



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Estudio numérico del comportamiento resistente del tejido óseo en la micro escala, en función de la porosidad y densidad mineral ósea. Propuesta de un nuevo modelo matemático.

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Mecánica

AUTOR/A: Pérez Muñoz, Francesc

Tutor/a: Vercher Martínez, Ana

Cotutor/a: Megías Díaz, Raquel

CURSO ACADÉMICO: 2021/2022



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



## TRABAJO FINAL DE GRADO

---

Estudio numérico del comportamiento resistente del tejido óseo en la microescala, en función de la porosidad y densidad mineral ósea. Propuesta de un nuevo modelo matemático

---

*Autor*

**Francesc Pérez Muñoz**

*Tutoras*

**Ana Vercher Martínez**

**Raquel Megías Díaz**

Grado en Ingeniería Mecánica  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño  
Universitat Politècnica de València

Valencia – Junio 2022



## **Agradecimientos**

*Ante todo, me gustaría agradecer a mi tutora, la Dra. Ana Vercher Martínez, por la disposición y dedicación mostrada en el correcto desarrollo del presente Trabajo Fin de Grado. Gracias por suscitar mi interés en esta rama de la biomecánica y en la iniciación a la investigación, espero que los resultados obtenidos sean lo suficientemente convincentes a fin de ser útiles para posteriores estudios.*

*Gracias a mi familia, a mis padres, a mis abuelas y a mi novia por el cariño y apoyo que siempre me habéis demostrado, además de los esfuerzos realizados a fin de rogar por mis propios intereses, lo cual ha contribuido a ser la persona que soy actualmente y que ha permitido que cierre esta etapa de mi vida. Gracias por todo.*

*Pero en especial, quiero mencionar a mis abuelos. Francisco, al que considero mi referente, este trabajo va dedicado a ti, por estar siempre a mi lado durante el transcurso de mi vida, por preocuparte en la forma en que lo has hecho de mi desde bien pequeñito y acompañarme durante toda mi vida, espero que te sientas orgulloso de tu nieto del mismo modo que yo lo estoy de ti, siempre estaré a tu lado, no lo dudes. Y a ti Pedro, espero que desde allí donde estés hayas podido observar mi desarrollo como persona y sientas orgullo de tu nieto y de la abuela, quién desde tu ausencia ha llevado todo adelante sin ningún tipo de queja, siempre te recordaremos.*



## *Resumen*

La capacidad resistente del hueso humano está vinculada directamente a su principal constituyente, el tejido lamelar óseo. Este tejido conformado por fibras de colágeno, mineral en forma de cristales de hidroxapatita y agua, dota al órgano de las propiedades mecánicas suficientes a fin de soportar los esfuerzos a los que se ve sometido el hueso.

Muchos son los aspectos que influyen positiva o negativamente en la capacidad resistente del tejido. No obstante, en base a la literatura, los factores determinantes de la resistencia ósea son la densidad mineral ósea y la porosidad presente en el tejido, los cuales quedan establecidos como variables de estudio del presente trabajo. Respecto a la última, este estudio alude a la microporosidad a nivel de tejido en las proporciones naturales. Esta porosidad tisular resulta mayoritariamente de las lagunas en que residen los osteocitos, pudiendo ser representadas en forma de elipsoide con la orientación y las dimensiones previamente establecidas en la literatura.

Considerando el tejido lamelar como un material compuesto en base a su estructura y composición, a lo largo de este Trabajo de Fin de Grado se ha abordado la estimación de los límites resistentes del material sometido a tracción en función del contenido mineral y de la porosidad natural mediante análisis numérico. A tal efecto, se ha hecho uso de un modelo cuyas propiedades resistentes, definidas en la literatura, quedan homogenizadas de modo que los constituyentes a un nivel de profundidad mayor son discriminados.

Se ha analizado la influencia de la densidad mineral ósea y la porosidad tisular en los límites resistentes, tanto en la dirección longitudinal como transversal, mediante el método de los elementos finitos. Su efecto es totalmente opuesto. El contenido mineral favorece la capacidad resistente del tejido, relación apreciable significativamente en la dirección longitudinal del material. En cambio, el incremento de la porosidad conduce a una disminución de la resistencia, lo cual resulta de los concentradores de tensión inducidos por los elipsoides.

Asimismo, a partir de los resultados del modelado numérico, se ha propuesto un modelo matemático para obtener los límites resistentes a tracción en las direcciones longitudinal y transversal en función de la densidad mineral y la porosidad presente en el tejido.

Este Trabajo de Fin de Grado reúne diversos conocimientos necesarios a fin de modelar el comportamiento mecánico del tejido lamelar óseo adquiridos a lo largo del Grado de Ingeniería Mecánica, vinculados fundamentalmente a la elasticidad y resistencia de los materiales, cálculo computacional mediante elementos finitos y materiales compuestos.

## ***Palabras clave***

Límites resistentes, Porosidad, Método de los Elementos Finitos, Tejido óseo, Concentrador de tensiones, Comportamiento mecánico, Densidad mineral ósea.



## *Abstract*

The strength of human bone is directly linked to its main constituent, the lamellar bone tissue. This tissue, made up of collagen fibres, mineral in the form of hydroxyapatite crystals and water, provides sufficient mechanical properties to withstand the stresses to which the bone is subjected.

There are many aspects that affects positively or negatively on the resistance capacity of the bone tissue. However, based on the literature, the determining factors of bone resistance are bone mineral density and porosity contained in the tissue, which are established as study variables in the present work. Regarding the latter, this study refers to microporosity at the tissue level in natural proportions. This tissue porosity results mainly from the lacunae in which the osteocytes reside, which can be represented in the form of an ellipsoid with the orientations and dimensions previously established in the literature.

Considering the lamellar tissue as a composite material based on its structure and composition, during this Bachelor's Thesis the study of tensile strength limits of the material subjected to tensile stress as a function of mineral content and natural porosity has been carried out by means of numerical analysis. For this purpose, a model has been used whose resistant properties, defined in the literature, are homogenized in such a way that the constituents at a higher depth level are discriminated.

Thus, the influence of mineral density and natural porosity of bone tissue on the strength limits, both longitudinal and transverse directions, has been analysed by means of the finite element method. Their effect is completely opposite. The mineral content advantage the strength capacity, a significant relationship can be appreciated in the longitudinal direction of the material. On the other hand, the increase in porosity leads to a decrease in strength, which results from the stress concentrators induced by the ellipsoids.

Furthermore, from the results of the numerical modelling, a mathematical model has been estimated to obtain the tensile strength limits in the longitudinal and transverse directions as a function of mineral density and porosity of bone tissue.

This Bachelor's Thesis brings together different knowledge necessary to model the biomechanical behaviour of lamellar bone tissue acquired throughout the Mechanical Engineering Degree, mainly related to elasticity and strength of materials, computational calculation using finite elements and composite materials.

## **Keywords**

Strength Limits, Porosity, Finite Element Method, Lamellar Tissue, Stress concentrator, Mechanical behaviour, Bone mineral density.

## Contenido general

<b>Documento 1</b> Memoria.....	1
<b>Documento 2</b> Pliego de condiciones .....	62
<b>Documento 3</b> Presupuesto .....	69

# Documento 1

Memoria

# Índice

1. Objeto.....	3
2. Antecedentes .....	4
2.1. El hueso .....	4
2.2. Factores determinantes de la resistencia ósea.....	9
3. Conocimientos teóricos.....	11
3.1. Ley de Hooke Generalizada.....	11
3.2. Tipos de materiales .....	12
3.3. Efecto del concentrador de tensiones. ....	15
3.4. Método de los Elementos Finitos.....	16
3.5. Fallo estático .....	18
4. Análisis de convergencia. Estimación del tamaño de elemento.....	19
4.1. Introducción .....	19
4.2. Modelo geométrico.....	21
4.3. Procedimiento de análisis .....	24
4.4. Resultados del estudio de convergencia.....	28
4.5. Conclusiones.....	33
5. Estudio numérico del comportamiento del tejido óseo en la micro escala.....	34
5.1. Modelo geométrico.....	34
5.2. Propiedades del material: tejido lamelar no poroso .....	36
5.3. Mallado.....	38
5.4. Condiciones de carga .....	39
5.5. Procedimiento de análisis .....	40
6. Resultados. Propuesta de un modelo matemático.....	45
6.1. Límites resistentes tejido no poroso .....	45
6.2. Límites resistentes tejido poroso .....	49
6.3. Ecuaciones de los límites resistentes a tracción .....	53
7. Conclusiones.....	58
8. Futuros trabajos .....	59

# 1. Objeto

En la actualidad, la biomecánica se presenta como una ciencia de enorme interés por parte de especialistas de ámbitos diversos, cuya finalidad es el estudio de los aspectos mecánicos que conforman los sistemas biológicos y, principalmente, los seres humanos. Por ello, los modelos empleados en este campo de la biofísica permiten realizar predicciones sobre el comportamiento del cuerpo humano como consecuencia de diversas acciones físicas. En este contexto, la estructura ósea constituye el soporte mecánico del cuerpo, capaz de soportar cargas y transmitir esfuerzos y movimientos.

El presente Trabajo de Fin de Grado pretende profundizar en el comportamiento mecánico del tejido lamelar de los órganos rígidos que componen el esqueleto, los huesos. El nivel de profundidad de estudio permite eludir cualquier clasificación en relación a la morfología ósea.

El estudio a realizar tiene como objetivo analizar los límites resistentes a tracción del tejido óseo lamelar en función de dos parámetros fundamentales de la morfología del mismo: la porosidad y la densidad mineral ósea (BMD). Es bien sabido que ambas variables condicionan el comportamiento estructural en cuanto a su competencia mecánica, tanto desde el punto de vista de rigidez como de resistencia. A tal efecto, se realizarán modelos numéricos de un volumen representativo de tejido lamelar óseo mediante el software Ansys APDL.

Como punto de partida, el comportamiento del tejido queda descrito mediante las ecuaciones de las propiedades elásticas en función de la densidad mineral ósea extraídas de la literatura [1], así como la tensión a tracción de rotura para un tejido óseo sano [2]. Posteriormente, se implementarán los modelos tridimensionales del tejido óseo mediante los programas MATLAB y Ansys APDL, haciendo uso de las rutinas desarrolladas en este trabajo, y se realizará un análisis de convergencia para obtener resultados suficientemente precisos.

Una vez obtenidos los modelos representativos, se inferirán los límites resistentes para el tejido sano no poroso y BMD dada, a fin de obtener posteriormente los límites resistentes para diversos grados de porosidad y nuevos valores de BMD. Finalmente, se propondrán ecuaciones para la estimación de los límites resistentes en función del grado de porosidad tisular y BMD.

## 2. Antecedentes

### 2.1. El hueso

El hueso es un órgano-tejido vivo cuyo conjunto conforma el sistema óseo o esqueleto, cuya función principal es proporcionar forma y soporte al cuerpo, además de proteger algunos órganos. Asimismo, el hueso alberga la médula espinal, encargada del desarrollo y almacenamiento de células madre, y desempeña funciones de almacenamiento de minerales (principalmente, calcio) [3]. No obstante, el estudio llevado a cabo centra su atención en la primera y principal finalidad de este tipo de órgano, ligada al aspecto resistente de los constituyentes que lo conforman.

Como material estructural, el hueso presenta una combinación óptima de propiedades para satisfacer los esfuerzos mecánicos: alta resistencia y rigidez, tenacidad a la fractura y un peso ligero. Estas propiedades mecánicas son el resultado de la combinación de la composición química, la estructura jerárquica y el proceso de remodelación ósea que presenta el tejido. El correcto funcionamiento de este último es fundamental de cara a satisfacer los esfuerzos mecánicos.

Prestando atención a su forma y apariencia, la tipología de huesos es bien diversa, siendo su clasificación la siguiente: huesos largos, huesos cortos, huesos planos, huesos irregulares, huesos sesamoideos y huesos supernumerarios [4]. No obstante, debido a la escala de estudio del presente proyecto, la tipología del hueso no influye en los resultados obtenidos.

#### 2.1.1. Composición química

El principal tejido que conforman los huesos es el tejido óseo, si bien lo constituyen en menor medida otros tejidos como el cartilaginoso, el adiposo y el hematopoyético, además de los vasos sanguíneos y los nervios [5]. El proyecto se enfoca en el estudio del tejido óseo debido a que la capacidad del hueso para llevar a cabo su función esquelética se debe a este tejido.

El tejido óseo es un tejido conjuntivo lamelar caracterizado por presentar una matriz extracelular mineralizada, cuyo resultado es un tejido muy duro capaz de proporcionar sostén y protección. Este tejido biológico se considera un material compuesto formado por una fracción orgánica (32-44% del volumen del hueso), una fracción inorgánica (33-43% del volumen del hueso) y agua (15-25% del volumen del hueso) [6]. A nivel nanoestructural, el tejido conjuntivo presenta una disposición característica en la cual se pueden distinguir las fibras, la sustancia fundamental y el agua.

Las fibras constituyen la fracción orgánica de la matriz ósea. A su vez, esta fracción orgánica está formada en un 90% de colágeno tipo I junto con otras proteínas no colágenas que representan el 10% restante de la fracción orgánica [5], [7]. La sustancia fundamental se atribuye al mineral constituyente del tejido, el fosfato de calcio en forma de cristales de hidroxiapatita  $[\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2]$ , representando la fracción inorgánica de la matriz ósea. El contenido en volumen de este mineral representa la densidad mineral ósea (*Bone Mineral Density, BMD*), parámetro de estudio en el proyecto debido a su influencia en la resistencia ósea. Este último parámetro se mide en  $\text{g}/\text{cm}^3$ .

Atendiendo a los constituyentes que lo forman, el hueso es un material compuesto cuyos componentes presentan gran diversidad desde un punto de vista mecánico. Así, las moléculas

de colágeno son dúctiles, mientras que los cristales correspondientes al mineral son rígidos y resistentes pero frágiles [8].

### 2.1.2. Estructura jerárquica

Desde un punto de vista estructural, el hueso presenta un conjunto de materiales estructurados jerárquicamente, cuya importancia en las características biomecánicas del mismo es fundamental. De ahí la necesidad de comprender la estructura jerárquica para poder llevar a cabo el análisis resistente del órgano. La literatura define cinco niveles de organización jerárquica en el hueso [9], los cuales se describen a continuación:

#### - *Macroescala (10 mm - cm)*

Esta escala permite representar el hueso íntegramente en todas sus dimensiones, lo cual permite definir las características del hueso en su conjunto, así como diferenciar a éstos por sus características de forma, tamaño y geometría. De hecho, en la literatura se hayan ciertos estudios relacionados con el comportamiento mecánico a este nivel de escala, tratando de simplificar el conjunto de materiales que componen el hueso como una única estructura tubular. Por tanto, estos estudios presentan una pérdida de información debido a nivel microestructural.

Este nivel de estudio del hueso permite ubicar de forma genérica dos subtipos tisulares óseos que presentan una estructura y comportamiento biomecánico totalmente diferente: el hueso cortical y el trabecular [9].

El hueso cortical forma la superficie ósea externa. Esta estructura es el principal constituyente de la diáfisis de los huesos largos. En el caso del hueso trabecular, este se encuentra principalmente en el interior del hueso. Esta última tipología representa el principal constituyente de la epífisis de los huesos largos.

La geometría, tal y como se explica posteriormente, de ambos subtipos tisulares es totalmente diferente, lo cual influye en las propiedades mecánicas proporcionadas. Con tal de simplificar el estudio, atribuir el comportamiento desde un punto de vista macroestructural asumiendo como iguales mecánicamente estos dos subtipos tisulares es un error.

#### - *Mesoescala (500 $\mu$ m – 10 mm)*

Este nivel de escala permite representar los subtipos tisulares óseos comentados anteriormente: el hueso cortical y el trabecular.

El hueso cortical presenta una estructura lamelar densa y compacta, la cual aporta rigidez y resistencia a la unidad ósea. En cambio, el hueso trabecular presenta una malla de aspecto esponjosa formada por delgadas espículas (trabéculas) de tejido óseo. Esta última tipología de estructura aporta cierta elasticidad a la unidad ósea debido al comportamiento presentado por las trabéculas, el cual se asemeja a un conjunto de muelles capaces de deformarse almacenando energía. Los espacios dentro de esta malla están comunicados y contienen la médula, los vasos sanguíneos y los nervios.

#### - *Microescala (10 – 500 $\mu$ m)*

Disminuyendo la escala con tal de profundizar en los constituyentes de los subtipos tisulares óseos, se encuentra la unidad estructural básica del hueso: osteona o sistema de Havers. Estas unidades forman una estructura cilíndrica orientada con el eje mayor del hueso, consistiendo en laminas concéntricas de matriz ósea alrededor de un conducto central, el conducto de

Havers, que contiene el suministro vascular y nervioso de la osteona [5]. A este nivel también se aprecian los conductos de Volkmann, los cuales contienen vasos sanguíneos y nervios uniendo conductos de Havers entre sí. Las osteonas presentan varios milímetros de largo y 200-300  $\mu\text{m}$  de diámetro [10].

En el hueso cortical, las estructuras lamelares contienen una única osteona y una lamela intersticial correspondiente a restos de láminas concéntricas antiguas que ocupan espacios entre osteonas. Así, se obtiene una capa densa y compacta. Respecto al hueso trabecular, a diferencia del cortical, las agrupaciones de osteonas dan lugar a trabéculas conformando una malla de aspecto esponjoso. A partir de este nivel de profundidad ambos subtipos tisulares presentan características estructurales similares.

- *Sub-microescala (1 – 10  $\mu\text{m}$ )*

Este nivel de profundidad representa la escala de una única lamela que conforma la osteona. Las lamelas están formadas por fibras mineralizadas de colágeno orientadas preferentemente en una dirección, con un espesor entre 3-7  $\mu\text{m}$  [11]. Según la orientación de las fibras en las sucesivas lamelas, la literatura distingue principalmente tres tipos de osteona: fibras orientadas principalmente en la dirección transversal, fibras orientadas principalmente en la dirección longitudinal y fibras orientadas alternamente formando un 90° entre las sucesivas lamelas [12]. Esta orientación depende del emplazamiento de las lamelas en que se encuentren embebidas y, por tanto, de los esfuerzos mecánicos a los que están expuestas.

A esta escala se observan las lagunas en las que residen los osteocitos, células implicadas en el proceso de remodelación ósea que constituyen el 95% de la matriz ósea [13]. Estas lagunas presentan un aspecto elipsoidal y se encuentran rodeadas de una serie de prolongaciones, llamadas canalículos, fundamentales en este proceso de remodelación.

- *Nanoescala (500 nm – 1  $\mu\text{m}$ )*

Este nivel describe la composición y arquitectura de la red molecular ósea. Cada lamela está formada por un conjunto de fibras de colágeno tipo I mineralizadas mediante cristales de hidroxiapatita. La orientación que presente cada lamela depende esencialmente de la orientación de las fibras que conforman dicha lamela, siendo necesario de técnicas de microscopía con luz polarizada para averiguar la tipología de orientaciones entre sucesivas lamelas comentadas en la sub-microescala [7].

- *Sub-nanoescala (< 1  $\mu\text{m}$ )*

Esta escala de estudio describe la composición y arquitectura de la red molecular ósea. Las fibras de colágeno tipo I presentan forma cilíndrica con un diámetro de 100-200 nm [6] y una longitud máxima de 100  $\mu\text{m}$  [14], presentando cierta ondulación cuando no reciben esfuerzos. Estas se encuentran unidas longitudinalmente mediante los cristales de HA, así como moléculas proteicas que conforman enlaces cruzados entre las fibras.

El presente estudio pretende estudiar los límites resistentes de la celda unidad de tejido lamelar óseo a nivel microestructural. Para ello, posteriormente se determina la orientación de las sucesivas lamelas analizadas de acuerdo con los datos proporcionados por la literatura.

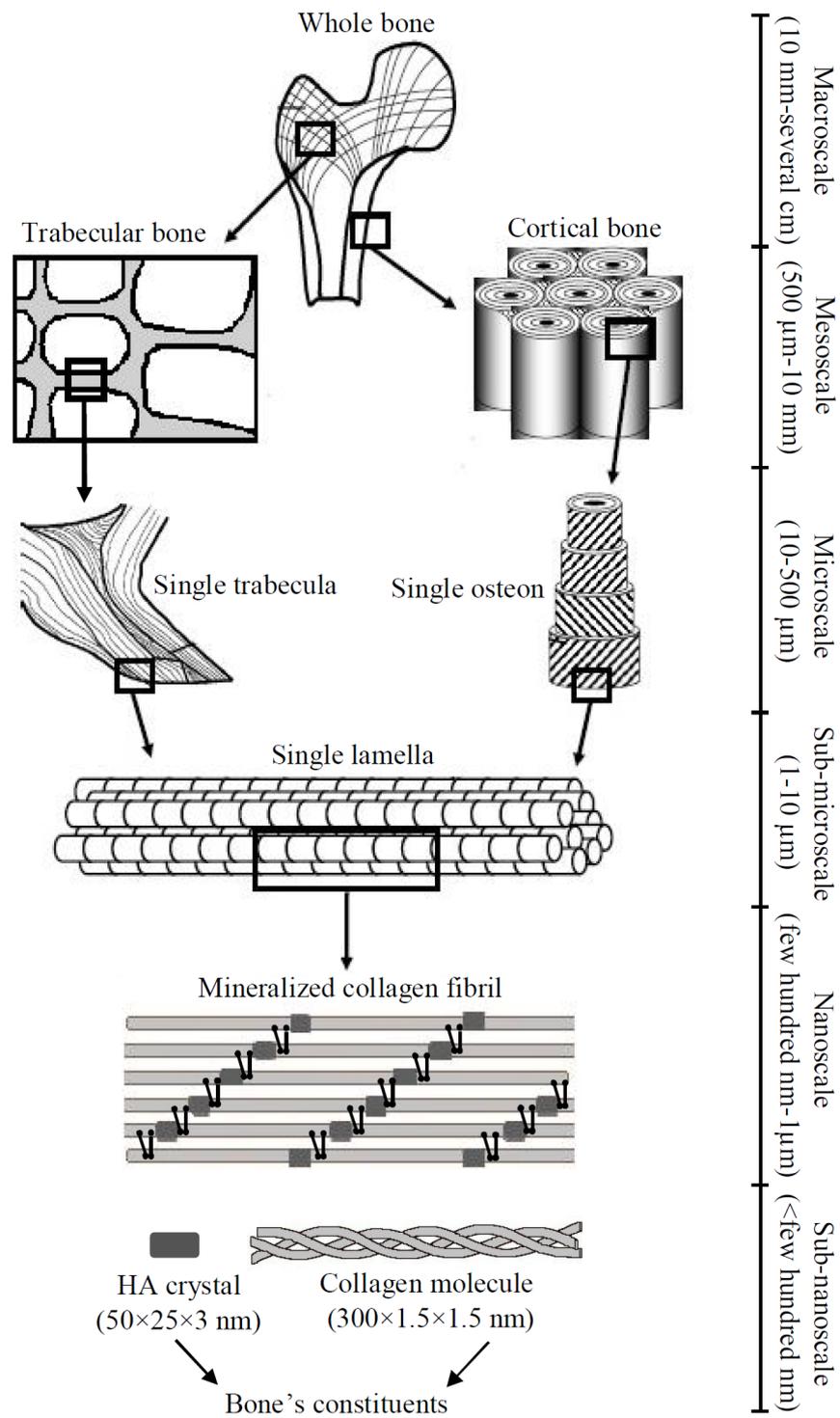


Figura 1. Estructura jerárquica del hueso [10]

### 2.1.3. Proceso de remodelación ósea

Como hemos comentado anteriormente, el hueso es un tejido vivo en constante proceso de transformación, modulado por factores de tipo hormonal y por las cargas mecánicas que el hueso recibe. La transformación del hueso involucra a tres procesos diferentes: crecimiento, modelado y remodelado óseo. No obstante, el presente apartado centra su atención en el proceso de remodelación ósea, considerando el hueso analizado maduro, es decir presenta un tejido lamelar organizado. Este proceso es el mecanismo mediante el cual el hueso se renueva para mantener su competencia estructural y mecánica evitando la acumulación de microfracturas causadas por la fatiga del material que puedan conducir al colapso estructural.

Para llevar a cabo este proceso de transformación, el tejido óseo dispone de distintas subpoblaciones de celulares óseas, las cuales se enumeran a continuación junto a su principal función.

- *Células osteoprogenitoras*  
Derivan de células madre mesenquimatosas de la médula ósea, las cuales se encuentran en reposo pudiéndose transformar en un osteoblasto y secretar matriz ósea.
- *Osteoblastos*  
Son las células encargadas de secretar la matriz osteoide (matriz no mineralizada inicial), además de ser las responsables de la calcificación de la matriz ósea.
- *Osteocitos*  
Derivan de los osteoblastos una vez estos secretan previamente la matriz osteoide. Representan la célula ósea madura y responden a las fuerzas mecánicas aplicadas en el hueso, interviniendo en el proceso de mecanotransducción.
- *Células de revestimiento óseo*  
Derivan de los osteoblastos y tapizan el tejido óseo que no se está remodelando.
- *Osteoclastos*  
Derivan de la fusión de células hematopoyéticas mononucleares, siendo su principal función la resorción ósea.

A excepción del osteoclasto, cada una de estas células deriva de una célula básica, la cual sufre una transformación de una forma más inmadura a una forma más madura en relación con la actividad funcional [5].

El proceso de remodelación ósea se inicia con la activación de una unidad básica multicelular (UBM) como respuesta a distintos estímulos (carga mecánica, fatiga, etc.). Los osteocitos actúan como mecano-sensores a través del flujo de líquido intersticial de los canalículos y lagunas hacia el lado comprimido del hueso (Ross), percibiendo estos estímulos. De este modo se produce un aumento en la actividad metabólica, iniciándose la fase de resorción a través de los osteoclastos. Una vez finalizada esta fase, los osteoclastos son reemplazados y se inicia la fase inversión, la cual permite el equilibrio entre resorción y formación ósea. Finalmente, se inicia la fase de formación, en la cual los osteoblastos sintetizan la matriz osteoide, junto a la fase de mineralización. Este proceso de remodelación ósea dura entre 4 y 8 meses mientras que la fase de mineralización secundaria puede extenderse 6 años o más [15].

El equilibrio entre resorción y formación ósea es fundamental de cara a mantener la competencia resistente del hueso.

## 2.2. Factores determinantes de la resistencia ósea

Se entiende por resistencia ósea, la fuerza necesaria para desencadenar bajo unas condiciones de carga específicas, el fallo mecánico del hueso. Este colapso se alcanza cuando la concentración de fuerzas que actúan sobre un hueso supera la capacidad del mismo para contrarrestarlas.

La resistencia ósea depende de la integración de dos variables: la cantidad y la calidad ósea. La cantidad ósea es responsable del 60% al 80% de la resistencia ósea. En menor medida, la calidad ósea es responsable del 20% al 40% restante. Ambas variables dependen en última instancia del proceso de remodelación ósea [15].

### - Cantidad ósea

La cantidad ósea depende directamente de la densidad mineral (BMD) presente en el hueso. Este parámetro varía a lo largo de la vida del ser humano, alcanzando su valor máximo en la edad adulta (alrededor de los 35 años). Factores genéticos, nutricionales, ambientales y factores hormonales influyen directamente en la cantidad de mineral óseo. Una vez alcanzado el valor máximo de BMD, se inicia un proceso de pérdida de hueso cortical y una reducción de la masa ósea trabecular, siendo este fenómeno más acentuado en las mujeres que en los hombres [15].

Mediante la aplicación de cargas a un hueso *in vitro*, numerosos estudios han demostrado la relación existente entre la BMD y el módulo elástico del hueso, manteniendo cierta proporcionalidad para un amplio rango de cargas. No obstante, esta relación no es siempre lineal debido a que un aumento en la BMD implica un incremento de la rigidez del hueso y, consecuentemente, un incremento de la fragilidad del mismo. De ahí la necesidad de considerar otros factores que justifiquen la variabilidad de la resistencia biomecánica del hueso.

### - Calidad ósea

La calidad ósea hace referencia al conjunto de los factores independientes de la BMD relacionados con la capacidad resistente del hueso frente a los esfuerzos recibidos. Variables como la morfología desde un nivel macroestructural a nanoestructural, disposición espacial de los conductos de Havers y de las lamelas intersticiales, porosidad, composición orgánica, etc., conforman estos parámetros independientes de la BMD.

La porosidad, parámetro de estudio de este proyecto, influye negativamente en la resistencia de los componentes estructurales. En el caso de la porosidad ósea, esta resulta un factor crítico de desde el punto de vista biomecánico, ya que las propiedades mecánicas varían inversamente con el incremento de la porosidad.

El tejido óseo presenta numerosas fuentes de porosidad, pudiendo distinguir principalmente la porosidad natural (lagunas osteocitarias, canalículos, conductos de Havers y Volkmann, etc) y aquella provocada por alteraciones funcionales de las células óseas como consecuencia de enfermedades [7].

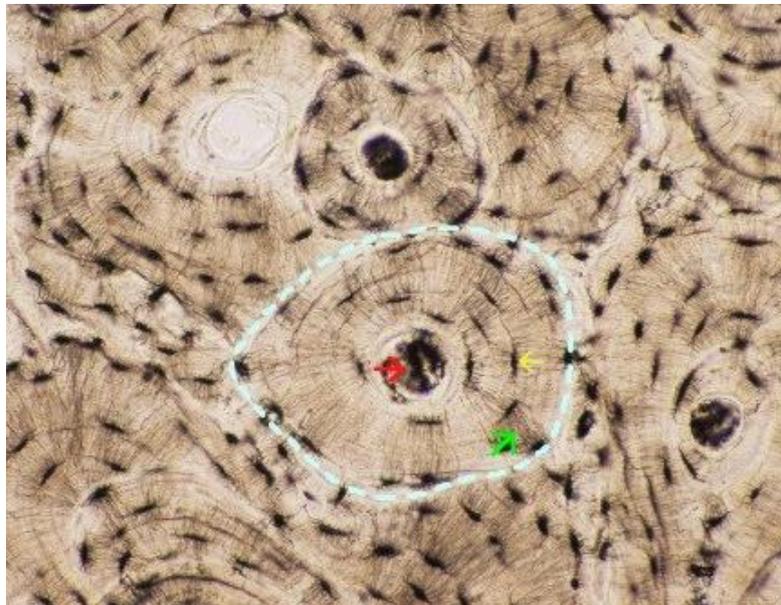
En la Ecuación (1) se reúnen las principales fuentes que contribuyen a la formación de la porosidad del tejido óseo en el hueso cortical [16], mientras que la Ecuación (2) hace lo propio para el hueso trabecular.

$$P_{cortical} = P_{lag} + P_{can} + P_{vas} \quad (1)$$

$$P_{trabecular} = P_{lag} + P_{can} + P_{ost} \quad (2)$$

donde  $P_{lag}$  representa la porosidad causada por las lagunas en forma de elipsoides, las cuales contienen los osteocitos.  $P_{can}$  hace referencia a la porosidad provocada por la red de canalículos que unen estos osteocitos.  $P_{vas}$  representa la porosidad vascular generada principalmente por los conductos de Havers junto con los conductos de Volkmann.  $P_{ost}$  representa la posible porosidad debido a la perforación osteoclástica (osteoporosis).

En estas Ecuaciones (1) y (2), la porosidad natural queda representada por  $P_{lag}$  y  $P_{can}$ , las cuales producen una porosidad máxima del 5%. Aunque en el hueso cortical la porosidad natural también engloba  $P_{vas}$ , esta porosidad está incluida en la proporción anterior. Así,  $P_{vas}$  y  $P_{ost}$  representan el porcentaje de porosidad correspondiente a una posible alteración funcional de las células ocasionada por enfermedades como la osteoporosis, pudiendo alcanzar el 20%. Consecuentemente, la porosidad total varía entre el 6% y el 25% en los casos más desfavorables [16].



*Figura 2. Corte histológico transversal de hueso compacto. Queda delimitado el emplazamiento de una osteona primaria por la línea de cemento (línea discontinua azul), el canal de Havers (flecha roja), las lagunas osteocitarias (flecha amarilla) y los canalículos (flecha verde) [7]*

En el presente trabajo se pretende llevar a cabo el estudio de la resistencia del tejido lamelar óseo considerando tanto la cantidad (BMD) como la calidad ósea, esta última a través de la porosidad. En cuanto a la porosidad, este estudio omite la porosidad generada por alteraciones en el proceso de remodelación ósea y, por tanto, centra su atención en la porosidad natural, la cual se representa por medio de elipsoides. Debido al nivel de profundidad del presente estudio (microestructural), la porosidad natural representa las lagunas y los canalículos del tejido, omitiendo la originada por los canales de Havers y Volkmann.

### 3. Conocimientos teóricos

#### 3.1. Ley de Hooke Generalizada

Para llevar a cabo el estudio de los límites resistentes del tejido lamelar óseo, resulta necesario entender la relación existente entre fuerzas y desplazamientos. La ley de Hooke establece la proporcionalidad existente entre tensiones y deformaciones en una determinada posición espacial. Así, este principio asume la hipótesis de comportamiento elástico-lineal del material, lo cual supone una simplificación del comportamiento real del material puesto que todos los materiales presentan cierto grado de no-linealidad.

La Figura 3 establece el criterio utilizado para la definición de las componentes de las tensiones, siendo el análogo para las deformaciones. Respecto a la nomenclatura utilizada en el presente estudio para definir las tensiones y deformaciones según su dirección, se hace uso de la notación clásica. En el caso de las deformaciones, se recurre a las deformaciones angulares ingenieriles.

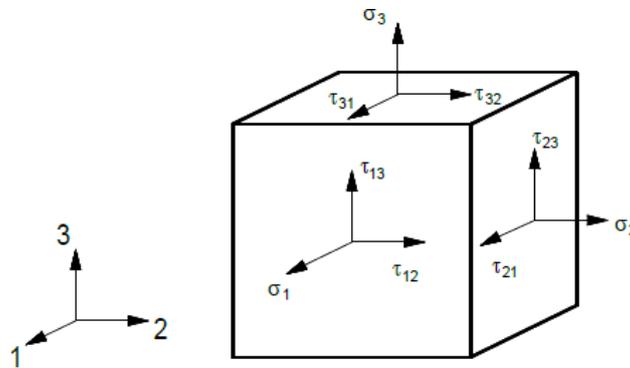


Figura 3. Criterio seguido para la definición de las componentes del vector tensión

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Donde  $\{\sigma\}$  es el vector de tensiones y  $\{\varepsilon\}$  es el vector deformaciones.

El enunciado que establece la ley de Hooke generalizada es el siguiente: “Cada una de las seis componentes de la tensión en un punto de un sólido es una función lineal de las seis componentes de la deformación en ese punto”. De este modo, la ley establece la siguiente ecuación:

$$\{\sigma\} = [C] \cdot \{\varepsilon\} \quad (4)$$

Siendo  $[C]$  la matriz de rigidez que contiene las constantes de proporcionalidad  $\sigma - \varepsilon$ .

En formato desarrollado la Ecuación (4) queda:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

La matriz de rigidez  $[C]$  es simétrica y el número de constantes independientes que alberga depende del número de planos de simetría que presenta el material en estudio. Esta relación entre la simetría que presenta el material y el número de constantes independientes se aclara en el siguiente apartado.

Asimismo, existe la posibilidad de expresar la ley de Hooke generalizada de forma que las deformaciones sean función de las tensiones. Para ello, es necesario invertir la matriz de rigidez  $[C]$ , obteniendo la matriz de flexibilidad  $[S]$ .

$$[S] = [C]^{-1} \quad (6)$$

Mediante esta conversión, la ley de Hooke se puede expresar como:

$$\{\varepsilon\} = [S] \cdot \{\sigma\} \quad (7)$$

De este modo, expresar la ley de Hooke generalizada de forma que las deformaciones sean función de las tensiones facilita el proceso de obtención de las constantes elásticas contenidas en  $[S]$  y  $[C]$ . Este hecho se debe a que la matriz de flexibilidad  $[S]$  mantiene una relación evidente con las constantes ingenieriles del material (módulos de Young y de cizalladura, coeficientes de Poisson, coeficientes de influencia mutua y coeficientes de Chentsov).

### 3.2. Tipos de materiales

Como se ha comentado anteriormente, el grado de simetría que presenta un material y, por tanto, su estructura, mantiene una relación directa con el número de constantes elásticas necesarias para describir el material.

Para abordar la clasificación de los materiales en función del grado de simetría, es necesario definir el concepto de sistema de referencia orientado o no orientado. Cuando el plano (o planos) de simetría del material coinciden con el sistema de referencia, este se considera orientado. De modo opuesto, cuando este sistema de referencia no contiene el plano (o planos) de simetría se considera no orientado. Se distinguen cinco tipos de material en función del grado de simetría presentado.

#### 3.2.1. Material anisótropo o triclinico

Esta tipología de material carece de planos de simetría. Como resultado de esta asimetría, las constantes elásticas del material presentan acoplamiento entre tensiones normales y tangenciales con deformaciones tangenciales y normales. Por esta razón, todas las constantes elásticas son distintas de cero, siendo 21 de ellas constantes independientes.

### 3.2.2. Material monoclinico

Este material presenta un plano de simetría, lo cual conduce a una disminución del número de constantes elásticas no nulas en caso que el sistema de referencia se encuentre orientado.

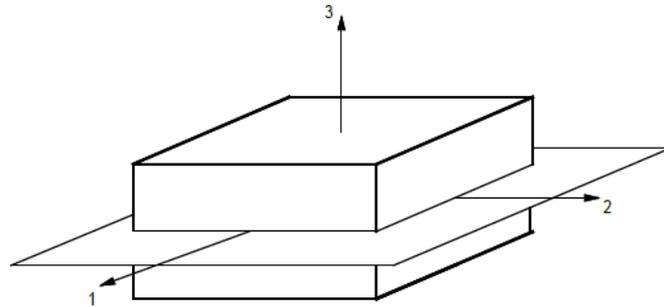


Figura 4. Plano de simetría 1-2 de un material monoclinico

En este tipo de material, únicamente  $\gamma_{23}$  y  $\gamma_{31}$  se encuentran acopladas con  $\tau_{23}$  y  $\tau_{31}$  como consecuencia de la simetría existente. Así, esta tipología presenta 13 constantes independientes. En caso que el sistema de coordenadas no se encuentre orientado, el comportamiento del material se asemeja al del material anisótropo.

### 3.2.3. Material ortótropo

Estos materiales presentan tres planos de simetría ortogonales. Las láminas con fibras unidireccionales presentan un comportamiento similar a este tipo de material, aunque se ajustan en mayor medida a la tipología siguiente.

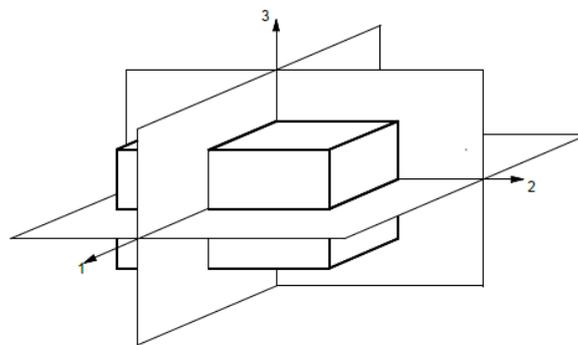


Figura 5. Planos de simetría de un material ortótropo

Considerando el sistema de coordenadas orientado, este material no presenta acoplamientos entre deformaciones angulares y tensiones normales, así como deformaciones normales y tensiones tangenciales. Se necesitan 9 constantes independientes para definir las propiedades del material. En caso que el sistema de coordenadas no se encuentre orientado, el comportamiento del material se asemeja al del material anisótropo.

### 3.2.4. Material transversalmente isótropo

Este tipo de material presenta un plano de isotropía, lo cual establece las mismas propiedades en cualquier dirección de ese plano y la condición de simetría para cualquier plano perpendicular a este.

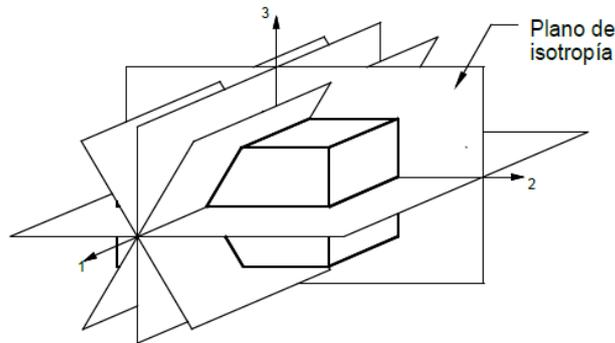


Figura 6. Plano de isotropía 2-3 de un material transversalmente isótropo

Considerando el sistema de referencia orientado de modo que el plano 2-3 corresponde con el plano de isotropía, las propiedades del material en las direcciones 2 y 3 no presentan ninguna discrepancia. Las constantes independientes para definir las propiedades elásticas del material se reducen a 5. En caso que el sistema de coordenadas no se encuentre orientado, el comportamiento del material se asemeja al del material anisótropo.

### 3.2.5. Material isótropo

Esta tipología presenta infinitos planos de isotropía en cualquier punto del material. Por tanto, no existe ninguna diferencia entre las direcciones 1, 2 y 3. El sistema de referencia siempre se encuentra orientado, manteniéndose la matriz de flexibilidad  $[S]$ . El número de constantes independientes es 2.

A continuación, la Tabla 1 resume los principales aspectos de la clasificación material realizada en función del grado de simetría presentado.

Tabla 1. Número de constantes elásticas en  $[S]$  y  $[C]$  en función del grado de simetría del material

Tipo de material	Constantes independientes	Constantes $\neq 0$ (orientado)	Constantes $\neq 0$ (giro respecto eje de referencia)	Constantes $\neq 0$ (giro cualquiera)
Triclínico	21	36	36	36
Monoclínico	13	20	36	36
Ortótropo	9	12	20	36
Transv. Isótropo	5	12	20	36
Isótropo	2	12	12	12

Prestando atención al material que atañe a este proyecto, el tejido lamelar óseo, la literatura define al mismo como un material compuesto. La matriz ósea mineralizada contiene principalmente las fibras de colágeno tipo I junto los cristales de hidroxiapatita, lo cual le confiere al tejido un comportamiento semejante al del material transversalmente isótropo, dando lugar a un comportamiento anisotrópico bajo un estado multiaxial de cargas [1].

### 3.3. Efecto del concentrador de tensiones.

En el presente trabajo, como se ha comentado anteriormente, el tejido lamelar óseo presenta ciertas lagunas en las que residen los osteocitos, lo cual representa en el nivel de escala estudiado junto a los canalículos la porosidad natural del tejido. Según la literatura, estas lagunas presentan forma de elipsoide, cuyo tamaño será definido en posteriores apartados. Estas lagunas suponen la presencia de discontinuidades geométricas dentro del tejido y, por consiguiente, la presencia de defectos internos, de ahí la necesidad de comprender los fundamentos de la Mecánica de la Fractura.

La presencia de discontinuidades geométricas en el material tales como entallas o grietas, implica la existencia de concentradores de tensión en el mismo. Los concentradores de tensión producen una elevación local de las tensiones y, por tanto, elevados gradientes de tensión en el material que pueden conducir a la fractura del material inesperadamente por debajo del límite de fluencia del mismo. El efecto de los concentradores de tensión se cuantifica a través del factor de concentrador de tensiones  $k_t$ , definido como la relación entre la tensión máxima y la tensión nominal.

$$k_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (8)$$

Este efecto del concentrador de tensiones puede ser observado para el caso de una placa plana con un agujero elíptico sometido a tracción. El agujero está definido por los semiejes  $c$  y  $d$  y el eje mayor de la elipse esta alineado con la dirección de la carga aplicada.

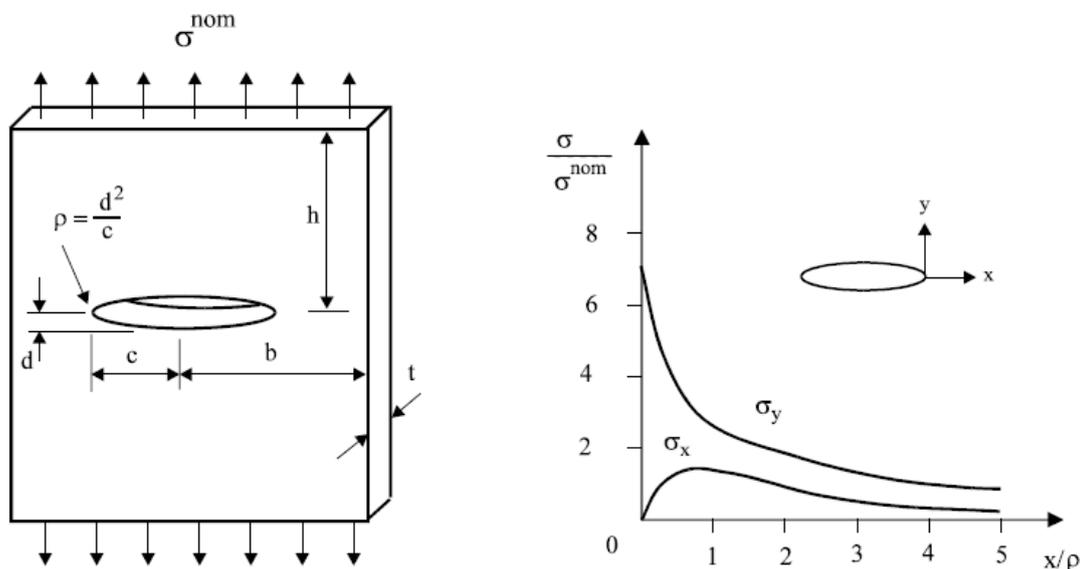


Figura 7. Efecto del concentrador de tensiones en placa plana con agujero elíptico

En la Figura 7 se aprecia el efecto del concentrador de tensiones para una relación  $\frac{c}{d} = 3$ , principalmente en la tensión  $\sigma_y$ , paralela a la tensión nominal aplicada. En las cercanías del agujero, la tensión  $\sigma_y$  aumenta rápidamente hasta alcanzar el valor máximo en la superficie del mismo. El valor máximo de  $\sigma_y$  depende de las proporciones de la elipse, definido mediante la siguiente ecuación:

$$\sigma_y = \sigma^{nom} \left(1 + 2 \frac{c}{d}\right) = \sigma^{nom} \left(1 + 2 \sqrt{\frac{c}{\rho}}\right) \quad (9)$$

Siendo  $\rho$  el radio del extremo de la elipse.

En el caso más desfavorable, considerando una elipse cuyo semieje  $d$  se aproxima a cero y, por consiguiente,  $\rho$  hace lo mismo, la tensión  $\sigma_y$  tiende a infinito al igual que  $k_t$ . Esta elevación local de las tensiones explica el daño provocado por las discontinuidades geométricas presentes en el material, las cuales reducen de forma crítica la resistencia del mismo.

### 3.4. Método de los Elementos Finitos

El análisis numérico mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF) proporciona una herramienta para la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales complejas carentes de solución analítica que aparecen en la ingeniería. Así pueden tratarse tanto problemas no lineales (plasticidad, viscoelasticidad, etc.) como el problema elástico (relación tensiones-desplazamientos), en el cual centraremos la atención de este trabajo.

Este método consiste en la discretización de un continuo (dominio) en un conjunto de subdominios denominados elementos finitos. Estos elementos se definen a partir de los nodos que conectan, formando en su conjunto la malla. Considerando ciertas condiciones (estacionariedad, residuos ponderados, etc.), para cada elemento se aproximan localmente las funciones incógnitas (funciones aproximadas conocidas como funciones de interpolación), obteniendo así la solución aproximada al problema planteado.

Como la solución de elementos finitos es aproximada, es necesario estimar el error que se introduce. El error entre la solución exacta del problema y la obtenida mediante el MEF está influenciada por un conjunto de errores (modelado, redondeo, manipulación, integración y discretización). La precisión de los programas comerciales permite despreciar errores relacionados con el cálculo (redondeo, manipulación e integración). Normalmente, considerando una correcta definición del modelo, la fuente más importante de error está relacionada con el refinamiento de la malla y, por tanto, con el error de discretización.

Respecto al tejido lamelar óseo, debería considerarse cierto error de modelado debido a la heterogeneidad del mismo y el haber omitido la presencia de canalículos. No obstante, en este estudio se ha despreciado este error y se ha prestado únicamente atención al error de discretización.

#### 3.4.1. Funciones de interpolación

En el MEF, las funciones incógnitas que necesitan ser resueltas se sustituyen generalmente por funciones polinómicas aproximadas, construidas a tramos dentro de cada elemento. El número de nodos que conforman los elementos determinan el orden polinómico de las funciones de interpolación.

## ELEMENTOS CUADRILÁTEROS

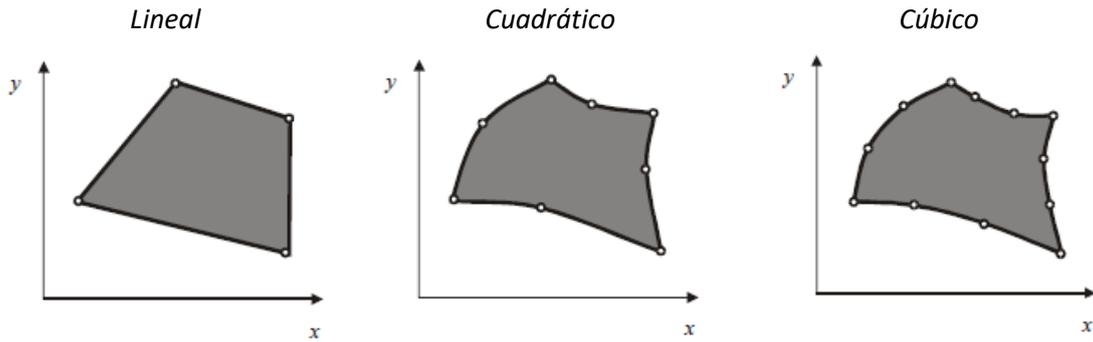


Figura 8. Elementos bidimensionales en función del grado de interpolación

Así, a mayor orden polinómico de las funciones de interpolación mayor es la velocidad de convergencia del error debido a la aproximación que realiza el análisis. No obstante, el coste computacional requerido para resolver el problema aumenta a medida que el orden polinómico hace lo propio.

### 3.4.2. Error de discretización

La importancia del error causado por la representación de los infinitos grados de libertad de un continuo mediante un número finito de grados de libertad es fundamental. Para cuantificar el error de discretización se hace uso normalmente de la norma energética que permite definirlo en base a un escalar. La norma energética de las soluciones exacta y de elementos finitos se definen como:

$$\|u_{ex}\| = \sqrt{\int \sigma_{ex}^T \varepsilon_{ex} dV} = \sqrt{\int \sigma_{ex}^T D^{-1} \sigma_{ex} dV} = \sqrt{2\Pi_{ex}} \quad (10)$$

$$\|u_{ef}\| = \sqrt{\int \sigma_{ef}^T \varepsilon_{ef} dV} = \sqrt{\int \sigma_{ef}^T D^{-1} \sigma_{ef} dV} = \sqrt{2\Pi_{ef}} \quad (11)$$

Donde  $ex$  y  $ef$  indican soluciones exactas y de elementos finitos;  $D$  representa la matriz de propiedades del material;  $\Pi$  representa la energía de deformación.

Mediante la norma energética, la expresión del error de discretización se define como:

$$\|e_{ex}\| = \|u_{ex} - u_{ef}\| = \sqrt{\int (\sigma_{ex} - \sigma_{ef})^T D^{-1} (\sigma_{ex} - \sigma_{ef}) dV} \quad (12)$$

A partir de la definición del error de discretización absoluto, se puede definir el error relativo en términos porcentuales:

$$\eta_{ex} = \frac{\|e_{ex}\|}{\|u_{ex}\|} \cdot 100 \quad (13)$$

### 3.5. Fallo estático

Considerando la resistencia ósea como la fuerza necesaria para producir el fallo mecánico bajo unas condiciones de carga específicas, se distinguen tres tipos de fallo resistente según la naturaleza de la carga aplicada: fallo estático, fallo dinámico y la rotura por impacto. El presente trabajo centra su atención en el fallo producido por cargas estáticas o cuasiestáticas.

Debido a la morfología del tejido lamelar óseo, tratado por la literatura como un material ortótropo, el estudio de los límites resistentes del mismo es complejo. A tal efecto, existen numerosas teorías de fallo dependiendo de la tipología del material y de los esfuerzos. En este caso, con tal de simplificar la dificultad del problema, se asumen ciertas hipótesis respecto al criterio de fallo, el cual corresponde con el criterio de Máxima Tensión.

#### - Criterio de Máxima Tensión

El criterio de Máxima Tensión establece el instante de fallo del material cuando uno de los tres esfuerzos principales supera la resistencia última de esa misma dirección principal. A diferencia de otros criterios como Christensen o Hashin, se trata de un criterio que no considera la interacción entre las tensiones normales y tangenciales de las direcciones principales del material, lo cual simplifica el análisis.

$$X_1 = \frac{S_{1t}^{op}}{\sigma_1}, \quad X_2 = \frac{S_{2t}^{op}}{\sigma_2}, \quad X_3 = \frac{S_{3t}^{op}}{\sigma_3} \quad (14)$$

$$X = \min(X_1, X_2, X_3), \quad \begin{array}{l} \text{si } X > 1 \rightarrow \text{No fallo} \\ \text{si } X \leq 1 \rightarrow \text{Fallo} \end{array} \quad (15)$$

donde  $X$  corresponde con el coeficiente de seguridad;  $\sigma_i$  la tensión máxima en la dirección principal  $i$ ;  $S_{it}^{op}$  es el límite resistente sometido a tracción del tejido no poroso en la dirección principal  $i$ . De aquí en adelante  $S_{1t} = S_l$ .

Al someter el tejido lamelar a un estado de cargas uniaxial, se ha elegido este criterio de fallo en vez del empleo de un criterio interactivo entre tensiones. De hecho, estos últimos utilizan cargas uniaxiales para determinar los límites resistentes en cada dirección del material.

En todo caso, el estudio elude el motivo de fallo biomecánico del tejido como pudiera ser el producido por la matriz ósea, la interfase fibra-matriz o las fibras. Este hecho se debe al nivel de profundidad y al modelo numérico del presente estudio, el cual homogeniza las propiedades del tejido óseo en cada dirección de acuerdo con la información presente en la literatura al margen de considerar diferentes propiedades en función de la composición a nivel nanoestructural del tejido.

## 4. Análisis de convergencia. Estimación del tamaño de elemento

### 4.1. Introducción

El estudio que se procede a realizar tiene como objetivo obtener un modelo matemático para la estimación de los límites resistentes del tejido lamelar en función de la densidad mineral ósea y la microporosidad con una precisión adecuada. El método de cálculo empleado es el Método de los Elementos Finitos (MEF) que consiste en un método numérico aproximado de análisis, lo cual conlleva a que los resultados obtenidos no serán exactos, aunque sí converjan a la realidad del problema físico que se pretende resolver.

Partiendo de la hipótesis de la validez del modelo geométrico utilizado y del desprecio de los errores de redondeo, manipulación e integración debido a los métodos de cálculo utilizados por el software Ansys APDL, el error entre la solución exacta del problema y la obtenida mediante el MEF radica en el error de discretización. Este error hace referencia a la representación del modelo geométrico continuo utilizado de infinitos grados de libertad en un número finito de grados de libertad y, por tanto, al mallado empleado para discretizar el modelo. Por tanto, el tema de análisis en este apartado del trabajo se centra en establecer el procedimiento de mallado adecuado del modelo a fin de obtener los límites resistentes con una notable precisión.

La precisión de los resultados obtenidos mediante el modelado numérico depende fundamentalmente del mallado mediante el cual el continuo a estudiar queda discretizado. Así, para maximizar la precisión de los resultados se debería establecer un mallado con infinitos grados de libertad que representase exactamente el continuo, lo cual conllevaría a un coste computacional de resolución del problema que tendería por igual a infinito. Por tanto, el objetivo principal del análisis es encontrar el equilibrio entre coste computacional y precisión en los resultados obtenidos, es decir, obtener el mallado mediante el cual se consiguen resultados con suficiente precisión sin recurrir a un coste computacional de resolución excesivamente elevado.

Al tratarse el trabajo de un análisis tensional, la importancia del mallado se acentúa debido a la dispersión de los resultados en caso de mallar inadecuadamente el modelo. Cabe tener en cuenta las singularidades del modelo geométrico empleado, generadas por las lagunas osteocitarias del tejido mediante los elipsoides, lo cual conduce a la presencia de concentradores de tensión que intensifican las tensiones localmente. Estas zonas de incremento de tensiones conducirán a una disminución de la precisión de los resultados obtenidos debido a los elevados gradientes de deformaciones/tensiones que se producen y cuyo refinamiento del mallado será esencial con tal de reducir el error de discretización.

Debemos recalcar la trascendencia de los elipsoides en los resultados obtenidos, causantes de los concentradores de tensión del modelo. Tal y como se explica posteriormente en el apartado 5.1.2, el empleo de nuevas rutinas para la creación exacta de la geometría del elipsoide ha sido fundamental desde el punto de vista tensional. En trabajos previos [7], los elipsoides generados conducían a la sobrestimación de los concentradores de tensiones presentes en el modelo por la presencia de singularidades y, consecuentemente, a una posible imprecisión de los las tensiones.

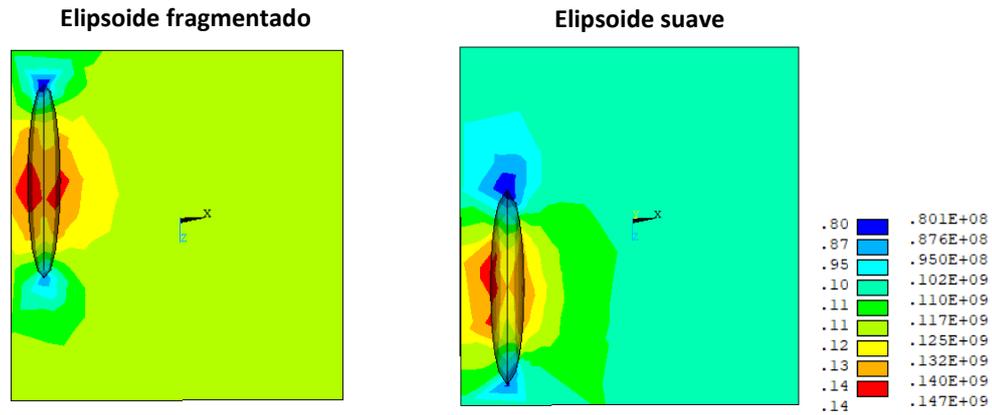


Figura 9. Gradiente de tensiones  $S_z$  en la dirección paralela a la carga según el elipsoide

Se estudió la posibilidad de aplicar los principios descritos en [17] para establecer el tamaño de malla necesario en las proximidades de los concentradores de tensiones del modelo a analizar. El análisis llevado a cabo se basa en la *Teoría de las distancias críticas* para estudiar el comportamiento de la fatiga por fricción de dos cuerpos en contacto sujetos a un movimiento relativo, la cual proporciona tensiones sobrestimadas en el extremo de la singularidad. En él se determina mediante un método experimental el enfoque propuesto en [18], que consiste en establecer la proporcionalidad entre el tamaño de elemento y la distancia crítica  $L$  del material de modo que la tensión en el extremo de la singularidad corresponda con la tensión máxima asumida por el material localmente.

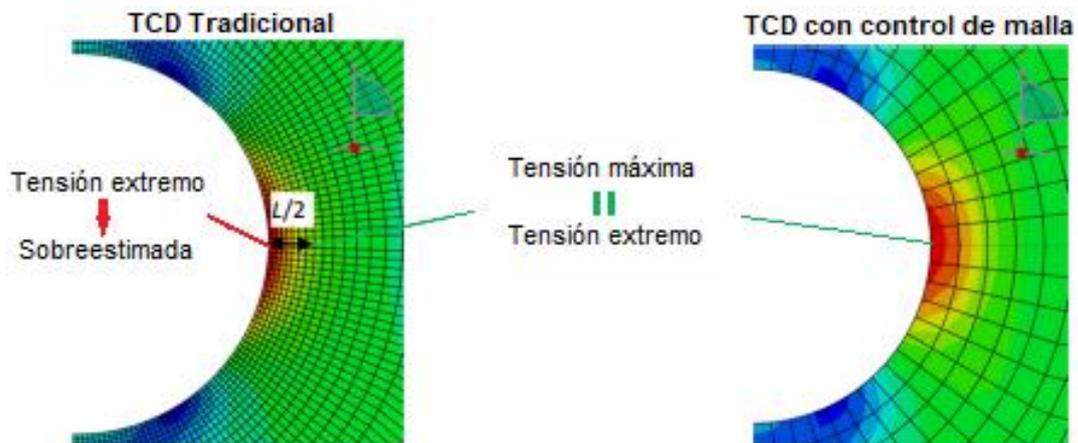


Figura 10. Ilustración esquemática del concepto TCD con control de malla

A pesar de las facilidades que nos habría proporcionado la implementación de este principio debido al establecimiento del tamaño de malla en los concentradores de tensión y la reducción del coste computacional, la idea fue desestimada. El motivo de ello fue el desconocimiento de algunas propiedades del material necesarias para el cálculo de la distancia crítica  $L$ .

$$L = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{th}}{\Delta \sigma_0} \right)^2 \quad (16)$$

Donde  $L$  es la distancia crítica del material; donde  $\Delta K_{th}$  es el límite de fatiga de propagación de grietas del material; y donde  $\Delta \sigma_0$  es el límite de fatiga del material.

$$d = \alpha \cdot L \quad (17)$$

Donde  $d$  es el tamaño de elemento del mallado; donde  $\alpha$  es un parámetro arbitrario, definido en [17] como  $\alpha = 1,6$ .

## 4.2. Modelo geométrico

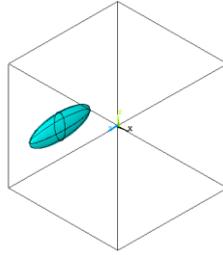
El análisis, a fin de establecer el tamaño de elemento apropiado, se llevará a cabo empleando distintos modelos similares a la geometría de estudio del trabajo y que representa el tejido lamelar óseo a nivel microestructural. Considerando que los modelos creados son generados a partir de las rutinas, se adoptará un valor de BMD de  $0,85 \text{ g/cm}^3$  mientras que la porosidad, al contrario, no será fijada.

Partimos de un modelo geométrico cúbico con un único elipsoide, en el cual se realiza el análisis de convergencia evitando la posible interacción con otros elipsoides. El tamaño del elipsoide se mantiene respecto al representativo de la celda unidad del tejido óseo, mientras que el cubo disminuye para obtener un tamaño de lado de  $40 \text{ }\mu\text{m}$ . Esta variación en el tamaño se implementa para reducir el coste computacional de resolución del problema, ya que al disponer de únicamente un elipsoide el haber mantenido el tamaño del cubo hubiera supuesto un aumento del número de nodos del modelo numérico, cuya relevancia en los resultados habría sido despreciable. Este hecho se debe a que los resultados son influenciados principalmente por el concentrador de tensiones generado en las proximidades de los elipsoides.

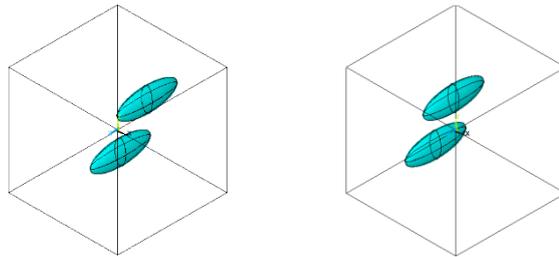
Seguidamente se realiza el mismo proceso de análisis sobre un modelo geométrico constituido por dos elipsoides, salvo que en este caso se realiza sobre dos modelos con distinta disposición de los elipsoides debido a la aleatoriedad de la misma. Al igual que el modelo geométrico de un elipsoide, se mantiene el tamaño de los elipsoides y del cubo.

Finalmente, y cuyos resultados presentan mayor importancia debido a una mayor interacción entre elipsoides, se realiza el mismo proceso de análisis sobre un modelo geométrico correspondiente a un tejido lamelar óseo sano, cuya porosidad es del 1% y le corresponden 5 elipsoides. En este último caso se lleva el análisis sobre cinco modelos con distinta disposición aleatoria de los elipsoides. Al tratarse de un modelo geométrico que posteriormente abordaremos para realizar el análisis tensional y debido al número de elipsoides que lo constituyen, el tamaño del modelo representa la celda unidad del tejido, siendo el tamaño del cubo de  $59,187 \text{ }\mu\text{m}$  de lado.

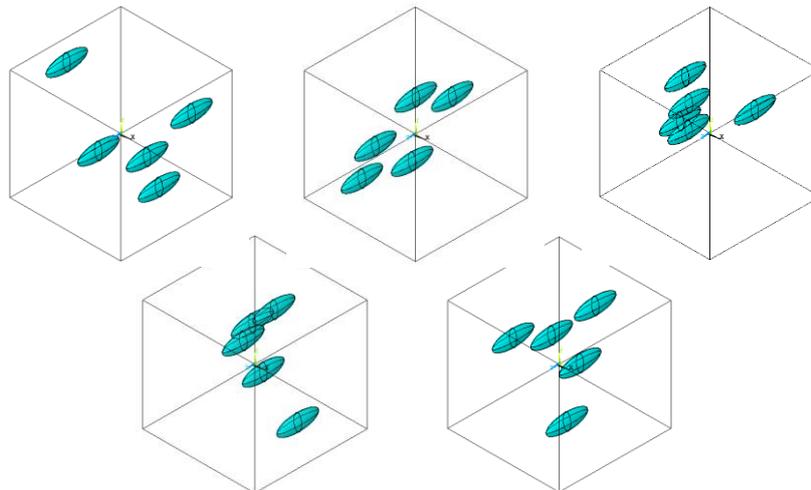
### 1 elipsoide



### 2 elipsoide



### 5 elipsoides



*Figura 11. Localización aleatoria de los elipsoides de los modelos utilizados en el análisis*

Como veremos posteriormente, el análisis pretende recoger información respecto al mallado establecido en la celda unidad del tejido lamelar óseo, a través de una sucesión de modelos a los cuales se les implementa distintos tamaños de elemento. Partimos de un tamaño de elemento considerable respecto al modelo en cuestión, el cual discretiza el continuo con menor precisión, para implementar sucesivos refinamientos en el mallado a posteriori.

Por ende, el proceso a efectuar se podría considerar que comparte los principios del refinamiento uniforme, en el cual los elementos de la malla refinada mantienen una proporción constante con la malla establecida inicialmente. No obstante, el refinamiento seleccionado también se adapta a los concentradores de tensión generados en las proximidades de los elipsoides. Siguiendo este proceso, obtenemos una reducción de la malla uniforme al mismo tiempo que se adapta a la singularidad del problema.

El mallado del modelo geométrico emplea elementos tridimensionales que, en el caso de Ansys APDL, se trata de elementos tipo SOLID. Además, el mallado debe garantizar la continuidad de la solución, así como satisfacer las condiciones de periodicidad de la celda unidad.

Con objeto de adaptar la solución a la singularidad del problema, establecemos un mallado en los contornos de los elipsoides que nos permite controlar el tamaño de los elementos tridimensionales que discretizan la celda unidad en las proximidades de los concentradores de tensión. Para ello recurrimos a los elementos que Ansys APDL nos proporciona, elementos tipo SHELL, los cuales mallan la superficie del elipsoide de tal forma que el software respetará la posición de los nodos establecidos una vez se efectúe el mallado del conjunto tridimensional.

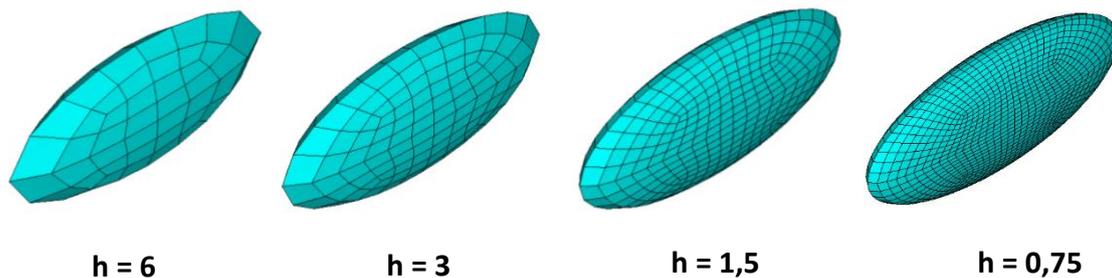


Figura 12. Mallado de elipsoide en función del tamaño de elemento,  $h$

En el caso de satisfacer la periodicidad de la celda unidad, este mismo proceso de fijación de los nodos de la malla en el contorno se realiza sobre el mismo del conjunto del modelo geométrico, es decir, sobre las caras del cubo.

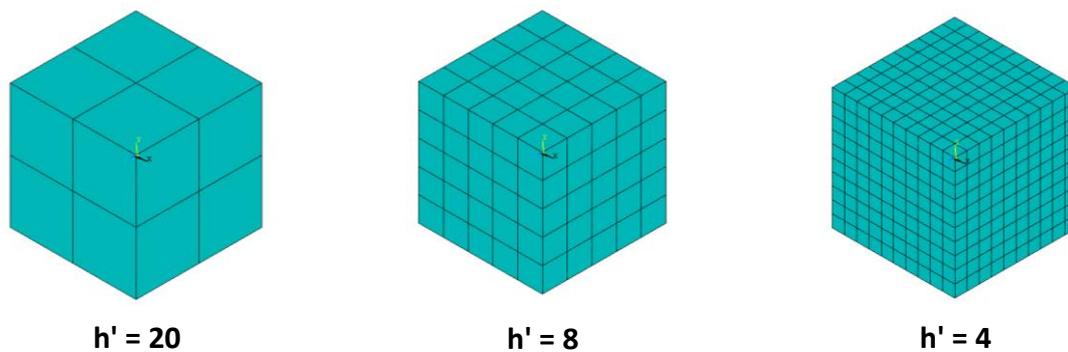


Figura 13. Mallado contorno de la celda unidad en función del tamaño de elemento,  $h$

El mallado volumétrico se ha efectuado mediante elementos tridimensionales tetraédricos debido a las dificultades geométricas del modelo que imposibilitan el uso de elementos cuadriláteros. En cambio, en los contornos de los elipsoides han sido mallados de manera estructurada mediante elementos cuadriláteros, impuestos por el mallado previo con elementos tipo SHELL.

El caso del mallado en el contorno del modelo ha sido más problemático. Como hemos comentado anteriormente, se establecía un mallado tipo SHELL para fijar la posición de los nodos mediante elementos cuadriláteros. No obstante, en algunos casos, debido a las dificultades del programa para relacionar los elementos tetraédricos con estos nodos del

contorno, el mallado de la superficie exterior del modelo obtenido presenta elementos triangulares, aun así, el modelo garantiza la restricción periódica impuesta que se pretende establecer.

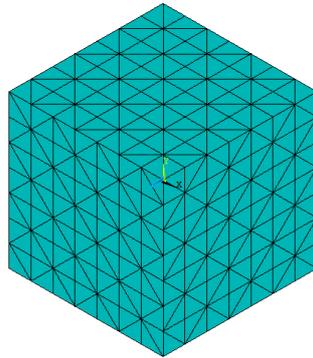


Figura 14. Mallado contorno celda unidad con elementos triangulares para  $h' = 3$

A fin de obtener una mayor diversidad de resultados y tener la posibilidad de realizar comparaciones más extensas y refundadas, los modelos han sido mallados tanto con elementos lineales como elementos cuadráticos. Partimos de la base que los elementos cuadráticos recurren a un coste computacional superior debido a la inclusión de nodos de mitad de lado, lo cual nos permite aproximar de manera más rigurosa los contornos curvos de los elipsoides, hecho que puede aumentar la precisión considerablemente del modelo numérico. No obstante, este hecho se comprobará en este estudio para verificar si este aumento de los recursos computacionales es conveniente.

La tipología de elementos SOLID empleados en el software utilizado han sido: SOLID 185 para elementos lineales y SOLID 186 para elementos cuadráticos. En el caso de los elementos tipo SHELL han sido: SHELL 181 para elementos lineales y SHELL 281 para elementos cuadráticos.

### 4.3. Procedimiento de análisis

Como se ha comentado anteriormente, el análisis se ha llevado a cabo siguiendo un refinamiento uniforme y adaptado a la singularidad del problema tanto con elementos lineales como cuadráticos. Para efectuar el mismo adecuadamente se han establecido una serie de variables que nos permiten mantener la proporción constante entre los tamaños de elemento de las mallas sucesivas de cada modelo, característica propia del refinamiento uniforme.

Para poder cuantificar y analizar los resultados, el estudio se ha llevado a cabo haciendo uso del error en norma energética proporcionado por Ansys APDL, el cual es un indicativo utilizado para verificar el error de discretización obtenido al realizar el mallado de un continuo. También se ha expuesto el error de discretización estimado, cuya relevancia respecto al anterior es menor.

Existen muchos análisis de este tipo que también hacen referencia al número de grados de libertad empleados en la discretización y que evidencian el coste computacional de resolución. Al disponer de singularidades en el modelo, las cuales concentran el error de discretización debido a los elevados gradientes deformaciones/tensiones, el hecho de presentar este parámetro como un indicativo de la precisión del mallado sería erróneo, ya que podrían refinarse zonas lejanas a los concentradores de tensión (consecuentemente, aumentaría el número de grados de libertad) que no condujeran a una mejora de la precisión del análisis numérico. No obstante, este parámetro ha sido empleado para deducir el coste computacional

que conlleva la resolución del problema para cada mallado establecido, hecho que también podría haberse averiguado mediante el tiempo de procesamiento necesario para la resolución.

Para cada mallado examinado, se ha expuesto la información presentada en los anteriores párrafos.

A grandes rasgos, para cada modelo, se parte de un mallado inicial con cierto tamaño de elemento (vasto en relación con las dimensiones del modelo). A este se le aplica las restricciones de desplazamiento y cargas propias del estudio del tejido lamelar óseo sano (descritas posteriormente en el análisis numérico) a fin de recabar la información necesaria en el análisis del error de discretización. Este mallado es, en cada caso, el que menor coste computacional requiere. Posteriormente, se repite el mismo proceso implementando sucesivamente mallas con tamaños de elementos en orden decreciente. Así, a medida que el tamaño de elemento disminuye gradualmente, el coste computacional requerido hace lo contrario, aumenta.

A fin de satisfacer la uniformidad del refinamiento, se han establecido diferentes variables relacionadas con los tamaños de elemento que permiten mantener la proporción constante entre las sucesivas mallas del modelo. Estas variables se describen en los párrafos posteriores y corresponden con las siguientes:

- $h \rightarrow$  tamaño elemento tipo *SHELL*
- $h' \rightarrow$  tamaño elemento tipo *SOLID*
- $n \rightarrow$  coeficiente multiplicador *SHELL – SOLID*
- $k \rightarrow$  coeficiente reductor *SHELL*

El parámetro  $h$  indica el tamaño de elemento empleado en el mallado restrictivo del contorno de los elipsoides, correspondiente a los elementos tipo *SHELL*, el cual nos permite adaptar la malla al concentrador de tensiones. El parámetro  $h'$  hace referencia al tamaño de elemento tipo *SOLID*, correspondiente al mallado del modelo geométrico y, por tanto, del que se pretende esclarecer las conclusiones.

En cambio, las variables  $n$  y  $k$  permiten calcular los elementos de las mallas sucesivas del modelo partiendo de un tamaño de elemento  $h$  inicial. La variable  $n$  relaciona el tamaño de elemento del contorno de los elipsoides  $h$  con el tamaño de elemento global  $h'$ . La variable  $k$  relaciona la malla estudiada anterior con la posterior, cuyo tamaño de elemento será inferior. Esta última variable calcula los tamaños de elementos de las sucesivas mallas, siempre en orden decreciente.

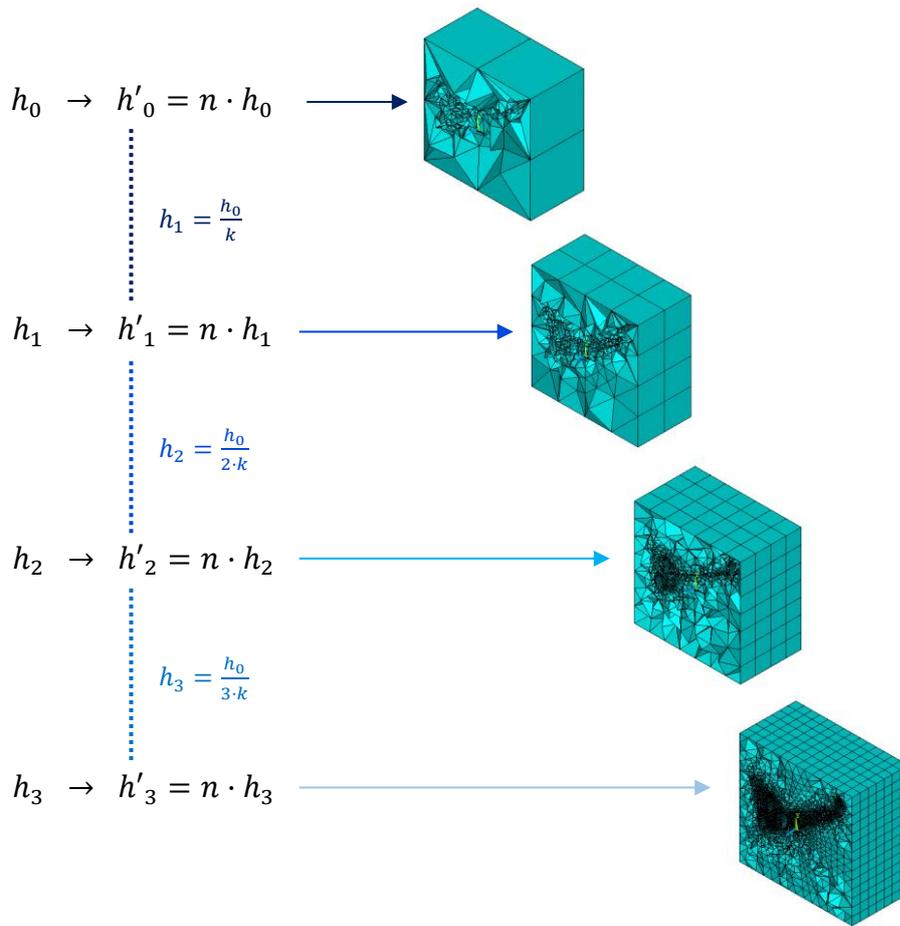


Figura 15. Proceso de refinamiento uniforme y adaptativo

Los variables  $h_0$ ,  $n$  y  $k$  se han establecido arbitrariamente siguiendo una cierta lógica. El mallado SHELL inicial se ha establecido con un tamaño de elemento  $h_0$  de  $6 \mu\text{m}$ , lo cual es razonable teniendo en cuenta que los volúmenes cúbicos, según sean de 1, 2 o 5 elipsoides, presentan  $40 \mu\text{m}$  o  $59.187 \mu\text{m}$  de lado. La variable  $k$  se ha fijado con un valor constante de 2. La imagen de la izquierda de la Figura 12 representa el mallado inicial del elipsoide con elementos lineales.

En el caso de la variable  $n$ , fijar un valor arbitrario ha sido más complejo debido a que este tenía implicaciones directas tanto en la precisión de los resultados como en el coste computacional de resolución del problema. Consecuentemente, el análisis se ha realizado teniendo en cuenta tres posibles valores para esta variable: 2, 4 y 6.

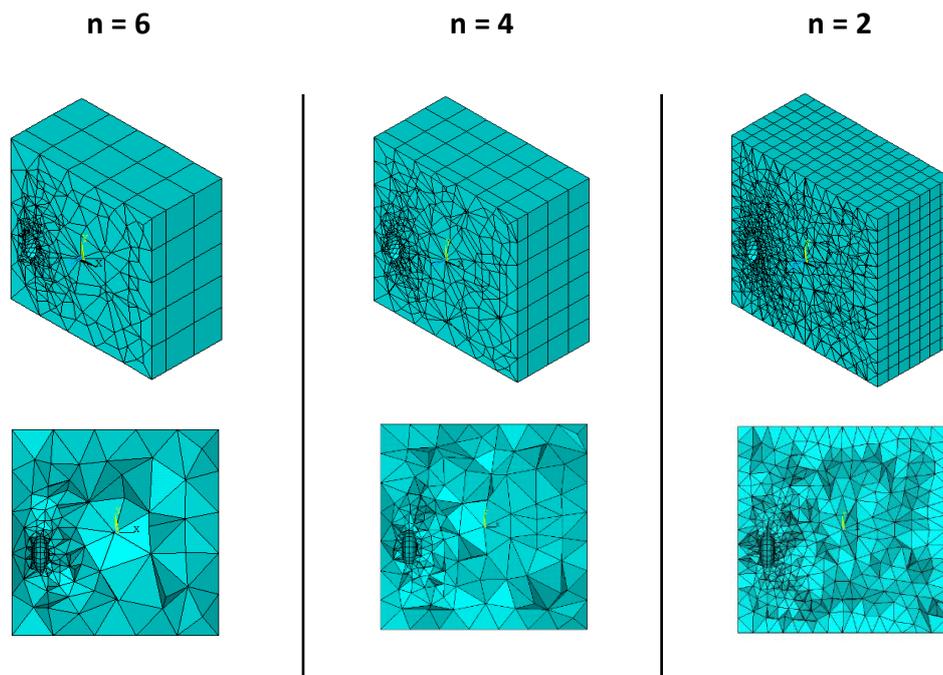


Figura 16. Mallado obtenido para  $h = 1.5$  en función de  $n$

A continuación, se expone una tabla que contiene los distintos mallados establecidos para cada modelo en función del tamaño de elemento SHELL y del global mediante elementos SOLID.

Tabla 2. Tamaño de los elementos analizados

<b>h</b>	<b>n</b>	<b>h'</b>	<b>k</b>
6	2	12	1
3		6	2
1,5		3	4
0,75		1,5	8
6	4	24	1
3		12	2
1,5		6	4
0,75		3	8
6	6	36	1
3		18	2
1,5		9	4
0,75		4.5	8

#### 4.4. Resultados del estudio de convergencia

En este apartado del análisis se pretende exponer los resultados obtenidos y, a partir de ello, poder determinar el tamaño de elemento óptimo a establecer para implementar un mallado que nos aporte la precisión suficiente sin recurrir a un coste computacional de resolución muy elevado.

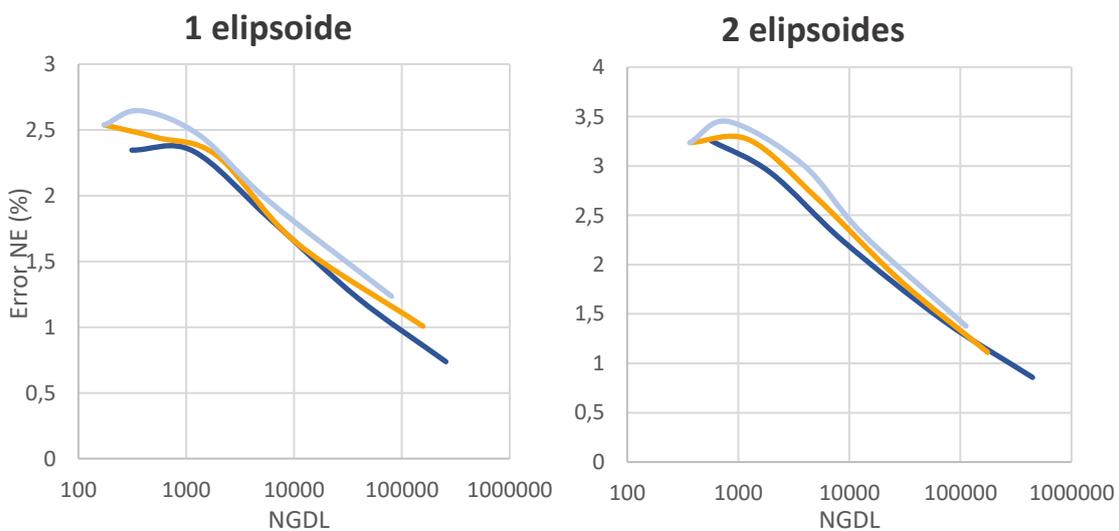
Los diagramas proporcionados en el apartado exponen las curvas obtenidas respecto al error en norma energética en función del número de grados de libertad del modelo numérico. Estas curvas se extraen mediante ajuste polinómico a partir de cuatro puntos correspondientes a mallados con diferentes tamaños de elemento establecidos.

Las curvas expuestas deberían representar una asíntota horizontal cuando el número de grados de libertad tiende a infinito, obteniendo así un error en norma energética igual a cero. No obstante, en muchas de las gráficas expuestas, este comportamiento no se reproduce debido a la carencia de puntos mediante los que se generan las curvas. Este hecho se debe a la dificultad de obtener resultados de mallados muy refinados debido a la limitación del coste computacional requerido en la resolución del modelo numérico.

En primer lugar, el estudio se focaliza en la influencia de la variable  $n$  en la precisión del modelo discretizado, tal y como hemos comentado anteriormente. Para ello, se extraen los resultados obtenidos para los valores de  $n$  fijados (2, 4 y 6), correspondientes a tres modelos numéricos. Estos modelos, a su vez, corresponden con el primer modelo analizado de cada número de elipsoides dispuestos en el mismo, es decir, un modelo con un elipsoide, otro con dos elipsoides y, finalmente, un modelo con cinco elipsoides.

Eso sí, los resultados representados corresponden a la implementación de mallados lineales, debido a la similitud de los obtenidos con estos respecto a los elementos cuadráticos. Así, se evita recurrir a un coste computacional elevado provocado por los nodos de mitad de lado de los elementos cuadráticos.

Así, los resultados recabados para la determinación del coeficiente multiplicador se exponen en la siguiente página.



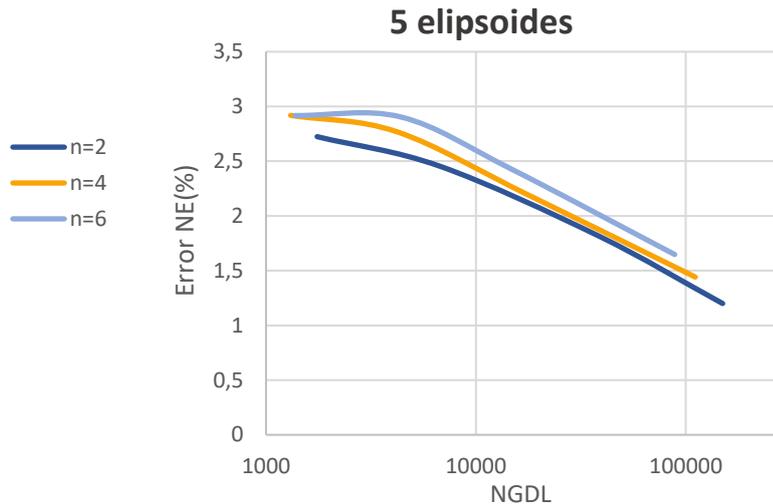


Figura 17. Error de la solución en Norma Energética obtenido para distinto número de elipsoides en función de  $n$ . Mallado con elementos lineales.

En el caso de la gráfica correspondiente al modelo de cinco elipsoides de la Figura 17, esta presenta un intervalo de estudio menor en cuanto al número de grados de libertad se refiere debido a la elevada potencia de cálculo requerida para mallados con menor tamaño de elemento. Este hecho se debe a la mayor presencia de elipsoides, lo cual conlleva un mayor refinamiento en las zonas próximas y, consecuentemente, incrementa el número de grados de libertad necesarios.

El comportamiento en términos de precisión de los modelos según el número de elipsoide es equiparable. En este caso, no observamos diferencias notables que pudieran provocar el incremento de concentradores de tensión. Cabe recalcar los errores obtenidos en el estudio, encontrándose todos ellos en un intervalo muy bajo entre 0,7% y 3,5%.

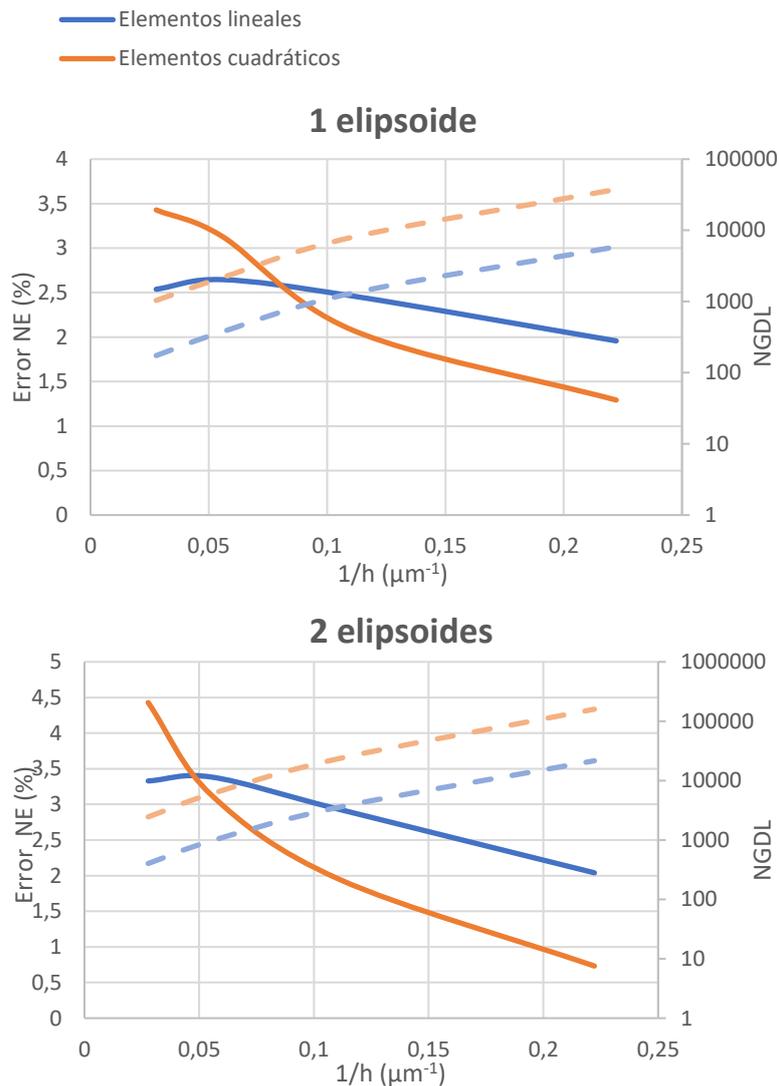
A simple vista, los diagramas demuestran que, a medida que el número de grados de libertad aumenta, el error decrece y, inversamente a ello, la precisión del modelo aumenta. El aumento del número de grados de libertad representa el refinamiento de la malla, es decir, la reducción progresiva del tamaño de elemento.

Por otra parte, se aprecia la reducida, aunque apreciable, influencia del coeficiente multiplicador  $n$  en el error obtenido. Se observa que, al reducir la variable  $n$  el error obtenido hace lo propio, también se reduce. Este comportamiento se ajusta al esperado, ya que al reducir la  $n$  implementamos un tamaño de elemento menor en el modelo numérico. Así, el coste computacional se comporta de manera inversa a la variable  $n$ , siendo esta menor a medida que el coste computacional aumenta.

Además, se aprecia que a pesar del aumento computacional que conlleva el empleo de un coeficiente  $n$  reducido, los errores obtenidos no difieren considerablemente respecto de mallados con un valor de  $n$  superior. Por tanto, debido a la similitud de los resultados obtenidos, el coste computacional ha sido el parámetro determinante en la elección de  $n$ . Con tal de minimizar el coste, el valor escogido para el coeficiente multiplicador ha sido el máximo estudiado, 6.

Una vez se dispone de todas las variables arbitrarias establecidas, se han obtenido los resultados para realizar la comparación entre elementos lineales y cuadráticos a fin de determinar cuál es más adecuado en el estudio de los límites resistente del tejido lamelar.

Siguiendo el mismo procedimiento descrito anteriormente para estudiar la influencia de la variable  $n$ , se lleva a cabo la comparación comentada en el anterior párrafo. Los resultados para ambos ordenes de interpolación empleados en el MEF se exponen en la Figura 18, donde las líneas continuas corresponden al error en norma energética y las líneas discontinuas al coste computacional.



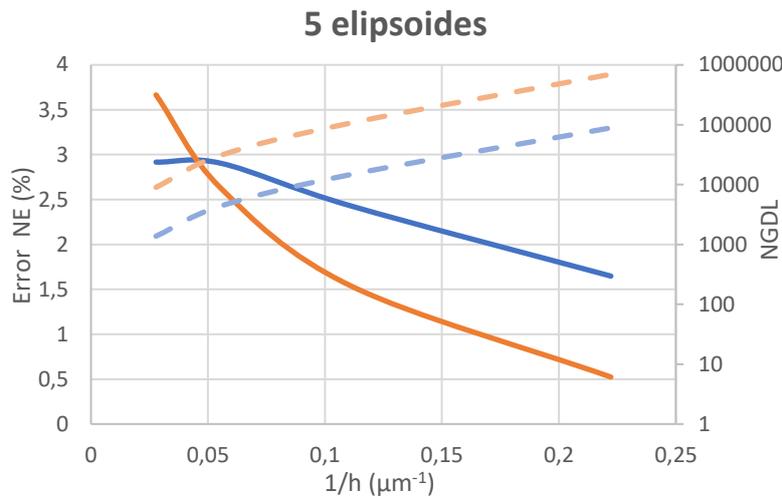


Figura 18. Error de la solución en Norma Energética obtenido para distinto número de elipsoides en función del orden de interpolación

Al igual que en el análisis de la influencia de la variable  $n$ , los diagramas proporcionados no nos muestran una diferencia notable según el número de elipsoides del modelo. Estos tres reflejan un comportamiento equiparable.

Tal y como se preveía, el error obtenido mediante el mallado con elementos cuadráticos proporciona errores inferiores a los obtenidos con elementos lineales. Cabe tener en cuenta que este fenómeno no se produce en todo el rango de tamaños de elemento estudiado, no cumpliéndose en el caso de mallados poco refinados. No obstante, los errores obtenidos con ambos tipos son similares, siendo la discrepancia registrada más significativa un 1,3%.

Respecto al coste computacional, se aprecia una importante diferencia según la tipología de elementos empleada. Se observa que a medida que el refinamiento es mayor, la discrepancia entre ambos tipos de elemento es superior, siendo los elementos cuadráticos aquellos que requieren mayores recursos computacionales. De hecho, estos últimos presentan una tendencia exponencial, en lo que a grados de libertad se refiere, a medida que el refinamiento es mayor.

Por ende, tras lo comentado en el apartado anterior, el coste computacional se define como el parámetro diferencial entre ambos ordenes de interpolación utilizados para resolver el modelo numérico. Así, para este estudio numérico del tejido lamelar óseo, el mallado con elementos lineales será el utilizado debido a la similitud en la precisión con el mallado cuadrático y con una demanda computacional menor.

Finalmente, se exponen los resultados obtenidos para los cinco modelos correspondientes a una porosidad de un 1% (cinco elipsoides) empleando elementos lineales, n=6:

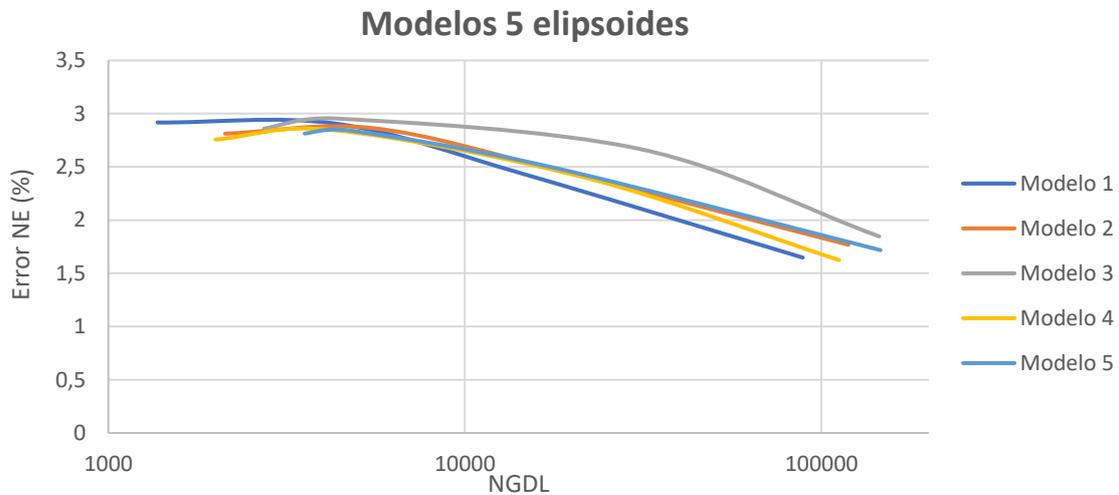


Figura 19. Error de la solución en Norma Energética obtenido para cinco modelos con disposición aleatoria de elipsoides, para un 1% de porosidad

En el diagrama anterior se observa que, el comportamiento descrito, en cuanto a precisión se refiere, es muy parecido a pesar de las diferentes disposiciones de los elipsoides en el modelo. Se confirma el intervalo sobre el que se encuentran los errores obtenidos mediante este mallado lineal, cuyo rango se encuentra entre 1,5% y 3% para los tamaños de elemento estudiado. Resultados muy positivos de cara a realizar el estudio tensional posterior.

No obstante, la curva correspondiente al modelo 3 presenta un error superior respecto al promedio de las otras curvas, lo cual puede deberse a la geometría del modelo. En este caso, al fijarse en la geometría presentada en este modelo, los elipsoides se encuentran posicionados más próximos, lo cual conlleva a una mayor proximidad entre los concentradores de tensión y, por tanto, a un aumento en los gradientes tensión/deformación.

## 4.5. Conclusiones

La importancia que adquiere el mallado establecido en el modelado numérico y, especialmente, en el análisis tensional que se pretende llevar a cabo es fundamental. El refinamiento en las zonas objeto de los concentradores de tensiones debe ser suficiente para representar convenientemente los gradientes de tensión/deformación producidos en las mismas, principales responsables del error de discretización del modelo.

En este análisis, la cuantificación del error de discretización y, por tanto, de la precisión del modelo, se ha atribuido al error en norma energética. No obstante, de acuerdo con los resultados expuestos, la influencia de las distintas variables analizadas en el mismo ha sido reducida, tal y como se observa la similitud de los resultados.

De manera conjunta, se ha prestado mayor atención a los recursos computacionales para la resolución del problema, expresados en el estudio a través del número de grados de libertad. Así, se ha determinado el valor de la variable  $n$  y el orden de interpolación de los elementos seleccionados (elementos lineales) de acuerdo a la minimización del coste computacional requerido.

El estudio ha permitido ubicar el intervalo sobre el cual se desempeña el error de discretización para los distintos tamaños de elementos estudiados, el cual se encuentra entre el 0,5% y 3,5%. Este hecho permite estimar el intervalo en el que se localiza la magnitud del error de los mallados implementados en el posterior análisis tensional, siendo esta de reducido valor.

Se debe enfatizar en el aumento de la porosidad del tejido y, por consiguiente, el número de elipsoides del modelo geométrico, lo cual conlleva a un requerimiento mayor de recursos computacionales manteniéndose el error de discretización en el intervalo comentado anteriormente. Se podría pensar que la reducción del volumen del modelo conllevaría a una reducción de los elementos del mallado, pero, debido al refinamiento en las proximidades de los elipsoides, estos encarecen finalmente el coste computacional. Por consiguiente, a medida que número de elipsoides presentes en el modelo aumenta, el error de discretización hace lo propio. No obstante, debido a la reducida porosidad del tejido óseo que se pretende analizar (máxima porosidad del 5%), este inconveniente no es tenido en cuenta.

## 5. Estudio numérico del comportamiento del tejido óseo en la micro escala

El principal objetivo de este trabajo es la estimación de los límites resistentes del tejido lamelar considerando la influencia de la densidad mineral ósea (BMD) y de la porosidad del mismo. La finalidad última es la propuesta de un modelo matemático que establezca la relación entre los dichos límites resistentes y las variables de interés. Para ello, recurrimos al modelado numérico mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF) que, junto a la información disponible en la literatura, nos permitirán llevar a cabo este estudio.

### 5.1. Modelo geométrico

El análisis llevado a cabo consiste en un modelo tridimensional que simula el comportamiento del tejido lamelar a estudiar. Este implementa las características del mismo y permite establecer o controlar las variables comentadas anteriormente, la BMD y la porosidad. En el caso de la última, el modelo geométrico implementa elipsoides a fin de simular las lagunas osteocitarias vacías que presenta en la realidad el tejido óseo.

Este modelo ha sido creado mediante el empleo de diferentes rutinas programadas y ejecutadas en MATLAB para posteriormente transferir e implementar la información al software de elementos finitos Ansys APDL, del cual se obtienen finalmente los resultados expuestos en el trabajo. En este estudio partimos de diversas rutinas previas, las cuales han sido modificadas para lograr los objetivos de nuestro análisis. Mediante la programación de scripts en Matlab, se crean y posicionan los elipsoides suavizados de manera aleatoria para finalmente obtener la representación geométrica del tejido lamelar, así como establecer las propiedades elásticas en el modelo. El control de las variables consideradas en el estudio se realiza a través de las rutinas. A continuación, se ejecuta, Ansys APDL en modo Batch para crea los modelos de elementos finitos. Finalmente, se lleva a cabo el postproceso y obtención de resultados.

#### 5.1.1. Celda unidad

La geometría empleada para realizar el estudio corresponde simplificada con un volumen cúbico de tamaño determinado que contiene dentro del mismo un número definido de elipsoides vacíos (cuya finalidad es el control de la porosidad). Así, el modelo referido representa la celda unidad del tejido lamelar óseo. La celda unidad supone un método de simplificación de la estructura del material, considerándose la porción más simple de la estructura.

Esta representación ha sido posible debido al conocimiento de las propiedades y comportamiento del tejido gracias a los estudios realizados anteriormente, lo cual nos evade de estudiar detalladamente un volumen representativo de este material.

El tamaño del cubo correspondiente al modelo de la celda unidad del material se ha establecido con 59,187  $\mu\text{m}$  de lado.

#### 5.1.2. Elipsoides

Como se ha comentado anteriormente, el control de la porosidad se ha llevado a cabo a través del número de elipsoides implementados en el modelo. En este caso, los elipsoides se regulan a través del tamaño de los semiejes, tal y como indica la expresión matemática que define un elipsoide, anunciada en la Ecuación (18).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (18)$$

Donde  $x$ ,  $y$ ,  $z$  son las coordenadas del elipsoide; y donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  representan las longitudes de los semiejes.

El semieje pequeño “a” mide 2  $\mu\text{m}$ ; el semieje intermedio “b” mide 4,5  $\mu\text{m}$ ; el semieje mayor “c” mide 11  $\mu\text{m}$ , siendo orientado paralelo a las fibras de colágeno del tejido [19]. Por tanto, los elipsoides quedan orientados paralelos a la carga aplicada en el análisis [20].

En un primer instante, la creación e implementación de los elipsoides en el modelo se efectuaba a través de las rutinas creadas en [7]. No obstante, en este TFG se ha programado una nueva rutina que obtiene, en términos geométricos, más precisión en la creación de los elipsoides. A continuación, se comenta el procedimiento de manera simplificada de proceder de cada formato y qué motivo nos ha conducido a tomar esta decisión.

La rutina creada por [7] consiste en la creación de una consecución de puntos correspondientes a la superficie del elipsoide y, a partir de ellos, se ensamblan las áreas que representan la superficie del mismo y se obtiene el volumen. Es decir, el elipsoide en su superficie está dividido en segmentos y estos, a su vez, en áreas. El número de segmentos establece la precisión del elipsoide, la cual es una variable que podemos controlar. No obstante, para crear adecuadamente un elipsoide se necesitaría una precisión infinita que permitiera reproducir el contorno real de esta figura geométrica.

En cambio, la rutina creada en este trabajo reproduce exactamente el volumen y contorno de un elipsoide. Partimos de una esfera de radio igual al mayor eje del elipsoide y, a partir de ella, escalamos la misma para obtener la forma del elipsoide mediante un proceso de corte de planos y adición de volúmenes.

Además de la representación exacta del elipsoide, cabe tener en cuenta el concentrador de tensiones que induce cada geometría, cuya importancia es vital en el estudio tensional a realizar. Al margen de la exactitud de la figura geométrica, el primer formato inducía a un concentrador de tensiones sobreestimado debido a las aristas que unen las diferentes inclinaciones de los segmentos, lo cual conduce a un posterior incremento de los resultados obtenidos. La Figura 20 muestra los elipsoides obtenidos con cada formato:

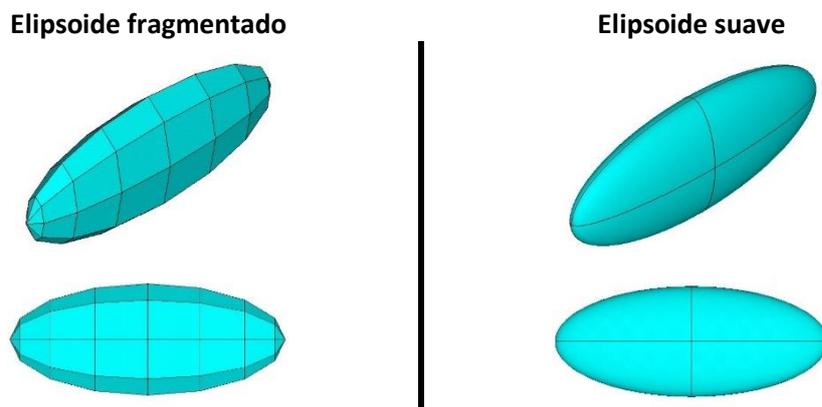


Figura 20. Comparación geometría elipsoides fragmentado-suave. Izqda: modelo previo [7], dcha.: trabajo actual

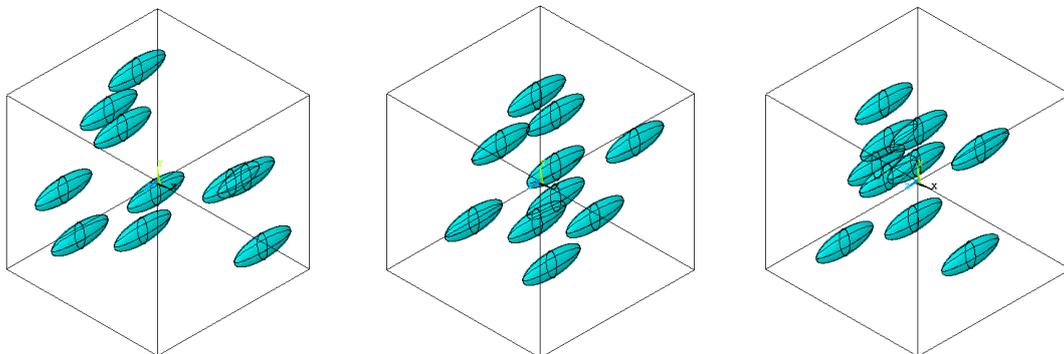
Tal y como se ha comentado anteriormente, el número de elipsoides queda establecido según el nivel de porosidad que se pretenda estudiar. Teniendo en cuenta que la totalidad del volumen de la celda unidad es el volumen del cubo, a continuación, se establecen el número de elipsoides necesarios correspondientes a cada porcentaje de porosidad analizado.

*Tabla 3. Relación entre la porosidad y el número de elipsoides que se implementan sobre el modelo*

Porosidad	Nº elipsoides
0,2%	1
0,4%	2
0,6%	3
1%	5
2%	10
3%	15
4%	20
5%	25

De cara a obtener el comportamiento resistente del tejido con la precisión adecuada, se han implementado diversos niveles de porosidad en el intervalo 0-1%. El motivo se comenta en los apartados posteriores.

Una vez han sido creados los volúmenes necesarios, tanto el cubo como los elipsoides, se efectúa el posicionamiento aleatorio de cada elipsoide dentro del cubo para, posteriormente, extraer este volumen del total de la celda unidad.



*Figura 21. Disposición aleatoria de elipsoides para una porosidad del 2%*

## 5.2. Propiedades del material: tejido lamelar no poroso

Las propiedades elásticas del tejido lamelar óseo vienen inferidas de la literatura, extraídas a través de ensayos experimentales con tal de ampliar el conocimiento respecto al comportamiento de los huesos. Como se ha comentado anteriormente, la escala de estudio del presente trabajo permite homogenizar las propiedades del tejido (no se considera distinción entre las propiedades a nivel de composición molecular), las cuales son implementadas sobre el modelo numérico.

No obstante, como se ha comentado anteriormente, existen diversos factores (genéticos, nutricionales, ambientales y hormonales) que influyen negativa o positivamente en la consecución de las propiedades resistentes del material óseo. Además, cabe tener en cuenta el

emplazamiento del tejido óseo estudiado, ya que el conjunto óseo adapta su morfología y, por tanto, su capacidad resistente, en función de los esfuerzos recibidos en una determinada zona.

Los datos proporcionados por la literatura precisan las propiedades resistentes de un determinado tejido lamelar óseo, situado en el fémur (hueso más largo y resistente del cuerpo humano) [2]. Respecto a la orientación de estudio de las fibras del tejido, el estudio se centra en las fibras orientadas longitudinalmente con el eje de la osteona, así como aquellas que están orientadas alternativamente transversal y longitudinalmente. Además, el estudio se realizó simulando las condiciones húmedas a las que está expuesto el material, lo cual reduce significativamente sus propiedades resistentes.

Las constantes elásticas del material se infieren a partir de las ecuaciones desarrolladas en la literatura [1]. Estas ecuaciones son estimadas en función de la BMD del tejido estudiado y son características del tejido óseo con las fibras orientadas longitudinalmente.

$$E_l^{lam} = 10^8(130 BMD^{1.2} + 6.4) \quad (19)$$

$$E_t^{lam} = 10^7(770 BMD^{0.8} + 1.54) \quad (20)$$

$$\nu_{tt}^{lam} = \frac{0.6}{(1.1 BMD + 1)^{10}} + 0.38 \quad (21)$$

$$\nu_{tl}^{lam} = 0.253 BMD^3 - 0.84 BMD^2 + 0.77 BMD + 0.01 \quad (22)$$

$$G_{tl}^{lam} = 10^6(3300 BMD^{0.9} + 3) \quad (23)$$

$$G_{tt}^{lam} = \frac{E_t^{lam}}{2(1 + \nu_{tt}^{lam})} \quad (24)$$

Donde los módulos de Young  $E$  y los módulos de rigidez a cortantes  $G$  se expresan en Pascales (Pa). El contenido mineral  $BMD$  se expresa en  $g/cm^3$ ,  $l$  representa la dirección longitudinal del tejido paralela a las fibras de colágeno (dirección 1) y  $t$  representa las direcciones transversales a las fibras (direcciones 2 y 3).

La densidad mineral ósea (BMD) en estudio se ajusta al contenido mineral de las osteonas ensayadas en [2], cuyo tejido presenta una orientación de las fibras predominantemente longitudinal. Así, se estudiaron dos niveles de densidad mineral mediante microradiografía, correspondientes a los límites inferior (fase inicial de calcificación) y superior (contenido máximo de calcio), cuyos valores son  $BMD_{min} = 0,477 g/cm^3$  y  $BMD_{max} = 0,875 g/cm^3$ . El límite inferior fue obtenido descalcificando químicamente una osteona en la fase de máximo contenido mineral, lo cual resta cierta naturalidad al ensayo. Además, cabe mencionar que existen numerosos estudios que establecen el intervalo mineral presente en el tejido óseo, encontrándose este entre  $0,7 - 1,2 g/cm^3$  [21], lo cual difiere en cierta medida de los valores anteriores. No obstante, debido a la complejidad del estudio mineral y la insuficiente información para llevar a cabo el estudio resistente para este último intervalo, este trabajo centra su estudio resistente para los niveles de contenido mineral establecidos en [2].

En cuanto a la porosidad, el trabajo limita su estudio a la porosidad natural presente en el tejido lamelar óseo. Se omite aquella cuyo origen se debe a una alteración funcional de las células ocasionada por enfermedades como la osteoporosis, menopausia en el caso de las mujeres, etc. Como se ha comentado en el apartado 2.1.2, al nivel de profundidad estudiado, la porosidad natural comprende la originada por las lagunas en que residen los osteocitos, fundamentales en

el proceso de remodelación, y los canalículos que comunican estas lagunas. Según la literatura, este porcentaje de porosidad natural se encuentra en el intervalo 1-5% [22].

Además, para abordar el estudio resistente y establecer cierta continuidad entre el presente trabajo y la información proporcionada en la literatura, se necesita establecer las propiedades en términos de porosidad del hueso sano, definido así para las osteonas ensayadas en [2]. En este trabajo, se considera como nivel de porosidad natural correspondiente a un tejido óseo sano un 1%.

### 5.3. Mallado

El mallado adquiere una importancia fundamental en el estudio resistente llevado a cabo debido a la influencia que presenta en los resultados obtenidos que, en este caso, son tensiones. De ahí la necesidad de determinar el nivel de detalle de la malla en las proximidades a los concentradores de tensión, donde el material sufre elevados gradientes de tensión. Además, se debe satisfacer la periodicidad de la celda unidad.

De acuerdo con las conclusiones obtenidas del análisis de convergencia realizado y comentado en el apartado 4 del presente Trabajo, se ha unificado el criterio de implementación de la malla para los diversos modelos y niveles de porosidad estudiados, haciendo uso de elementos lineales. Así, el tamaño de los elementos en la proximidad al concentrador de tensiones se establece como  $h' = 1$  y el tamaño de los elementos de la celda unidad se establece como  $h' = 6$ , expresados en  $\mu\text{m}$ . Por ende, el coeficiente multiplicador  $n$  presenta el valor establecido en el análisis, el cual es 6.

El proceso de mallado del modelo geométrico se ha realizado mediante el empleo de una macro implementada directamente sobre Ansys APDL que generaba la malla con las condiciones y tamaños de elemento comentados en el párrafo anterior.

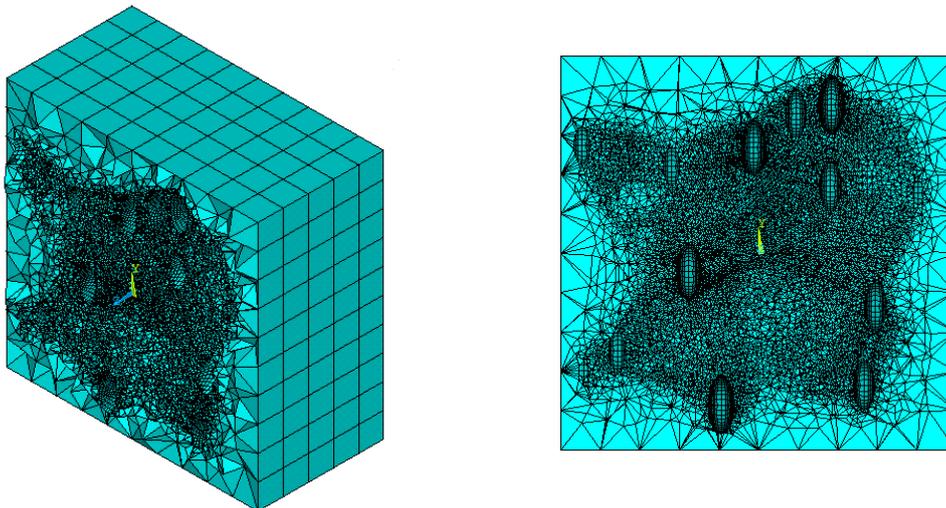


Figura 22. Visualización de la malla interna en vista isométrica (izquierda) y perfil (derecha) para una porosidad 5% (25 elipsoides). Vista del cubo en corte en el eje Z.

Al representar una sección del eje Z, la Figura 22 no ilustra en su totalidad la cuantía de elipsoides correspondientes al nivel de porosidad establecido, únicamente aquellos seccionados en ese plano.

Respecto al error de discretización, recogido a través del porcentaje de error en norma energética, el proceso de mallado establecido implica un error no superior en ningún caso al 10%, lo cual es adecuado de cara a establecer los límites resistentes del tejido lamelar óseo.

#### 5.4. Condiciones de carga

El modelo numérico de la celda unidad del tejido lamelar óseo, se va a someter a cargas a tracción con tal de establecer los límites resistentes para los diversos niveles de porosidad natural estudiados. En este apartado se pretende exponer las condiciones implementadas sobre el modelo a fin de alcanzar el objetivo del presente trabajo.

Como ya se ha comentado anteriormente, el objetivo de este estudio es obtener los límites resistentes a tracción del tejido lamelar debido a que este está solicitado principalmente a esfuerzos de tracción, de ahí que el estado de cargas sea uniaxial. A continuación, se explica el método de aplicación de las cargas sobre el modelo en la dirección longitudinal de la osteona y, por tanto, paralela a las fibras. En el caso de la aplicación de las cargas en las direcciones transversales a la orientación de las fibras, se procedería del mismo modo.

A tal efecto, la carga se aplica en la dirección de las fibras sobre la superficie superior en esta misma dirección (dirección 1). En el caso de las restricciones en desplazamientos, se restringe el movimiento en la superficie inferior en la dirección 1 y en las direcciones 2 y 3 se aplica el mismo, pero en este caso sobre una arista. De este modo se elude el movimiento de sólido rígido del modelo.

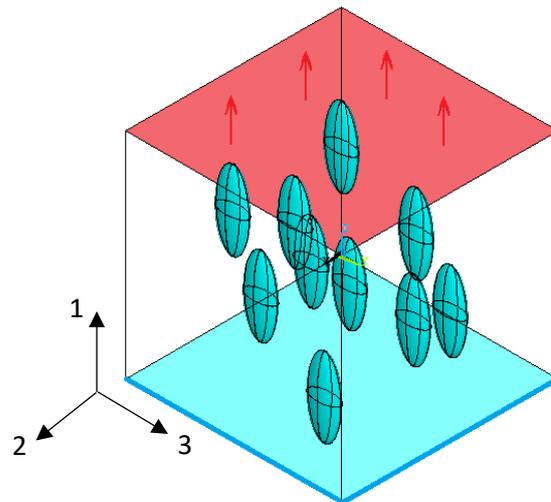


Figura 23. Visualización del estado cargas en la dirección 1 para una porosidad de 2%

En la Figura 23 se remarcan las superficies de aplicación de la carga y las restricciones comentadas en el párrafo anterior. La zona superior, remarcada en rojo, representa la superficie de aplicación de la carga en la dirección 1, la cual corresponde con la dirección de las fibras. La zona inferior, coloreada en azul, representa las restricciones en desplazamientos impuestas sobre el modelo, aplicándose la restricción de la dirección 1 sobre esta superficie. En esta última zona, sobre las aristas destacadas se aplica la restricción en desplazamientos en las direcciones 2 y 3.

## 5.5. Procedimiento de análisis

Este apartado pretende exponer el método de obtención de los límites resistentes del tejido óseo mediante análisis numérico en las tres direcciones principales del material. Todo ello es posible gracias a la información recopilada en los ensayos experimentales a tracción realizados en [2].

Este artículo proporciona la información suficiente para obtener el límite resistente a tracción del tejido no poroso para cada dirección principal del mismo, cuyo conocimiento permite calcular posteriormente los límites resistentes a tracción para los niveles de porosidad restantes.

Cabe tener en cuenta que este artículo estudió el comportamiento con dos grados de calcificación de la osteona: fase inicial de calcificación y máximo contenido de calcio. Por ende, este estudio analiza los límites resistentes para ambos grados de contenido mineral. El procedimiento de obtención de los mismos no varía en función de la densidad mineral ósea (BMD) en estudio.

Asimismo, al presentar tal heterogeneidad en su morfología, se han analizado diversos modelos con los elipsoides dispuestos aleatoriamente para cada nivel de porosidad, a fin de obtener un intervalo de resultados más amplio y que se ajuste en mayor medida a la realidad. En concreto, para cada nivel de porosidad se han examinado cinco modelos diferentes, haciendo un total de 25 modelos para cada valor de BMD.

A continuación, la Figura 24 reúne, en formato gráfico, el procedimiento llevado a cabo para la obtención de los límites resistentes en la dirección paralela a las fibras (dirección 1) estableciendo una BMD determinada, considerando un modelo para cada nivel de porosidad.

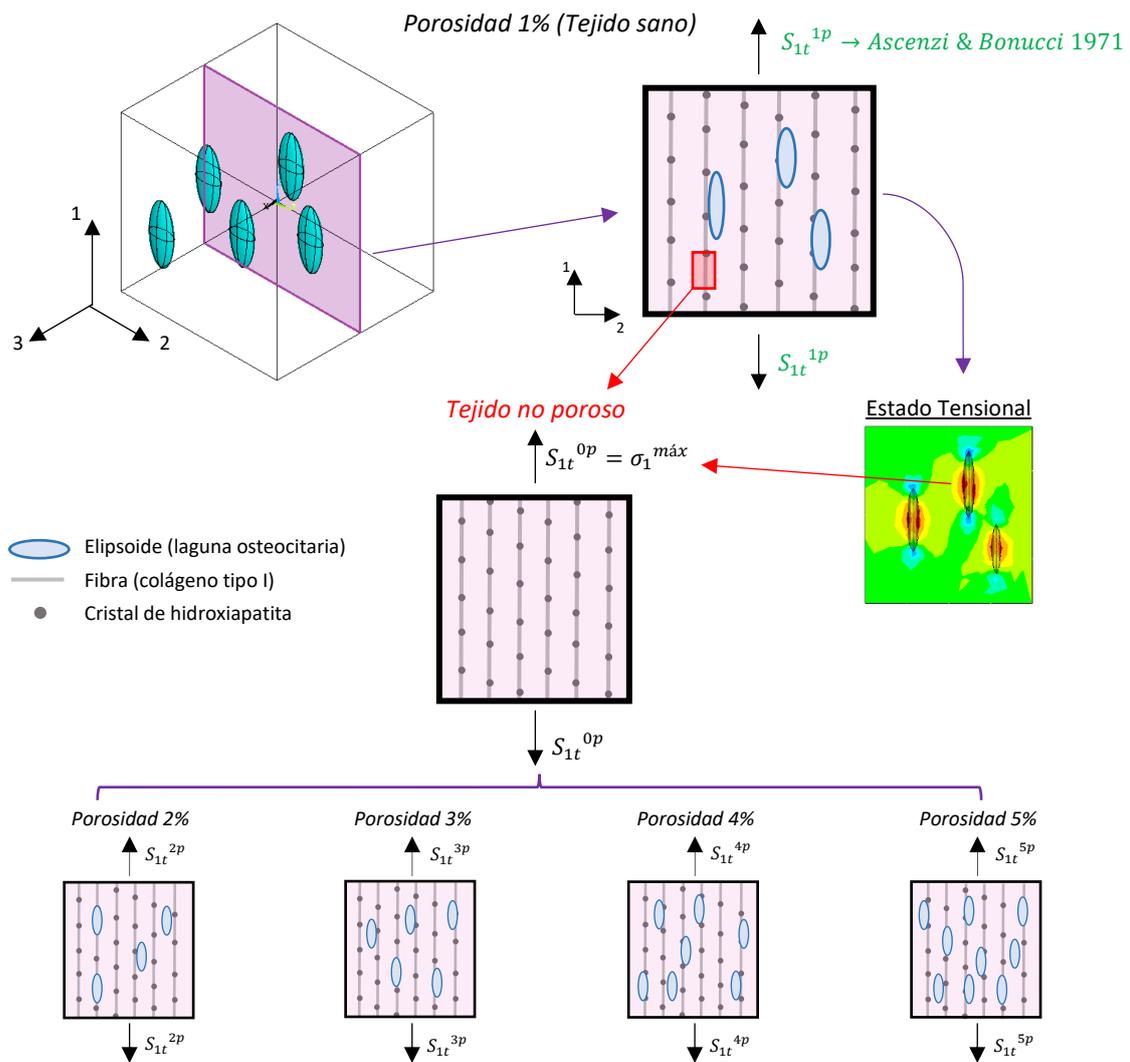


Figura 24. Esquema procedimiento de obtención límites resistentes en la dirección 1

### 5.5.1. Estimación de los límites resistentes del tejido lamelar no poroso

El tejido no poroso establece la resistencia del tejido lamelar óseo, constituido por las fibras de colágeno tipo I junto a la matriz ósea, sin la presencia de discontinuidades geométricas fruto de la morfología del tejido y de los procesos de remodelación ósea. De este modo, la resistencia de este tejido es superior a la realmente ofrecida por el tejido lamelar, aunque su obtención es fundamental de cara a obtener los límites resistentes a tracción para los diversos niveles de porosidad.

Para abordar la obtención del límite resistente del tejido no poroso, resulta necesario disponer como mínimo de un límite resistente para una porosidad conocida. Aunque la literatura proporciona mediante ensayos experimentales el límite resistente para un hueso sano, el nivel de porosidad ensayado no se determina. No obstante, de acuerdo con lo establecido en la literatura, se asume que el nivel de porosidad correspondiente a un hueso sano es un 1%.

La literatura proporciona directamente el límite resistente a tracción del tejido sano en la dirección de las fibras para ambos valores de *BMD*. En el caso del límite resistente en la dirección transversal a las fibras, su obtención necesita del empleo de la regla de las mezclas de los materiales compuestos puesto que la literatura proporciona el límite resistente transversal para una osteona cuya orientación de las fibras se alterna  $90^\circ$  en las sucesivas lamelas.

Asumiendo los espesores y módulos de Young establecidos en la literatura según la orientación de las fibras, se puede calcular el límite resistente en la dirección transversal de las fibras.

Se considera  $t_{lon} = 2,4 \mu\text{m}$  y  $t_{trans} = 0,8 \mu\text{m}$  [16] mientras que los módulos de Young son  $E_{lon} = 11713,14 \text{ MPa}$  y  $E_{trans} = 6934,39 \text{ MPa}$  [2].

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{lon} = \varepsilon_{trans} \quad (25)$$

$$E_1 = E_{lon} \cdot \vartheta_{lon} + E_{trans} \cdot \vartheta_{trans} = E_{lon} \cdot \frac{t_{lon}}{t_{lon} + t_{trans}} + E_{trans} \cdot \frac{t_{trans}}{t_{lon} + t_{trans}} \quad (26)$$

$$\sigma_{trans} = E_{trans} \cdot \varepsilon_1 = E_{trans} \cdot \frac{S_{l-t}^{1p}}{E_1}, \quad \text{donde } \sigma_{trans} = S_{2t}^{0p} = S_{3t}^{0p} \quad (27)$$

$$\sigma_{lon} = E_{lon} \cdot \varepsilon_1 = E_{lon} \cdot \frac{S_{l-t}^{1p}}{E_1} \quad (28)$$

Donde  $\varepsilon_i$  y  $E_i$  es la deformación y el módulo de Young respectivamente en la dirección  $i$  del material;  $\vartheta_j$  y  $\sigma_j$  es la fracción en volumen y la tensión soportada en las lamelas según la orientación de las fibras respecto al eje de la osteona;  $S_{l-t}^{1p}$  es el límite resistente a tracción de la osteona cuyas lamelas están alternadas  $90^\circ$  según la literatura [2].

El valor de  $S_{l-t}^{1p}$  ha sido estimado de manera aproximada a partir de la Figura 25, reproducida en [2], siendo 50 MPa el valor correspondiente al máximo contenido mineral de la osteona y 40 MPa al mínimo.

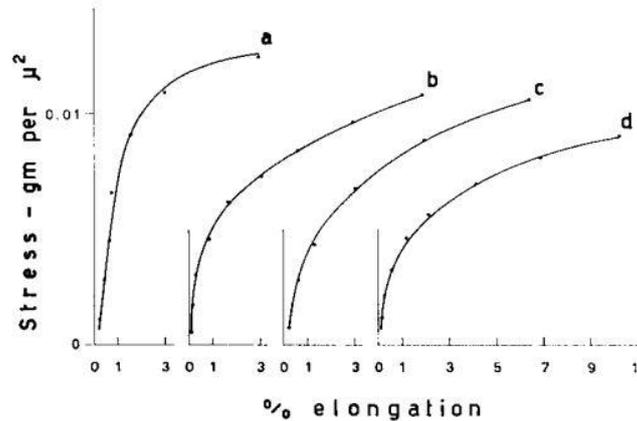


Figura 25. Curvas tensión-deformación correspondientes a cuatro tipologías de osteona en condiciones húmedas. (a) y (c) corresponden a osteonas con las fibras orientadas longitudinalmente con el contenido mineral máximo y mínimo respectivamente. (b) y (d) corresponden a osteonas cuyas lamelas están orientadas sucesivamente formando un ángulo de  $90^\circ$ , para el contenido mineral máximo y mínimo respectivamente

La Tabla 4 recoge los valores considerados en este trabajo, los cuales corresponden con los límites resistentes obtenidos mediante ensayos experimentales en [2] (en negrita), así como los límites resistentes estimados en la dirección transversal mediante la Ecuación (27). Estos corresponden con el límite de fluencia del material cuando este experimenta un alargamiento porcentual del 2%.

Tabla 4. Límites resistentes a tracción en función de la BMD del tejido lamelar óseo

<b>BMD</b> [g/cm <sup>3</sup> ]	<b>S<sub>t</sub><sup>1p</sup></b> [MPa]	<b>S<sub>t-t</sub><sup>1p</sup></b> [MPa]	<b>S<sub>2t</sub><sup>1p</sup></b> [MPa]	<b>S<sub>3t</sub><sup>1p</sup></b> [MPa]
0,875	114,2865	50,00	32,96	32,96
0,477	107,4195	40,00	30,75	30,75

Se podría suponer que el tejido se comportaría del mismo modo en las direcciones 2 y 3, ya que estas presentan el mismo límite resistente para un tejido sano. No obstante, cabe tener en cuenta la disparidad de las dimensiones de los ejes de las lagunas osteocitarias en función de la dirección del tejido, las cuales afectan directamente a los efectos del concentrador de tensiones. De ahí que el comportamiento en ambas direcciones sea totalmente distinto.

El límite resistente correspondiente a la dirección de aplicación de la carga obtenido experimentalmente se aplica al modelo numérico respectivo a 1% de porosidad. En el caso del límite resistente en las direcciones transversales a las fibras, se hace uso del límite estimado. Una vez calculada la solución numérica, se examina la tensión máxima alcanzada en la dirección de aplicación de la carga, obteniéndose así el límite resistente del tejido no poroso para el modelo en cuestión.

No obstante, el procedimiento de obtención del tejido no poroso difiere según la dirección del límite que se pretende calcular, longitudinal (paralela a las fibras) o transversal. De tal modo que el límite resistente del tejido no poroso en la dirección de las fibras se obtiene promediando los cinco valores calculados correspondientes a los cinco modelos analizados.

En cuanto al límite resistente transversal, tanto para el tejido no poroso como el poroso, la complejidad es mayor. El análisis numérico proporciona las tensiones en las direcciones transversales del tejido (direcciones 2 y 3) aunque se desconoce el tamaño del eje menor sobre el que se aplicó la carga en las lamelas transversales durante el ensayo experimental realizado en [2]. Por consiguiente, una vez obtenido el promedio de las tensiones en las dos direcciones transversales para los cinco modelos, el límite resistente del tejido para una determinada porosidad se obtiene promediando ambos valores.

$$\bar{S}_t = \frac{\bar{S}_2 + \bar{S}_3}{2} \quad (29)$$

Donde  $\bar{S}_t$  representa el límite resistente en las direcciones transversales a la dirección de la fibra para una determinada porosidad;  $\bar{S}_i$  representa el límite resistente en la dirección principal  $i$  del tejido lamelar.

### 5.5.2. Estimación de los límites resistentes del tejido lamelar poroso

Una vez calculado el límite resistente no poroso, el estudio se limita a la obtención de los límites resistentes del tejido lamelar óseo en los niveles de porosidad natural acordes a la realidad, entre 1% y 5%.

Según el criterio seleccionado, Máxima Tensión, el colapso biomecánico del material se producirá cuando alguna de las tres direcciones principales del material alcance el límite resistente en la misma dirección.

La obtención de estos límites resistentes del material mediante análisis numérico se basa en un proceso iterativo de aplicación de cargas. El límite resistente se halla cuando la carga aplicada en una determinada dirección genera una tensión  $\sigma_i^{máx}$  en alguna de las tres direcciones principales del modelo igual o superior a su límite resistente no poroso en esa misma dirección.

Para facilitar el proceso de obtención de estos límites resistentes para cada nivel de porosidad ( $S_i^{2p}$ ,  $S_i^{3p}$ ,  $S_i^{4p}$ ,  $S_i^{5p}$ ) se hace uso de una macro implementada sobre Ansys APDL. El nivel de precisión del proceso iterativo es decimal, es decir, los límites obtenidos para cada modelo y nivel de porosidad presentan un decimal, siendo el valor determinado el promedio de los obtenidos.

Cabe tener en cuenta que, en el caso del límite resistente transversal a la dirección de la fibra para cada nivel de porosidad, este se obtiene promediando los valores estimados en el análisis numérico para las direcciones 2 y 3 del tejido, tal y como hemos comentado en el apartado 5.5.1.

## 6. Resultados. Propuesta de un modelo matemático.

El presente apartado expone los resultados obtenidos en Ansys APDPL mediante el modelo numérico establecido, el cual representa la celda unidad del tejido lamelar óseo. Estos resultados corresponden con los límites resistentes del tejido sometido a cargas a tracción cuya orientación predominante de las fibras es longitudinal. De este modo, se pretende justificar el cumplimiento de los objetivos iniciales del trabajo.

Cabe tener presente las hipótesis y simplificaciones asumidas en el análisis numérico, así como el criterio de fallo seleccionado (Criterio de Máxima Tensión), cuyos motivos se han comentado en anteriores apartados.

El estudio recoge los resultados obtenidos de 210 análisis numéricos realizados en función de la porosidad natural y la densidad mineral ósea *BMD*. Dos valores de *BMD* han sido considerados, siendo 105 los modelos para cada *BMD* examinados. Estos 105 modelos reúnen los cinco análisis numéricos realizados para cada nivel de porosidad natural, todo ello para cada estado de cargas según la dirección principal del tejido óseo. Basándonos en [2], se han estimado los valores correspondientes a los límites inferior y superior del contenido mineral presente en el tejido óseo humano.

### 6.1. Límites resistentes tejido no poroso

El modelo numérico analizado, como resultado de la homogenización de las propiedades del tejido lamelar según la dirección principal del mismo, permite obtener directamente el límite resistente del tejido no poroso a raíz de disponer el límite resistente del material para una porosidad dada. Este último dato, inferido de la literatura [2], se recoge en la Tabla 4.

Como resultado de la aplicación del límite resistente correspondiente al tejido sano, el análisis numérico cuantifica la tensión máxima alcanzada en la dirección de aplicación de la carga. De este modo se obtiene el límite resistente para el tejido no poroso, el cual se sitúa en las proximidades de los concentradores de tensiones generados por las lagunas osteocitarias. De ahí la necesidad de implementar un mallado suficientemente discretizado sobre el modelo que permita reproducir con exactitud los gradientes de tensión generados.

La Figura 26 representa gráficamente las tensiones generadas en el tejido (paralelas a la carga) desde una vista en corte del modelo numérico estudiado, donde se aprecia el efecto de los concentradores de tensión para cada dirección principal del tejido. De este modo, se pretende determinar las zonas en las que se alcanzan las máximas tensiones en cada dirección, resultado de los concentradores de tensión inducidos por las discontinuidades geométricas presentes en el modelo.

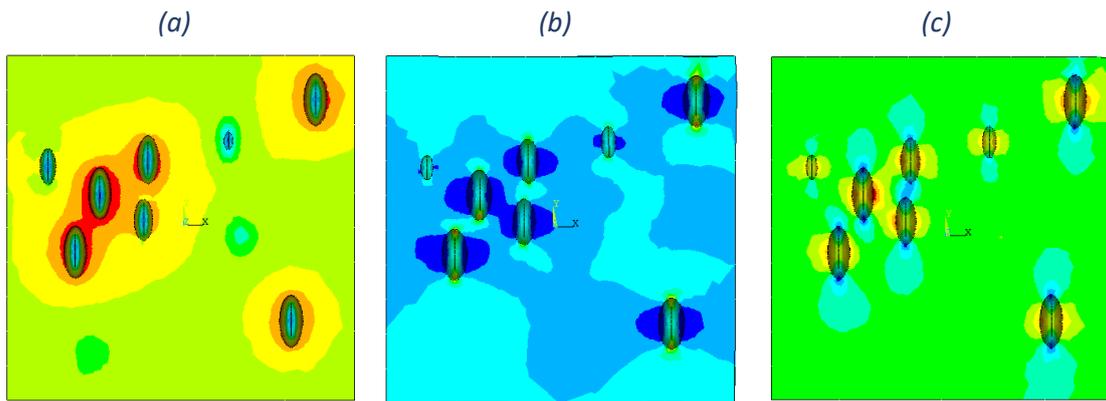


Figura 26. Vista en corte Z del gradiente de tensiones en la dirección de aplicación de la carga; (a) dirección 1, (b) dirección 2 y (c) dirección 3. Modelo correspondiente a 2% de porosidad

A simple vista, podría decirse que el efecto del concentrador de tensiones es considerablemente significativo en la dirección de las fibras respecto a las direcciones transversales (a). En esta dirección las tensiones máximas aparecen alrededor de la periferia de los elipsoides, siendo las tensiones obtenidas del mismo orden que la carga aplicada en esta dirección. No obstante, de acuerdo a las tensiones registradas y a la relación carga-tensiones, el efecto del concentrador de tensiones presenta una mayor relevancia en la dirección 2 del tejido. Las tensiones alcanzadas en la dirección 2 presentan el máximo en el contorno inferior y superior de los elipsoides, registrándose valores del orden superior a la carga aplicada en la misma dirección, hecho justificado en el siguiente párrafo. Asimismo, el concentrador de tensiones en la dirección 3 no es significativo.

La gráfica (b) correspondiente a las tensiones en la dirección 2 manifiesta la influencia del concentrador de tensiones de forma más pronunciada. A pesar de la uniformidad de las propiedades resistentes en las direcciones transversales, tenidas en cuenta a efecto de homogeneizar el tejido óseo, las direcciones 2 y 3 presentan un comportamiento totalmente distinto. Esta disparidad en tensiones en las direcciones transversales se debe principalmente a las discontinuidades geométricas presentes en el modelo (elipsoides), los cuales se definen en función del tamaño de los ejes que lo conforman. El tamaño de los ejes del elipsoide varía en función del ángulo en la dirección transversal, habiéndose definido el tamaño del eje en la dirección 2 inferior al mismo de la dirección 3. Queda comprobado que, a menor tamaño de eje en la dirección transversal, la apariencia del contorno del elipsoide a una grieta se incrementa y, por ende, el efecto del concentrador de tensiones aumenta en dicha dirección.

Una vez visto el efecto de los concentradores de tensión, se exponen los resultados obtenidos en relación al límite resistente del tejido no poroso en las tres direcciones principales del mismo.

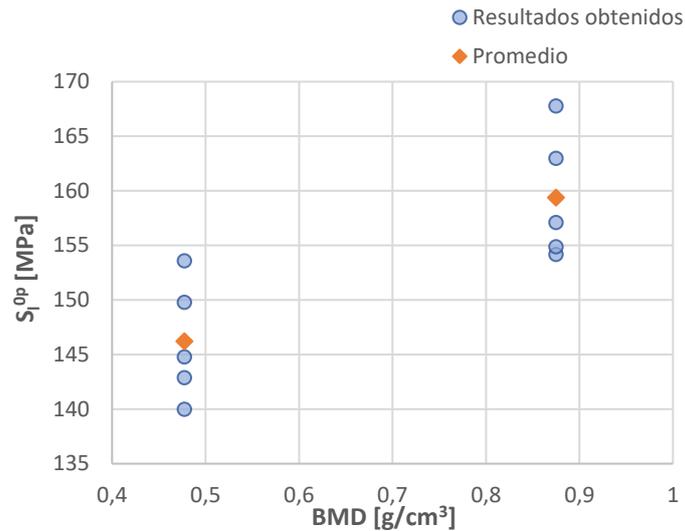


Figura 27. Diagrama de los límites resistentes del tejido no poroso en la dirección de las fibras

La Figura 27 representa el límite resistente del tejido lamelar en la dirección paralela al eje de la osteona, así como de las fibras. Como se podía prever, a medida que el contenido mineral  $BMD$  aumenta el límite en esta dirección hace lo propio. Considerando el tejido con máximo contenido mineral, cuya  $BMD = 0,875 \text{ g/cm}^3$ , su valor aproximado es  $159,4 \pm 5,8 \text{ MPa}$  para el promedio de los resultados obtenidos. En el caso del tejido en la fase inicial de mineralización, cuya  $BMD = 0,477 \text{ g/cm}^3$ , el límite obtenido es  $146,2 \pm 5,5 \text{ MPa}$  para el promedio de los resultados obtenidos. Las tensiones registradas en las direcciones transversales no influyen en el fallo mecánico en este estado de carga.

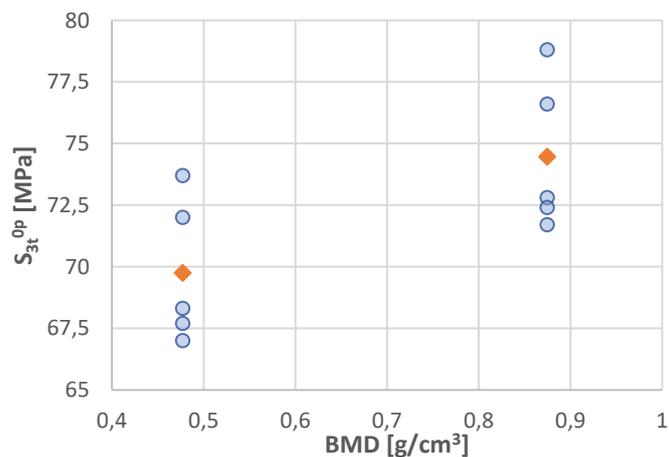


Figura 28. Diagrama de los límites resistentes del tejido no poroso en la dirección perpendicular a las fibras

La Figura 28 presenta los límites resistentes del tejido no poroso en la dirección 3 en función de la  $BMD$ .

En el caso de la dirección 2 del tejido, se asume que el límite resistente del tejido no poroso es el obtenido para la dirección 3, el cual se considera el límite más restrictivo por los motivos que se comentan en el siguiente párrafo. Del mismo modo que el límite longitudinal del tejido, los límites transversales son proporcionales a la  $BMD$ .

Al aplicar la carga en la dirección 2, las tensiones obtenidas en la misma dirección del tejido son muy elevadas, como resultado del efecto del concentrador de tensiones y cuyos motivos se han comentado anteriormente. No obstante, para el límite transversal establecido del tejido sano, las tensiones en la dirección 3 exceden el límite resistente del tejido no poroso para esta dirección. De acuerdo con el criterio de Máxima Tensión, se entiende que, en caso de aplicar la carga en la dirección 2, el fallo mecánico es resultado de las tensiones originadas en la dirección 3. Por tanto, la resistencia del tejido en la dirección 2 queda restringida a las tensiones alcanzadas en la dirección 3, siendo establecido el límite resistente del tejido no poroso el mismo que en la dirección 3. El empleo de un criterio interactivo sería más adecuado a esta circunstancia, aunque, de este modo, el estudio se posiciona del lado de la seguridad. A continuación, se exponen las tensiones obtenidas en la dirección 3 cuando la carga es aplicada en la dirección 2.

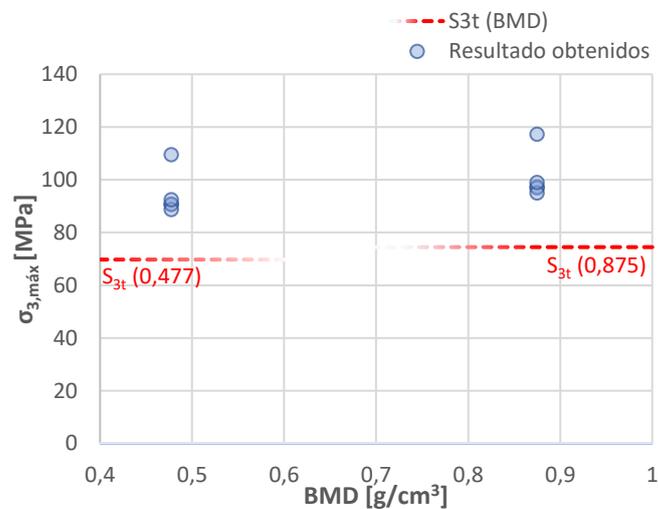


Figura 29. Tensiones máximas en la dirección 3 al aplicar el límite resistente transversal del tejido sano en la dirección 2, en función de la BMD

Tal y como se aprecia en la Figura 29, las tensiones obtenidas en la dirección 3 superan el límite resistente propio de esta dirección, de ahí que este límite resistente se considere el más restrictivo en caso de aplicar la carga a tracción en la dirección 2. Por ende, queda establecido este límite como el propio para el tejido no poroso tanto de la dirección 3 como de la dirección 2.

En cuanto al límite resistente en la dirección 3, el fallo se produce por las tensiones alcanzadas en esa misma dirección, en ningún caso por las generadas en las dos direcciones restantes de estudio. Para el tejido con máximo contenido mineral, el valor aproximado es  $74,5 \pm 3,1$  MPa para el promedio de los resultados obtenidos. Respecto al tejido en fase inicial de calcificación, el valor obtenido es  $69,7 \pm 3,0$  MPa para el promedio de los resultados obtenidos.

Estimados los límites resistentes en las direcciones 2 y 3 del material, el límite resistente transversal resulta del promedio de los dos primeros, siendo el valor obtenido para el contenido mineral máximo del tejido  $74,5 \pm 3,1$  MPa. En cuanto al tejido en fase inicial de calcificación, el valor obtenido es  $69,7 \pm 3,0$  MPa. Se verifica que la resistencia del tejido en las direcciones transversales a la fibra decae con respecto a la dirección de las mismas, hecho que podía ser supuesto debido a los límites resistentes proporcionados en la literatura.

## 6.2. Límites resistentes tejido poroso

La porosidad inferida en este análisis se halla en el intervalo de porosidad natural del tejido lamelar óseo, el cual corresponde en términos porcentuales entre el 1% y el 5%. Este apartado recoge los resultados del análisis numérico en relación a los límites resistentes del tejido en función de la porosidad y las dos *BMD* estudiadas a partir del límite resistente del tejido no poroso estimado en el anterior apartado.

Cabe tener en cuenta que, a excepción de la dirección 2 del tejido, el fallo resistente del material se produce por las tensiones alcanzadas en la dirección de aplicación de la carga, siendo las tensiones en las direcciones transversales inferiores a los correspondientes límites del tejido no poroso. En el caso de la dirección 2, al igual que el tejido no poroso, el fallo del material resulta de las tensiones máximas generadas en la dirección 3, lo cual se debe al pronunciado efecto del concentrador de tensiones en esta dirección, comentado anteriormente. Asimismo, para el mismo estado de cargas, debe enfatizarse en las tensiones obtenidas en la dirección 2, las cuales se encuentran en el orden de 100-200 MPa, aunque se desconoce la tensión máxima soportable en esa dirección debido a la causa del fallo en la misma.

No obstante, queda excluido en el presente apartado los resultados obtenidos numéricamente respecto a los límites resistentes en las direcciones 2 y 3. Únicamente se exponen los resultados, promediados a partir de los últimos mencionados, en relación al límite transversal a la dirección de las fibras para cada nivel de porosidad.

A continuación, la Figura 30 y la Figura 31 recogen el límite resistente longitudinal del tejido lamelar en función de la porosidad para el contenido mineral máximo y mínimo, respectivamente. El diagrama carece de resultados obtenidos numéricamente para una porosidad del 1% debido a que el límite resistente en cuestión viene inferido de la literatura, correspondiente a un tejido sano. En estas gráficas se infiere una línea de tendencia de los resultados promedio para cada porosidad. Esta es calculada por Excel de acuerdo a un ajuste potencial, siendo su finalidad únicamente ilustrativa debido a que no se trata de un ajuste lo suficientemente preciso.

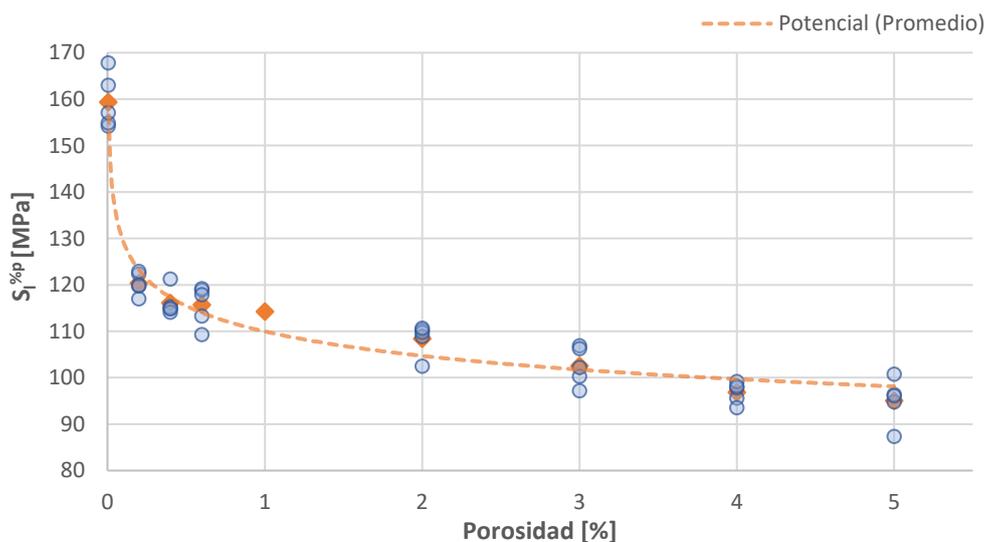


Figura 30. Evolución del límite resistente del tejido lamelar en la dirección longitudinal en función de la porosidad para  $BMD = 0,875 \text{ g/cm}^3$

La Figura 30 refleja la disminución de la resistencia del tejido a medida que la porosidad aumenta. Por ende, se verifica el hecho que la presencia de discontinuidades geométricas y, por consiguiente, concentradores de tensión en el modelo debilitan la resistencia del mismo.

Asimismo, se aprecia una caída del límite resistente significativa entre el tejido no poroso y el tejido sano (1% porosidad). De hecho, en un principio se analizó la influencia de la porosidad natural en los límites resistentes mediante modelos numéricos que representaban cinco niveles de porosidad (0, 1, 2, 3, 4 y 5). No obstante, se implementaron modelos con un 0,2%, 0,4% y 0,6% de porosidad con tal de predecir el comportamiento resistente adecuadamente en el intervalo 0-1%. Una vez alcanzada la porosidad del tejido sano, este descenso del límite resistente del tejido se atenúa. La línea establecida en la gráfica corresponde a un ajuste potencial, el cual se adapta en mayor medida (con ciertas limitaciones) al comportamiento observado por el límite resistente en función de la porosidad.

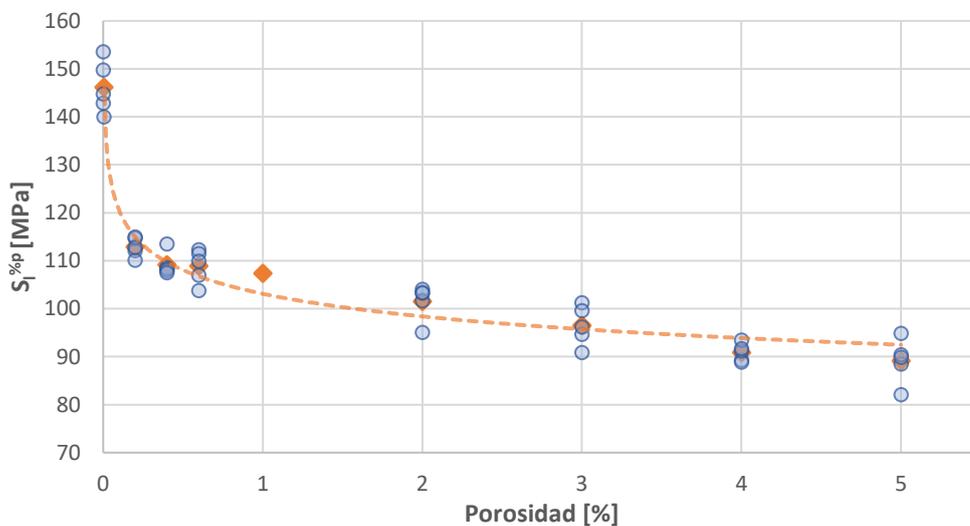


Figura 31. Evolución del límite resistente del tejido lamelar en la dirección longitudinal en función de la porosidad para  $BMD = 0,477 \text{ g/cm}^3$

Análogamente a la Figura 30, la Figura 31 presenta la misma tendencia respecto al límite resistente longitudinal en función de la porosidad tisular. Ahora bien, comparando con detenimiento ambas gráficas, se observa la influencia del contenido mineral en el tejido, presentando mayor resistencia a medida que la  $BMD$  aumenta.

En cuanto al límite resistente transversal del tejido, como hemos comentado anteriormente, se obtiene al postprocesar los resultados obtenidos del software Ansys APDL. Los siguientes diagramas presentan el límite resistente transversal en función de la porosidad, así como los resultados obtenidos para las direcciones 2 y 3. A diferencia de las anteriores gráficas, las siguientes únicamente exponen los límites promedio en las direcciones 2 y 3, a partir de las cuales se ha obtenido el límite transversal del tejido sometido a tracción.

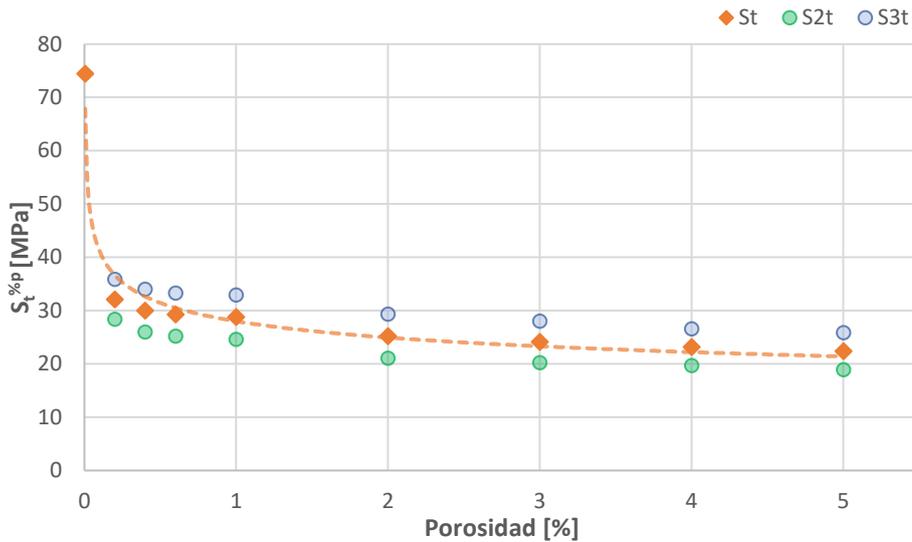


Figura 32. Evolución del límite resistente del tejido lamelar en la dirección transversal en función de la porosidad para BMD = 0,875 g/cm<sup>3</sup>

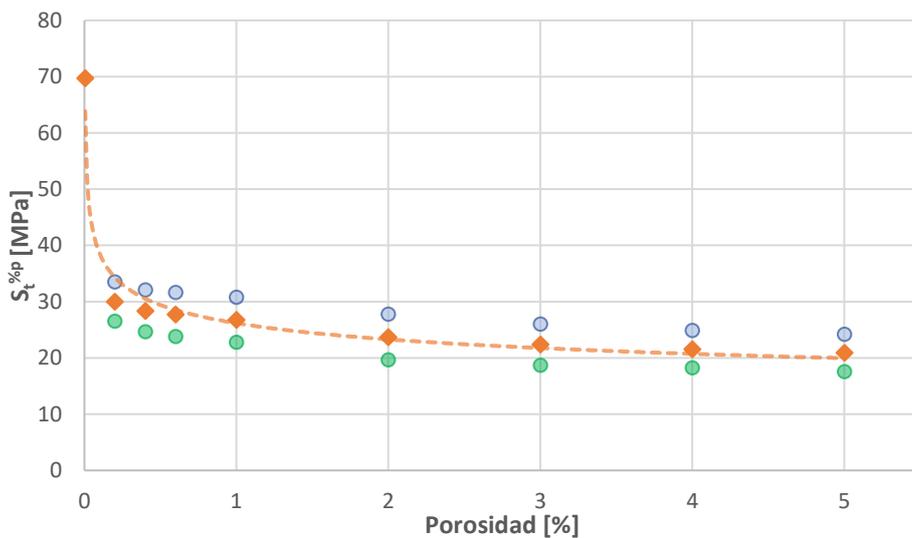


Figura 33. Evolución del límite resistente del tejido lamelar en la dirección transversal en función de la porosidad para BMD = 0,477 g/cm<sup>3</sup>

La Figura 32 y la Figura 33 exponen el efecto del concentrador de tensiones según la dirección de aplicación de la carga, resultando los límites resistentes obtenidos en función de la porosidad en la dirección 2 inferiores a los propios de la dirección 3, tal y como podía ser previsto. En cuanto al contenido mineral del tejido, la influencia de este último parámetro no es significativa puesto que los resultados obtenidos en ambas gráficas son prácticamente similares. En todo caso, se observa cierta proporcionalidad entre los límites transversales y el contenido mineral presente en el tejido.

Además, salvando ciertas diferencias cuantitativas posteriormente enumeradas, se observa cierta similitud entre el comportamiento resistente del tejido en la dirección longitudinal y transversal, donde la resistencia disminuye principalmente en el intervalo 0-1%. Sin embargo,

en términos relativos, esta caída de la resistencia obtenida en el intervalo anterior se presenta más acentuada en el estudio de la dirección transversal tejido y, en cambio, la posterior atenuación en cuanto a la disminución resistente del tejido a medida que aumenta el nivel de porosidad es mayor.

En términos cuantitativos, la capacidad resistente del tejido difiere considerablemente según la dirección longitudinal o transversal del mismo. La dirección longitudinal, correspondiente en este trabajo a la orientación que presentan las fibras de colágeno tipo I, presenta unos límites resistentes de orden superior respecto a los límites resistentes transversales obtenidos para cada nivel de porosidad. Asimismo, puede apreciarse una mayor influencia del contenido mineral *BMD* en la capacidad resistente longitudinal del tejido, donde los resultados presentan mayor divergencia entre la fase inicial de calcificación y el contenido mineral máximo del tejido. Este hecho puede ser resultado de la estructura jerárquica presente en el tejido óseo, los cristales de HA (mineral) son dispuestos en la dirección longitudinal ligando fibras de colágeno mientras que estas son relacionadas transversalmente mediante cadenas proteicas denominadas “cross-links” fundamentales en la capacidad resistente del tejido en la dirección transversal a las fibras [8].

A continuación, la Tabla 5 recoge los límites resistentes para cada nivel de porosidad y ambas *BMD* estudiadas en el análisis numérico. Los límites resistentes se expresan en promedio junto a su desviación estándar, en el formato  $\bar{S}_i \pm \sigma$ .

Tabla 5. Límites resistentes del tejido óseo en función de la porosidad y la *BMD*

<i>BMD</i> [g/cm <sup>3</sup> ]	Porosidad [%]	$S_l^{\%p}$ [MPa]	$S_t^{\%p}$ [MPa]
0,875	0	159,4 ± 5,9	74,5 ± 3,1
	0,2	120,4 ± 2,4	32,1 ± 4,1
	0,4	116,1 ± 3,1	30,0 ± 4,6
	0,6	115,7 ± 4,3	29,3 ± 4,6
	1	114,3 ± 17,1	28,8 ± 12,2
	2	108,7 ± 3,5	25,3 ± 4,5
	3	102,6 ± 4,1	24,2 ± 4,3
	4	96,9 ± 2,3	23,2 ± 4,2
	5	95,1 ± 4,9	22,4 ± 4,2
	0,477	0	146,3 ± 5,5
0,2		112,9 ± 2,1	30,0 ± 3,9
0,4		109,2 ± 2,6	28,3 ± 4,0
0,6		108,9 ± 3,5	27,7 ± 4,4
1		107,4 ± 18,5	26,8 ± 13,3
2		101,6 ± 3,7	23,7 ± 4,5
3		96,6 ± 4,2	22,4 ± 4,0
4		90,9 ± 1,9	21,5 ± 4,0
5		89,2 ± 4,7	20,9 ± 4,1

### 6.3 Ecuaciones de los límites resistentes a tracción

El presente apartado pretende establecer uno de los objetivos principales de este Trabajo Fin de Grado, determinar un modelo matemático que permita conocer con cierta incertidumbre los límites resistentes del tejido lamelar óseo a partir de los factores determinantes de la resistencia ósea considerados en este estudio: la porosidad y el contenido mineral *BMD*. De este modo, este modelo se limita a los límites resistentes del tejido a tracción.

El modelo se fundamenta en los resultados obtenidos mediante análisis numérico con el MEF, expuestos en los anteriores apartados. Así, se obtiene la ecuación que mejor se ajusta a los resultados obtenidos mediante una función implementada en MATLAB, habiéndose establecido la estructura de la misma previamente. Esta función realiza una regresión no lineal multivariable para obtener las constantes que se han establecido según la estructura de la ecuación.

El presente modelo matemático dispone de cierta validez en el intervalo de porosidad natural estudiado. Niveles de porosidad superiores pueden conducir a discrepancias puesto que a medida que la porosidad aumente la disminución de la capacidad resistente del tejido se intensificará, lo cual no se ha tenido en cuenta en la estimación del modelo matemático.

Vistos los gráficos anteriores, la estructura del modelo matemático estimado consta de un ajuste potencial tanto para la obtención del límite resistente longitudinal como transversal del tejido lamelar óseo sometido a tracción, todo ello junto a un término lineal en función de la porosidad. De este modo, al tratarse de una ecuación con estructura potencial, no se pueden representar valores con porosidad nula, con lo cual el modelo matemático se limita a niveles de porosidad superiores al 0%. De hecho, físicamente en el tejido óseo no pueden darse niveles de porosidad inferiores al 0,5% debido a que ello implicaría que no hay actividad celular en el mismo, la cual es indispensable de cara al desarrollo adecuado del hueso. No obstante, de cara a cerciorar la continuidad del modelo matemático, este ha sido estimado de modo que el límite resistente tiende al valor correspondiente al tejido no poroso cuando la porosidad tiende al 0%. A continuación, se presenta la estructura seguida en el modelo matemático:

$$S_i = c \cdot p^d + f \cdot BMD^g + h \cdot p, \quad \text{para } p > 0\% \quad (30)$$

Donde  $S_i$  representa el límite resistente del tejido en la dirección longitudinal o transversal (en MPa);  $a, b, c, d, f, g, h$  son términos constantes;  $BMD$  y  $p$  representan la densidad mineral ósea (en  $g/cm^3$ ) y la porosidad (en %), respectivamente.

En cuanto a la estructura inferida en el modelo matemático, podrían haberse implementado un mayor número de términos constantes de cara a obtener un ajuste más adecuado a los resultados obtenidos. No obstante, se ha renunciado a ello debido a que podían ser considerados despreciables o su implementación influía negativamente en la tendencia que se pretende obtener en cuestión a los límites resistentes del tejido.

A continuación, se exponen las ecuaciones estimadas para los límites resistentes a tracción del tejido lamelar óseo, expresados en MPa. Las Ecuaciones (31) y (32) corresponden con el límite longitudinal y el límite transversal.

$$S_{lon} = 9,4273 \cdot p^{-0,1775} + 109,84 \cdot BMD^{0,1165} - 4,102 \cdot p , \quad \text{para } p > 0\% \quad (31)$$

$$S_{trans} = 11,362 \cdot p^{-0,1727} + 17,882 \cdot BMD^{0,2091} - 0,722 \cdot p , \quad \text{para } p > 0\% \quad (32)$$

A partir de las ecuaciones estimadas, puede establecerse la influencia de la porosidad y la *BMD* en los límites resistentes del tejido, la cual ha sido discutida en anteriores apartados conforme se han expuesto las gráficas de los resultados obtenidos. En cuanto a los términos potenciales, la *BMD* presenta constantes positivas mientras que la porosidad presenta constantes negativas, además del término lineal. De este modo, el modelo obtenido nos indica que la porosidad disminuye la resistencia mientras que la *BMD* hace lo contrario, verificándose así la relación prevista entre estos parámetros.

Con objeto de comprender mejor el modelo matemático estimado, la Figura 34 y la Figura 35 representan los gráficos en 3D de las ecuaciones obtenidas en función de la porosidad y la *BMD* (superficie), así como los resultados promedio utilizados en el ajuste matemático (puntos). De hecho, en caso que los valores de *BMD* analizados representaran los límites inferior y superior de contenido mineral en el tejido, de acuerdo a lo establecido en [2], la superficie obtenida comprendería completamente los valores de porosidad natural y *BMD* presentes en el tejido óseo. No obstante, los límites establecidos en [2] carecen de completa veracidad de acuerdo a [21].

Acompañados de las ecuaciones estimadas se establece el coeficiente de determinación ( $R^2$ ). Este parámetro cuantifica la proporción entre la variable estimada a través de la ecuación y las variables de las que se obtiene la misma, oscilando su valor entre 0 y 1. Cuanto mejor sea el ajuste, este coeficiente se acercará a la unidad. De hecho, las curvas obtenidas para el cálculo del tejido no poroso no presentan  $R^2$  porque su valor es 1, puesto que se obtienen únicamente a partir de los dos valores de *BMD* estudiados y, consecuentemente, se ajustan completamente a los resultados registrados en Ansys APDL.

$$S_{lon} = 9,4273 \cdot p^{-0,1775} + 109,84 \cdot BMD^{0,1165} - 4,102 \cdot p \quad R^2 = 0,994$$

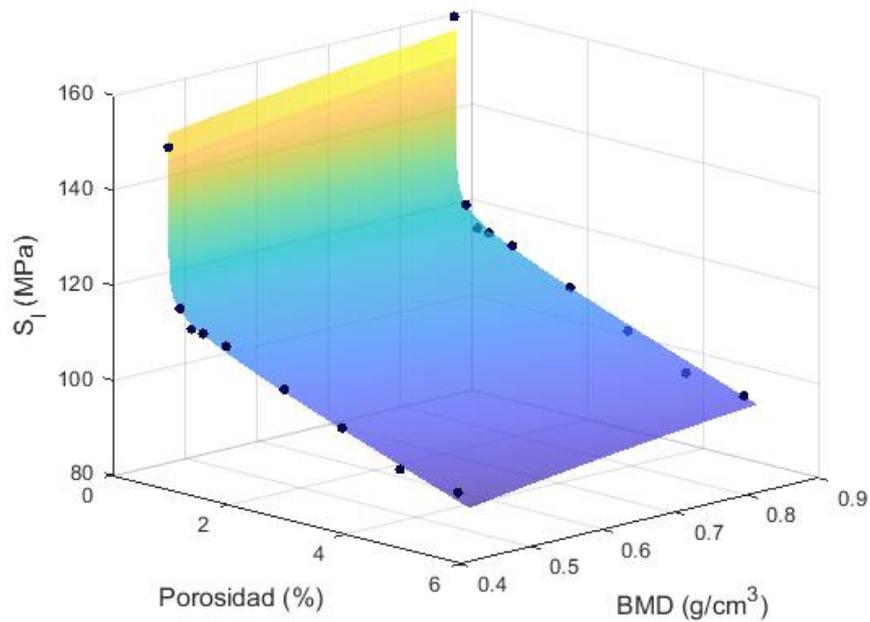


Figura 34. Regresión lineal multivariable (superficie) y resultados promediados experimentales (puntos) para el límite resistente del tejido lamelar en la dirección longitudinal en función de las variables BMD y porosidad tisular

$$S_{trans} = 11,362 \cdot p^{-0,1727} + 17,882 \cdot BMD^{0,2091} - 0,722 \cdot p \quad R^2 = 0,998$$

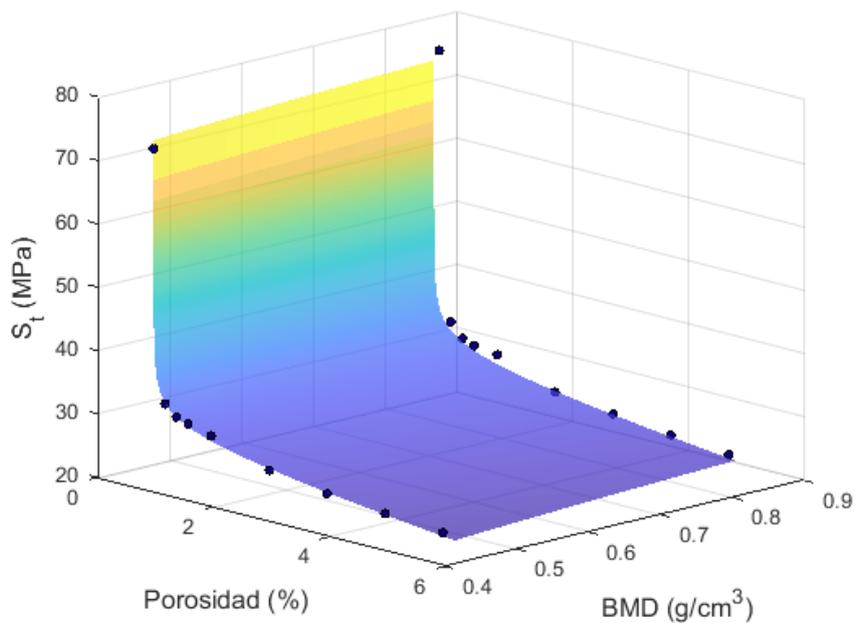


Figura 35. Regresión lineal multivariable (superficie) y resultados promediados experimentales (puntos) para el límite resistente del tejido lamelar en la dirección transversal en función de las variables BMD y porosidad tisular

Se observa que la regresión no se ajusta a los valores de los límites resistentes del tejido no poroso por el motivo comentado anteriormente. De ahí que se haya recurrido a la estimación de otra ecuación para los límites resistentes del tejido no poroso.

No obstante, cabe mencionar que la precisión del modelo matemático estimado aumentaría en caso de estudiar la capacidad resistente del tejido para un mayor rango de valores *BMD*, limitación impuesta por la literatura debido a la falta de información respecto a los límites resistentes del tejido.

Por último, se exponen las gráficas 2D correspondientes a los límites resistentes en función de la porosidad para cada valor de *BMD*. Fijando la *BMD* en las ecuaciones estimadas en el modelo matemático se obtienen las líneas representadas.

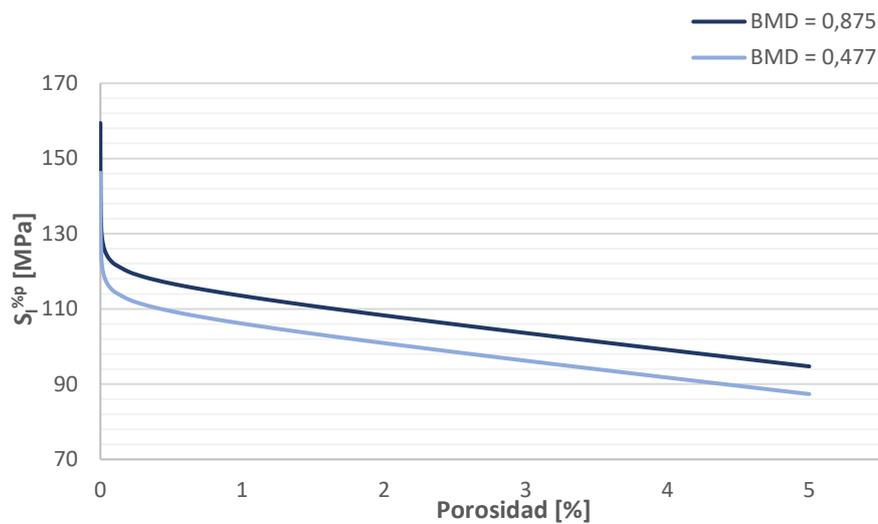


Figura 36. Límite resistente del tejido lamelar en la dirección longitudinal en función de la porosidad para cada valor de *BMD*

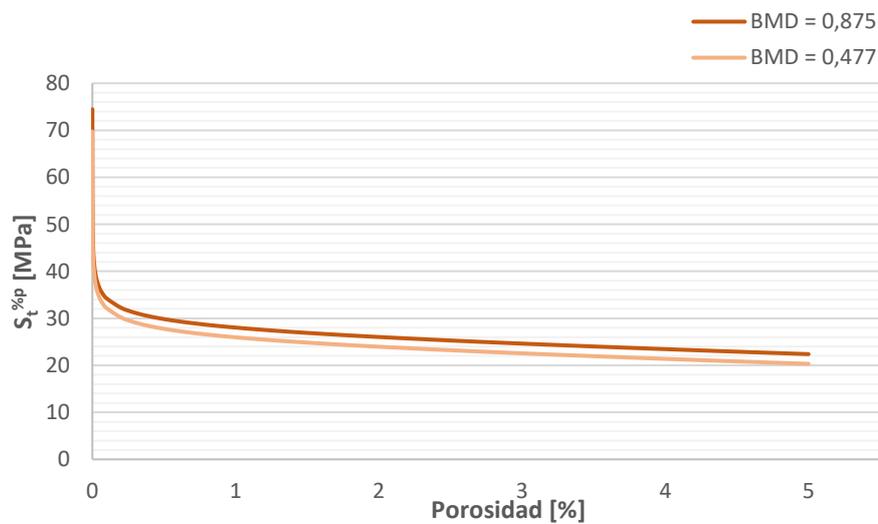


Figura 37. Límite resistente del tejido lamelar en la dirección transversal en función de la porosidad para cada valor de *BMD*

Tal y como se ha comentado anteriormente, la influencia del contenido mineral en la capacidad resistente es considerablemente menor en la dirección transversal respecto a la longitudinal. Asimismo, obsérvese la linealidad de las curvas obtenidas para una porosidad mayor a la unidad, lo cual viene inferida del término lineal implementado en el modelo. Esta linealidad es aceptable en el intervalo de porosidad natural estudiado, siendo su consideración inadecuada para niveles de porosidad superiores.

## 7. Conclusiones

El presente trabajo ha determinado la influencia de la porosidad y la densidad mineral ósea *BMD* en la resistencia a tracción del tejido lamelar óseo, además de establecer un modelo matemático a fin de obtener los límites resistentes del tejido frente a este estado de cargas. En efecto, tal y como se podía prever, queda demostrado que la porosidad afecta negativamente a la capacidad resistente del material en estudio, mientras que la *BMD* fortalece las propiedades resistentes del mismo. Además, se observa que la resistencia del tejido en la dirección de orientación de las fibras es significativamente superior a la correspondiente a las direcciones transversales.

Siendo considerados dos valores de *BMD* a partir de la revisión bibliográfica, puede establecerse la influencia de este parámetro en los límites resistentes. De hecho, la densidad mineral contenida en el tejido presenta mayor relevancia en la capacidad resistente en la dirección de orientación de las fibras. Con respecto a las direcciones transversales, el comportamiento resistente del tejido es similar en relación a la influencia de la *BMD*, aunque no debe considerarse despreciable.

En cuanto a la porosidad, limitada en este estudio a la porosidad natural, se observan distintas tendencias del comportamiento resistente según el intervalo de estudio y la dirección del tejido. En cuanto al intervalo de estudio, en reducidos niveles de porosidad (0-1%), la resistencia cae significativamente mientras que en niveles de porosidad superiores (1-5%), esta disminución se atenúa, pudiéndose asimilarse a un comportamiento lineal. Si bien el comportamiento es semejante en la dirección longitudinal y transversal del tejido, esta última presenta una evolución más pronunciada respecto al comportamiento descrito anteriormente.

En base a los resultados obtenidos en Ansys APDL, el modelo matemático ha sido estimado de acuerdo a una regresión no lineal multivariable. Este modelo centra su atención en la obtención de los límites resistentes a tracción del tejido para porosidades superiores al 0%. Se debe tener presente los niveles de porosidad natural que atañe al tejido biológico en cuestión, siendo el porcentaje de porosidad mínimo el 1%. Niveles de porosidad inferiores al 1% implicaría que el tejido carece de la actividad celular necesaria para llevar a cabo el proceso de remodelación ósea. No obstante, el modelo matemático estimado queda limitado al rango de porosidad analizado.

Asimismo, merece especial atención el concentrador de tensiones inducido al aplicar el esfuerzo de tracción en la dirección transversal a las fibras, paralela a la orientación del eje menor de los elipsoides. Las elevadas tensiones obtenidas resultan de la periferia de los elipsoides y, en concreto, del reducido radio presente en los extremos, de ahí que el comportamiento del tejido en esta dirección se equipare al de un material agrietado.

## 8. Futuros trabajos

El estudio llevado a cabo en el presente TFG da paso a nuevas líneas de investigación a fin de comprender el comportamiento mecánico del tejido lamelar óseo y, por consiguiente, la resistencia del soporte mecánico de los seres humanos.

Del mismo modo que se han inferido mediante análisis numérico los límites resistentes a tracción, podrían obtenerse los límites resistentes del tejido a compresión, lo cual permitiría establecer las propiedades resistentes del tejido frente a los dos estados de carga más habituales durante el ciclo de la vida del material en estudio: tracción y compresión. Con menor relevancia, también podrían obtenerse la resistencia del tejido frente a esfuerzos cortantes.

En el análisis realizado se ha considerado una porosidad del tejido natural representada a través de lagunas osteocitarias en forma de elipsoide. El modelo geométrico implementado elude las discontinuidades geométricas provocadas por los canalículos que interconectan estas lagunas, lo cual podría incrementar el efecto de los concentradores de tensión y, por ende, reducir la resistencia del material. Este hecho podría considerarse implementando estas discontinuidades en el modelo utilizado y, así, comprobar la divergencia de los resultados obtenidos con los presentados en este trabajo.

Asimismo, podría considerarse la implementación de mayores niveles de porosidad sobre el modelo numérico a fin de estudiar la influencia de ciertas enfermedades óseas en las propiedades resistentes del tejido. Enfermedades como la osteoporosis incrementan los niveles de porosidad tisular como resultado de alteraciones funcionales en las células óseas, incrementando el riesgo por fractura del hueso.

Por otro lado, con objeto de verificar la veracidad del modelo matemático presentado en relación a los límites resistentes obtenidos, así como profundizar en el efecto de los concentradores de tensión inducidos en el modelo, sería interesante realizar modelos con diversas disposiciones de elipsoides para un intervalo de porosidades y *BMD* mayor, debido a la variabilidad que presentan las propiedades del tejido óseo.

## Referencias

- [1] A. Vercher-Martínez, E. Giner, R. Belda, A. Aigoun, and F. J. Fuenmayor, "Explicit expressions for the estimation of the elastic constants of lamellar bone as a function of the volumetric mineral content using a multi-scale approach," *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, vol. 17, no. 2, pp. 449–464, Apr. 2018, doi: 10.1007/S10237-017-0971-X/FIGURES/15.
- [2] A. Ascenzi and E. Bonucci, "The tensile properties of single osteons," *The Anatomical Record*, vol. 158, no. 4, pp. 375–386, Aug. 1967, doi: 10.1002/AR.1091580403.
- [3] "Anatomy of the Bone."  
<https://www.stanfordchildrens.org/es/topic/default?id=anatomyofthebone-85-P03232> (accessed May 21, 2022).
- [4] "Hueso | Qué es, dónde se encuentran, componentes, partes y lesiones."  
<https://www.fisioterapia-online.com/glosario/hueso> (accessed May 21, 2022).
- [5] M. H. Ross and W. Pawlina, "Histología. Correlación con biología celular y molecular," 2020.
- [6] M. J. Olszta *et al.*, "Bone structure and formation: A new perspective," *Materials Science and Engineering: R: Reports*, vol. 58, no. 3–5, pp. 77–116, Nov. 2007, doi: 10.1016/J.MSER.2007.05.001.
- [7] M. de los R. Miñana Llibrer, "Análisis numérico de la influencia de la microporosidad y densidad mineral ósea en los límites de resistencia del tejido lamelar," Universitat Politècnica de València, Valencia, 2020.
- [8] M. J. Buehler, "Nanomechanics of collagen fibrils under varying cross-link densities: Atomistic and continuum studies," *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, vol. 1, no. 1, pp. 59–67, Jan. 2008, doi: 10.1016/J.JMBBM.2007.04.001.
- [9] E. Hamed, I. Jasiuk, A. Yoo, Y. H. Lee, and T. Liszka, "Multi-scale modelling of elastic moduli of trabecular bone," *Journal of The Royal Society Interface*, vol. 9, no. 72, pp. 1654–1673, Jul. 2012, doi: 10.1098/RSIF.2011.0814.
- [10] E. Hamed, "Multiscale modeling of elastic moduli and strength of bone," University of Illinois at Urbana-Champaign, 2012.
- [11] L. Da *et al.*, "Hierarchy, Fractality, Small-World and Resilience of Haversian Bone Structure: A Complex Network Study," 2005, Accessed: May 21, 2022. [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/2182817>
- [12] A. Ascenzi and E. Bonucci, "The compressive properties of single osteons," *The Anatomical Record*, vol. 161, no. 3, pp. 377–391, Jul. 1968, doi: 10.1002/AR.1091610309.
- [13] A. M. Parfitt, "The cellular basis of bone turnover and bone loss: a rebuttal of the osteocytic resorption--bone flow theory.," *Clinical Orthopaedics and Related Research*, vol. NO. 127, no. 127, pp. 236–247, Jan. 1977, Accessed: May 21, 2022. [Online]. Available: <https://europepmc.org/article/med/912987>

- [14] M. Minary-Jolandan and M. F. Yu, "Nanoscale characterization of isolated individual type I collagen fibrils: polarization and piezoelectricity," *Nanotechnology*, vol. 20, no. 8, p. 085706, Feb. 2009, doi: 10.1088/0957-4484/20/8/085706.
- [15] J. R. Caeiro Rey, S. Dapía Robleda, E. Vaquero Cervino, L. Roca Ruiz, and M. A. Blanco Ramos, "Factores determinantes de la resistencia ósea," *Revista Española de Enfermedades Metabólicas Óseas*, vol. 14, no. 4, pp. 67–74, Aug. 2005, doi: 10.1016/S1132-8460(05)72686-6.
- [16] E. Giner, C. Arango, A. Vercher, and F. Javier Fuenmayor, "Numerical modelling of the mechanical behaviour of an osteon with microcracks," *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, vol. 37, pp. 109–124, Sep. 2014, doi: 10.1016/J.JMBBM.2014.05.006.
- [17] A. Zabala, D. Infante-García, E. Giner, S. Goel, J. L. Endrino, and I. Llavori, "On the use of the theory of critical distances with mesh control for fretting fatigue lifetime assessment," *Tribology International*, vol. 142, p. 105985, Feb. 2020, doi: 10.1016/J.TRIBOINT.2019.105985.
- [18] F. Vargiu, D. Sweeney, D. Firrao, P. Matteis, and D. Taylor, "Implementation of the Theory of Critical Distances using mesh control," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 92, pp. 113–121, Dec. 2017, doi: 10.1016/J.TAFMEC.2017.05.019.
- [19] A. Kölliker, *Handbuch der Gewebelehre des Menschen*, Anflage 1., vol. 6. Leipzig, 1889.
- [20] G. Marotti, "Osteocyte orientation in human lamellar bone and its relevance to the morphometry of periosteocytic lacunae," *Metabolic Bone Disease and Related Research*, vol. 1, no. 4, pp. 325–333, Jan. 1979, doi: 10.1016/0221-8747(79)90027-4.
- [21] M. Granke *et al.*, "Microfibril Orientation Dominates the Microelastic Properties of Human Bone Tissue at the Lamellar Length Scale," *PLOS ONE*, vol. 8, no. 3, p. e58043, Mar. 2013, doi: 10.1371/JOURNAL.PONE.0058043.
- [22] R. Megías *et al.*, "Numerical modelling of cancellous bone damage using an orthotropic failure criterion and tissue elastic properties as a function of the mineral content and microporosity," *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, vol. 219, p. 106764, Jun. 2022, doi: 10.1016/J.CMPB.2022.106764.

# Documento 2

Pliego de condiciones

## Índice

1. Objeto.....	64
2. Condiciones generales .....	64
3. Condiciones facultativas.....	65
4. Condiciones de los recursos informáticos.....	66
4.1 Condiciones del <i>hardware</i> .....	66
4.2 Condiciones del <i>software</i> .....	66
5. Condiciones de uso e interpretación de los resultados .....	68

## 1. Objeto

El presente documento pretende establecer las relaciones contractuales entre los agentes implicados en este Trabajo de Fin de Grado, además de fijar las condiciones generales del mismo. De este modo, el documento regula los vínculos entre el proyectista, el tutor del proyecto y demás partes implicadas.

El proyecto compete a la rama de la Ingeniería Mecánica que lleva a cabo el estudio de los aspectos mecánicos de los sistemas biológicos, comúnmente conocida como biomecánica. En particular, el proyecto centra el estudio en la obtención de los límites resistentes del tejido lamelar óseo en la dirección de las fibras de colágeno tipo I que lo conforman y en la dirección transversal, en función de la porosidad tisular y la densidad mineral ósea (BMD) presente en el mismo. Este estudio hace uso del análisis numérico mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF) a partir de cierta información recabada de la literatura.

Asimismo, este documento comprende las condiciones relacionadas con los derechos de autor dado el carácter de investigación que atañe a este proyecto.

## 2. Condiciones generales

Queda aplicada sobre este proyecto la normativa que regula las disposiciones legales respecto a la propiedad intelectual de un trabajo científico, de conformidad con lo dispuesto en el Real Decreto Legislativo 1/1996 de la Ley de Propiedad Intelectual. Por consiguiente, queda prohibido la reproducción parcial o total del proyecto, incluyéndose así los modelos de elementos finitos y las rutinas implementadas para la creación de la geometría del modelo numérico. Además, no está permitido el tratamiento de la información recogida en este proyecto sin la correspondiente previa autorización del proyectista o tutor del proyecto, este último dado el carácter divulgativo y la continuidad que supone el proyecto de cara al estudio biomecánico del hueso.

Las marcas registradas que aparecen en el proyecto, así como la bibliografía consultada son expuestas en el proyecto y reconocidas públicamente.

### 3. Condiciones facultativas

El promotor de este proyecto es el Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales adscrito a la Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño (ETSID) en la Universitat Politècnica de València. El proyectista es Don Francesc Pérez Muñoz, estudiante del Grado de Ingeniería Mecánica en la misma universidad. Las tutoras del proyecto son la Dra. Ana Vercher Martínez y Doña Raquel Megías Díaz, pertenecientes al Instituto Universitario de Investigación de Ingeniería Mecánica y Biomecánica.

Las disposiciones legales que debe satisfacer el tutor del proyecto son las siguientes:

- Facilitar la documentación e información previa necesaria para la realización del proyecto
- Gestionar y obtener las preceptivas licencias y autorizaciones administrativas en lo que concierne al uso de determinados software y obtención de determinada bibliografía
- Tutelar al proyectista, efectuando un seguimiento periódico de su labor

En lo que respecta al proyectista, a continuación se exponen las condiciones a las que está sometido:

- Cumplir con la legislación vigente
- Cumplir con la normativa sobre la realización de proyectos fin de carrera establecida en la Universitat Politècnica de València, la Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño y el Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales
- Respetar la ley de propiedad intelectual
- Elaborar el proyecto conforme a las indicaciones establecidas por el promotor
- Informar periódicamente al promotor del estado de desarrollo del proyecto

Con respecto a los derechos que avalan al proyectista durante la realización del Trabajo de Fin de Grado, se recogen los siguientes preceptos:

- Disponer del equipo informático adecuado para la realización del proyecto
- Ser informado por el promotor de las disposiciones legales que incumben al proyecto
- Recibir soporte técnico en caso de surgir cualquier problema imprevisto
- En caso de ausencia del promotor del proyectista, la potestad, en lo que respecta a las decisiones tomadas durante la ejecución del mismo, recae sobre el proyectista

## 4. Condiciones de los recursos informáticos

La realización del estudio llevado a cabo en el proyecto necesita del empleo de recursos informáticos. Estos recursos informáticos se clasifican en dos grupos: *hardware* y *software*.

El *hardware* comprende el conjunto de elementos físicos que conforman los equipos informáticos durante el desarrollo del proyecto. El *software*, en cambio, hace referencia al conjunto de programas informáticos utilizados.

### 4.1 Condiciones del *hardware*

El análisis numérico realizado en el presente proyecto requiere de elevados recursos computacionales, potencia de cálculo y memoria, para resolver el problema de elementos finitos del modelo numérico obtenido para representar el tejido lamelar óseo.

El proyecto se ha efectuado en su mayor parte mediante el uso de un ordenador portátil cuyas características se exponen a continuación. En el mismo se ha llevado a cabo el análisis de datos, obtención de resultados con ciertas limitaciones computacionales y la redacción del proyecto.

#### **Ordenador portátil: HP 15s-fq4025ns**

- Procesador: Intel® Core™ i5-1155G7
- Memoria RAM: 8 GB
- Tarjeta gráfica: Intel® Iris® Xe Graphics
- Unidad almacenamiento: SSD de 512 GB
- Monitor: FHD de 15,6" en diagonal (1920x1080)
- Sistema operativo: Windows 10 Pro

No obstante, debido a la elevada potencia de cálculo requerida y la limitación analítica impuesta en la licencia estudiantil del programa comercial Ansys APDL, se ha accedido por control remoto al servidor del Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales de la Universitat Politècnica de Valencia a fin de obtener los resultados del análisis numérico.

### 4.2 Condiciones del *software*

En este apartado se reúnen los diversos programas comerciales empleados en el desarrollo del proyecto, así como las condiciones y requisitos que limitan las condiciones de los mismos. Po ende, su incumplimiento imposibilita el uso del modelo de elementos finitos.

#### - *MATLAB R2021b*

Se trata de una herramienta de cómputo numérico que ofrece un entorno de desarrollo integrado con un lenguaje de programación propio, denominado *lenguaje M*. Este programa comercial ha sido empleado para la implementación de las rutinas que crean el modelo geométrico del análisis con extensión *.db*, propia de los archivos generados por Ansys APDL.

- *ANSYS Mechanical APDL*

Este software comercial es una herramienta utilizada para el análisis y simulación por medio del Método de los Elementos Finitos. Mediante este programa se han obtenido los resultados del análisis resistente del tejido óseo.

Durante el desarrollo del trabajo se han utilizado dos versiones distintas de este programa: Academic y Premium. La versión Academic ha sido empleada para la visualización de los modelos geométricos generados, así como ciertos análisis cuya discretización del modelo numérico no excedía la limitación impuesta sobre esta versión, de 200 000 nodos. En mayor medida, la versión Premium se ha utilizado para la obtención de los resultados en modelos numéricos cuya discretización excedía los 200 000 nodos.

- *OTROS*

Este grupo reúne los programas comerciales cuyas finalidades son básicas en el desarrollo de un proyecto y cuyo uso está muy extendido.

Para el tratamiento, análisis de datos y generación de gráficas se ha hecho uso de Microsoft Office Excel. La redacción del presente proyecto se ha llevado a cabo mediante Microsoft Office Word. La lectura y manipulación de documentos PDF se ha realizado mediante la versión *Pro* de Adobe Acrobat DC.

## 5. Condiciones de uso e interpretación de los resultados

El proyectista no asume la responsabilidad de los resultados derivados del presente estudio de investigación del tejido lamelar óseo. Estos resultados deben ser ratificados mediante estudios experimentales del tejido *In Vitro*.

Durante el desarrollo del proyecto se han adoptado diversas hipótesis a fin de simplificar el estudio y a la insuficiente información de las propiedades del tejido óseo debido a la complejidad que presenta el estudio experimental a nivel microestructural. Además, debe considerarse la diversidad de las propiedades del tejido óseo en función de la geometría y de los datos recabados de la literatura. De ahí que la interpretación de los resultados deba hacerse cualitativamente considerando cierta incertidumbre en la fiabilidad y exactitud de las ecuaciones finalmente obtenidas.

# Documento 3

Presupuesto

## Consideraciones

En este documento se presenta el estudio económico del proyecto de investigación del tejido lamelar óseo. A tal efecto, se han tenido en cuenta ciertas consideraciones comentadas en los siguientes párrafos.

Se asume que el proyectista del presente estudio es titulado en Grado de Ingeniería Mecánica. Por tanto, como titulado superior, se considerará una retribución de 30 €/h.

Con respecto a las tutoras del proyecto, en lo que concierne a las tareas de supervisión, asesoramiento y búsqueda bibliográfica durante el desarrollo del proyecto, se ha considerado un precio estándar de 30 €/h.

En cuanto a los bienes de inversión empleados en el proyecto (equipos informáticos) se contabiliza la amortización relativa al periodo de elaboración del proyecto, en este caso ha sido de 4 meses. De acuerdo a lo establecido en la Agencia Tributaria Española, considerándose el activo como “Equipos para tratamiento de la información y sistemas y programas informáticos”, se ha determinado el periodo de amortización mínimo, lo cual confiere una vida útil de 4 años. La amortización considerada es constante, siendo el coste mensual agravado al valor de mercado del ordenador.

El coste de los programas informáticos utilizados se ha cuantificado en función del precio de la licencia anual, dividiéndose entre los 365 días del año para una jornada laboral de 8 horas diarias. Respecto a la licencia de Ansys APDL Academic Teaching Advance, la obtención de la misma es gratuita debido al convenio que mantiene la Universitat Politècnica de València con Ansys Inc., de ahí que se haya establecido un precio simbólico anual de 60 €.

Respecto al acceso mediante control remoto al servidor del Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales se ha establecido un coste de 20 €/día. Asimismo, se incluye el coste del soporte técnico del servidor que solucionó diversos problemas relacionados con la conexión remota al servidor, estimado como 25 €/h.

Finalmente, a fin de obtener el total presupuestado del proyecto se ha aplicado un incremento del 13% en concepto de gastos generales (luz, internet, ...). Al tratarse de un proyecto de investigación sin fines lucrativos, este queda exento de la aplicación de los tributos correspondientes al beneficio industrial y IVA.

La siguiente tabla contempla el desglose del coste total requerido para la realización del presente proyecto:

Cantidad	Ud.	Concepto	Coste anual	Precio (ud.)	Importe
<i>COSTES DE PERSONAL</i>					<i>11.700,00 €</i>
30	h	Búsqueda bibliográfica		30,00	900,00 €
40	h	Formación teórica		30,00	1.200,00 €
50	h	Programación en MATLAB		30,00	1.500,00 €
40	h	Programación en ANSYS APDL		30,00	1.200,00 €
35	h	Análisis de convergencia		30,00	1.050,00 €
80	h	Cálculos y análisis de resultados		30,00	2.400,00 €
15	h	Elaboración de conclusiones		30,00	450,00 €
80	h	Redacción del proyecto		30,00	2.400,00 €
20	h	Asesoramiento del tutor		30,00	600,00 €
<i>LICENCIAS PROGRAMAS INFORMÁTICOS</i>					<i>588,45 €</i>
100	días	Licencia Microsoft Office (Word, Excel)	69,00 €	0,20	20,00 €
10	días	Licencia Adobe Acrobat Pro	220,00 €	0,60	6,00 €
35	días	Licencia Ansys APDL Premium	6.660,00 €	18,50	555,00 €
5	días	Licencia Ansys APDL Academic Teaching Advance	60,00 €	0,17	0,85 €
3	días	Licencia MATLAB R2021b	800,00 €	2,20	6,60 €
<i>AMORTIZACIÓN BIENES DE INVERSIÓN</i>					<i>66,67 €</i>
4	meses	Equipo informático (amortizado en 5 años)	200,00 €	16,67	66,67 €
<i>OTROS</i>					<i>2.050,00 €</i>
100	días	Acceso servidor UPV		20	2.000,00 €
2	h	SopORTE técnico servidor UPV		25,00	50,00 €
Presupuesto de ejecución					14.855,12 €
Gastos generales (13%)					1931,16 €
<b>Total presupuestado</b>					<b>16786,28 €</b>

El presupuesto total del proyecto asciende a la cantidad de **DIECISEIS MIL SETECIENTOS OCHENTA Y SEIS EUROS CON VEINTIOCHO CÉNTIMOS.**