UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

El tiempo de vuelo en órbitas parabólicas

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

Índice general

1. Introducción 2

2. Objetivos 3

3. Integral de $\dot{\theta}$ y el tiempo de paso por el periapsis, (t_p). 3

4. Ecuación de tiempos para órbitas parabólicas, ($e = 1$) 4

5. Ejemplos 5

6. Cierre 7

1 Introducción

Este artículo presenta la relación que existe entre el tiempo y la posición de un cuerpo que se encuentra orbitando alrededor de otro siguiendo una trayectoria parabólica. También se muestran algunos casos de aplicación y se incluyen ejemplos de su estudio.

Recordemos que según [**Curtis**] **la ecuación orbital** de un satélite de masa m que órbita alrededor de un cuerpo central de masa M por atracción gravitatoria es:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\cos\theta} \tag{1}$$

donde $h = \|\vec{h}\| = \|\vec{r} \wedge \vec{v}\|$ es el momento angular de la órbita que es constante, μ es el parámetro gravitacional del cuerpo central, e es la excentricidad de la órbita, a es el semieje mayor y θ es la anomalía verdadera (ángulo entre los vectores $\vec{e}$ y $\vec{r}$).

Esta ecuación orbital genera trayectorias que representan curvas cónicas que en el caso particular de $e = 1$ resultan ser parábolas.

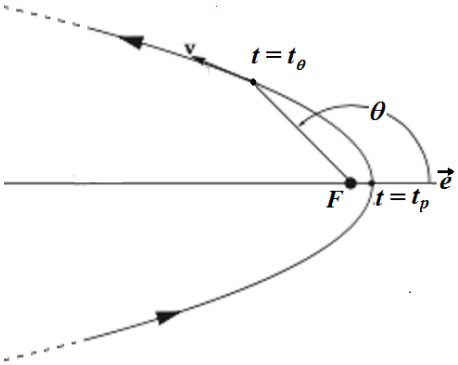

Figura 1: Hay que relacionar cada posición θ con un instante de tiempo, t.

Al resolver la ecuación del movimiento y obtener la ecuación orbital se ha eliminado la dependencia del tiempo, sin embargo es necesario poder localizar un cuerpo en su órbita en cualquier instante, (ver figura 1). En este documento vamos a conocer la ecuación del tiempo para las órbitas parabólicas.

Para la aplicación de nuestras ecuaciones vamos a recordar algunas constantes:

- Cualquier nave o satélite tiene una masa insignificante si la comparamos con la del Sol o con la de cualquier planeta por lo que el parámetro gravitacional es considerado constante

  $$\mu = G(M + m) = GM$$

  siendo para la Tierra $\mu_T = 398\,600\ km^3/s^2$.

- La Tierra no es esférica pero cuando, por aproximación se considere que sí lo es, se utiliza como radio el ecuatorial

  $$R_T = 6378\ km.$$

Además de esas constantes debes conocer algunas relaciones entre parámetros orbitales que se verifican en cualquier órbita kepleriana y en particular en las parabólicas. Estas relaciones ueden consultarse en la bibliografía:

- El momento angular de cualquier órbita verifica: $h = r\,v_\perp$.
- La energía específica para una órbita parabólica debe ser nula por lo que: $\varepsilon = \dfrac{v^2}{2} - \dfrac{\mu}{r} = 0$.

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Partiendo de una anomalía verdadera que indica la posición de un cuerpo en una órbita parabólica, obtener el tiempo transcurrido desde que pasó por el periapsis o él que le falta para llegar a él.
- Conociendo el tiempo desde que pasó por el periapsis, hallar la anomalía verdadera (posición) en ese instante.
- En el proceso conocerás la anomalía media parabólica y la ecuación de Barker.

3 Integral de $\dot{\theta}$ y el tiempo de paso por el periapsis, (t_p).

El momento angular verifica $h = r\,v_\perp$ y a su vez la velocidad tranversal cumple $v_\perp = r\,\dot{\theta}$ por tanto, la anomalía verdadera θ está relacionada con el tiempo t mediante la expresión

$$h = r^2\dot{\theta} \tag{2}$$

que despejando $\dot{\theta}$ resulta

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} = \frac{h}{\left(\frac{h^2/\mu}{1+e\cos\theta}\right)^2}$$

que separando variables resulta

$$\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}d\theta = \frac{\mu^2}{h^3}dt$$

Considerando t_p el **tiempo en el instante de paso por el periapsis**[1] ($\theta = 0°$) e integrando ambos lados se tiene

$$\frac{\mu^2}{h^3}(t - t_p) = \int_0^\theta \frac{d\sigma}{(1+e\cos\sigma)^2}d\sigma. \tag{3}$$

[1]Con frecuencia se toma $t_p = 0$ como tiempo inicial

4 Ecuación de tiempos para órbitas parabólicas, ($e = 1$)

Para el caso de órbita parabólica, $e = 1$, la integral de la expresión (3) tiene solución analítica resultando la igualdad conocida como ecuación de Barker:

$$\frac{\mu^2}{h^3}(t - t_p) = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2} \tag{4}$$

Denotando por M_p al término de la izquierda, al que llamamos **Anomalía Media Parabólica**:

$$M_p = \frac{\mu^2}{h^3}(t - t_p) \tag{5}$$

la ecuación de Barker queda por tanto:

$$M_p = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2} \tag{6}$$

La relación entre ambas anomalías se muestra en la figura 2.

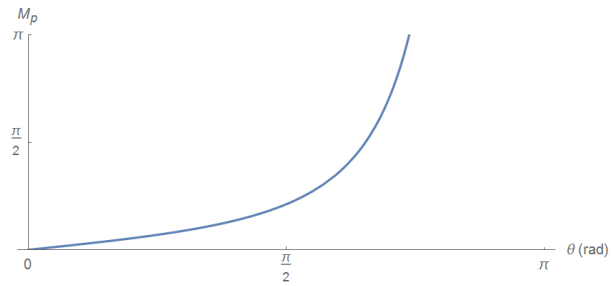

Figura 2: La anomalía media M_p en función de la anomalía verdadera θ en una órbita parabólica.

Estas ecuaciones tienen muchas aplicaciones en mecánica orbital pero se agrupan en dos casos[2]:

Problema 1. Dada una órbita parabólica de la que se conoce h, y por tanto a, y la posición determinada de un punto de esa órbita, θ, determinar el tiempo transcurrido desde que el cuerpo paso por el periapsis, $t - t_p$. Ver el esquema siguiente:

$$\boxed{\theta} \xrightarrow{(6)} \boxed{M_p} \xrightarrow{(5)} \boxed{t - t_p}$$

Es posible obtener directamente el tiempo desde su periapsis a partir de su anomalía verdadera aplicando la igualdad (4).

Problema 2. Dada una órbita parabólica de la que se conoce h y el tiempo desde el paso por el periapsis $t - t_p$ de un punto, determinar la anomalía verdadera θ que indica su posición. Ver el esquema siguiente:

$$\boxed{t - t_p} \xrightarrow{(5)} \boxed{M_p} \xrightarrow{(6)} \boxed{\theta}$$

En este caso es más complicado obtener la anomalía verdadera directamente con la expresión (4) ya que la ecuación (6) tiene una única solución para θ:

$$\tan\frac{\theta}{2} = \left(3M_p + \sqrt{9M_p^2 + 1}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(3M_p + \sqrt{9M_p^2 + 1}\right)^{-\frac{1}{3}} \tag{7}$$

[2] En el caso de las órbitas parabólicas no se define Anomalía Excéntrica Parabólica.

5 Ejemplos

Ejemplo 5.1 *Una nave sigue una órbita geocéntrica parabólica y en el momento del perigeo lleva una velocidad de* $11\,km/s$.
a) ¿A que distancia del centro de la Tierra se encontrará 5 *horas después de pasar por el perigeo?*
b) ¿Qué velocidad lleva en ese momento? ¿y una hora más tarde?
c) ¿Cuánto tardará en alcanzar los límites de la esfera de influencia de la Tierra?
(SOI=$925\,000\,km$)

Solución: Al ser la órbita parabólica la energía debe ser nula

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0 \rightarrow r = \frac{2\mu}{v^2}$$

en particular para el perigeo

$$r_p = \frac{2\mu}{v_p^2} \rightarrow r_p = \frac{2 \cdot 398600}{11^2} = 6588.4\,km$$

Como el momento específico también es constante

$$h = r \cdot v = r_p \cdot v_p = 6588.4 \cdot 11 = 72472.8\,km$$

a) Conociendo la órbita determinemos la anomalía media parabólica mediante (5)

$$M_p = \frac{\mu^2}{h^3}(t - t_p) = \frac{398600^2}{72472.8^3} \cdot 5 \cdot 3600 = 7.51$$

Utilizando la igualdad (7) deducimos la anomalía verdadera

$$\begin{aligned}\tan\frac{\theta}{2} &= \left(3M_p + \sqrt{9M_p^2+1}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(3M_p + \sqrt{9M_p^2+1}\right)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \left(3 \cdot 7.51 + \sqrt{9 \cdot 7.51^2+1}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(3 \cdot 7.51 + \sqrt{9 \cdot 7.51^2+1}\right)^{-\frac{1}{3}} = 3.28\end{aligned}$$

$$\theta = 2\arctan(3.28) = 146.1\,^\circ$$

Sustituyendo en la ecuación orbital (1), considerando que $e = 1$,

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+\cos\theta} = \frac{\frac{72472.8^2}{398600}}{1+\cos(146.1^\circ)} = 77410\,km$$

b) Despejando de nuevo en la ecuación de la energía se obtiene la velocidad en función de la distancia

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 398600}{77410}} = 3.21\,km/s$$

Para una hora después podemos repetir el proceso del apartado (a) y se obtiene

$$\theta_2 = 148.3\,^\circ \quad \rightarrow \quad r_2 = 88130\,km \quad \rightarrow \quad v_2 = 3.0\,km/s$$

Notar como con el paso del tiempo el cuerpo se aleja y reduce su velocidad.

c) Volviendo a la ecuación orbital (1) despejando la anomalía verdadera resulta

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+\cos\theta} \quad \rightarrow \theta_{SOI} = \arccos\left(\frac{\frac{h^2}{\mu}}{R_{SOI}} - 1\right) = \arccos\left(\frac{\frac{72742.8^2}{398600}}{925\,000}\right) = 170.3\,^\circ$$

Incorporando este resultado en la ecuación de Barker (6) se obtiene la anomalía media hiperbólica y utilizando (5), el tiempo desde su paso por el perigeo

$$\begin{aligned} M_{p_{SOI}} &= \frac{1}{2}\tan\frac{\theta_{SOI}}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta_{SOI}}{2} = \frac{1}{2}\tan\frac{170.3}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{170.3}{2} = 280.2 \\ t_{SOI} - t_p &= \frac{M_{p_{SOI}} h^3}{\mu^2} = \frac{280.2 \cdot 72472.8^3}{398600^2} = 671\,318\,s = 186.5\,h \sim 7.8\,d \end{aligned} \tag{8}$$

Ejemplo 5.2 *Una nave en órbita geocéntrica parabólica tiene el perigeo a* $6750\,km$ *del centro*
a) ¿Cuánto tiempo tarda en cambiar su posición desde -45° *a* 45°*?*
b) ¿A qué distancia se encuentra $24\,h$ *después de su aso por el perigeo?*

Solución: Como en el ejemplo anterior al ser la órbita parabólica la energía debe ser nula en todos los puntos, incluso en el perigeo

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2\mu}{r_p}} \rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2\dot{3}98600.5}{6750}} = 10.87\,km/s$$

Como el momento específico también es constante

$$h = r \cdot v = r_p \cdot v_p = 6750 \cdot 10.87 = 73356\,km$$

a) Conocida la órbita se determina la anomalía media parabólica para cada posición con (6)

$$\begin{aligned} M_{p1} &= \frac{1}{2}\tan\frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta_1}{2} = \frac{1}{2}\tan\frac{-45^\circ}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{-45^\circ}{2} = -0.219 \\ M_{p2} &= \frac{1}{2}\tan\frac{\theta_2}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta_2}{2} = \frac{1}{2}\tan\frac{45^\circ}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{45^\circ}{2} = 0.219 \end{aligned}$$

despejando el tiempo del paso por el perigeo de la expresión (5) obtenemos los correspondientes para cada posición

$$M_p = \frac{\mu^2}{h^3}(t - t_p) \rightarrow (t - t_p) = \frac{M_p\, h^3}{\mu^2} \rightarrow \begin{cases} (t - t_{p1}) = \dfrac{-0.219 \cdot 73356^3}{398600.5^2} = -543.98\,s \\ \\ (t - t_{p2}) = \dfrac{0.219 \cdot 73356^3}{398600.5^2} = 543.98\,s \end{cases}$$

restando ambas cantidades se obtiene el tiempo invertido en ese recorrido

$$(t - t_{p2}) - (t - t_{p1}) = 543.98 - (-543.98) = 1087.96\,s \sim 18.13\,min$$

b) En este caso se conoce el tiempo desde su paso por el perigeo por lo que con (5) se obtiene la anomalía media parabólica

$$M_p = \frac{\mu^2}{h^3}(t - t_p) = \frac{398600.5^2}{73356^3}(24 \cdot 3600) = 2.798$$

Utilizando la igualdad (7) deducimos la anomalía verdadera

$$\begin{aligned}\tan\frac{\theta}{2} &= \left(3M_p + \sqrt{9M_p^2+1}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(3M_p + \sqrt{9M_p^2+1}\right)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \left(3 \cdot 2.798 + \sqrt{9 \cdot 2.798^2+1}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(3 \cdot 2.798 + \sqrt{9 \cdot 2.798^2+1}\right)^{-\frac{1}{3}} = 5.77\end{aligned}$$

$$\theta = 2\arctan(5.77) = 160.3\,^{\circ}$$

Sustituyendo en la ecuación orbital (1), considerando que $e = 1$,

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+\cos\theta} = \frac{\frac{73356^2}{398600.5}}{1+\cos(160.31^{\circ})} = 230907\,km$$

6 Cierre

Este artículo ha mostrado como se relacionan el tiempo orbital y la posición en una órbita cuando ésta es parabólica.

También se ha definido la anomalía media parabólica y la ecuación de Barker.

Como consecuencia de esas definiciones y expresiones se ha visto como resolver el problema de obtención del tiempo orbital a partir de la anomalía verdadera y viceversa.

Estos contenidos han sido apoyados con ejemplos que muestran su aplicación a posibles situaciones reales.

Referencias

[1] Curtis, Howard D., *Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.

[2] Bate, Roger R. et al., *Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.

[3] Brown, Charles D., *Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.

[4] Prussing, John E. and Conway, Bruce A., *Orbital Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1993.

[5] Chobotov, Vladimir A., *Orbital Mechanics Third Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 2002.