



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

El Problema de Lambert en transferencias orbitales

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

Índice general

1. Introducción	2
1.1. Funciones de Stumpff	2
1.2. Coeficientes de Lagrange	2
2. Objetivos	2
3. El Problema de Lambert	3
4. Algoritmo del Problema de Lambert	6
5. Aplicación: Maniobra de aproximación	8
6. Cierre	10

1 Introducció

El problema de Lambert trata de encontrar una órbita a partir de dos posiciones y el tiempo de vuelo que las separa. Fue planteado en el siglo XVIII por Johann H. Lambert y resuelto posteriormente por Joseph-Louis Lagrange y Carl Friedrich Gauss. Sus aplicaciones son diversas e importantes como en la intercepción de cuerpos celestes, en la programación de encuentros o aproximaciones y en la determinación preliminar de órbitas de naves espaciales.

Existen muchos desarrollos que resuelven este problema como el método de Battin. Un pseudocódigo de su algoritmo puede encontrarse en **Vallado**.

En este artículo se muestra un procedimiento a seguir para la resolución, siendo que algunos de los razonamientos y expresiones aquí expuestos están deducidos en libros de Mecánica Orbital. En particular, el Problema de Lambert, tal y como aquí es tratado, se puede consultar en el Capítulo 5 de **Curtis**.

1.1 Funciones de Stumpff

Para poder resolver el problema es necesario recordar las funciones de Stumpff¹:

$$S(z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{z} - \sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}^3} & z > 0 \\ \frac{\sinh \sqrt{-z} - \sqrt{-z}}{\sqrt{-z}^3} & z < 0 \\ 1/6 & z = 0 \end{cases} \quad C(z) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{z}}{z} & z > 0 \\ \frac{\cosh \sqrt{-z} - 1}{-z} & z < 0 \\ 1/2 & z = 0 \end{cases}$$

1.2 Coeficientes de Lagrange

También conviene recordar las funciones llamadas coeficientes de Lagrange f y g y sus derivadas \dot{f} y \dot{g} que permiten expresar (utilizando coordenadas perifocales) los vectores posición y velocidad, \vec{r} y \vec{v} respectivamente, como combinación lineal de unos vectores iniciales de posición y velocidad, \vec{r}_0 y \vec{v}_0 , de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= f\vec{r}_0 + g\vec{v}_0 \\ \vec{v} &= \dot{f}\vec{r}_0 + \dot{g}\vec{v}_0 \end{aligned}$$

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Saber calcular la órbita kepleriana que permite llevar una nave o satélite de una posición a otra en un tiempo determinado.
- Calcular el impulso necesario para situar la nave en la órbita que permite hacer una transferencia a la posición deseada en el tiempo de vuelo establecido.
- Determinar el impulso requerido para abandonar la órbita de transferencia al alcanzar el punto objetivo.

¹Las funciones de Stumpff, desarrolladas por Karl Stumpff, se utilizan en mecánica celeste para analizar órbitas utilizando la formulación de variable universal.

3 El Problema de Lambert

Supongamos conocidos los **vectores** \vec{r}_1 y \vec{r}_2 indicando las posiciones de los puntos P_1 y P_2 respectivamente y situados sobre una órbita descrita alrededor de la masa M (ver **figura 1**) y supongamos también que conocemos también el **tiempo** Δt deseado para ir de P_1 a P_2 .

Consideremos que θ_1 y θ_2 son las anomalías verdaderas de los puntos P_1 y P_2 quedando definido el triángulo de transferencia (ver **figura 2**).

Llamamos **cambio de anomalía verdadera**, $\Delta\theta$, al ángulo comprendido entre \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , así:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad \rightarrow \quad \cos \Delta\theta = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2}.$$

Al hallar $\Delta\theta$ se producirá una ambigüedad de cuadrante que se decide fijándonos en la tercera componente de $\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2$, ya que este vector está en la misma dirección que \vec{h} , y por tanto:

$$\begin{aligned} (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)_z &= (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) \cdot \vec{k} \\ &= r_1 r_2 \sin \Delta\theta \vec{u}_h \cdot \vec{k} \\ &= r_1 r_2 \sin \Delta\theta \cos i \end{aligned}$$

De esta manera, para **órbitas posigradas** ($\cos i > 0 \sim 0^\circ < i < 90^\circ$)

$$\Delta\theta = \begin{cases} \arccos \left(\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2} \right) & \text{si } (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)_z \geq 0 \\ 360^\circ - \arccos \left(\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2} \right) & \text{si } (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)_z < 0 \end{cases} \quad (1)$$

mientras que para **retrogradas** ($\cos i < 0 \sim 90^\circ < i < 180^\circ$) es al revés.

Para determinar la órbita kepleriana que permite pasar de P_1 a P_2 en un tiempo de vuelo determinado Δt basta encontrar el vector \vec{v}_1 porque la posición y velocidad de cualquier punto de la órbita puede ser determinado con \vec{r}_1 y \vec{v}_1 si conocemos los coeficientes de Lagrange (f, g, \dot{f}, \dot{g}) asociados a esa órbita. En particular para el punto P_2 :

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= f\vec{r}_1 + g\vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 &= \dot{f}\vec{r}_1 + \dot{g}\vec{v}_1 \end{aligned} \quad (2)$$

Conocemos la expresión de los coeficientes en función del cambio en anomalía verdadera

$$\begin{aligned} f &= 1 - \frac{\mu r_2}{h^2} (1 - \cos \Delta\theta) & g &= \frac{r_1 r_2}{h} \sin \Delta\theta \\ \dot{f} &= \frac{\mu}{h} \frac{1 - \cos \Delta\theta}{\sin \Delta\theta} \left[\frac{\mu}{h^2} (1 - \cos \Delta\theta) - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] & \dot{g} &= 1 - \frac{\mu r_1}{h^2} (1 - \cos \Delta\theta) \end{aligned} \quad (3)$$

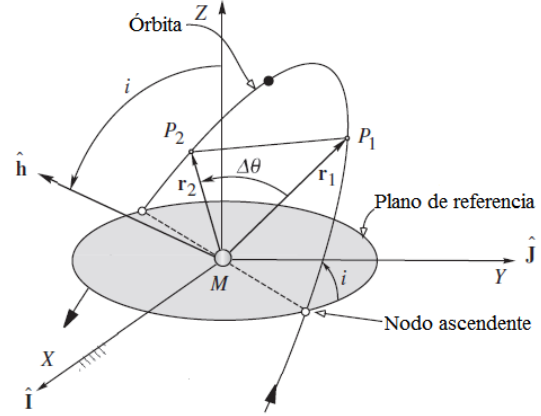


Figura 1: Trayectoria posigrada de P_1 a P_2 ($i < 90^\circ$).

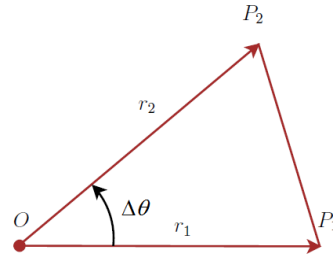


Figura 2: Triángulo de transferencia.

pero se desconoce el valor de h puesto que depende de la órbita que se quiere determinar.

También son conocidas las expresiones de estos coeficientes en función de la anomalía universal χ :

$$\begin{aligned} f &= 1 - \frac{\chi^2}{r_1} C(z) & g &= \Delta t - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \chi^3 S(z) \\ \dot{f} &= \frac{\sqrt{\mu}}{r_1 r_2} \chi [z S(z) - 1] & \dot{g} &= 1 - \frac{\chi^2}{r_2} C(z) \end{aligned} \quad (4)$$

donde $z = \alpha \chi^2$ y $C(z)$ y $S(z)$ son las funciones de Stumpff antes presentadas.

Igualando las expresiones (3) y (4) resulta un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas h , χ y z mientras que $\Delta\theta$, Δt , r_1 y r_2 son datos conocidos. Realmente solo hay 3 ecuaciones independientes porque $f\dot{g} - \dot{f}g = 1$. Resolviendo este sistema tendremos los coeficientes de Lagrange.

Planteando la igualdad entre las dos expresiones de g resulta una relación entre $\Delta\theta$ y Δt :

$$\frac{r_1 r_2}{h} \sin \Delta\theta = \Delta t - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \chi^3 S(z) \quad (5)$$

Procediendo del mismo modo para las expresiones de f obtenemos

$$1 - \frac{\mu r_2}{h^2} (1 - \cos \Delta\theta) = 1 - \frac{\chi^2}{r_1} C(z) \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{\mu r_1 r_2 (1 - \cos \Delta\theta)}{\chi^2 C(z)}} \quad (6)$$

Sustituyendo esta expresión de h en (5) resulta la igualdad

$$\sqrt{\mu} \Delta t = \chi^3 S(z) + A \chi \sqrt{C(z)} \quad (7)$$

donde

$$A = \sin \Delta\theta \sqrt{\frac{r_1 r_2}{1 - \cos \Delta\theta}} \quad (8)$$

La expresión (7) contiene las incógnitas χ y z pero no podemos aplicar que $z = \alpha \chi^2$ puesto que α es el inverso del semieje mayor de la órbita 'desconocida'. Por tanto debemos usar otra relación y para ello igualamos las dos expresiones de \dot{f} en (3) y (4):

$$\frac{\mu}{h} \frac{1 - \cos \Delta\theta}{\sin \Delta\theta} \left[\frac{\mu}{h^2} (1 - \cos \Delta\theta) - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = \frac{\sqrt{\mu}}{r_1 r_2} \chi [z S(z) - 1]$$

Multiplicando por $r_1 r_2$, sustituyendo h y A y reorganizando la igualdad resulta:

$$\chi^2 C(z) = r_1 + r_2 + A \frac{z S(z) - 1}{\sqrt{C(z)}} \quad \rightarrow \quad \chi = \sqrt{\frac{y(z)}{C(z)}} \quad (9)$$

donde

$$\mathbf{y}(\mathbf{z}) = r_1 + r_2 + A \frac{zS(z) - 1}{\sqrt{C(z)}} \quad (10)$$

Sustituyendo en la igualdad (7) conseguimos dejar esa expresión en función de una sola variable, z . Esta igualdad permite determinarla con el dato Δt :

$$\sqrt{\mu}\Delta t = \left(\frac{y(z)}{C(z)}\right)^{\frac{3}{2}} S(z) + A\sqrt{y(z)} \quad (11)$$

Para resolver esta ecuación utilizaremos el método iterativo de Newton-Raphson sobre la función $F(z)$ definida como

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \left(\frac{y(z)}{C(z)}\right)^{\frac{3}{2}} S(z) + A\sqrt{y(z)} - \sqrt{\mu}\Delta t \quad (12)$$

y su derivada $\mathbf{F}'(\mathbf{z}) =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left[\frac{y(z)}{C(z)}\right]^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1}{2z} \left[C(z) - \frac{3S(z)}{2C(z)} \right] + \frac{3S(z)^2}{4C(z)} \right\} + \frac{A}{8} \left[3\frac{S(z)}{C(z)}\sqrt{y(z)} + A\sqrt{\frac{C(z)}{y(z)}} \right] & \text{si } z \neq 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{40}y(0)^{\frac{3}{2}} + \frac{A}{8} \left[\sqrt{y(0)} + A\sqrt{\frac{1}{2y(0)}} \right] & \text{si } z = 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

Para aplicar el proceso iterativo de Newton

$$z_{i+1} = z_i - \frac{F(z_i)}{F'(z_i)}$$

falta elegir un z_0 para iniciar las iteraciones. Un buen punto inicial sería $z_0 = E^2$ para órbita elíptica y $z_0 = -F^2$ para hiperbólica pero como se desconoce su naturaleza podemos tomar $z_0 = 0$. Una alternativa es representar $F(z)$ y tomar un z_0 cerca de donde $F(z)$ se anula.

Una vez conocida la incógnita z podemos determinar el valor de los coeficientes de Lagrange sustituyendo las expresiones (9) y (11) en (4), obteniendo:

$$\mathbf{f} = 1 - \frac{y(z)}{r_1} \quad \mathbf{g} = A\sqrt{\frac{y(z)}{\mu}} \quad \dot{f} = \frac{\sqrt{\mu}}{r_1 r_2} \sqrt{\frac{y(z)}{C(z)}} [zS(z) - 1] \quad \dot{\mathbf{g}} = 1 - \frac{y(z)}{r_2} \quad (14)$$

El signo de z indica si la órbita es elíptica ($z > 0$), parabólica ($z = 0$) o hiperbólica ($z < 0$).

Ahora podemos determinar los vectores velocidad despejando \vec{v}_1 y \vec{v}_2 en las expresiones (2)

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{g} (\vec{r}_2 - f\vec{r}_1) \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{g} (g\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (15)$$

4 Algoritmo del Problema de Lambert

La resolución del problema sigue el siguiente algoritmo:

Paso 1. Calcular

$$r_1 = \sqrt{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1}, \quad r_2 = \sqrt{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2} \quad \text{y} \quad (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)_z$$

Paso 2. Calcular $\Delta\theta$ entre las dos posiciones. En el caso de que la órbita sea posigrada

$$\Delta\theta = \begin{cases} \arccos \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2} & \text{si } (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)_z \geq 0 \\ 360^\circ - \arccos \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2} & \text{si } (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)_z < 0 \end{cases}$$

Paso 3. Calcular la constante A

$$A = \sin \Delta\theta \sqrt{\frac{r_1 r_2}{1 - \cos \Delta\theta}}$$

Paso 4. Definir la función $y(z)$

$$y(z) = r_1 + r_2 + A \frac{z S(z) - 1}{\sqrt{C(z)}}$$

Paso 5. Resolver la ecuación calculando el valor de z que verifica^{2,3}:

$$F(z) = 0$$

Paso 6. Hallar el valor de y para el valor de z_{sol} obtenido de la resolución de la ecuación anterior

$$y(z_{sol})$$

Paso 7. Calcular los coeficientes de Lagrange f, g y \dot{g} :

$$f = 1 - \frac{y(z)}{r_1}; \quad g = A \sqrt{\frac{y(z)}{\mu}}; \quad \dot{g} = 1 - \frac{y(z)}{r_2}$$

Paso 8. Determinar los vectores velocidad para P_1 y P_2 usando esos coeficientes

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{g} (\vec{r}_2 - f \vec{r}_1) \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{g} (\dot{g} \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Con las posiciones y velocidades en cada punto se pueden hallar todos los detalles de la órbita.

En la [figura 3](#) se muestra un esquema del proceso con la expresión utilizada en cada caso:

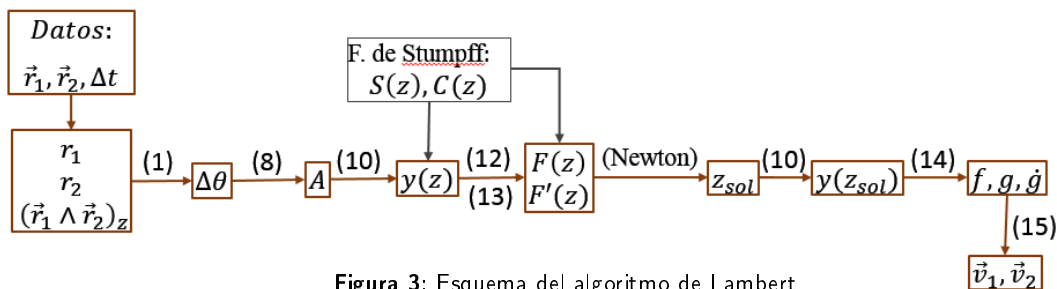


Figura 3: Esquema del algoritmo de Lambert

²Utilizar para esta resolución un método numérico

³El signo de z indica si la órbita es hiperbólica ($z < 0$), parabólica ($z = 0$) o elíptica ($z > 0$).

Ejemplo 4.1 La posición de un satélite terrestre en un instante es $\vec{r}_1 = (4700, 9000, 2700) \text{ km}$ y dos horas después $\vec{r}_2 = (-24600, 3500, 6000) \text{ km}$. ¿Cuáles son los vectores velocidad en esas posiciones?

Solución: Se trata de resolver un caso del problema de Lambert. Siguiendo los pasos:

Paso 1. Calcular r_1 , r_2 y $(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)_z$

$$r_1 = \sqrt{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1} = \sqrt{(4700, 9000, 2700) \cdot (4700, 9000, 2700)} = 10506.2 \text{ km}$$

$$r_2 = \sqrt{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2} = \sqrt{(-24600, 3500, 6000) \cdot (-24600, 3500, 6000)} = 25561.9 \text{ km}$$

$$\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 = (4700, 9000, 2700) \wedge (-24600, 3500, 6000) = (4.5, -9.5, 23.7) \times 10^7 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

Paso 2. Calcular $\Delta\theta$ entre las dos posiciones.

Como $(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)_z = 23.7 \cdot 10^7 > 0$ la órbita debe ser posigrada,

$$\Delta\theta = \arccos \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2} = \arccos \frac{(4700, 9000, 2700) \cdot (-24600, 3500, 6000)}{10506.2 \cdot 25561.9} = 104.65^\circ$$

Paso 3. Calcular la constante A

$$A = \sin \Delta\theta \sqrt{\frac{r_1 r_2}{1 - \cos \Delta\theta}} = \sin(104.65^\circ) \sqrt{\frac{10506.2 \cdot 25561.9}{1 - \cos(104.65^\circ)}} = 14164.7 \text{ km}$$

Paso 4. Calcular la función $y(z)$

$$\begin{aligned} y(z) &= r_1 + r_2 + A \frac{z S(z) - 1}{\sqrt{C(z)}} = 10506.2 + 25561.9 + 14164.7 \frac{z S(z) - 1}{\sqrt{C(z)}} = \\ &= 36068.1 + 14164.7 \frac{z S(z) - 1}{\sqrt{C(z)}} \end{aligned}$$

Paso 5. Hallar el valor de z resolviendo la ecuación :

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu} \Delta t &= \left(\frac{y(z)}{C(z)} \right)^{\frac{3}{2}} S(z) + A \sqrt{y(z)} \\ \sqrt{398600.5} \cdot 7200 &= \left(\frac{y(z)}{C(z)} \right)^{\frac{3}{2}} S(z) + 14164.7 \sqrt{y(z)} \rightarrow z_{sol} = 3.51473 > 0 \end{aligned}$$

El valor de $z_{sol} > 0$ indica que la órbita es elíptica.

Paso 6. Hallar el valor de $y(z)$ para z_{sol}

$$\begin{aligned} y(z_{sol}) &= 36068.1 + 14164.7 \frac{z_{sol} S(z_{sol}) - 1}{\sqrt{C(z_{sol})}} = \\ &= 36068.1 + 14164.7 \frac{3.51473 \cdot S(3.51473) - 1}{\sqrt{C(3.51473)}} = 24211.2 \end{aligned}$$

Paso 7. Calcular los coeficientes de Lagrange f , g y \dot{g} :

$$f = 1 - \frac{y(z)}{r_1} = 1 - \frac{24211.2}{10506.2} = -1.3045$$

$$g = A \sqrt{\frac{y(z)}{\mu}} = 14164.7 \sqrt{\frac{24211.2}{398600.5}} = 3490.97$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{y(z)}{r_2} = 1 - \frac{24211.2}{25561.9} = 0.05284$$

Paso 8. Determinar los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \frac{1}{g} (\vec{r}_2 - f \vec{r}_1) = \\ &= \frac{1}{3490.97} [(-24600, 3500, 6000) + 1.3045(4700, 9000, 2700)] = \\ &= (-5.291, 4.366, 2.728) \text{ km/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \frac{1}{\dot{g}} (\dot{g} \vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \\ &= \frac{1}{0.05284} [0.05284(-24600, 3500, 6000) - (4700, 9000, 2700)] = \\ &= (-1.71869, -2.52511, -0.682607) \text{ km/s} \end{aligned}$$

5 Aplicación: Maniobra de aproximación

Una aplicación del problema de Lambert es la resolución de trayectorias de intercepción y/o aproximación: ¿Cómo llegar de un punto P de una órbita a otro cuerpo que se encontrará en el punto Q de otra órbita después de un tiempo determinado? y ¿cómo corregir la órbita de transferencia para hacer aproximación al cuerpo destino?

Ejemplo 5.1 Las naves P y Q están ambas en una órbita geocéntrica elíptica de semieje mayor $a = 14300 \text{ km}$ y excentricidad $e = 0.3$. La anomalía verdadera de P y Q son $\theta_P = 60^\circ$ y $\theta_Q = 135^\circ$ respectivamente. En ese instante se quiere ejecutar un impulso sobre la nave P para interceptar y alcanzar de forma suave (otro impulso) a la nave Q en exactamente en $70'$. Calcula la dirección y el módulo de los impulsos necesarios.

Solución: Conociendo a y e se pueden determinar el periodo T , los radios del perigeo y apogeo, r_p y r_a y con ellos h

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{14300^3}{398600.5}} = 17018.3 \text{ s}$$

$$r_p = a(1 - e) = 14300(1 - 0.3) = 10010 \text{ km}$$

$$r_a = a(1 + e) = 14300(1 + 0.3) = 18590 \text{ km}$$

$$h = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{r_a r_p}{r_a + r_p}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5} \sqrt{\frac{18590 \cdot 10010}{18590 + 10010}} = 72020.7 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

Al disponer solo de datos sobre la forma y el tamaño de la órbita habrá que trabajar sobre el plano orbital por lo que conviene utilizar el sistema de coordenadas perifocal. Las coordenadas del punto P en ese sistema son:

$$r_P = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos \theta_P} = \frac{\frac{72020.7^2}{398600.5}}{1 + 0.3 \cos 60^\circ} = 11315.7 \text{ km}$$

$$\vec{r}_P = r_P(\cos(\theta_P), \sin(\theta_P), 0) = 11315.7(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ, 0) = (5657.83, 9799.64, 0) \text{ km}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \frac{\mu}{h}(-\sin(\theta_P), e + \cos(\theta_P), 0) = \\ &= \frac{398600.5}{72020.7}(-\sin 60^\circ, 0.3 + \cos 60^\circ, 0) = (-4.793, 4.428, 0) \text{ km/s}\end{aligned}$$

Para saber la posición de la nave Q dentro de $70'$ es necesario conocer el tiempo desde el perigeo en este instante, $t_Q - t_p$ para sumarle los $70'$. Este cálculo requiere la resolución de la ecuación de Kepler:

$$\begin{aligned}\theta_Q = 135^\circ \rightarrow E_Q &= 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta_Q}{2} \right) = \\ &= 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-0.3}{1+0.3}} \tan \frac{135^\circ}{2} \right) = 2.114 \text{ rad} \\ M_Q &= E_Q - e \sin(E_Q) = 2.114 - 0.3 \sin(2.114) = 1.857 \text{ rad} \\ t_Q - t_p &= \frac{T}{2\pi} M_Q = \frac{17018.3}{2\pi} 1.857 = 5029.7 \text{ s}\end{aligned}$$

entonces para el punto de encuentro Q'

$$\begin{aligned}t_{Q'} - t_p &= t_Q - t_p + 70' = 5029.7 + 70 \cdot 60 = 9229.7 \text{ s} \\ M_{Q'} &= 2\pi \frac{t_{Q'} - t_p}{T} = 2\pi \frac{9229.7}{17018.3} = 3.408 \text{ rad} \\ E_{Q'} : M_{Q'} &= E_{Q'} - e \sin E_{Q'} \rightarrow 3.408 = E_{Q'} - 0.3 \sin E_{Q'} \rightarrow E_{Q'} = 3.347 \text{ rad} \\ \theta_{Q'} &= 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E_{Q'}}{2} \right) = \\ &= 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+0.3}{1-0.3}} \tan \frac{3.347}{2} \right) = -171.37 + 360^\circ = 188.63^\circ\end{aligned}$$

Con la anomalía verdadera del punto de encuentro Q' se pueden determinar la posición y la velocidad perifocales de la nave objetivo.

$$r_{Q'} = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos \theta_{Q'}} = \frac{\frac{72020.7^2}{398600.5}}{1 + 0.3 \cos 188.63^\circ} = 18500.2 \text{ km}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_{Q'} &= r_{Q'}(\cos(\theta_{Q'}), \sin(\theta_{Q'}), 0) = \\ &= 18500.2(\cos 188.63^\circ, \sin 188.63^\circ, 0) = (-18290.7, -2776.45, 0) \text{ km}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_{Q'} &= \frac{\mu}{h}(-\sin(\theta_{Q'}), e + \cos(\theta_{Q'}), 0) = \\ &= \frac{398600.5}{72020.7}(-\sin 188.63^\circ, 0.3 + \cos 188.63^\circ, 0) = (0.831, -3.811, 0) \text{ km/s}\end{aligned}$$

Conociendo la posición inicial \vec{r}_P , la objetivo $\vec{r}_{Q'}$ y el tiempo de vuelo se puede resolver el problema de Lambert hallando las velocidades a la salida y a la llegada de la órbita de intercepción (transferencia).

$$\begin{aligned}Lamb(\vec{r}_P, \vec{r}_{Q'}, \Delta t) &= Lamb((5657.83, 9799.64, 0), (-18290.7, -2776.45, 0), 4200) \rightarrow \\ \vec{v}_P^T &= (-7.284, 2.158, 0) \text{ km/s} \\ \vec{v}_{Q'}^T &= (-2.439, -4.940, 0) \text{ km/s}\end{aligned}$$

Así, por tanto, los impulsos para reunir ambas naves son:

$$\vec{\Delta v}_P = \vec{v}_P^T - \vec{v}_P = (-7.284, 2.158, 0.) - (-4.793, 4.428, 0) = (-2.491, -2.270, 0) \text{ km/s}$$

$$\Delta v_P = \|(-2.491, -2.270, 0)\| = 3.370 \text{ km/s}$$

$$\vec{\Delta v}_{Q'} = \vec{v}_{Q'}^T - \vec{v}_{Q'} = (0.831, -3.811, 0) - (-2.439, -4.940, 0) = (3.270, 1.129, 0) \text{ km/s}$$

$$\Delta v_{Q'} = \|(3.270, 1.129, 0)\| = 3.459 \text{ km/s}$$

y por tanto la maniobra de rendezvous suave necesita de una reserva de maniobra de

$$\Delta v_P + \Delta v_{Q'} = 3.370 + 3.459 = 6.829 \text{ km/s}$$

A partir de $\vec{r}_P^T = \vec{r}_P$ y \vec{v}_P^T se puede deducir los elementos y por tanto la excentricidad de la órbita de transferencia para distinguir si es una órbita elíptica o hiperbólica. También se puede conocer el tipo de órbita viendo que la velocidad tras el impulso en P

$$\vec{v}_P^T = (-7.284, 2.158, 0.) \text{ km/s} \rightarrow v_P^T = \|(-7.284, 2.158, 0.)\| = 7.6 \text{ km/s}$$

no supera la velocidad de escape en P ,

$$v_P^{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_P}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 398600.5}{11315.7}} = 8.39 \text{ km/s}$$

lo que indica que se trata de una órbita elíptica.

6 Cierre

En este artículo se ha desarrollado el Problema de Lambert para determinar la órbita kepleriana que permite ir de un punto en el espacio a otro en un tiempo de vuelo determinado.

Tras ese desarrollo se ha presentado el algoritmo que permite programar la resolución de estas situaciones.

Este contenido ha sido apoyado con ejemplos que muestran su posible aplicación a situaciones reales.

Referencias

- [1] CURTIS, HOWARD D., *Orbital Mechanics for Engineering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.
- [2] BATE, ROGER R. ET AL., *Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.
- [3] BROWN, CHARLES D., *Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.
- [4] PRUSSING, JOHN E. AND CONWAY, BRUCE A., *Orbital Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1993.
- [5] CHOBOTOV, VLADIMIR A., *Orbital Mechanics Third Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 2002.
- [6] VALLADO, DAVID A., AND WAYNE D. MCCLAIN, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, McGraw-Hill, 1997.