiento de control gráfico y geométrico puesto al servicio de una fabricación más industrial, en nuestro caso digital. Podemos afirmar que la situación de auge de la fabricación digital, se apoya de manera firme en los conocimientos de geometría que permiten no solo resolver problemas constructivos, sino aplicar los propios fundamentos geométricos como germen de ideas generativas y proyectuales. En este sentido la utilización de modelos como elementos de validación del proceso se ha mostrado como un procedimiento de gran valor. Con ayuda de herramientas digitales, algunos modelos se han realizado a escala de prototipo y otros han podido ser materializados a mayor escala en forma de pabellones.

OSKOLA

Se trata de experimento de aproximación a la adaptación de una forma libre de doble curvatura mediante el uso de tiras desarrollables.

the scope of this research. It should be noted that this distortion is also relevant to another important geometric-constructive issue. Martín Pastor and González specifically identify the rectifying strips on geodesics 15.

Applications. The development of physical models

As indicated above, the main objective of this engagement with geometry is towards its practical application in the construction of architecture. The objective formulated by Monge in his Descriptive Geometry is vindicated. Graphic and geometric control procedures are put to use in more industrial fabrication processes. In this case, these are specifically digital fabrication processes. We affirm that the boom in digital fabrication is firmly based on a knowledge of geometry that does more than just facilitate the solution of applied construction problems. The fundamentals of geometry can themselves become the basis of inspiration for generational principles and project ideas. In this respect, the use of models as elements of validation of the process has proven to be a very valuable procedure. With the help of digital tools, some models have been constructed on a prototype scale. Others were materialized on a larger scale in the form of pavilions.

OSKOLA

This was an experiment to approach the adaptation of a double curvature free form



through the use of developable strips. (Fig. 8) The resolution of these strips was carried out by sketching *convolute* surfaces supported by flat sections of the surface, made using planes normal to a generatrix drawn, in this case, randomly with respect to the surface. This generatrix is a warped curve in space so the cuts are flat, but not parallel. The application of the method is straightforward.

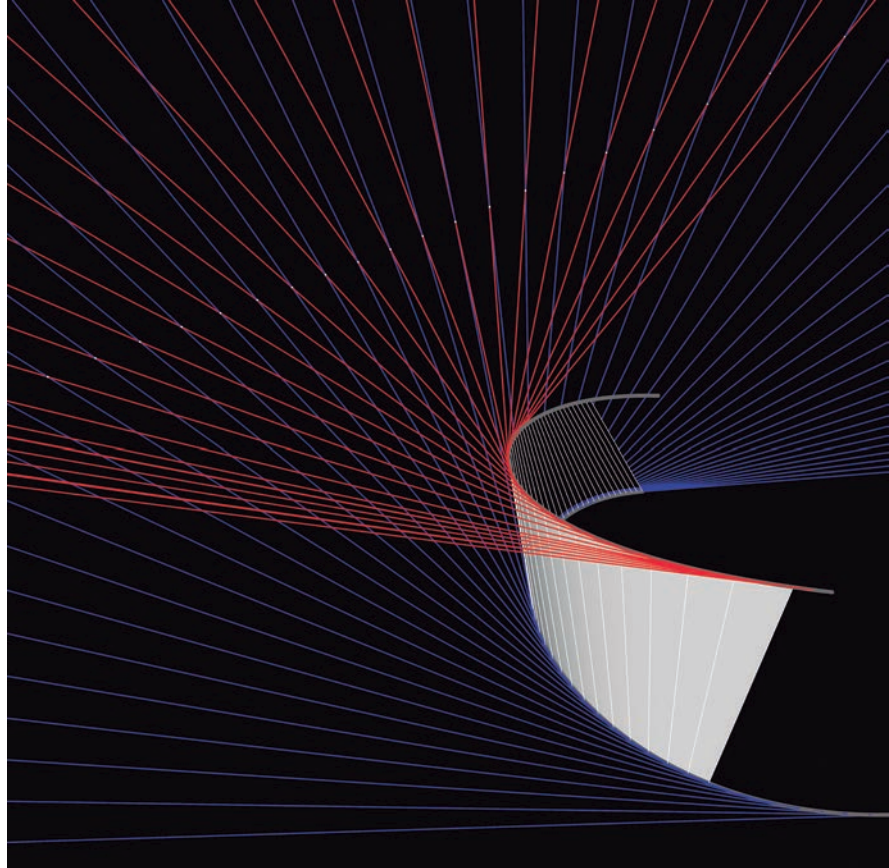
THE CACTUS PAVILION

From a purely geometric point of view, the concept was based on the use of *convolute* surfaces as set out above. In this case, a fully parametric model was made in which the curves that formed the geometric limits of each of the strips were defined. Subsequently, these made up the entire surface. The curves in this case are also flat and are contained in a bundle of planes that constitute the radial geometry of the pavilion. Variations in the geometry of the curves produced fully developable strips supported on these curved limits or pairs of directrix curves.

The pavilion was built using plywood sheets that could be bent in only one direction. This material is ideal for constructions which comply with the generatrices of developable geometries. The pavilion was designed as an itinerant interpretation center for the Project for the Protection of the Architectural and Natural Heritage of Santiago de Anaya, Valle del Mezquital, Mexico. This is a multidisciplinary project led by the UNAM Natural and Cultural Heritage Conservation Laboratory, which has the support of UNESCO. The pavilion (Fig. 9) was conceived and designed in the Department of Graphic Engineering of the University of Seville, in collaboration with Fablab Donostia, based at the University of the Basque Country **16**. This pavilion explores various formal issues related to the potential of biomimetic approaches to form, as well as other aspects of a collaborative nature, advanced geometry and digital fabrication. These circumstances led to the implementation of a methodology that took into account the idea of global design while the materialization of ideas remained localized.

Conclusions

The *convolute* design method presented in this research is based on classical principles of geometry and constitutes an evolution in and improvement on earlier



6

(Fig. 8) La resolución de estas tiras se realiza mediante el trazado de superficies *convolutas* apoyadas en cortes planos de la superficie, realizados utilizando planos normales a una directriz trazada en este caso de forma aleatoria con respecto a la superficie. Esta directriz es una curva alabeada en el espacio por lo que los cortes son planos, pero no son paralelos. La aplicación del método resulta directa.

CACTUS PAVILION

Desde el punto de vista puramente geométrico el concepto se fundamenta en el uso de superficies *convolutas* en la dirección expuesta más arriba. En este caso se realizó un modelo totalmente paramétrico en el que se definían las curvas que formarían los límites geométricos de cada una de las tiras que, a su vez, compondrían la superficie completa. Las curvas en este caso también son planas y están con-

tenidas en un haz de planos que constituyen la geometría radial del pabellón. Diversas variaciones de la geometría de las curvas dieron lugar a la obtención de tiras absolutamente desarrollables apoyadas en estos límites curvos o pares de curvas directrices.

El pabellón construido utilizando planchas de contrachapado de madera que permiten su curvado en una única dirección. Este material resulta ideal para construir siguiendo las directrices de geometrías desarrollables. Fue diseñado como centro de interpretación itinerante del Proyecto de Salvamento del Patrimonio Arquitectónico y Natural de Santiago de Anaya, Valle del Mezquital, México. Se trata de un proyecto multidisciplinar liderado por el Laboratorio de Conservación del Patrimonio Natural y Cultural de la UNAM que cuenta con el apoyo de la UNESCO. El pabellón (Fig. 9) ha sido con-



6. Trazado de convoluta (superficie gris) entre curvas alabeadas. Las rectas tangentes (azules) a la curva inferior determinan la superficie tangencial utilizada para extraer las curvas isoparamétricas de la tangencial superior (roja). Las intersecciones de ambas familias de curvas determinan el plano tangente a ambas curvas de partida. Nótese que se representa solamente una de las hojas de la superficie tangencial para mantener la claridad del dibujo. La zona donde la superficie convoluta no se encuentra determinada es la correspondiente a la ausencia de intersección de ambas superficies tangenciales

7 Aplicación del sistema. Superficie convoluta trazada entre dos curvas alabeadas en el espacio

6. Sketch of a convolute (gray surface) between warped curves. The lines tangent to the lower curve (blue) determine the tangential surface used to extract the isoparametric curves from the upper tangential (red). The intersections of both families of curves determine the plane tangential to both starting curves. Note that only one of the sheets of the tangential surface is depicted to facilitate clarity in the sketch. The area where the convolute surface is not determined is that corresponding to the absence of intersection of both tangential surfaces

7. Applications. Convolute surface drawn between two warped curves in space

cebido y diseñado en el Departamento de Ingeniería Gráfica de la Universidad de Sevilla, en colaboración con Fablab Donostia de la Universidad del País Vasco 16. Este pabellón explora diversas cuestiones formales relacionadas con la

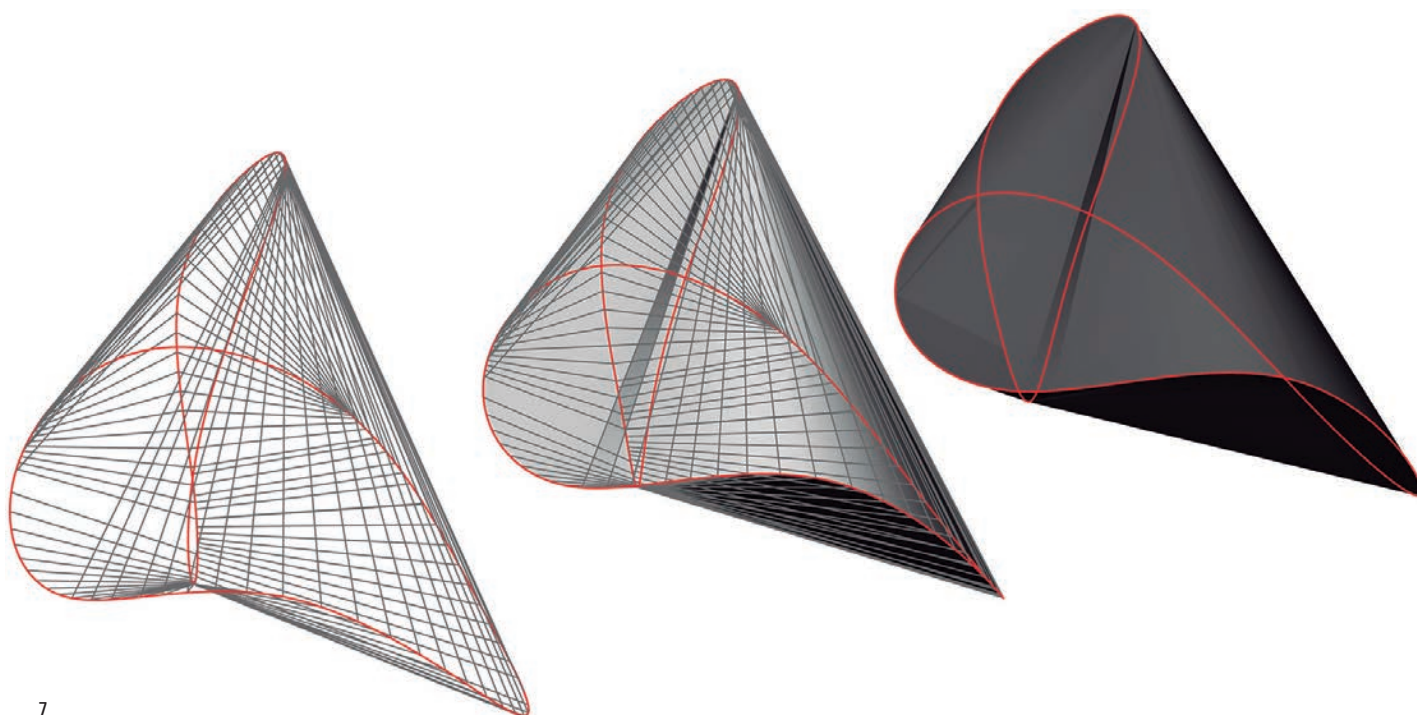
potencialidad de aproximaciones biomiméticas a la forma, además de otros aspectos de índole colaborativa, geometría avanzada y fabricación digital. Estas circunstancias han conducido a implementar una metodología que tiene en cuenta la idea del diseño global mientras que la materialización de las ideas permanece localizada.

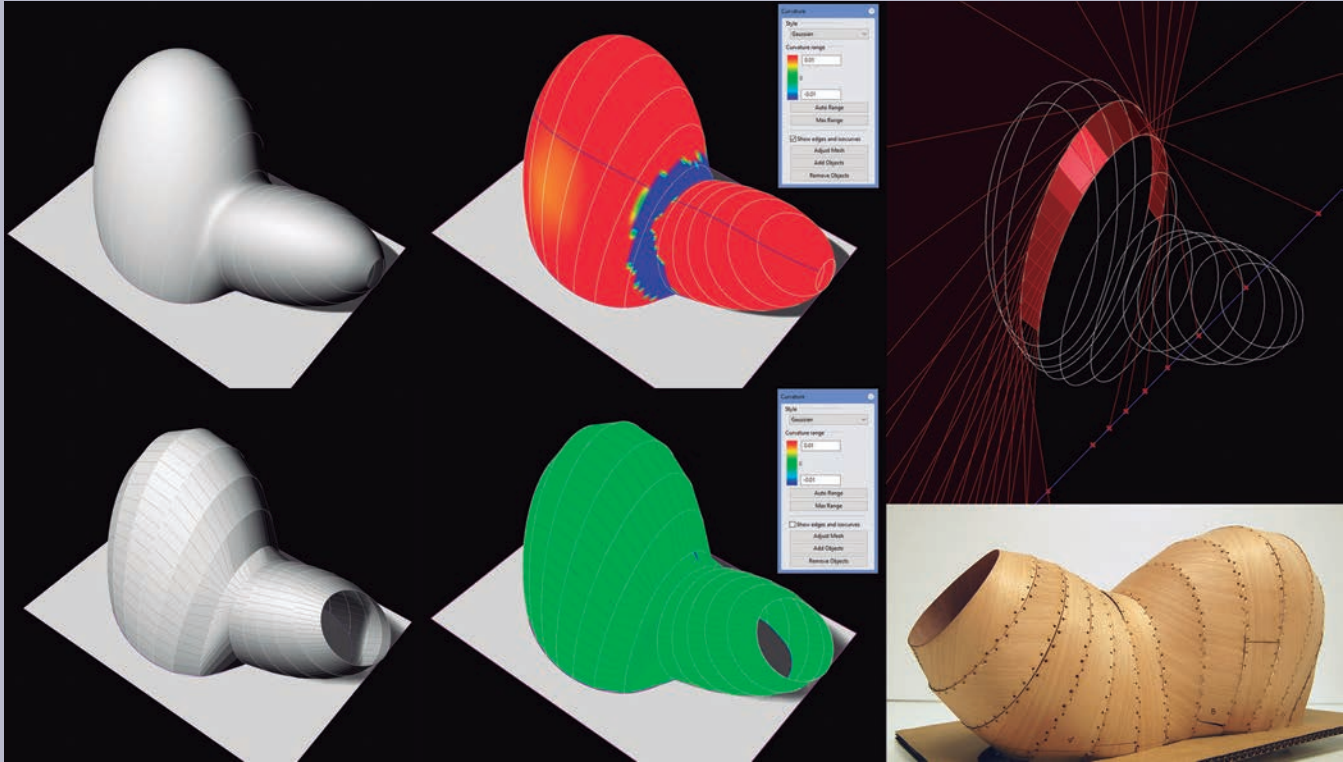
Conclusión

El método de trazado de convolutas presentado se fundamenta en los principios clásicos de la geometría y constituye una evolución y mejora de otros procedimientos gráficos previos. La principal ventaja del procedimiento presentado consiste en que resulta más eficiente de cara a su sistematización paramétrica, por lo que queda perfectamente determinado, además resuelve el problema del trazado de tangentes desde puntos exteriores a las cur-

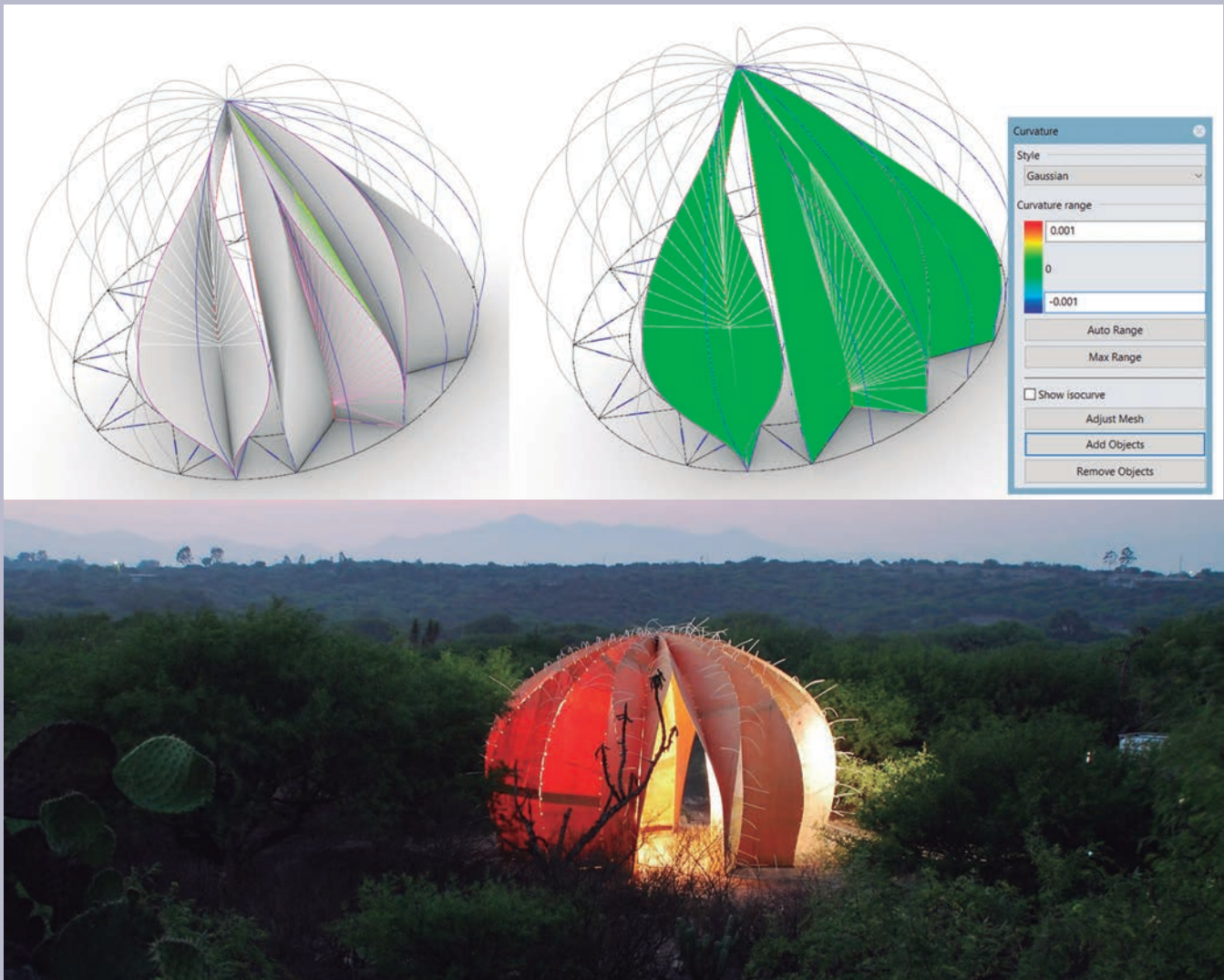
graphical procedures. The main advantage of the procedure presented here is its improved efficiency in terms of parametric systematization. Results are much more clearly defined. The procedure also solves the problem of drawing tangents from points outside the curves. Using earlier systems, this was an issue that demanded iterative processes that were both longer and less precise. As has been shown, this method turns out to be valid for obtaining and tracing developable strips or *convolutes* between curved generatrices, whether these curves are flat or warped.

At present, graphic methods are perfectly valid for the exploration and development of geometry. They represent a valid extension of the “constructive geometry” formulated by Monge. “Constructive geometry” continues to serve as a theoretical foundation for the discipline on which architectural graphic thought has traditionally relied. Digital systems, both for drawing and fabrication, turn out to be basic tools in this evolution and in the development of ideas around geometry. The application of geometric knowledge is the primary support of developments in digital fabrication. ■





8



9



8. Adaptación de una superficie de doble curvatura mediante convolutas. Análisis de curvatura de la superficie origen y de la discretización resultante. Proceso de trazado y modelo físico. (Oskola. Desarrollo y modelo de los autores)
9. Cactus Pavilion. Desarrollo geométrico y resultado final construido. (Desarrollo y modelo de los autores)

8. The adaptation of a double curvature surface using convolutes. Curvature analysis of the original surface and the resulting discretization. Sketching process and physical model. (Oskola. Development and model by the authors)
9. The Cactus Pavilion. Geometric development and final construction. (development and model by the authors)

vas, cuestión que requería procesos iterativos que hacían más largos e imprecisos dichos procesos.

Como se ha demostrado, el método resulta ser válido tanto para la obtención y trazado de tiras desarrollables o *convolutas* entre directrices curvas ya sean estas curvas planas como alabeadas.

En la actualidad, los métodos gráficos mantienen perfecta vigencia en la exploración y desarrollo de la geometría. Constituyen una forma válida de continuidad de la “geometría constructiva” formulada por Monge que sirve de fundamento teórico a la disciplina sobre la que se ha apoyado de manera tradicional el pensamiento gráfico Arquitectónico.

Los sistemas digitales, tanto de dibujo como de fabricación, resultan ser herramientas básicas en este progreso y desarrollo de las ideas acerca de la geometría. Siendo la aplicación de los conocimientos geométricos la principal fuente de alimentación de los desarrollos de la fabricación digital. ■

Referencias

- 1/ ALCEGA, Juan de. *Libro de Geometría, Práctica y Traça*. (Madrid: Guillermo Drouy, 1580); Madrid, 1589. <http://bdh.bne.es/bnsearch/detalle/bdh0000022768>
- 2/ MONGE, G., 1994. *Application de l'analyse à la géométrie*. Basel: Birkhäuser.
- 3/ SAKAROVITCH, J., 1998. *Epures d'architecture: de la coupe des pierres à la géométrie descriptive XVIIe-XIX siècles*. Basl: Birkhäuser.

- 4/ SNEŽANA LAWRENCE, 2011. *Developable Surfaces: Their History and Application*. Nexus Network Journal, 13 (3), pp. 701-714.
- 5/ POTTMANN, H.; BENTLEY, D., 2010. *Architectural geometry*. Bentley Institute Press.
- 6/ POTTMANN, H., SCHIFTNER, A., BO, P., SCHMIEDHOFER, H., WANG, W., BALDASSINI, N. y WALLNER, J., 2008. *Freeform surfaces from single curved panels*. ACM Transactions on Graphics, 27(3), pp. 1-10.
- 7/ TAIBO FERNÁNDEZ, A., 2010. *Geometría descriptiva y sus aplicaciones*. Tomo 2 *Curvas y superficies*. Segunda edición.; Madrid: Editorial Tébar.
- 8/ IZQUIERDO ASENSI, F., 1996. *Geometría descriptiva superior y aplicada*. 4a corr y amp edn. Paraninfo.
- 9/ FORSTER, Ian. *Richard Serra: Tools & Strategies* | Art21 “Extended Play”. <https://www.youtube.com/watch?v=G-mBR-26bAzA>
- 10/ GONZÁLEZ QUINTIAL, F., SÁNCHEZ PARANDIET, A. *Método de adaptación de formas de doble curvatura mediante superficies desarrollables: tesis doctoral*, [s.n.].
- 11/ GONZÁLEZ, Paco. *Adaptación de superficies de doble curvatura mediante superficies desarrollables*. EGA Expresión Gráfica Arquitectónica, [S.I.], v. 21, n. 27, p. 210-219, mayo 2016. ISSN 2254-6103. Disponible en: <<https://polipapers.upv.es/index.php/EGA/article/view/4741>>. Fecha de acceso: 04 feb. 2021 doi:<https://doi.org/10.4995/ega.2016.4741>.
- 12/ GLAESER, G. y GRUBER, F., 2007. *Developable surfaces in contemporary architecture*, 1(1), pp. 59-71.
- 13/ PÉREZ, F. y SUÁREZ, J.A., 2007. *Quasi-developable B-spline surfaces in ship hull design*. Computer-Aided Design, 39(10), pp. 853-862.
- 14/ BO, P., ZHENG, Y. y ZHANG, C., 2019. *Smooth quasi-developable surfaces bounded by smooth curves*. arXiv preprint arXiv:1905.07518.
- 15/ MARTÍN-PASTOR, Andrés; GONZÁLEZ-QUINTIAL, Francisco. (2020). *Surface Discretisation with Rectifying Strips on Geodesics*. Nexus Network Journal Vol. 23, pp. xxx <https://doi.org/10.1007/s00004-020-00540-x>
- 16/ MARTÍN-PASTOR, Andrés; GONZÁLEZ-QUINTIAL, Francisco. (2019). *Cactus Pavilion. Arquitectura experimental con superficies desarrollables plegadas*. In: Llorens-Corraliza, S; Rincón-Millán, M; Martín-Pastor A, (eds.) Avances en Expresión Gráfica Aplicada a la Edificación, Tirant lo Blanch Humanidades, 2019, pp. 621-634. ISBN: 978-84-17973-12-4. Dep Legal: V-2661-2019

References

- 1/ ALCEGA, Juan de. *Libro de Geometría, Práctica y Traça*. (Madrid: Guillermo Drouy, 1580); Madrid, 1589. <http://bdh.bne.es/bnsearch/detalle/bdh0000022768>
- 2/ MONGE, G., 1994. *Application de l'analyse à la géométrie*. Basl: Birkhäuser.
- 3/ SAKAROVITCH, J., 1998. *Epures d'architecture: de la coupe des pierres à la géométrie descriptive XVIIe-XIX siècles*. Basl: Birkhäuser.
- 4/ SNEŽANA LAWRENCE, 2011. *Developable Surfaces: Their History and Application*. Nexus Network Journal, 13 (3), pp. 701-714.
- 5/ POTTMANN, H. and BENTLEY, D., 2010. *Architectural geometry*. Bentley Institute Press.
- 6/ POTTMANN, H., SCHIFTNER, A., BO, P., SCHMIEDHOFER, H., WANG, W., BALDASSINI, N. and WALLNER, J., 2008. *Freeform surfaces from single curved panels*. ACM Transactions on Graphics, 27(3), pp. 1-10.
- 7/ TAIBO FERNÁNDEZ, A., 2010. *Geometría descriptiva y sus aplicaciones*. Tomo 2 *Curvas y superficies*. Segunda edición.; Madrid: Editorial Tébar.
- 8/ IZQUIERDO ASENSI, F., 1996. *Geometría descriptiva superior y aplicada*. 4a corr y amp edn. Paraninfo.
- 9/ FORSTER, Ian. *Richard Serra: Tools & Strategies* | Art21 “Extended Play”. <https://www.youtube.com/watch?v=G-mBR-26bAzA>
- 10/ GONZÁLEZ QUINTIAL, F., SÁNCHEZ PARANDIET, A. *Método de adaptación de formas de doble curvatura mediante superficies desarrollables: tesis doctoral*, [s.n.].
- 11/ GONZÁLEZ, Paco. *Adaptación de superficies de doble curvatura mediante superficies desarrollables*. EGA Expresión Gráfica Arquitectónica, [S.I.], v. 21, n. 27, p. 210-219, mayo 2016. ISSN 2254-6103. Disponible en: <<https://polipapers.upv.es/index.php/EGA/article/view/4741>>. Fecha de acceso: 04 feb. 2021 doi:<https://doi.org/10.4995/ega.2016.4741>.
- 12/ GLAESER, G. and GRUBER, F., 2007. *Developable surfaces in contemporary architecture*, 1(1), pp. 59-71.
- 13/ PÉREZ, F. and SUÁREZ, J.A., 2007. *Quasi-developable B-spline surfaces in ship hull design*. Computer-Aided Design, 39(10), pp. 853-862.
- 14/ BO, P., ZHENG, Y. and ZHANG, C., 2019. *Smooth quasi-developable surfaces bounded by smooth curves*. arXiv preprint arXiv:1905.07518.
- 15/ MARTÍN-PASTOR, Andrés; GONZÁLEZ-QUINTIAL, Francisco. (2020). *Surface Discretisation with Rectifying Strips on Geodesics*. Nexus Network Journal Vol. 23, <https://doi.org/10.1007/s00004-020-00540-x>
- 16/ MARTÍN-PASTOR, Andrés; GONZÁLEZ-QUINTIAL, Francisco. (2019). *Cactus Pavilion. Arquitectura experimental con superficies desarrollables plegadas*. In: Llorens-Corraliza, S; Rincón-Millán, M; Martín-Pastor A, (eds.) Avances en Expresión Gráfica Aplicada a la Edificación, Tirant lo Blanch Humanidades, 2019, pp. 621-634. ISBN: 978-84-17973-12-4. Dep Legal: V-2661-2019