Rendezvous con Transferencias de Hohmann

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

Índice general

1 Introducción

Este artículo presenta dos formas de hacer una primera aproximación al rendezvous entre dos objetos mediante transferencias de Hohmann. En realidad se muestran las condiciones de posicionamiento en las que se puede realizar, los tiempos necesarios para su transición y los impulsos requeridos para su ejecución. En el caso de tranferencias interplanetarias se estudian solo los casos entre órbitas circulares y coplanarias

En misiones interplanetarias no solo se requiere alcanzar la órbita deseada sino que también es necesario llegar en el momento adecuado. Para que el **rendezvous** o aproximación tenga lugar al final de una transferencia de Hohmann, el planeta objetivo debe estar inicialmente en la posición adecuada para que al final de la transferencia el objetivo alcance la línea de ápsides de la elipse de transferencia al mismo tiempo que lo hace la nave.

Una posibilidad para realizar esa sincronización es utilizar transferencias de Hohmann completas (alargando o reduciendo el periodo) que son conocidas como maniobras de ajuste de fase, tal y como se describe en sección 3. Otra posibilidad consiste en esperar el momento adecuado para hacer una transferencia de Hohmann estándar, método presentado en la sección 4.

Para aplicar en las ecuaciones será necesario recordar que en cualquier órbita el momento angular específico h es constante y que en cualquier posición se verifica que

$$h = r\, v_\perp$$

siendo r la distancia al foco y $v_\perp$ la velocidad transversal en esa posición. Aplicando esa propiedad a las posiciones del apogeo y del perigeo, en las que $v = v_\perp$, se obtiene:

$$v_a = \frac{h}{r_a} \qquad \text{y} \qquad v_p = \frac{h}{r_p} \tag{1}$$

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Estimar los impulsos necesarios para adelantar o retrasar una nave en su propia órbita mediante una maniobra de fase.
- Calcular el periodo sinódico entre dos cuerpos en órbitas concéntricas.
- Obtener el tiempo de espera que se requiere para iniciar una transferencia de Hohmann de forma que llegue a su destino al mismo tiempo que el cuerpo objetivo consiguiendo así una aproximación a éste.

3 Maniobras de fase

Una maniobra de fase es una transferencia de Hohmann con salida y llegada a una misma órbita (ver figura 1). La órbita de transferencia es recorrida completa en un periodo seleccionado. Estas maniobras son utilizadas para cambiar (adelantar o atrasar) la posición de una nave dentro de su órbita como reubicación o con el objetivo de efectuar un rendezvous o aproximación a otro planeta o vehículo.

Las maniobras de fase pueden ser de dos tipos:

- Para adelantar la posición en la órbita habrá que aplicar el impulso adecuado para **reducir el periodo** y por tanto en sentido contrario al movimiento. Esta reducción debe ser tal, que al volver al punto inicial tras haber recorrido una órbita más corta, O_1, se pueda aplicar un segundo impulso para volver a la órbita original ahora ya en la situación deseada sobre la órbita origen (O_0 en figura 1).

- El otro tipo es el que pretende atrasar la posición, necesitando para este caso **aumentar el periodo** de la órbita haciendo el ajuste de posición mediante una órbita más larga, O_2 en figura 1.

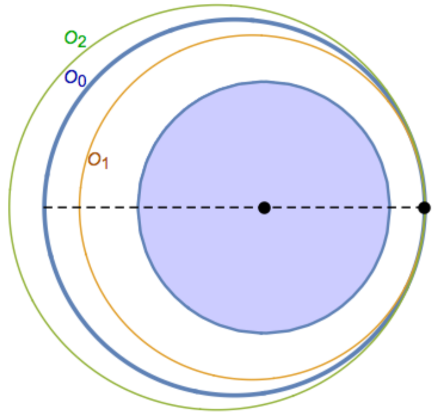

Figura 1: Para ajustar la posición dentro de una órbita se utiliza una maniobra de ajuste de fase con órbitas de transferencia más cortas o más largas según interese

En el proceso será necesario ajustar el periodo de la nueva órbita, T_{tr} haciendo que si t_F es la diferencia de tiempo[1] entre el paso por el perigeo (apogeo) de la posición ocupada y él de la posición deseada:

$$T_{tr} = T_0 \mp t_F$$

restando t_F para adelantar la posición en la órbita o sumándolo para retrasarla.
Una vez conocido el periodo de la órbita de transferencia se pueden obtener los parámetros de esta órbita (a_{tr}, h_{tr}) necesarios para obtener la velocidad del objeto al pasar por el perigeo y con ellos deducir los incrementos de velocidad necesarios para hacer la maniobra de fase:

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= \left| \frac{h_{tr}}{r_p} - \frac{h_1}{r_p} \right| \\ \Delta v_2 &= \Delta v_1 \qquad\qquad \text{(misma magnitud que } \Delta v_1 \text{ pero sentido contrario)} \end{aligned} \tag{2}$$

Ejemplo 3.1 *Dos naves están orbitando en la misma órbita O_1 de la que se conocen el semieje $a_1 = 10750\, km$ y la excentricidad $e_1 = 0.348837$.*

En el instante mostrado en la figura 2 la nave perseguidora se encuentra en la posición P y la objetivo en B formando un ángulo $\theta = 75°$.

a) ¿Qué impulso hay que aplicar en este instante a la nave perseguidora para alcanzar la nave objetivo? ¿que impulso se debe aplicar al llegar a ella para hacer un acoplamiento suave?

b) Suponiendo que solo disponemos de una reserva de maniobra máxima de $\Delta v = 0.15\, km/s$, ¿se puede hacer el acoplamiento de ambas naves impulsando solo la nave que se encuentra en P?

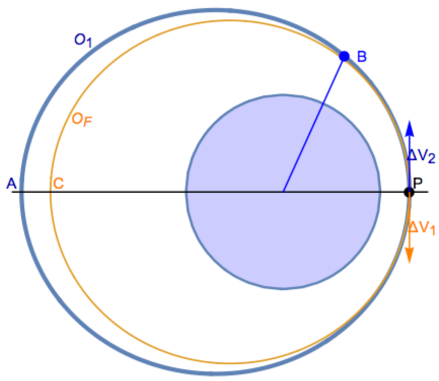

Figura 2: Maniobra de ajuste de fase para adelantar la posición del móvil en su órbita. Es necesaria una órbita de fase más corta.

[1] Hallar el tiempo de separación entre dos posiciones requerirá la resolución de la ecuación de Kepler

Solución: a) Cálculo del periodo y el momento específico de O_1.

Como $a_1 = 10750\,km$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{a_1^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{10750^3}{398600.5}} = 11092.4\,s$$

Aplicando la excentricidad $e_1 = 0.348837$ se pueden calcular los radios del perigeo y apogeo

$$r_p = a_1(1-e_1) = 10750.4\,(1-0.348837) = 7000\,km$$
$$r_a = a_1(1+e_1) = 10750.4\,(1+0.348837) = 14500\,km$$
$$h_1 = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{r_a\,r_p}{r_a+r_p}} = \sqrt{2\cdot 398600.5}\sqrt{\frac{14500\cdot 7000}{14500+7000}} = 61347.6\,km^2/s^2$$

Cálculo del periodo y el momento específico de la órbita de transferencia, O_{tr}.

Antes de calcular el periodo se halla cuanto tiempo hace que la nave objetivo pasó por el punto P que, en este caso, es el perigeo, por lo tanto se trata de hallar el tiempo desde su paso por el perigeo $t_B - t_p$:

$$\theta = 75^{\circ} \quad\rightarrow\quad E = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e_1}{1+e_1}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-0.348837}{1+0.348837}}\tan\frac{75^{\circ}}{2}\right) = 0.979622\,rad$$
$$M = E - e_1\,\sin(E) = 0.979622 - 0.348837\,\sin(0.979622) = 0.69\,rad$$
$$(t_B - t_p) = \frac{T_1}{2\pi}\cdot M = \frac{11092.4}{2\pi}\cdot 0.69 = 1218.1\,s$$

El periodo de la nueva órbita debe ser igual al de la primera menos este tiempo ya ha recorrido por la nave objetivo, por eso:

$$T_{tr} = T_1 - (t_B - t_p) = 11092.4 - 1218.1 = 9874.25\,s$$

Para hallar el momento específico de esta nueva órbita son necesarios el radio del perigeo que coincide con el de O_1 y él del nuevo apogeo $(r_a)_{tr}$, para lo que es necesario el semieje mayor a_{tr}

$$a_{tr} = \sqrt[3]{\mu\left(\frac{T_{tr}}{2\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{398600.5\left(\frac{9874.25}{2\pi}\right)^2} = 9947.84\,km$$
$$(r_a)_{tr} = 2a_{tr} - r_p = 2\cdot 9947.84 - 7000 = 12895.7\,km$$
$$h_{tr} = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{(r_a)_{tr}\,r_p}{(r_a)_{tr}+r_p}} = \sqrt{2\cdot 398600.5}\sqrt{\frac{12895.7\cdot 7000}{12895.7+7000}} = 60141.7\,km^2/s^2$$

Cálculo de las velocidades y los Δv necesarios

En P la diferencia entre la velocidad requerida para seguir O_{tr} y la que lleva sobre O_1 es

$$\Delta v_1 = \frac{h_{tr}}{r_p} - \frac{h_1}{r_p} = \frac{60141.7}{7000} - \frac{61347.6}{7000} = -0.172\,km/s$$

Esto indica que en P se debe aplicar un impulso $\Delta v = 0.172\,km/s$ en sentido opuesto a la velocidad. Al llegar de nuevo a P hay que aplicar ese mismo impulso pero en el sentido del movimiento, para acelerar de nuevo la nave e igualar la velocidad a la de la nave objetivo, consiguiendo así un acoplamiento suave. Por lo tanto la reserva de maniobra necesaria será

$$\Delta v_T = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 2\cdot 0.172 = 0.344\,km/s$$

b) Si hay una reserva de maniobra limitada, $\Delta v < 0.15\,km/s$, parece claro que no se podrá hacer la maniobra del apartado anterior ya que el consumo necesario para ejecutarla supera la reserva disponible.

Una solución para poder realizarla es reducir menos la velocidad (aplicar un Δv más pequeño) para ajustar la fase en más de una vuelta/órbita. En este caso, hay que ajustar el periodo de O_{tr} según el número de vueltas hasta el ajuste:

$$T_{tr} = T_1 - \frac{(t_B - t_p)}{n_{rev}}$$

Con el nuevo periodo realizamos todos los cálculos de la órbita O_{tr} y de las velocidades. Probando con 2 vueltas se ve que tampoco es posible:

$$T_{tr} = T_1 - \frac{(t_B - t_p)}{2} = 10483.3\,s \to \cdots \to \Delta v_T = 0.163\,km/s$$

Probando con 3 vueltas sí que resulta menor del límite:

$$T_{tr} = T_1 - \frac{(t_B - t_p)}{3} = 10686.3\,s \to \cdots \to \Delta v_T = 0.107\,km/s$$

Ejemplo 3.2 *Un satélite está en una órbita geoestacionaria y se pretende reubicarlo 60^o de longitud más hacia el Oeste (ver figura 3). Calcula el Δv total de la maniobra.*

Solución: La órbita geoestacionaria es circular y su periodo debe ser igual a un día sidéreo, $T_G = 86164\,s$.

$$r_G = \sqrt[3]{\mu \left(\frac{T_G}{2\pi}\right)^2} =$$

$$= \sqrt[3]{398600.5 \left(\frac{86164}{2\pi}\right)^2} = 42164.1\,km$$

$$v_G = \sqrt{\frac{\mu}{r_G}} = \sqrt{\frac{398600.5}{42164.1}} = 3.075\,km/s$$

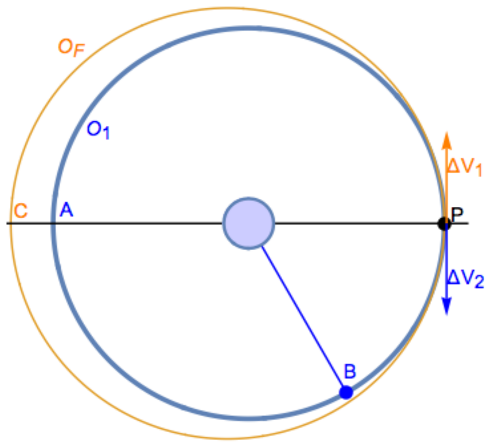

Figura 3: Maniobra de ajuste de fase para retrasar la posición en una órbita

Para la órbita de transferencia O_{tr} hay que expresar el ángulo de separación $\Delta\lambda = -60^o$ como el tiempo que tarda la nave objetivo en recorrerlo. Como es circular $\omega_T = \frac{T_G}{2\pi}$ y

$$(t_p - t_B) = -\frac{T_G}{2\pi} \cdot \Delta\lambda = -\frac{86164}{2\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 14360.6\,s$$

Para recolocarlo en la primera vuelta, el periodo y el semieje mayor de O_{tr} son

$$T_{tr} = T_G + (t_p - t_B) = 86164 + 14360.6 = 100524.6\,s$$

$$a_{tr} = \sqrt[3]{\mu \left(\frac{T_{tr}}{2\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{398600.5 \left(\frac{100524.6}{2\pi}\right)^2} = 46727.7\,km$$

de donde se puede deducir el radio del apogeo y el momento angular

$$(r_a)_{tr} = 2a_{tr} - r_G = 2 \cdot 46727.7 - 42164.1 = 51291.3\,km$$

$$(r_p)_{tr} = r_G = 42164.1\,km$$

$$h_{tr} = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{(r_a)_{tr}\cdot(r_p)_{tr}}{(r_a)_{tr}+(r_p)_{tr}}} = \sqrt{2\cdot 398600.5}\sqrt{\frac{51291.3\cdot 42164.1}{51291.3+42164.1}} = 135824\,km^2/s^2$$

Una vez obtenido h_{tr} se pueden calcular los impulsos

$$\Delta v_1 = \frac{h_{tr}}{(r_p)_{tr}} - v_G = \frac{135824}{42164.1} - 3.075 = 0.146\,km/s$$

Este impulso debe aplicarse en el sentido del movimiento mientras que al volver al punto P se aplicará otro de la misma magnitud pero de sentido contrario. Así la maniobra necesita

$$\Delta v_T = 2\cdot\Delta v_1 = 2\cdot 0.146 = 0.292\,km/s$$

4 Oportunidad de Rendezvous con transferencias de Hohmann

Las maniobras de ajuste de fase mediante transferencias de Hohmann completas (alargando o reduciendo el periodo) son posibles, pero en el caso de viajes interplanetarios los periodos de las órbitas heliocéntricas son tan largos que no son realmente útiles sobre todo en misiones tripuladas.

Otra forma de sincronizar la llegada al objetivo es determinar el ángulo que deben formar los dos cuerpos en el momento de iniciar la transferencia y, tras esperar que se alcance esa situación, realizar una transferencia de Hohmann para que ambos lleguen simultáneamente al destino. En este caso la nave solo recorrerá media órbita de transferencia de Hohmann invirtiendo para ello menos tiempo que en una maniobra de fase aunque habrá que sumar el tiempo de espera hasta que ambos objetos estén en el ángulo de fase adecuado.

Los impulsos necesarios para hacer el rendezvous son los de una transferencia de Hohmann:

$$\Delta v_1 = \frac{h_H}{r_1} - \frac{h_1}{r_1}$$
$$\Delta v_2 = \frac{h_2}{r_2} - \frac{h_H}{r_2}$$

siendo O_1, O_H y O_2 las órbitas inicial, de transferencia y final, respectivamente.
Para estudiar un caso simplificado consideremos que el objeto 1 y el objeto 2 recorren órbitas circulares alrededor de un cuerpo tal y como se muestra en la figura 4.

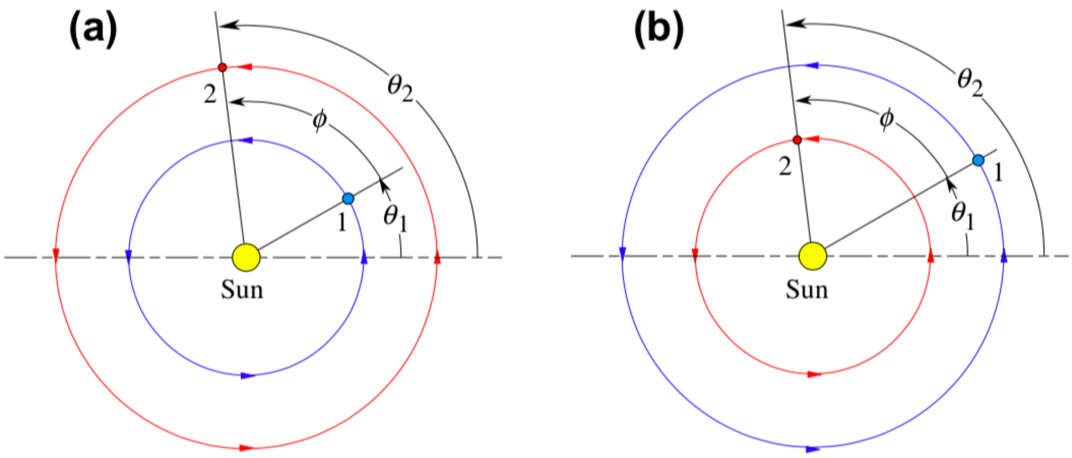

Figura 4: Objetos en órbitas circulares concéntricas, objeto de partida (1) y objeto de llegada (2): a) Objetivo exterior al de salida. b) Objetivo interior el de salida

Como las órbitas son circulares podemos considerar como línea de ápsides la línea horizontal y considerarla origen de las anomalías verdaderas θ. De esta forma, si consideramos θ_{1_0} y θ_{2_0} las anomalías verdaderas de los objetos 1 y 2 en el instante $t = 0$ y n_1 y n_2 los movimientos medios (velocidades angulares), las anomalías en cualquier instante vendrán dadas por:

$$\theta_1 = \theta_{1_0} + n_1 t$$
$$\theta_2 = \theta_{2_0} + n_2 t$$

Se define como **ángulo de fase**, ϕ, a la posición angular del objeto 2 respecto del 1

$$\phi = \theta_2 - \theta_1$$

Agrupando las tres igualdades anteriores resulta

$$\phi(t) = \phi_0 + (n_2 - n_1)\, t \tag{3}$$

donde ϕ_0 es el ángulo de fase cuando $t = 0$ y $n_2 - n_1$ es la velocidad angular del objeto 2 respecto al 1.
Si la órbita de O_1 es interior a la del O_2 (figura 4a)

$$n_1 > n_2 \rightarrow n_2 - n_1 < 0 \rightarrow \text{Objeto 2 se mueve en sentido horario respecto a 1}$$

Si es el objeto 1 el que es exterior (figura 4b), entonces

$$n_2 > n_1 \rightarrow n_2 - n_1 > 0 \rightarrow \text{Objeto 2 se mueve en sentido antihorario respecto al 1}$$

4.1 Periodo sinódico

La función del ángulo de fase $\phi(t)$ es lineal y periódica ya que el vector posición de objeto 2 gira alrededor del objeto 1. El tiempo requerido para que el ángulo de fase se repita se conoce cono **Periodo sinódico**[2] y se denota por T_{syn}.

Para el caso de figura 4a el ángulo se va reduciendo y por tanto T_{syn} es el tiempo necesario para que $\phi(t)$ cambie de ϕ_0 a $\phi_0 - 2\pi$:

$$\phi_0 - 2\pi = \phi_0 + (n_2 - n_1)\, T_{syn} \quad \rightarrow \quad T_{syn} \overset{(n_1 > n_2)}{=} \frac{2\pi}{n_1 - n_2} \quad \rightarrow \quad T_{syn} \overset{(n = \frac{2\pi}{T})}{=} \frac{T_1\, T_2}{T_2 - T_1}$$

En la situación figura 4b el ángulo aumenta y por tanto T_{syn} es el periodo para que $\phi(t)$ pase de ϕ_0 a $\phi_0 + 2\pi$, así:

$$\phi_0 + 2\pi = \phi_0 + (n_2 - n_1)\, T_{syn} \quad \rightarrow \quad \ldots \quad \rightarrow \quad T_{syn} = \frac{T_1\, T_2}{T_1 - T_2}$$

lo que permite dar una expresión válida para los dos casos

$$\boxed{T_{syn} = \frac{T_1\, T_2}{|T_1 - T_2|}} \tag{4}$$

Ejemplo 4.1 *Calcula los periodos sinódicos de Marte y Venus respecto de la Tierra suponiendo que las órbitas son circulares y que sus radios orbitales son* $r_V = 108.2 \cdot 10^6\, km$, $r_T = 149.6 \cdot 10^6\, km$ *y* $r_M = 227.9 \cdot 10^6\, km$ *y que el parámetro gravitacional del Sol es* $\mu_S = 132.71 \cdot 10^9\, km^3/s^2$

[2] T_{syn} es el periodo de la órbita relativa del cuerpo 2 respecto al 1

Solución: Como el periodo orbital es $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu_S}}$ los periodos de Venus, Tierra y Marte son:

$$T_V = 224.675\,\text{días} \qquad T_T = 365.268\,\text{días} \qquad T_M = 686.8\,\text{días}$$

Aplicando (4) se tiene:

$$T_{syn}^{VT} = \frac{T_V\,T_T}{|T_V - T_T|} = \frac{224.675\;365.268}{|224.675 - 365.268|} = 583.72\,\text{días}$$
$$T_{syn}^{TM} = \frac{T_T\,T_M}{|T_T - T_M|} = \frac{365.268\;686.8}{|365.268 - 686.8|} = 780.22\,\text{días}$$

También se puede calcular el periodo sinódico de Marte respecto de Venus

$$T_{syn}^{VM} = \frac{T_V\,T_M}{|T_V - T_M|} = \frac{224.675\;686.8}{|224.675 - 686.8|} = 333.91\text{días}$$

4.2 Tiempo de espera para rendezvous

Para hacer la aproximación mediante una transferencia de Hohmann desde un objeto P_1 a otro P_2, estando ambos en órbitas circulares concéntricas de radios r_1 y r_2 respectivamente, será necesario esperar hasta que los dos objetos estén en la fase adecuada, llamado **ángulo de fase de salida** ϕ_H (ver figura 5).
El tiempo de vuelo de la transferencia, t_{12}, es medio periodo de la órbita de transferencia:

$$T_H = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^3}{\mu}} \quad\rightarrow$$
$$\boxed{t_{12}} = \frac{T_H}{2} = \boxed{\pi\sqrt{\frac{(r_1+r_2)^3}{8\mu}}} \qquad (5)$$

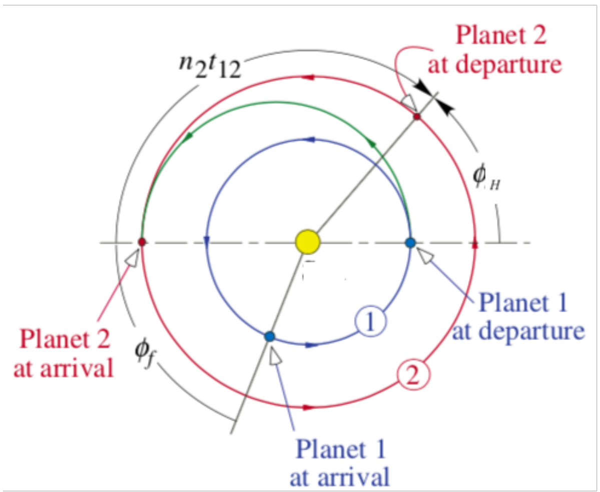

Figura 5: Maniobra de rendezvous desde una nave (1) en órbita interior hasta otro (2) en órbita exterior

La fase adecuada para que la maniobra se realice correctamente, ϕ_H, será según la figura 5

$$\phi_H + n_2 t_{12} = \pi \quad\rightarrow\quad \boxed{\phi_H = \pi - n_2 t_{12}} \qquad (6)$$

El tiempo necesario para que la fase sea exactamente ϕ_H se llama **tiempo de espera** y se denota por t_w. Es el tiempo que debe transcurrir para que la fase ϕ se reduzca desde la fase actual ϕ_0, hasta la idónea ϕ_H, por lo que aplicando (3) se tiene:

Si la fase inicial es mayor que la buscada ($\phi_0 > \phi_H$):

$$\phi_H = \phi_0 + (n_2 - n_1)t_w \quad\rightarrow\quad \boxed{t_w = \frac{\phi_H - \phi_0}{n_2 - n_1}}$$

En el caso que la fase inicial ya sea menor que la deseada ($\phi_0 < \phi_H$) habrá que sumar un periodo sinódico:

$$\phi_H = \phi_0 + (n_2 - n_1)t_w + 2\pi \quad\rightarrow\quad \boxed{t_w = \frac{\phi_H - \phi_0 - 2\pi}{n_2 - n_1}} = \frac{\phi_H - \phi_0}{n_2 - n_1} + T_{syn}$$

que se puede presentar en una sola expresión:

$$t_w = \begin{cases} \dfrac{\phi_H - \phi_0}{n_2 - n_1} & \text{si} \quad \phi_0 > \phi_H \\ \\ \dfrac{\phi_H - \phi_0}{n_2 - n_1} + T_{syn} & \text{si} \quad \phi_0 < \phi_H \end{cases} \tag{7}$$

Ejemplo 4.2 *El 1 de mayo de 2020 el ángulo entre los radiovectores de la Tierra y de Marte desde el Sol era de* $\phi_0 = 183^o$*. Suponiendo ambas órbitas circulares con los radios orbitales del ejemplo anterior, calcula el tiempo de espera necesario para hacer un rendezvous por transferencia de Hohmann y el tiempo de vuelo de la transferencia.*

Solución: El tiempo de vuelo desde la Tierra a Marte se obtiene con la expresión (5)

$$\boxed{t_{12}} = \pi\sqrt{\frac{(r_T + r_M)^3}{8\mu_S}} = \pi\sqrt{\frac{(149.6 \cdot 10^6 + 227.9 \cdot 10^6)^3}{8 \cdot 132.71 \cdot 10^9}} = 2.236 \cdot 10^7\, s = \boxed{258.83\,\text{días}}$$

El movimiento medio (velocidad angular) de los dos planetas se calcula con la expresión

$$n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu_S}}} = \sqrt{\frac{\mu_S}{r^3}} \quad \rightarrow$$

$$n_T = \sqrt{\frac{\mu_S}{r_T}} = \sqrt{\frac{132.71 \cdot 10^6}{149.6 \cdot 10^6}} = 1.99 \cdot 10^{-7}\, rad/s = 0.0172016\, rad/\text{día}$$

$$n_M = \sqrt{\frac{\mu_S}{r_M}} = \sqrt{\frac{132.71 \cdot 10^6}{227.9 \cdot 10^6}} = 1.05885 \cdot 10^{-7}\, rad/s = 0.00914848\, rad/\text{día}$$

El ángulo de fase a la salida, ϕ_H, se determina con la expresión (6)

$$\phi_H = \pi - n_M t_{12} \quad \rightarrow \quad \phi_H = \pi - 1.05885 \cdot 10^{-7} \cdot 2.236 \cdot 10^7 = 0.77369\, rad = 44.33^o$$

Entonces como $\phi_0 = 183^o = 3.19395\, rad > 0.77369\, rad = 44.33^o = \phi_H$ el tiempo de espera se obtiene con (7)

$$\boxed{t_w} = \frac{\phi_H - \phi_0}{n_M - n_T} = \frac{0.77369 - 3.19395}{1.05885 \cdot 10^{-7} - 1.99 \cdot 10^{-7}} = 2.59665 \cdot 10^7\, s = \boxed{300.54\,\text{días}}$$

En consecuencia el tiempo necesario para alcanzar Marte desde el 1 de mayo de 2020 es:

$$t_{Tot} = t_w + t_{12} = 300.54 + 258.83 = 559.37\,\text{días}$$

En el caso de que $\phi_0 < \phi_H$ el tiempo de espera obtenido con la expresión (7) sería negativo por lo que habrá que sumar un periodo sinódico, T_{syn}, o bien aplicar la segunda parte de la fórmula (7).

Por ejemplo, si el ángulo entre la Tierra y Marte fuese $\phi_0 = 30^o$ el resultado sería

$$t_w = \frac{\phi_H - \phi_0}{n_M - n_T} = \frac{0.77369 - 0.5236}{(1.05885 - 1.99) \cdot 10^{-7}} = -2.6832 \cdot 10^6\, s = -31.055\,\text{días}$$

$$\downarrow$$

$$t_w = t_w + T_{syn}^{TM} = -31.055 + 780.22 = 749.165\,\text{días}$$

4.2.1 Caso de rendezvous desde una órbita exterior

Cuando el objeto activo P_1 está en la órbita exterior el tiempo de espera se calcula de forma similar. Según la figura 6 hay dos posibilidades, considerar que la fase ϕ es negativa porque se mide en sentido contrario al movimiento o considerar los ángulos de fase positivos.
Si se toma que el ángulo de fase debe ser negativo se tiene, viendo la figura, que la fase adecuada para la salida es

$$\phi_H + n_2 t_{12} = \pi \quad \rightarrow \quad \phi_H = \pi - n_2 t_{12}$$

que coincide con el caso del vehículo activo en órbita interior, (6).

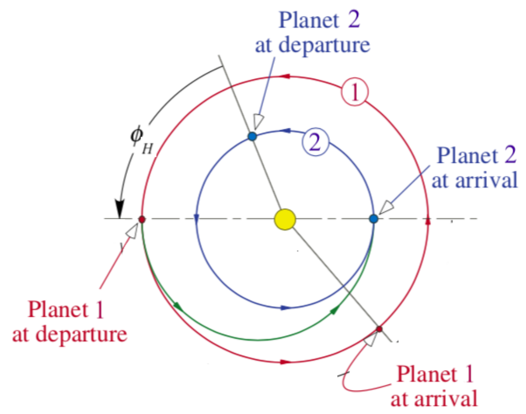

Figura 6: Maniobra de rendezvous donde el vehículo Activo (1) está en una órbita exterior a la del objeto (2)

Además la función del ángulo de fase, (3), será la misma pero negativa y creciente ya que $n_2 - n_1 > 0$. De este modo si la fase en un instante es $\phi_0 < 0$ habrá dos posibildades para hallar el tiempo de espera

$$t_w = \begin{cases} \dfrac{\phi_H - \phi_0}{n_2 - n_1} & \text{si} \quad |\phi_0| > |\phi_H| \quad (\phi_0 < \phi_H) \\ \\ \dfrac{\phi_H - \phi_0}{n_2 - n_1} + T_{syn} & \text{si} \quad |\phi_0| < |\phi_H| \quad (\phi_0 > \phi_H) \end{cases}$$

Se puede comprobar que esta expresión coincide con (7) pero midiendo las fases en sentido contrario.

Ejemplo 4.3 *El mismo 1 de mayo de 2020 del ejemplo anterior el ángulo entre los radiovectores de Venus y de la Tierra era de $\phi_0 = 50.9^o$. Considerando órbitas circulares calcula el tiempo de espera necesario para hacer un rendezvous por transferencia de Hohmann desde la Tierra a Venus.*

Solución: El tiempo de vuelo desde la Tierra a Venus se calcula mediante (5)

$$\boxed{t_{12}} = \pi\sqrt{\frac{(r_T + r_V)^3}{8\mu_S}} = \pi\sqrt{\frac{(149.6 \cdot 10^6 + 108.2 \cdot 10^6)^3}{8 \cdot 132.71 \cdot 10^9}} = 1.262 \cdot 10^7\, s = \boxed{146.071 \text{ días}}$$

El movimiento medio de la Tierra se conoce del ejemplo anterior mientras que el de Venus se puede calcular

$$n_T = 1.99 \cdot 10^{-7}\, rad/s = 0.0172016\, rad/\text{día}$$

$$n_V = \sqrt{\frac{\mu_S}{r_V}} = \sqrt{\frac{132.71 \cdot 10^6}{108.2 \cdot 10^6}} = 3.23676 \cdot 10^{-7}\, rad/s = 0.0279656\, rad/\text{día}$$

El ángulo de fase a la salida, ϕ_H, se determina con la expresión (6)

$$\phi_H = \pi - n_V t_{12} \rightarrow \phi_H = \pi - 3.23676 \cdot 10^{-7} \cdot 1.262 \cdot 10^7 = -0.943373\, rad = -54.051^o$$

El ángulo entre la Tierra y Venus es el opuesto de la fase entre Venus y la Tierra: $\phi_0 = -50.9^o$ y se puede calcular el tiempo de espera. En este caso $|\phi_0| = 50.9 < 54.051 = |\phi_H|$ y por tanto:

$$t_w = \frac{\phi_H - \phi_0}{n_2 - n_1} + T_{syn}^{TV} = \frac{-0.943373 + 50.9}{(3.23676 - 1.99) \cdot 10^{-7}} + 5.043 \cdot 10^7 = 4.9992 \cdot 10^7 \, s = 578.61 \, \text{días}$$

Al igual que en el ejemplo anterior hay otro caso, $|\phi_0| > |\phi_H|$. En este caso el tiempo de espera se calcula solo con la fracción , que da un valor positivo, sin tener que sumar un periodo sinódico.

Por ejemplo, si el ángulo entre la Tierra y Venus fuese $\phi_0 = -60^\circ = 1.0472 \, rad$ el resultado sería

$$t_w = \frac{\phi_H - \phi_0}{n_V - n_T} = \frac{-0.943373 + 1.0472}{(3.23676 - 1.99) \cdot 10^{-7}} = 833374 \, s = 9.6455 \, \text{días}$$

5 Cierre

En este artículo se ha definido y calculado una primera aproximación para la realización de aproximaciones entre dos objetos que orbitan alrededor de un mismo cuerpo. Se han presentado los casos en el que ambos cuerpos están sobre la misma órbita y los que están sobre diferentes. Solo se han mostrado rendezvous realizados mediante transferencias de Hohmann simples o con órbita de transferencia completa.

Para calcular las oportunidades de aproximación a un objetivo se ha definido el periodo sinódico entre dos cuerpos en órbitas concéntricas. También ha sido necesario detallar la forma de obtener el tiempo de espera que se requiere para iniciar una transferencia de Hohmann para sincronizar su llegada con el objetivo.

Estos contenidos han sido apoyados con ejemplos que muestran su aplicación a posibles situaciones reales.

Referencias

[1] Curtis, Howard D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.

[2] Bate, Roger R. et al.,*Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.

[3] Brown, Charles D.,*Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.

[4] Prussing, John E. and Conway, Bruce A.,*Orbital Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1993.

[5] Chobotov, Vladimir A.,*Orbital Mechanics Third Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 2002.