MÁSTER UNIVERSITARIO EN DIRECCIÓN FINANCIERA Y FISCAL
TESINA FIN DE MÁSTER

El Movimiento Browniano en la modelización del par EUR/USD

- Autor: José Vicente González Cervera
- Directores:
  - Dr. Juan Carlos Cortés López
  - Dr. Francisco Guijarro Martínez

Índice de la presentación

1.Datos y elección de modelo

- Situados en el 15/06/2012,trataremos de predecir la log-cotización del par EUR/USD para los días 17,18,19,20,21,22,24,25,26,27,28,29 de junio de 2012.
- Para ello utilizaremos una muestra de log-cotizaciones diarias desde el 30/06/2011al 15/06/2012. Un año aproximadamente.
- Aplicaremos un modelo de predicción basado en el Movimiento Browniano, cuya modelización se asemeja a la de los precios de los activos financieros.

2.El movimiento Browniano

- El tipo de cambio depende de multitud de factores muy difíciles de cuantificar. Esto motiva la introducción de modelos estocásticos para su estudio.
- En nuestro modelo se basa en la siguiente ecuación diferencial estocástica de tipo Itô que introduce la aleatoriedad a través de un proceso estocástico (p.e.) llamando Movimiento Browniano (M.B.) $B(t)$:

$$dS(t) = \underbrace{\mu\, S(t)dt}_{\textit{Determinista}} + \underbrace{\sigma\, S(t)d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})}_{\textit{Aleatorio}}$$

- $S(t)$ denota el valor del par EUR/USD en el instante t.
- μ denota la tendencia, deriva o *drift*.
- σ de nota la volatilidad (luego es positiva).
- $B(t)$ denota el p.e. Movimiento Browniano (o proceso de Wiener).
- $dS(t)$ denota la variación del subyacente en $[t, t + dt]$.
- $dB(t)$ denota la variación del MB en $[t, t + dt]$.

2.1.Propiedades del Modelo. Definición

- Empieza en el origen con probabilidad 1:

$$P[B(0) = 0] = 1$$

- Sus incrementos son:

Estacionarios

$$B(t + \Delta t) - B(t) = \; B(s + \Delta t) - B(s), \qquad s, t, \in [0, \infty[$$

Independientes

$$B(t_2) - B(t_1), B(t_3) - B(t_2), \dots, B(t_{n+1} - B(t_n),$$

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \infty$$

Distribución

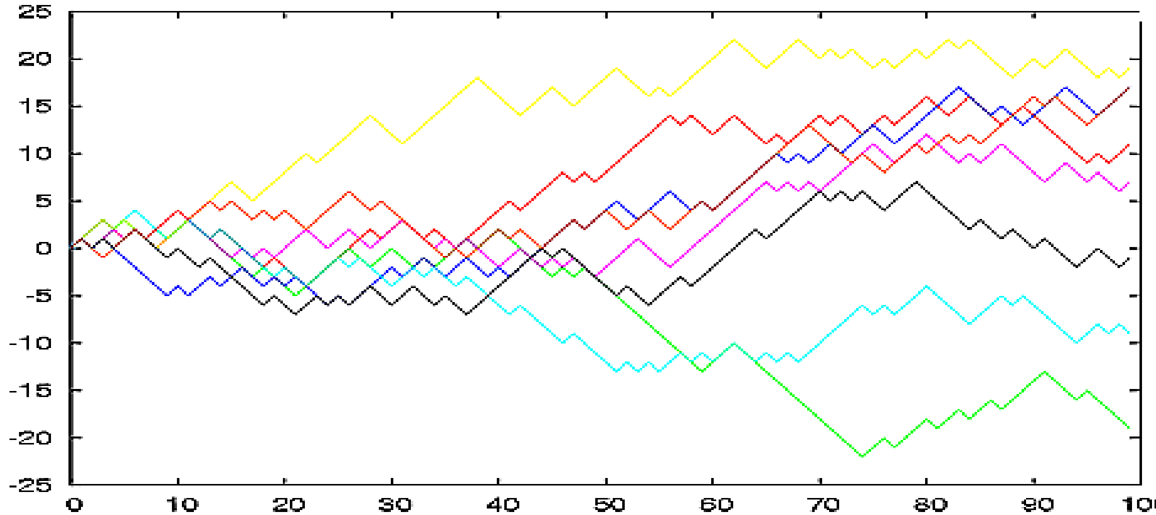
$$B(t) - B(s) \sim N(0; \sqrt{t - s}).$$

- El movimiento presenta trayectorias continuas no diferenciables.

2.2.Propiedades fundamentales del modelo.

- Función media igual a cero:

$$E[B(t)] = 0$$



- La covarianza es el mínimo entre “s” y “t”:

$$Cov\ [B(t), B(s)] = s, \text{ si } 0 < s < t$$

- Es ½ autosemejante:

$$B(T\ t) = \sqrt{T}\ B(t)$$

2.3.Solución del modelo ➡ MBG.

- La solución del Proceso estocástico da como resultado el Movimiento Browniano Geométrico (MBG) o Modelo Lognormal:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$$

Cálculo de Itô

$$S(t) = S(0)e^{\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + B(t)\right)}, t \geq 0 \Longrightarrow \text{MBG}$$

- ✓ El comportamiento medio del precio del par EUR/USD es el mismo que el que se obtendría en el caso determinista: $S_0 e^{\mu t}$
- ✓ La varianza es positiva y crece a medida que lo hace el horizonte temporal T:

$$Var[S(T)] = (S_0)^2 e^{(2\mu T)}\left(e^{(\sigma^2 T)} - 1\right) > 0$$

3.Transformaciones para trabajar

Por conveniencia hacemos las transformaciones:

- Trabajamos con el logaritmo neperiano de las cotizaciones:

$$Y(t) = ln(S(t))$$

- Transformamos los parámetros:

$$R = \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \qquad V = \sigma^2$$

- Discretizamos el modelo en k periodos:

$$Y(t_k) = Y_k \text{ con } t_K = K,\ K = 0,1,2 \dots n$$

Así nuestro modelo queda:

$$S(t) = S(0)e^{\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + B(t)\right)} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{Y_K = Y_0 + R\,K + \sqrt{V}B(K)}}$$

4.Distribución estadística de las log-cotizaciones

- Conocida la expresión que determina Y_K podemos deducir la expresión de Y_{K-1}

(1) $Y_K = Y_0 + R\,K + \sqrt{V} B(K)$

(2) $Y_{K-1} = Y_0 + R\,(K-1) + \sqrt{V} B(K-1)$

(1)-(2) $Y_K = Y_{K-1} + R + \sqrt{V}\{B(K) - B(K-1)\}$

$$Y_K | Y_{K-1} \sim \mathrm{N}\left(Y_{K-1} + R ; \sqrt{V}\right)$$

$E[Y_K] = Y_{K-1} + R$

$Var[\,Y_K] = V$

5.Estimación de los parámetros R y V mediante la máxima verosimilitud M.M.V

- Una vez conocemos la distribución de Y_K estimamos los parámetros de los que depende maximizando la función de log-verosimilitud.
- La función de verosimilitud total puede escribirse como producto de funciones de densidad condicionadas:

$$l(R,V;Y_1,Y_2,\dots,Y_n) \coloneqq f(R,V;Y_1)f(R,V;Y_2|Y_1)f(R,V;Y_3|Y_1,Y_2)\dots f(R,V;Y_k|Y_1,\dots,Y_{K-1}) =$$

Proceso de Markow de orden 1

$$= f(R,V;Y_1)f(R,V;Y_2|Y_1)f(R,V;Y_3|Y_2)\dots f(R,V;Y_k|Y_{K-1})$$

- Por comodidad, al tratarse de funciones exponenciales, trabajaremos con la función de log-verosimilitud. Para ello tomamos logaritmos en la expresión anterior:

$$L(R,V;Y_1,Y_2,\dots,Y_n) = \ln(l(R,V;Y_1,Y_2,\dots,Y_n) = \sum_{K=1}^{n} \ln(f(R,V;Y_k|Y_{K-1}))$$

- Como Y_K es una normal, su función de densidad de probabilidad es : $f(R,V;Y_k|Y_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y_k-(Y_{k-1}+R)}{\sqrt{V}}\right)^2}$
- Sustituyendo la función de densidad de probabilidad en la de log-verosimilitud y aplicando a esta última técnicas de optimización de funciones, obtenemos las estimaciones de R y V:

$$\boxed{\hat{R} = \frac{Y_n-Y_0}{n}}$$

$$\boxed{\hat{V} = \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n}\left(Y_k - Y_{k-1} - \hat{R}\right)^2}$$

5.1.Estimación de R y V por intervalos de confianza.

- Resulta interesante estimar no solo los valores puntuales de los parámetros, sino también el rango de valores entre los que oscilarán para un nivel de confianza del 95%.
- Para ello calculamos la inversa de la matriz de información de Fisher, que equivale a la matriz de varianzas-covarianzas asintóticas de los estimadores de máxima verosimilitud.
- Como nuestra muestra es asintótica podemos aplicar el Teorema Central del Límite para hallar las estimaciones por intervalos de confianza (95%):

$$(Inf)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{V}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2V^2}{n} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} var(\hat{R}) & cov(\hat{R},\hat{V}) \\ cov(\hat{R},\hat{V}) & var(\hat{V}) \end{bmatrix}$$

$$\Big\Downarrow \text{ T.C.L.}$$

$$\hat{R} \pm Z_{1-\frac{\propto}{2}} \sqrt{\frac{\hat{V}}{n}} \qquad \hat{V} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{2\hat{V}^2}{n}}$$

6.Metodologías de predicción.

Tres metodologías de predicción

- Predicción a corto plazo
- Predicción paso a paso
- Predicción mediante simulación

- **Predicción corto a plazo:**

  Estimamos a un día transaccional a más de un día transaccional. Puede resultar interesante estimar la cotización existente dentro de 3 días sin tener que conocer la cotización de la víspera.

- **Predicción paso a paso:**

  Se trata de un caso particular del anterior pero con el horizonte temporal de un solo día. Aquí predecimos un día de cotización una vez situados en el día inmediatamente anterior.

- **Predicción mediante simulación:**

  Estimaremos paso a paso sin utilizar como estimador el valor esperado de $\hat{y}_t$, lo cual nos obliga a simular el Movimiento Browniano.

6.1.Estimación a corto plazo. Estimador puntual

- Consiste en observar el proceso estocástico $Y(t)$ hasta el instante "n", es decir, los logaritmos de las cotizaciones desde el primer valor de la muestra, hasta el instante "n" y predecir el proceso $Y(t)$ para $t > n$.
- Utilizaremos como criterio de predicción, el valor $\hat{y}_t$ que minimiza el error cuadrático medio, que dará como predictor puntual de $Y(t) = Y_t$, con $t > n$, conocidos $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ la esperanza de Y_t dados los valores $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$.
- Se puede comprobar que:

$$Y_t = Y_n + (t-n)R + \sqrt{V}(B(t) - B(n)), \qquad t > n$$

- Tomando esperanzas en la expresión anterior obtenemos el predictor buscado:

$$\hat{Y}_t = E[Y_t | Y_n] = Y_n + (t-n)R, \; t > n$$

$$\Big\Downarrow \; R=\hat{R}$$

$$\boxed{\hat{Y}_t = E[Y_t | Y_n] = Y_n + (t-n)\hat{R}, \; t > n}$$

6.2.Estimación a corto plazo. Estimador por intervalos de confianza.

- Con las expresiones anteriores podemos calcular la distribución estadística del error, y con ella los estimadores por intervalos de confianza.

  De las dos expresiones anteriores $\Rightarrow$ $\hat{Y}_t - Y_t = (t-n)(\hat{R} - R) - \sqrt{V}(B(t) - B(n))$

  Como sabemos que $\hat{R} = \frac{Y_n - Y_0}{n}$ $\Rightarrow$ $\hat{Y}_t - Y_t = (t-n)\frac{\sqrt{V}}{n}B(n) - \sqrt{V}(B(t) - B(n))$

- Esta expresión nos permite deducir la distribución estadística del error.

  Como $B(n) = B(n) - B(0)$ y $B(t) - B(n)$ son variables aleatorias gaussianas independientes de media 0 y desviación típica $\sqrt{n}$ y $\sqrt{t-n}$, tenemos:

$$\hat{Y}_t - Y_t \sim N\left(0; \sqrt{V(t-n)}\left(1 + \sqrt{\frac{t}{n} - 1}\right)\right)$$

- Finalmente sustituyendo el valor de V por el de su estimador $\hat{V}$ obtenemos los estimadores por intervalos para un nivel de confianza 1-α.

$$\boxed{\hat{Y}_t \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}(t-n)}\left(1 + \sqrt{\frac{t}{n} - 1}\right)}$$

6.3.Estimación paso a paso. Estimador puntual.

- Se basa en utilizar los valores $Y(0) = Y_0,\ Y(1) = Y_1,\ \ldots,\ Y(n) = Y_n$ para predecir únicamente el valor $Y(n+1) = Y_{n+1}$ en el día transaccional $n+1$. Conocido ya el verdadero valor $Y(n+1) = Y_{n+1}$, se utilizarían las cotizaciones $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n, Y_{n+1}$ para predecir la siguiente cotización $Y(n+2) = Y_{n+1}$, y así sucesivamente.
- La metodología de la predicción paso a paso es un caso particular del explicado a corto plazo, pero tomando t=m+1.
- Como en el caso anterior utilizaremos como estimación el valor del estimador que minimiza el error cuadrático medio, es decir, su esperanza.
- Las estimaciones de R y V son recalculadas periodo a periodo incorporando al modelo la información más reciente.

t=m+1=n+1

$$\hat{Y}_t = E[Y_t|Y_n] = Y_n + (t-n)\hat{R},\ t > n \Longrightarrow \boxed{\hat{Y}_{m+1} = Y_m + \hat{R}_m.}$$

6.4.Estimación a paso a paso. Estimadores por intervalos de confianza.

- Procediendo del mismo modo que en la estimación a corto plazo pero sustituyendo t=m+1=n+1 obtenemos las estimaciones por intervalos de confianza:

$$\hat{Y}_t \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}(t-n)}\left(1+\sqrt{\frac{t}{n}-1}\right) \Longrightarrow \boxed{\hat{Y}_m \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}_m}\left(1+\sqrt{\frac{1}{m}}\right)}$$

6.5.Estimación por simulación

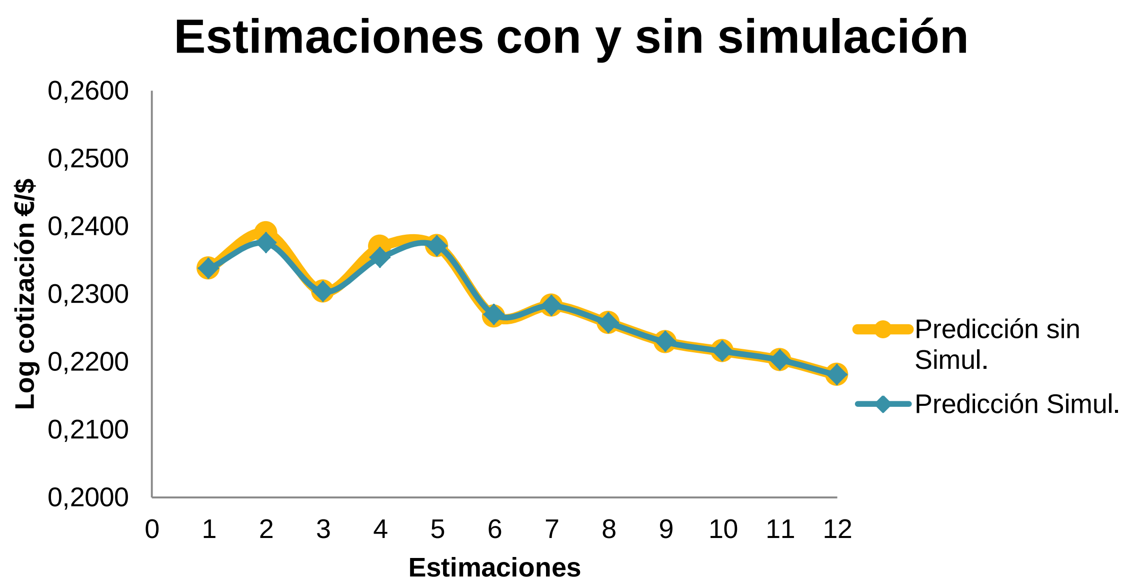
- Se trata de una estimación paso a paso, pero utilizando como predicción el valor de Y_t estimado y no su esperanza.
- Sabemos que:

$$\tilde{Y}_t = Y_n + (t-n)\hat{R} + \sqrt{V}(B(t) - B(n))$$

- Como $B(n) - B(n-1)$ sigue una normal de media 0 y desviación típica la longitud del intervalo (1), podemos calcular el valor de $\tilde{Y}_t$ simulando dicha diferencia mediante una generación de números aleatorios normales (0;1).
- El valor que utilizaremos como estimación será el promedio de los distintos $\tilde{Y}_t$ calculados (uno para cada número aleatorio).
- Los resultados obtenidos son casi exactos a los hallados por la metodología paso a paso sin simulación.

7.1. Resultados estimaciones paso a paso mediante simulación Monte Carlo

- Resultados muy similares a los obtenidos tomando esperanzas
- Podemos evitar simular el browniano para calcular estimaciones

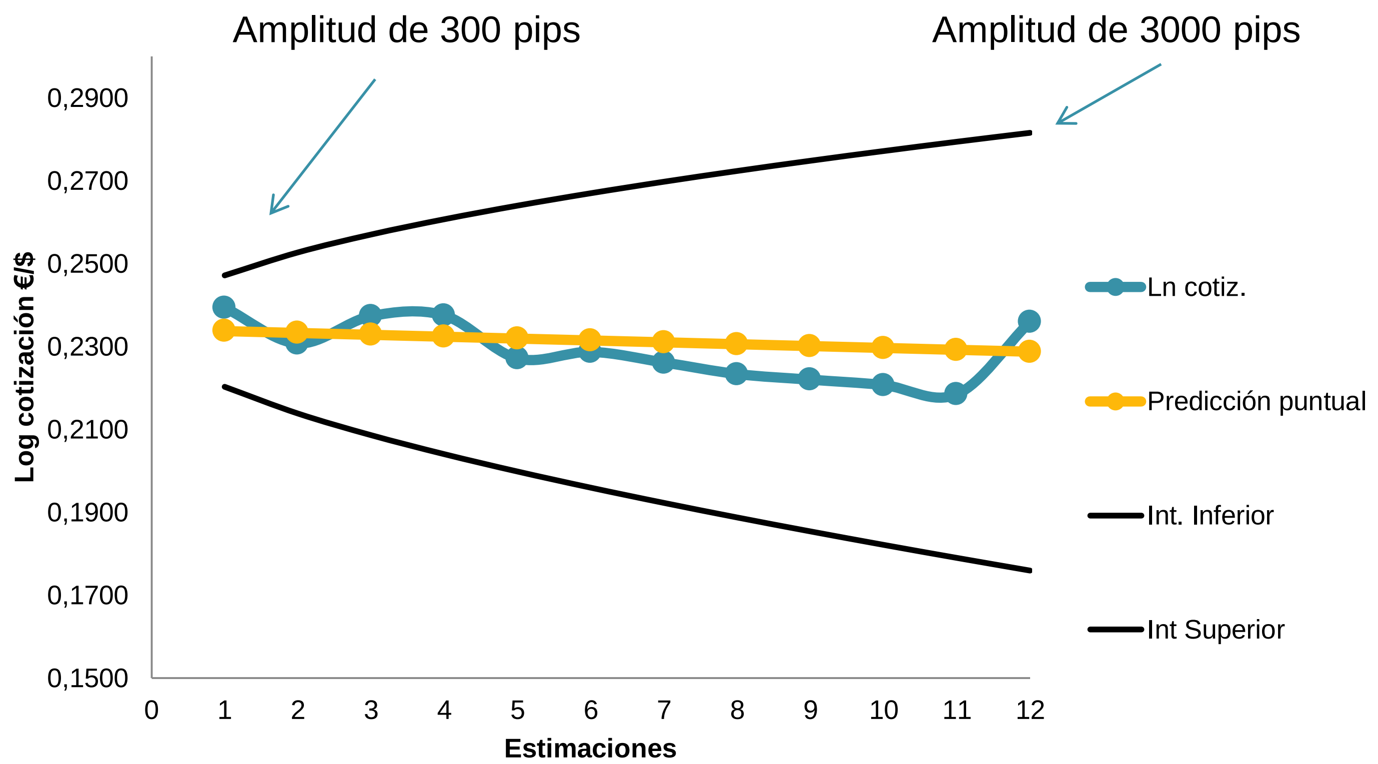


7.2. Resultados estimación corto plazo

		Predicción por intervalos		
Fechas	Predicción puntual	Intervalo Inferior	Intervalo superior	Y_t
17.06.2012	0,2338	0,2203	0,2472	0,2394
18.06.2012	0,2333	0,2139	0,2527	0,2308
19.06.2012	0,2328	0,2086	0,2571	0,2374
20.06.2012	0,2324	0,2040	0,2607	0,2375
21.06.2012	0,2319	0,1999	0,2640	0,2271
22.06.2012	0,2315	0,1960	0,2670	0,2287
24.06.2012	0,2310	0,1923	0,2698	0,2262
25.06.2012	0,2306	0,1888	0,2724	0,2234
26.06.2012	0,2301	0,1854	0,2749	0,2220
27.06.2012	0,2297	0,1822	0,2772	0,2207
28.06.2012	0,2292	0,1790	0,2795	0,2185
29.06.2012	0,2288	0,1759	0,2816	0,2360
R^{est}=	-0,000452119			
V^{est}=	4,20476E-05			

- Las estimaciones de R y V permanecen constantes.
- La amplitud de las predicciones por intervalos se multiplica por 10 de la primera a la última predicción.

7.2. Resultados de estimación a corto plazo



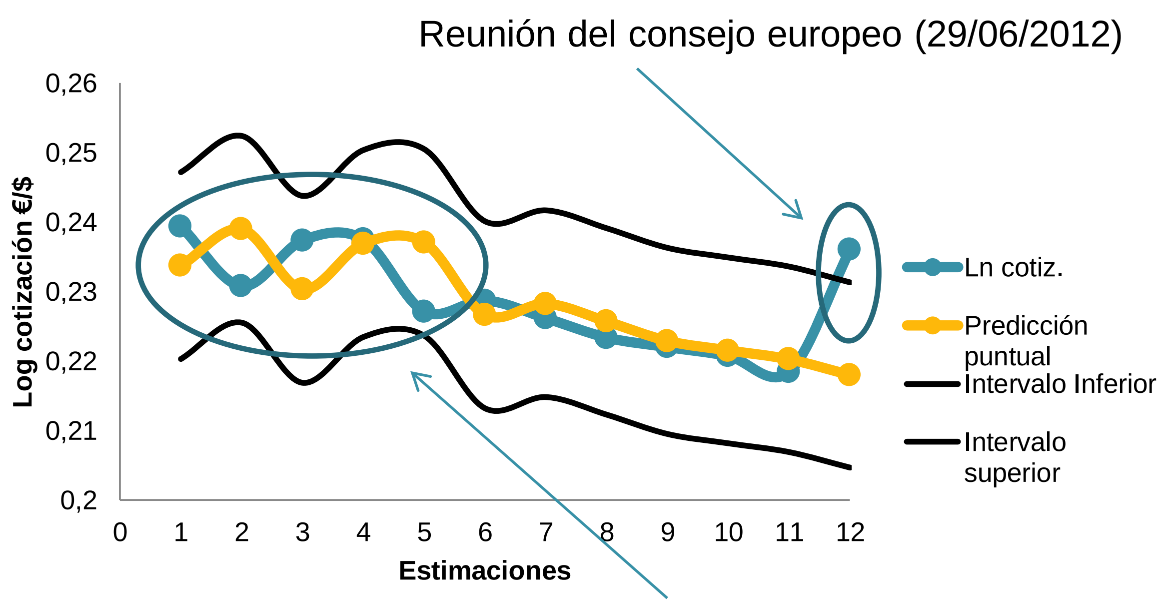
7.3.Resultados estimación paso a paso

Fechas	R^{est} hasta la fecha	V^{est} hasta la fecha	Predicción puntual	Intervalos al 95%		Y_t
				Intervalo Inferior	Intervalo superior	
15.06.2012	-0,0004521	4,20476E-05				0,2342
17.06.2012	-0,0004333	4,20140E-05	0,2338	0,2203	0,2472	0,2394
18.06.2012	-0,0004604	4,20958E-05	0,2390	0,2255	0,2524	0,2308
19.06.2012	-0,0004372	4,21194E-05	0,2303	0,2169	0,2438	0,2374
20.06.2012	-0,0004353	4,19820E-05	0,2369	0,2235	0,2504	0,2375
21.06.2012	-0,0004679	4,21678E-05	0,2371	0,2237	0,2505	0,2271
22.06.2012	-0,0004611	4,20438E-05	0,2267	0,2132	0,2401	0,2287
24.06.2012	-0,0004679	4,19210E-05	0,2283	0,2148	0,2417	0,2262
25.06.2012	-0,0004755	4,18025E-05	0,2257	0,2123	0,2391	0,2234
26.06.2012	-0,0004784	4,16697E-05	0,2229	0,2095	0,2363	0,2220
27.06.2012	-0,0004810	4,15374E-05	0,2215	0,2082	0,2349	0,2207
28.06.2012	-0,0004866	4,14138E-05	0,2203	0,2069	0,2336	0,2185
29.06.2012	-	-	0,2180	0,2047	0,2313	0,2360

- Estimaciones puntuales aceptables.
- Estimaciones de R y V variables. Los recalculamos periodo a periodo.
- Estimaciones por intervalos al 95% de confianza demasiado amplias.

7.3. Resultados estimación paso a paso

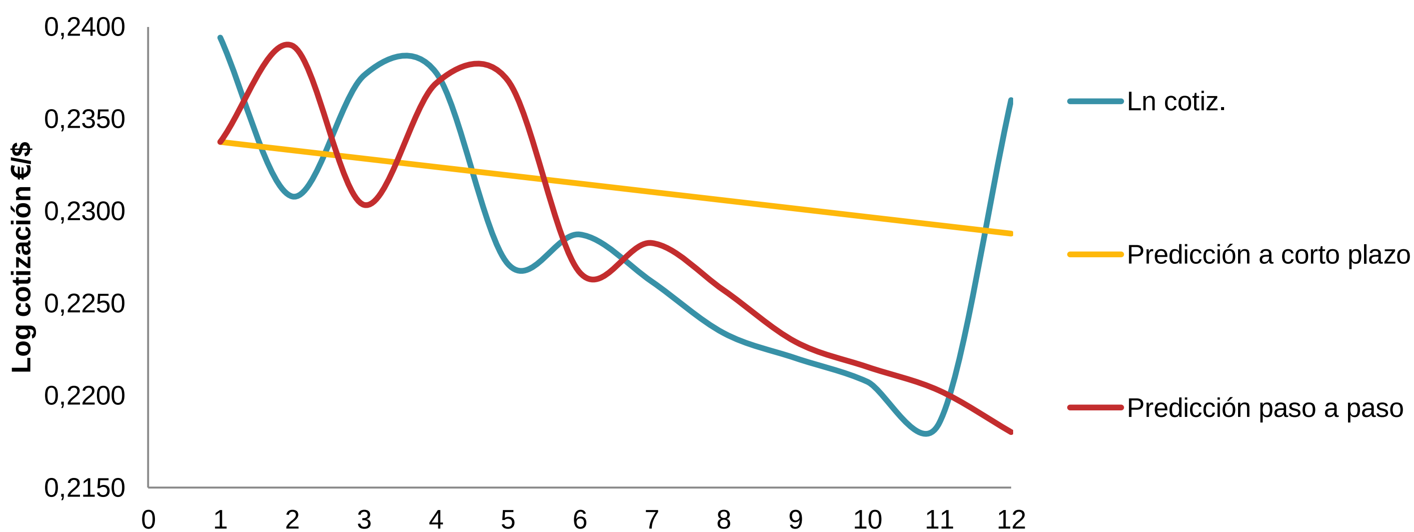
- Se pueden dar eventos económicos que escapen a nuestro intervalo de predicción



Comportamiento similar al de las medias móviles.

7.4. Resumen de predicciones

Fechas	Yt	Est. Corto plazo	Est. Paso a paso	Est. Simulación
17.06.2012	0,2394	0,2338	0,2338	0,2337
18.06.2012	0,2308	0,2333	0,2390	0,2338
19.06.2012	0,2374	0,2328	0,2303	0,2306
20.06.2012	0,2375	0,2324	0,2369	0,2304
21.06.2012	0,2271	0,2319	0,2371	0,2373
22.06.2012	0,2287	0,2315	0,2267	0,2267
24.06.2012	0,2262	0,2310	0,2283	0,2286
25.06.2012	0,2234	0,2306	0,2257	0,2258
26.06.2012	0,2220	0,2301	0,2229	0,2231
27.06.2012	0,2207	0,2297	0,2215	0,2217
28.06.2012	0,2185	0,2292	0,2203	0,2205
29.06.2012	0,2360	0,2288	0,2180	0,2180



8.Medidas de bondad de ajuste

- Error cuadrático medio (M.S.E) ➡ $$MSE = \sqrt{\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}$$

  - ✓ Mide la distancia media entre los valores estimados y los reales.
  - ✓ Mejor estimación cuanto menos M.S.E presente.

- Error porcentual absoluto medio (MAPE) ➡ $$MAPE = \left(\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\frac{|Y_i - \hat{Y}_i|}{Y_i}\right)x100.$$

  - ✓ Media de valores absolutos ponderados.
  - ✓ Reduce el efecto de los errores asociados a los valores más altos.
  - ✓ Mejor estimación cuanto menos M.A.P.E.

8.1 Error Cuadrático Medio

Fechas	Yt	Est. Corto plazo	Estimación Paso a paso	(Errores)^2 **Corto plazo**	(Errores)^2 **Paso a paso**
17.06.2012	0,2394	0,2338	0,2338	3,2041E-05	3,2041E-05
18.06.2012	0,2308	0,2333	0,2390	6,2687E-06	6,6961E-05
19.06.2012	0,2374	0,2328	0,2303	2,0396E-05	4,9395E-05
20.06.2012	0,2375	0,2324	0,2369	2,6276E-05	3,5396E-07
21.06.2012	0,2271	0,2319	0,2371	2,3098E-05	9,8980E-05
22.06.2012	0,2287	0,2315	0,2267	7,6261E-06	4,2446E-06
24.06.2012	0,2262	0,2310	0,2283	2,3604E-05	4,3591E-06
25.06.2012	0,2234	0,2306	0,2257	5,1865E-05	5,4171E-06
26.06.2012	0,2220	0,2301	0,2229	6,5775E-05	7,8340E-07
27.06.2012	0,2207	0,2297	0,2215	7,9929E-05	6,4624E-07
28.06.2012	0,2185	0,2292	0,2203	1,1526E-04	3,1221E-06
29.06.2012	0,2360	0,2288	0,2180	5,2469E-05	3,2451E-04
			Suma de (errores)^2	4,2051E-05	4,9235E-05
			Error Cuadrático Medio	**6,4847E-03**	**7,0167E-03**

- La estimación a corto plazo presenta menor M.S.E.

8.2. Error Porcentual Absoluto

Fechas	Yt	Estimación Corto plazo	Estimación Paso a paso	$\lvert errores \rvert / Y_t$ **Corto plazo**	$\lvert errores \rvert / Y_t$ **Paso a paso**
17.06.2012	0,2394	0,2338	0,2338	0,0236	0,0236
18.06.2012	0,2308	0,2333	0,2390	0,0108	0,0355
19.06.2012	0,2374	0,2328	0,2303	0,0190	0,0296
20.06.2012	0,2375	0,2324	0,2369	0,0216	0,0025
21.06.2012	0,2271	0,2319	0,2371	0,0212	0,0438
22.06.2012	0,2287	0,2315	0,2267	0,0121	0,0090
24.06.2012	0,2262	0,2310	0,2283	0,0215	0,0092
25.06.2012	0,2234	0,2306	0,2257	0,0322	0,0104
26.06.2012	0,2220	0,2301	0,2229	0,0365	0,0040
27.06.2012	0,2207	0,2297	0,2215	0,0405	0,0036
28.06.2012	0,2185	0,2292	0,2203	0,0491	0,0081
29.06.2012	0,2360	0,2288	0,2180	0,0307	0,0763
			MAPE	**2,66%**	**2,13%**

- La estimación paso a paso presenta menor M.A.P.E.

9.Conclusiones

- Estimaciones puntuales aceptables, pero intervalos de confianza demasiado amplios y poco informativos con cualquier metodología.
- La adopción de un histórico de cotizaciones con más datos hubiera ayudado a disminuir la amplitud de las estimaciones por intervalos de confianza.
- Se dan acontecimientos económicos que hacen que la fluctuación del tipo de cambio supere nuestros amplios intervalos de confianza.
- Dificultad para predecir el futuro tan solo considerando el pasado. El contexto económico tiene una gran influencia sobre la cotización y no podemos obviarlo.
- Una buena maniobra de compra-venta pasará, necesariamente, por la aplicación de este tipo de modelo junto con un estudio de la realidad económica.