



UNIVERSIDAD  
POLITECNICA  
DE VALENCIA



---

## TESIS DOCTORAL

# Control Predictivo Basado en Modelos (CPBM) robusto con BDU

Realizada por:

**César Ramos Fernández**

Dirigida por:

**Dr. Miguel Martínez Iranzo**

**Dr. Javier Sanchis Sáez**

Valencia, 12 de Enero de 2007

---



## TESIS DOCTORAL

---

### Control Predictivo Basado en Modelos (CPBM) robusto con BDU

---

#### TRIBUNAL CALIFICADOR

Presidente: **Dr. D. Josep TORNERO i MONTSERRAT**

Catedrático de Universidad

Área de Ingeniería de Sistemas y Automática

Secretario: **Dr. D. F. XAVIER BLASCO FERRAGUD**

Titular de Universidad

Área de Ingeniería de Sistemas y Automática

Vocales: **Dr. D. Rafael SANZ DOMÍNGUEZ**

Catedrático de Universidad

Área de Ingeniería de Sistemas y Automática

**Dr. D. Carlos BORDÓNS ALBA**

Titular de Universidad

Área de Ingeniería de Sistemas y Automática

**Dr. D. Francisco RODRÍGUEZ DÍAZ**

Titular de Escuela Universitaria

Área de Ingeniería de Sistemas y Automática

Suplentes: **Dr. D. Manuel PÉREZ POLO**

Catedrático de Universidad

Área de Ingeniería de Sistemas y Automática

**Dr. D. César DE PRADA MORAGA**

Catedrático de Universidad

Área de Ingeniería de Sistemas y Automática

Valencia, 12 de Enero de 2007



Para María Jesús  
y Silvia



## **AGRADECIMIENTOS**

---

Me gustaría hacer llegar mi agradecimiento a todas las personas que, de algún modo, me han animado y apoyado durante el desarrollo de esta Tesis Doctoral.

En primer lugar, a mis directores Miguel y Javier por sus inestimables consejos e infinidad de horas que han dedicado a la dirección de la tesis. Al resto de compañeros del grupo de investigación de Control Predictivo: JuanMa, Xavi y Jose Vte. por el apoyo e interés que han mostrado, y a los compañeros del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. Por último, con todo mi cariño, quiero dedicar este trabajo a mis amigos y familia, en especial a María Jesús.



# Resumen

El Control Predictivo Basado en Modelos (CPBM) optimiza un índice que incorpora un parámetro de penalización para las acciones de control  $\lambda$ , con el fin de que no sean demasiado bruscas, a la vez que se mejora la robustez del sistema. El principal inconveniente radica en que el sintonizado de  $\lambda$  se suele regir por criterios empíricos, y poco orientados a la mejora de la robustez.

De entre las diferentes técnicas de mejora de la robustez en CPBM se destaca la optimización Min-Max de las especificaciones, donde se resuelve el problema de optimización para el peor modelo en una región acotada.

Desde otro punto de vista, el principio de mínimos cuadrados está presente en numerosas teorías de identificación y control. De hecho el CPBM se puede plantear como un problema de mínimos cuadrados. Su principal inconveniente radica en que es sensible a los errores en los datos (mal condicionamiento), lo cual se puede mejorar regularizando el problema mediante el parámetro de regularización  $\lambda$  ajustado empíricamente (análogo al parámetro  $\lambda$  de penalización del esfuerzo de control en CPBM).

La técnica BDU (*Bounded Data Uncertainties*) es una técnica de regularización de problemas de mínimos cuadrados, originalmente desarrollada para problemas de estimación, y poco usada en control, salvo el controlador lineal cuadrático (LQR) con horizonte de predicción finito considerando incertidumbre paramétrica.

Dicha técnica diseña el parámetro de regularización  $\lambda$  teniendo en cuenta la cota de la incertidumbre presente en el sistema y plantea el problema como una optimización Min-Max. Por lo tanto se puede establecer la analogía con el problema Min-Max de CPBM robusto, así el objetivo principal de la tesis consiste en usar la técnica BDU para sintonizar  $\lambda$  de modo guiado y con el fin de mejorar la robustez del sistema.

Otro objetivo adicional es asegurar la estabilidad. Por tanto, se pretende plantear un LQR robusto y estable, denominado LQR-BDU, robusto por usar BDU, y estable por considerar restricción terminal u horizontes de predicción infinitos.

La aplicación al LQR, sirve como precursor de la aplicación a CPBM, donde se centrará la atención en el GPC, obteniendo el GPC-BDU donde  $\lambda$  se elige de manera automática en función del límite máximo de la incertidumbre que se desee manejar.

Por otra parte, partiendo de la variante estable del GPC (CRHPC o *Constrained Receding-Horizon Predictive Control*), el cual asegura la estabilidad nominal, se formula el CRHPC-BDU, que pretende mejorar la robustez del sistema cuando existen discrepancias entre modelo y proceso. Por tanto el controlador CRHPC-BDU resultará ser el GPC estable y robusto objeto de la tesis.



# Resum

El Control Predictiu Basat en Models (CPBM) optimitza un índex que incorpora un paràmetre de penalització per a les accions de control  $\lambda$ , amb la finalitat de que no siguin massa brusques, al mateix temps que es millora la robustesa del sistema. El principal inconvenient radica en que el sintonitzat de  $\lambda$  sol regir-se per criteris empírics, i poc orientats a la millora de la robustesa.

D'entre les diferents tècniques de millora de la robustesa en CPBM es destaca l'optimització Min-Max de les especificacions, on es resol el problema d'optimització per al pitjor model en una regió acotada.

Des d'un altre punt de vista, el principi de mínims quadrats està present en nombroses teories d'identificació i control. De fet el CPBM es pot plantejar com un problema de mínims quadrats. El seu principal inconvenient radica en que és sensible als errors en les dades (mal condicionament), la qual cosa es pot millorar regularitzant el problema mitjançant el paràmetre de regularització  $\lambda$  ajustat empíricament (anàleg al paràmetre  $\lambda$  de penalització de l'esforç de control en CPBM).

La tècnica BDU (*Bounded Data Uncertainties*) és una tècnica de regularització de problemes de mínims quadrats, originalment desenvolupada per a problemes d'estimació, i poc usada en control, excepte el controlador lineal quadràtic (LQR) amb horitzó de predicció finit considerant incertesa paramètrica.

Aquesta tècnica dissenya el paràmetre de regularització  $\lambda$  tenint en compte la cota de la incertesa present al sistema i planteja el problema com una optimització Min-Max. Per tant es pot establir l'analogia amb el problema Min-Max de CPBM robust, així l'objectiu principal de la tesi consisteix en usar la tècnica BDU per a sintonitzar  $\lambda$  de manera guiada i amb la finalitat de millorar la robustesa del sistema.

Un altre objectiu adicional és assegurar l'estabilitat. Per tant, es pretén plantejar un LQR robust i estable, denominat LQR-BDU, robust per usar BDU, i estable per considerar restricció terminal o horitzons de predicció infinits.

L'aplicació al LQR, serveix com a precursor de l'aplicació a CPBM, on es centrarà l'atenció al GPC, obtenint el GPC-BDU on  $\lambda$  s'elegeix de manera automàtica en funció del límit màxim de la incertesa que es desitja manejar.

Per altra banda, partint de la variant estable del GPC (CRHPC o *Constrained Receding-Horizon Predictive Control*), el qual assegura l'estabilitat nominal, es formula el CRHPC-BDU, que pretén millorar la robustesa del sistema quan existeixen discrepàncies entre model i procés. Per tant el controlador CRHPC-BDU resultarà ser el GPC estable i robust objecte de la tesi.



# Abstract

Model Predictive Control (MPC) optimizes an index which includes a penalization parameter  $\lambda$  in order to get not too abrupt control actions, and at the same time to improve the system robustness. The main drawback consists of the fact that  $\lambda$  is tuned by empirical criteria, without the objective of improving the robustness.

There exist several techniques for improving robustness in MPC and among them the Min-Max optimization can be emphasized, where an optimization problem is solved for the worst model inside a bounded region.

From another point of view, the least squares principle is present in a big number of identification and control theories. In fact MPC can be stated as a least squares problem. Its main drawback is that the method is sensitive to data errors (ill-conditioning) which can be improved by the empirically tuned regularization parameter  $\lambda$  (which is similar to the penalization parameter  $\lambda$  for the control effort in MPC).

The BDU (Bounded Data Uncertainties) is a regularization technique for least squares problems, which has been originally developed for estimation problems and not very used in control, except for the linear quadratic regulator (LQR) with finite prediction horizon under parametric uncertainty.

The technique designs the regularization parameter  $\lambda$  taking into account the bound of the system uncertainty and the problem is stated as a Min-Max optimization. So it is possible to establish an analogy between BDU and the Min-Max problem in robust MPC, and the main objective of the thesis consists of using BDU for tuning  $\lambda$  in a guided way in order to improve the system robustness.

Another thesis objective is to ensure stability. So it is desired to state a robust and stable LQR, called LQR-BDU, robust by using BDU, and stable by taking into account either terminal constraint or infinite prediction horizons.

The application to LQR is the precursor to the application to MPC, where the attention is focused on the GPC, obtaining the GPC-BDU in which  $\lambda$  is chosen in an automatic manner depending on the desired uncertainty bound.

On the other hand, from the stabilizing GPC version (CRHPC or Constrained Receding-Horizon Predictive Control), which ensures nominal stability, the CRHPC-BDU is stated, which tries to improve the system robustness when discrepancies between model and process are present. Therefore the CRHPC-BDU is the stable and robust GPC which constitutes the thesis objective.



# Índice de la Tesis.

<b>1 Motivación y objetivos de la tesis.</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción. . . . .	3
1.2 Motivación. . . . .	3
1.3 Objetivos y solución adoptada. . . . .	6
1.4 Organización de la tesis. . . . .	7
<b>2 Control predictivo basado en modelos.</b>	<b>9</b>
2.1 Introducción. . . . .	11
2.2 Fundamentos del CPBM. . . . .	12
2.2.1 Predictor. . . . .	15
2.2.2 Función de coste. . . . .	17
2.2.3 Optimizador. . . . .	19
2.3 Evolución y tipología del CPBM. . . . .	19
2.3.1 Evolución del CPBM. . . . .	19
2.3.2 El control predictivo y la industria. . . . .	23
2.3.3 Algoritmos de control predictivo. . . . .	25
2.4 El problema de la robustez en CPBM. . . . .	28
2.4.1 Introducción. . . . .	28
2.4.2 Representación de la incertidumbre. . . . .	29
2.4.3 Técnicas de mejora de la robustez en CPBM. . . . .	33
2.5 Conclusiones del capítulo. . . . .	40
<b>3 Fundamentos de la técnica <i>Bounded Data Uncertainties</i> (BDU).</b>	<b>41</b>
3.1 Introducción. . . . .	43
3.2 Técnicas de regularización. . . . .	43

3.3	Fundamentos de la técnica BDU. . . . .	52
3.3.1	Planteamiento del problema. . . . .	52
3.3.2	El límite para la incertidumbre. . . . .	53
3.3.3	Reducción del problema <i>min-max</i> a un problema de minimización. . . . .	54
3.3.4	Minimización del índice. . . . .	56
3.3.5	Extensión del índice planteado. . . . .	57
3.3.6	Planteamiento mediante la SVD. . . . .	60
3.4	Conclusiones. . . . .	62
<b>4</b>	<b>El controlador LQR-BDU.</b>	<b>63</b>
4.1	Introducción. . . . .	65
4.2	BDU en control. . . . .	65
4.2.1	El controlador LQR con horizonte de predicción finito. La ecuación recursiva de Riccati. . . . .	65
4.2.2	Sintonizado del LQR vía BDU. . . . .	67
4.2.3	Ejemplo 1. . . . .	72
4.3	Estabilidad del controlador LQR-BDU. . . . .	73
4.3.1	El controlador LQR-BDU con horizonte de predicción finito y restricción terminal. . . . .	73
4.3.2	Ejemplo 2. . . . .	76
4.3.3	Estabilidad del LQR-BDU con horizonte de predicción infinito. . . . .	78
4.3.4	Ejemplo 3. . . . .	83
4.3.5	Ejemplo 4. . . . .	84
4.4	LQR-BDU n-dimensional. . . . .	86
4.4.1	<i>Weighted</i> -BDU. . . . .	86
4.4.1.1	Introducción. . . . .	86
4.4.1.2	Aplicación al LQR. . . . .	89
4.4.2	El controlador LQR-BDU n-dimensional. . . . .	92
4.4.3	TPBVP ( <i>Two-Point Boundary Value Problem</i> ). . . . .	96
4.4.4	Ejemplo 5. . . . .	98
4.4.5	Ejemplo 6. . . . .	100
4.5	Conclusiones. . . . .	106
<b>5</b>	<b>Control predictivo con BDU.</b>	<b>107</b>

5.1	Introducción. . . . .	109
5.2	El controlador CPEE-BDU. . . . .	109
5.2.1	Control predictivo en espacio de estados. . . . .	109
5.2.2	Sintonizado del CPEE-BDU. . . . .	111
5.3	El controlador GPC-BDU. . . . .	113
5.3.1	Controlador Predictivo Generalizado (GPC). . . . .	113
5.3.2	Formulación del GPC como un problema LS. . . . .	118
5.3.3	Sintonizado de $\lambda$ del GPC-BDU con $\rho = 0$ . . . . .	122
5.3.3.1	Ejemplo 1. . . . .	124
5.3.3.2	Ejemplo 2. . . . .	126
5.3.4	Sintonizado de $\lambda$ del GPC-BDU con $\rho > 0$ . . . . .	130
5.3.4.1	Ejemplo 3. . . . .	130
5.3.4.2	Ejemplo 4. . . . .	133
5.4	Conclusiones. . . . .	135
<b>6</b>	<b>Estabilidad del GPC-BDU. . . . .</b>	<b>139</b>
6.1	Introducción. . . . .	141
6.2	Constrained Receding-Horizon Predictive Control (CRHPC). . . . .	142
6.2.1	Obtención de la ley de control del CRHPC. . . . .	144
6.2.2	CRHPC como un problema de mínimos cuadrados. . . . .	147
6.2.3	CRHPC mediante la SVD. . . . .	149
6.2.3.1	Obtención de la solución particular. . . . .	150
6.2.3.2	Obtención de la solución homogénea. . . . .	151
6.2.3.3	Obtención de la ley de control. . . . .	152
6.2.4	Equivalencia entre soluciones. . . . .	152
6.2.5	Ejemplo 1. . . . .	155
6.3	CRHPC-BDU. . . . .	157
6.3.1	CRHPC-BDU como un problema BDU. . . . .	158
6.3.2	CRHPC-BDU mediante la SVD. . . . .	161
6.3.2.1	Obtención de la solución particular. . . . .	161
6.3.2.2	Obtención de la solución homogénea. . . . .	163
6.3.2.3	Obtención de la ley de control. . . . .	165
6.3.3	Equivalencia entre soluciones. . . . .	168

6.3.4	Ejemplo 2. . . . .	169
6.4	Conclusiones. . . . .	175
<b>7</b>	<b>Conclusiones de la tesis y trabajos futuros.</b>	<b>177</b>
7.1	Conclusiones principales y aportaciones. . . . .	179
7.2	Líneas futuras. . . . .	180
	<b>Bibliografía</b>	<b>183</b>

## Lista de Acrónimos

BDU	Bounded Data Uncertainties
CARIMA	Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average
CPBM	Control Predictivo Basado en Modelos
CPEE	Control Predictivo en Espacio de Estados
CPEE-BDU	CPEE sintonizado mediante BDU
CRHPC	Constrained Receding Horizon Predictive Control
CRHPC-BDU	CRHPC sintonizado mediante BDU
DMC	Dynamic Matrix Control
EHAC	Extended Horizon Adaptive Control
EPSAC	Extended Prediction Self Adaptive Control
FIR	Finite Impulse Response
GPC	Generalized Predictive Control
GPC-BDU	GPC sintonizado mediante BDU
GPCW	Generalized Predictive Control with End-Point State Weighting
GPC <sup>∞</sup>	Infinite Horizon Generalized Predictive Control
GSVD	Generalized Singular Value Decomposition
LQR	Linear Quadratic Regulator
LQR-BDU	LQR sintonizado mediante BDU
HIECON	Hierarchical Constraint Control
IAE	Integrated Absolute Error
IDCOM	Identification and Command
ISE	Integrated Square Error
ITAE	Integrated Time Absolute Error
ITSE	Integrated Time Square Error
LMI	Linear Matrix Inequalities
LP	Linear Programming
LQG	Linear Quadratic Gaussian
LS	Least Squares
LTI	Linear Time Invariant
MAC	Model Algorithmic Control
MIMO	Multiple Input Multiple Output
MPC	Model Predictive Control
MPHC	Model Predictive Heuristic Control
MUSMAR	Multistep Multivariable Adaptive Control
PCA	Principal Component Analysis
PFC	Predictive Functional Control

QDMC	Quadratic DMC
QP	Quadratic Programming
RLS	Regularized Least Squares
SGPC	Stable Generalized Predictive Control
SIORHC	Stabilizing Input-Output Receding Horizon Control
SISO	Single Input Single Output
SPC	Statistical Process Control
SVD	Singular Value Decomposition
SVT	Singular Value Thresholding
TLF	Transformación Lineal Fraccional
TLS	Total Least Squares
TPBVP	Two-Point Boundary Value Problem

# Capítulo 1

## Motivación y objetivos de la tesis.

---

1.1	Introducción. . . . .	3
1.2	Motivación. . . . .	3
1.3	Objetivos y solución adoptada. . . . .	6
1.4	Organización de la tesis. . . . .	7



## 1.1 Introducción.

A lo largo de este capítulo se presentan las ideas que motivan el desarrollo de la tesis la cual se enmarca dentro del campo del control predictivo robusto, así como los objetivos que se pretenden alcanzar con la misma. En la última parte del capítulo, se presenta la organización de la tesis mostrando, de forma breve, el contenido de los capítulos que la componen.

## 1.2 Motivación.

El *Control Predictivo Basado en Modelos (CPBM)* se ha utilizado y se sigue usando en gran número de aplicaciones del ámbito industrial, debido a su carácter intuitivo en el sintonizado, a su capacidad de control de gran variedad de procesos y al sistemático tratamiento de restricciones, entre otros aspectos.

Se enmarca dentro de los controladores óptimos, es decir, aquellos en los que las acciones de control se calculan mediante la **optimización** de un criterio o **función de coste** que está relacionado con el comportamiento futuro del sistema (**predicho** mediante un modelo dinámico) a lo largo de un horizonte de tiempo (**horizonte de predicción**) móvil (**receding horizon**).

Por ello el *Control Predictivo Basado en Modelos* más que un controlador concreto es una metodología para el cálculo de las acciones de control, compuesta por tres elementos fundamentales, el modelo, la función de coste y la optimización. Combinando distintas variaciones de estos tres elementos se pueden obtener un gran número de controladores que formarían parte de la familia de los controladores predictivos.

En general, no existe una formulación universal para la función de coste, ya que el índice más adecuado depende de cada problema concreto, de los objetivos que se impongan y de las herramientas disponibles. En cualquier caso, el índice incorpora unos factores de ponderación para las acciones de control  $\lambda$ , que se utilizan para conseguir distintos efectos en el comportamiento de bucle cerrado, como que las acciones de control no sean demasiado elevadas, bruscas, que el sistema sea más robusto o que se mejore el número de condición a la hora de obtener la ley de control.

El principal inconveniente radica en que el sintonizado de dicho parámetro se suele regir por criterios empíricos, aunque hay algunos trabajos que ofrecen una expresión analítica para  $\lambda$  con el fin de reducir el mal condicionamiento del sistema [Shridhar y Cooper 1997].

También existen métodos guiados de sintonizado de  $\lambda$  para evitar acciones de control agresivas (reducir el esfuerzo de control) como los basados en la descomposición en valores singulares de la matriz del controlador y el *análisis de sus componentes principales* (PCA) [Sanchis *et al.* 2001], [Sanchis 2002].

Pero no hay tanto trabajo hecho en el sintonizado de  $\lambda$  en cuanto al tema de robustez,

siendo ésta una cuestión fundamental en CPBM cuando se presenta incertidumbre en el modelo y/o ante presencia de ruido. La incertidumbre en el modelado de un proceso puede tener diversas causas [Skogestad y Postlethwaite 1996], como son que los valores nominales de los parámetros del modelo son siempre aproximaciones de los valores reales, y además pueden variar debido a las no linealidades del proceso, siempre existen errores en la medición de las variables y generalmente no se conoce la estructura del proceso en alta frecuencia, además de que en general, por simplicidad, se utilizan modelos de bajo orden para representar dinámicas complejas, lo que ocasiona errores de modelado, normalmente conocidos como *dinámica no modelada*.

En general, existen dos tipos comunes de incertidumbre que son la *incertidumbre estructurada o paramétrica* y *no estructurada*. En la estructurada se supone conocida la estructura del modelo y solamente se desconocen los valores de los parámetros  $\theta$ . En este caso se debe definir con detalle el *modelo nominal*  $\theta_0$  y establecer para cada uno de sus parámetros el *rango* de variación admitido. En ocasiones los límites de los parámetros se pueden aproximar por politopos convexos, o también por simples regiones de incertidumbre acotada, tal como  $\theta = \theta_0 + \delta\theta$ .

En el caso de que sea posible representar al sistema con un modelo de este tipo, la descripción será, en general, una muy buena aproximación de la realidad. Sin embargo, en la práctica, este procedimiento requiere un esfuerzo muy grande a la hora de calcular el modelo y no permite incluir a las *dinámicas no modeladas* que generalmente están presentes en el procedimiento de obtención de los modelos de procesos industriales.

En cambio, en la incertidumbre no estructurada sí se contempla la dinámica no modelada, y habitualmente se representa en el dominio de la **frecuencia**, y de este modo, se expresa la incertidumbre de una forma simple, pero en algunos casos se obtienen resultados demasiado conservadores en el ajuste de los controladores [Kozub *et al.* 1989].

Por otra parte, entre las diferentes técnicas de mejora de la robustez se destaca la **optimización min-max de las especificaciones**, donde se plantea un problema *min-max* que trata de encontrar el *peor modelo* en una región acotada, y luego resuelve el problema basado en este peor escenario para optimizar el funcionamiento robusto.

En cuanto al CPBM, también se plantea el problema de optimización min-max [Campo y Morari 1987] con el inconveniente del coste computacional. Sería interesante obtener técnicas para CPBM robusto, que se pudieran implementar *en línea*, y por tanto que no presentasen un coste computacional tan elevado como la optimización min-max. En ese sentido, las LMI (*linear matrix inequalities*) resultan muy relevantes para el CPBM [Boyd *et al.* 1994], [Henrion *et al.* 2001].

Por otra parte, el principio de mínimos cuadrados es fundamental y está presente en numerosas teorías de identificación y control. Su popularidad es debida a que es fácil de plantear y de resolver. Pero ante cualquier problema de mínimos cuadrados con un sistema real aparecen medidas o valores con ruido o con incertidumbre, que pueden hacer que el problema de mínimos cuadrados esté mal condicionado numéricamente, y que sea sensible a los errores en los datos.

Frente a dicho método aparece el *mínimos cuadrados regularizado*, que pretende obtener una solución menos sensible a los datos (**más robusta**). La **regularización** consiste en elegir de antemano un parámetro **positivo**  $\lambda$  (el parámetro de regularización) para que el problema esté mejor condicionado.

El inconveniente radica en que se elige  $\lambda$  de un modo intuitivo (como el parámetro  $\lambda$  de penalización del esfuerzo de control en CPBM), y sin ningún procedimiento o técnica que ayude en su diseño. De modo que si es muy grande, se produce una **sobrerregularización** la cual puede originar pérdida de información importante, y si  $\lambda$  resulta pequeño se produce una **subregularización** que puede provocar que la solución no sea robusta, es decir, que sea sensible a errores en los datos.

La técnica BDU (*Bounded Data Uncertainties*) [Chandrasekaran *et al.* 1998] es una técnica de regularización de problemas de mínimos cuadrados, y que originalmente fue desarrollada para problemas de estimación de parámetros, con extensiones muy limitadas al ámbito del control de procesos [Sayed *et al.* 1998]. Se puede ver como la resolución de un problema de optimización *min-max* usado para estructurar la incertidumbre.

En cuanto a la regularización, la técnica BDU lleva a cabo una **regularización semiautomática** sin intervención del usuario, diseñando  $\lambda$  a partir de una cota de la incertidumbre.

Dicho método se propuso y se resolvió, por una parte, mediante técnicas de la *ecuación secular* en [Chandrasekaran *et al.* 1998], y por otra parte, mediante técnicas de *Linear Matrix Inequalities* (LMI) en [Ghaoui y Lebret 1996]. Mediante LMIs el tiempo de cálculo es menor, aunque esta ventaja sólo se aprecia cuando aparecen muchas restricciones a tener en cuenta en el problema, ya que en los casos sencillos, en general, la *ecuación secular* es más simple. El método ha sido planteado [Sayed *et al.* 1998], [Subramanian y Sayed 2003], [Watson 2001] para resolver problemas de identificación, estimación, filtrado, control, ajuste de datos, etc.

Se puede establecer una analogía entre el problema de la robustez del CPBM y la regularización en los problemas de mínimos cuadrados, partiendo de que el controlador CPBM se puede plantear como un problema de mínimos cuadrados. Si se añade la presencia de incertidumbre y se formula el índice de coste como un problema *min-max* se está realmente planteando el problema de control predictivo robusto como un problema BDU.

En este caso, la ventaja radica en el hecho de que el parámetro de regularización coincide con el parámetro de penalización del esfuerzo de control  $\lambda$ , y por tanto la técnica BDU proporciona una regularización guiada a partir de la cota de la incertidumbre.

Existen pocas contribuciones de la aplicación de la técnica BDU en control de procesos, destacando la adaptación al controlador lineal cuadrático (LQR) con **horizonte de predicción finito** [Sayed *et al.* 1998] considerando incertidumbre paramétrica.

### 1.3 Objetivos y solución adoptada.

Como consecuencia del problema planteado anteriormente en cuanto al ajuste del parámetro de penalización del esfuerzo de control, se plantea como objetivo principal de la tesis el desarrollo de un procedimiento que permita el ajuste de dicho parámetro de modo guiado con el fin de

- mejorar la robustez del sistema de control,
- sin olvidar tampoco el tema de la estabilidad.

Para ello, puesto que las pocas contribuciones están planteadas para el LQR, y dada la similitud entre el LQR y el CPBM, se procederá a la exploración en el campo del LQR para su posterior extensión al CPBM.

Así pues, se pretende plantear un LQR robusto y estable, denominado LQR-BDU, ya que la robustez viene de la aplicación de la técnica BDU, y la estabilidad se consigue con diferentes procedimientos, como son la consideración de restricción terminal o la consideración de horizontes de predicción infinitos. En el caso del LQR también se plantea el parámetro de regularización del BDU como el parámetro de penalización del esfuerzo de control en el LQR. Además se aborda el caso de sistemas n-dimensionales.

La aplicación al LQR, sirve como precursor de la aplicación a **control predictivo**, donde en particular se centrará la atención al *Control Predictivo en Espacio de Estados* (CPEE), como continuidad del LQR, y al GPC como controlador en formato entrada/salida. La aplicación de la técnica BDU es posible ya que los controladores predictivos se pueden plantear como un problema de mínimos cuadrados.

Al igual que con el LQR, se obtiene una ley de control **analítica** para el CPEE-BDU y GPC-BDU con una elección automática del factor de ponderación de la acción de control  $\lambda$  en función del límite máximo de la incertidumbre que se desee manejar. Esta ponderación automática proviene del cálculo de  $\lambda$  en cada instante (aplicando el horizonte móvil, típico del CPBM).

Centrando la atención en el formato entrada/salida, y pretendiendo proporcionar estabilidad al controlador GPC-BDU, se parte de la teoría en cuanto a la estabilidad del GPC, y de entre las diferentes alternativas que se plantean, se elige el CRHPC (*Constrained Receding-Horizon Predictive Control*) [Clarke y Scattolini 1991] como referente, ya que es equivalente a otras alternativas, y se evita así el uso de horizontes infinitos.

Por tanto serán objetivos adicionales de la tesis,

- el estudio del CRHPC,
- la búsqueda de diferentes planteamientos matemáticos que puedan ser útiles para la posterior aplicación del BDU,
- así como la equivalencia entre los diferentes planteamientos.

El CRHPC permite asegurar la estabilidad nominal del bucle de control bajo ciertas condiciones. La idea básicamente consiste en calcular una secuencia de acciones de control futuras para forzar a que la salida predicha sea exactamente igual a la referencia durante un horizonte  $m$  suficientemente largo tras el horizonte de predicción. En realidad, algunos grados de libertad del controlador se utilizan para forzar esta igualdad mientras que el resto se utilizan para minimizar el índice de coste a lo largo del horizonte de predicción.

La mayoría de resultados en Control Predictivo en general, y en el CRHPC en particular, se basan en la suposición de que el modelo describe perfectamente el proceso real, y ausencia de perturbaciones. Pero, en realidad, el modelo siempre difiere del proceso [Skogestad y Postlethwaite 1996].

El CRHPC asegura la estabilidad nominal, pero ésta no queda asegurada cuando existen discrepancias entre modelo y proceso. Así para mejorar la robustez del sistema, se procede al sintonizado del CRHPC mediante BDU, por tanto el controlador CRHPC-BDU resultará ser el GPC estable y robusto buscado, objeto de la tesis.

## 1.4 Organización de la tesis.

La organización de la tesis se ha establecido teniendo en cuenta por una parte el estado del arte y los fundamentos en cuanto a CPBM y robustez (capítulo 2) y en cuanto a las diferentes técnicas de regularización, entre ellas el BDU (capítulo 3), y por otra parte las aportaciones principales en cuanto a la aplicación de dicha técnica a diferentes estrategias de control como son el LQR (capítulo 4), el CPEE y GPC (capítulos 5 y 6). Por último, se presentan las conclusiones más relevantes de la tesis (capítulo 7).

A continuación, para que el lector tenga una visión global, se presentan los contenidos de los capítulos de la tesis y los objetivos que se persiguen en cada uno de ellos.

- **Capítulo 2. Control predictivo basado en modelos.** Este capítulo presenta, por una parte, los fundamentos del control predictivo basado en modelos (CPBM), así como su evolución histórica, los diferentes tipos de controladores que se engloban dentro de la familia CPBM, y su aplicación en el entorno industrial. Por otra parte, se introduce el concepto de robustez ante incertidumbre, se presentan diferentes formas de representar dicha incertidumbre, y se ofrecen distintas técnicas para mejorar la robustez del sistema de control.
- **Capítulo 3. Fundamentos de la técnica *Bounded Data Uncertainties* (BDU).** Al inicio del capítulo se presenta el problema de mínimos cuadrados, presente en numerosas teorías de identificación y control y se muestran diferentes técnicas de regularización de dicho problema, destacando de entre ellas la técnica BDU cuya regularización proporciona soluciones más robustas. Se plasma con detalle el desarrollo matemático de dicha técnica, así como su interpretación geométrica.
- **Capítulo 4. El controlador LQR-BDU.** En este capítulo se muestra la aplicación del BDU al controlador LQR con el objetivo de mejorar su robustez, considerando

aspectos como la estabilidad del mismo. Se asegura la estabilidad mediante el uso de restricción terminal o mediante la consideración de horizontes de predicción infinitos. Por otra parte, se abordará la aplicación del LQR-BDU al caso de sistemas  $n$ -dimensionales, que no resulta trivial, ya que la solución presenta la forma de un problema TPBVP (*two-point boundary value problem*). El contenido del capítulo se aplica sobre diferentes ejemplos, entre los que se destaca el diseño del LQR-BDU para el modelo del movimiento lateral de un avión. Este capítulo servirá como precursor para la aplicación del BDU a **control predictivo**.

- **Capítulo 5. Control predictivo con BDU.** Al comienzo de este capítulo se presenta *Control Predictivo en Espacio de Estados* (CPEE), y el controlador GPC (*Generalized Predictive Control*), aplicando la técnica BDU en el sintonizado de ambos. Tras mostrar que el planteamiento del CPEE-BDU se presenta como un problema TPBVP (*two-point boundary value problem*) al igual que ocurría con el LQR-BDU, dificultando la demostración de la estabilidad del controlador, y dado que en la tesis se abordan sólo sistemas lineales, se aborda posteriormente la aplicación del BDU al control predictivo en función de transferencia, es decir, el GPC-BDU, donde se destaca cómo la técnica BDU puede ser usada para ajustar el factor de penalización del esfuerzo de control  $\lambda$ .
- **Capítulo 6. Estabilidad del GPC-BDU.** Este capítulo parte de la estabilidad del GPC, destacando de entre las diferentes técnicas para lograrlo el uso del controlador *constrained receding-horizon predictive control* (CRHPC). Tras presentar y analizar sus diferentes formulaciones, se muestra su funcionamiento mediante un ejemplo. Posteriormente, se pretende conseguir un GPC-BDU estable, partiendo de la filosofía del CRHPC, obteniendo así el controlador CRHPC-BDU, controlador estable y robusto, cuyo comportamiento se plasma en un ejemplo.
- **Capítulo 7. Conclusiones de la tesis y trabajos futuros.** Este capítulo presenta las conclusiones más importantes de la tesis destacando las aportaciones, y también se presentan las líneas futuras de la misma.

# Capítulo 2

## Control predictivo basado en modelos.

---

2.1	Introducción. . . . .	11
2.2	Fundamentos del CPBM. . . . .	12
2.2.1	Predictor. . . . .	15
2.2.2	Función de coste. . . . .	17
2.2.3	Optimizador. . . . .	19
2.3	Evolución y tipología del CPBM. . . . .	19
2.3.1	Evolución del CPBM. . . . .	19
2.3.2	El control predictivo y la industria. . . . .	23
2.3.3	Algoritmos de control predictivo. . . . .	25
2.4	El problema de la robustez en CPBM. . . . .	28
2.4.1	Introducción. . . . .	28
2.4.2	Representación de la incertidumbre. . . . .	29
2.4.3	Técnicas de mejora de la robustez en CPBM. . . . .	33
2.5	Conclusiones del capítulo. . . . .	40



## 2.1 Introducción.

El *Control Predictivo Basado en Modelos* (CPBM)<sup>1</sup> se enmarca dentro de los controladores óptimos, es decir, aquellos en los que las acciones de control se calculan mediante la optimización de un criterio o función de coste que está relacionado con el comportamiento futuro del sistema, el cual se predice con un modelo dinámico (de ahí el término *predictivo basado en modelos*).

El control predictivo presenta una serie de ventajas sobre otros métodos, entre las que se pueden citar las siguientes [Camacho y Bordóns 2004a]:

- es una técnica particularmente atractiva para los operadores que requiere pocos conocimientos de control porque los conceptos son muy intuitivos y la sintonización relativamente simple,
- se puede utilizar para controlar una gran variedad de procesos, desde procesos muy simples hasta procesos con dinámicas complejas como procesos con grandes tiempos muertos, procesos de fase no mínima, procesos inestables o procesos multivariados,
- su carácter predictivo lo hace compensar intrínsecamente los tiempos muertos,
- introduce un control anticipativo (*feedforward*) y de forma natural se compensan las perturbaciones medibles,
- la ley de control resultante es en general fácilmente implementable,
- es muy útil cuando se conocen las referencias futuras, como ocurre en el caso de robótica o procesos por lotes,
- permite tratar las restricciones de una forma sistemática y conceptualmente muy simple durante la fase de diseño.

Como es lógico, también presenta ciertos inconvenientes asociados a su implementación y los cálculos a realizar ante restricciones y procesos rápidos, aunque debido a la potencia de los computadores actuales, esto no debe ser considerado una dificultad insalvable.

Una de las propiedades más atractivas del CPBM es su formulación abierta, es decir, permite considerar diferentes tipos de modelos de predicción, así como restricciones, lo cual ha logrado un impacto importante en el ámbito industrial [Qin y Badgwell 1997], [Qin y Badgwell 2003]. De hecho el control predictivo se formuló inicialmente en el ámbito industrial, pero ha sido en el ámbito académico donde se le ha dado una base teórica.

El resto del capítulo se distribuye de la siguiente forma, la sección 2.2 presenta los fundamentos del control predictivo basado en modelos (CPBM), y en la sección 2.3 su evolución histórica, los diferentes tipos de controladores que se engloban dentro de la

---

<sup>1</sup>En inglés *Model Predictive Control* (MPC).

familia CPBM, y su aplicación en el entorno industrial. Posteriormente, en la sección 2.4 se introduce el concepto de robustez ante incertidumbre, se presentan diferentes formas de representar dicha incertidumbre, y se ofrecen distintas técnicas para mejorar la robustez del sistema de control. Para finalizar la última sección se dedicará a las conclusiones del presente capítulo.

## 2.2 Fundamentos del CPBM.

El *Control Predictivo Basado en Modelos* más que un controlador concreto es una metodología para el cálculo de las acciones de control. Se trata además de una metodología comprensible, que en cierta forma trata de reproducir la forma de actuar que tendría un operador experto en el control de un determinado proceso. Los pasos que seguiría un operador experto para conseguir controlar un proceso serían:

- 1) El operador conoce bien el proceso (posee un **modelo** mental del mismo) y por tanto, sería capaz de **predecir** con mayor o menor exactitud cual será la evolución dinámica de las variables del proceso si se aplican unas acciones de control determinadas. En ese sentido, el CPBM reproduce dicho aspecto, haciendo uso explícito de un **modelo** del proceso para el cálculo de **predicciones** de la evolución dinámica del mismo.
- 2) El mismo operador puede además, decidir si esa evolución es adecuada en comparación a los objetivos que se ha marcado. Es capaz por tanto de valorar las distintas combinaciones de las acciones de control en un horizonte de tiempo (**ley de control**) en función del grado de cumplimiento de unas especificaciones. El CPBM también compara el cumplimiento de las especificaciones, de modo cuantitativo, mediante el uso de la **función de coste**.
- 3) Con todo esto, podría decidir cuál es la mejor combinación de acciones de control dentro de un conjunto de posibilidades. El resultado final es que el operador es capaz de obtener cuál debe ser la combinación de acciones de control que hay que aplicar basándose en los conocimientos que tiene del proceso y la información del estado pasado y actual del mismo. Del mismo modo, el CPBM obtiene la ley de control mediante la **minimización** de la función de coste, en la que interviene información pasada y actual del estado del proceso.
- 4) Para conseguir una mayor calidad en el control, este mismo operador repetiría todos los cálculos cada vez que disponga de información actualizada, bien sean nuevas medidas del estado del proceso, bien conocimientos actualizados acerca del comportamiento del proceso (información nueva del modelo). En el CPBM, a este concepto se le denomina **horizonte móvil** o *receding horizon*, resultando en la resolución de un problema de optimización (minimización) diferente en cada **periodo de muestreo**, puesto que se incorpora nueva información de la evolución dinámica del proceso.

Este ejemplo nos da a entender que los primeros controles realizados manualmente por operadores que conocían bien el proceso se podían haber englobado en el área del control predictivo basado en modelos. En definitiva se trata de una metodología muy intuitiva para abordar el control de un proceso y esto ha influido en su difusión a nivel industrial, tal y como se mostrará en el apartado 2.3.2.

En la figura 2.1 se muestra la **metodología** planteada anteriormente y que se describe con más detalle a continuación:

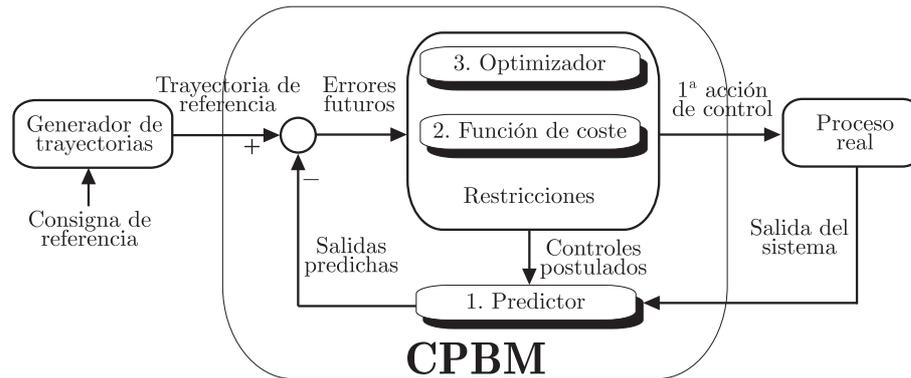


Figura 2.1: Concepto de horizonte móvil.

- 1) **Predictor.** Basado en el modelo del proceso, es el encargado de calcular, para cada instante  $t$ , las predicciones de la evolución dinámica del proceso  $[y(t+1|t), \dots, y(t+N|t)]$ <sup>2</sup> a lo largo del **horizonte de predicción**  $N$ , a partir de la información dinámica que se dispone hasta ese instante (medidas de las variables del proceso y entradas pasadas hasta el instante actual  $t$ ) y una ley de control postulada o futura  $[u(t|t), \dots, u(t+N|t)]$ , a lo largo del horizonte de predicción, tal y como se muestra en la figura 2.2.
- 2) **Función de coste.** Las futuras acciones de control se calculan de manera que minimicen una determinada función de coste. Así pues, la función de coste asigna un valor a cada predicción y por tanto a cada ley de control postulada. Este valor trata de mostrar el grado de cumplimiento de las especificaciones estáticas y dinámicas compatibles con las posibles restricciones de funcionamiento. Por ello, el objetivo principal de la función de coste consiste en mantener la salida del proceso  $y(t+k|t)$  lo más cerca posible de una *trayectoria de referencia*  $w(t+k)$  que describe cómo se desea guiar dicha salida desde su valor actual  $y(t)$  hasta sus puntos de consigna futuros. La función de coste adopta así generalmente la forma de una función **cuadrática** de los errores entre la salida predicha y la trayectoria de referencia. También en la mayoría de los casos suele incluir algún término referente al esfuerzo de control.

<sup>2</sup>Es usual encontrar en el ámbito del CPBM, la sintaxis  $y(t+k|t)$  para indicar la predicción de la salida para el instante  $t+k$  postulada en el instante  $t$ .

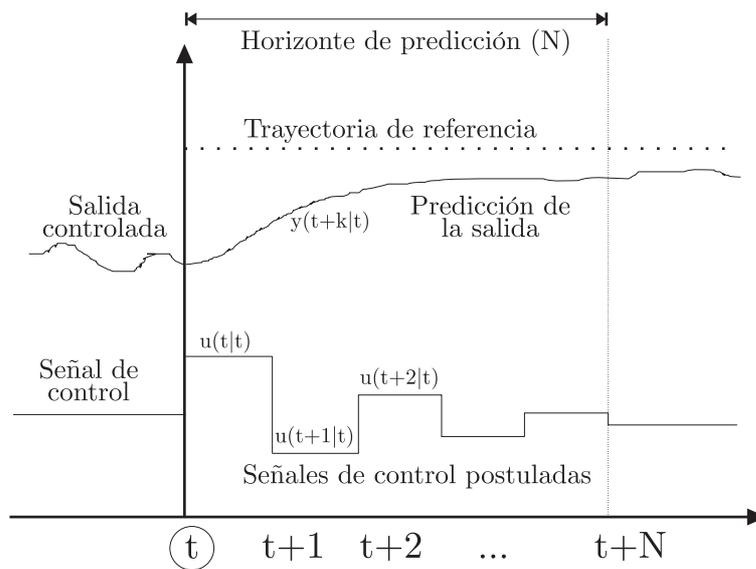


Figura 2.2: Predicción de la salida y señal de control postulada.

3) **Optimizador.** Debe encontrar el vector de acciones de control que ofrece el mejor valor de la función de coste. Generalmente en este proceso de búsqueda, el optimizador realiza postulados de la ley de control e iterativamente trata de acercarse a **ley de control óptima**. Además, si la función de coste que se define es cuadrática, el modelo utilizado es lineal y no existen restricciones para ninguna señal implicada, entonces es posible encontrar una solución *analítica* para el problema de optimización. En caso contrario, es necesario utilizar, en general, un método numérico de optimización.

4) **Horizonte móvil.** Una vez calculada la secuencia de futuras acciones de control que en ese instante hacen óptima la función de coste, se hace uso del concepto denominado *receding horizon*. Solamente se aplica como entrada al proceso  $u(t|t)$  la primera de ellas, despreciando el resto, puesto que en el siguiente instante  $t + 1$ , la salida  $y(t + 1)$  ya es conocida, y con esa nueva información se repiten los puntos 1, 2 y 3, obteniendo de esta forma la señal de control  $u(t + 1|t + 1)$  a aplicar en ese instante (la cual no es igual a la que se había postulado en el instante anterior  $u(t + 1|t)$ ).

El análisis de esta metodología de control muestra que, sea cual sea la implementación que se realice, cualquier control predictivo basado en modelos se puede entender como un problema de optimización en cada periodo de muestreo (horizonte móvil) que consta de **tres elementos fundamentales**: predictor, función de coste y optimizador.

Combinando distintas variaciones de estos tres elementos fundamentales se pueden obtener un gran número de controladores que formarían parte de la familia de los controladores predictivos. Así pues, se puede deducir esta diversidad, considerando que aparecerán diferentes controladores, según el tipo de **modelo** del proceso utilizado, según el tipo de **función de coste** utilizada y según el método de **optimización** aplicado. Para poder

plantear cualquier tipo de mejora se debe pasar por un primer paso de análisis de estos tres elementos fundamentales.

### 2.2.1 Predictor.

Para calcular las predicciones de la evolución dinámica de las variables que se quieren controlar se debe utilizar un modelo. En general este modelo consta de dos componentes (figura 2.3):

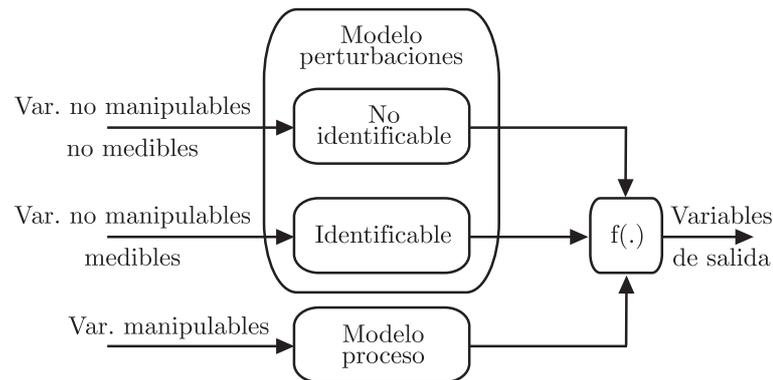


Figura 2.3: Estructura general de un modelo.

- 1) **Modelo del proceso** que relaciona todas las variables de entrada que se pueden manipular con las variables de salida que se quieren controlar.
- 2) **Modelo de perturbaciones** que se puede dividir en dos partes. Una que incluye la relación entre variables de entrada que se pueden medir pero no manipular, con las salidas (modelo de perturbaciones **identificable**) y otra parte que trata de describir la parte de la salida medida que no es explicada por el resto de modelos (modelo de perturbaciones **no identificable**).

Estos modelos se combinan a través de una función  $f(.)$  para producir un modelo de las variables de salida.

Para modelar cada uno de estos componentes existen varias posibilidades. Las diferencias entre los distintos tipos de modelos son conocidas y son objeto de estudios en los que se describe cómo se obtienen, qué tipo de procesos pueden modelar, cuáles son sus limitaciones y cómo se utilizan para realizar predicciones de la evolución dinámica de las variables de un proceso. Las diferentes posibilidades de modelar están basadas en:

- Respuesta ante un impulso.
- Respuesta ante un escalón.
- Función de transferencia.

- Representación en espacio de estados. En [Phillips y Parr 2003] se puede encontrar una descripción del modelado mediante respuesta impulsional, ante escalón, función de transferencia y representación en espacio de estados, y su utilización en control predictivo está ampliamente descrita en [Camacho y Bordóns 1999].
- Modelos de Volterra. Un ejemplo de utilización en control predictivo de modelos de Volterra se puede encontrar en [Maner *et al.* 1996].
- Modelos mediante redes neuronales. Las redes neuronales son en algunos casos una alternativa para el modelado de sistemas no lineales [Chen *et al.* 1990], ejemplos de utilización en control predictivo se pueden ver en [Liu *et al.* 1998], [Nahas *et al.* 1992] y [Zamarreño 1996].
- Modelos fuzzy. En cuanto a los modelos con técnicas fuzzy, es posible encontrar ejemplos en [Espinosa y Vandewalle 1999a] y [Espinosa y Vandewalle 1999b].

Evidentemente, la **calidad de la predicción** debería ser el factor que marque el tipo de técnica de modelado que se debe utilizar, al menos a nivel teórico. Es natural pensar que a mayor calidad en las predicciones más posibilidades se tienen de obtener un control adecuado. En las aplicaciones prácticas aparecen otros factores como los económicos que pueden determinar, más allá de las cuestiones teóricas, el tipo de modelo seleccionado.

Cualquiera de las técnicas de modelado mencionadas, puede ser utilizada para predecir el efecto que producen las variables manipuladas sobre las variables controladas. Esto es así, puesto que cualquiera de las acciones de control que se postule en el proceso de localización del óptimo, puede aplicarse posteriormente al proceso. Por tanto la calidad de la predicción sólo depende de la **calidad del modelo**.

No parece tan evidente utilizar estos modelos para predecir el efecto de las variables **no manipulables** (medibles o no). Cuando se tienen variables no manipulables no se puede saber con certeza qué valores van a tomar en el futuro y por tanto en el horizonte de predicción (intervalo de tiempo en el que se quiere realizar la predicción). El modelo puede ser muy exacto, pero el desconocimiento del valor futuro de estas variables podría producir predicciones de muy baja calidad. En estos casos se debe, al menos, conocer alguna de sus propiedades estadísticas que nos permita realizar una estimación. Si estas variables son medibles se pueden utilizar las medidas para realizar unas estimaciones de mayor calidad (por ejemplo, evaluar la tendencia y extrapolar). La calidad de la predicción, en estos casos, depende tanto de la **calidad del modelo** como de la **calidad de las estimaciones que se realizan de las variables no manipulables**.

Para tratar de compensar la dinámica no modelada se añaden al modelo elementos artificiales en su estructura para tratar de incrementar la calidad del control. Por ejemplo, en el caso del *control predictivo generalizado* (GPC) se utilizan modelos CARIMA (*Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average*) con polinomios de filtrado  $\mathbf{T}(z^{-1})$  para mejorar la robustez [Clarke *et al.* 1987b].

### 2.2.2 Función de coste.

En la teoría de control aparecen distintos *indicadores* que tratan de describir la evolución dinámica de un proceso, y se pueden englobar en dos grandes grupos:

- 1) **Parámetros descriptivos de la evolución *temporal* de la variable controlada**, como es el error en régimen permanente, el valor final, el tiempo de establecimiento, la sobreoscilación, la frecuencia de las oscilaciones, el tiempo de subida, etc.
- 2) **Medidas de la desviación** de la variable controlada respecto de la referencia, que se puede plasmar con una expresión general del tipo

$$I = \int_0^{\infty} f(r(t), y(t), t) dt. \quad (2.1)$$

Habitualmente se han utilizado integrales de una función del error, siendo las más extendidas en su uso [Marlin 1995] el IAE (integral del valor absoluto del error), el ISE (integral del error al cuadrado), el ITAE (integral del producto del tiempo por el valor absoluto del error) y el ITSE (integral del producto del tiempo por el error al cuadrado), entre otros, tal y como se muestra en la tabla 2.1.

Índice	Expresión
IAE	$\int_0^{\infty}  r(t) - y(t)  dt$
ISE	$\int_0^{\infty} (r(t) - y(t))^2 dt$
ITAE	$\int_0^{\infty} t r(t) - y(t)  dt$
ITSE	$\int_0^{\infty} t(r(t) - y(t))^2 dt$

Tabla 2.1: Principales índices de funcionamiento.

Entre estas dos opciones, parece claro que es más apropiado utilizar parámetros del primer grupo, ya que las medidas de tipo integral no reflejan directamente cómo funciona el sistema. Sólo con el valor del índice un operador es incapaz de saber con cierto grado de exactitud cómo está funcionando el sistema. A esto se une que es más usual especificar el funcionamiento de un proceso en términos del tipo tiempo de establecimiento y sobreoscilación menores que unos valores determinados. Sin embargo, con los indicadores de tipo integral se puede incorporar en la evaluación del funcionamiento otro tipo de elementos como por ejemplo, el valor de la acción de control o ponderaciones de las distintas variables y, adicionalmente, se pueden usar para incluir en el índice la evaluación de costes económicos.

En general, no existe una formulación universal que sea válida para todos los problemas de control ya que cada tipo de indicadores tiene sus ventajas e inconvenientes. El índice de funcionamiento más adecuado para un problema concreto depende de los *objetivos* que se impongan y de las *herramientas* disponibles.

- 3) Una alternativa que trata de **combinar los dos tipos** de indicadores es la de establecer unas *trayectorias de referencia* en un índice de tipo integral. En lugar de utilizar una referencia de tipo escalón  $r(t)$ , se filtra mediante una función de transferencia  $P(s)$  que fije la dinámica deseada de bucle cerrado: tiempo de establecimiento, sobreoscilación y régimen permanente, y se utiliza esta nueva respuesta  $w(t)$  como referencia en un índice de funcionamiento de tipo integral

$$w(s) = P(s)r(s) \rightarrow w(t), \quad (2.2)$$

$$I = \int_0^{\infty} f(w(t), y(t), u(t), t) dt. \quad (2.3)$$

Una función de coste de este tipo es la que se va a usar en **control predictivo**. Su traducción al entorno del control predictivo es directa, ya que operando con señales *discretas* el índice de coste debe, de alguna forma, imponer el funcionamiento deseado para el proceso introduciendo además nuevas características y parámetros para posibilitar su aplicación al control *en línea* ya que se debe conseguir que el volumen de los cálculos a realizar sea razonable.

Se puede generalizar, por tanto, como función de coste la expresión siguiente

$$J(u) = \sum_{k=N_1}^{N_2} f(w(t+k), y(t+k|t), u(t+k|t), \alpha(k), \lambda(k), N_u, t), \quad (2.4)$$

donde el significado de cada uno de los parámetros es:

**Horizonte de predicción** ( $N = N_2 - N_1 + 1$ ): intervalo de tiempo en el que se realiza la predicción, debe ser *finito* para que sea posible su aplicación al control en línea. Un horizonte de predicción *infinito* o demasiado grande hace que los cálculos de las predicciones no se puedan realizar en línea, salvo que exista una formulación analítica.

**Horizonte de control** ( $N_u$ ): intervalo del horizonte de predicción en el que se permiten variaciones de la variable manipulada. Este parámetro se utiliza para *simplificar* el problema de optimización, ya que si se reduce el número de variaciones se reduce el número de variables en el problema. Cuando se limita el horizonte de control cabe la posibilidad de realizar distintas *estructuraciones* de las acciones de control a lo largo del horizonte de control.

**Factores de ponderación** para los errores de predicción,  $\alpha(k)$ , y para las acciones de control,  $\lambda(k)$ . Estos factores se utilizan para conseguir distintos efectos en el comportamiento de bucle cerrado. Por ejemplo, mayor influencia del esfuerzo de control respecto a los errores de predicción o menor influencia en el índice de las predicciones más alejadas, o mayor ponderación de unas determinadas variables en detrimento de otras, etc.

**Restricciones.** Puede aparecer además, un conjunto de restricciones adicionales, en algunos casos duras o blandas, sobre variables de entrada, salida e internas. Estas restricciones pueden ser debidas tanto a limitaciones físicas del proceso como a especificaciones de funcionamiento.

### 2.2.3 Optimizador.

Finalmente el control predictivo basado en modelos no es más (ni menos) que un *problema de optimización*. El objetivo del optimizador consiste en conseguir la combinación de acciones de control que optimice la función de coste. En la mayoría de los casos, la función de coste  $f$  es **cuadrática** debido principalmente a que la minimización de dicho índice sujeto a restricciones lineales es matemáticamente tratable (problema de *programación cuadrática* (QP)). Existen otras aproximaciones manejando índices de coste *modulares* [Genceli y Nikolaou 1993], [Salcedo y Martínez 2000], [Blasco 1999] o con *norma infinita* [Rao y Rawlings 1998] que no resultan tan sencillas de manejar y que, en presencia de restricciones lineales, terminan resolviendo problemas de *programación lineal* (LP). En general, el problema de optimización se puede llevar a cabo de dos formas:

- **Analíticamente.** Sería la solución ideal e implicaría disponer de una expresión matemática que calcule el óptimo en función de las medidas hasta el instante  $t$ . Esto se puede conseguir cuando el modelo es *lineal* y la función de coste *cuadrática* y *sin restricciones*. En estos casos, el problema de optimización se resuelve *fuera de línea* y el análisis del sistema resultante se puede realizar utilizando las herramientas clásicas de la teoría de control.
- **Numéricamente.** Fuera del contexto anterior, es decir, con problemas *no lineales* (bien sea por los modelos utilizados, bien por la aparición de restricciones, etc.), el control predictivo se convierte en un problema de optimización en cada periodo de muestreo con el consiguiente incremento de complejidad (resultando en un controlador no lineal y en un bucle cerrado también no lineal). En este caso, el método de optimización cobra más protagonismo cuando se pretende aplicar el control predictivo en línea, ya que las restricciones temporales son mayores, y por ello, por muy bueno que sea el modelo o muy acertada la función de coste, el  *cuello de botella* es la técnica de optimización. Una selección o ajuste inadecuado de esta técnica puede provocar en algunos casos, una pérdida notable de las prestaciones del control puesto que no se localiza correctamente el óptimo.

## 2.3 Evolución y tipología del CPBM.

### 2.3.1 Evolución del CPBM.

La evolución del CPBM se podría dividir en las siguientes etapas, marcadas por la aparición y uso de nuevos algoritmos:

**1) Antecedentes.** Como ha ocurrido en otros casos, la idea del CPBM ya se vislumbró en los años 60 antes de que el CPBM se convirtiera en una de las estrategias de control avanzado más utilizada en el control de procesos. Los conceptos teóricos iniciales que pueden asociarse al control predictivo se basan en los trabajos realizados en control óptimo. Utilizando un modelo discreto lineal en espacio de estados se calcula la ley de control minimizando una función cuadrática de los estados y las acciones de control (*regulador lineal cuadrático* (LQR)). Al fijar un índice infinito se podía obtener un controlador consistente en una realimentación del estado [Lemos y Mosca 1985], [Mosca 1995]. Debido a las capacidades limitadas de los ordenadores y al rápido muestreo de los procesos para los que el LQR fue desarrollado (por ejemplo en la industria aeroespacial), el esfuerzo se desvió hacia la obtención de controladores que evitasen realizar la optimización en línea.

Como consecuencia, esta técnica tuvo relativamente poco impacto en la industria de procesos debido a que no contemplaba las no linealidades de los procesos, sus restricciones de funcionamiento, incertidumbres en el modelo y sólo se disponía de un índice cuadrático para medir las prestaciones. Únicamente podía aplicarse en áreas donde se podían conseguir modelos muy exactos y su obtención estaba justificada económicamente (por ejemplo, la industria aeroespacial).

**2) Orígenes.** Al contrario que otras veces, el CPBM fue desarrollado primero en la industria, bajo varios acrónimos y recetas propias, tratando de resolver los inconvenientes planteados por el LQR antes mencionados, y mucho antes de disponer de un minucioso entendimiento de las propiedades teóricas de lo que hoy se entiende como control predictivo. El concepto de horizonte deslizante, una de las ideas centrales del control predictivo, fue propuesto en [Propoi 1963]. El interés de los investigadores por el CPBM creció a mitad de los años 80, a raíz de unas jornadas organizadas por la empresa petroquímica *Shell* [Prett y Morari 1987]. La industria contribuyó decisivamente en el desarrollo de un control *óptimo* aplicable, apareciendo los primeros controles predictivos basados en modelos. Se trataba de algoritmos de control en los que se podía utilizar modelos más sencillos, las restricciones de funcionamiento se podían tener en cuenta en la formulación y la optimización se realizaba cada periodo de muestreo puesto que se utilizaban horizontes de predicción finitos.

Las primeras implementaciones a nivel industrial fueron el *Identification and Command* (IDCOM) y *Dynamic Matrix Control* (DMC), las cuales se desarrollaron en paralelo.

**3) Desarrollo.** A partir de estas dos metodologías se han ido desarrollando con el tiempo, distintas alternativas, tanto a nivel industrial como a nivel teórico, entre las que caben destacar:

- **QDMC** (*Quadratic DMC*) [Garcia y Morshedi 1986]. Basado en el DMC incluye explícitamente las restricciones en las entradas y salidas del proceso, y utiliza *programación cuadrática* (QP) para la minimización del índice.

- **IDCOM-M** [Grosdidier *et al.* 1988]. También referenciado como HIECON (*Hierarchical constraint control*) está basado en el IDCOM, presentando cambios en la función objetivo y en la priorización de las restricciones. Utiliza dos funciones objetivo, primero se optimiza la que evalúa los errores de predicción y, si quedan grados de libertad, se optimiza respecto a las acciones de control. Para simplificar el cálculo sólo se permite un cambio en la variable manipulada.
- **GPC** [Clarke *et al.* 1987a], [Clarke *et al.* 1987b]. Resume muchas de las características de los controladores predictivos para procesos lineales [Albertos y Ortega 1989], [Clarke y Mohtadi 1989], [Ordys y Clarke 1993]. También se ha utilizado con restricciones [Camacho 1993], [Chow y Clarke 1994], [Kuznetsov y Clarke 1994], [Tsang y Clarke 1988] y se ha planteado el control predictivo adaptativo [Clarke 1991]. Algunas de sus aplicaciones industriales se pueden encontrar en [Clarke 1988], [Chow *et al.* 1994], [Linkens y Mahfouf 1994] y [Rossiter *et al.* 1991].

4) **Actualidad.** El entendimiento de las propiedades del CPBM a raíz de investigaciones cruciales realizadas en el ámbito académico [Rawlings y Muske 1993] han permitido que hoy en día exista un marco conceptual y práctico común tanto a investigadores como a ingenieros de control. Son muchas las publicaciones que reflejan el estado del arte a nivel tecnológico y teórico del control predictivo en su tiempo de publicación [Clarke 1994], [Froisy 1994], [Garcia *et al.* 1989], [De Keyser 1991], [Morari y Lee 1999], [Muske y Rawlings 1993], [Nikolaou 1998], [Qin y Badgwell 2003], [Richalet 1993]. La visión que ofrecen respecto al **futuro del CPBM** en la industria y en la investigación pasa por combinar esta estrategia de control con otras áreas de la ingeniería de control o incluso con otras áreas de conocimiento:

- Control no lineal [Garcia *et al.* 1989].
- Control inteligente (fuzzy, neural) [Nikolaou 1998].
- Nuevos esquemas de identificación, tanto de procesos como de límites para la incertidumbre [Bemporad y Morari 1999b].
- Mejoras en los métodos de estimación del estado. Alternativas al filtro de Kalman [Qin y Badgwell 2003].
- Monitorización de procesos y diagnóstico de fallos para comprobar el funcionamiento óptimo del controlador predictivo (*control estadístico de procesos* o SPC) [Froisy 1994].
- Mejora de las interfaces de usuario y diálogo con el operador [Froisy 1994].
- Integración de niveles en la jerarquía de control [Morari y Lee 1999].

Actualmente existen **líneas de investigación** en control predictivo bien definidas donde cabría destacar entre otras:

- **Control predictivo estable.** Desde el uso de horizontes infinitos de predicción [Muske y Rawlings 1993], [Zheng y Morari 1995] hasta la utilización

de horizontes casi-infinitos [Chen y Allgöwer 1998], la formulación del control predictivo en espacio de estados se impone a la de entrada-salida. Las formulaciones del control predictivo con garantía de estabilidad han ido evolucionando hasta llegar a la necesidad de la región terminal y del coste terminal de una u otra forma [Mayne *et al.* 2000].

- **Control predictivo no lineal.** En este área se utilizan tanto modelos en espacio de estados como modelos en entrada-salida [Mayne 2000], [Rawlings *et al.* 1994]. Sin embargo, la mayoría de modelos utilizados siguen expresando dinámicas lineales sujetas a una no linealidad de tipo estático [Genceli y Nikolaou 1995]. Es destacable, por una parte, el uso de modelos lineales variantes en el tiempo para representar los modelos no lineales, lo que conlleva a la obtención de controladores predictivos lineales variantes en el tiempo [Salcedo *et al.* 2006], y por otra parte, el uso de técnicas de optimización heurística, como los *Algoritmos Genéticos*, para resolver de forma eficiente el problema de optimización de CPBM, no convexo al usar el modelo no lineal [Blasco 1999], [Blasco *et al.* 2006].
- **Control predictivo robusto.** En [Bemporad y Morari 1999b] se resumen distintas aproximaciones aparecidas en la literatura del control predictivo con características diferentes a la hora de representar la incertidumbre y la forma de calcular el controlador robusto. Por ejemplo, en [Kouvaritakis *et al.* 1997] la incertidumbre se representa como una elipse centrada en el vector de parámetros estimados para una función de transferencia. En [Badgwell 1997] la incertidumbre en el modelo se parametriza por una lista de posibles plantas y se añaden al problema original restricciones para asegurar la estabilidad robusta. Otra aproximación es la denominada **min-max** MPC, donde [Lee y Yu 1997] presenta una formulación basada en la minimización del peor caso de un índice cuadrático para sistemas con parámetros variables en el tiempo pero acotados. Del mismo modo, en [Megías *et al.* 2001] se presenta un min-max  $GPC^\infty$  donde la incertidumbre se representa de forma politópica. En [Primbs *et al.* 2000] se presenta un procedimiento para comprobar la robustez de controladores predictivos de sistemas lineales con restricciones en las entradas, basado en la solución de una serie de desigualdades lineales matriciales (LMI). A lo largo del presente capítulo se presentan con más detalle las alternativas planteadas.
- **Control predictivo adaptativo.** Siendo el GPC el algoritmo orientado al control predictivo adaptativo por excelencia [Kinnaert 1989], y a pesar del amplio mercado que tendría un algoritmo de CPBM autoajutable, pocas son las aplicaciones reales que incluyen adaptación en línea. El control adaptativo indirecto tiende a ser sustituido por un nuevo paradigma que contempla la integración de la identificación y el control predictivo. En esta aproximación, y debido a los problemas que presenta la identificación en bucle cerrado, se insiste en mantener una excitación persistente en las señales para poder identificar [Genceli y Nikolaou 1996].

- **Control predictivo de sistemas híbridos.** Los sistemas híbridos se caracterizan por la interacción de modelos de variables continuas (gobernados por ecuaciones diferenciales o en diferencias) y sistemas de eventos discretos (leyes lógicas, redes de Petri, etc.). Tales sistemas pueden conmutar entre muchos modos de operación (debido a la ocurrencia de eventos), donde cada modo se gobierna por un sistema de ecuaciones diferenciales o en diferencias. En los últimos años han emergido diferentes métodos para el análisis y diseño de controladores para sistemas híbridos [Camacho y Bordóns 2004b], [Bemporad y Morari 1999a], [Morari 2005].
- Utilización de **técnicas de optimización alternativas** para hacer frente a problemas que se plantean con modelos no lineales, restricciones de funcionamiento y nuevos índices (problemas no convexos y/o discontinuidades a resolver en tiempo real). Por ejemplo, en [Pérez 1995] se utiliza la *programación dinámica* como técnica de optimización, y en [Martínez *et al.* 1996], [Martínez *et al.* 1998], [Onnen *et al.* 1997] se aplican los *algoritmos genéticos* o *simulated annealing* como técnicas de optimización.

### 2.3.2 El control predictivo y la industria.

Existen gran número de aplicaciones del control predictivo en la industria. No sólo en el sector petroquímico, sino también en la industria metalúrgica, del automóvil, aeroespacial, de robots [Gómez y Camacho 1996], de procesado de alimentos, entre otras. En [Rawlings 2000] se ofrece una visión general del CPBM orientada principalmente a personal de la industria con experiencia en control.

Una comparación de [Qin y Lee 2001] y [Qin y Badgwell 2003] puede ofrecer una visión general del panorama actual del control predictivo en la industria y cuáles han sido los últimos avances en este campo, tras interrogar a las principales compañías sobre sus productos. En general en la última década ha habido un número de empresas que han comercializado paquetes de control predictivo, pero en los últimos años parece haberse consolidado el mapa de empresas que ofrecen productos de este tipo tras absorciones y compras de patentes de unas por parte de otras. A continuación se citan las compañías más importantes que en la actualidad ofrecen productos de control predictivo:

- **Aspen Technology** ofrece el producto *Dynamic Matrix Control* (DMCplus), y absorbió a la compañía **Setpoint Inc.** quien comercializaba el paquete *Identification and Command* (SMC-IDCOM) y a la compañía **Treiber Controls** con su *Optimum Predictive Control* (OPC).
- **Honeywell** ofrece el *Robust Model Predictive Control Technology* (RMPCT) y actualmente engloba a **Profimatics**, quien vendía el paquete *Predictive Control Technology* (PCT).
- **Sherpa Engineering** ofrece el paquete *Predictive Controller for Reactors* (PCR),

y engloba los productos *Predictive Functional Control* (PFC) y *Hierarchical Constraint Control* (HIECON) de la ex-**Adersa**.

- **Shell Global Solutions** ofrece el producto *Shell Multivariable Optimiser Control* (SMOC).
- **Invensys** absorbió a **Predictive Control Ltd** que desarrolló el producto *Connoisseur*.
- **ABB** ofrece el producto 3dMPC.
- **Pavilion Technologies Inc.** que ha lanzado el producto Process Perfecter para CPBM no lineal.

Del análisis de los datos ofrecidos por estas compañías [Qin y Badgwell 1997], cabe destacar lo siguiente:

- El número total de aplicaciones de CPBM instaladas en 1997 se aproximaba a 2200, y en sólo cinco años (en 2003) se ha doblado hasta la cifra de 4600 [Qin y Badgwell 2003].
- La mayoría de estas aplicaciones (un 67%) pertenecen a la industria petroquímica y de refino.
- Industrias puramente químicas y papeleras muestran un interés creciente por estas aplicaciones, aunque también aparecen otras como alimentarias, del automóvil, aeroespaciales y de semiconductores.
- **Aspen** aparece con el mayor número de aplicaciones instaladas (1850) y con el mayor tamaño de proceso bajo control (603 variables controladas  $\times$  283 variables manipuladas).

De la lectura detallada de estos informes se deduce que todas las casas comerciales tienen su algoritmo de control representativo, el cual es modificado continuamente. En la actualidad los algoritmos de control predictivo lineal que están implantados, presentan las siguientes características:

- Los modelos utilizados son de tipo respuesta impulsional o escalón (FIR), función de transferencia o espacio de estados.
- Todos los productos industriales asumen una perturbación constante a la salida a la hora de realimentar la información, aunque algunos de ellos utilizan filtros de Kalman (SMOC).
- Todos los algoritmos penalizan el excesivo esfuerzo de control de diferentes formas: factor de ponderación, trayectoria de referencia, umbral para valores singulares, etc.

- La mayoría de los estos productos aplican restricciones duras en la fase de optimización estática y restricciones blandas en la salida para la optimización dinámica.
- En todos los casos se utilizan horizontes de predicción y de control finitos.

Pudiendo además destacar, cuáles han sido los cambios más recientes en la tecnología de control predictivo lineal que actualmente está disponible:

- Los modelos en espacio de estados y funciones de transferencia están comenzando a utilizarse desplazando a los modelos basados en respuesta en impulso o escalón (estos modelos están restringidos a procesos estables y requieren un número elevado de parámetros).
- Aparecen alternativas a la identificación basada en pruebas con el proceso. Junto al simple mínimos cuadrados, métodos basados en subespacios y algoritmos de mínimos cuadrados recursivos están implementados actualmente en las aplicaciones.
- En la actualidad algunos productos que utilizan modelos en espacio de estados disponen de esquemas de realimentación basados en filtros de Kalman.
- Puesto que la mayoría de los controladores predictivos deben ser sintonizados para alcanzar un bucle cerrado nominalmente estable, una práctica reciente consiste en utilizar horizontes de predicción elevados para alcanzar amplios márgenes de estabilidad basados en los resultados de [Muske y Rawlings 1993].
- Algunas aplicaciones implementan estrategias de control adaptativo y multi-modelos.

### 2.3.3 Algoritmos de control predictivo.

En este apartado se describen los algoritmos de control predictivo más populares con el fin de resaltar sus características principales. Se pueden encontrar estudios comparativos de los diferentes algoritmos en [Garcia *et al.* 1989], [De Keyser *et al.* 1988], [Krämer y Ubehauen 1991] y [Qin y Badgwell 2003].

1) **Control con Matriz Dinámica**, o *Dynamic Matrix Control* (DMC) [Cutler y Ramaker 1980]. Posteriormente se desarrolló el *Quadratic DMC* (QDMC) como extensión del DMC al caso con restricciones [Garcia y Morshedi 1986]. Las características del DMC haciendo referencia a los tres elementos del CPBM son:

- En cuanto al **predictor** se refiere, el DMC usa un modelo del proceso basado en la *respuesta ante escalón* eligiendo sólo los primeros  $N$  términos, por lo que se asume que el proceso debe ser estable. En cuanto a las perturbaciones, considera que es el mismo que el del instante  $t$  para todo el horizonte de predicción, cuyo valor es igual al de la salida medida menos el valor de la salida predicha.

El principal inconveniente de este algoritmo es que la dimensión del modelo suele ser grande, y que no se puede usar con sistemas inestables.

- La **función de coste** puede considerar sólo los errores futuros o penalizar también el esfuerzo de control. Un aspecto que ha hecho este algoritmo muy popular en la industria es la fácil inclusión de **restricciones**.
- La **optimización** es numérica al contemplar las restricciones, y se lleva a cabo en cada periodo de muestreo aplicando sólo la primera acción de control, siguiendo la filosofía *horizonte móvil* propia del CPBM.

2) **Control Algorítmico basado en Modelos**, o *Model Algorithmic Control* (MAC) [Richalet *et al.* 1978], [Richalet *et al.* 1976], [Rouhani y Mehra 1982]. También llamado Control Predictivo Heurístico basado en Modelos o *Model Predictive Heuristic Control* (MPHC), el cual se comercializa bajo el nombre *Identification Command* (IDCOM). Es muy parecido al DMC con las siguientes diferencias:

- En cuanto al **predictor** se refiere, el MAC utiliza un modelo basado en la *respuesta impulsional* válido sólo para sistemas estables. Además no usa el concepto de horizonte de control  $N_u$ , por lo que el número de acciones de control calculadas equivale al horizonte de predicción  $N$ . La consideración de la perturbación es como en el DMC, pero también se puede modelar como un sistema de primer orden.
- La **función de coste** es similar, pero se hace uso de una *trayectoria de referencia* en lugar de un *set point*, obtenida haciendo uso de un filtro de primer orden.
- La **optimización** es similar al DMC, contemplando también la presencia de restricciones.

3) **Control Predictivo Generalizado**, o *Generalized Predictive Control* (GPC) [Clarke *et al.* 1987a]. Las características del GPC son:

- Las **predicciones** se basan en el modelo CARIMA (en *función de transferencia*), el cual modela la perturbación no medible, en parte, con un polinomio  $\mathbf{T}(z^{-1})$  que como es difícil de conocer se usa como parámetro de diseño. La obtención de la *predicción óptima* se lleva a cabo resolviendo una ecuación diofántica.
- La **función de coste** penaliza los errores y el esfuerzo de control, con los parámetros  $\alpha$  y  $\lambda$ , respectivamente, a los cuales se les suele asignar un valor constante o exponencialmente creciente.
- La **optimización** es similar al DMC. Para valores adecuados de los parámetros de diseño, el algoritmo es estable, e incluye, inherentemente en su estructura, controladores bien conocidos como son el *mean level* y el *deadbeat*.

4) **Control Predictivo Funcional**, o *Predictive Functional Control* (PFC) [Richalet *et al.* 1987]. Este controlador fue desarrollado por Richalet para el caso de procesos rápidos. Sus características son:

- En cuanto al **predictor**, el PFC usa un modelo basado en *espacio de estados* y sirve tanto para sistemas lineales inestables como no lineales.
- La **función de coste es similar** al MAC pero sólo se considera un conjunto de puntos del horizonte de predicción, y no todo el horizonte completo, por lo que el problema de optimización resulta más sencillo (concepto llamado *puntos coincidentes*).
- Otro concepto distintivo es que el controlador parametriza la acción de control haciendo uso de *funciones base* polinomiales, lo que permite considerar perfiles de la entrada relativamente complejos, pudiendo seguir referencias polinomiales sin retraso.

5) **Controlador Autosintonizado**, o *Extended Prediction Self Adaptive Control* (EPSAC) [De Keyser y Van Cuawenberghe 1985]. Las características del EPSAC son:

- En cuanto al **predictor** se refiere, utiliza un modelo basado en *función de transferencia* que incluye la perturbación, y que se puede extender para que incluya una perturbación medible (con el fin de incluir el efecto *feedforward*).
- Una característica de este controlador radica en que la **función de coste** considera un horizonte de control de  $Nu = 1$ , es decir, sólo se calcula una acción de control,
- de modo que es posible obtener la ley de control analíticamente, simplificando el proceso de **optimización**.

6) **Control Adaptativo de Horizonte Extendido**, o *Extended Horizon Adaptive Control* (EHAC) [Ydstie 1984]. Las características del EHAC son:

- En cuanto al **predictor**, también hace uso de un modelo en *función de transferencia*, pero no incluye ningún modelo de las perturbaciones.
- En este caso el horizonte de control y predicción es  $Nu = N = 1$ , pero referido al instante  $t + N$ . De este modo, por una parte, no se puede usar trayectoria de referencia, pues sólo se considera el error en el instante  $t + N$ , y por otra, no se puede penalizar el esfuerzo de control en cada instante, por lo que no se podrán eliminar ciertas frecuencias de la respuesta.
- Del mismo modo, se puede obtener la ley de control analíticamente, de manera sencilla, pues sólo depende de los parámetros del modelo y del parámetro  $N$ .

Otros algoritmos de control predictivo son el control autosintonizado basado en predictores (*Predictor-Based Self-Tuning Control*) [Peterka 1984], el control adaptativo multivariable multipaso (*Multistep Multivariable Adaptive Control*, MUSMAR) [Greco *et al.* 1984], o los controladores predictivos con estabilidad garantizada CRHPC [Clarke y Scattolini 1991] y SIORHC [Mosca *et al.* 1990].

## 2.4 El problema de la robustez en CPBM.

### 2.4.1 Introducción.

Una cuestión fundamental acerca del CPBM es su *robustez* cuando se presenta **incertidumbre en el modelo** y/o ante presencia de **ruido**. Habitualmente cuando se dice que un sistema de control es robusto, se quiere decir que se asegura la *estabilidad* y el cumplimiento de las *especificaciones* deseadas para un rango especificado de variaciones en el modelo del proceso y para un tipo de señales ruidosas, es decir, para un rango de incertidumbre.

Un planteamiento muy extendido del problema de la robustez **asume** que:

- la planta que se va a controlar  $\Sigma_0 \in \mathcal{S}$ , siendo  $\mathcal{S}$  una familia de modelos (sistemas *lineales invariantes en el tiempo* (LTI)),
- el sistema se ve afectado por un ruido no medible  $\nu(k) \in \mathcal{V}$ , siendo  $\mathcal{V}$  un conjunto dado (habitualmente un politopo).

Así pues, se pueden **definir**:

- estabilidad robusta,
- cumplimiento de las restricciones robusto,
- cumplimiento de las especificaciones robusto (funcionamiento robusto),

si la ley de control del CPBM garantiza cada propiedad respectiva para todos los posibles  $\Sigma_0 \in \mathcal{S}$  y  $\nu(k) \in \mathcal{V}$ .

Evidentemente, como parte del esfuerzo de modelado, se debe definir la incertidumbre, es decir, se debe conocer  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{V}$ , aunque resulta una tarea complicada para la que existe poca experiencia y no hay disponibles procedimientos sistemáticos. Por otra parte, se debe llegar a un compromiso entre definir  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{V}$  con la suficiente *exactitud* pero sin redundar en demasiada *complejidad*. En cualquier caso, no existen estudios rigurosos que determinen de un modo exacto la relación entre los conjuntos  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{V}$ , si existe.

Hablando de robustez, se pueden definir los métodos de **análisis** como aquéllos que determinan si un sistema de control particular (no diseñado bajo la consideración de la incertidumbre) hace estable al sistema en bucle cerrado y cumple las especificaciones deseadas ante la presencia de la especificada incertidumbre, y los métodos de **síntesis** como aquéllos que consideran la incertidumbre a la hora de diseñar el sistema de control.

En el caso de sistemas lineales, existen numerosas técnicas de análisis de robustez de sistemas sin restricciones, pero pocas en el caso de sistemas con restricciones, pues en este caso el sistema en bucle cerrado puede ser no lineal. En [Zafriou 1990] se presentan condiciones suficientes (y también necesarias) para garantizar la estabilidad nominal y

robustez del CPBM. En [Primbs *et al.* 2000] se presenta un procedimiento para comprobar la robustez de controladores predictivos de sistemas lineales con restricciones en las entradas, basado en la solución de una serie de desigualdades lineales matriciales (LMI).

En [Morari y Lee 1997] se realiza una revisión sobre las diferentes metodologías de diseño robusto presentadas hasta entonces, de entre las que cabe destacar las aportaciones de [Kothare *et al.* 1996] y [Lee y Yu 1997]. En [Rawlings 2000] se destaca que la mayor parte de los algoritmos que garantizan robustez se caracterizan por exigir una gran carga computacional en línea, lo cual limita enormemente su aplicación práctica.

En cualquier caso, todas las *representaciones de incertidumbre* y todos los *métodos de análisis/síntesis* se basan sólo en detectar y evitar *problemas de sensibilidad* y no en estudiar cuán exactos son  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{V}$ , y qué coste en complejidad lleva a una mayor precisión.

A continuación se muestran diferentes formas de representar las incertidumbres, es decir, los conjuntos  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{V}$ . Las diferentes formas de modelar las incertidumbres dependen principalmente del tipo de técnica usada para calcular los controladores, las más usadas son la representación de la incertidumbre **en frecuencia** y, de forma paramétrica, en la **función de transferencia**. Teniendo en cuenta que, tratándose el CPBM de una técnica perteneciente al *dominio temporal*, será más apropiado representar  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{V}$  en el *dominio temporal* que en el dominio de la frecuencia usado en otras estrategias de control.

La incertidumbre en el modelado de un proceso puede tener **diversas causas** [Skogestad y Postlethwaite 1996]:

- los valores nominales de los parámetros del modelo son siempre aproximaciones de los valores reales,
- los valores nominales de los parámetros del modelo pueden variar debido a las no linealidades del proceso o cambios en el punto de operación,
- siempre existen errores en la medición de las variables,
- generalmente no se conoce la estructura del proceso en alta frecuencia,
- en general, por simplicidad, se utilizan modelos de bajo orden para representar dinámicas complejas, lo que ocasiona errores de modelado, normalmente conocidos como *dinámica no modelada*.

## 2.4.2 Representación de la incertidumbre.

En general, existen dos **tipos** comunes de incertidumbre que son la *incertidumbre estructurada* y *no estructurada* que se describen a continuación:

- 1) **Incetidumbre estructurada**, cuando se supone conocida la estructura del modelo y solamente se desconocen los valores de los parámetros  $\theta$ . En este caso se debe definir con detalle el *modelo nominal*  $\theta_0$  y establecer para cada uno de sus parámetros el

*rango* o *intervalo* de variación admitido (incertidumbre **paramétrica**). En el caso de que sea posible representar al sistema con un modelo de este tipo, la descripción será, en general, una muy buena aproximación de la realidad. Sin embargo, en la práctica, este procedimiento requiere un esfuerzo muy grande a la hora de calcular el modelo y no permite incluir a las *dinámicas no modeladas*. Por otro lado, usando este tipo de modelo del proceso, los métodos numéricos que deben utilizarse para el diseño de los controladores son más complejos que en el caso de la descripción no estructurada de las incertidumbres.

La incertidumbre paramétrica se suele modelar bien como *regiones acotadas de incertidumbre* o bien como *politopos* (ver figura 2.4).

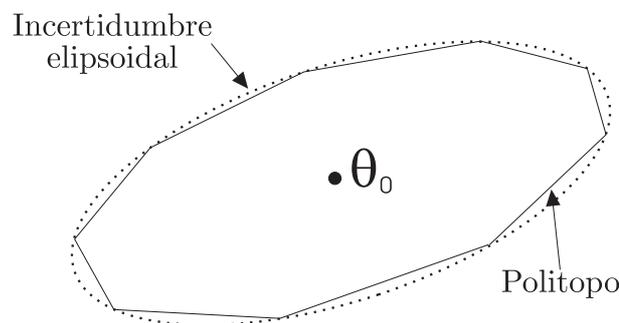


Figura 2.4: Descripción de la incertidumbre paramétrica para un vector de parámetros de dimensión 2.

Cuando se supone que los parámetros del modelo y el ruido del proceso están normalmente distribuidos, se suele usar un límite **elipsoidal** en los parámetros. Estas incertidumbres elipsoidales se pueden aproximar por politopos convexos. Los politopos se suelen usar cuando la incertidumbre se modela de modo que la planta se considera un sistema variante con el tiempo. Por otra parte, la incertidumbre elipsoidal también se puede aproximar, además de por politopos, por simples regiones de incertidumbre acotada, tal como  $\theta = \theta_0 + \delta\theta$ .

**2) Incertidumbre no estructurada**, que representa a la dinámica no considerada por el modelo elegido para el proceso. Habitualmente se representa en el dominio de la **frecuencia**, considerando que la planta real pertenece a una familia de posibles plantas que se encuentran en las proximidades de un modelo nominal  $\Sigma_0$ , bien aditivamente  $\Sigma = \Sigma_0 + \Delta_\Sigma$ , o multiplicativamente  $\Sigma = \Sigma_0(1 + \delta_\Sigma)$ , definiendo  $\Delta_\Sigma$  y  $\delta_\Sigma$  regiones en el plano complejo en forma de *discos*, centrados en los valores de la planta nominal  $\Sigma_0$ .

De este modo, se expresa la incertidumbre de una forma simple, pero en algunos casos se obtienen resultados demasiado conservadores en el ajuste de los controladores [Kozub *et al.* 1989]. Un ejemplo, sería el caso en el que se parte de incertidumbre estructurada, pero se aproxima a una descripción de incertidumbre no estructurada haciendo uso de un círculo que englobe toda la incertidumbre estructurada.

En el caso de considerar **incertidumbre global**, el enfoque es más conservativo, pues todos los errores de modelado se engloban en el mismo vector, y por tanto los límites de la incertidumbre se amplían.

Una vez descrita la posible incertidumbre del proceso real mediante incertidumbre **no estructurada**, se pueden emplear las denominadas **transformaciones lineales fraccionales (TLF)** [Sánchez-Peña y Sznaier 1998] para representar de forma compacta al controlador y al conjunto de modelos al cual pertenece el proceso real (ver figura 2.5). En dicha figura,  $\mathbf{P}$  contiene al modelo nominal y la incertidumbre,

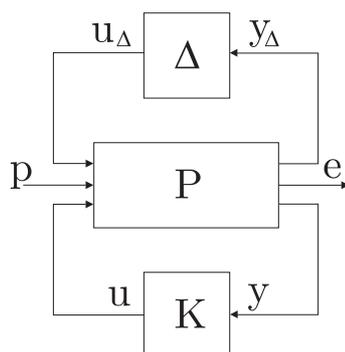


Figura 2.5: Diagrama de bloques del esquema basado en TLF.

siendo  $\Delta$  una matriz compleja que representa la acotación de la incertidumbre y que relaciona las señales  $\mathbf{y}_\Delta$  y  $\mathbf{u}_\Delta$ , la señal vectorial  $\mathbf{e}$  contiene todas las medidas que se tienen en cuenta para determinar el adecuado comportamiento del bucle cerrado (error de seguimiento, acción de control, etc.), siendo  $\mathbf{y}$  las medidas que son utilizadas por el controlador  $\mathbf{K}$ . La señal vectorial  $\mathbf{p}$  contiene todas aquellas entradas aplicadas sobre el proceso (referencia, perturbaciones, etc.).

A partir de este diagrama de bloques se pueden obtener la transformación lineal fraccional inferior (paradigma usado en síntesis o diseño de control robusto ante una determinada incertidumbre) y la superior (paradigma usado en análisis de robustez dado un determinado controlador), como se muestra en la figura 2.6, siendo  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  calculados en [Sánchez-Peña y Sznaier 1998].

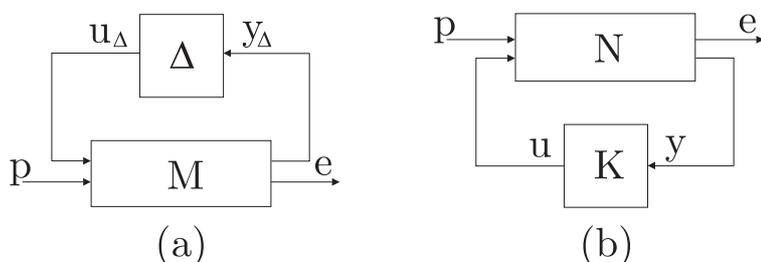


Figura 2.6: (a) TLF inferior. (b) TLF superior.

En particular, existen diferentes **representaciones** de la incertidumbre, siendo las más importantes [Bemporad y Morari 1999b]:

- **Respuesta impulsional y ante escalón.** En este caso la incertidumbre es descrita como un intervalo sobre los coeficientes de la respuesta impulsional o ante escalón del sistema, como se muestra en la figura 2.7.

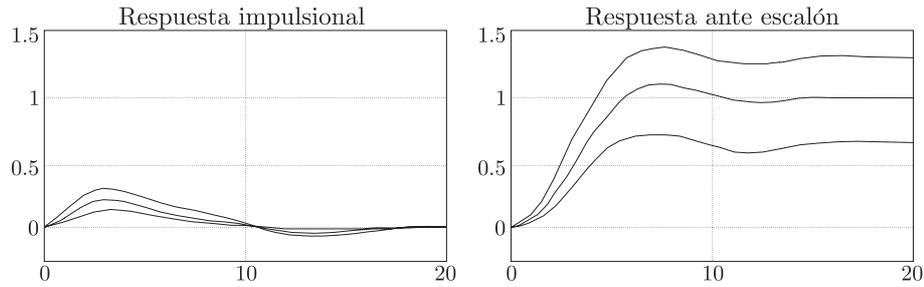


Figura 2.7: Intervalos en la respuesta impulsional y ante escalón.

Así para el caso de respuesta ante escalón, el conjunto de modelos se puede describir como

$$\Sigma : y(t) = \sum_{k=0}^N s(t) [u(t-k) - u(t-k-1)], \quad (2.5)$$

$$\mathcal{S} = \{ \Sigma : s_t^- \leq s(t) \leq s_t^+ \}, \quad t = 0, \dots, N \quad (2.6)$$

siendo  $[s_t^-, s_t^+]$  el intervalo dado para los coeficientes de la respuesta ante escalón.

Es importante tener en cuenta que los modelos de respuesta ante impulso y ante escalón sólo son equivalentes si no hay incertidumbre. En presencia de incertidumbre, son bastante diferentes [Bemporad y Mosca 1998].

La principal ventaja de este modo de descripción es que es muy sencillo e intuitivo, pero el principal inconveniente radica en que puede añadir artificialmente incertidumbre de alta frecuencia y puede llevar a un diseño conservativo, debido a que los límites  $[s_t^-, s_t^+]$  pueden permitir que la respuesta ante escalón sea oscilatoria a pesar de ser el sistema sobreamortiguado. Este inconveniente se podría resolver añadiendo *ligaduras* entre los coeficientes de la respuesta ante escalón de modo que no varíen demasiado [Zheng 1995].

- **Incetidumbre estructurada en la realimentación.** Partiendo del paradigma típico en el diseño de control robusto (figura 2.6 (a)), puede resultar que el empleo de incertidumbre no estructurada sea conservativo cuando sólo se desconoce el verdadero valor de determinados parámetros, aunque se sabe que pueden variar en unos determinados rangos. En ese caso, se puede considerar que la incertidumbre  $\Delta$  posee cierta estructura conocida de antemano [Kothare *et al.* 1996]. Así pues, el operador  $\Delta$  es diagonal a bloques,  $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ , donde cada bloque  $\Delta_i$  representa o bien una matriz de ganancias variable con el tiempo con

$$\|\Delta_i(t)\|_2 = \bar{\sigma}(\Delta_i(t)) \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, r, \quad t \geq 0 \quad (2.7)$$

o bien un sistema estable LTI con la norma inducida por la *norma 2* menor que 1. Cuando  $\Delta_i$  son sistemas LTI estables, entonces equivale a la especificación en el dominio en *frecuencia* sobre la transformada  $\mathcal{Z}$  obtenida  $\hat{\Delta}_i(z)$ , de modo que

$$\|\hat{\Delta}(z)\|_\infty < 1. \quad (2.8)$$

- **Multi-planta.** En este caso la incertidumbre está parametrizada por una lista finita de posibles plantas [Badgwell 1997]  $\Sigma \in \Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ . Cuando se supone que el sistema real varía dentro del espacio convexo definido por la lista anterior, la descripción se denomina *incertidumbre politópica*.
- **Incertidumbre politópica.** Como se comentó anteriormente, un politopo viene definido por un espacio convexo. Como se indica en [Kothare *et al.* 1996], la incertidumbre politópica puede servir de aproximación conservadora para definir sistemas no lineales.
- **Incertidumbre acotada en la entrada.** En este caso se asume sólo la incertidumbre  $\nu \in \mathcal{V}$ , cuyos límites son conocidos, es decir, se conoce  $\mathcal{V}$ , y se supone la planta conocida ( $\mathcal{S} = \Sigma_0$ ). Puede ser una descripción aceptable, tal y como se muestra en [Mäkilä *et al.* 1995] y [Milanese y Vicino 1993].

### 2.4.3 Técnicas de mejora de la robustez en CPBM.

Hablando de robustez, el mínimo requerimiento en bucle cerrado es asegurar la *estabilidad robusta* en presencia de incertidumbre. En CPBM existen diferentes **aproximaciones** para lograr estabilidad robusta, pero todas ellas se pueden agrupar en dos:

- *indirectamente*, especificando el objetivo de las prestaciones y la descripción de la incertidumbre, de tal modo que el cálculo de la acción de control óptima proporcione estabilidad robusta,
- *directamente*, forzando algún tipo de restricción que garantice que el estado converge para todas las plantas del conjunto de incertidumbre.

Diversas **técnicas** de mejora de la robustez pueden ser:

- **Optimización min-max de las especificaciones.** En este caso se plantea un problema min-max que trata de encontrar el *peor modelo* en una región acotada, y luego resuelve el problema basado en este peor escenario para optimizar el funcionamiento robusto

$$\min_{\mathbf{U}} \max_{\substack{\Sigma \in \mathcal{S} \\ \{\nu(k+t)\}_{k=0}^{N-1} \subseteq \mathcal{V}}} J(\mathbf{U}, x(t), \Sigma, \nu(k+t)). \quad (2.9)$$

siendo  $N$  el horizonte de predicción,  $\mathbf{U}$  la ley de control,  $\mathbf{x}$  los estados,  $\Sigma$  la planta a controlar que pertenece a una familia de modelos  $\mathcal{S}$  y  $\nu$  el ruido no medible que pertenece a un conjunto dado  $\mathcal{V}$ .

El CPBM robusto vía min-max, propuesto por [Campo y Morari 1987] y después desarrollado por [Allwright y Papavasiliou 1992] y [Zheng y Morari 1993] para plantas SISO y FIR, presenta dos inconvenientes, primero, el coste computacional y, segundo, que la acción de control puede resultar excesivamente conservativa.

Además la formulación min-max propuesta por [Campo y Morari 1987] no garantizaba la estabilidad robusta, como fue demostrado por [Zheng 1995] mediante un contraejemplo. Para asegurar la estabilidad robusta se debe suponer que la incertidumbre es *variante con el tiempo*, lo cual aporta aún más conservadurismo, y puede ser prohibitivo para ciertas aplicaciones.

Una manera de reducir el alto coste computacional radica en plantear no una función de coste cuadrática sino de *norma 1*, de modo que el problema de optimización se transforma en un problema de *programación lineal* (LP) cuyo coste computacional es mucho menor [Camacho y Bordóns 1995], [Megías *et al.* 2000].

A partir del planteamiento del problema min-max, existen variantes como puede ser el *quasi-min-max*, en el que se plantea el *casi peor caso* a la hora de calcular la ley de control, de modo que se reduce un poco el conservadurismo [Lu y Arkun 2000].

Se destaca que existen técnicas similares al min-max fuera del CPBM, como puede ser el **control**  $\mathcal{H}_\infty$ , el cual minimiza la norma infinita de la función de sensibilidad. Dicha minimización es la optimización del peor caso, pues minimiza el efecto en la salida de la peor perturbación. Al tratarse de un problema min-max también presenta el problema del alto coste computacional además de la difícil inclusión de restricciones en las variables, siendo este último problema solventado en el CPBM.

También hay trabajos, en otras estrategias de control diferentes al CPBM, en los que el problema de optimización min-max se solventa analíticamente [Smith y Kravaris 2000]. Expresada la incertidumbre de forma paramétrica, se calcula el regulador para el peor caso dentro del rango de posibles valores de la incertidumbre. Evidentemente, al tratarse de una tarea ardua, se suele aplicar a sistemas sencillos (de primer orden y a lo sumo con retardo puro), con controladores diseñados de manera sencilla (por ejemplo, obtenidos a partir de la inversión de la parte invertible del sistema) y sin la presencia de restricciones, por lo que su campo de aplicación está limitado.

- **Optimización LMI de las especificaciones.**

Sería interesante obtener técnicas para CPBM robusto, que se pudieran implementar *en línea*, y por tanto que no presentasen un coste computacional tan elevado como la optimización min-max. En ese sentido, las LMI (*linear matrix inequalities*) resultan muy relevantes para el CPBM, por dos motivos:

- los problemas de optimización basados en LMI se pueden resolver en un tiempo comparable al que requiere la evaluación de una solución analítica para un problema similar, por tanto, la optimización LMI se puede implementar *en línea*,
- se puede adaptar mucha de la teoría existente en control robusto al campo de las LMI [Henrion *et al.* 2001].

Básicamente, una LMI es una desigualdad lineal matricial de la forma [Boyd *et al.* 1994]

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{j=1}^k x_j \mathbf{F}_j \geq \mathbf{0}, \quad (2.10)$$

donde cada  $\mathbf{F}_j$ ,  $j = 0, \dots, k$  es una matriz simétrica ( $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) conocida y  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$  son variables escalares<sup>3</sup>. Está claro que un conjunto de LMIs,  $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, \dots, \mathbf{F}_m(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$  equivale a una sola LMI obtenida ensamblando todas las matrices  $\mathbf{F}_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, m$  en una gran matriz diagonal a bloques.

La importancia de las LMIs se debe al hecho de que en los problemas de optimización del tipo

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad (2.11)$$

el conjunto de restricciones convexo puede transformarse a una matriz  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ , que es una LMI, existiendo algoritmos eficientes para resolverla [Balas *et al.* 2005].

Además, las desigualdades cuadráticas convexas (frecuentemente usadas en control) también se pueden expresar como una LMI. En particular, si  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T$  y  $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})^T$ , y  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  son todas afines en  $\mathbf{x}$ <sup>4</sup>, entonces el par de desigualdades

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) - \mathbf{V}(\mathbf{x})^T \mathbf{Q}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \quad (2.13)$$

es equivalente a la LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{V}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{V}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}. \quad (2.14)$$

<sup>3</sup>El símbolo  $\geq$  indica que  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  es una matriz semidefinida positiva. La LMI se denomina estricta si se utiliza el símbolo  $>$  en lugar de  $\geq$ , siendo en ese caso  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  una matriz definida positiva.

<sup>4</sup>Es decir,  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}_0 + \sum_{j=1}^k x_j \mathbf{Q}_j$ , pudiéndose expresar  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  del mismo modo.

Diferentes trabajos en control robusto en espacio de estados se han presentado haciendo uso de las LMI, tal como [Boyd *et al.* 1994], [Henrion *et al.* 2001] y [Sánchez-Peña y Sznaier 1998], e incluso en control predictivo, tal como [Jia *et al.* 2002] y [Salcedo 2005]. Finalmente, se destacan algunos de los principales problemas de usar LMIs en estos casos [Camacho y Bordóns 1999]:

- aunque se supone que los algoritmos LMI son numéricamente eficientes, no son tan eficientes como los algoritmos especializados LP y QP,
  - las acciones de control se calculan como una realimentación *lineal* del estado que satisface las restricciones, pero cuando las restricciones se alcanzan, el controlador no tiene por qué ser lineal,
  - los problemas de *factibilidad* son más difíciles de tratar ya que al transformar el problema al formato LMI se pierde el sentido físico de las restricciones.
- **Restricción robusta de contracción.** Para plantas estables, [Zheng 1995] introduce la restricción de estabilidad

$$\|x(t+1|t)\|_{\mathbf{P}} \leq \lambda \|x(t)\|_{\mathbf{P}}, \quad \lambda < 1, \quad (2.15)$$

la cual fuerza al estado a contraerse. Cuando se elige la matriz de penalización del estado final  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$  como la solución de la ecuación de Lyapunov  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$ , siendo  $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$  la matriz de penalización de los estados y  $\mathbf{A}$  la matriz del sistema en espacio de estados, entonces se puede cumplir siempre la restricción para alguna acción de control.

Para lograr la estabilidad robusta, se requiere que el estado se contraiga para todas las plantas que pertenecen a  $\mathcal{S}$ , de modo que se debe maximizar  $\|x(t+1|t)\|_{\mathbf{P}}$  sobre  $\Sigma \in \mathcal{S}$ .

Frente a los métodos sencillos (desde el punto de vista computacional) e intuitivos, aparecen actualmente otros más rigurosos, aunque requieren un mayor coste computacional, basados en los **conjuntos invariantes**. Los conjuntos invariantes se han usado habitualmente para asegurar la *factibilidad* en presencia de restricciones. En ese sentido, un conjunto invariante se define como aquél en el que una vez se ha entrado ya no se puede salir de él. Así pues si el estado de un sistema entra en un conjunto invariante en el que está asegurada la factibilidad, sería equivalente a una función de Lyapunov en el test de estabilidad. Al igual que cuando se comentaron las diferentes formas de describir la incertidumbre, también existen diferentes formas de los conjuntos invariantes, como son las formas *elipsoidales* y las *poliédricas*. La forma de aplicar los conjuntos invariantes al problema de robustez consiste en redefinir dichos conjuntos ante la presencia de incertidumbre, lo cual resulta un poco más complicado.

- **Conjuntos terminales robustamente invariantes.** Recientemente se han propuesto los conjuntos terminales invariantes con forma *elipsoidal* como una forma

relajada de la *restricción terminal de igualdad*  $x(t + N|t) = 0$  [Bemporad y Mosca 1998]. Esta técnica puede ser usada en la formulación del CPBM robusto, por ejemplo haciendo uso de las técnicas LMI [Kothare *et al.* 1996]. Ello conlleva a un problema cuadrático con restricciones cuadráticas (QCQP) que se puede resolver por métodos de punto interior [Lobo *et al.* 1997], pero que presenta mayor coste computacional que el QP.

Tradicionalmente, existen otras técnicas para mejorar la robustez del sistema, no basadas en la resolución del típico problema min-max que tiene en cuenta el valor de la incertidumbre y proporciona las acciones de control óptimas, sino basadas en el ajuste fino o sintonizado de los parámetros del controlador con reglas más o menos heurísticas.

Así pues, en el caso del controlador GPC, se puede mejorar la robustez del sistema reajustando el parámetro de penalización del esfuerzo de control  $\lambda$  o bien eligiendo un valor adecuado para el polinomio  $\mathbf{T}$  (polinomio que forma parte del modelo de perturbaciones considerado, y que puede ser visto como un filtro o un observador). En este último caso, el GPC *implícitamente* pretende mejorar la robustez del sistema, pues el modelo del sistema conlleva una parte que pretende modelar las perturbaciones (polinomio  $\mathbf{T}$ ).

Estas técnicas, que son útiles cuando se requieren algoritmos con un **coste computacional** pequeño para ejecutarlos *en línea*, se describen a continuación:

- **Ajuste del polinomio  $\mathbf{T}$ .** La utilización del polinomio  $\mathbf{T}$  como pre-filtrado para mejorar la robustez del GPC fue presentada en [Clarke *et al.* 1987b] y usada luego en otros trabajos [Ansay y Wertz 1997], [Megías *et al.* 1997], [Mohtadi 1988], [Robinson y Clarke 1991], [Yoon y Clarke 1995a]. También se pueden usar polinomios de filtrado en otros algoritmos de control predictivo, como es el DMC [Ramos *et al.* 2002a]. El sintonizado de  $\mathbf{T}$  permite mejorar la robustez del sistema y el rechazo a perturbaciones, sin modificar las condiciones nominales de seguimiento de consignas.

Diferentes autores [Normey y Camacho 2000] sugieren que el polinomio  $\mathbf{T}$  se elija como  $\mathbf{T} = \mathbf{T}'\mathbf{A}$  ( $\mathbf{A}$  es el denominador de la función de transferencia para plantas estables), siendo  $\mathbf{T}' = (1 - \beta z^{-1})^\nu$  un polinomio con raíces dentro del círculo unitario, donde el entero  $\nu$  se define en función del mínimo horizonte de predicción  $N_1$  y del retardo del modelo  $d$  ( $\nu \leq \max(N_1, d)$ ). Se demuestra que no siempre es posible aumentar el índice de robustez del GPC aumentando el orden de  $\mathbf{T}$  (aumentando  $\nu$ ) o bajando la frecuencia de corte del filtro (aumentando  $\beta$ ), que serían las formas *intuitivas* de ajuste [Yoon y Clarke 1995a], [Yoon y Clarke 1993a].

El polinomio  $\mathbf{T}$  puede ser visto como un filtro paso bajo que reduce la sensibilidad del controlador al ruido de alta frecuencia, pero aporta poco en el comportamiento a bajas frecuencias.

El uso del polinomio  $\mathbf{T}$  para mejorar la robustez del sistema es muy popular pues es sencillo y bastante intuitivo, a pesar de que no existen diseños guiados y se basa en parte en el método de *prueba y error*, por tanto no es demasiado riguroso.

En general, todos los métodos propuestos en la literatura para el ajuste de  $\mathbf{T}$  solamente estudian el caso SISO y la mayoría sólo pueden aplicarse a plantas estables. Las propuestas de ajuste de  $\mathbf{T}$  que se pueden utilizar con plantas inestables son muy complejas [Ansay y Wertz 1997], [Kouvaritakis *et al.* 1992] y no analizan el caso de plantas con retardo superior a un periodo de muestreo.

En cualquier caso, existen trabajos donde se comparan las prestaciones de un controlador basado en el polinomio  $\mathbf{T}$  frente al obtenido mediante la resolución del problema min-max, observándose, que este último funciona mejor, pues en ocasiones, el algoritmo basado en el polinomio  $\mathbf{T}$  puede presentar problemas de inviabilidad y no cumplir ciertas restricciones [Megías *et al.* 2000].

- **Parametrización de Youla.** Otra técnica para mejorar la robustez se basa en la parametrización de Youla [Ansay y Wertz 1997]. El inconveniente de esta estrategia consiste en que el diseño ya no es tan intuitivo como el ajuste del polinomio  $\mathbf{T}$ , pero en cambio es más guiado y requiere una optimización y una definición más precisa de los objetivos.

Una diferencia respecto al uso del filtro  $\mathbf{T}$ , radica en que éste actúa en las predicciones de *bucle abierto*, pero dado que la parametrización de Youla modifica el bucle cerrado, se deben usar predicciones en **bucle cerrado**.

En este caso la ley de control se modifica con un grado de libertad llamado el *parámetro de Youla*  $Q$ , el cual altera la función de sensibilidad del sistema sin alterar el funcionamiento nominal (la sensibilidad complementaria). En ese sentido el enfoque del filtro  $\mathbf{T}$  del apartado anterior actúa del mismo modo, ya que tampoco afecta a la sensibilidad complementaria.

Una alternativa más completa podría combinar tanto el polinomio  $\mathbf{T}$  como la parametrización de Youla, ya que el polinomio  $\mathbf{T}$  es un filtro paso bajo, y por tanto el mayor efecto sobre la sensibilidad lo aporta en el rango de la alta frecuencia, mientras que si posteriormente se usa la parametrización de Youla se puede mejorar la sensibilidad en otra banda, como son las frecuencias medias.

- **Ajuste del parámetro de penalización del esfuerzo de control  $\lambda$ .** También llamado *move suppression factor*, el parámetro  $\lambda$  (que puede ser una matriz) se puede ajustar con dos fines diferentes:

- reducir el número de condición de la matriz que se ha de invertir para obtener la ley de control del CPBM,
- y evitar acciones de control agresivas. Indirectamente también se está mejorando la robustez del sistema de control.

El sintonizado de dicho parámetro se suele regir por criterios empíricos, aunque hay algunos trabajos que ofrecen una expresión analítica para  $\lambda$  con el fin de reducir el mal condicionamiento del sistema [Shridhar y Cooper 1997]. En dicho trabajo se obtiene una **expresión analítica** del número de condición y a partir de ella,

se deriva una expresión para  $\lambda$ , de modo que el número de condición se acota por un valor fijo. El principal inconveniente de este método es que *aproxima* el proceso por un sistema de **primer orden** más un retardo con el fin de obtener la expresión analítica de manera sencilla.

También existen métodos guiados de sintonizado de  $\lambda$  para evitar acciones de control agresivas (reducir el esfuerzo de control) como los basados en la descomposición en valores singulares de la matriz del controlador y el *análisis de sus componentes principales* (PCA) [Sanchis *et al.* 2001], [Sanchis 2002].

Aunque hay estudios sobre este aspecto **dual** de  $\lambda$  [Maurath *et al.* 1988], la atención se ha centrado sobre todo en el segundo objetivo, el cual viene motivado por el hecho de que siempre se puede estabilizar un sistema estable en bucle abierto haciendo el controlador menos agresivo. En el límite de un controlador completamente pasivo, el sistema regresa a su comportamiento estable en bucle abierto.

Tras plantear las diferentes técnicas usadas con el fin de mejorar la robustez del sistema, un aspecto a tener en cuenta sería la **predicción en bucle cerrado**. Aunque habitualmente se usa la predicción en *bucle abierto*, ésta puede resultar demasiado conservadora, al no considerar que el efecto de la perturbación es atenuado por el bucle cerrado. De este modo, en un esquema de predicción en bucle abierto, la incertidumbre originada por las perturbaciones crece a lo largo del horizonte de predicción (efecto acumulativo). Pero en la predicción en bucle cerrado se dispone de un grado más de libertad (el ajuste del controlador), el cual se puede ajustar para evitar la acumulación de incertidumbre y el resultado es menos conservador.

La incorporación de esta idea en el CPBM da lugar a la denominada *formulación en bucle cerrado* y fue introducida en [Lee y Yu 1997], [Sckaert y Mayne 1998] en el controlador **min-max**. En esta formulación, el problema de control no está planteado en términos de una secuencia de actuaciones, sino de una secuencia de leyes de control, lo cual hace que el problema de optimización implicado sea infinito-dimensional. Por tanto, estos controladores constituyen todavía una herramienta meramente teórica [Mayne *et al.* 2000].

El problema de *predicción en bucle cerrado* resulta difícil de resolver. Una forma que permite una solución en ciertos casos es utilizando *Programación Dinámica*. En [Kothare *et al.* 1996] se muestra cómo ajustar la ley de control de modo que se minimice el *peor caso* para una función objetivo con *horizonte infinito*, resultando así un algoritmo de CPBM robustamente estable.

Una ventaja adicional de la predicción en bucle cerrado radica en que se disminuyen los problemas numéricos debidos a la precisión finita, pues en este caso las predicciones ya no dependen de las sucesivas potencias de la matriz de estado  $\mathbf{A}$ , sino de las potencias de  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ , siendo  $\mathbf{B}$  la matriz de entrada del sistema y  $\mathbf{K}$  la realimentación del estado. En cualquier caso hay pocas aportaciones con el fin de obtener algoritmos de CPBM computacionalmente eficientes.

## 2.5 Conclusiones del capítulo.

En este capítulo se han plasmado los fundamentos del CPBM, así como de sus diferentes implementaciones, resaltando la importancia que tiene el CPBM en el entorno industrial.

También se ha puesto de manifiesto el problema de la robustez en CPBM, planteándose dos alternativas: el análisis de la estabilidad para un control predictivo dado ante incertidumbres en el sistema y el diseño de controladores predictivos robustos.

Por último, se presenta un conjunto de técnicas utilizadas actualmente encaminadas a mejorar la robustez del CPBM. La incorporación de las incertidumbres en el diseño de controladores es uno de los grandes temas de investigación abiertos en CPBM, en los que se han realizado avances significativos, como la formulación en bucle cerrado del CPBM.

Esta tesis se centra en la mejora del problema de la robustez en CPBM, explorando un nuevo enfoque para la definición de incertidumbre paramétrica basada en la técnica BDU (*Bounded Data Uncertainties*), originalmente desarrollada para problemas de identificación y que se adapta de forma natural a la optimización *min-max* y a la formulación asociada al CPBM.

En el próximo capítulo se presentan los fundamentos de la técnica, la cual puede permitir un sintonizado guiado del parámetro de penalización del esfuerzo de control  $\lambda$  (frente a los criterios empíricos habitualmente usados), que como se comentó anteriormente, al mismo tiempo proporciona un control menos agresivo y mejora los problemas de mal condicionamiento.

## Capítulo 3

### Fundamentos de la técnica *Bounded Data Uncertainties* (BDU).

---

3.1	Introducción. . . . .	43
3.2	Técnicas de regularización. . . . .	43
3.3	Fundamentos de la técnica BDU. . . . .	52
3.3.1	Planteamiento del problema. . . . .	52
3.3.2	El límite para la incertidumbre. . . . .	53
3.3.3	Reducción del problema <i>min-max</i> a un problema de minimización. . . . .	54
3.3.4	Minimización del índice. . . . .	56
3.3.5	Extensión del índice planteado. . . . .	57
3.3.6	Planteamiento mediante la SVD. . . . .	60
3.4	Conclusiones. . . . .	62



## 3.1 Introducción.

La técnica BDU fue desarrollada originalmente para problemas de estimación de parámetros, con extensiones muy limitadas al ámbito del control de procesos [Sayed *et al.* 1998]. Por ese motivo, se ha elegido ese enfoque para introducir la técnica BDU, incluyendo también un estudio comparativo con otras técnicas de estimación de parámetros.

Así, el capítulo se distribuye de la siguiente forma, la sección 3.2 presenta el problema de mínimos cuadrados y diferentes técnicas de regularización de dicho problema, destacando de entre ellas la técnica BDU cuyo desarrollo matemático se muestra con detalle en la sección 3.3. Para finalizar la última sección se dedicará a las conclusiones del presente capítulo.

Así pues, centrando la atención en la estimación e identificación, que son áreas importantes en casi cualquier problema de ciencia e ingeniería, una manera típica de plantear un problema de estimación o identificación consiste en considerar un sistema descrito por una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  conocida, siendo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  un vector desconocido y salidas medibles  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , de manera que se describe mediante el modelo lineal

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (3.1)$$

A partir de las salidas medibles y conociendo  $\mathbf{A}$ , se desea encontrar  $\mathbf{x}$ , pero en los sistemas reales raramente se presenta la igualdad (3.1) porque nunca se mide exactamente el valor de  $\mathbf{b}$  y tampoco se conoce exactamente la matriz  $\mathbf{A}$  obtenida mediante modelado e identificación. Así, el vector  $\mathbf{b}$  contiene medidas ruidosas (o con incertidumbre), no siendo cierta la ecuación (3.1), planteando el problema de la forma

$$\mathbf{Ax} \approx \mathbf{b}. \quad (3.2)$$

## 3.2 Técnicas de regularización.

Existen diferentes *métodos de regresión* [Schubert 2003] para manejar el problema (3.2) usados en identificación de sistemas (y también en otros ámbitos como el procesamiento de señales, control, procesamiento de imágenes, comunicaciones digitales, estadística y otros), los cuales se detallan a continuación.

- 1) **Mínimos Cuadrados.** <sup>1</sup> Dicho principio es fundamental y está presente en numerosas teorías de identificación y control, como son el filtro de Kalman, control LQR, LQG, GPC, etc. Su popularidad es debida a que es fácil de plantear y de resolver. Considerando el **contexto de la identificación**, dado el vector  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  que contiene medidas ruidosas o con incertidumbre, relacionado con el vector desconocido  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  mediante el modelo lineal

---

<sup>1</sup>En inglés *Least Squares* (LS) o también llamado *Errors-in-Observations*.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \quad (3.3)$$

para una matriz conocida  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  (con  $m \geq n$ ), se estima  $\hat{\mathbf{x}}$  resolviendo el sistema de ecuaciones (3.2), en la mayoría de los casos inconsistente

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 \quad (3.4)$$

denotando  $\|\cdot\|_2$  la norma *euclídea* del vector (o el máximo valor singular de la matriz). El vector  $\delta\mathbf{b}$  indica un término de ruido que explica la desigualdad entre el vector medido  $\mathbf{b}$  y el vector  $\mathbf{Ax}$ . Generalmente  $\delta\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , y por tanto el vector  $\mathbf{b}$  no pertenece al espacio generado por las columnas de  $\mathbf{A}$  consideradas como vectores ( $\mathbf{b} \notin \mathcal{R}(\mathbf{A})$ ), y en ese caso, el problema de mínimos cuadrados busca el vector  $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$  que esté más cerca a  $\mathbf{b}$  en el sentido de la norma euclídea (ver figura 3.1). Así el método considera que todos los errores e incertidumbre están presentes sólo en el vector  $\mathbf{b}$ , y por tanto  $\mathbf{A}$  se conoce exactamente.<sup>2</sup>

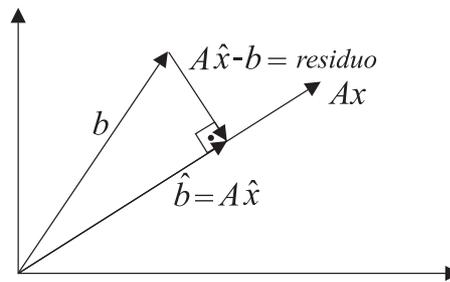


Figura 3.1: Interpretación geométrica de la solución LS.

La solución  $\hat{\mathbf{x}}$ , siendo  $\mathbf{A}^+$  la matriz pseudoinversa de  $\mathbf{A}$ , resulta

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}. \quad (3.5)$$

En la figura 3.1 se muestra geoméricamente la solución  $\hat{\mathbf{x}}$  como la *proyección* de  $\mathbf{b}$  en el espacio generado por las columnas de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ . El vector residuo  $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$  es necesariamente *ortogonal* a la base constituida por las columnas de la matriz de datos  $\mathbf{A}$ , es decir

$$\mathbf{A}^T [\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}] = \mathbf{0}. \quad (3.6)$$

El principal inconveniente del método de mínimos cuadrados (LS) radica en que es *sensible a errores en los datos*. Es decir, un diseño de mínimos cuadrados basado en los datos  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  puede resultar inadecuado cuando los datos '*reales*' no son  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  sino una versión perturbada de éstos,  $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$ , siendo  $\delta\mathbf{A}$  y  $\delta\mathbf{b}$

---

<sup>2</sup>De ahí el nombre de *Errors-in-Observations* que también recibe el método de mínimos cuadrados.

desconocidos. En este caso la solución  $\hat{\mathbf{x}}$  proporciona un nuevo residuo, mayor que el anterior, debido a la perturbación  $\delta\mathbf{A}$

$$residuo = \|[\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}] \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 \leq \underbrace{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}_{\text{residuo LS}} + \underbrace{\|\delta\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|_2}_{\text{término adicional}}. \quad (3.7)$$

El problema radica en que las perturbaciones o incertidumbre en los datos aparece con mucha frecuencia en los problemas de control [Skogestad y Postlethwaite 1996].

**2) Mínimos Cuadrados Regularizado.** <sup>3</sup> Dicho método es una variante del LS que puede obtener una solución **más robusta** (es decir, menos sensible a errores en los datos) ante el problema descrito anteriormente que aparece cuando los datos reales son  $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$  y que además pretende combatir el problema de *mal condicionamiento* que aparece en el LS puro [Golub y van Loan 1996], [Lawson y Hanson 1995], [Tikhonov 1963]. El mal condicionamiento produce que pequeños cambios en los datos de partida originen grandes cambios en el resultado obtenido (y por tanto una mayor sensibilidad a dichos errores). Considerando el sistema de *ecuaciones normales* (3.6) que describe la solución del LS

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (3.8)$$

el problema surge con el término  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , cuyo número de condición puede ser mucho peor que el de  $\mathbf{A}$ , lo cual origina problemas cuando se invierte para calcular la solución. La **regularización** puede ser una solución, que consiste en elegir de antemano un parámetro **positivo**  $\lambda$  (el parámetro de regularización) para que la inversión sea más fácil y más precisa, y elegir  $\hat{\mathbf{x}}$  resolviendo el siguiente índice (donde se usa la norma al cuadrado la cual facilita la derivada del índice)

$$\min_{\mathbf{x}} [\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_2^2] \quad (3.9)$$

siendo la solución

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (3.10)$$

El inconveniente radica en que se elige  $\lambda$  de un modo intuitivo, y sin ningún procedimiento o técnica que ayude en su diseño. De modo que si es muy grande, se produce una **sobrerregularización** la cual puede originar pérdida de información importante, y si  $\lambda$  resulta pequeño se produce una **subregularización** que puede provocar que la solución no sea robusta, es decir que sea sensible a errores en los datos. En la siguiente sección, se presenta la técnica BDU que lleva a cabo la **regularización semiautomática** sin intervención del usuario, diseñando  $\lambda$  a partir de una cota de la incertidumbre  $\delta\mathbf{A}$  y  $\delta\mathbf{b}$ .

<sup>3</sup>En inglés *Regularized Least Squares* (RLS).

Existen otras técnicas de regresión que hacen uso de la *regularización*, las cuales se podrían agrupar en dos familias, aquéllas que llevan a cabo una **regularización positiva** o llamada simplemente *regularización*, es decir con  $\lambda > 0$ , tales como las técnicas *mínimos cuadrados contraído*, *regresión Ridge*, *regresión Tikhonov*, *min-max* y el ya citado *mínimos cuadrados regularizado*, y aquéllas que usan la **regularización negativa** o **desregularización**, es decir con  $\lambda < 0$ , tales como las técnicas *mínimos cuadrados total* y *min-min*.

Tradicionalmente, el uso del *mínimos cuadrados* (que no usa regularización alguna) y *mínimos cuadrados total* está muy extendido en el ámbito de la estimación, pero dichos métodos presentan el problema de ser poco robustos, es decir muy sensibles a los errores en los datos o funcionan mal cuando la matriz  $\mathbf{A}$  está mal condicionada. La *desregularización* del *min-min* también presenta el mismo problema. Así pues, en general los métodos que *desregularizan* intentan obtener una solución **más precisa** (con menor residuo), pero **menos robusta**, obteniendo valores de  $\|\hat{\mathbf{x}}\|_2$  mayores. Por otra parte, los métodos que *regularizan* obtienen soluciones **más robustas** pero **menos precisas**, es decir, incorporan un **sesgo o residuo adicional**, reduciendo así el valor de  $\|\hat{\mathbf{x}}\|_2$ .

Son destacables otros métodos basados en el criterio del *error hacia atrás* (en inglés *backward error*) que pretenden mejorar ambos aspectos, robustez y precisión, pero a costa de manejar índices *no convexos* más complejos [Chandrasekaran *et al.* 2004].

Con tantas técnicas, es difícil establecer cuáles son mejores, pues también depende de la aplicación en particular. En el ámbito de la estimación e identificación, tradicionalmente se han usado técnicas de *desregularización* con la intención de conseguir soluciones precisas, aunque también se han usado de *regularización*. No obstante, desde el punto de vista de control, y sobre todo de **control robusto**, interesarían técnicas de *regularización* que proporcionen soluciones más suaves (menores  $\|\hat{\mathbf{x}}\|_2$ ) y robustas. A continuación, se describen dichas técnicas.

**3) Mínimos Cuadrados Contraído.** <sup>4</sup> Los estimadores contraídos se deben a [Stein 1956], y se plantean a menudo en el ámbito de control cuando aparecen restricciones al formular el problema de optimización. Un problema con restricciones sencillo sería

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 \\ \text{s.a.} \quad & \|\mathbf{Bx} - \mathbf{d}\|_2 \leq \alpha \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde, a menudo,  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{B}$  es no singular, aunque no es necesario. El problema se puede resolver usando un **multiplicador de Lagrange** [Martínez *et al.* 2000], [Martínez *et al.* 2002], resultando

$$\min_{\mathbf{x}, \lambda} [\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda [\|\mathbf{Bx} - \mathbf{d}\|_2^2 - \alpha^2]] \quad (3.12)$$

---

<sup>4</sup>En inglés *Constrained Least Squares*.

dando como solución

$$\hat{\mathbf{x}} = \left[ \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \hat{\lambda} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \right]^{-1} \left[ \mathbf{A}^T \mathbf{b} + \hat{\lambda} \mathbf{B}^T \mathbf{d} \right], \quad (3.13)$$

$$g(\hat{\lambda}) = \left\| \mathbf{B} \left[ \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \hat{\lambda} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \right]^{-1} \left[ \mathbf{A}^T \mathbf{b} + \hat{\lambda} \mathbf{B}^T \mathbf{d} \right] - \mathbf{d} \right\|_2^2 - \alpha^2 = 0. \quad (3.14)$$

La ecuación (3.13) proporcionaría la familia de soluciones dependientes del parámetro  $\lambda$ , pero cuando se particulariza para el valor  $\hat{\lambda}$ , se especifica una única solución. La ecuación (3.14) se denomina **ecuación secular** en [Golub y van Loan 1996], la cual se resuelve mediante algún método tipo *biseción* orientado a encontrar raíces, y permite obtener el valor del multiplicador  $\hat{\lambda}$ .

- 4) **Regresión Ridge.** En el ámbito de control, un problema fuertemente relacionado con el tema de la robustez consiste en la particularización del problema anterior considerando que la restricción se expresa mediante una *esfera*. De modo que se elige una  $\lambda > 0$  (regularización positiva) que resuelva el problema

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} & \left[ \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_2^2 \right] \\ \text{s.a.} & \quad \|\mathbf{x}(\lambda)\|_2 \leq \alpha. \end{aligned} \quad (3.15)$$

En ese caso, se usan métodos como la *regresión Ridge* [Hoerl y Kennard 1970a], [Hoerl y Kennard 1970b] para seleccionar el parámetro  $\lambda$ . El uso de la función de *validación cruzada* reduce la dependencia de la solución de cualquier experimento. Cuando se usa dicha función para obtener  $\lambda$  en el problema de *regresión Ridge*, a menudo se le denomina como un problema de *validación cruzada*.

- 5) **Regresión Tikhonov.** Se presenta el siguiente problema [Tikhonov 1963]

$$\min_{\mathbf{x}} \left[ \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{L}\mathbf{x}\|_2^2 \right] \quad (3.16)$$

donde el diseñador puede elegir dos parámetros para seleccionar la solución deseada, el primero la matriz  $\mathbf{L}$ , la cual se usa para especificar condiciones sobre  $\mathbf{x}$  (por ejemplo, si se elige  $\mathbf{L} = \mathbf{I}$  proporciona una solución con norma pequeña, si se elige  $\mathbf{L}$  como la aproximación discreta del operador derivada proporciona una solución suave), y el segundo  $\lambda$ , el cual no se suele elegir directamente, sino a partir de ciertos requerimientos. Existen muchas técnicas para seleccionar  $\lambda$  [Hansen 1992], [Neubauer y Scherzer 1998], [O'Leary 2001], [Kilmer y O'Leary 2001], y ese hecho es a la vez el punto fuerte y débil de este método, pues no se puede decir qué técnica es la mejor, y al final el método elegido termina basándose en la experiencia y habilidad del diseñador. La solución al problema presenta la forma siguiente (suponiendo  $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ )

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (3.17)$$

6) **Min-max o *Bounded Data Uncertainties* (BDU).** El deseo de un método más riguroso matemáticamente para tratar los problemas de robustez, lleva al desarrollo del problema **min-max** [Chandrasekaran *et al.* 1998], también llamado *Robust Least Squares* (RLS) [Ghaoui y Le Bret 1997]. Dicho método se propuso y se resolvió, por una parte, mediante técnicas de la *ecuación secular* en [Chandrasekaran *et al.* 1998], y por otra parte, mediante técnicas de *Linear Matrix Inequalities* (LMI) en [Ghaoui y Le Bret 1996]. Mediante LMIs el tiempo de cálculo es menor, aunque esta ventaja sólo se aprecia cuando aparecen muchas restricciones a tener en cuenta en el problema, ya que en los casos sencillos, en general, la *ecuación secular* es más simple. El método ha sido planteado [Sayed *et al.* 1998], [Subramanian y Sayed 2003], [Watson 2001] para resolver problemas de identificación, estimación, filtrado, control, ajuste de datos, etc. El problema *min-max* trata de encontrar el *peor modelo* en una región acotada, y luego resuelve el problema basado en este peor escenario, siendo el planteamiento matemático del problema

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta \mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \|\mathbf{A} + \delta \mathbf{A} \mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}]\|_2 \quad (3.18)$$

donde  $\delta \mathbf{A}$  y  $\delta \mathbf{b}$  es la incertidumbre, no conocida aunque acotada por  $\eta_A$  y  $\eta_b$ , respectivamente. Definiendo el residuo  $J$  como  $\|\mathbf{A} + \delta \mathbf{A} \mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}]\|_2$ , se puede reescribir la ecuación (3.18) de la siguiente forma

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta \mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} J(\mathbf{x}, \delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{b}), \quad (3.19)$$

la cual puede ser vista según la *teoría de juegos* como un problema con restricciones donde participan dos jugadores. Por un lado el diseñador, que trata de elegir un valor de  $\mathbf{x}$  que minimice el residuo, y por otro lado los oponentes  $\delta \mathbf{A}$  y  $\delta \mathbf{b}$  que intentan maximizar el residuo. La solución a este problema consiste en buscar el vector  $\hat{\mathbf{x}}$  cuyo máximo residuo  $J$ , siendo  $\|\delta \mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A$  y  $\|\delta \mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b$ , es el menor posible. Por ejemplo, si se seleccionan los vectores solución  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  y  $\mathbf{x}_3$  y se dibujan sus residuos  $J$  en función de  $\delta \mathbf{A}$  y  $\delta \mathbf{b}$ , se puede observar en la figura 3.2 cuál es en cada caso el máximo residuo. La solución al problema consiste en encontrar qué  $\mathbf{x}$  produce el mínimo residuo para el peor caso, siendo en el ejemplo de la figura la solución  $\mathbf{x}_2$ .

En la figura 3.3 se muestra la **interpretación geométrica**. Para facilitar la exposición de la solución se supone que la matriz  $\mathbf{A}$  es de rango completo, en concreto es simplemente un vector columna de dimensión 2, y que el vector  $\mathbf{b}$  (también de dimensión 2) no pertenece al espacio de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b} \notin \mathcal{R}(\mathbf{A})$  (si no se cumplieran estas condiciones, la solución sería sólo ligeramente diferente). Para cualquier  $\mathbf{x}$  que se elija, el conjunto  $[\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}]\mathbf{x}$  es un disco centrado en  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  y radio  $\eta_A \|\mathbf{x}\|_2 = \eta_A |\mathbf{x}|$  (por

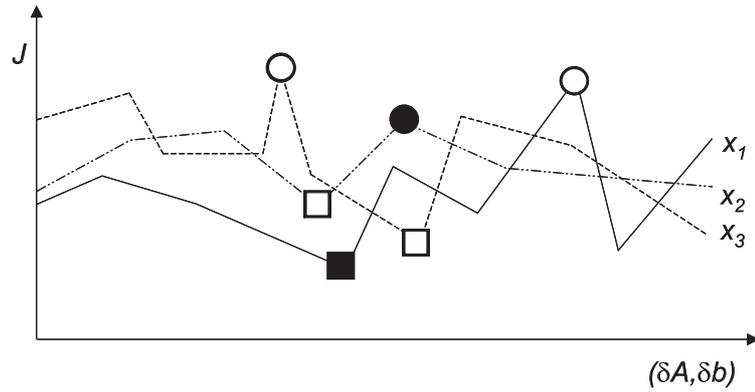


Figura 3.2: Los máximos residuos (*círculos*) y los mínimos (*cuadrados*), la solución *min-max* (*círculo negro*) y *min-min* (*cuadrado negro*).

ser en este caso  $\mathbf{x}$  un escalar). Variando el valor de  $\mathbf{x}$  los discos conforman un *cono* (también en 2 dimensiones) alrededor de  $\mathbf{Ax}$ . El mayor residuo se obtendrá buscando el punto dentro del disco centrado en  $\mathbf{Ax}$  más alejado del disco centrado en  $\mathbf{b}$ , por tanto, la maximización restringe el problema a la *arista inferior del cono*, y posteriormente la minimización elige el punto de dicha arista tal que el segmento que parte desde el punto más alejado del círculo alrededor de  $\mathbf{b}$  hasta la arista inferior, es perpendicular a dicha arista, es decir, dicho punto proporciona el menor segmento (o residuo) a la arista inferior. Si en el punto donde dicho segmento corta a  $\mathbf{Ax}$  se traza un disco tangente a la arista inferior (ver figura 3.3), dicho disco tendrá radio  $\eta_A \|\hat{\mathbf{x}}\|_2$  donde  $\hat{\mathbf{x}}$  es la solución óptima.

En el apartado siguiente se presentará con más detalle dicha técnica, por lo que aquí simplemente se plasmará la solución al problema. En ese sentido, es posible afirmar que el índice (3.18) se transforma en el siguiente problema de minimización

$$\min_{\mathbf{x}} [\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\mathbf{x}\|_2 + \eta_b], \quad (3.20)$$

el cual difiere del típico problema de *Tikhonov* en que las normas no aparecen al cuadrado, y en que el término  $\eta_A$  tiene ahora una interpretación física, que es una cuantificación de la incertidumbre en la matriz (se observa que la solución del problema **no va a depender de**  $\eta_b$ ). No obstante, si  $\mathbf{Ax} \neq \mathbf{b}$  y  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , el problema *min-max* proporciona una solución similar a la del problema de *Tikhonov* con  $\mathbf{L} = \mathbf{I}$

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \hat{\lambda} \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (3.21)$$

regularizada por el parámetro positivo  $\hat{\lambda}$ , el cual se calcula mediante la ecuación secular

$$\hat{\lambda} = \eta_A \frac{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2}. \quad (3.22)$$

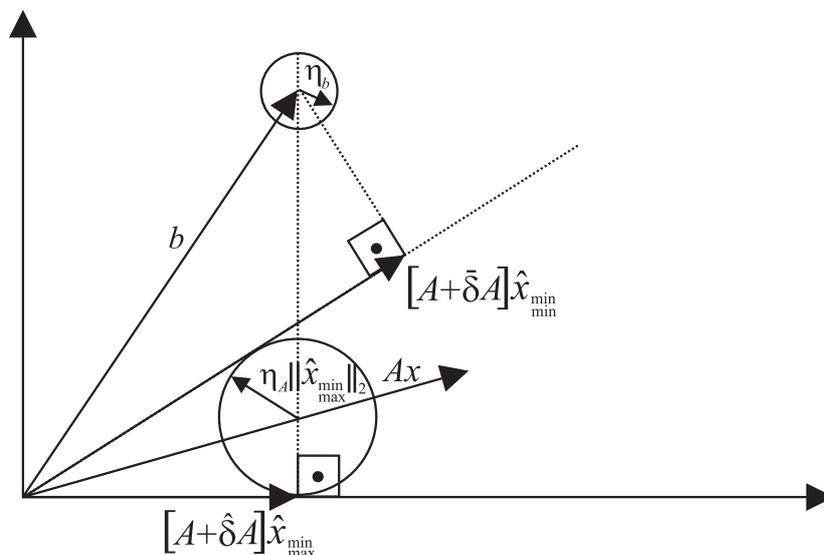


Figura 3.3: Interpretación geométrica de la solución *min-max* y *min-min*.

Una elección razonable para el parámetro  $\lambda$  en el problema de *Tikhonov* consiste en elegir  $\lambda = \eta_A^2$  ya que el resto de términos también son cuadráticos y así tiene en cuenta el tamaño de la incertidumbre [Schubert 2003]. Por tanto, en este caso el inconveniente de la técnica *min-max* radica en que el coste computacional a la hora de calcular la solución es mayor. No obstante, en el problema de *Tikhonov*, el parámetro  $\lambda$  podría resultar arbitrariamente grande o pequeño. Si resulta grande, se produce una *sobrerregularización* la cual puede originar pérdida de información importante, y si el parámetro resulta pequeño se produce una *subregularización* que puede provocar que la solución no sea robusta [Schubert 2003], [Gomez *et al.* 2005]. Así pues, en el problema de *mínimos cuadrados regularizado*, el parámetro  $\lambda$  se ajusta intuitivamente y también podría resultar ser arbitrariamente grande o pequeño. Ése es el principal inconveniente de las técnicas de regularización descritas anteriormente, la elección del *parámetro de regularización*. En cambio, en el BDU se lleva a cabo una **regularización semiautomática**, llamada así porque todavía se debe proporcionar la cota de la incertidumbre que se considera presente en los datos, y no se garantiza que se conozca de manera precisa. Y este aspecto es crítico porque el parámetro de regularización depende del valor de dicha cota.

- 7) **Mínimos Cuadrados Total.** <sup>5</sup> [Golub y van Loan 1980], [Golub *et al.* 1999], [Van Huffel y Vandewalle 1991]. Mientras que el método de mínimos cuadrados (LS) considera que los errores sólo ocurren en  $\mathbf{b}$  y proyecta  $\mathbf{b}$  sobre  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ , en el mínimos cuadrados total (TLS) se asume que los errores ocurren en  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{b}$ , y encuentra los más cercanos  $\hat{\mathbf{A}}$  y  $\hat{\mathbf{b}}$  al problema original (ver la interpretación geométrica de la figura 3.4), de modo que  $\hat{\mathbf{b}} \in \mathcal{R}(\hat{\mathbf{A}})$ .

<sup>5</sup>En inglés llamado *Total Least Squares* (TLS) o *Errors-in-Variables* en el ámbito de identificación de sistemas, o bien *Orthogonal Regression* en estadística.

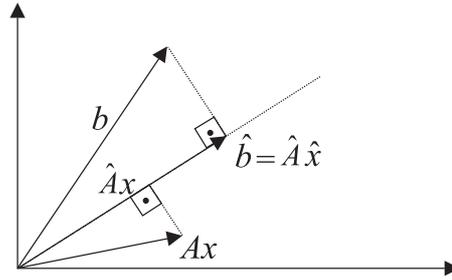


Figura 3.4: Interpretación geométrica de la solución TLS.

Evidentemente, el inconveniente radica en que no se puede limitar cuánto se modifica  $\hat{\mathbf{A}}$  (es decir, no se incorpora una cota superior de la incertidumbre), y así la solución podría ser la de un problema muy diferente ( $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ ) al inicialmente planteado. En ese sentido, el TLS selecciona los valores **más optimistas** de  $\hat{\mathbf{A}}$  y  $\hat{\mathbf{b}}$ , los cuales pueden que no sean **realistas**, además de que el método considera las perturbaciones o errores en  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{b}$  independientes, lo cual en muchas situaciones de identificación y control no ocurre.

- 8) **Min-min.** <sup>6</sup> Dicho método se presenta en dos versiones [Chandrasekaran *et al.* 1999], la *no degenerada*, es decir, con solución única, y la *degenerada*, con múltiples soluciones. En el caso *degenerado* la técnica *min-min* puede llevar a cabo tanto una *regularización* como una *desregularización*, dependiendo del tamaño de la incertidumbre, posibilidad que no ofrece el *mínimos cuadrados total*. Centrando la atención en la *no degenerada*, la idea es similar al TLS, donde el sistema actual formado por  $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$  y  $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$ , es tal que  $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$  está tan cerca del subespacio definido por  $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$  como sea posible. El problema se expresa como

$$\min_{\mathbf{x}} \min_{\substack{\|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \|\mathbf{A} + \delta\mathbf{A} \mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}]\|_2 \quad (3.23)$$

cuya solución es la misma que en el caso *min-max*

$$\hat{\mathbf{x}} = \left[ \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \hat{\lambda} \mathbf{I} \right]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (3.24)$$

salvo que el parámetro  $\hat{\lambda}$  es de *desregularización*, es decir,  $\hat{\lambda} < 0$  y además de signo opuesto al parámetro de regularización del problema *min-max*

$$\hat{\lambda} = -\eta_A \frac{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2}. \quad (3.25)$$

En este caso no se busca el *peor escenario* como en el *min-max* sino el *mejor* o más optimista. Así que la solución consiste en buscar el vector  $\hat{\mathbf{x}}$  cuyo mínimo residuo  $J$ , es el menor posible. En la figura 3.2 la solución sería  $\mathbf{x}_1$ .

<sup>6</sup>También llamado en inglés *Bounded Errors-in-Variables*.

Llamando  $\hat{\mathbf{x}}_{min-min}$  a la solución obtenida del problema *min-min* y  $\hat{\mathbf{x}}_{min-max}$  a la solución obtenida del problema *min-max* resulta que la solución al problema de mínimos cuadrados puro ( $\hat{\mathbf{x}}_{LS}$ ) se encuentra entre ambas soluciones

$$\|\hat{\mathbf{x}}_{min-max}\|_2 \leq \|\hat{\mathbf{x}}_{LS}\|_2 \leq \|\hat{\mathbf{x}}_{min-min}\|_2. \quad (3.26)$$

La interpretación geométrica es similar a la del problema *min-max* (ver figura 3.3), pero en este caso se busca la mínima distancia entre el disco alrededor de  $\mathbf{b}$  y el cono, ubicando por tanto la solución sobre la arista superior del cono. En caso de que el disco centrado en  $\mathbf{b}$  y el cono tuvieran puntos en común, se plantearía la versión *degenerada* del *min-min*.

### 3.3 Fundamentos de la técnica BDU.

La técnica BDU (*Bounded Data Uncertainties*) consiste como se vio anteriormente en la resolución de un problema de optimización *min-max* usado para estructurar la incertidumbre. Es una técnica usada principalmente en ámbitos como la identificación o filtrado y restauración de imágenes, pero muy poco usada en control (destacar el caso del *linear quadratic regulator* (LQR)). En este apartado se profundiza en el planteamiento y la solución que proporciona dicha técnica.

#### 3.3.1 Planteamiento del problema.

El problema *Bounded Data Uncertainties* (BDU) [Chandrasekaran *et al.* 1997], [Chandrasekaran *et al.* 1998], [Sayed *et al.* 1998], [Sayed y Nascimento 1999], [Nascimento y Sayed 1999] también llamado genéricamente *min-max* o *Robust Least Squares* (RLS) [Ghaoui y Lebrete 1997] se propuso y se resolvió, mediante técnicas de la **ecuación secular** en [Chandrasekaran *et al.* 1998]. Dicho problema trata de encontrar una solución  $\hat{\mathbf{x}}$  con las *mejores* prestaciones en el *peor* escenario posible dentro de una región acotada. Matemáticamente el problema se escribe como

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\substack{\|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \|\mathbf{A} + \delta\mathbf{A} \mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}]\|_2 \quad (3.27)$$

donde  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  sería el *modelo nominal* y  $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$  sería el *modelo real perturbado*, el cual no puede ser conocido, pues no se conoce ni  $\delta\mathbf{A}$  ni  $\delta\mathbf{b}$ , aunque sí una cota superior de éstas  $\eta_A$  y  $\eta_b$

$$\|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A, \quad (3.28)$$

$$\|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b. \quad (3.29)$$

### 3.3.2 El límite para la incertidumbre.

Partiendo de la interpretación geométrica en 2 dimensiones de la figura 3.3, donde se supone que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{b}$  son vectores columna de dimensión 2 (para facilitar la exposición de la solución), se va a formular la condición que se ha de cumplir para que la solución sea no nula  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

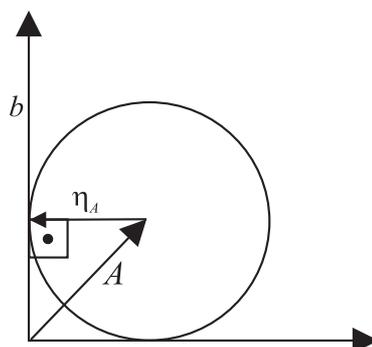


Figura 3.5: Interpretación geométrica para que exista solución distinta de cero.

Así, en la figura 3.5 se observa cómo la proyección de  $\mathbf{b}$  sobre la arista inferior (que se comentó en la explicación de la figura 3.3) será distinta de cero siempre y cuando  $\mathbf{b}$  no sea ortogonal a dicha arista. Esto impone una condición en el límite de la incertidumbre  $\eta_A$ . De hecho, solamente si  $\eta_A$  es muy grande puede darse el caso en el que la arista y  $\mathbf{b}$  sean ortogonales. Geométricamente, esta situación se daría cuando el disco centrado en  $\mathbf{A}$  tuviera un radio  $\frac{\|\mathbf{A}^T \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}$  (justamente la norma de la proyección del vector  $\mathbf{A}$  sobre  $\mathbf{b}$ , como se muestra en la figura 3.5). Por lo tanto, el mayor valor que puede alcanzar el límite en la incertidumbre para tener una solución  $\hat{\mathbf{x}}$  distinta de cero es

$$\eta_A < \frac{\|\mathbf{A}^T \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}. \quad (3.30)$$

De hecho, el conjunto de posibles incertidumbres  $\|\delta \mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A$  contiene una perturbación  $\overline{\delta \mathbf{A}}$  tal que  $[\mathbf{A} + \overline{\delta \mathbf{A}}]^T \mathbf{b} = \mathbf{0}$  si y solo si

$$\eta_A \geq \frac{\|\mathbf{A}^T \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}. \quad (3.31)$$

**Demostración:** Se asume que existe un  $\overline{\delta \mathbf{A}}$  tal que  $[\mathbf{A} + \overline{\delta \mathbf{A}}]^T \mathbf{b} = \mathbf{0}$ . Entonces  $\overline{\delta \mathbf{A}}^T \mathbf{b} = -\mathbf{A}^T \mathbf{b}$  y por tanto

$$\|\mathbf{A}^T \mathbf{b}\|_2 = \|\overline{\delta \mathbf{A}}^T \mathbf{b}\|_2 \leq \|\overline{\delta \mathbf{A}}^T\|_2 \|\mathbf{b}\|_2. \quad (3.32)$$

Ello implica que

$$\|\overline{\delta\mathbf{A}^T}\|_2 \geq \frac{\|\mathbf{A}^T\mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} \quad (3.33)$$

y por tanto

$$\eta_A \geq \|\overline{\delta\mathbf{A}^T}\|_2 \geq \frac{\|\mathbf{A}^T\mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}. \quad (3.34)$$

De esta forma, si el conjunto de incertidumbres es lo suficientemente grande como para incluir una matriz  $[\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}]$  que sea ortogonal a  $\mathbf{b}$  entonces la única solución es  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ . ■

### 3.3.3 Reducción del problema *min-max* a un problema de minimización.

Suponiendo que se cumple la **condición de ortogonalidad** y que por tanto el límite establecido para la incertidumbre cumple (3.30), el primer paso consiste en reducir el problema *min-max* a un problema clásico de minimización. Partiendo de nuevo del índice inicial

$$\|[\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}]\mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}]\|_2 = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b} + \delta\mathbf{Ax} - \delta\mathbf{b}\|_2 \quad (3.35)$$

se puede acotar según <sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}]\mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}]\|_2 &\leq \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 + \|\delta\mathbf{Ax}\|_2 + \|-\delta\mathbf{b}\|_2 \\ &\leq \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\mathbf{x}\|_2 + \eta_b. \end{aligned} \quad (3.36)$$

El residuo (3.36) ofrece una cota superior para  $\|[\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}]\mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}]\|_2$ . A continuación se demuestra que este límite superior es alcanzable, es decir, que existen

$$\hat{\delta\mathbf{A}} : \|\hat{\delta\mathbf{A}}\|_2 \leq \eta_A, \quad (3.37)$$

$$\hat{\delta\mathbf{b}} : \|\hat{\delta\mathbf{b}}\|_2 \leq \eta_b, \quad (3.38)$$

tales que

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{A} + \hat{\delta\mathbf{A}}]\mathbf{x} - [\mathbf{b} + \hat{\delta\mathbf{b}}]\|_2 &= \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 + \|\hat{\delta\mathbf{A}}\mathbf{x}\|_2 + \|-\hat{\delta\mathbf{b}}\|_2 \\ &= \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\mathbf{x}\|_2 + \eta_b. \end{aligned} \quad (3.39)$$

---

<sup>7</sup>La desigualdad triangular es una propiedad de las normas, que se expresa como  $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_2 + \|\mathbf{B}\|_2$ .

***Demostración:*** La igualdad anterior se producirá siempre que los vectores  $[\mathbf{Ax} - \mathbf{b}]$ ,  $\hat{\delta}\mathbf{Ax}$ ,  $-\hat{\delta}\mathbf{b}$  sean colineales (apunten en la misma dirección) y tengan máxima norma. Es decir que sean linealmente dependientes

$$\hat{\delta}\mathbf{Ax} = \alpha_1[\mathbf{Ax} - \mathbf{b}], \quad (3.40)$$

$$-\hat{\delta}\mathbf{b} = \alpha_2[\mathbf{Ax} - \mathbf{b}], \quad (3.41)$$

para  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ , y que

$$\|\hat{\delta}\mathbf{Ax}\|_2 = \eta_A \|\mathbf{x}\|_2, \quad (3.42)$$

$$\|-\hat{\delta}\mathbf{b}\|_2 = \eta_b. \quad (3.43)$$

Para que se den ambas condiciones se debe cumplir

$$\alpha_1 = \eta_A \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2}, \quad (3.44)$$

$$\alpha_2 = \eta_b \frac{1}{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2}. \quad (3.45)$$

Es decir, el conjunto  $\|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A$  contiene una perturbación  $\hat{\delta}\mathbf{A}$  que satisface (siempre y cuando  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 \neq 0$ , es decir que  $\mathbf{b} \notin \mathcal{R}(\mathbf{A})$ )

$$\hat{\delta}\mathbf{Ax} = \eta_A \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2} [\mathbf{Ax} - \mathbf{b}]. \quad (3.46)$$

Y el conjunto  $\|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b$  contiene una perturbación  $\hat{\delta}\mathbf{b}$  que satisface

$$\hat{\delta}\mathbf{b} = -\eta_b \frac{1}{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2} [\mathbf{Ax} - \mathbf{b}]. \quad (3.47)$$

■

Por lo tanto para cualquier  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , se cumple que

$$\begin{aligned} \max_{\substack{\|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \|\mathbf{[A} + \delta\mathbf{A]x} - [\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}]\|_2 &= \|\mathbf{[A} + \hat{\delta}\mathbf{A]x} - [\mathbf{b} + \hat{\delta}\mathbf{b}]\|_2 \\ &= \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 + \|\hat{\delta}\mathbf{Ax}\|_2 + \|-\hat{\delta}\mathbf{b}\|_2 \\ &= \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\mathbf{x}\|_2 + \eta_b \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde

$$\hat{\delta}\mathbf{Ax} = \eta_A \frac{[\mathbf{Ax} - \mathbf{b}]\mathbf{x}^T}{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2}, \quad (3.49)$$

$$\hat{\delta}\mathbf{b} = -\eta_b \frac{[\mathbf{Ax} - \mathbf{b}]}{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2}. \quad (3.50)$$

De todo lo anterior, se establece el siguiente resultado: *El problema min-max con restricciones establecido en la ecuación (3.27), es equivalente al siguiente problema de minimización sin restricciones*

$$\min_{\mathbf{x}} [\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\mathbf{x}\|_2 + \eta_b]. \quad (3.51)$$

Una vez calculado  $\mathbf{x}$ , se puede conocer  $\hat{\delta}\mathbf{A}$  y  $\hat{\delta}\mathbf{b}$  para los que ha sido minimizado el índice.

### 3.3.4 Minimización del índice.

Para resolver el problema de minimización se plantea el índice siguiente

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\mathbf{x}\|_2 + \eta_b, \quad (3.52)$$

el cual es convexo y continuo en  $\mathbf{x}$ , aunque no diferenciable en todos los puntos. Considerando los casos para los que el índice  $J(\mathbf{x})$  es diferenciable ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ), el gradiente de  $J(\mathbf{x})$  existe y viene dado por

$$\begin{aligned} \nabla J(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2} \mathbf{A}^T [\mathbf{Ax} - \mathbf{b}] + \frac{\eta_A}{\|\mathbf{x}\|_2} \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2} \left[ \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{A}^T \mathbf{b} + \frac{\eta_A \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \mathbf{x} \right]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Si se define el número positivo  $\lambda$  como

$$\lambda = \frac{\eta_A \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \quad (3.54)$$

se tiene que

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2} [(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{b}]. \quad (3.55)$$

Y el mínimo viene dado por

$$\nabla J(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (3.56)$$

$$[\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}] \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (3.57)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (3.58)$$

Hay que hacer notar que el número positivo  $\lambda$  depende de  $\mathbf{x}$ , por lo que la solución al problema de minimización pasa por resolver el siguiente sistema de ecuaciones **no lineales**

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (3.59)$$

$$\lambda = \frac{\eta_A \|\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2}. \quad (3.60)$$

La aplicación entre las variables  $\mathbf{x}$  y  $\lambda$  es biyectiva. Dado un valor para  $\mathbf{x}$  se puede calcular el valor de  $\lambda$  correspondiente a través de la ecuación (3.60), y por el contrario, dado un  $\lambda$  se puede evaluar el vector  $\mathbf{x}$  correspondiente vía la ecuación (3.59). El parámetro  $\lambda$  se expresa como una ecuación **no lineal** que depende exclusivamente de  $(\lambda, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \eta_A)$ , destacando que no depende de  $\eta_b$ .

Definiendo la función  $F(\lambda)$ , **ecuación secular**, como

$$F(\lambda) = \frac{\eta_A \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} - \lambda \quad (3.61)$$

se demuestra que existe una única solución  $\hat{\lambda} > 0$  tal que  $F(\hat{\lambda}) = 0$ . Por lo tanto esta raíz puede ser calculada por cualquier método de localización de raíces tipo *bisección*.

### 3.3.5 Extensión del índice planteado.

Además del planteamiento del problema BDU mostrado anteriormente, existen otros planteamientos que pueden ser muy interesantes desde el punto de vista de la identificación y el control. Así se puede adoptar el índice que se emplea clásicamente en el diseño de diferentes estrategias de control, como son el LQR, LQG, *Control Predictivo*, donde se introduce en el índice un término adicional que penaliza el *esfuerzo de control* (en este caso la variable  $\mathbf{x}$ ). De nuevo, si se incorpora explícitamente un límite en el tamaño de las incertidumbres se puede plantear el siguiente problema

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta \mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} [\|\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}\| \mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}]\|_2^2 + \rho \|\mathbf{x}\|_2^2], \quad (3.62)$$

donde el parámetro  $\rho$  penaliza la variable  $\mathbf{x}$ . Se puede comprobar que en ausencia de incertidumbre ( $\delta \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ,  $\delta \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ), planteando el siguiente índice

$$\min_{\mathbf{x}} [\|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \rho \|\mathbf{x}\|_2^2] \quad (3.63)$$

se obtendría la solución

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \rho \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (3.64)$$

observándose que  $\rho$  sería el *parámetro de regularización del problema sin incertidumbre*. Evidentemente, al considerar la incertidumbre, y aplicar la técnica BDU, se obtendrá un *nuevo parámetro de regularización*  $\lambda$ , que sustituirá a  $\rho$  tal y como se muestra a continuación.

Así pues, volviendo de nuevo al índice (3.62), se trata de simplificarlo en un nuevo problema de minimización. Basándose en que

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} \max_{\substack{\|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \left[ \|\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}\mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}]\|_2^2 + \rho \|\mathbf{x}\|_2^2 \right] \\ &= \min_{\mathbf{x}} \left[ \rho \|\mathbf{x}\|_2^2 + \max_{\substack{\|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \left[ \|\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}\mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}]\|_2^2 \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

A partir de la acotación (3.36) se puede expresar de la siguiente forma, comprobando que la cota superior es alcanzable

$$\min_{\mathbf{x}} \left[ \rho \|\mathbf{x}\|_2^2 + \max_{\substack{\|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \left[ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\mathbf{x}\|_2 + \eta_b \right]^2 \right]. \quad (3.66)$$

**Demostración:** *En ese caso, la igualdad dada por*

$$\|\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}\mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}]\|_2^2 = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\mathbf{x}\|_2 + \eta_b)^2 \quad (3.67)$$

*se cumplirá siempre y cuando los vectores  $[\mathbf{Ax} - \mathbf{b}]$ ,  $\delta\mathbf{Ax}$  y  $-\delta\mathbf{b}$  sean colineales (apunten en la misma dirección) y  $\delta\mathbf{A}$ ,  $\delta\mathbf{b}$  tengan su máxima norma. Así pues, se debe cumplir*

$$\delta\mathbf{Ax} = \alpha_1[\mathbf{Ax} - \mathbf{b}], \quad (3.68)$$

$$-\delta\mathbf{b} = \alpha_2[\mathbf{Ax} - \mathbf{b}], \quad (3.69)$$

$$\|\delta\mathbf{Ax}\|_2 = \eta_A \|\mathbf{x}\|_2, \quad (3.70)$$

$$\|-\delta\mathbf{b}\|_2 = \eta_b. \quad (3.71)$$

*Del mismo modo como se mostró en las secciones anteriores, esto sólo es posible si se eligen unas incertidumbres dadas por*

$$\hat{\delta}\mathbf{A} = \eta_A \frac{[\mathbf{Ax} - \mathbf{b}]\mathbf{x}^T}{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 \|\mathbf{x}\|_2}, \quad (3.72)$$

$$\hat{\delta}\mathbf{b} = -\eta_b \frac{[\mathbf{Ax} - \mathbf{b}]}{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2}. \quad (3.73)$$

■

Pudiendo concluir por tanto que

$$\begin{aligned}
 \max_{\substack{\|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \|\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}\mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}]\|_2^2 &= \|\mathbf{A} + \hat{\delta}\mathbf{A}\mathbf{x} - [\mathbf{b} + \hat{\delta}\mathbf{b}]\|_2^2 \\
 &= [\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 + \|\hat{\delta}\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 + \|\hat{\delta}\mathbf{b}\|_2]^2 \\
 &= [\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\mathbf{x}\|_2 + \eta_b]^2 \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

y el problema *min-max* original, es equivalente al siguiente problema de minimización

$$\min_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}} [\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\mathbf{x}\|_2 + \eta_b]^2 + \rho \|\mathbf{x}\|_2^2, \quad (3.75)$$

donde el índice de coste  $J(\mathbf{x})$  es una función convexa, y por tanto se puede obtener su mínimo global a través de su gradiente

$$\begin{aligned}
 \nabla J(\mathbf{x}) &= 2[\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\mathbf{x}\|_2 + \eta_b] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \frac{2\mathbf{A}^T[\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}]}{2\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2} + \frac{2\eta_A\mathbf{x}}{2\|\mathbf{x}\|_2} \right] + 2\rho \|\mathbf{x}\|_2 \frac{2\mathbf{x}}{2\|\mathbf{x}\|_2} \quad (3.76) \\
 &= 2 \left[ [\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\mathbf{x}\|_2 + \eta_b] \cdot \left[ \frac{\mathbf{A}^T[\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}]}{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2} + \frac{\eta_A\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \right] \right] + 2\rho\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Resolviendo  $\nabla J(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$  resulta

$$[\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\hat{\mathbf{x}}\|_2 + \eta_b] \cdot \left[ \frac{\mathbf{A}^T[\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}]}{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2} + \frac{\eta_A\hat{\mathbf{x}}}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2} \right] + \rho\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad (3.77)$$

$$\frac{\mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T\mathbf{b}}{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2} + \eta_A \frac{\hat{\mathbf{x}}}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2} + \frac{\rho\hat{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\hat{\mathbf{x}}\|_2 + \eta_b} = \mathbf{0}, \quad (3.78)$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T\mathbf{b} + \frac{\eta_A \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\rho \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\hat{\mathbf{x}}\|_2 + \eta_b} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (3.79)$$

Definiendo el número positivo  $\lambda$  como

$$\lambda = \frac{\eta_A \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2} + \frac{\rho \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\hat{\mathbf{x}}\|_2 + \eta_b} \quad (3.80)$$

se llega a

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T\mathbf{b} + \lambda\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad (3.81)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}, \quad (3.82)$$

donde como en el caso anterior, el número positivo  $\lambda$  depende de  $\mathbf{x}$ , por lo que la solución al problema de minimización pasa por resolver el siguiente sistema de ecuaciones **no lineales**

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (3.83)$$

$$\lambda = \frac{\eta_A \|\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2} + \frac{\rho \|\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\hat{\mathbf{x}}\|_2 + \eta_b}, \quad (3.84)$$

siendo (3.84) una ecuación no lineal que depende exclusivamente de  $\lambda$  y de los datos del problema  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \rho, \eta_A, \eta_b)$ . En este caso se observa que, a diferencia del problema original (3.27), ahora la solución sí depende de  $\eta_b$ . La solución  $\hat{\lambda}$  de la ecuación (3.84) puede ser calculada por un método iterativo de localización de raíces tipo bisección.

### 3.3.6 Planteamiento mediante la SVD.

Para encontrar el valor de  $\lambda$  de un modo *más sencillo y reduciendo posibles errores numéricos*, se pueden manipular las ecuaciones anteriores (tanto para el **índice original** (3.27) como para el **índice extendido** (3.62)), utilizando la *descomposición en valores singulares* (SVD) de la matriz  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T, \quad (3.85)$$

donde  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices unitarias y ortogonales, y

$$\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (3.86)$$

es la matriz diagonal de los valores singulares con

$$\bar{\sigma} \equiv \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \equiv \underline{\sigma}. \quad (3.87)$$

Además se establece la partición del vector  $\mathbf{U}^T \mathbf{b}$  en

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}^T \mathbf{b} \quad (3.88)$$

donde  $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$ .

• Por tanto, para el **índice original** (3.27) las ecuaciones (3.59) y (3.60) se transforman en

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{V}[\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{b}_1, \quad (3.89)$$

$$\lambda = \frac{\eta_A \sqrt{\lambda^2 \|\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{b}_1\|_2^2 + \|\mathbf{b}_2\|_2^2}}{\|\boldsymbol{\Sigma}[\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{b}_1\|_2}, \quad (3.90)$$

tal y como se demuestra a continuación.

***Demostración:*** La ecuación (3.59) se puede reescribir como

$$\hat{\mathbf{x}} = \left[ \left[ \mathbf{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \right]^T \left[ \mathbf{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \right] + \lambda\mathbf{I} \right]^{-1} \left[ \mathbf{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \right]^T \mathbf{b} \quad (3.91)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{V}[\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{b}_1 \quad (3.92)$$

y por tanto

$$\|\hat{\mathbf{x}}\|_2 = \|\boldsymbol{\Sigma}[\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{b}_1\|_2. \quad (3.93)$$

La expresión  $[\mathbf{Ax} - \mathbf{b}]$  también se puede reescribir como

$$[\mathbf{Ax} - \mathbf{b}] = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \mathbf{V}[\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{b}_1 - \mathbf{b} \quad (3.94)$$

$$= \mathbf{U} \left[ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \mathbf{V}[\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{b}_1 - \mathbf{U}^T \mathbf{b} \right] \quad (3.95)$$

$$= \mathbf{U} \left[ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{b}_1 - \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \right] \quad (3.96)$$

$$= \mathbf{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^2[\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_1 \\ -\mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

$$= \mathbf{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^2[\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{b}_1 - [\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda\mathbf{I}][\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{b}_1 \\ -\mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

$$= \mathbf{U} \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\Sigma}^2 - \boldsymbol{\Sigma}^2 - \lambda\mathbf{I}][\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{b}_1 \\ -\mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

$$= \mathbf{U} \begin{bmatrix} -\lambda[\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{b}_1 \\ -\mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

por lo que

$$\|[\mathbf{Ax} - \mathbf{b}]\|_2 = \sqrt{\lambda^2 \|\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{b}_1\|_2^2 + \|\mathbf{b}_2\|_2^2}. \quad (3.101)$$

■

Del mismo modo, se define la función  $F(\lambda)$ , **ecuación secular**, como

$$F(\lambda) = \frac{\eta_A \sqrt{\lambda^2 \|\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda \mathbf{I}\|^{-1} \mathbf{b}_1\|_2^2 + \|\mathbf{b}_2\|_2^2}}{\|\boldsymbol{\Sigma}[\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{b}_1\|_2} - \lambda. \quad (3.102)$$

• Y para el **índice extendido** (3.62) las ecuaciones no lineales (3.83) y (3.84) se transforman en las ecuaciones (3.103) y (3.104) mediante la descomposición SVD

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{V}[\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{b}_1, \quad (3.103)$$

$$\lambda = \frac{\eta_A \sqrt{\lambda^2 \|\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda \mathbf{I}\|^{-1} \mathbf{b}_1\|_2^2 + \|\mathbf{b}_2\|_2^2}}{\|\boldsymbol{\Sigma}[\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{b}_1\|_2} + \frac{\rho \sqrt{\lambda^2 \|\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda \mathbf{I}\|^{-1} \mathbf{b}_1\|_2^2 + \|\mathbf{b}_2\|_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 \|\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda \mathbf{I}\|^{-1} \mathbf{b}_1\|_2^2 + \|\mathbf{b}_2\|_2^2} + \eta_A \|\boldsymbol{\Sigma}[\boldsymbol{\Sigma}^2 + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{b}_1\|_2 + \eta_b}. \quad (3.104)$$

A partir de las cuales también se podría plantear la ecuación secular  $F(\lambda)$ . En ambos casos, la única solución  $\lambda > 0$  puede ser calculada por cualquier método de localización de raíces tipo *bisección*.

### 3.4 Conclusiones.

En este capítulo, tras mostrar los principales problemas del método de *mínimos cuadrados* aplicado a la estimación de parámetros, se ha presentado una comparativa de diferentes técnicas de regresión, clasificándolas en dos grupos, las que llevan a cabo una regularización positiva y las que desregularizan, interesando desde el punto de vista de control robusto el primer grupo, destacando de entre ellas la denominada BDU o *min-max*.

Frente a los problemas de sobrerregularización o subregularización que presentan la mayoría de métodos, debido a que eligen el parámetro de regularización de un modo heurístico, destaca la regularización semiautomática que lleva a cabo el BDU, ajustando dicho parámetro a partir de la cota de la incertidumbre y con el fin de que la solución sea menos sensible a errores en los datos.

Posteriormente, se ha mostrado detalladamente el desarrollo matemático y los resultados de la técnica BDU.

En el capítulo siguiente, se presentarán los resultados de la técnica BDU aplicados al diseño de controladores LQR (dado que presenta una dualidad al problema de estimación de parámetros), en donde la incertidumbre de los parámetros es tomada en cuenta explícitamente, lo que permite el diseño robusto del LQR.

# Capítulo 4

## El controlador LQR-BDU.

---

4.1	Introducción. . . . .	65
4.2	BDU en control. . . . .	65
4.2.1	El controlador LQR con horizonte de predicción finito. La ecuación recursiva de Riccati. . . . .	65
4.2.2	Sintonizado del LQR vía BDU. . . . .	67
4.2.3	Ejemplo 1. . . . .	72
4.3	Estabilidad del controlador LQR-BDU. . . . .	73
4.3.1	El controlador LQR-BDU con horizonte de predicción finito y restricción terminal. . . . .	73
4.3.2	Ejemplo 2. . . . .	76
4.3.3	Estabilidad del LQR-BDU con horizonte de predicción infinito. . . . .	78
4.3.4	Ejemplo 3. . . . .	83
4.3.5	Ejemplo 4. . . . .	84
4.4	LQR-BDU n-dimensional. . . . .	86
4.4.1	<i>Weighted</i> -BDU. . . . .	86
4.4.1.1	Introducción. . . . .	86
4.4.1.2	Aplicación al LQR. . . . .	89
4.4.2	El controlador LQR-BDU n-dimensional. . . . .	92
4.4.3	TPBVP ( <i>Two-Point Boundary Value Problem</i> ). . . . .	96
4.4.4	Ejemplo 5. . . . .	98
4.4.5	Ejemplo 6. . . . .	100
4.5	Conclusiones. . . . .	106



## 4.1 Introducción.

En este capítulo se muestra la aplicación de la técnica BDU al controlador LQR con el objetivo de mejorar su robustez, obteniendo así el controlador LQR-BDU.

En primer lugar se considerará un horizonte de predicción finito para *sistemas de una dimensión (un estado) y con una sola entrada* (sección 4.2), y posteriormente se abordará la estabilidad del LQR-BDU en la sección 4.3, bien añadiendo al LQR-BDU con horizonte de predicción finito una restricción terminal, o bien mediante el planteamiento del LQR-BDU con horizonte de predicción infinito, ambos para sistemas de una dimensión. Por otra parte, en la sección 4.4 se abordará la aplicación del LQR-BDU al caso de sistemas *n-dimensionales*, que no resulta trivial, ya que en ese caso no es posible obtener una ecuación explícita del parámetro  $\lambda$  y la solución presenta la forma de un problema TPBVP (*two-point boundary value problem*), el cual se resuelve iterativamente.

El contenido del capítulo se aplica sobre diferentes ejemplos, entre los que se destaca el diseño del LQR-BDU para el modelo del movimiento lateral de un avión. Para finalizar la última sección se dedicará a las conclusiones del presente capítulo.

## 4.2 BDU en control.

Como se comentó en el capítulo anterior, la técnica BDU ha sido usada principalmente en el ámbito de la estimación de parámetros. También existen contribuciones en áreas afines como el filtrado y restauración de imágenes [Sayed *et al.* 1998], pero escasamente desarrollada para control de procesos, destacando en este último caso la adaptación al controlador lineal cuadrático (LQR).

En este apartado se muestra el sintonizado del LQR vía BDU [Sayed *et al.* 1998] para **sistemas unidimensionales** y con **horizonte de predicción finito**, que sirve como punto de partida para la generalización de la técnica a otros tipos de diseño y dimensiones del problema.

### 4.2.1 El controlador LQR con horizonte de predicción finito. La ecuación recursiva de Riccati.

En el problema LQR el objetivo principal consiste en regular el estado de un modelo lineal en espacio de estados para que llegue a cero, mientras se penaliza el coste debido al esfuerzo de control.

Partiendo del siguiente modelo en espacio de estados de *dimensión uno* y con una sola entrada (es decir,  $f$  y  $g$  son **escalares**),

$$x_{i+1} = fx_i + gu_i \tag{4.1}$$

donde se considera el estado inicial  $x_0$ , y  $\{u_i\}$  indica la secuencia de control de entrada. En el problema LQR se busca la secuencia de control  $\{u_i\}$  que resuelva

$$\min_{\{u_i\}} \left[ px_{N+1}^2 + \sum_{i=0}^N [qx_i^2 + ru_i^2] \right] \quad (4.2)$$

siendo  $r > 0$ ,  $p > 0$  y  $q \geq 0$ . El coste de la función (4.2) penaliza el control  $\{u_i\}$ , la trayectoria del estado  $\{x_i\}$  y el estado final (en el instante  $N + 1$ ). Así, intuitivamente, el LQR trata de mantener la trayectoria del estado cercana a cero empleando la secuencia de control menos energética posible.

Este problema se puede resolver *recursivamente* dividiendo la función de coste en dos términos (**programación dinámica**)

$$\min_{\{u_0, \dots, u_{N-1}\}} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} [qx_i^2 + ru_i^2] + \min_{u_N} [px_{N+1}^2 + qx_N^2 + ru_N^2] \right] \quad (4.3)$$

donde sólo el segundo término, a través de la ecuación de estado (4.1) para  $x_{N+1}$ , depende de  $u_N$ . Minimizando para la variable  $u_N$ , se obtiene la siguiente ley de control

$$\hat{u}_N = -k_N \hat{x}_N, \quad (4.4)$$

$$k_N = \frac{f g p}{r + g^2 p}, \quad (4.5)$$

$$p_N = f^2 p - \frac{f^2 g^2 p^2}{r + g^2 p} + q = \frac{r f^2 p}{r + g^2 p} + q, \quad (4.6)$$

que indica que el control óptimo en el instante  $N$  es una realimentación del estado en el instante  $N$ , cuya ganancia  $k_N$  es función de los parámetros del modelo ( $f, g$ ), de  $r$  y del coste  $p$ .

**Demostración:** *El término a minimizar es el siguiente*

$$\min_{u_N} J = \min_{u_N} [px_{N+1}^2 + qx_N^2 + ru_N^2] \quad (4.7)$$

en el que se sustituye  $x_{N+1}$  según la ecuación en espacio de estados, y se elimina el término  $qx_N^2$  por no depender de  $u_N$ , resultando

$$\min_{u_N} [p [fx_N + gu_N]^2 + ru_N^2]. \quad (4.8)$$

Minimizando el índice respecto a  $u_N$

$$\frac{dJ}{du_N} = 2p [fx_N + gu_N] g + 2ru_N \quad (4.9)$$

e igualando  $\frac{dJ}{du_N} = 0$  se obtiene

$$\hat{u}_N = -\frac{fgp}{r + g^2p} \hat{x}_N. \quad (4.10)$$

Una vez calculada la acción de control óptima  $\hat{u}_N$  se puede sustituir en el índice (4.7) obteniendo así el coste  $p_N$  que penaliza al estado  $\hat{x}_N$

$$J = [p\hat{x}_{N+1}^2 + q\hat{x}_N^2 + r\hat{u}_N^2] = p_N\hat{x}_N^2. \quad (4.11)$$

Sustituyendo resulta

$$J = p \left[ f\hat{x}_N - \frac{fg^2p}{r + g^2p} \hat{x}_N \right]^2 + q\hat{x}_N^2 + r \left[ \frac{fgp}{r + g^2p} \hat{x}_N \right]^2 = p_N\hat{x}_N^2 \quad (4.12)$$

de donde se obtiene el valor de  $p_N$

$$p_N = \frac{rf^2p}{r + g^2p} + q. \quad (4.13)$$

■

De modo más general, para cada instante  $0 \leq i \leq N$  se obtiene la siguiente ley de control

$$\hat{u}_i = -k_i\hat{x}_i, \quad (4.14)$$

$$k_i = \frac{fgp_{i+1}}{r + g^2p_{i+1}}, \quad (4.15)$$

$$p_i = f^2p_{i+1} - \frac{f^2g^2p_{i+1}^2}{r + g^2p_{i+1}} + q = \frac{rf^2p_{i+1}}{r + g^2p_{i+1}} + q, \quad (4.16)$$

$$p_{N+1} = p, \quad (4.17)$$

donde  $p_i$  se propaga vía la *recursión de Riccati* con la condición límite  $p_{N+1} = p$ .

## 4.2.2 Sintonizado del LQR vía BDU.

En esta sección se plantea el control LQR de un **sistema unidimensional con incertidumbre** usando la técnica BDU. Frente a otros métodos más conservativos (como  $\mathcal{H}_\infty$ ), la técnica BDU, tal y como se comentó en el capítulo anterior, considera explícitamente una cota superior de la incertidumbre, de modo que en el diseño, ni se sobrevalore ni se infravalore el efecto de la incertidumbre. Para poder sintonizar el LQR (con horizonte de predicción finito) mediante BDU, se deberá plantear el LQR en formato BDU, tal y

como se muestra a continuación, obteniendo así una nueva *ecuación recursiva de Riccati modificada*.

Considerando un modelo con un solo estado y una sola entrada, e **incertidumbre paramétrica**  $\delta f$  y  $\delta g$

$$x_{i+1} = [f + \delta f]x_i + [g + \delta g]u_i \quad (4.18)$$

donde  $x_0$  representa el estado inicial y  $\{u_i\}$  indica la secuencia de control de entrada.

Conociendo una cota superior de la incertidumbre ( $\|\delta f\|_2 \leq \eta_f$ ,  $\|\delta g\|_2 \leq \eta_g$ ), se puede plantear el problema LQR como un problema *min-max* o BDU

$$\min_{\{u_i\}} \max_{\substack{\|\delta f\|_2 \leq \eta_f \\ \|\delta g\|_2 \leq \eta_g}} \left[ px_{N+1}^2 + \sum_{i=0}^N [qx_i^2 + ru_i^2] \right] \quad (4.19)$$

siendo  $r > 0$ ,  $p > 0$  y  $q \geq 0$ . El coste de la función (4.19) penaliza el control  $\{u_i\}$ , la trayectoria del estado  $\{x_i\}$  y el estado final (en el instante  $N + 1$ ).

Tal y como se hizo en la sección anterior, el problema se puede resolver *recursivamente* dividiendo la función de coste en dos términos

$$\min_{\{u_0, \dots, u_{N-1}\}} \left[ \max_{\substack{\|\delta f\|_2 \leq \eta_f \\ \|\delta g\|_2 \leq \eta_g}} \sum_{i=0}^{N-1} [qx_i^2 + ru_i^2] + \min_{u_N} \max_{\substack{\|\delta f\|_2 \leq \eta_f \\ \|\delta g\|_2 \leq \eta_g}} [px_{N+1}^2 + qx_N^2 + ru_N^2] \right] \quad (4.20)$$

donde sólo el segundo término, a través de la ecuación de estado (4.18) para  $x_{N+1}$ , depende de  $u_N$ . Considerando el segundo término, sustituyendo  $x_{N+1}$  resulta

$$\begin{aligned} \min_{u_N} \max_{\substack{\|\delta f\|_2 \leq \eta_f \\ \|\delta g\|_2 \leq \eta_g}} [px_{N+1}^2 + qx_N^2 + ru_N^2] = \\ \min_{u_N} \max_{\substack{\|\delta f\|_2 \leq \eta_f \\ \|\delta g\|_2 \leq \eta_g}} \left[ \|p^{\frac{1}{2}}[g + \delta g]u_N + p^{\frac{1}{2}}[f + \delta f]x_N\|_2^2 + r \|u_N\|_2^2 + q \|x_N\|_2^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Como  $x_N$  no depende de  $u_N$ , se puede eliminar el término  $q \|x_N\|_2^2$ , y haciendo unos cambios de variables, se puede presentar como un problema BDU del tipo (3.62) donde en este caso **A** y **b** son *escalares* a pesar de que se expresen como matrices o vectores (en negrita) para no cambiar la nomenclatura

$$\begin{aligned}
 & \min_{u_N} \max_{\substack{\|\delta f\|_2 \leq \eta_f \\ \|\delta g\|_2 \leq \eta_g}} \left[ \| p^{\frac{1}{2}}[g + \delta g]u_N + p^{\frac{1}{2}}[f + \delta f]x_N \|_2^2 + r \| u_N \|_2^2 + q \| x_N \|_2^2 \right] = \\
 & \min_{\mathbf{x}} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta \mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \left[ \| [\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}]\mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}] \|_2^2 + \rho \| \mathbf{x} \|_2^2 \right] \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

donde se ha sustituido

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} & \rightarrow p^{\frac{1}{2}}g, & \mathbf{b} & \rightarrow -p^{\frac{1}{2}}fx_N, \\
 \delta \mathbf{A} & \rightarrow p^{\frac{1}{2}}\delta g, & \delta \mathbf{b} & \rightarrow -p^{\frac{1}{2}}\delta fx_N, \\
 \eta_A & \rightarrow p^{\frac{1}{2}}\eta_g, & \eta_b & \rightarrow p^{\frac{1}{2}}\eta_f \| x_N \|_2 = p^{\frac{1}{2}}\eta_f |x_N|, \\
 \mathbf{x} & \rightarrow u_N, & \rho & \rightarrow r.
 \end{aligned}$$

Previamente, para poder aplicar BDU, se debe demostrar que la incertidumbre  $\eta_A$  sea menor de una determinada cota (condición (3.30))

$$\eta_A < \frac{\|\mathbf{A}^T \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}. \quad (4.23)$$

Tras deshacer el cambio de variables y siendo  $p^{\frac{1}{2}} \geq 0$ , resulta

$$\eta_A = p^{\frac{1}{2}}\eta_g < \frac{\| -p^{\frac{1}{2}}gp^{\frac{1}{2}}fx_N \|_2}{\| -p^{\frac{1}{2}}fx_N \|_2} = p^{\frac{1}{2}} \|g\|_2 = \frac{\|\mathbf{A}^T \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} \quad (4.24)$$

$$\eta_g < \|g\|_2 = |g|. \quad (4.25)$$

Minimizando el índice (4.22) para la variable  $\mathbf{x}$ , la solución BDU estaría formada por las ecuaciones (3.83) y (3.84)

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (4.26)$$

$$\lambda = \frac{\eta_A \| \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \|_2}{\| \hat{\mathbf{x}} \|_2} + \frac{\rho \| \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \|_2}{\| \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \|_2 + \eta_A \| \hat{\mathbf{x}} \|_2 + \eta_b}, \quad (4.27)$$

donde deshaciendo el cambio de variables anterior y sustituyendo  $\lambda \leftarrow \lambda_N$  se obtiene

$$\hat{u}_N = -\frac{fgp}{\lambda_N + g^2p} \hat{x}_N, \quad (4.28)$$

$$\lambda_N = \frac{1}{1 + \frac{\eta_f}{|f|}} \left[ \frac{r}{1 - \frac{\eta_g}{|g|}} - pg^2 \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right] \right]. \quad (4.29)$$

***Demostración:*** A partir del valor de  $\hat{u}_N$  de la ecuación (4.28) se obtienen las siguientes expresiones deshaciendo el cambio de variables

$$\| \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \|_2 = \left\| \frac{f \lambda_N p^{\frac{1}{2}}}{\lambda_N + g^2 p} \hat{x}_N \right\|_2 = \frac{\lambda_N p^{\frac{1}{2}}}{\lambda_N + g^2 p} |f \hat{x}_N|, \quad (4.30)$$

$$\| \hat{\mathbf{x}} \|_2 = \left\| \frac{f g p}{\lambda_N + g^2 p} \hat{x}_N \right\|_2 = \frac{p}{\lambda_N + g^2 p} |f g \hat{x}_N|, \quad (4.31)$$

las cuales se sustituyen en la ecuación de  $\lambda$  (4.27), sustituyendo también  $\eta_A$ ,  $\eta_b$  y  $\rho$ , obteniendo

$$\lambda_N = \frac{\eta_g \lambda_N}{|g|} + \frac{r \lambda_N p^{\frac{1}{2}} |f \hat{x}_N|}{\lambda_N p^{\frac{1}{2}} |f \hat{x}_N| + p^{\frac{1}{2}} \eta_g p |f g \hat{x}_N| + p^{\frac{1}{2}} \eta_f |\hat{x}_N| [\lambda_N + g^2 p]}, \quad (4.32)$$

$$1 - \frac{\eta_g}{|g|} = \frac{r}{\lambda_N + \eta_g p |g| + \frac{\eta_f}{|f|} [\lambda_N + g^2 p]}, \quad (4.33)$$

$$\lambda_N + \eta_g p |g| + \frac{\eta_f}{|f|} [\lambda_N + g^2 p] = \frac{r}{1 - \frac{\eta_g}{|g|}}, \quad (4.34)$$

$$\lambda_N = \frac{1}{1 + \frac{\eta_f}{|f|}} \left[ \frac{r}{1 - \frac{\eta_g}{|g|}} - p g^2 \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right] \right]. \quad (4.35)$$

■

Una vez calculada la acción de control óptima  $\hat{u}_N$  se puede sustituir en el índice de coste (4.21), obteniendo así el coste  $p_N$  que penaliza al estado  $\hat{x}_N$  (se observa que aunque se despreció el término  $q \|x_N\|_2^2$  al no afectar a la minimización, ahora sí se considera pues afecta al valor del coste). Así resulta

$$p \hat{x}_{N+1}^2 + q \hat{x}_N^2 + r \hat{u}_N^2 = p_N \hat{x}_N^2 \quad (4.36)$$

$$[\| \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \|_2 + \eta_A \| \hat{\mathbf{x}} \|_2 + \eta_b]^2 + q \hat{x}_N^2 + r \hat{u}_N^2 = p_N \hat{x}_N^2 \quad (4.37)$$

donde sustituyendo  $\| \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \|_2$  y  $\| \hat{\mathbf{x}} \|_2$  obtenidos anteriormente, y sustituyendo  $\eta_A$  y  $\eta_b$  se obtiene

$$\left[ \frac{\lambda_N p^{\frac{1}{2}} |f|}{\lambda_N + g^2 p} + \frac{p^{\frac{1}{2}} \eta_g p |f g|}{\lambda_N + g^2 p} + p^{\frac{1}{2}} \eta_f \right]^2 \hat{x}_N^2 + \frac{r f^2 g^2 p^2}{[\lambda_N + g^2 p]^2} \hat{x}_N^2 + q \hat{x}_N^2 = p_N \hat{x}_N^2, \quad (4.38)$$

$$p_N = pf^2 \left[ \frac{\lambda_N + \eta_g p |g|}{\lambda_N + g^2 p} + \frac{\eta_f}{|f|} \right]^2 + \frac{rf^2 g^2 p^2}{[\lambda_N + g^2 p]^2} + q. \quad (4.39)$$

Las ecuaciones (4.28), (4.29) y (4.39) constituyen la ley de control para el instante  $N$ . En esta ley aparece la *ecuación recursiva de Riccati* modificada por la técnica BDU. Del mismo modo, se podría desarrollar la ley de control para el resto de instantes  $0 \leq i \leq N$  obteniendo

$$\hat{u}_i = -k_i \hat{x}_i, \quad (4.40)$$

$$k_i = \frac{f g p_{i+1}}{\lambda_i + g^2 p_{i+1}}, \quad (4.41)$$

$$\lambda_i = \frac{1}{1 + \frac{\eta_f}{|f|}} \left[ \frac{r}{1 - \frac{\eta_g}{|g|}} - p_{i+1} g^2 \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right] \right], \quad (4.42)$$

$$p_i = p_{i+1} f^2 \left[ \frac{\lambda_i + \eta_g p_{i+1} |g|}{\lambda_i + g^2 p_{i+1}} + \frac{\eta_f}{|f|} \right]^2 + \frac{rf^2 g^2 p_{i+1}^2}{[\lambda_i + g^2 p_{i+1}]^2} + q, \quad (4.43)$$

$$p_{N+1} = p, \quad (4.44)$$

donde  $p_i$  se propaga mediante la *recursión de Riccati modificada vía BDU* con la condición límite  $p_{N+1} = p$ .

Es destacable que si  $\eta_f = \eta_g = 0$  las ecuaciones de (4.40) a (4.44) se transforman en las del LQR original, es decir de (4.14) a (4.17). Por otra parte, comparando las ecuaciones de  $k_i$  (4.15) y (4.41), se observa que la técnica BDU sustituye el parámetro  $r$  por  $\lambda_i$  y modifica el valor de  $p_{i+1}$  ya que éste viene ahora expresado por otra ecuación diferente (4.43).

La condición necesaria para que la solución BDU sea distinta de cero resultó ser la ecuación (4.25)

$$\eta_g < |g|. \quad (4.45)$$

Por tanto, si no se cumple dicha condición (es decir,  $\eta_g \geq |g|$ ), se considerará  $\lambda_i = \infty$  y el controlador resulta  $k_i = 0$ . Por otra parte, no siempre que se cumpla la condición (4.45) se asegura la **regularización positiva**  $\lambda_i > 0$ , en cuyo caso, si resulta  $\lambda_i < 0$ , entonces se considerará  $\lambda_i = 0$  (siendo ésta la solución que proporciona el control  $\mathcal{H}_\infty$ ) obteniéndose la ley de control

$$\hat{u}_i = -k_i \hat{x}_i, \quad (4.46)$$

$$k_i = \frac{f}{g}. \quad (4.47)$$

Analizando la ecuación (4.43) se produce  $\lambda_i < 0$  cuando no se cumple

$$\frac{r}{1 - \frac{\eta_g}{|g|}} > p_{i+1} g^2 \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right]. \quad (4.48)$$

Finalmente concluir que la ecuación (4.45) es necesaria para poder aplicar la técnica BDU y la ecuación (4.48) es necesaria si se desea que  $\lambda_i > 0$  para  $0 \leq i \leq N$ .

### 4.2.3 Ejemplo 1.

En este ejemplo se pretende mostrar, cómo el sintonizado mediante la técnica BDU del LQR puede mejorar la robustez del sistema, comparando el LQR sintonizado con BDU (que ofrece mejores prestaciones) frente al LQR (sin usar BDU), ambos formulados con **horizonte finito** [Ramos *et al.* 2004c]. Así pues, dado el siguiente sistema descrito por

$$x_{i+1} = [f + \delta f]x_i + [g + \delta g]u_i \quad (4.49)$$

donde  $\delta f$  y  $\delta g$  se acotan mediante  $\|\delta f\|_2 \leq \eta_f$  y  $\|\delta g\|_2 \leq \eta_g$  siendo

$$\begin{aligned} f &= 0.9, & \eta_f &= 0.2, \\ g &= 1, & \eta_g &= 0.27, \end{aligned}$$

cumpliendo así la *condición* necesaria para aplicar BDU ( $0.27 = \eta_g < |g| = 1$ ).

Por otra parte, los parámetros del LQR son

$$p = 1, \quad r = 1, \quad q = 0.04,$$

siendo  $x_0 = 10$  y  $N = 80$ .

La figura 4.1 muestra en línea discontinua la respuesta inestable en bucle cerrado del sistema ante la ley de control del LQR cuando se considera la incertidumbre  $\delta f = 0.2$  y  $\delta g = -0.27$  en el sistema perturbado (el polo en bucle cerrado una vez alcanzado el régimen permanente resulta 1.02). En cambio, cuando se sintoniza el LQR mediante la técnica BDU, se obtiene la respuesta estable (en línea continua) de la figura 4.1 (el polo en régimen permanente es de valor 0.84). Se destaca que en este ejemplo, el parámetro  $\lambda$  de regularización resulta positivo en todas las iteraciones, por lo que se han usado las ecuaciones de (4.40) a (4.44) para la ley de control.

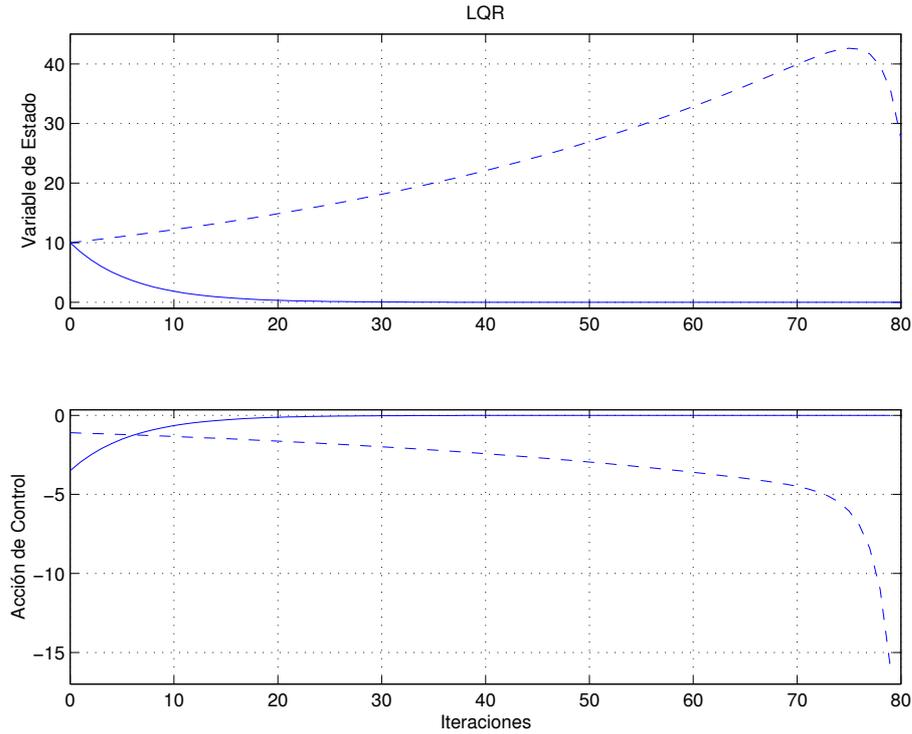


Figura 4.1: Respuesta ante el LQR con horizonte finito. Sintonizado sin BDU (línea discontinua) y con BDU (línea continua).

### 4.3 Estabilidad del controlador LQR-BDU.

#### 4.3.1 El controlador LQR-BDU con horizonte de predicción finito y restricción terminal.

Una forma de asegurar que el estado del sistema en bucle cerrado llegue a cero, y por tanto que la estabilidad del sistema quede asegurada consiste en plantear el LQR imponiendo dicha condición, es decir

$$\min_{\{u_i\}} \left[ px_{N+1}^2 + \sum_{i=0}^N [qx_i^2 + ru_i^2] \right] \quad (4.50)$$

siendo  $r > 0$  y  $q \geq 0$  sobre un intervalo de tiempo  $0 \leq i \leq N$ , partiendo del estado inicial  $x_0$  y añadiendo la restricción

$$p = \infty \quad \Leftrightarrow \quad x_{N+1} = 0. \quad (4.51)$$

Por tanto el problema se plantea como un problema de control con restricciones, cuya solución existe si  $x_0$  pertenece al conjunto de estados para los cuales es posible satisfacer la restricción [Salcedo 2005]. En caso contrario, no estaría asegurada la estabilidad.

Suponiendo que existe solución, la ley de control correspondería a las ecuaciones de (4.14) a (4.16), salvo que serían válidas sólo para los instantes  $0 \leq i \leq N - 1$

$$\hat{u}_i = -k_i \hat{x}_i, \quad (4.52)$$

$$k_i = \frac{f g p_{i+1}}{r + g^2 p_{i+1}}, \quad (4.53)$$

$$p_i = \frac{r f^2 p_{i+1}}{r + g^2 p_{i+1}} + q, \quad (4.54)$$

ya que para el instante  $N$  la ley se obtiene aplicando el límite  $p \rightarrow \infty$

$$\hat{u}_N = -k_N \hat{x}_N, \quad (4.55)$$

$$k_N = \frac{f}{g}, \quad (4.56)$$

$$p_N = \frac{r f^2}{g^2} + q. \quad (4.57)$$

Del mismo modo se puede plantear el problema sujeto a restricción terminal para el controlador LQR-BDU, obteniendo en este caso las ecuaciones de (4.40) a (4.43), válidas para  $0 \leq i \leq N - 1$

$$\hat{u}_i = -k_i \hat{x}_i, \quad (4.58)$$

$$k_i = \frac{f g p_{i+1}}{\lambda_i + g^2 p_{i+1}}, \quad (4.59)$$

$$\lambda_i = \frac{1}{1 + \frac{\eta_f}{|f|}} \left[ \frac{r}{1 - \frac{\eta_g}{|g|}} - p_{i+1} g^2 \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right] \right], \quad (4.60)$$

$$p_i = p_{i+1} f^2 \left[ \frac{\lambda_i + \eta_g p_{i+1} |g|}{\lambda_i + g^2 p_{i+1}} + \frac{\eta_f}{|f|} \right]^2 + \frac{r f^2 g^2 p_{i+1}^2}{[\lambda_i + g^2 p_{i+1}]^2} + q, \quad (4.61)$$

y siendo para el instante  $N$  las siguientes

$$\hat{u}_N = -k_N \hat{x}_N, \quad (4.62)$$

$$k_N = \frac{f \left[ 1 + \frac{\eta_f}{|f|} \right]}{g \left[ 1 - \frac{\eta_g}{|g|} \right]}, \quad (4.63)$$

$$p_N = \frac{r f^2 \left[ 1 + \frac{\eta_f}{|f|} \right]^2}{g^2 \left[ 1 - \frac{\eta_g}{|g|} \right]^2} + q. \quad (4.64)$$

***Demostración:*** Con el fin de simplificar la demostración, previamente se va a eliminar la dependencia de las variables  $k_i$  y  $p_i$  respecto de  $\lambda_i$  sustituyendo la ecuación de  $\lambda_i$  (4.60) en las ecuaciones de  $k_i$  (4.59) y de  $p_i$  (4.61) respectivamente. Así partiendo de la ecuación de  $p_i$  (4.61)

$$p_i = p_{i+1} f^2 \left[ \frac{\lambda_i + \eta_g p_{i+1} |g|}{\lambda_i + g^2 p_{i+1}} + \frac{\eta_f}{|f|} \right]^2 + \frac{r f^2 g^2 p_{i+1}^2}{[\lambda_i + g^2 p_{i+1}]^2} + q, \quad (4.65)$$

$$p_i = \frac{p_{i+1} f^2 \left[ \lambda_i \left[ 1 + \frac{\eta_f}{|f|} \right] + g^2 p_{i+1} \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right] \right]^2}{[\lambda_i + g^2 p_{i+1}]^2} + \frac{r f^2 g^2 p_{i+1}^2}{[\lambda_i + g^2 p_{i+1}]^2} + q, \quad (4.66)$$

$$p_i = \frac{p_{i+1} f^2 \left[ \lambda_i \left[ 1 + \frac{\eta_f}{|f|} \right] + g^2 p_{i+1} \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right] \right]^2 + r f^2 g^2 p_{i+1}^2}{[\lambda_i + g^2 p_{i+1}]^2} + q, \quad (4.67)$$

y sustituyendo  $\lambda_i$  por la ecuación (4.60)

$$p_i = \frac{p_{i+1} f^2 \left[ \left[ \frac{r}{1 - \frac{\eta_g}{|g|}} - p_{i+1} g^2 \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right] \right] + g^2 p_{i+1} \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right] \right]^2 + r f^2 g^2 p_{i+1}^2}{\left[ \frac{1}{1 + \frac{\eta_f}{|f|}} \left[ \frac{r}{1 - \frac{\eta_g}{|g|}} - p_{i+1} g^2 \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right] \right] + g^2 p_{i+1} \right]^2} + q, \quad (4.68)$$

$$p_i = \frac{p_{i+1} f^2 \left[ \frac{r}{1 - \frac{\eta_g}{|g|}} \right]^2 + r f^2 g^2 p_{i+1}^2}{\left[ \frac{1}{1 + \frac{\eta_f}{|f|}} \left[ \frac{r}{1 - \frac{\eta_g}{|g|}} - p_{i+1} g^2 \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right] \right] + g^2 p_{i+1} \right]^2} + q, \quad (4.69)$$

$$p_i = \frac{p_{i+1} f^2 \left[ \frac{r^2}{[1 - \frac{\eta_g}{|g|}]^2} + r g^2 p_{i+1} \right]}{\left[ \frac{r}{[1 + \frac{\eta_f}{|f|}][1 - \frac{\eta_g}{|g|}]} + p_{i+1} g^2 \frac{[1 - \frac{\eta_g}{|g|}]}{[1 + \frac{\eta_f}{|f|}]} \right]^2} + q, \quad (4.70)$$

$$p_i = \frac{p_{i+1} f^2 r \frac{[1 + \frac{\eta_f}{|f|}]}{[1 - \frac{\eta_g}{|g|}]} \left[ \frac{r}{[1 + \frac{\eta_f}{|f|}][1 - \frac{\eta_g}{|g|}]} + g^2 p_{i+1} \frac{[1 - \frac{\eta_g}{|g|}]}{[1 + \frac{\eta_f}{|f|}]} \right]}{\left[ \frac{r}{[1 + \frac{\eta_f}{|f|}][1 - \frac{\eta_g}{|g|}]} + p_{i+1} g^2 \frac{[1 - \frac{\eta_g}{|g|}]}{[1 + \frac{\eta_f}{|f|}]} \right]^2} + q, \quad (4.71)$$

$$p_i = \frac{p_{i+1} f^2 r \frac{[1 + \frac{\eta_f}{|f|}]}{[1 - \frac{\eta_g}{|g|}]}}{\frac{r}{[1 + \frac{\eta_f}{|f|}][1 - \frac{\eta_g}{|g|}]} + p_{i+1} g^2 \frac{[1 - \frac{\eta_g}{|g|}]}{[1 + \frac{\eta_f}{|f|}]}} + q, \quad (4.72)$$

$$p_i = \frac{p_{i+1} f^2 r \left[1 + \frac{\eta_f}{|f|}\right]^2}{r + p_{i+1} g^2 \left[1 - \frac{\eta_g}{|g|}\right]^2} + q. \quad (4.73)$$

Particularizando para  $i = N$  sabiendo que  $p_{N+1} = p = \infty$  se obtiene la ecuación (4.64)

$$p_N = \frac{r f^2 \left[1 + \frac{\eta_f}{|f|}\right]^2}{g^2 \left[1 - \frac{\eta_g}{|g|}\right]^2} + q. \quad (4.74)$$

Por otra parte, sustituyendo  $\lambda_i$  de la ecuación (4.60) en  $k_i$  (4.59) resulta

$$k_i = \frac{f g p_{i+1}}{\frac{1}{1 + \frac{\eta_f}{|f|}} \left[ \frac{r}{1 - \frac{\eta_g}{|g|}} - p_{i+1} g^2 \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right] \right] + g^2 p_{i+1}}, \quad (4.75)$$

donde particularizando para  $i = N$  sabiendo que  $p_{N+1} = p = \infty$  se obtiene la ecuación (4.63)

$$k_N = \frac{f g}{\frac{1}{1 + \frac{\eta_f}{|f|}} \left[ -g^2 \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right] \right] + g^2}, \quad (4.76)$$

$$k_N = \frac{f \left[1 + \frac{\eta_f}{|f|}\right]}{g \left[1 - \frac{\eta_g}{|g|}\right]}. \quad (4.77)$$

■

### 4.3.2 Ejemplo 2.

En este ejemplo se pretende mostrar, cómo la consideración de restricción terminal puede asegurar la estabilidad del sistema (siempre y cuando  $x_0$  pertenezca al conjunto de estados para los cuales es posible satisfacer dicha restricción) cuando el LQR se sintoniza mediante la técnica BDU, comparando el LQR-BDU formulado con restricción terminal y sin ella, ambos con **horizonte de predicción finito**. Así pues, dado el siguiente sistema discreto con la respectiva incertidumbre

$$x_{i+1} = [f + \delta f]x_i + [g + \delta g]u_i \quad (4.78)$$

donde  $\delta f$  y  $\delta g$  se acotan mediante  $\|\delta f\|_2 \leq \eta_f$  y  $\|\delta g\|_2 \leq \eta_g$  siendo

$$\begin{aligned} f &= 2.5, & \eta_f &= 0.125, \\ g &= 0.1, & \eta_g &= 0.005, \end{aligned}$$

cumpliendo así la *condición* necesaria para aplicar BDU ( $0.005 = \eta_g < |g| = 0.1$ ).

Por otra parte, los parámetros del LQR son

$$p = 1, \quad r = 10, \quad q = 1,$$

siendo el valor de  $p$  para el caso sin restricción terminal, ya que la restricción terminal considera  $p = \infty$ , y asumiendo  $x_0 = 1$  y  $N = 6$ .

Considerando la incertidumbre  $\delta f = 0.125$  y  $\delta g = -0.005$  en el sistema perturbado, se muestra por una parte la respuesta inestable en bucle cerrado del sistema ante la ley de control del LQR-BDU sin restricción terminal (ver figura 4.2 en línea discontinua), y por otra parte la respuesta estable en línea continua para el LQR-BDU con restricción terminal, asegurando que  $x_7 = 0$ .

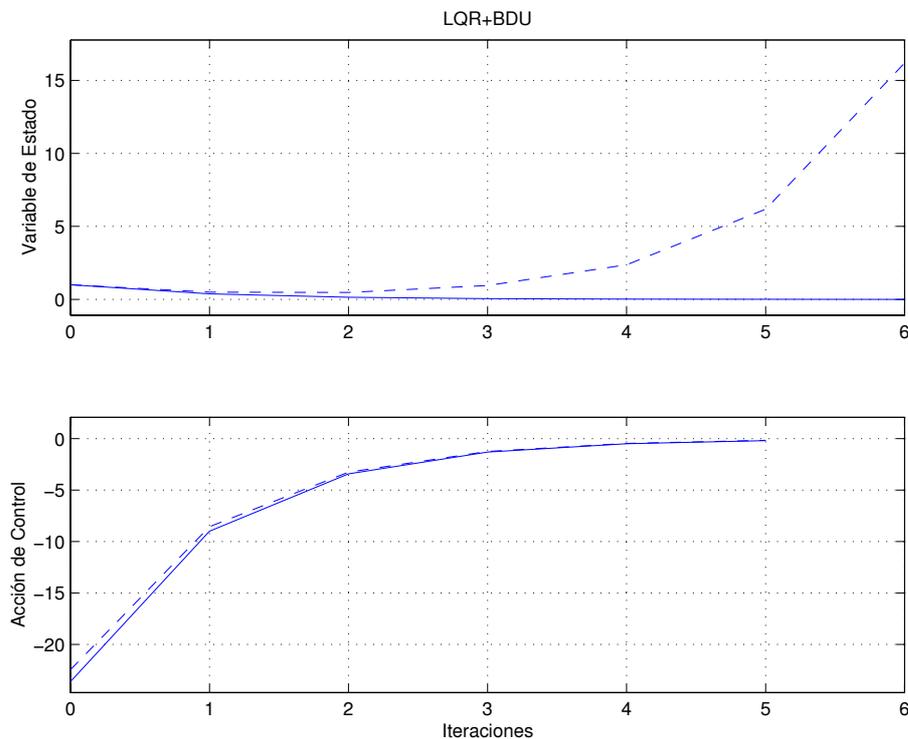


Figura 4.2: Respuesta ante el LQR-BDU sin restricción terminal (línea discontinua) y con restricción terminal (línea continua) para  $N = 6$ .

### 4.3.3 Estabilidad del LQR-BDU con horizonte de predicción infinito.

Se considera el siguiente modelo en espacio de estados de *dimensión uno y con una sola entrada* (es decir,  $f$  y  $g$  son escalares),

$$x_{i+1} = fx_i + gu_i \quad (4.79)$$

donde  $x_0$  representa el estado inicial y  $\{u_i\}$  indica la secuencia de control de entrada. En el problema LQR con horizonte de predicción finito se busca la secuencia de control  $\{u_i\}$  que resuelva

$$\min_{\{u_i\}} \left[ px_{N+1}^2 + \sum_{i=0}^N [qx_i^2 + ru_i^2] \right] \quad (4.80)$$

siendo  $r > 0$ ,  $p > 0$  y  $q \geq 0$ , sobre un intervalo de tiempo  $0 \leq i \leq N$ .

En ocasiones, si el horizonte  $N$  elegido es demasiado pequeño, el control con LQR puede resultar inestable. Por el contrario, en ciertas ocasiones, si se incrementa el horizonte, el sistema se estabiliza. Cuando el horizonte es demasiado grande, apenas hay diferencia con la formulación del LQR con *horizonte infinito*

$$\min_{\{u_i\}} \sum_{i=0}^{\infty} [qx_i^2 + ru_i^2]. \quad (4.81)$$

Cuando se formula la ley de control del LQR considerando horizonte infinito, queda asegurada la estabilidad del sistema, siempre y cuando se cumplan las siguientes condiciones (válidas para sistemas n-dimensionales, es decir, considerando  $f$ ,  $g$ ,  $q$  y  $r$  como las matrices  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$ , respectivamente)

- $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$  sea *controlable*, o al menos *estabilizable*,  $(\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}) \subset \mathbb{C}_S$ , es decir, que los polos del sistema en bucle cerrado estén dentro del círculo unidad, siendo  $\mathbf{K}$  la ley de control (la realimentación del estado),
- que  $(\mathbf{F}, \mathbf{T})$  sea *detectable* si la matriz  $\mathbf{Q}$  puede factorizarse de la forma  $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$ ,
- que  $\mathbf{R}$  sea definida positiva.

En el caso particular del sistema *unidimensional*, se cumplen las condiciones anteriores, por lo que, es posible plantear el índice del LQR con horizonte de predicción infinito y obtener una ley de control  $\hat{u}_i = -k\hat{x}_i, \forall i$ , donde la realimentación  $k$  es constante, tal y como muestra la *ecuación algebraica de Riccati*

$$\hat{u}_i = -k\hat{x}_i, \quad (4.82)$$

$$k = \frac{fg\hat{p}}{r + g^2\hat{p}}, \quad (4.83)$$

$$\hat{p} = \frac{rf^2\hat{p}}{r + g^2\hat{p}} + q. \quad (4.84)$$

Por otra parte, si se formula la ley de control del LQR vía BDU considerando horizonte infinito y un sistema con incertidumbre de dimensión uno y con una sola entrada, se puede demostrar que la estabilidad del sistema también está asegurada.

Al igual que en el LQR, se supone que  $u_i = -kx_i, \forall i$ , donde la realimentación  $k$  es constante, pero en este caso la *ecuación algebraica de Riccati* mostrada anteriormente se verá modificada. Para poder sintonizar el LQR (con horizonte de predicción infinito) mediante BDU, se deberá plantear el LQR en formato BDU, tal y como se muestra a continuación, obteniendo así la nueva *ecuación algebraica de Riccati modificada*.

Por tanto, considerando el siguiente modelo en espacio de estados de *dimensión uno y con una sola entrada*, con **incertidumbre paramétrica**  $\delta f$  y  $\delta g$

$$x_{i+1} = [f + \delta f]x_i + [g + \delta g]u_i \quad (4.85)$$

donde  $x_0$  representa el estado inicial y  $\{u_i\}$  indica la secuencia de control de entrada. Conociendo una cota superior de la incertidumbre ( $\|\delta f\|_2 \leq \eta_f, \|\delta g\|_2 \leq \eta_g$ ), se puede plantear el problema LQR como un problema *min-max* o BDU siendo  $r > 0$  y  $q \geq 0$ , para unos valores dados de  $\{q, r\}$

$$\min_{\{u_i\}} \max_{\substack{\|\delta f\|_2 \leq \eta_f \\ \|\delta g\|_2 \leq \eta_g}} J = \min_{\{u_i\}} \max_{\substack{\|\delta f\|_2 \leq \eta_f \\ \|\delta g\|_2 \leq \eta_g}} \sum_{i=0}^{\infty} [qx_i^2 + ru_i^2]. \quad (4.86)$$

El índice se puede descomponer en dos términos

$$J = J_1 + J_2 = \sum_{i=0}^{\infty} qx_i^2 + \sum_{i=0}^{\infty} ru_i^2. \quad (4.87)$$

Por otra parte, puesto que se supone que la realimentación del estado va a ser constante  $u_i = -kx_i$ , la evolución del estado en bucle cerrado sigue la siguiente trayectoria, partiendo del estado inicial  $x_0$

$$x_i = [[f + \delta f] - [g + \delta g]k]^i x_0, \quad (4.88)$$

por lo que sustituyendo resulta la siguiente expresión del índice

$$J = J_1 + J_2 = \sum_{i=0}^{\infty} q[[f + \delta f] - [g + \delta g]k]^{2i} x_0^2 + \sum_{i=0}^{\infty} rk^2[[f + \delta f] - [g + \delta g]k]^{2i} x_0^2 \quad (4.89)$$

donde los sumatorios se pueden expresar mediante las siguientes sucesiones

$$\sum_{i=0}^{\infty} q[[f + \delta f] - [g + \delta g]k]^{2i} = \lim_{i \rightarrow \infty} L_{i+1}, \quad (4.90)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} rk^2[[f + \delta f] - [g + \delta g]k]^{2i} = \lim_{i \rightarrow \infty} L'_{i+1}, \quad (4.91)$$

siendo

$$\begin{aligned} L_0 &= q, \\ L_1 &= [[f + \delta f] - [g + \delta g]k]^2 L_0 + q, \\ &\vdots \\ L_{i+1} &= [[f + \delta f] - [g + \delta g]k]^2 L_i + q, \\ \\ L'_0 &= rk^2, \\ L'_1 &= [[f + \delta f] - [g + \delta g]k]^2 L'_0 + rk^2, \\ &\vdots \\ L'_{i+1} &= [[f + \delta f] - [g + \delta g]k]^2 L'_i + rk^2. \end{aligned}$$

Para que el sistema en bucle cerrado sea estable y, por tanto, el índice  $J$  presente un valor limitado, las series anteriores deben converger, resultando en ese caso

$$\lim_{i \rightarrow \infty} L_{i+1} = L_{\infty} = [[f + \delta f] - [g + \delta g]k]^2 L_{\infty} + q, \quad (4.92)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} L'_{i+1} = L'_{\infty} = [[f + \delta f] - [g + \delta g]k]^2 L'_{\infty} + rk^2, \quad (4.93)$$

y por tanto se puede expresar el índice así

$$J = [L_{\infty} + L'_{\infty}] x_0^2 = \hat{p} x_0^2, \quad (4.94)$$

$$J = [[[f + \delta f] - [g + \delta g]k]^2 L_{\infty} + q + [[f + \delta f] - [g + \delta g]k]^2 L'_{\infty} + rk^2] x_0^2, \quad (4.95)$$

de donde se obtiene la ecuación algebraica de Riccati

$$\hat{p} = [[f + \delta f] - [g + \delta g]k]^2 \hat{p} + q + rk^2 \quad (4.96)$$

la cual depende de la realimentación  $k$ . Para eliminar dicha dependencia, se debe calcular el valor de  $k$ , minimizando el índice respecto a  $u_0$ . Así pues, siendo el índice

$$J = [[f + \delta f] - [g + \delta g]k]^2 \hat{p}x_0^2 + qx_0^2 + rk^2x_0^2, \quad (4.97)$$

se elimina la dependencia de  $k$  sabiendo que  $u_0 = -kx_0$ , por lo que

$$\begin{aligned} J &= [f + \delta f]^2 \hat{p}x_0^2 - 2[f + \delta f][g + \delta g]\hat{p}x_0kx_0 + [g + \delta g]^2 \hat{p}k^2x_0^2 + rk^2x_0^2 + qx_0^2 \\ &= [f + \delta f]^2 \hat{p}x_0^2 + 2[f + \delta f][g + \delta g]\hat{p}x_0u_0 + [g + \delta g]^2 \hat{p}u_0^2 + ru_0^2 + qx_0^2. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Para obtener  $u_0$  se debe resolver el siguiente problema *min-max*

$$\begin{aligned} &\min_{\{u_0\}} \max_{\substack{\|\delta f\|_2 \leq \eta_f \\ \|\delta g\|_2 \leq \eta_g}} [f + \delta f]^2 \hat{p}x_0^2 - 2[f + \delta f][g + \delta g]\hat{p}x_0kx_0 + [g + \delta g]^2 \hat{p}k^2x_0^2 + rk^2x_0^2 + qx_0^2 \\ &= \min_{\{u_0\}} \max_{\substack{\|\delta f\|_2 \leq \eta_f \\ \|\delta g\|_2 \leq \eta_g}} [f + \delta f]^2 \hat{p}x_0^2 + 2[f + \delta f][g + \delta g]\hat{p}x_0u_0 + [g + \delta g]^2 \hat{p}u_0^2 + ru_0^2 + qx_0^2 \\ &= \min_{\{u_0\}} \max_{\substack{\|\delta f\|_2 \leq \eta_f \\ \|\delta g\|_2 \leq \eta_g}} \left[ [f + \delta f]\hat{p}^{\frac{1}{2}}x_0 + [g + \delta g]^2 \hat{p}^{\frac{1}{2}}u_0 \right]^2 + ru_0^2 + qx_0^2. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Como  $x_0$  no depende de  $u_0$  no afecta al resultado de la minimización y se puede eliminar el término  $q \|x_0\|_2^2$ .

Haciendo unos cambios de variables, se puede presentar como un problema BDU [Ramos *et al.* 2004b], [Ramos *et al.* 2005] del tipo (3.62)

$$\begin{aligned} &\min_{u_0} \max_{\substack{\|\delta f\|_2 \leq \eta_f \\ \|\delta g\|_2 \leq \eta_g}} \left[ \|\hat{p}^{\frac{1}{2}}[g + \delta g]u_0 + \hat{p}^{\frac{1}{2}}[f + \delta f]x_0\|_2^2 + r \|u_0\|_2^2 + q \|x_0\|_2^2 \right] = \\ &\min_{\mathbf{x}} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta \mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \left[ \|\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}\mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}]\|_2^2 + \rho \|\mathbf{x}\|_2^2 \right] \end{aligned} \quad (4.100)$$

donde se ha sustituido

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &\rightarrow \hat{p}^{\frac{1}{2}}g, & \mathbf{b} &\rightarrow -\hat{p}^{\frac{1}{2}}fx_0, \\
 \delta\mathbf{A} &\rightarrow \hat{p}^{\frac{1}{2}}\delta g, & \delta\mathbf{b} &\rightarrow -\hat{p}^{\frac{1}{2}}\delta fx_0, \\
 \eta_A &\rightarrow \hat{p}^{\frac{1}{2}}\eta_g, & \eta_b &\rightarrow \hat{p}^{\frac{1}{2}}\eta_f \|x_0\|_2 = \hat{p}^{\frac{1}{2}}\eta_f |x_0|, \\
 \mathbf{x} &\rightarrow u_0, & \rho &\rightarrow r.
 \end{aligned}$$

Minimizando para la variable  $\mathbf{x}$ , la solución BDU estaría formada por las ecuaciones (3.83) y (3.84) del capítulo 3

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (4.101)$$

$$\lambda = \frac{\eta_A \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2} + \frac{\rho \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\hat{\mathbf{x}}\|_2 + \eta_b}, \quad (4.102)$$

donde deshaciendo el cambio de variables anterior se obtiene

$$\hat{u}_0 = -kx_0 = -\frac{fg\hat{p}}{\lambda + g^2\hat{p}}x_0. \quad (4.103)$$

Por tanto, existe la realimentación  $k$  que se consideró constante para todo el horizonte de  $0 \leq i \leq N$ , y si  $k$  es constante, también es constante  $\hat{p}$  obtenida mediante la ecuación (4.96) y  $\lambda$  también. Así pues, si se calculara el resto de acciones de control  $\{u_1, \dots, u_N\}$ , se obtendría la misma solución para la ley de control

$$\hat{u}_i = -k\hat{x}_i, \quad (4.104)$$

$$k = \frac{fg\hat{p}}{\lambda + g^2\hat{p}}, \quad (4.105)$$

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{\eta_f}{|f|}} \left[ \frac{r}{1 - \frac{\eta_g}{|g|}} - \hat{p}g^2 \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right] \right], \quad (4.106)$$

$$\hat{p} = \hat{p}f^2 \left[ \frac{\lambda + \eta_g\hat{p}|g|}{\lambda + g^2\hat{p}} + \frac{\eta_f}{|f|} \right]^2 + \frac{rf^2g^2\hat{p}^2}{[\lambda + g^2\hat{p}]^2} + q. \quad (4.107)$$

Al igual que con horizonte finito, se destaca que el valor de  $\lambda$  debe ser un número positivo, en caso contrario se considerará  $\lambda = 0$ . En este sentido, de (4.106) se extrae que se debería cumplir

$$\frac{r}{1 - \frac{\eta_g}{|g|}} > \hat{p}g^2 \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right]. \quad (4.108)$$

Finalmente destacar que la ecuación (4.45)  $\eta_g < |g|$  también es necesaria para poder aplicar la técnica BDU y la ecuación (4.108) es necesaria si se desea que  $\lambda > 0$ .

### 4.3.4 Ejemplo 3.

En este ejemplo se pretende mostrar, cómo la consideración de horizonte de predicción infinito también asegura la estabilidad del sistema cuando el LQR se sintoniza mediante la técnica BDU, comparando el LQR-BDU formulado con **horizonte de predicción infinito** (que asegura la estabilidad) frente al LQR-BDU formulado con **horizonte finito**. Así pues, dado el siguiente sistema discreto con la respectiva incertidumbre

$$x_{i+1} = [f + \delta f]x_i + [g + \delta g]u_i \quad (4.109)$$

donde  $\delta f$  y  $\delta g$  se acotan mediante  $\|\delta f\|_2 \leq \eta_f$  y  $\|\delta g\|_2 \leq \eta_g$  siendo

$$\begin{aligned} f &= 2.5, & \eta_f &= 0.2, \\ g &= 0.1, & \eta_g &= 0.03, \end{aligned}$$

cumpliendo así la *condición* necesaria para aplicar BDU ( $0.03 = \eta_g < |g| = 0.1$ ).

Por otra parte, los parámetros del LQR son

$$p = 1, \quad r = 10, \quad q = 1,$$

siendo el valor de  $p$  para el caso de horizonte finito y asumiendo  $x_0 = 1$  y  $N = 15$  (éste último para el caso de horizonte finito).

Considerando la incertidumbre  $\delta f = 0.2$  y  $\delta g = -0.03$  en el sistema perturbado, se muestra por una parte la respuesta inestable en bucle cerrado del sistema ante la ley de control del LQR-BDU con horizonte finito (ver figura 4.3), y por otra parte la respuesta estable de la figura 4.4) para el LQR-BDU con horizonte infinito.

Se destaca que en este caso algunos valores de  $\lambda_i$  resultan negativos, ya que no se cumple para  $0 \leq i \leq N$  la condición (4.48)

$$\frac{r}{1 - \frac{\eta_g}{|g|}} > p_{i+1} g^2 \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right] \quad (4.110)$$

y por tanto se ha considerado  $\lambda_i = 0$  para esos casos en particular. Para el caso de horizonte infinito el valor de  $\lambda$  resulta también negativo, ya que no se cumple la condición (4.108) obtenida anteriormente

$$\frac{r}{1 - \frac{\eta_g}{|g|}} > \hat{p} g^2 \left[ \frac{\eta_f}{|f|} + \frac{\eta_g}{|g|} \right]. \quad (4.111)$$

Al considerarse  $\lambda = 0$ , la ley de control corresponde a la que se obtendría mediante un diseño  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $k = f/g = 25$ . Para este controlador ( $k = 25$ ), se asegura la **estabilidad** ya que el polo del sistema en bucle cerrado es de valor 0.95.

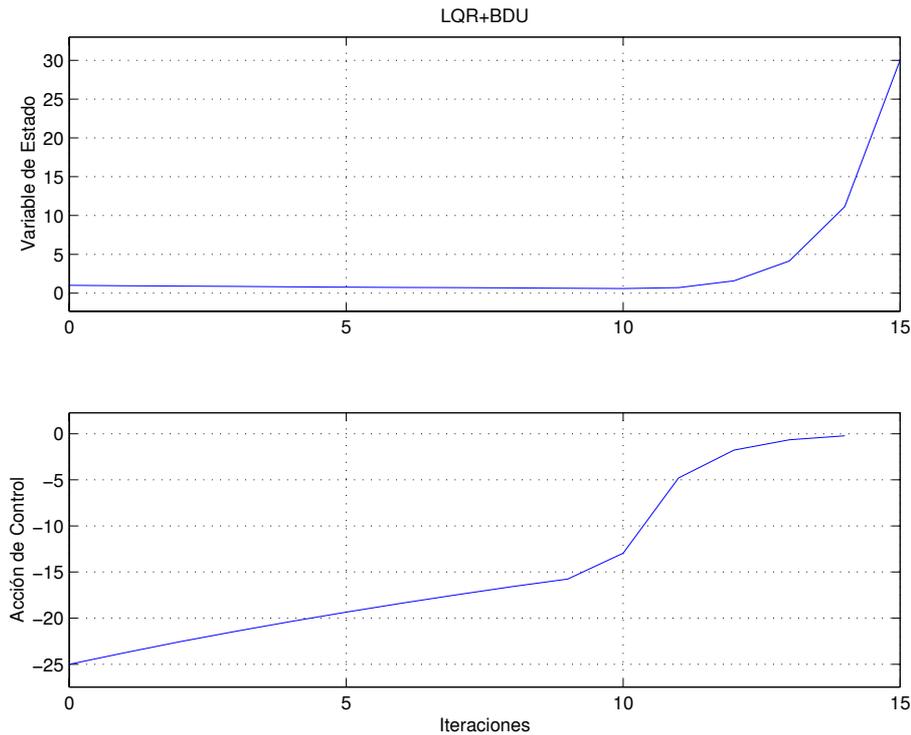


Figura 4.3: Respuesta ante el LQR-BDU con horizonte finito  $N = 15$ .

Analizando las condiciones (4.110) y (4.111) se deduce que para valores pequeños de las cotas de las incertidumbres se cumplen dichas condiciones, ya que en el caso límite de  $\eta_f \rightarrow 0$  y  $\eta_g \rightarrow 0$ , las condiciones se transforman en la expresión  $r > 0$ , la cual siempre se cumple.

A modo de ejemplo, en la figura 4.5 se muestra de nuevo la respuesta inestable del LQR-BDU con horizonte de predicción finito (en este caso  $N = 6$ ) frente a la respuesta estable de la figura 4.6 para el LQR-BDU con horizonte de predicción infinito para el mismo sistema discreto, con la salvedad de que ahora en ambas respuestas sí se obtiene siempre un parámetro de regularización positivo  $\lambda > 0$  y  $\lambda_i > 0$ , ya que se cumplen las condiciones (4.110) y (4.111) al considerar menores cotas de incertidumbre,  $\eta_f = \delta f = 0.125$  y  $\eta_g = -\delta g = 0.005$ .

### 4.3.5 Ejemplo 4.

En este ejemplo se pretende mostrar, cómo el sintonizado del LQR mediante la técnica BDU puede mejorar la robustez del sistema, comparando el LQR-BDU (que ofrece mejores prestaciones) frente al LQR (sin BDU) ambos formulados con **horizonte de predicción infinito** [Ramos *et al.* 2004a]. Así pues, dado el siguiente sistema discreto con la respectiva incertidumbre

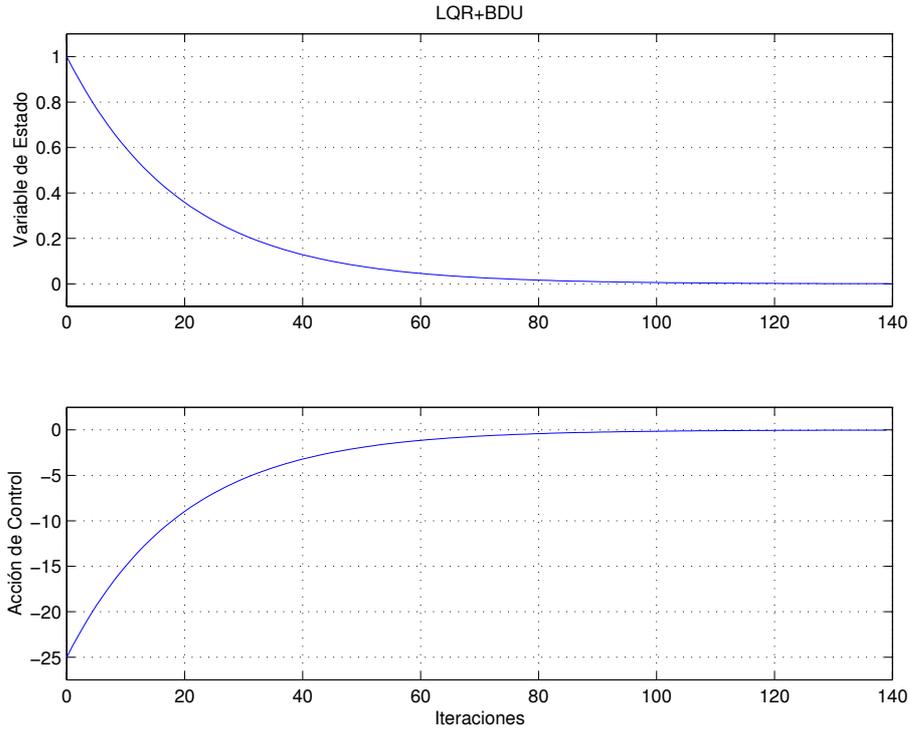


Figura 4.4: Respuesta ante el LQR-BDU con horizonte infinito  $N = \infty$ .

$$x_{i+1} = [f + \delta f]x_i + [g + \delta g]u_i \quad (4.112)$$

donde  $\delta f$  y  $\delta g$  se acotan mediante  $\|\delta f\|_2 \leq \eta_f$  y  $\|\delta g\|_2 \leq \eta_g$  siendo

$$\begin{aligned} f &= 0.9, & \eta_f &= 0.2, \\ g &= 1, & \eta_g &= 0.27, \end{aligned}$$

cumpliendo así la *condición* necesaria para aplicar BDU ( $0.27 = \eta_g < |g| = 1$ ).

Por otra parte, los parámetros del LQR son

$$r = 1, \quad q = 0.04,$$

siendo  $x_0 = 10$ .

Considerando la incertidumbre  $\delta f = 0.2$  y  $\delta g = -0.27$  en el sistema perturbado, se muestra en la figura 4.7 en línea discontinua la respuesta inestable en bucle cerrado del sistema ante la ley de control del LQR, y en línea continua la respuesta estable del LQR-BDU. Se destaca que en este ejemplo, el parámetro  $\lambda$  de regularización resulta positivo, por lo que se han usado las ecuaciones de (4.104) a (4.107) para la ley de control.

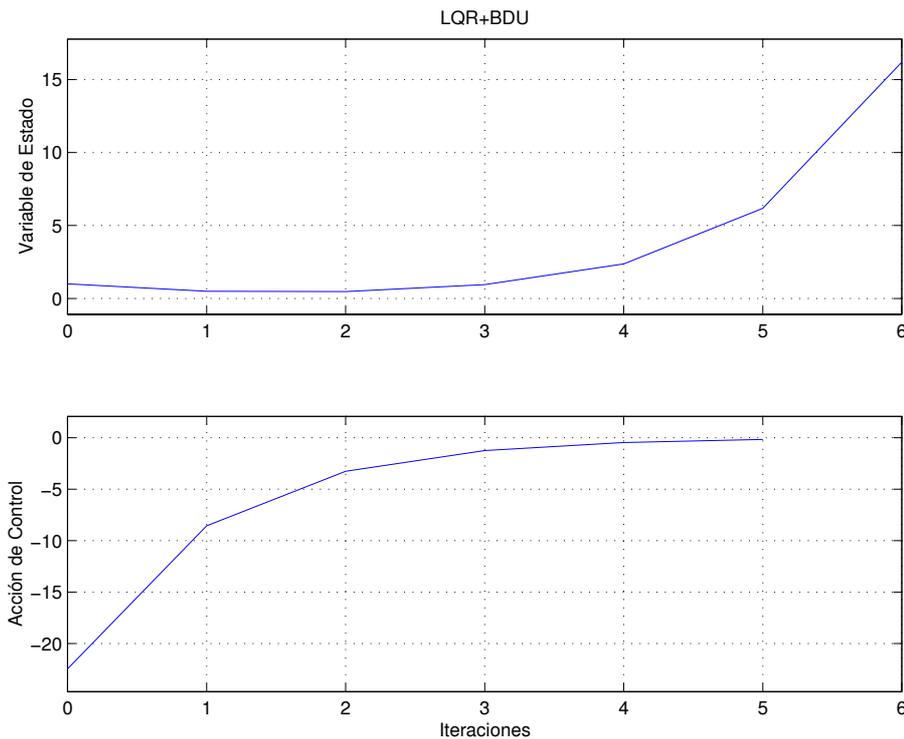


Figura 4.5: Respuesta ante el LQR-BDU con horizonte finito  $N = 6$ .

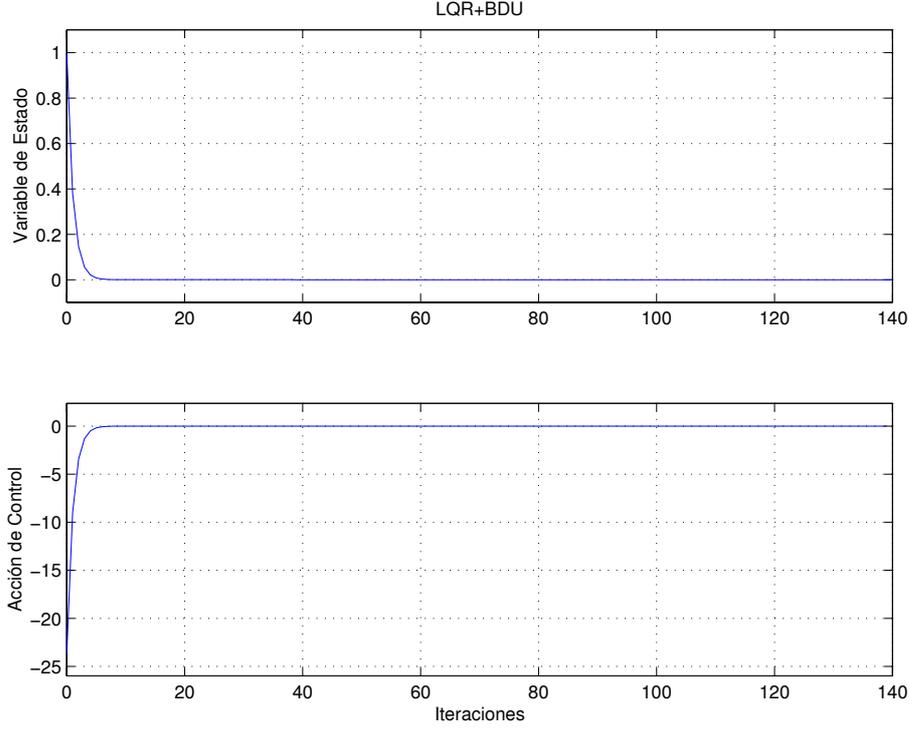
## 4.4 LQR-BDU n-dimensional.

En este apartado se presenta el método *weighted*-BDU y cómo su aplicación al LQR conlleva cierta problemática. Dicho método sirve como antecedente al planteamiento original del LQR-BDU n-dimensional que se lleva a cabo posteriormente, el cual no presenta dicha problemática. Finalmente se muestran unos ejemplos.

### 4.4.1 *Weighted*-BDU.

#### 4.4.1.1 Introducción.

En [Nascimento y Sayed 1999], [Sayed *et al.* 2002] se presenta un planteamiento más general del índice de coste del BDU para la estimación de parámetros, que incorpora una matriz de peso  $\mathbf{W}$ , de ahí su nombre, *weighted*-BDU. En [Subramanian y Sayed 2003], [Sayed y Subramanian 2002] aparecen aplicaciones de dicho índice en filtros y estimación, pero es en [Nascimento y Sayed 1999] donde se abordan los sistemas n-dimensionales y la aplicación al LQR. Así pues, el índice de coste del *weighted*-BDU que se plantea es el siguiente, donde  $\Phi$  es el parámetro de regularización del problema sin incertidumbre, y como en el capítulo anterior, se introduce la técnica aplicada a la estimación de parámetros


 Figura 4.6: Respuesta ante el LQR-BDU con horizonte infinito  $N = \infty$ .

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta \mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \left[ [(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \mathbf{x} - (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b})]^T \mathbf{W} [(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \mathbf{x} - (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b})] + \mathbf{x}^T \Phi \mathbf{x} \right] \quad (4.113)$$

el cual es idéntico al índice BDU extendido (3.62) planteado en la sección 3.3.5 si se considera  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$  y  $\Phi = \rho \mathbf{I}$

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta \mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \left[ \|\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{x} - \mathbf{b} - \delta \mathbf{b}\|_2^2 + \rho \|\mathbf{x}\|_2^2 \right]. \quad (4.114)$$

La diferencia radica en que en [Nascimento y Sayed 1999] se resuelve la maximización haciendo uso de los *multiplicadores de Lagrange*  $\mu^1$  para las restricciones sobre la cota de la incertidumbre, obteniendo que la condición que debe cumplir el multiplicador de Lagrange es  $\mu \geq \|\mathbf{W}\|_2$ . Finalmente la solución del problema (4.113) se obtiene de un modo similar al BDU estándar (mediante ecuación secular), pero más complejo, ya que en este caso la **ecuación secular** resulta para el parámetro  $\alpha = \|\mathbf{x}\|_2$

$$\alpha^2 - \mathbf{d}^T \left[ \mathbf{M} + \mu \eta_A \left[ \eta_A + \frac{\eta_b}{\alpha} \right] \mathbf{I} \right]^{-2} \mathbf{d} = 0 \quad (4.115)$$

<sup>1</sup>Se ha utilizado la letra griega  $\mu$  para designar al multiplicador de Lagrange con el fin de no confundirlo con el parámetro  $\lambda$  de regularización usado hasta ahora.

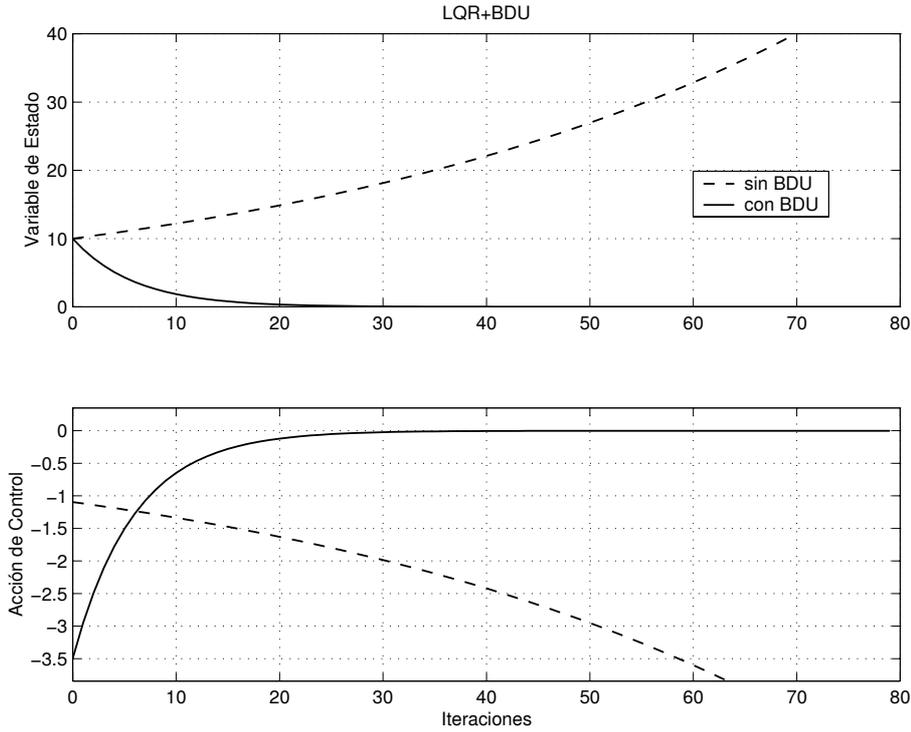


Figura 4.7: Respuesta ante el LQR y LQR-BDU con horizonte infinito.

siendo

$$\mathbf{M} = \Phi + \mathbf{A}^T \left[ \mathbf{W} + \mathbf{W} [\mu \mathbf{I} - \mathbf{W}]^\dagger \mathbf{W} \right] \mathbf{A}, \quad (4.116)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}^T \left[ \mathbf{W} + \mathbf{W} [\mu \mathbf{I} - \mathbf{W}]^\dagger \mathbf{W} \right] \mathbf{b}. \quad (4.117)$$

Donde además, depende del parámetro  $\mu$ , por lo que posteriormente se obtiene el valor del multiplicador de Lagrange  $\hat{\mu} \geq \|\mathbf{W}\|_2$  mediante la minimización del índice de coste, siendo así la solución del problema *weighted*-BDU (siempre que se cumpla la condición  $\mu \eta_A \eta_b < \|\mathbf{d}\|_2^2$ )

$$\hat{\mathbf{x}} = \left[ \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{W}} \mathbf{A} + \hat{\Phi} \right]^{-1} \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{W}} \mathbf{b} \quad (4.118)$$

donde

$$\hat{\Phi} = \Phi + \hat{\mu} \eta_A \left[ \eta_A + \frac{\eta_b}{\hat{\alpha}} \right] \mathbf{I}, \quad (4.119)$$

$$\hat{\mathbf{W}} = \mathbf{W} + \mathbf{W} [\hat{\mu} \mathbf{I} - \mathbf{W}]^\dagger \mathbf{W}. \quad (4.120)$$

El algoritmo resulta más complejo que en el BDU estándar, pues se hace uso de un proceso iterativo donde se van calculando tanto el parámetro  $\alpha$ , como el multiplicador  $\mu$ .

Dicha solución es equivalente a la del BDU estándar (3.83) y (3.84), considerando  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$  y  $\Phi = \rho\mathbf{I}$ , tal y como se demuestra a continuación.

**Demostración:** Suponiendo  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$  y  $\Phi = \rho\mathbf{I}$ , las matrices  $\hat{\Phi}$  y  $\hat{\mathbf{W}}$  son diagonales y constantes

$$\hat{\Phi} = \left[ \rho + \hat{\mu}\eta_A \left[ \eta_A + \frac{\eta_b}{\hat{\alpha}} \right] \right] \mathbf{I}, \quad (4.121)$$

$$\hat{\mathbf{W}} = \left[ 1 + [\hat{\mu} - 1]^\dagger \right] \mathbf{I} = \left[ \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu} - 1} \right] \mathbf{I}, \quad (4.122)$$

y por tanto la solución (4.118) se puede expresar así

$$\hat{\mathbf{x}} = \left[ \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \hat{\Phi} \hat{\mathbf{W}}^{-1} \right]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \left[ \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I} \right]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (4.123)$$

que igualada a la solución del BDU estándar (3.83), permite obtener el parámetro de regularización  $\lambda$  como

$$\lambda = \frac{\rho + \hat{\mu}\eta_A \left[ \eta_A + \frac{\eta_b}{\hat{\alpha}} \right]}{\frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu} - 1}} = \rho \frac{\hat{\mu} - 1}{\hat{\mu}} + \eta_A [\hat{\mu} - 1] \left[ \frac{\eta_A \hat{\alpha} + \eta_b}{\hat{\alpha}} \right]. \quad (4.124)$$

Definiéndose en [Nascimento y Sayed 1999]  $\hat{\alpha} = \|\hat{\mathbf{x}}\|_2$  y asumiendo

$$\hat{\mu} - 1 = \frac{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\eta_A \|\hat{\mathbf{x}}\|_2 + \eta_b} \quad (4.125)$$

la ecuación (4.124) resulta

$$\lambda = \frac{\eta_A \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2} + \frac{\rho \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\hat{\mathbf{x}}\|_2 + \eta_b}. \quad (4.126)$$

■

#### 4.4.1.2 Aplicación al LQR.

Aplicando nuevamente la dualidad del problema de estimación con el de control se puede plantear la aplicación del *weighted*-BDU al LQR n-dimensional para un horizonte de predicción finito. Como paso previo al *weighted*-LQR-BDU, se plantea el LQR n-dimensional obteniendo así la *ecuación recursiva de Riccati matricial*. El problema LQR se expresa [Ollero 1991]

$$\min_{\{\mathbf{u}_i\}} \left[ \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{N+1} + \sum_{i=0}^N [\mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i^T \mathbf{R} \mathbf{u}_i] \right], \quad (4.127)$$

siendo  $\mathbf{R} > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$  (matrices definidas positivas) y  $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$  (matriz semidefinida positiva). Para el planteamiento del problema se considera el siguiente modelo en espacio de estados de dimensión  $n$  y con más de una entrada

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_i + \mathbf{G}\mathbf{u}_i, \quad (4.128)$$

donde  $\mathbf{x}_0$  es el estado inicial y  $\{\mathbf{u}_i\}$  indica la secuencia de control de entrada. El problema (4.127) se puede resolver recursivamente dividiendo la función de coste en dos términos (programación dinámica), donde sólo el segundo término, mediante la ecuación en espacio de estados (4.128) para  $\mathbf{x}_{N+1}$ , depende de  $\mathbf{u}_N$ . Minimizando respecto  $\mathbf{u}_N$ , se obtiene la ley de control por realimentación del estado para el instante  $N$ , y generalizando se obtiene para  $0 \leq i \leq N$ , donde el coste  $\mathbf{P}_i$  se propaga mediante la recursión de Riccati con la condición límite  $\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}$

$$\hat{\mathbf{u}}_i = -\mathbf{K}_i\hat{\mathbf{x}}_i, \quad (4.129)$$

$$\mathbf{K}_i = [\mathbf{R} + \mathbf{G}^T\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{F}, \quad (4.130)$$

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{Q} + \mathbf{K}_i^T\mathbf{R}\mathbf{K}_i + [\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}_i]^T\mathbf{P}_{i+1}[\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}_i], \quad (4.131)$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}. \quad (4.132)$$

Para aplicar *weighted*-BDU al LQR  $n$ -dimensional se considera un modelo en espacio de estados  $n$ -dimensional con incertidumbre paramétrica  $\delta\mathbf{F}$  y  $\delta\mathbf{G}$

$$\mathbf{x}_{i+1} = [\mathbf{F} + \delta\mathbf{F}]\mathbf{x}_i + [\mathbf{G} + \delta\mathbf{G}]\mathbf{u}_i, \quad (4.133)$$

donde  $\mathbf{x}_0$  indica el valor del estado inicial, y  $\{\mathbf{u}_i\}$  indica la secuencia de control. Conociendo un límite de la incertidumbre ( $\|\delta\mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F$ ,  $\|\delta\mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G$ ), se plantea el problema LQR-BDU como

$$\min_{\{\mathbf{u}_i\}} \max_{\substack{\|\delta\mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F \\ \|\delta\mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G}} \left[ \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{N+1} + \sum_{i=0}^N [\mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i^T \mathbf{R} \mathbf{u}_i] \right], \quad (4.134)$$

donde  $\mathbf{R} = r\mathbf{I}$  y  $\mathbf{P}$  son matrices definidas positivas y  $\mathbf{Q} = q\mathbf{I}$  es una matriz semidefinida positiva. La aplicación del *weighted*-BDU en el sintonizado del LQR mostrada en [Nascimento y Sayed 1999] resulta

$$\hat{\mathbf{u}}_i = -\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (4.135)$$

$$\mathbf{K}_i = \left[ \lambda_i \mathbf{I} + \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{W}}_{i+1} \mathbf{G} \right]^{-1} \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{W}}_{i+1} \mathbf{F}, \quad (4.136)$$

$$\lambda_i = r + \hat{\mu}_i \eta_G \left[ \eta_G + \frac{\eta_F \|\hat{\mathbf{x}}_i\|_2}{\|\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i\|_2} \right], \quad (4.137)$$

$$\hat{\mathbf{W}}_{i+1} = \mathbf{P}_{i+1} + \mathbf{P}_{i+1} [\hat{\mu}_i \mathbf{I} - \mathbf{P}_{i+1}]^\dagger \mathbf{P}_{i+1}, \quad (4.138)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \mathbf{Q} + \mathbf{K}_i^T \mathbf{R} \mathbf{K}_i + [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_i]^T \hat{\mathbf{W}}_{i+1} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_i] + \\ &\quad + \hat{\mu}_i \left[ \eta_G^2 \mathbf{K}_i^T \mathbf{K}_i + \left[ \eta_F^2 + 2\eta_F \eta_G \frac{\|\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}_i\|_2} \right] \mathbf{I} \right], \end{aligned} \quad (4.139)$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}, \quad (4.140)$$

cuya solución se obtiene iterativamente mediante el planteamiento de un problema TPBVP (*two-point boundary value problem*), pero en este caso más complicado, y con mayores problemas de convergencia, que si se hubiera planteado con el BDU estándar, en lugar del *weighted*-BDU.

Analizando esta solución, conforme la incertidumbre presente en el sistema se hace más pequeña ( $\eta_F \rightarrow 0$ ,  $\eta_G \rightarrow 0$ ), el multiplicador de Lagrange  $\hat{\mu}_i$  resulta mayor ( $\hat{\mu}_i \rightarrow \infty$ ), pudiendo provocar problemas numéricos sobre todo para la ecuación modificada de Riccati (4.139), donde aparecen términos del tipo  $\hat{\mu}_i \eta_G^2$ .

Así, en el caso límite, si se supone que no hay incertidumbre ( $\eta_F = \eta_G = 0$ ), el multiplicador resulta  $\hat{\mu}_i = \infty$ , y la solución coincide con la del LQR estándar (ecuaciones de (4.129) a (4.132))

$$\hat{\mathbf{u}}_i = -\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (4.141)$$

$$\mathbf{K}_i = \left[ \mathbf{R} + \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{W}}_{i+1} \mathbf{G} \right]^{-1} \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{W}}_{i+1} \mathbf{F}, \quad (4.142)$$

$$\hat{\mathbf{W}}_{i+1} = \mathbf{P}_{i+1}, \quad (4.143)$$

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{Q} + \mathbf{K}_i^T \mathbf{R} \mathbf{K}_i + [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_i]^T \hat{\mathbf{W}}_{i+1} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_i], \quad (4.144)$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}, \quad (4.145)$$

ya que se cumple

$$\hat{\mathbf{W}}_{i+1} = \mathbf{P}_{i+1}. \quad (4.146)$$

Por otra parte, el método *weighted*-BDU hace uso de la pseudoinversa, que en la aplicación al LQR resulta  $[\hat{\mu}_i \mathbf{I} - \mathbf{P}_{i+1}]^\dagger$ , la cual en ocasiones puede presentar **problemas de singularidad**, que hay que considerar en la resolución del problema TPBVP.

Toda esta problemática (problemas de convergencia, singularidad, valores muy elevados de  $\hat{\mu}_i$ ) no es causa de la aplicación sobre el LQR, sino que es inherente al *weighted*-BDU. En cualquier caso, cuando se plantea el índice con  $\mathbf{W} \neq \mathbf{I}$

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\substack{\|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \left[ \left[ (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\mathbf{x} - (\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}) \right]^T \mathbf{W} \left[ (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\mathbf{x} - (\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}) \right] + \rho \|\mathbf{x}\|_2^2 \right] \quad (4.147)$$

se podría resolver mediante el BDU estándar (sin hacer uso del *weighted*-BDU), ya que se asume  $\mathbf{W} = \mathbf{H}^T \mathbf{H}$ , realizando el siguiente cambio de variables

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\substack{\|\delta\hat{\mathbf{A}}\|_2 \leq \eta_{\hat{A}} \\ \|\delta\hat{\mathbf{b}}\|_2 \leq \eta_{\hat{b}}}} \left[ \left\| (\hat{\mathbf{A}} + \delta\hat{\mathbf{A}})\mathbf{x} - (\hat{\mathbf{b}} + \delta\hat{\mathbf{b}}) \right\|_2^2 + \rho \|\mathbf{x}\|_2^2 \right], \quad (4.148)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &\rightarrow \mathbf{H}\mathbf{A}, & \hat{\mathbf{b}} &\rightarrow \mathbf{H}\mathbf{b}, \\ \delta\hat{\mathbf{A}} &\rightarrow \mathbf{H}\delta\mathbf{A}, & \delta\hat{\mathbf{b}} &\rightarrow \mathbf{H}\delta\mathbf{b}, \\ \eta_{\hat{A}} &\rightarrow \|\mathbf{H}\|_2 \eta_A, & \eta_{\hat{b}} &\rightarrow \|\mathbf{H}\|_2 \eta_b, \end{aligned}$$

que es el procedimiento que se muestra a continuación.

#### 4.4.2 El controlador LQR-BDU n-dimensional.

Frente al *weighted*-LQR-BDU, a continuación se muestra un planteamiento original del LQR-BDU n-dimensional, que es capaz de considerar índices BDU con  $\mathbf{W} \neq \mathbf{I}$  (en el caso del LQR se asumiría  $\mathbf{H} = \mathbf{P}^{\frac{1}{2}}$  y  $\mathbf{W} = \mathbf{P}$ ), y con la ventaja de que no presenta los problemas planteados por el *weighted*-LQR-BDU.

Para ello se transforma el problema LQR en un problema BDU, por tanto se considera el siguiente modelo en espacio de estados n-dimensional con incertidumbre paramétrica  $\delta\mathbf{F}$  y  $\delta\mathbf{G}$

$$\mathbf{x}_{i+1} = [\mathbf{F} + \delta\mathbf{F}]\mathbf{x}_i + [\mathbf{G} + \delta\mathbf{G}]\mathbf{u}_i, \quad (4.149)$$

donde  $\mathbf{x}_0$  indica el valor del estado inicial, y  $\{\mathbf{u}_i\}$  indica la secuencia de control. Conociendo un límite de la incertidumbre ( $\|\delta\mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F$ ,  $\|\delta\mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G$ ), se plantea el problema LQR como

$$\min_{\{\mathbf{u}_i\}} \max_{\substack{\|\delta\mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F \\ \|\delta\mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G}} \left[ \mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{N+1} + \sum_{i=0}^N [\mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i^T \mathbf{R} \mathbf{u}_i] \right], \quad (4.150)$$

donde  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{P}$  son unas matrices definidas positivas y  $\mathbf{Q}$  una matriz semidefinida positiva. El problema se puede resolver recursivamente dividiendo la función de coste en dos términos

$$\begin{aligned}
 & \min_{\{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1}\}} \left[ \max_{\substack{\|\delta \mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F \\ \|\delta \mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G}} \sum_{i=0}^{N-1} [\mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i^T \mathbf{R} \mathbf{u}_i] + \right. \\
 & \left. \min_{\mathbf{u}_N} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F \\ \|\delta \mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G}} [\mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{N+1} + \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_N + \mathbf{u}_N^T \mathbf{R} \mathbf{u}_N] \right], \tag{4.151}
 \end{aligned}$$

donde sólo el segundo término, mediante la ecuación en espacio de estados (4.149) para  $\mathbf{x}_{N+1}$ , depende de  $\mathbf{u}_N$ . Si se sustituye  $\mathbf{x}_{N+1}$  en el segundo término y se asume que  $\mathbf{Q} = q\mathbf{I}$  y  $\mathbf{R} = r\mathbf{I}$  son **matrices constantes diagonales**, se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{u}_N} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F \\ \|\delta \mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G}} [\mathbf{x}_{N+1}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{N+1} + \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_N + \mathbf{u}_N^T \mathbf{R} \mathbf{u}_N] = \\
 & = \min_{\mathbf{u}_N} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F \\ \|\delta \mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G}} \left[ \left\| \begin{array}{c} \mathbf{P}^{\frac{1}{2}}[\mathbf{G} + \delta \mathbf{G}]\mathbf{u}_N + \\ + \mathbf{P}^{\frac{1}{2}}[\mathbf{F} + \delta \mathbf{F}]\mathbf{x}_N \end{array} \right\|_2^2 + r \|\mathbf{u}_N\|_2^2 + q \|\mathbf{x}_N\|_2^2 \right]. \tag{4.152}
 \end{aligned}$$

Tras eliminar el término  $q \|\mathbf{x}_N\|_2^2$  (porque no depende de  $\mathbf{u}_N$  y por tanto no afecta al resultado de la minimización), y mediante unos cambios de variables se plantea dicho término como un problema BDU del tipo (3.62)

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta \mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} [\|\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}]\|_2^2 + \rho \|\mathbf{x}\|_2^2], \tag{4.153}$$

donde se ha sustituido

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}, & \mathbf{b} \rightarrow -\mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F} \mathbf{x}_N, \\
 \delta \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \delta \mathbf{G}, & \delta \mathbf{b} \rightarrow -\mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \delta \mathbf{F} \mathbf{x}_N, \\
 \eta_A \rightarrow \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G, & \eta_b \rightarrow \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\mathbf{x}_N\|_2, \\
 \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{u}_N, & \rho \rightarrow r.
 \end{array}$$

La solución será distinta de cero si se cumple la condición (3.30)

$$\eta_A < \frac{\|\mathbf{A}^T \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}. \tag{4.154}$$

Minimizando (4.153) para la variable  $\mathbf{x}$  y teniendo en cuenta la solución (3.83) y (3.84) del problema BDU

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (4.155)$$

$$\lambda = \frac{\eta_A \|\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2} + \frac{\rho \|\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\hat{\mathbf{x}}\|_2 + \eta_b}, \quad (4.156)$$

donde deshaciendo los cambios de variables y sustituyendo  $\lambda \leftarrow \lambda_N$ , las ecuaciones (4.155) y (4.156) se pueden expresar como

$$\hat{\mathbf{u}}_N = -\mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N, \quad (4.157)$$

$$\mathbf{K}_N = [\lambda_N \mathbf{I} + \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{F}, \quad (4.158)$$

$$\lambda_N = \frac{\left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2}{\left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2} + \frac{r \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2}{\left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2}. \quad (4.159)$$

Por otra parte, sustituyendo la solución  $\hat{\mathbf{u}}_N$  en el índice de coste (4.152) se obtiene el coste  $\mathbf{P}_N$  que penaliza al estado  $\hat{\mathbf{x}}_N$

$$\hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{P}_N \hat{\mathbf{x}}_N = \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}_N + \hat{\mathbf{u}}_N^T \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}_N + \hat{\mathbf{x}}_{N+1}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{x}}_{N+1}, \quad (4.160)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{P}_N \hat{\mathbf{x}}_N = \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}_N + \hat{\mathbf{u}}_N^T \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}_N + [\|\mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_N - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\hat{\mathbf{u}}_N\|_2 + \eta_b]^2, \quad (4.161)$$

es decir

$$\hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{P}_N \hat{\mathbf{x}}_N = \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}_N + \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{K}_N^T \mathbf{R} \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N + \left[ \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \right]^2. \quad (4.162)$$

Desarrollando el término cuadrático se obtiene la ecuación recursiva de Riccati modificada mediante BDU cuya demostración se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_N = & \mathbf{Q} + \mathbf{K}_N^T \mathbf{R} \mathbf{K}_N + [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N]^T \mathbf{P} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] + \\ & + 2 [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N]^T \mathbf{P} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \cdot \frac{\left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2}{\left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2} + \\ & + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 \left[ \eta_G^2 \mathbf{K}_N^T \mathbf{K}_N + \left[ \eta_F^2 + 2\eta_F \eta_G \frac{\left\| \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2}{\left\| \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2} \right] \mathbf{I} \right]. \end{aligned} \quad (4.163)$$

***Demostración:*** Se desarrolla el término cuadrático de (4.162)

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{P}_N \hat{\mathbf{x}}_N &= \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}_N + \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{K}_N^T \mathbf{R} \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2^2 + \\
 &+ \left[ \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \|\mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N\|_2 + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\hat{\mathbf{x}}_N\|_2 \right]^2 + \\
 &+ 2 \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \left[ \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \|\mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N\|_2 + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\hat{\mathbf{x}}_N\|_2 \right]
 \end{aligned} \tag{4.164}$$

resultando

$$\hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{P}_N \hat{\mathbf{x}}_N = \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}_N + \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{K}_N^T \mathbf{R} \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N + c_1 + c_2 + c_3 \tag{4.165}$$

donde  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  se pueden expresar como

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2^2 = \\
 &= \hat{\mathbf{x}}_N^T [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N]^T \mathbf{P} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N,
 \end{aligned} \tag{4.166}$$

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \left[ \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \|\mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N\|_2 + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\hat{\mathbf{x}}_N\|_2 \right]^2 = \\
 &= \left[ \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \|\mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N\|_2 \right]^2 + \left[ \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\hat{\mathbf{x}}_N\|_2 \right]^2 + \\
 &+ 2 \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \|\mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N\|_2 \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\hat{\mathbf{x}}_N\|_2 = \\
 &= \hat{\mathbf{x}}_N^T \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 \eta_G^2 \mathbf{K}_N^T \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N + \hat{\mathbf{x}}_N^T \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 \eta_F^2 \mathbf{I} \hat{\mathbf{x}}_N + \\
 &+ \hat{\mathbf{x}}_N^T 2 \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 \eta_G \frac{\|\mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}_N\|_2} \eta_F \mathbf{I} \hat{\mathbf{x}}_N = \\
 &= \hat{\mathbf{x}}_N^T \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 \left[ \eta_G^2 \mathbf{K}_N^T \mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N + \left[ \eta_F^2 + 2 \eta_G \frac{\|\mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}_N\|_2} \right] \mathbf{I} \right] \hat{\mathbf{x}}_N,
 \end{aligned} \tag{4.167}$$

$$\begin{aligned}
 c_3 &= 2 \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2 \left[ \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \|\mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N\|_2 + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\hat{\mathbf{x}}_N\|_2 \right] = \\
 &= \hat{\mathbf{x}}_N^T 2 \frac{[\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N]^T \mathbf{P} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N]}{\left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_N] \hat{\mathbf{x}}_N \right\|_2} \cdot \\
 &\cdot \left[ \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \|\mathbf{K}_N \hat{\mathbf{x}}_N\|_2 + \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\hat{\mathbf{x}}_N\|_2 \right] \hat{\mathbf{x}}_N.
 \end{aligned} \tag{4.168}$$

■

Por tanto la ley de control para el resto de instantes de tiempo  $0 \leq i \leq N$  resulta

$$\hat{\mathbf{u}}_i = -\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (4.169)$$

$$\mathbf{K}_i = [\lambda_i \mathbf{I} + \mathbf{G}^T \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{F}, \quad (4.170)$$

$$\begin{aligned} \lambda_i = & \frac{\left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i] \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2}{\left\| \mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2} + \\ & + \frac{r \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i] \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2}{\left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i] \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2 + \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2 + \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2}, \end{aligned} \quad (4.171)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i = & \mathbf{Q} + \mathbf{K}_i^T \mathbf{R} \mathbf{K}_i + [\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i]^T \mathbf{P}_{i+1} [\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i] + \\ & + 2[\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i]^T \mathbf{P}_{i+1} [\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i] \cdot \frac{\left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2 + \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2}{\left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{GK}_i] \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2} + \\ & + \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 \left[ \eta_G^2 \mathbf{K}_i^T \mathbf{K}_i + \left[ \eta_F^2 + 2\eta_F \eta_G \frac{\left\| \mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2}{\left\| \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2} \right] \mathbf{I} \right], \end{aligned} \quad (4.172)$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}. \quad (4.173)$$

Se observa, como es de esperar, que si  $\eta_F = \eta_G = 0$ , la ley de control de (4.169) a (4.173) coincide con la del LQR n-dimensional, (4.129) a (4.132).

#### 4.4.3 TPBVP (*Two-Point Boundary Value Problem*).

Analizando el sistema de ecuaciones formado por (4.155) y (4.156) se deduce que si  $\mathbf{b}$  y  $\eta_b$  fueran conocidos, se podría resolver dicho sistema como (3.83) y (3.84), mediante la ecuación secular no lineal. Pero en este caso, para  $i = N$  resulta que  $\mathbf{b}$  y  $\eta_b$  dependen de  $\mathbf{x}_N$  (que no es conocido)

$$\mathbf{b} = -\mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F} \mathbf{x}_N, \quad (4.174)$$

$$\eta_b = \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \mathbf{x}_N \right\|_2. \quad (4.175)$$

Lo mismo ocurre con la ley de control para el resto de instantes de tiempo  $0 \leq i \leq N$ , ya que

$$\mathbf{b} = -\mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F} \mathbf{x}_i, \quad (4.176)$$

$$\eta_b = \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\mathbf{x}_i\|_2. \quad (4.177)$$

Por tanto la ley de control presenta la forma de un TPBVP (*Two-Point Boundary Value Problem*), debido a que las expresiones de  $\mathbf{K}_i$  y  $\mathbf{P}_i$  dependen del vector de estado del peor caso  $\hat{\mathbf{x}}_i$ , es decir  $\mathbf{K}_i(\hat{\mathbf{x}}_i)$  y  $\mathbf{P}_i(\hat{\mathbf{x}}_i)$ , y por tanto se debe obtener la solución iterativamente, mediante el siguiente procedimiento [Nascimento y Sayed 1999]:

1. *Inicialización.* Se eligen unos valores iniciales para las variables  $\mathbf{P}_i$ ,  $i \in [0, N]$  (por ejemplo, mediante la ejecución del controlador LQR n-dimensional sin usar BDU). También se eligen valores iniciales para las variables  $\lambda_i$  (cualquier valor positivo).
2. *Iteración hacia adelante.* A partir de  $\mathbf{x}_0$ ,  $\lambda_i$  y  $\mathbf{P}_{i+1}$ , se obtienen las diferentes  $\mathbf{u}_i$  (mediante la ley de control) y  $\mathbf{x}_i$  (mediante la ecuación del modelo).
3. *Iteración hacia atrás.* Dados los valores calculados anteriormente ( $\mathbf{u}_i$  y  $\mathbf{x}_i$ ) y  $\mathbf{P}$  se obtienen nuevas aproximaciones de  $\mathbf{P}_i$  y  $\lambda_i$ , mediante las ecuaciones de la ley de control.
4. *Recursión.* Se repiten los pasos 2 y 3 hasta que la solución converja.

Evidentemente, la solución obtenida debe cumplir la condición (3.30) y que  $\lambda_i > 0$ .

Por tanto, las ecuaciones de (4.169) a (4.173), expresadas en formato matricial, se presentan como un problema TPBVP (*Two-Point Boundary Value Problem*), debido a que dependen del estado en el peor caso  $\hat{\mathbf{x}}_i$ . Dicha dependencia no se puede eliminar, debido a que no se pueden cancelar las variables  $\hat{\mathbf{x}}_i$ , ya que están dentro de normas, y ello imposibilita, por una parte, la obtención una ecuación explícita del parámetro  $\lambda_i$  (ya que  $\lambda_i$  depende de  $\mathbf{K}_i$  el cual depende a su vez de  $\lambda_i$ ), y por otra, que en este caso, las expresiones de  $\mathbf{K}_i$  y  $\mathbf{P}_i$  dependen del vector de estado del peor caso  $\hat{\mathbf{x}}_i$ .

En cambio, dicha dependencia desaparecía en los sistemas unidimensionales, ya que en ese caso  $\hat{\mathbf{x}}_i$  es un escalar y por tanto la relación

$$\eta_b = \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\mathbf{x}_i\|_2 \quad (4.178)$$

resultaría

$$\eta_b = p_{i+1}^{\frac{1}{2}} \eta_f |x_i| \quad (4.179)$$

y por tanto, se puede cancelar, en este caso, la dependencia de  $k_i$  y  $p_i$  respecto de  $x_i$  tal y como se mostró en las ecuaciones (4.41) y (4.43).

Así pues, se concluye diciendo que las ecuaciones de (4.169) a (4.173) sirven para sistemas n-dimensionales (es decir  $\hat{\mathbf{x}}_i$  es un vector, y  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{F}$  son matrices) independientemente del número de entradas del sistema (si hay más de una entrada la única

diferencia resulta ser que  $\mathbf{G}$  sería una matriz,  $\mathbf{R}$  también sería una matriz y el problema BDU proporcionaría como solución un vector  $\hat{\mathbf{u}}_i$ ).

Por otra parte, para el caso particular de sistemas unidimensionales con más de una entrada, también se usan las ecuaciones de (4.169) a (4.173), pero mientras  $\mathbf{G}$  seguiría siendo un vector y  $\mathbf{R}$  una matriz, en cambio al ser  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  y  $\hat{\mathbf{x}}_i$  escalares, en este caso sí se puede eliminar la dependencia respecto de  $\hat{\mathbf{x}}_i$ , y no se plantearía un TPBVP.

Así considerando  $f$ ,  $p$  y  $q$  escalares y la ecuación (4.162) para la obtención de  $p_i$ , las ecuaciones de (4.169) a (4.173) resultarían para este caso particular más sencillas

$$\hat{\mathbf{u}}_i = -\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (4.180)$$

$$\mathbf{K}_i = [\lambda_i \mathbf{I} + \mathbf{G}^T p_{i+1} \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T p_{i+1} f, \quad (4.181)$$

$$\lambda_i = \frac{p_{i+1} \eta_G |f - \mathbf{G} \mathbf{K}_i|}{\|\mathbf{K}_i\|_2} + \frac{r |f - \mathbf{G} \mathbf{K}_i|}{|f - \mathbf{G} \mathbf{K}_i| + \eta_G \|\mathbf{K}_i\|_2 + \eta_f}, \quad (4.182)$$

$$p_i = q + \mathbf{K}_i^T \mathbf{R} \mathbf{K}_i + p_{i+1} [|f - \mathbf{G} \mathbf{K}_i| + \eta_G \|\mathbf{K}_i\|_2 + \eta_f]^2, \quad (4.183)$$

$$p_{N+1} = p. \quad (4.184)$$

#### 4.4.4 Ejemplo 5.

Este ejemplo muestra cómo el uso de la técnica BDU para el sintonizado del LQR puede mejorar las prestaciones del sistema. Si se considera el siguiente sistema de 2 dimensiones acoplado

$$\mathbf{x}_{i+1} = [\mathbf{F} + \delta \mathbf{F}] \mathbf{x}_i + [\mathbf{G} + \delta \mathbf{G}] \mathbf{u}_i \quad (4.185)$$

donde

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \quad (4.186)$$

estando  $\delta \mathbf{F}$  y  $\delta \mathbf{G}$  acotadas por  $\|\delta \mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F$  y  $\|\delta \mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G$ , se sintoniza el LQR-BDU considerando

$$\eta_F = 0.27, \quad \eta_G = 0, \quad (4.187)$$

y los parámetros del LQR

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \mathbf{I}, \quad (4.188)$$

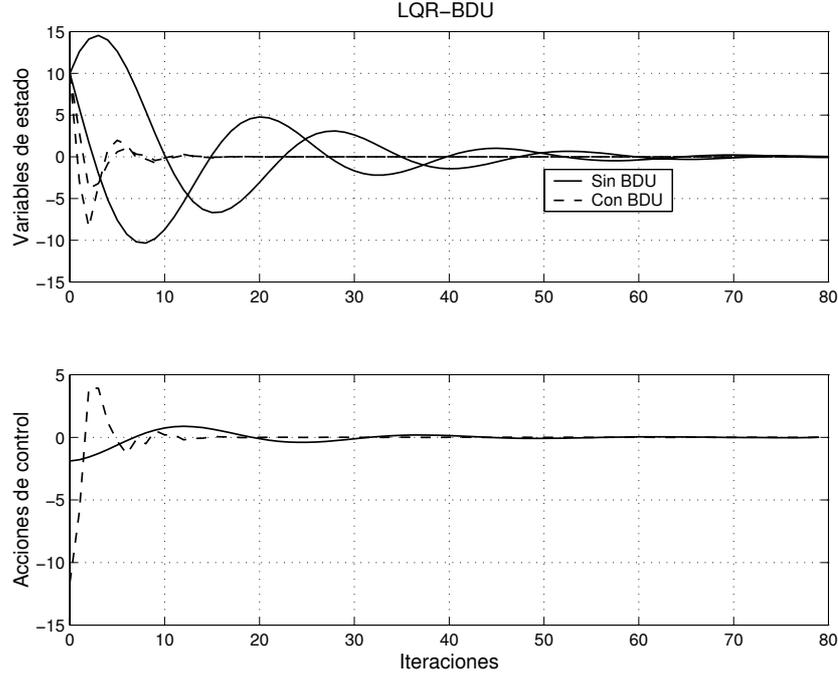


Figura 4.8: Respuesta del sistema (*variables de estado y acciones de control*) sin BDU (*línea continua*) y con BDU (*línea discontinua*).

siendo  $\mathbf{x}_0 = [10 \ 10]^T$  y  $N = 80$ . En la figura 4.8 se muestra la respuesta del sistema cuando se supone que la incertidumbre del sistema perturbado es

$$\delta \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.15 \\ 0.05 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \delta \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.189)$$

donde se puede ver que el BDU mejora las prestaciones del sistema.

Si por otra parte, se considera una incertidumbre diferente

$$\eta_F = 0.1, \quad \eta_G = 0.02, \quad (4.190)$$

y suponiendo en este caso  $\delta \mathbf{G} \neq \mathbf{0}$

$$\delta \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \delta \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -0.02 \\ 0.001 \end{bmatrix}, \quad (4.191)$$

se muestra la respuesta del sistema en la figura 4.9, donde se observa que de nuevo el BDU mejora las prestaciones del sistema. En la figura 4.10 se muestran los 4 elementos de la matriz de peso  $\mathbf{P}_i$  que se obtiene en cada iteración, siendo  $P_{12_i} = P_{21_i}$

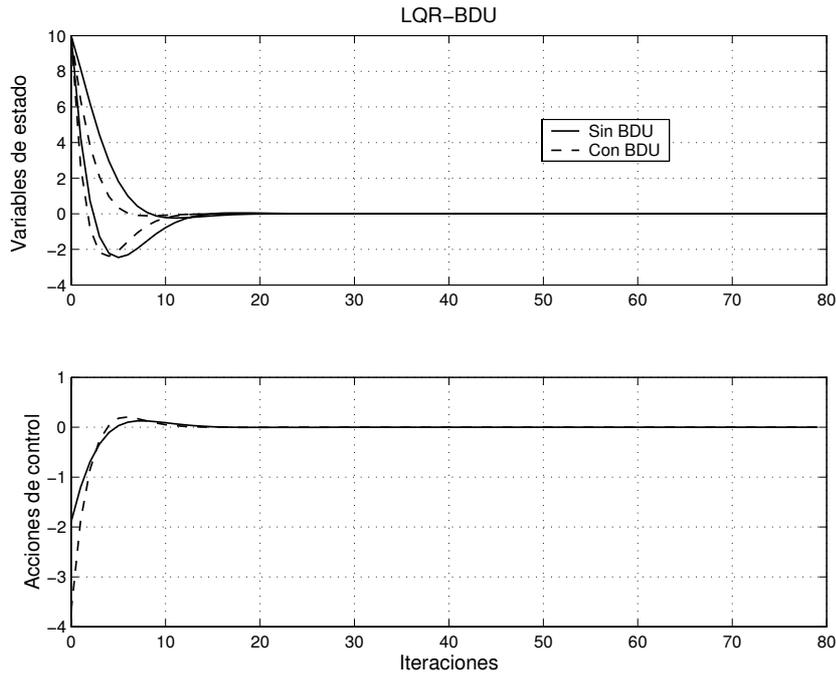


Figura 4.9: Respuesta del sistema (*variables de estado y acciones de control*) sin BDU (*línea continua*) y con BDU (*línea discontinua*).

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} P_{11i} & P_{12i} \\ P_{21i} & P_{22i} \end{bmatrix} \quad (4.192)$$

donde se observa cómo sin BDU los elementos de la matriz convergen a unos valores constantes, mientras que el BDU adapta dichos valores en cada instante teniendo en cuenta la incertidumbre.

Lo mismo ocurre para el parámetro de regularización  $\lambda$ , como se muestra en la figura 4.11, donde se lleva a cabo una **regularización adaptativa** en lugar de constante.

#### 4.4.5 Ejemplo 6.

A continuación, se muestra un ejemplo para un sistema n-dimensional que aparece en [Polyak y Tempo 2001], [Tyler y Tuteur 1966]. El ejemplo presenta el diseño de un controlador para el movimiento lateral de un avión, cuyo modelo en espacio de estados es el siguiente

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_c \mathbf{u}(t) \quad (4.193)$$

donde

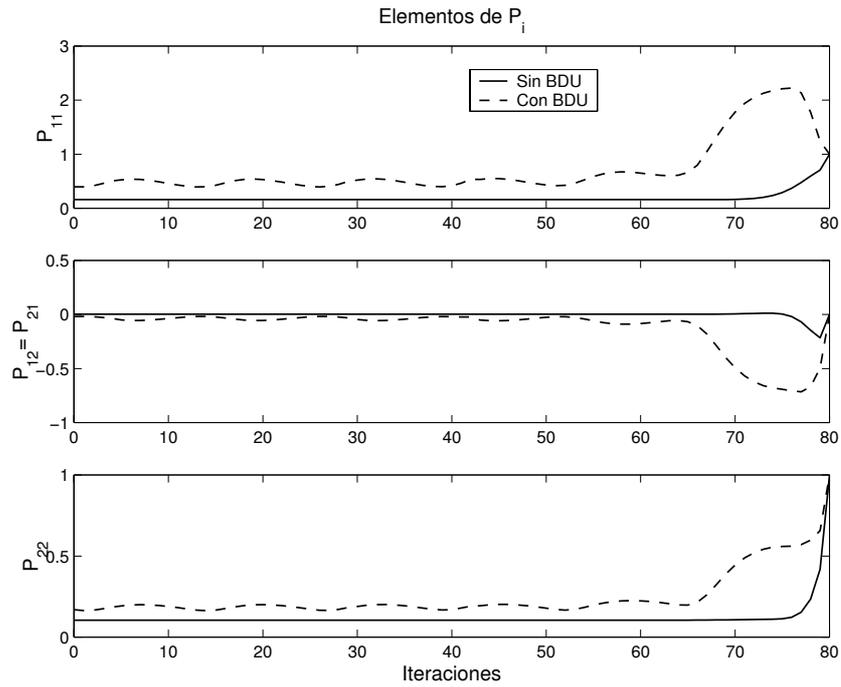


Figura 4.10: Elementos de  $\mathbf{P}_i$  en cada instante de tiempo, sin BDU (*línea continua*) y con BDU (*línea discontinua*).

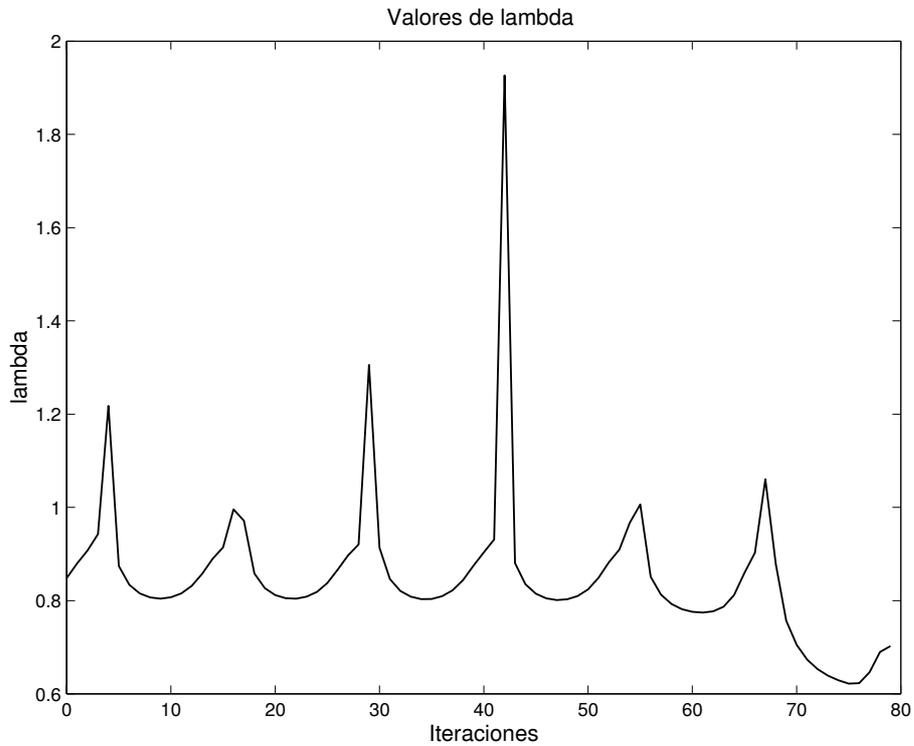


Figura 4.11: Parámetro de regularización  $\lambda$  en cada instante de tiempo.

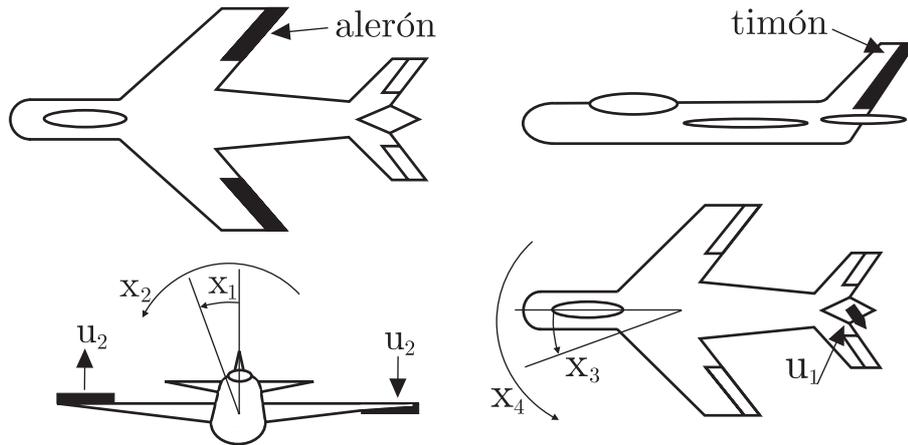


Figura 4.12: Estados y entradas del modelo del avión: ángulo de ladeo  $x_1$  ( $^\circ$ ), velocidad de ladeo  $x_2$  ( $^\circ/s$ ), ángulo de deslizamiento lateral  $x_3$  ( $^\circ$ ), velocidad de viraje  $x_4$  ( $^\circ/s$ ), desviación del timón  $u_1$  ( $^\circ$ ) y desviación del alerón  $u_2$  ( $^\circ$ ).

$$\mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & L_p & L_\beta & L_r \\ g/V & 0 & Y_\beta & -1 \\ N_{\dot{\beta}}(g/V) & N_p & N_\beta + N_{\dot{\beta}}Y_\beta & N_r - N_{\dot{\beta}} \end{bmatrix}, \quad (4.194)$$

$$\mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3.91 \\ 0.035 & 0 \\ -2.53 & 0.31 \end{bmatrix}. \quad (4.195)$$

El modelo consta de cuatro estados y dos entradas, que se muestran en la figura 4.12, siendo

- $x_1$ : ángulo de ladeo o *bank angle* (en grados  $^\circ$ ),
- $x_2$ : velocidad de ladeo o *roll rate* ( $^\circ/s$ ),
- $x_3$ : ángulo de deslizamiento lateral o *sideslip angle* ( $^\circ$ ),
- $x_4$ : velocidad de viraje o *yaw rate* ( $^\circ/s$ ),
- $u_1$ : desviación del timón o *rudder deflection* ( $^\circ$ ),
- $u_2$ : desviación del alerón o *aileron deflection* ( $^\circ$ ).

Se consideran los siguientes valores nominales para los parámetros del avión que aparecen en las matrices de estado

$$\begin{aligned}
 L_p &= -2.93, & L_\beta &= -4.75, \\
 L_r &= 0.78, & g/V &= 0.086, \\
 Y_\beta &= -0.11, & N_{\dot{\beta}} &= 0, \\
 N_p &= -0.042, & N_\beta &= 2.59, \\
 N_r &= -0.39.
 \end{aligned}$$

Para un periodo de muestreo  $T = 0.05$  s. y un retenedor de orden cero ZOH, se obtiene el modelo en espacio de estados discreto utilizando una aproximación de primer orden de la exponencial de la matriz [Aström y Wittenmark 1997]

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{F}_c T} \approx \mathbf{I} + \mathbf{F}_c T. \quad (4.196)$$

Con dicha aproximación el modelo discreto resulta

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_i + \mathbf{G}\mathbf{u}_i \quad (4.197)$$

donde

$$\mathbf{F} = T \begin{bmatrix} \frac{1}{T} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T} + L_p & L_\beta & L_r \\ g/V & 0 & \frac{1}{T} + Y_\beta & -1 \\ N_{\dot{\beta}}(g/V) & N_p & N_\beta + N_{\dot{\beta}}Y_\beta & \frac{1}{T} + N_r - N_{\dot{\beta}} \end{bmatrix}, \quad (4.198)$$

$$\mathbf{G} = T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3.91 \\ 0.035 & 0 \\ -2.53 & 0.31 \end{bmatrix}. \quad (4.199)$$

Asumiendo incertidumbre, resulta el modelo

$$\mathbf{x}_{i+1} = [\mathbf{F} + \delta\mathbf{F}]\mathbf{x}_i + [\mathbf{G} + \delta\mathbf{G}]\mathbf{u}_i \quad (4.200)$$

donde  $\delta\mathbf{F}$  y  $\delta\mathbf{G}$  están limitados con  $\|\delta\mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F$  y  $\|\delta\mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G$ .

Considerando

$$\eta_F = 0.7, \quad \eta_G = 0, \quad \mathbf{x}_0 = [5 \ 5 \ 5 \ 5]^T, \quad N = 20, \quad (4.201)$$

y los parámetros del LQR

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} = \mathbf{R} = \mathbf{I}, \quad (4.202)$$

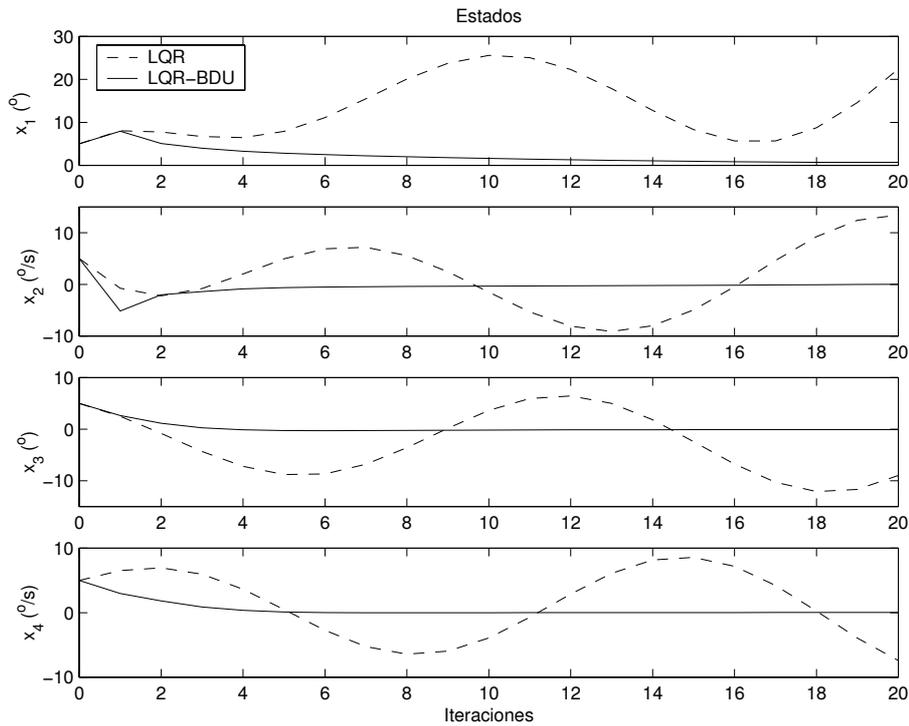


Figura 4.13: Respuesta del sistema (*variables de estado*) con BDU (*línea continua*) y sin BDU (*línea discontinua*).

se obtiene el LQR-BDU n-dimensional. La figura 4.13 muestra la respuesta inestable del sistema (las variables de estado) que se obtiene con el LQR (en línea discontinua) y la respuesta estable que proporciona el LQR-BDU (en línea continua) cuando se considera que la incertidumbre del sistema perturbado es

$$\delta \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0.55 & -0.01 & 0.01 \\ -0.03 & -0.29 & -0.47 & 0.07 \\ 0.01 & 0.02 & -0.01 & -0.47 \\ 0.05 & 0 & 0.26 & -0.02 \end{bmatrix}, \quad (4.203)$$

$$\delta \mathbf{G} = \mathbf{0}. \quad (4.204)$$

Como se observa el BDU mejora las prestaciones del sistema en presencia de incertidumbre. En la figura 4.14 se muestran las acciones de control, mientras que en la figura 4.15 se muestra el parámetro de regularización  $\lambda$ , el cual no es constante sino que varía en cada instante de tiempo teniendo en cuenta la incertidumbre. Así, en lugar de aplicar una regularización constante se lleva a cabo una regularización adaptativa.

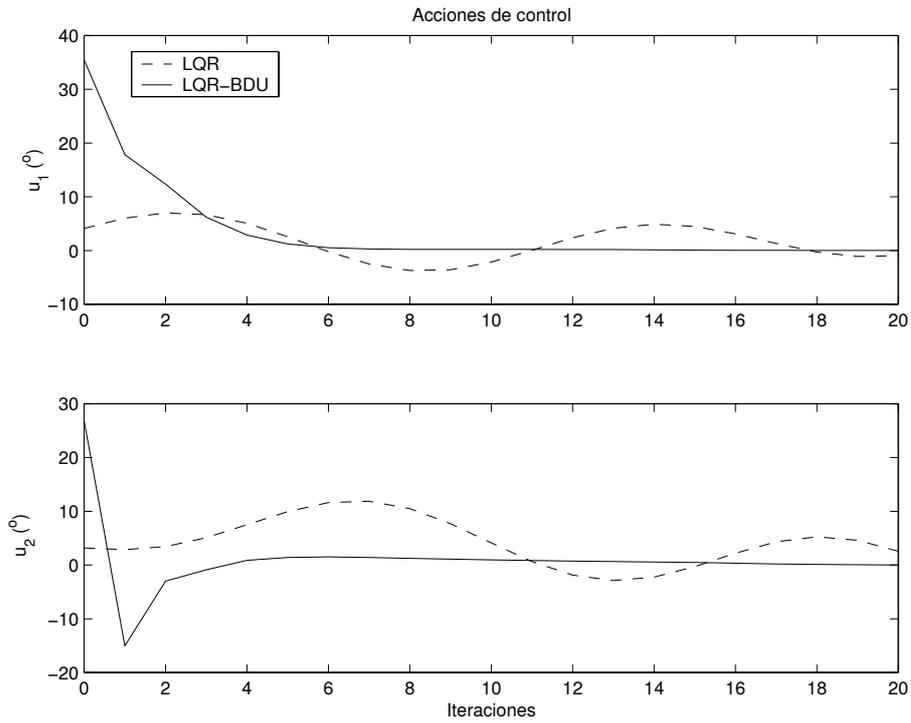


Figura 4.14: Respuesta del sistema (*acciones de control*) con BDU (*línea continua*) y sin BDU (*línea discontinua*).

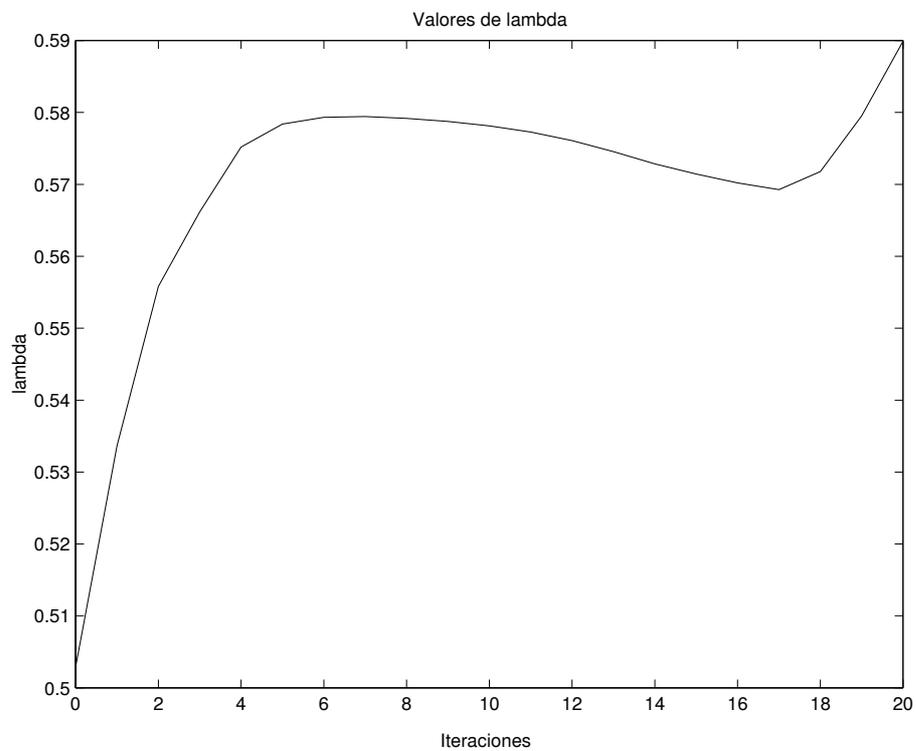


Figura 4.15: Parámetro de regularización  $\lambda$  en cada instante de tiempo.

## 4.5 Conclusiones.

En este capítulo, se han presentado los resultados de la técnica BDU aplicados al diseño de controladores LQR, lo que permite el diseño robusto del mismo.

Así, se lleva a cabo el sintonizado del LQR mediante BDU considerando en primer lugar un horizonte de predicción finito, lo que proporciona una mayor robustez en el sistema en bucle cerrado. Además, el parámetro  $r$  de penalización del esfuerzo de control en el LQR, que habitualmente se sintoniza de un modo empírico, se ve sustituido por  $\lambda_i$  al tener en cuenta las cotas de las incertidumbres presentes en el sistema. Ello conlleva también la modificación del parámetro  $p_i$  de la ecuación recursiva de Riccati, de modo que contemple la técnica BDU y el estudio de las condiciones necesarias para su aplicación.

Por otra parte, se ha abordado el tema de la estabilidad del LQR-BDU, bien mediante restricción terminal o mediante la consideración de horizonte de predicción infinito. En el primer caso la estabilidad está asegurada si el estado inicial conocido  $x_0$  pertenece al conjunto de estados para los cuales es posible satisfacer dicha restricción terminal, en el segundo, y bajo ciertas condiciones, la consideración de horizonte infinito garantiza la estabilidad, tal y como se ha demostrado en el apartado correspondiente.

Por otra parte, también se ha abordado la aplicación del LQR-BDU a sistemas  $n$ -dimensionales, lo cual no es trivial, ya que en este caso, no es posible obtener una ecuación explícita del parámetro  $\lambda$ , con el problema añadido de que en este caso, las expresiones de  $\mathbf{K}_i$  y  $\mathbf{P}_i$  dependen del vector de estado del peor caso  $\hat{\mathbf{x}}_i$ , y por tanto la solución presenta la forma de un problema TPBVP (*two-point boundary value problem*).

Este problema se resuelve iterativamente. La conclusión fundamental sería que la técnica BDU puede mejorar la robustez del LQR para sistemas  $n$ -dimensionales. Para ello, y al igual que con los sistemas de una dimensión, el parámetro ajustado empíricamente  $\mathbf{R}$  se modifica teniendo en cuenta la cota de la incertidumbre, y la matriz  $\mathbf{P}_i$  también se reajusta mediante la modificación de la ecuación recursiva matricial de Riccati.

La aplicación al LQR, sirve como precursor de la aplicación a **control predictivo**, que se abordará en el capítulo siguiente.

# Capítulo 5

## Control predictivo con BDU.

---

5.1	Introducción. . . . .	109
5.2	El controlador CPEE-BDU. . . . .	109
5.2.1	Control predictivo en espacio de estados. . . . .	109
5.2.2	Sintonizado del CPEE-BDU. . . . .	111
5.3	El controlador GPC-BDU. . . . .	113
5.3.1	Controlador Predictivo Generalizado (GPC). . . . .	113
5.3.2	Formulación del GPC como un problema LS. . . . .	118
5.3.3	Sintonizado de $\lambda$ del GPC-BDU con $\rho = 0$ . . . . .	122
5.3.3.1	Ejemplo 1. . . . .	124
5.3.3.2	Ejemplo 2. . . . .	126
5.3.4	Sintonizado de $\lambda$ del GPC-BDU con $\rho > 0$ . . . . .	130
5.3.4.1	Ejemplo 3. . . . .	130
5.3.4.2	Ejemplo 4. . . . .	133
5.4	Conclusiones. . . . .	135



## 5.1 Introducción.

A partir de la aplicación de la técnica BDU al LQR en el capítulo anterior, se extiende su uso al *control predictivo*, ya que éste es el objetivo de la tesis.

De entre los diferentes modelos que se pueden utilizar como predictores en la filosofía del control predictivo, se pueden destacar los modelos en *función de transferencia* (representación externa) y en *espacio de estados* (representación interna).

La teoría de control moderna hace uso de modelos basados en espacio de estados, ya que permite aplicarlos a sistemas con entradas y salidas múltiples (MIMO) tanto lineales como no lineales, mientras que para sistemas lineales con una entrada y una salida (SISO) e invariantes con el tiempo, el modelo en función de transferencia puede resultar más apropiado.

No obstante, partiendo del LQR formulado en espacio de estados en el capítulo anterior parece más lógico continuar con dicha formulación para el control predictivo, es decir el *Control Predictivo en Espacio de Estados* (CPEE).

Así en la sección 5.2 se presentará el CPEE y se planteará su sintonizado mediante BDU (CPEE-BDU) como un controlador que mejora la robustez del sistema. El planteamiento del CPEE-BDU mostrado se presenta como un problema TPBVP (*two-point boundary value problem*) al igual que ocurría con el LQR-BDU. Dicho problema dificulta la demostración de la estabilidad del controlador, y dado que en la tesis se abordan sólo sistemas lineales, se aborda posteriormente el control predictivo en función de transferencia, en particular el GPC (*Generalized Predictive Control*).

Por tanto, en la sección 5.3. se mostrará un breve repaso a los conceptos del controlador predictivo generalizado, se planteará el GPC como un problema de mínimos cuadrados (LS) presentando el problema del mal condicionamiento numérico en el control predictivo y las diferentes técnicas para solventarlo.

Finalmente, se presentará el sintonizado del GPC vía BDU como método que mejora el mal condicionamiento y la robustez del sistema, al mismo tiempo que proporciona un diseño guiado del parámetro de penalización del esfuerzo de control  $\lambda$  frente al tradicional ajuste empírico. Para finalizar la última sección se dedicará a las conclusiones del presente capítulo.

## 5.2 El controlador CPEE-BDU.

### 5.2.1 Control predictivo en espacio de estados.

El *control predictivo en espacio de estados* (CPEE) puede considerarse como un problema LQR con horizonte móvil (*receding horizon*), lo cual hace que se plantee como la resolución de una secuencia sucesiva de *ecuaciones recursivas de Riccati*, una en cada instante de tiempo.

Así el CPEE se plantea como

$$\min_{\{\mathbf{u}_i\}} \left[ \mathbf{x}_N^T \mathbf{P} \mathbf{x}_N + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{x}_j^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_j + \sum_{i=0}^{N_u-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{R} \mathbf{u}_i \right], \quad (5.1)$$

siendo  $\mathbf{R} > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$  (matrices definidas positivas) y  $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$  (matriz semidefinida positiva), y  $N$  y  $N_u$  los horizontes de predicción y control respectivamente, cumpliéndose  $N \geq N_u$ .

Por otra parte, se cumple

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad \forall i \geq N_u. \quad (5.2)$$

Para el planteamiento del problema se considera el siguiente modelo en espacio de estados

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{F} \mathbf{x}_i + \mathbf{G} \mathbf{u}_i, \quad (5.3)$$

donde  $\mathbf{x}_0$  es el estado inicial y  $\{\mathbf{u}_i\}$  indica la secuencia de control de entrada.

Una diferencia con el LQR consiste en que éste asumía  $N = N_u$ , aunque en este caso también se va a asumir por simplicidad (y sin pérdida de generalidad) resultando el problema CPEE

$$\min_{\{\mathbf{u}_i\}} \left[ \mathbf{x}_N^T \mathbf{P} \mathbf{x}_N + \sum_{i=0}^{N-1} [\mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i^T \mathbf{R} \mathbf{u}_i] \right]. \quad (5.4)$$

Por tanto, al igual que en el LQR, el problema (5.4) se puede resolver recursivamente dividiendo la función de coste en dos términos (programación dinámica), donde sólo el segundo término, mediante la ecuación en espacio de estados (5.3) para  $\mathbf{x}_N$ , depende de  $\mathbf{u}_{N-1}$ .

Minimizando respecto  $\mathbf{u}_{N-1}$ , se obtiene la ley de control por realimentación del estado para el instante  $N - 1$ , y generalizando se obtiene para  $0 \leq i \leq N - 1$ , donde el coste  $\mathbf{P}_i$  se propaga mediante la recursión de Riccati con la condición límite  $\mathbf{P}_N = \mathbf{P}$

$$\hat{\mathbf{u}}_i = -\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{K}_i = [\mathbf{R} + \mathbf{G}^T \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{F}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{Q} + \mathbf{K}_i^T \mathbf{R} \mathbf{K}_i + [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_i]^T \mathbf{P}_{i+1} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_i], \quad (5.7)$$

$$\mathbf{P}_N = \mathbf{P}. \quad (5.8)$$

La principal diferencia con el LQR viene de la aplicación del *horizonte móvil*, que implica que sólo se aplica la primera acción de control  $\hat{\mathbf{u}}_{0|0}$ , donde el subíndice  $|_0$  indica que dicha acción de control se ha calculado en el instante 0.

$$\hat{\mathbf{u}}_{0|0} = -\mathbf{K}_{0|0}\hat{\mathbf{x}}_0 = -[\mathbf{R} + \mathbf{G}^T\mathbf{P}_{1|0}\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}_{1|0}\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_0. \quad (5.9)$$

No obstante, se observa que a pesar de necesitar sólo el valor de  $\hat{\mathbf{u}}_{0|0}$ , se debe resolver la ecuación recursiva de Riccati para obtener  $\mathbf{P}_{1|0}$ , al igual que en el LQR.

En el siguiente instante de tiempo se plantea de nuevo el problema CPEE obteniendo el valor de  $\hat{\mathbf{u}}_{1|1}$

$$\hat{\mathbf{u}}_{1|1} = -[\mathbf{R} + \mathbf{G}^T\mathbf{P}_{2|1}\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}_{2|1}\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_1 = -\mathbf{K}_{1|1}\hat{\mathbf{x}}_1, \quad (5.10)$$

siendo, debido a la consideración del horizonte móvil,  $\mathbf{P}_{2|1} = \mathbf{P}_{1|0}$ , y por tanto  $\mathbf{K}_{1|1} = \mathbf{K}_{0|0}$ , de modo que el CPEE equivale a un controlador lineal  $\mathbf{K}$  por realimentación del estado

$$\mathbf{K} = [\mathbf{R} + \mathbf{G}^T\mathbf{P}_{1|0}\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}_{1|0}\mathbf{F}. \quad (5.11)$$

Dicho controlador se calcula una sola vez pues es constante, a diferencia del LQR donde el controlador variaba en cada instante de tiempo.

Para el caso  $N \neq N_u$  sirve el mismo resultado, salvo en la definición de la matriz  $\mathbf{R}$  que contendrá valores elevados de la diagonal principal correspondientes a los  $\hat{\mathbf{u}}_i$  con  $i \geq N_u$ , lo que equivale a forzar dichos valores de la acción de control a ser cero.

### 5.2.2 Sintonizado del CPEE-BDU.

A continuación se muestra el sintonizado del CPEE mediante BDU, con el fin de dotar al sistema de mayor robustez, considerando  $N = N_u$  por simplicidad y sin perder generalidad. Así pues se considera el siguiente modelo en espacio de estados con incertidumbre paramétrica  $\delta\mathbf{F}$  y  $\delta\mathbf{G}$

$$\mathbf{x}_{i+1} = [\mathbf{F} + \delta\mathbf{F}]\mathbf{x}_i + [\mathbf{G} + \delta\mathbf{G}]\mathbf{u}_i, \quad (5.12)$$

donde  $\mathbf{x}_0$  indica el valor del estado inicial, y  $\{\mathbf{u}_i\}$  indica la secuencia de control. Conociendo un límite de la incertidumbre ( $\|\delta\mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F$ ,  $\|\delta\mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G$ ), se plantea el problema CPEE-BDU como

$$\min_{\{\mathbf{u}_i\}} \max_{\substack{\|\delta\mathbf{F}\|_2 \leq \eta_F \\ \|\delta\mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G}} \left[ \mathbf{x}_N^T \mathbf{P} \mathbf{x}_N + \sum_{i=0}^{N-1} [\mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i^T \mathbf{R} \mathbf{u}_i] \right], \quad (5.13)$$

donde  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{P}$  son unas matrices definidas positivas y  $\mathbf{Q}$  una matriz semidefinida positiva.

Del mismo modo que con el LQR-BDU, el problema se puede resolver recursivamente dividiendo la función de coste en dos términos, donde se asume que  $\mathbf{Q} = q\mathbf{I}$  y  $\mathbf{R} = r\mathbf{I}$  son **matrices constantes diagonales**, y mediante unos cambios de variables se plantea el segundo término como un problema BDU del tipo (3.62)

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\substack{\|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \left[ \|\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}\mathbf{x} - [\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}]\|_2^2 + \rho \|\mathbf{x}\|_2^2 \right], \quad (5.14)$$

donde se ha sustituido

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{P}^{\frac{1}{2}}\mathbf{G}, & \mathbf{b} &\rightarrow -\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}\mathbf{F}\mathbf{x}_{N-1}, \\ \delta\mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{P}^{\frac{1}{2}}\delta\mathbf{G}, & \delta\mathbf{b} &\rightarrow -\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}\delta\mathbf{F}\mathbf{x}_{N-1}, \\ \eta_A &\rightarrow \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G, & \eta_b &\rightarrow \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\mathbf{x}_{N-1}\|_2, \\ \mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{u}_{N-1}, & \rho &\rightarrow r. \end{aligned}$$

Minimizando (5.14) para la variable  $\mathbf{x}$ , teniendo en cuenta la solución (3.83) y (3.84) del problema BDU y deshaciendo los cambios de variables y sustituyendo  $\lambda \leftarrow \lambda_{N-1}$ , se obtiene la ley de control para  $\hat{\mathbf{u}}_{N-1}$ .

Y repitiendo el procedimiento (programación dinámica) se obtiene la ley de control para el resto de instantes de tiempo  $0 \leq i \leq N - 1$

$$\hat{\mathbf{u}}_i = -\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{K}_i = [\lambda_i \mathbf{I} + \mathbf{G}^T \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{F}, \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \lambda_i = & \frac{\left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}_i] \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2}{\left\| \mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2} + \\ & + \frac{r \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}_i] \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2}{\left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}_i] \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2 + \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \left\| \mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2 + \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \left\| \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2}, \quad (5.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_i &= \mathbf{Q} + \mathbf{K}_i^T \mathbf{R} \mathbf{K}_i + [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_i]^T \mathbf{P}_{i+1} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_i] + \\
 &+ 2[\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_i]^T \mathbf{P}_{i+1} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_i] \cdot \frac{\left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_G \|\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i\|_2 + \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \eta_F \|\hat{\mathbf{x}}_i\|_2}{\left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{K}_i] \hat{\mathbf{x}}_i \right\|_2} + \\
 &+ \left\| \mathbf{P}_{i+1}^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 \left[ \eta_G^2 \mathbf{K}_i^T \mathbf{K}_i + \left[ \eta_F^2 + 2\eta_F \eta_G \frac{\|\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}_i\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}_i\|_2} \right] \mathbf{I} \right], \tag{5.18}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_N = \mathbf{P}, \tag{5.19}$$

de donde sólo interesa  $\mathbf{K}_{0|0}$ . En este caso, al igual que en el LQR-BDU, para calcular  $\mathbf{K}_{0|0}$  se ha de resolver un problema TPBVP (*Two-Point Boundary Value Problem*), debido a que las expresiones de  $\mathbf{K}_i$  y  $\mathbf{P}_i$  dependen del vector de estado del peor caso  $\hat{\mathbf{x}}_i$ , es decir  $\mathbf{K}_i(\hat{\mathbf{x}}_i)$  y  $\mathbf{P}_i(\hat{\mathbf{x}}_i)$ , y en concreto  $\mathbf{K}_{0|0}(\hat{\mathbf{x}}_{0|0})$ .

El problema de esta dependencia causa que al aplicar el horizonte móvil en el siguiente instante de tiempo, al partir de un estado inicial distinto  $\mathbf{x}_{1|1}$ , y al depender  $\mathbf{K}_i$  y  $\mathbf{P}_i$  de dicho estado inicial, no se va a cumplir  $\mathbf{K}_{1|1} = \mathbf{K}_{0|0}$ , y por tanto no va a ser posible expresar la ley de control del CPEE-BDU como una realimentación constante del estado, sino que va a variar en cada instante.

Desde este punto de vista, la ley de control es más compleja que la del LQR-BDU, pues en este caso, se plantea un TPBVP en cada instante de tiempo. Por tanto, a continuación se presenta la aplicación del BDU al control predictivo, pero en formato función de transferencia, adecuado para los sistemas lineales que se abordan en la tesis.

## 5.3 El controlador GPC-BDU.

### 5.3.1 Controlador Predictivo Generalizado (GPC).

Se pretende justificar en este apartado, las razones de la elección del controlador GPC como candidato a ser extendido a su versión BDU. Se han tenido en cuenta razones de índole académico (más usado en este ámbito), aunque es fácilmente trasladable al DMC, técnica predictiva más extendida en la industria pero con indudables limitaciones.

Por tanto los conceptos aquí explicados pueden ser aplicados tanto al controlador DMC como al controlador GPC, sin embargo, la exposición se ha realizado en base a éste debido sobre todo a que el GPC presenta las siguientes ventajas:

- Con el GPC se puede plantear una gama bastante amplia de problemas de control (procesos inestables, de fase no mínima, sistemas con retardo, etc.) con un número razonable de parámetros de diseño, mientras que el DMC se usa para procesos estables y utiliza modelos con un alto número de parámetros.

- El GPC ha sido validado en un amplio espectro de aplicaciones reales [Bitmead *et al.* 1990] asociadas al control de procesos.
- El modelo en forma de función de transferencia utilizado en el GPC incluye un modelo para las perturbaciones más complejo que el empleado, por ejemplo, en el DMC el cual supone perturbaciones constantes.
- El GPC fue concebido, además, para poder ser empleado en un esquema de control adaptativo [Clarke *et al.* 1987a], [Clarke *et al.* 1987b].

La formulación del GPC con índice de coste cuadrático ha sido ampliamente desarrollada en [Clarke *et al.* 1987a], [Clarke *et al.* 1987b] y [Camacho 1993].

En dicha formulación se utiliza el modelo estocástico CARIMA

$$y(k) = \frac{\mathbf{B}(z^{-1})z^{-1}}{\mathbf{A}(z^{-1})}u(k) + \frac{\mathbf{T}(z^{-1})}{\Delta\mathbf{A}(z^{-1})}\xi(k) \quad (5.20)$$

donde

- $y(k)$  es la salida del sistema.
- $u(k)$  es la acción de control.
- $\xi(k)$  representa la perturbación (ruido blanco).
- $\Delta = (1 - z^{-1})$ .
- $\mathbf{T}(z^{-1}) = t_0 + t_1z^{-1} + \dots + t_{nt}z^{-nt}$  es una característica estocástica del ruido, pero como es difícil de estimar, en la práctica es común utilizarlo como parámetro de diseño. Así pues  $\mathbf{T}$  es elegido por el diseñador (impuesto) y actúa como un **polinomio de filtrado de perturbaciones** que puede usarse para mejorar la **robustez** del sistema.
- $\mathbf{B}(z^{-1})z^{-1} = b_1z^{-1} + \dots + b_{nb}z^{-nb}$  es el numerador de la función de transferencia discreta del proceso.
- $\mathbf{A}(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{na}z^{-na}$  es el denominador de la función de transferencia discreta del proceso.

Considerando el modelo anterior y las ecuaciones polinómicas siguientes

$$\mathbf{T}(z^{-1}) = \mathbf{E}_i(z^{-1})\Delta\mathbf{A} + z^{-i}\mathbf{F}_i(z^{-1}), \quad (5.21)$$

$$\mathbf{E}_i(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1}) = \mathbf{G}_i(z^{-1})\mathbf{T}(z^{-1}) + z^{-i}\mathbf{\Gamma}_i(z^{-1}), \quad (5.22)$$

se plantea el siguiente modelo de predicción

$$y(k+i|k) = \mathbf{G}_i(z^{-1})\Delta u(k+i-1) + f(k+i|k), \quad (5.23)$$

$$f(k+i|k) = \frac{\mathbf{F}_i(z^{-1})}{\mathbf{T}(z^{-1})}y(k) + \frac{\mathbf{\Gamma}_i(z^{-1})}{\mathbf{T}(z^{-1})}\Delta u(k-1), \quad (5.24)$$

el cual permite, situados en el instante  $k$ , predecir el valor de la salida en el instante  $k + i$ .

Cabe destacar además, el claro significado que poseen las dos partes de la expresión (5.23):

- $f(k + i|k)$  es la predicción de la **respuesta libre** del sistema. Dicha predicción se calcula, exclusivamente, utilizando información conocida hasta el instante  $k$ , puesto que  $\mathbf{\Gamma}_i$  y  $\mathbf{F}_i$  son polinomios con un número finito de términos en potencias de  $z^{-1}$  (FIR).
- $\mathbf{G}_i(z^{-1})\Delta u(k + i - 1)$  es la predicción de la **respuesta forzada** del sistema, basada en un número finito de acciones de control propuestas para instantes futuros.

Aplicando la expresión (5.23) para los instantes  $1, \dots, N$ , se puede obtener una forma matricial para la predicción de esos instantes

$$\begin{bmatrix} y(k+1|k) \\ y(k+2|k) \\ \vdots \\ y(k+N|k) \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix} + \mathbf{f}, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (5.26)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \dots & g_0 \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{\Gamma} \begin{bmatrix} \Delta u^f(k-1) \\ \Delta u^f(k-2) \\ \vdots \\ \Delta u^f(k-n_\Gamma) \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} y^f(k) \\ y^f(k-1) \\ \vdots \\ y^f(k-n_F) \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

$$\Delta u^f(k) = \frac{\Delta u(k)}{\mathbf{T}(z^{-1})}, \quad (5.29)$$

$$\Delta y^f(k) = \frac{y(k)}{\mathbf{T}(z^{-1})}, \quad (5.30)$$

siendo  $\mathbf{\Gamma}$  y  $\mathbf{F}$  las matrices que contienen en cada fila los coeficientes de los polinomios  $\mathbf{\Gamma}_i$  y  $\mathbf{F}_i$  de grado  $n_\Gamma$  y  $n_F$  respectivamente y  $g_i$  los coeficientes<sup>1</sup> de los polinomios  $\mathbf{G}_i$ .

Para el cálculo del controlador GPC, se plantea la minimización de un índice cuadrático que incluye las predicciones de la salida a lo largo de un número finito de instantes

$$J(\Delta \mathbf{u}) = \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i [y(k+i|k) - w(k+i)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda_j [\Delta u(k+j-1)]^2 \quad (5.31)$$

donde

- $N_1, N_2$  son los valores mínimo y máximo que establecen el *horizonte de predicción* o número  $N$  de predicciones a realizar,  $N = N_2 - N_1 + 1$ .
- $N_u$  se denomina *horizonte de control* y representa el máximo número de incrementos de la variable manipulada a calcular (grados de libertad) teniendo en cuenta que  $\Delta u(k + N_u) = \Delta u(k + N_u + 1) = \dots = \Delta u(k + N - 1) = 0$ .
- $\sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i [y(k+i|k) - w(k+i)]^2$  representa una medida del error entre la salida y la referencia  $w$  en el horizonte de predicción, ponderado por los factores  $\alpha_i$ .
- $\sum_{j=1}^{N_u} \lambda_j [\Delta u(k+j-1)]^2$  representa una medida del esfuerzo de control en el horizonte de control, ponderado por los factores  $\lambda_j$ .

Es posible expresar el índice (5.31) en forma cuadrática como

$$J(\Delta \mathbf{u}) = [\mathbf{y} - \mathbf{w}]^T \mathbf{A} [\mathbf{y} - \mathbf{w}] + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{L} \Delta \mathbf{u} \quad (5.32)$$

donde  $\mathbf{A}_{N \times N}$  y  $\mathbf{L}_{N_u \times N_u}$  son matrices diagonales, siendo habitualmente constantes,  $\mathbf{L} = \lambda \mathbf{I}$  y  $\mathbf{A} = \alpha \mathbf{I}$ . Asumiendo  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ , por simplicidad, el índice también se podría expresar como

$$J(\Delta \mathbf{u}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|_2^2 + \lambda \|\Delta \mathbf{u}\|_2^2, \quad (5.33)$$

siendo

$$\mathbf{w} = [w(k+1), \dots, w(k+N)]^T, \quad (5.34)$$

$$\mathbf{y} = [y(k+1|k), \dots, y(k+N|k)]^T, \quad (5.35)$$

$$\Delta \mathbf{u} = [\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+N_u-1)]^T. \quad (5.36)$$

Sustituyendo (5.26) en (5.32) se plantea la minimización del siguiente índice

---

<sup>1</sup>Los coeficientes de los polinomios  $\mathbf{G}_i$  resultan ser los coeficientes de la respuesta del proceso ante un escalón unitario.

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} J(\Delta \mathbf{u}) = \min_{\Delta \mathbf{u}} [\| \mathbf{G} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w} \|_2^2 + \lambda \| \Delta \mathbf{u} \|_2^2] \quad (5.37)$$

obteniendo como solución la expresión del controlador GPC SISO sin restricciones

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}^T [\mathbf{w} - \underbrace{\mathbf{\Gamma} \Delta \mathbf{u}^f - \mathbf{F} \mathbf{y}^f}_{\mathbf{f}}] \quad (5.38)$$

donde

- $\mathbf{G}_{N \times N_u}$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{N \times n_\Gamma}$ ,  $\mathbf{F}_{N \times n_F}$  son matrices procedentes del modelo de predicción (5.26).
- $\Delta \mathbf{u}_{n_\Gamma \times 1}^f$  es el vector de los incrementos de acciones de control pasadas, filtradas por el polinomio  $\mathbf{T}$ .
- $\mathbf{y}_{n_F \times 1}^f$  es el vector de salidas pasadas, filtradas por el polinomio  $\mathbf{T}$ .

Llamando  $\mathbf{e}$  al error obtenido al restar la referencia  $\mathbf{w}$  menos la predicción de la respuesta libre del sistema  $\mathbf{f}$

$$\mathbf{e} = \mathbf{w} - \mathbf{f} = \mathbf{w} - [\mathbf{\Gamma} \Delta \mathbf{u}^f + \mathbf{F} \mathbf{y}^f] \quad (5.39)$$

se puede reescribir la ley de control (5.38) como

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{e}. \quad (5.40)$$

Hay que tener en cuenta que al asumir el CPBM horizonte móvil (*receding horizon*), tal y como se comentó en el capítulo 2, se debe plantear la resolución del anterior problema de minimización en cada periodo de muestreo, incorporando así nueva información de la evolución dinámica del proceso.

A continuación se hará referencia al GPC en dos versiones, el GPC **con penalización** del esfuerzo de control  $\lambda$ , cuyo planteamiento es

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} [\| \mathbf{G} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{e} \|_2^2 + \lambda \| \Delta \mathbf{u} \|_2^2] \quad (5.41)$$

y la ley de control resulta

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{e}, \quad (5.42)$$

y el GPC **sin penalización** del esfuerzo de control, cuyo planteamiento es

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} \|\mathbf{G}\Delta \mathbf{u} - \mathbf{e}\|_2 \quad (5.43)$$

y la ley de control

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{e}. \quad (5.44)$$

### 5.3.2 Formulación del GPC como un problema LS.

En control, el principio de mínimos cuadrados (LS) es fundamental y está presente en muchos diseños (LQG, control predictivo, etc.). Su popularidad es debida a que es fácil de plantear y de resolver. Muchos algoritmos de control predictivo (DMC, GPC) están basados en el principio de mínimos cuadrados y su objetivo es el mismo, tratar de obtener una inversa del proceso aproximada (siendo en el caso límite cuando horizonte de control  $N_u$  y predicción  $N$  coinciden una inversa exacta del proceso). Su planteamiento es el siguiente, dado un modelo del proceso con el que predecir la respuesta de éste, se plantea un sistema de ecuaciones, en la mayoría de los casos inconsistente, y se obtiene una solución aproximada para las acciones de control que minimizan los residuos.

Así, el planteamiento del GPC sin penalización del esfuerzo de control (5.43) coincide con el planteamiento de un problema de mínimos cuadrados

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} \|\mathbf{G}\Delta \mathbf{u} - [\mathbf{w} - \mathbf{f}]\|_2 \quad (5.45)$$

donde la predicción de la respuesta libre del proceso  $\mathbf{f}$  marca cuál debería ser la respuesta forzada de éste para conseguir llegar a la referencia. En la predicción de la salida del proceso se utiliza la salida actual produciendo **predicciones contaminadas** por ruido de medida, errores de redondeo o incertidumbres en  $\mathbf{G}$ . Esto implica que el vector  $\mathbf{e} = [\mathbf{w} - \mathbf{f}]$  generalmente no sea una combinación lineal de las columnas de  $\mathbf{G}$  y por tanto, no pertenezca al espacio generado por las columnas de  $\mathbf{G}$  consideradas como vectores ( $\mathbf{e} \notin \mathcal{R}(\mathbf{G})$ ). Por ello el método de mínimos cuadrados buscará el vector  $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{G}\Delta \hat{\mathbf{u}}$  más cercano al vector  $\mathbf{e} = [\mathbf{w} - \mathbf{f}]$  en el sentido de la norma euclídea. Esta solución es el ya conocido sistema de **ecuaciones normales**

$$[\mathbf{G}^T \mathbf{G}]\Delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{G}^T \mathbf{e} \quad (5.46)$$

cuya solución es única si la matriz  $\mathbf{G}$  es de rango completo y viene dada por

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{e}. \quad (5.47)$$

Esta solución coincide con la del GPC sin penalización del esfuerzo de control (5.44) que se mostró anteriormente. Dicha solución produce el mínimo residuo, el cual es ortogonal a la matriz dinámica del proceso  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G}^T [\mathbf{G}\Delta\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{e}] = \mathbf{0}. \quad (5.48)$$

Como se comentó en el capítulo 3, habitualmente es necesario considerar alternativas al método de mínimos cuadrados, principalmente por dos razones:

- 1) Aunque el controlador predictivo trate de obtener una inversa (en el mejor de los casos exacta) del proceso, a menudo se requieren **acciones de control excesivas** imposibles de implementar físicamente.
- 2) Principalmente dicho método es muy **sensible a errores** en los datos. Es decir un controlador basado en mínimos cuadrados a partir de un modelo  $\mathbf{G}$  y un error de predicción  $\mathbf{e}$  puede tener un funcionamiento inadecuado si el proceso real no está definido completamente por el modelo  $\mathbf{G}$ , sino que responde por ejemplo a  $(\mathbf{G} + \delta\mathbf{G})$  para un  $\delta\mathbf{G}$  desconocido. De hecho, si se asume que las acciones de control son calculadas a partir de la expresión (5.47) y que  $\mathbf{e}$  no sólo contiene ruido, sino que también está perturbado ya que proviene realmente del proceso  $(\mathbf{G} + \delta\mathbf{G})$  y no del modelo  $\mathbf{G}$ , entonces

$$\mathbf{e} \approx [\mathbf{G} + \delta\mathbf{G}]\Delta\hat{\mathbf{u}} \quad (5.49)$$

y las acciones de control calculadas  $\Delta\hat{\mathbf{u}}$  producirán el siguiente residuo

$$\| [\mathbf{G} + \delta\mathbf{G}]\Delta\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{e} \|_2 \leq \| \mathbf{G}\Delta\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{e} \|_2 + \| \delta\mathbf{G}\Delta\hat{\mathbf{u}} \|_2, \quad (5.50)$$

es decir, como máximo el residuo que siempre aparece en mínimos cuadrados más un término adicional debido a la perturbación en los datos. Como se puede observar estas perturbaciones en los datos pueden degradar las prestaciones de los diseños basados en mínimos cuadrados, dado que puede hacer que el residuo sea muy elevado.

Una solución típica para tratar de evitar el problema **1)** consiste en modificar ligeramente el problema de mínimos cuadrados incorporando un factor de ponderación en la acción de control. El llamado **mínimos cuadrados regularizado** (ya planteado en el capítulo 3) trata ahora de resolver

$$\min_{\Delta\mathbf{u}} [\| \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{e} \|_2^2 + \lambda \| \Delta\mathbf{u} \|_2^2] \quad (5.51)$$

eligiendo  $\lambda > 0$  (regularización positiva). Dicho planteamiento coincide con el del GPC con penalización del esfuerzo de control (5.41). La solución es única y viene dada por

$$\Delta\hat{\mathbf{u}} = [\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{e} \quad (5.52)$$

debido a que la matriz  $[\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}]$  es siempre definida positiva y por tanto invertible, la cual coincide con la ley de control del GPC con penalización del esfuerzo de control (5.42). Sin embargo esta solución requiere una elección del parámetro  $\lambda$  por parte del diseñador basada en la experiencia.

Por otra parte, también el problema de *mínimos cuadrados regularizado* se podría plantear como un simple problema de mínimos cuadrados tal y como se demuestra a continuación.

**Demostración:** Considerando el vector

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{e} \\ \lambda^{\frac{1}{2}}\Delta\mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

ya que  $\lambda > 0$ . Se puede comprobar que la magnitud al cuadrado de este vector (su norma euclídea al cuadrado), es equivalente al índice de coste del GPC

$$\begin{aligned} J(\Delta\mathbf{u}) &= \|\mathbf{G}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{e}\|_2^2 + \lambda \|\Delta\mathbf{u}\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{G}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{e}\|_2^2 + \|\lambda^{\frac{1}{2}}\Delta\mathbf{u}\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{e} \\ \lambda^{\frac{1}{2}}\Delta\mathbf{u} \end{bmatrix} \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Reescribiendo (5.54) como

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{e} \\ \lambda^{\frac{1}{2}}\Delta\mathbf{u} \end{bmatrix} \right\|_2^2 &= \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{I} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u} - \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \hat{\mathbf{G}}\Delta\mathbf{u} - \hat{\mathbf{e}} \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (5.55)$$

se puede concluir que el valor óptimo (5.52) es la solución, en el sentido de mínimos cuadrados, del sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\hat{\mathbf{G}}\Delta\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{e}} \quad (5.56)$$

donde  $\hat{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{(N+N_u) \times N_u}$  y  $\hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^{(N+N_u) \times 1}$ . Se define el sistema de ecuaciones normales asociado al sistema (5.56) como

$$\hat{\mathbf{G}}^T \hat{\mathbf{G}} \Delta\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{G}}^T \hat{\mathbf{e}} \quad (5.57)$$

donde  $\hat{\mathbf{G}}^T \hat{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{N_u \times N_u}$  y  $\hat{\mathbf{G}}^T \hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^{N_u \times 1}$ . El sistema de ecuaciones normales (5.57), posee siempre una solución<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Siempre y cuando  $\text{rank}(\hat{\mathbf{G}}) = N_u$ .

$$\begin{aligned}\Delta \hat{\mathbf{u}} &= [\hat{\mathbf{G}}^T \hat{\mathbf{G}}]^{-1} \hat{\mathbf{G}}^T \hat{\mathbf{e}} \\ &= [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{e}.\end{aligned}\tag{5.58}$$

La expresión (5.58) coincide con la solución del sistema (5.56) en caso de que éste fuera compatible pero, generalmente, éste no lo es. Es decir, no existen grados de libertad suficientes para obtener una solución exacta. En ese caso (5.58) es la solución en el sentido de mínimos cuadrados del sistema (5.56). ■

Queda por tanto demostrado que el problema GPC, tanto con penalización del esfuerzo de control ( $\lambda \neq 0$ ) o sin él ( $\lambda = 0$ ) se puede plantear como un problema de mínimos cuadrados. El caso de considerar  $\lambda \neq 0$  implica que se lleva a cabo una regularización de dicho problema.

El verdadero motivo por el que el GPC incluye un factor de ponderación en la acción de control es para aliviar el problema de mal condicionamiento de la matriz  $\mathbf{G}$ , ya que este problema se magnifica al calcular  $[\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1}$ , para obtener la ley de control, sobre todo cuando los **horizontes de predicción y control son elevados**.

Existen diferentes estrategias usadas actualmente en CPBM para solventar el problema de mal condicionamiento, como son:

- *Singular Value Thresholding* (SVT), que lleva a cabo una descomposición en valores singulares (SVD) del modelo del proceso, de modo que los valores singulares que se encuentren por debajo de un determinado valor límite son despreciados, obteniendo así un nuevo modelo con un número de condición menor (por ejemplo, lo usa el RMPCT de *Honeywell*).
- *Ponderación de las Componentes Principales* (PCW), que podría ser vista como una variante de la anterior, ya que también hace uso de la SVD, pero además de eliminar valores singulares [Sanchis *et al.* 2002], [Sanchis *et al.* 2003], también los puede ponderar, con lo que el método es más flexible que el SVT [Sanchis *et al.* 2001], [Sanchis 2002].
- *Ranking de la variable controlada*, donde se establece una clasificación de las variables controladas (caso MIMO) según su controlabilidad, y en caso de que se detecte un número de condición elevado, se abandonan las variables con *baja prioridad* hasta que vuelva el buen condicionamiento (por ejemplo, el algoritmo SMC-IDCOM de *Aspen Technology*).
- *Variables de holgura (slack variables) en el LP (linear programming)*. En el caso particular de usar un optimizador en régimen permanente en un nivel jerárquico superior al CPBM, por ejemplo, el uso del LP sobre el DMC [Ramos *et al.* 2002b], se pueden usar las *variables de holgura* para mejorar el mal condicionamiento.

- *Penalización del esfuerzo de control (move suppression factor)*. El parámetro de penalización del esfuerzo de control  $\lambda$  incrementa la magnitud de los elementos de la matriz que se ha de invertir en el problema de mínimos cuadrados que proporciona la ley de control, reduciendo así el número de condición.

En el límite de que el parámetro  $\lambda$  tuviera un valor de  $\infty$ , el número de condición de todos los subprocesos sería de 1. Esta estrategia es similar a la del SVT en el sentido de que ambas reducen la norma de los incrementos de las acciones de control.

Por tanto, el parámetro  $\lambda$  (que puede ser una matriz, sobre todo en el caso de sistemas MIMO [Ramos *et al.* 2001]) se puede ajustar con dos fines diferentes:

- reducir el número de condición de la matriz que se va a invertir,
- y evitar acciones de control agresivas.

Aunque hay estudios sobre este aspecto **dual** de  $\lambda$  [Maurath *et al.* 1988], la atención sobre  $\lambda$ , sobre todo se ha centrado en el segundo objetivo.

Algunos trabajos hay hechos que ofrecen una expresión analítica para el parámetro de penalización del esfuerzo de control  $\lambda$ , con el fin de reducir el mal condicionamiento del sistema [Shridhar y Cooper 1997]. En dicho trabajo se obtiene una **expresión analítica** del número de condición y a partir de ella, se deriva una expresión para  $\lambda$ , de modo que el número de condición se acota por un valor fijo. El principal inconveniente de este método es que *aproxima* el proceso por un sistema de **primer orden** más un retardo con el fin de obtener la expresión analítica de manera sencilla.

De las diferentes estrategias, ésta última (diseño del parámetro de penalización del esfuerzo de control) constituye el objetivo de la tesis, y es la que se llevará a cabo mediante la aplicación de la técnica BDU.

Para ello, se hará referencia al GPC en dos versiones, el GPC **con penalización** inicial del esfuerzo de control, al que se le denota por  $\rho$  para distinguirlo del parámetro de regularización  $\lambda$  que proporciona la técnica BDU, y el GPC **sin penalización** del esfuerzo de control ( $\rho = 0$ ).

### 5.3.3 Sintonizado de $\lambda$ del GPC-BDU con $\rho = 0$ .

Tal y como se comentó en el capítulo 3 el inconveniente de elegir  $\lambda$  de un modo intuitivo, y sin ningún procedimiento o técnica que ayude en su diseño, radica en que si es muy grande, se produce una **sobrerregularización** la cual puede originar pérdida de información importante, y si  $\lambda$  resulta pequeño se produce una **subregularización** que puede provocar que la solución no sea robusta, es decir que sea sensible a errores en los datos.

Así en este capítulo se va a usar la técnica BDU que lleva a cabo la **regularización semiautomática** sin intervención del usuario, diseñando  $\lambda$  a partir de una cota de la incertidumbre del sistema.

Si se supone que se ha identificado el proceso a controlar y se dispone de un modelo nominal en forma de matriz dinámica  $\mathbf{G}$ , y por otro lado que el error de predicción está contaminado seguramente por ruido de medida que explica las discrepancias entre  $\mathbf{G}\Delta\mathbf{u}$  y  $\mathbf{e}$ , siendo el vector de acciones de control en principio desconocidas, se puede expresar mediante

$$\mathbf{G}\Delta\mathbf{u} \approx \mathbf{e}, \quad (5.59)$$

es decir, se considera el problema GPC sin penalización inicial del esfuerzo de control  $\rho$  (5.43)

$$\min_{\Delta\mathbf{u}} \|\mathbf{G}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{e}\|_2. \quad (5.60)$$

Si se asume que la verdadera matriz que relaciona las acciones de control  $\Delta\mathbf{u}$  con el error de predicción no es  $\mathbf{G}$  sino una versión perturbada de ésta, llámese  $(\mathbf{G} + \delta\mathbf{G})$  y que el error de predicción no es realmente  $\mathbf{e}$  sino  $(\mathbf{e} + \delta\mathbf{e})$ , y que las perturbaciones  $\delta\mathbf{G}$  y  $\delta\mathbf{e}$  no son conocidas, aunque sí un límite superior

$$\|\delta\mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G, \quad (5.61)$$

$$\|\delta\mathbf{e}\|_2 \leq \eta_e, \quad (5.62)$$

se puede plantear el problema BDU (3.27) como

$$\min_{\Delta\mathbf{u}} \max_{\substack{\|\delta\mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G \\ \|\delta\mathbf{e}\|_2 \leq \eta_e}} \|[\mathbf{G} + \delta\mathbf{G}]\Delta\mathbf{u} - [\mathbf{e} + \delta\mathbf{e}]\|_2 \quad (5.63)$$

cuya solución (ecuaciones (3.59) y (3.60)) resulta

$$\Delta\hat{\mathbf{u}} = [\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{e}, \quad (5.64)$$

$$\lambda = \frac{\eta_G \|\mathbf{G}\Delta\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{e}\|_2}{\|\Delta\hat{\mathbf{u}}\|_2}. \quad (5.65)$$

Es decir, partiendo de un planteamiento del GPC sin penalización del esfuerzo de control,  $\rho = 0$ , la aplicación de la técnica BDU considerando la incertidumbre presente en el sistema, lleva a cabo una regularización guiada del problema, mediante el parámetro  $\lambda$ .

Hay que hacer notar que la expresión (5.64) es la solución única y exacta del siguiente problema de mínimos cuadrados regularizado

$$\min_{\Delta\mathbf{u}} [\|\mathbf{G}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{e}\|_2^2 + \lambda \|\Delta\mathbf{u}\|_2^2], \quad (5.66)$$

por lo tanto, la solución del problema BDU con incertidumbres acotadas puede ser visto como un problema de control predictivo con una elección automática del factor de ponderación de la acción de control  $\lambda$  en función del error de predicción en un instante y del límite máximo de la incertidumbre que se desee manejar. Esta ponderación automática proviene del cálculo de  $\lambda$  en cada instante (aplicando el horizonte móvil, típico del CPBM) con un algoritmo de tipo bisección para resolver la ecuación secular (5.65).

### 5.3.3.1 Ejemplo 1.

En este ejemplo se pretende mostrar cómo el sintonizado del GPC mediante BDU permite ajustar el parámetro de penalización del esfuerzo de control  $\lambda$  incrementando la robustez del sistema cuando aparece incertidumbre. Si se considera el siguiente proceso continuo

$$G(s) = \frac{-1.89(s - 0.64)}{(s^2 + 0.36s + 0.24)}, \quad (5.67)$$

el cual se discretiza para un periodo de muestreo  $T = 1$  s., y se diseña un GPC con los siguientes parámetros

$N_1$	$N_2$	$N_u$	$\mathbf{T}(z^{-1})$
1	10	3	1

(5.68)

se muestra en la figura 5.1 la respuesta en bucle cerrado del proceso controlado con el regulador GPC anterior (suponiendo que en este caso modelo y proceso coinciden).

Si por otra parte se supone que el proceso real  $G_p(s)$  no es exactamente como el modelo  $G(s)$ , sino

$$G_p(s) = \frac{-1.76(s - 0.64)}{(s^2 + 0.22s + 0.22)}, \quad (5.69)$$

y se trata de controlar el proceso con el regulador GPC calculado, se puede observar cómo la respuesta de bucle cerrado es inestable (figura 5.2).

Para aplicar el método de ponderación automática basado en incertidumbres acotadas (BDU) se debe obtener la cota superior para el posible conjunto de incertidumbres  $\delta\mathbf{G}$ . Para ello se calculan las respuestas ante entrada en forma de escalón del modelo y del proceso (figura 5.3) y se construyen a partir de estas respuestas sendas matrices dinámicas  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}_p$ .

Por un lado la matriz  $\mathbf{G}$  es la que se utiliza en el controlador. Por otro la matriz  $\delta\mathbf{G}$  se puede calcular como la diferencia entre la matriz que usa el controlador y la que resulta del proceso real  $\mathbf{G}_p$ , es decir

$$\delta\mathbf{G} = \mathbf{G}_p - \mathbf{G} \quad (5.70)$$

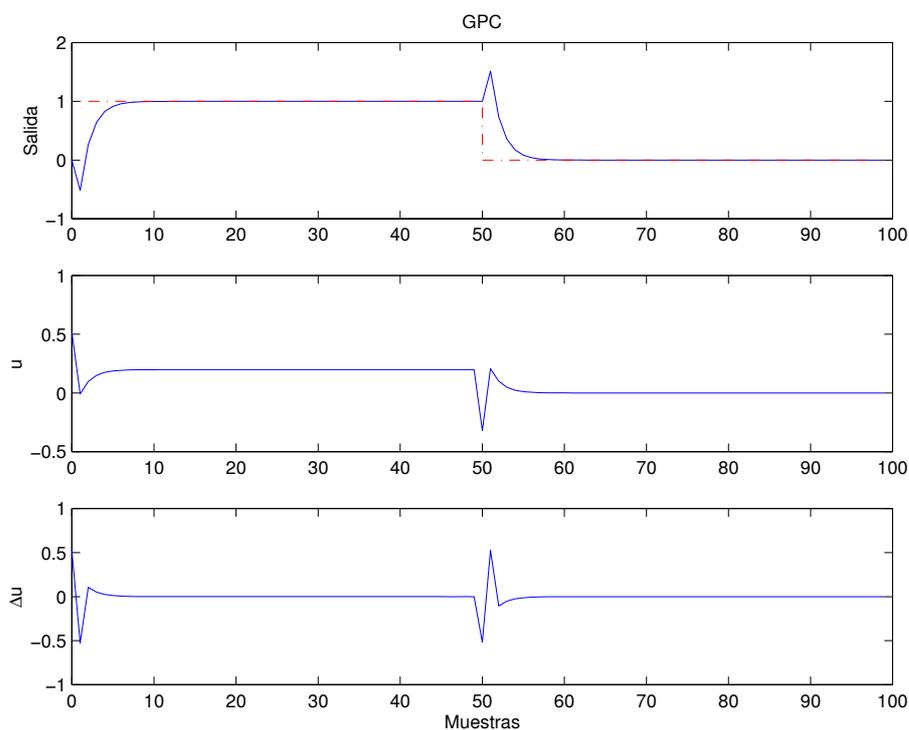


Figura 5.1: Respuesta del proceso cuando modelo y proceso coinciden.

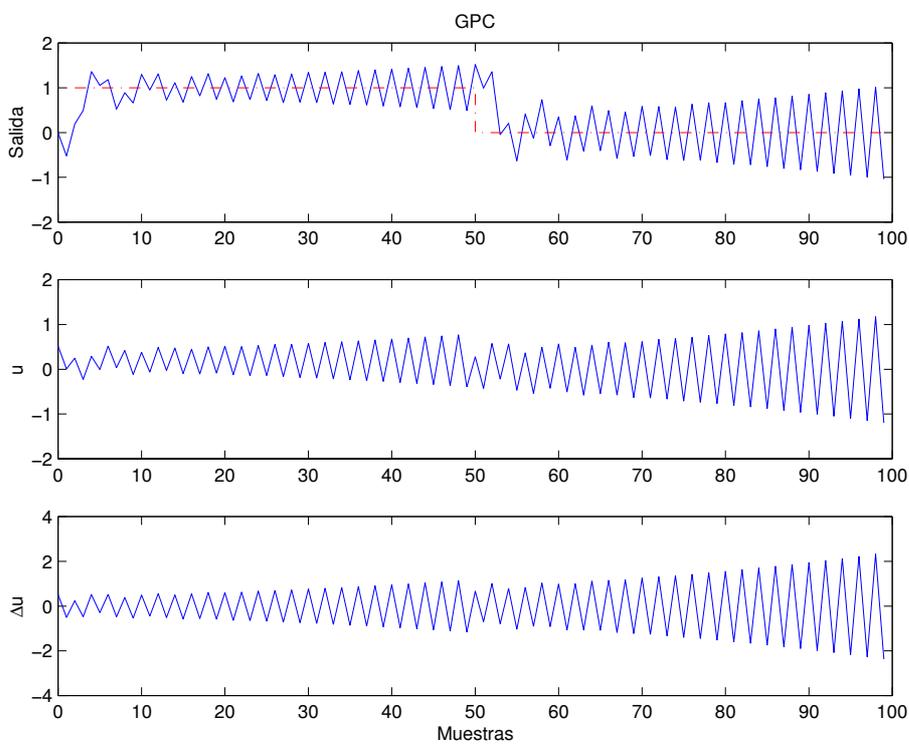


Figura 5.2: Respuesta del proceso cuando modelo y proceso son distintos.

y la cota superior  $\eta_G$  se calcula como

$$\eta_G = \|\delta \mathbf{G}\|_2, \quad (5.71)$$

resultando en este caso  $\eta_G = 3.54$ .

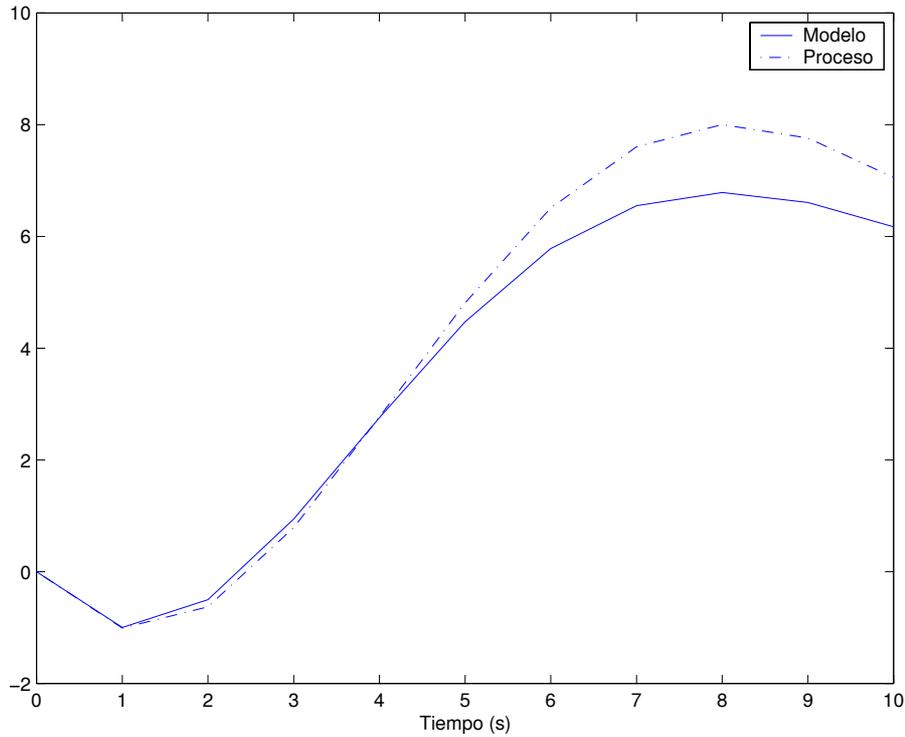


Figura 5.3: Respuestas ante un escalón del proceso y el modelo.

Como una medida de la diferencia entre modelo y proceso se puede calcular el ratio

$$ratio = \frac{\|\delta \mathbf{G}\|_2}{\|\mathbf{G}\|_2} \cdot 100 = 14.90 \%. \quad (5.72)$$

En la figura 5.4, se observa cómo el factor de ponderación  $\lambda$  se ajusta automáticamente para hacer frente a las discrepancias entre el modelo y el proceso.

### 5.3.3.2 Ejemplo 2.

En este ejemplo se pretende de nuevo mostrar cómo el GPC-BDU puede incrementar la robustez del sistema cuando aparece incertidumbre, pero en este caso se compara con un GPC que ya pretende mejorar la robustez mediante el uso de polinomio de filtrado  $\mathbf{T}(z^{-1})$ . Considérese el siguiente proceso continuo

$$G(s) = \frac{16}{(s^2 + 2s + 16)}, \quad (5.73)$$

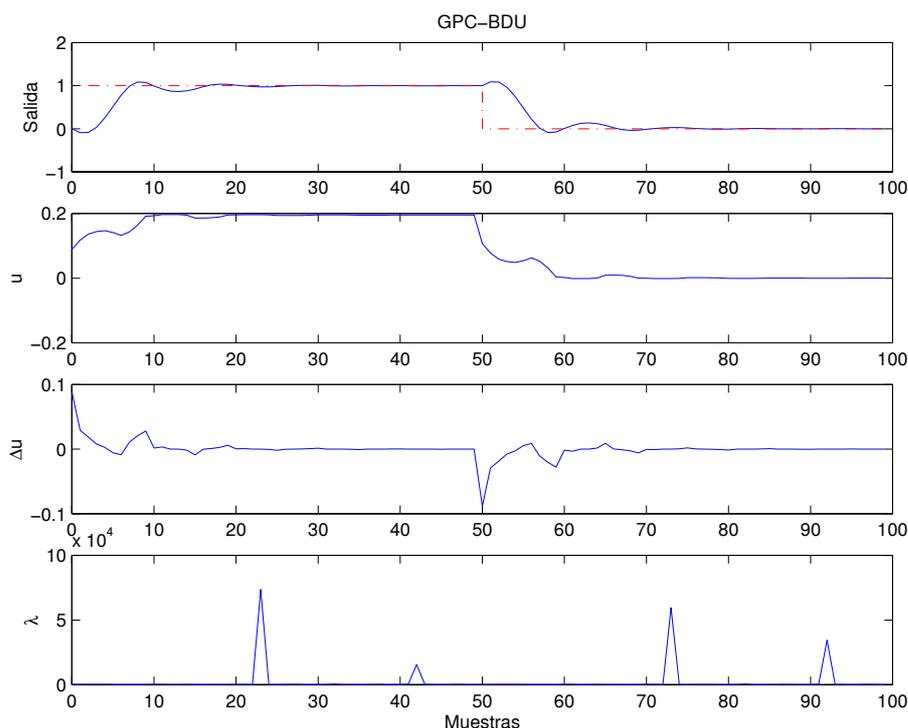


Figura 5.4: Respuesta en bucle cerrado con ajuste dinámico del factor  $\lambda$ .

el cual se discretiza para un periodo de muestreo  $T = 0.1$  s., y se diseña un GPC con los siguientes parámetros

$N_1$	$N_2$	$N_u$	$\mathbf{T}(z^{-1})$
1	30	3	$1 - 0.9z^{-1}$

(5.74)

La respuesta de este controlador cuando proceso y modelo coinciden se muestra en la figura 5.5. En este caso se ha utilizado en el diseño un polinomio de filtrado  $\mathbf{T}(z^{-1})$  distinto de 1, lo que implica una mayor robustez del diseño frente a variaciones del proceso respecto al modelo.

Por otra parte en la figura 5.6 se muestran las respuestas ante entrada en forma de escalón del modelo y del proceso cuando se considera que este último es

$$G_p(s) = \frac{16(s + 0.9)}{(s^2 + 4s + 16)}. \quad (5.75)$$

Realizando la misma operación que en el ejemplo anterior, se obtiene un ratio del 70.55%. El controlador GPC de nuevo es incapaz de hacer frente a estas diferencias entre proceso y modelo incluso con polinomio de filtrado (figura 5.7).

En la figura 5.8 se observa cómo, efectuando un ajuste dinámico del factor de ponderación  $\lambda$ , siendo  $\eta_G = 6.70$  se consigue estabilizar el sistema.

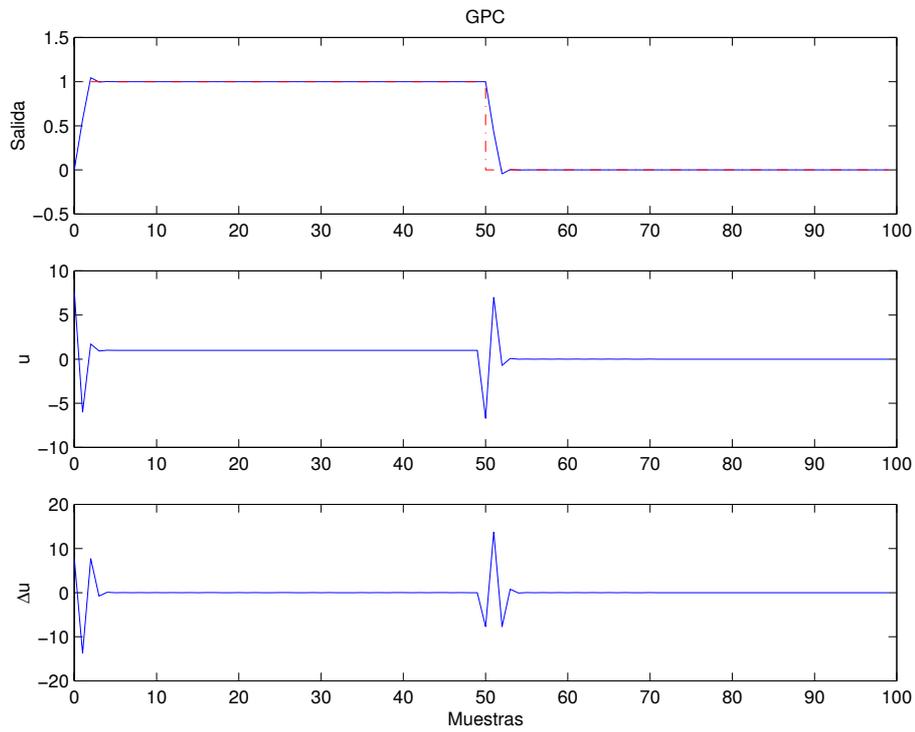


Figura 5.5: Respuesta del proceso cuando modelo y proceso coinciden.

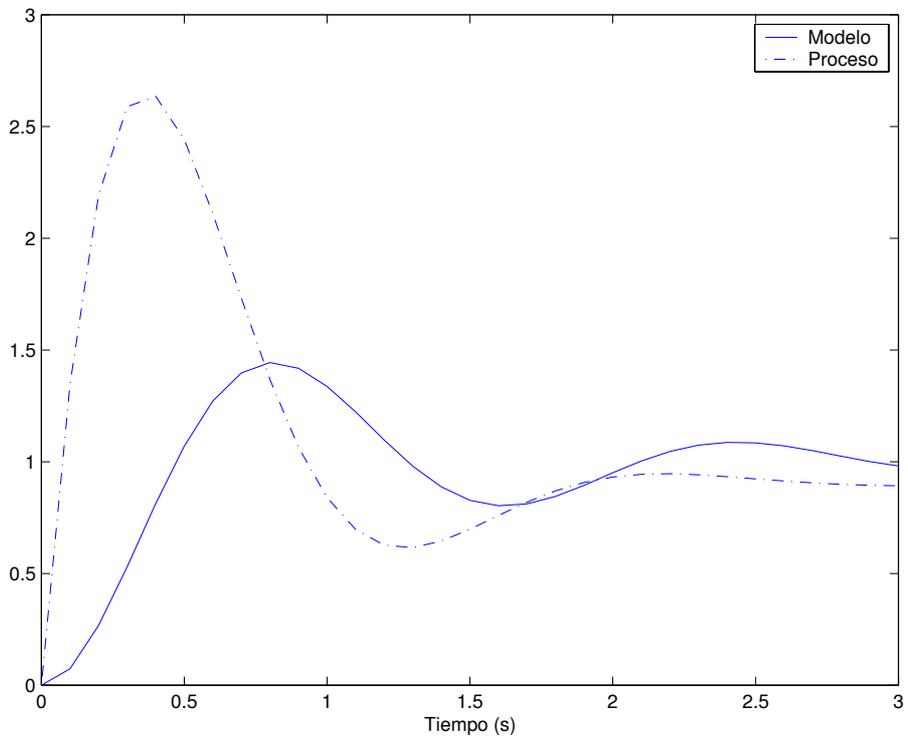


Figura 5.6: Respuestas ante un escalón del proceso y el modelo.

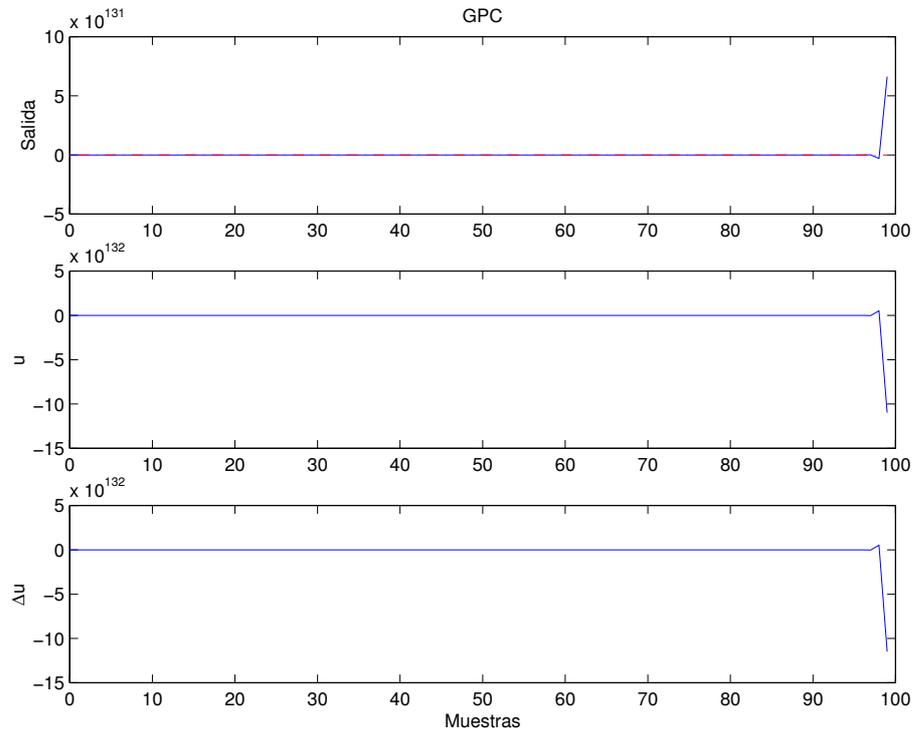


Figura 5.7: Respuesta del proceso cuando modelo y proceso son distintos.

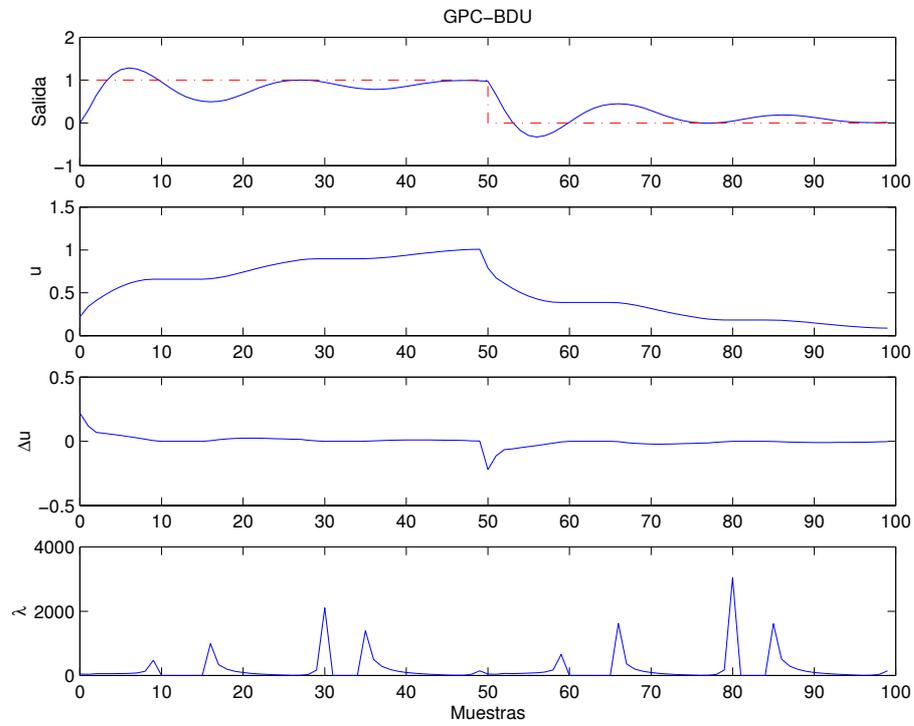


Figura 5.8: Respuesta en bucle cerrado con ajuste dinámico del factor  $\lambda$ .

### 5.3.4 Sintonizado de $\lambda$ del GPC-BDU con $\rho > 0$ .

En el apartado anterior se partía del planteamiento del GPC sin penalización del esfuerzo de control  $\rho$ , y cómo la técnica BDU permitía incorporar y sintonizar dicho parámetro en función de la cota de la incertidumbre presente en el sistema, con el propósito de mejorar la robustez del mismo.

En este apartado el objetivo es similar, pero el planteamiento del GPC incorpora a priori una penalización del esfuerzo de control  $\rho$ , bien para mejorar el condicionamiento del sistema, o para limitar el valor de las acciones de control para el modelo nominal, y se muestra cómo la técnica BDU sustituye dicho parámetro  $\rho$  por  $\lambda$ , el cual incorpora información sobre la incertidumbre presente en el sistema, mejorando así la robustez del mismo.

Así pues, planteando el GPC con **penalización del esfuerzo de control**, y de nuevo, si se incorpora explícitamente un límite en el tamaño de las incertidumbres se puede plantear el siguiente problema BDU (3.62)

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G \\ \|\delta \mathbf{e}\|_2 \leq \eta_e}} \left[ \|\mathbf{G} + \delta \mathbf{G}\| \Delta \mathbf{u} - [\mathbf{e} + \delta \mathbf{e}] \|_2^2 + \rho \|\Delta \mathbf{u}\|_2^2 \right], \quad (5.76)$$

cuya solución (ecuaciones (3.83) y (3.84)) resulta

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{e}, \quad (5.77)$$

$$\lambda = \frac{\eta_G \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{e}\|_2}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}\|_2} + \frac{\rho \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{e}\|_2}{\|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{e}\|_2 + \eta_G \|\Delta \hat{\mathbf{u}}\|_2 + \eta_e}. \quad (5.78)$$

Nótese que sin considerar incertidumbre ( $\eta_G = \eta_e = 0$ ), entonces el parámetro de penalización obtenido coincide con el inicial  $\lambda = \rho$ .

#### 5.3.4.1 Ejemplo 3.

En este ejemplo se pretende mostrar cómo el sintonizado del GPC mediante BDU permite ajustar el parámetro de penalización del esfuerzo de control  $\lambda$  incrementando la robustez del sistema cuando aparece incertidumbre.

En este caso el GPC de partida ya penaliza el esfuerzo de control mediante el parámetro  $\rho$ , por lo que la aplicación del BDU va a modificar dicho parámetro obteniendo así  $\lambda$ . Si se considera el siguiente proceso continuo de 5º orden

$$G(s) = \frac{1}{(5s + 1)^5}, \quad (5.79)$$

el cual se discretiza para un periodo de muestreo  $T = 2$  s., y se diseña un GPC con los siguientes parámetros

$N_1$	$N_2$	$N_u$	$\mathbf{T}(z^{-1})$	$\rho$
1	40	10	$1 - 0.9z^{-1}$	1

(5.80)

El control alcanza buenas prestaciones cuando el modelo y el proceso coinciden (figura 5.9).

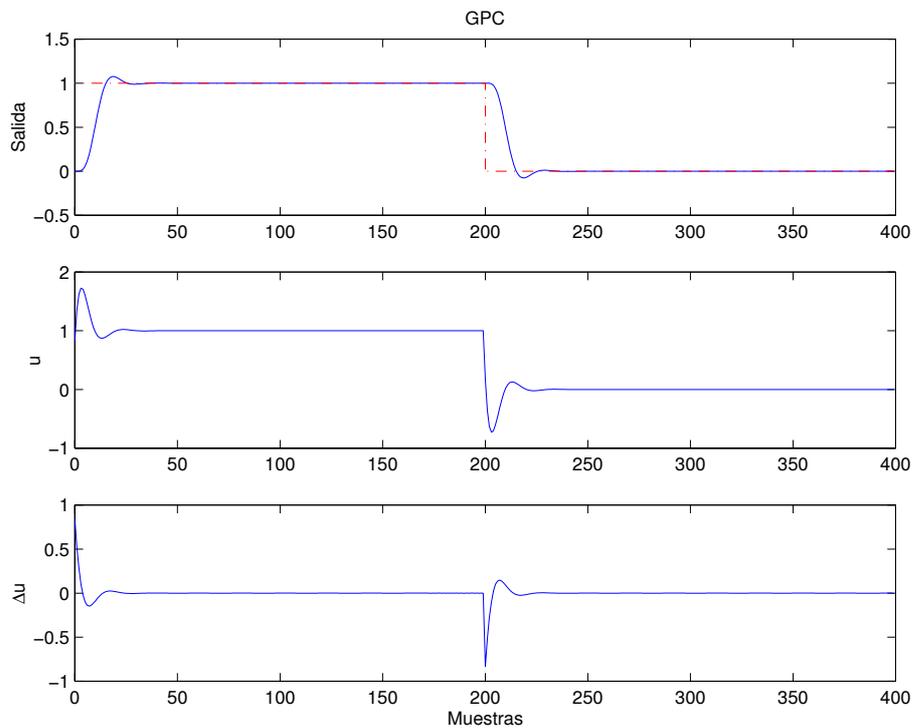


Figura 5.9: Respuesta del proceso cuando modelo y proceso coinciden.

Pero por el contrario, si con el mismo GPC se pretende controlar un proceso dado por

$$G_p(s) = \frac{1.5(1.66s + 1)}{(6.6s + 1)^7}, \quad (5.81)$$

el bucle cerrado es inestable, como se observa en la figura 5.10.

En la figura 5.11 se muestran las respuestas ante entrada en forma de escalón del modelo y del proceso considerando en este caso  $\eta_G = 4.50$  y el ratio que se muestra a continuación

$$ratio = \frac{\|\delta \mathbf{G}\|_2}{\|\mathbf{G}\|_2} \cdot 100 = 31.77\%. \quad (5.82)$$

Aplicando el algoritmo para la ponderación automática se mejora la robustez del controlador y ahora éste es capaz de hacer frente a mayores discrepancias entre el modelo y el proceso (figura 5.12).

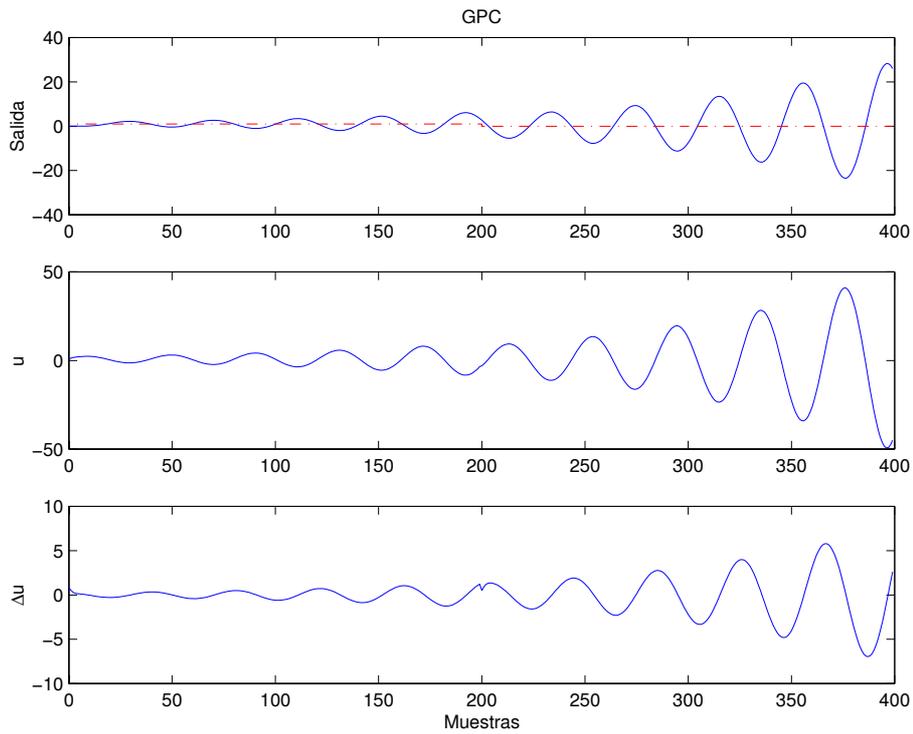


Figura 5.10: Respuesta del proceso cuando modelo y proceso son distintos.

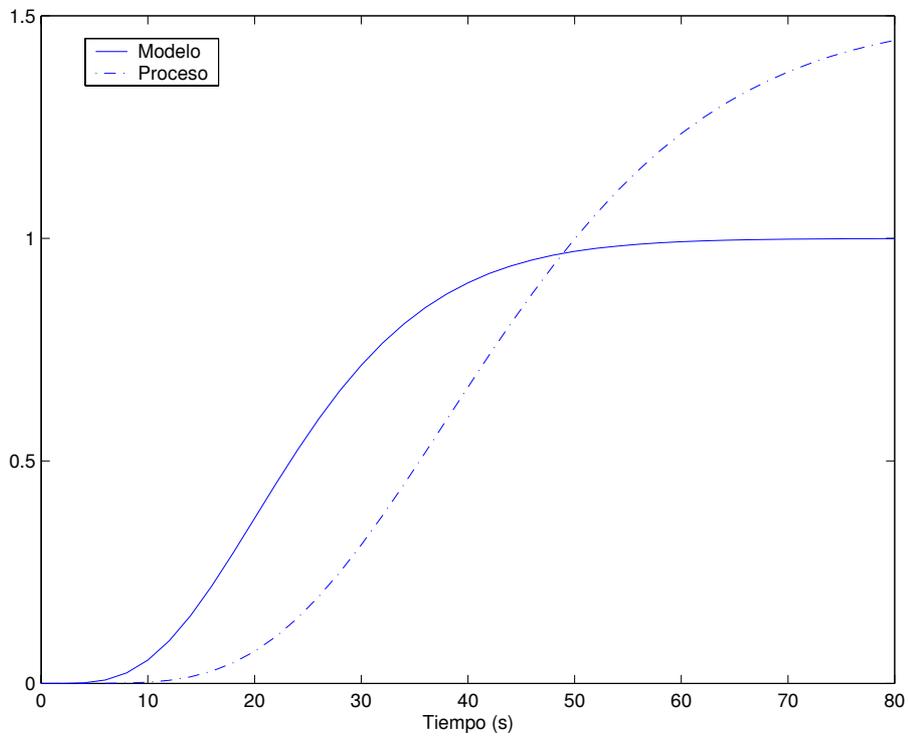


Figura 5.11: Respuestas ante un escalón del proceso y el modelo.

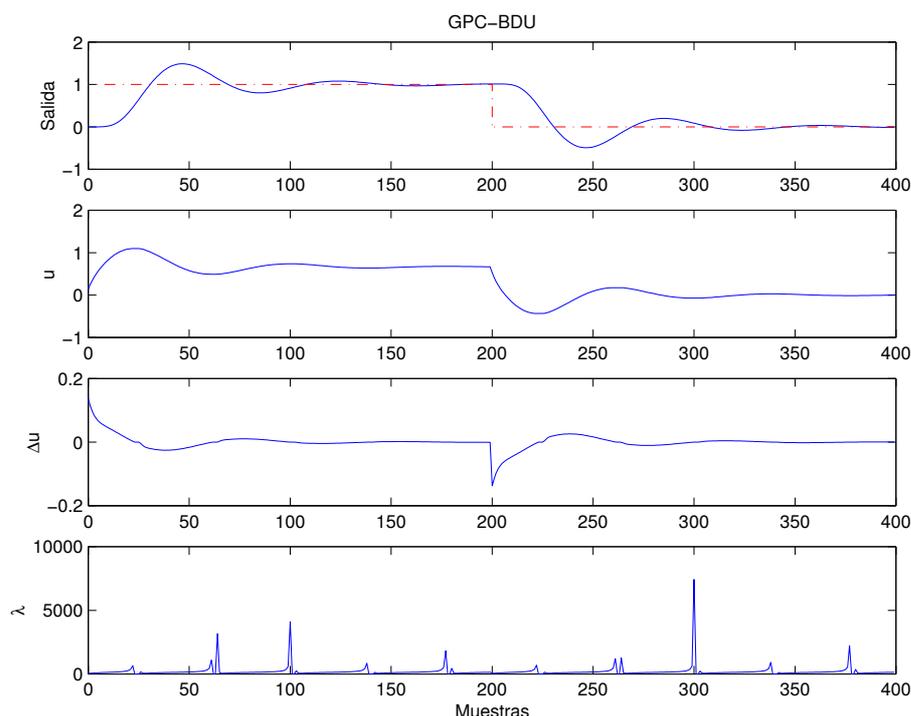


Figura 5.12: Respuesta en bucle cerrado con ajuste dinámico del factor  $\lambda$ .

#### 5.3.4.2 Ejemplo 4.

Como se mencionó anteriormente, un cambio en los parámetros de diseño del controlador GPC podría proporcionar un controlador suficientemente robusto como para manejar un proceso diferente al modelo. Por ejemplo, si se pretende controlar un proceso dado por

$$G_p(s) = \frac{1}{(6.6s + 1)^7}, \quad (5.83)$$

con el mismo GPC anterior se obtiene la respuesta de la figura 5.13, donde modelo y proceso son distintos y se considera  $\rho = 1$ .

Notar que el controlador está diseñado con factor de ponderación para la acción de control ( $\rho$ ) y polinomio de filtrado  $\mathbf{T}(z^{-1})$ . En este caso la respuesta es demasiado oscilatoria aunque estable. Cabe también indicar que variando los parámetros de diseño ( $N_2$ ,  $\rho$ ,  $\mathbf{T}$ , etc.) se podrían obtener respuestas más aceptables pero se estaría hablando de un procedimiento de *prueba y error*.

Observando la diferencia entre las respuestas ante escalón del modelo y proceso (figura 5.14) y construyendo las matrices dinámicas para modelo y proceso se obtiene el valor  $\eta_G = 6.13$  y un ratio del 43.27%.

En la figura 5.15 se observa cómo, de nuevo, un cálculo dinámico para  $\lambda$  mediante

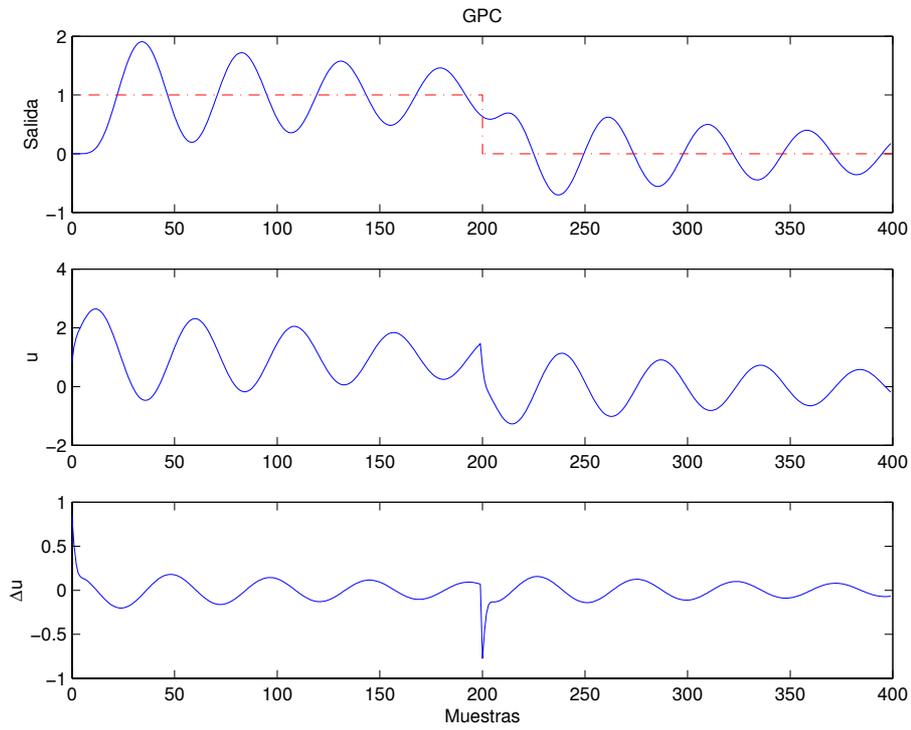


Figura 5.13: Respuesta del proceso cuando modelo y proceso son distintos ( $\rho = 1$ ).

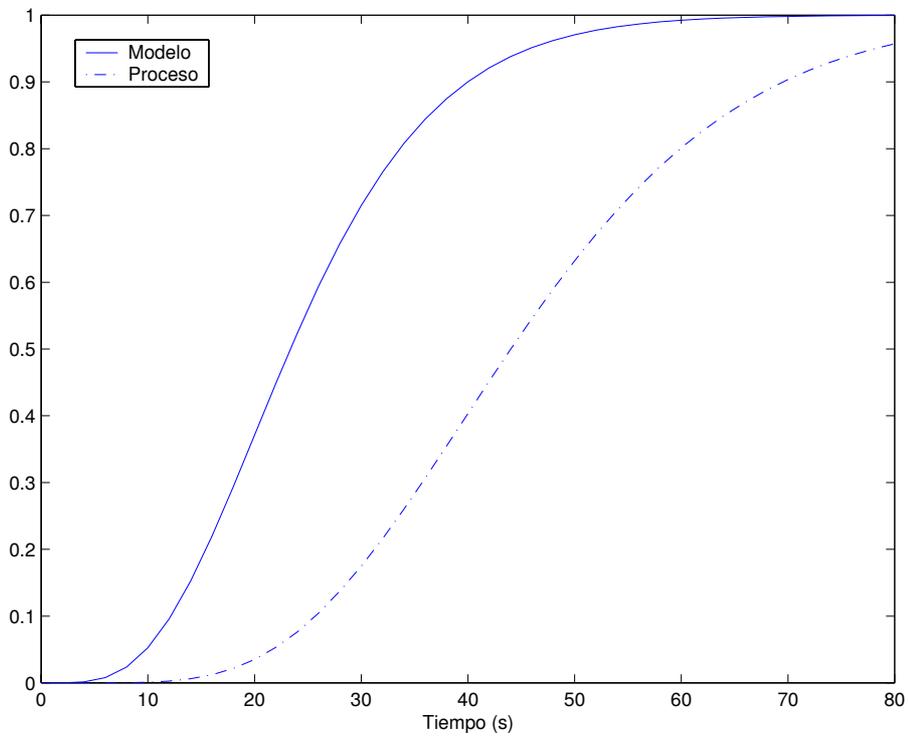


Figura 5.14: Respuestas ante un escalón del proceso y el modelo.

BDU consigue mejores prestaciones haciendo el controlador más robusto frente a discrepancias entre modelo y proceso.

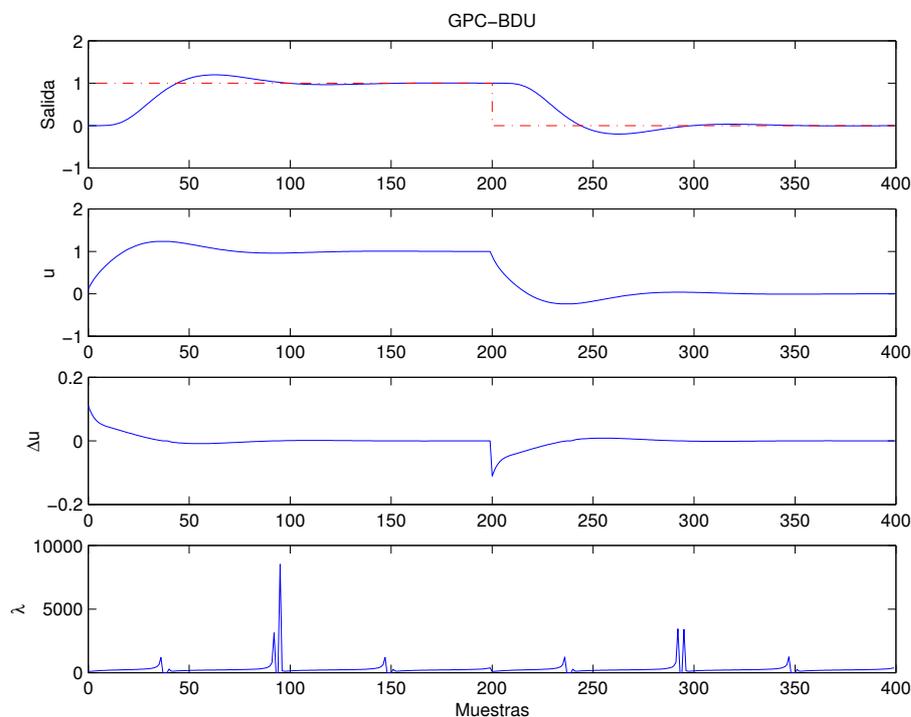


Figura 5.15: Respuesta del proceso cuando modelo y proceso son distintos ( $\rho = 1$ ).

Si se considera un GPC basado en el modelo  $G(s)$  anterior y los mismos parámetros de diseño, exceptuando  $\rho$  que ha sido aumentado para obtener un diseño más robusto

$N_1$	$N_2$	$N_u$	$\mathbf{T}(z^{-1})$	$\rho$
1	40	10	$1 - 0.9z^{-1}$	25

(5.84)

se puede observar en la figura 5.16 cómo la respuesta del sistema en bucle cerrado, cuando se intenta controlar el proceso  $G_p(s)$ , es menos oscilatoria, lo cual indica que se podría aumentar dicho parámetro  $\rho$  hasta obtener una respuesta adecuada tras realizar varias simulaciones. Por otra parte, aplicando la ponderación dinámica de dicho factor, basada en el tamaño de las incertidumbres (BDU) se puede, desde el principio, hacer frente a este tipo de problema (figura 5.17).

## 5.4 Conclusiones.

En este capítulo, se han repasado los conceptos del CPEE y del GPC, y la aplicación de la técnica BDU en el sintonizado de ambos.

En el caso del CPEE-BDU aparece de nuevo el problema TPBVP, al igual que ocurrió con el LQR-BDU, lo cual complica la obtención de la ley de control. En el caso del

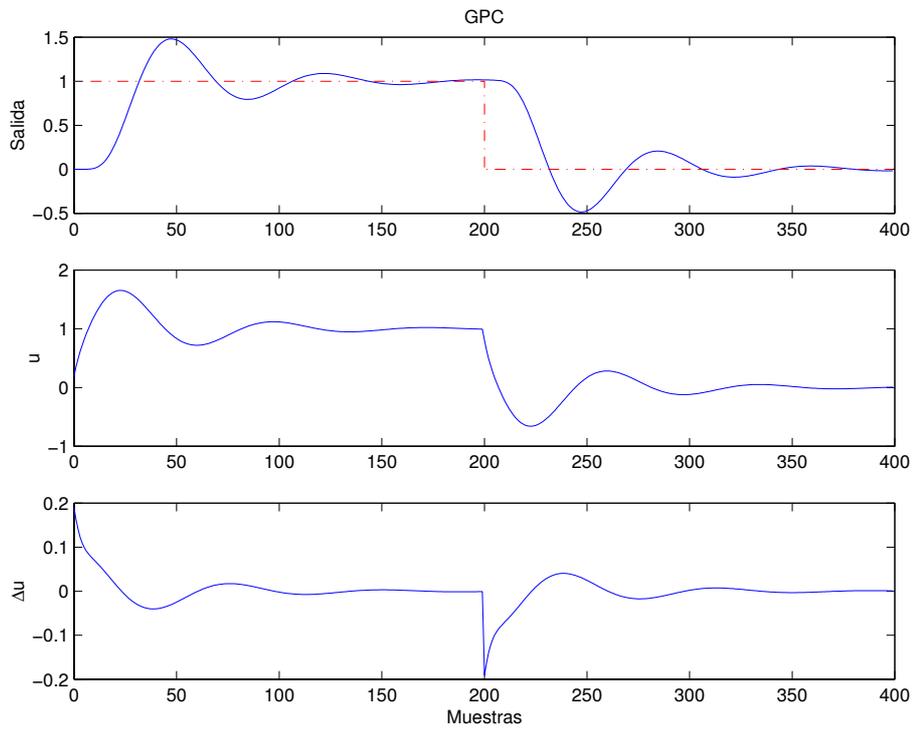


Figura 5.16: Si se aumenta  $\rho = 25$  el controlador es más robusto.

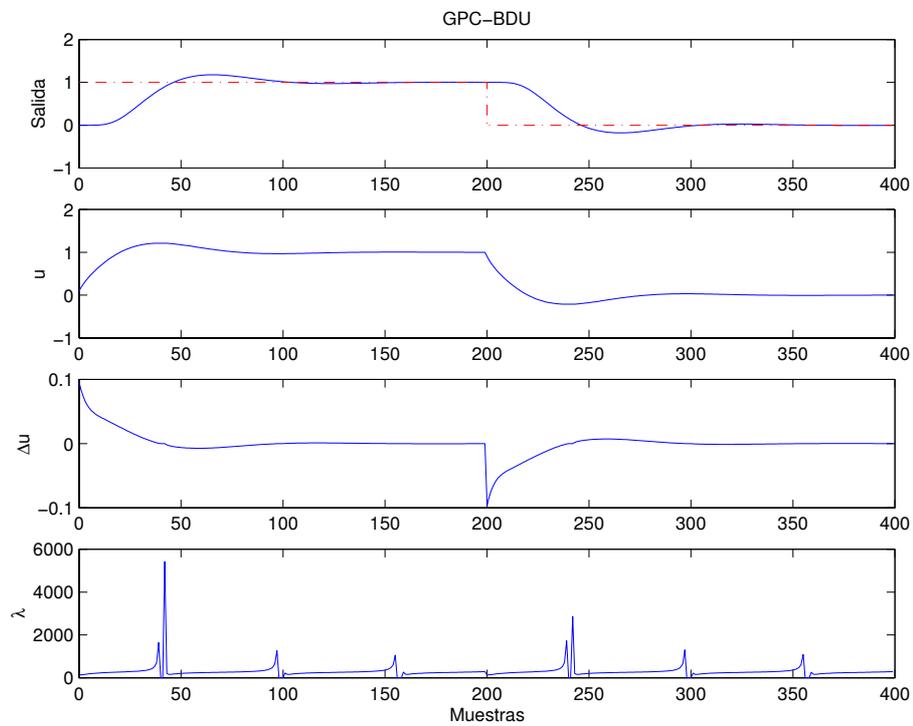


Figura 5.17: La ponderación automática decide qué valor de  $\lambda$  sería mejor si el diseño ya incluye la ponderación  $\rho = 25$ .

GPC, tras mostrar que dicho controlador se puede plantear como un problema de mínimos cuadrados, se muestra que desde ese punto de vista se puede utilizar la técnica BDU para regularizar dicho problema y evitar que la presencia de incertidumbre proporcione soluciones pocos robustas.

De ese modo la técnica BDU regulariza el GPC mediante el parámetro  $\lambda$ , con la diferencia de que en este caso la elección de  $\lambda$  ya no se lleva a cabo empíricamente, sino que el BDU permite un ajuste de  $\lambda$  basado en la cota de la incertidumbre presente en el sistema.



# Capítulo 6

## Estabilidad del GPC-BDU.

---

6.1	Introducción. . . . .	141
6.2	Constrained Receding-Horizon Predictive Control (CRHPC). . . . .	142
6.2.1	Obtención de la ley de control del CRHPC. . . . .	144
6.2.2	CRHPC como un problema de mínimos cuadrados. . . . .	147
6.2.3	CRHPC mediante la SVD. . . . .	149
6.2.3.1	Obtención de la solución particular. . . . .	150
6.2.3.2	Obtención de la solución homogénea. . . . .	151
6.2.3.3	Obtención de la ley de control. . . . .	152
6.2.4	Equivalencia entre soluciones. . . . .	152
6.2.5	Ejemplo 1. . . . .	155
6.3	CRHPC-BDU. . . . .	157
6.3.1	CRHPC-BDU como un problema BDU. . . . .	158
6.3.2	CRHPC-BDU mediante la SVD. . . . .	161
6.3.2.1	Obtención de la solución particular. . . . .	161
6.3.2.2	Obtención de la solución homogénea. . . . .	163
6.3.2.3	Obtención de la ley de control. . . . .	165
6.3.3	Equivalencia entre soluciones. . . . .	168
6.3.4	Ejemplo 2. . . . .	169
6.4	Conclusiones. . . . .	175



## 6.1 Introducción.

La estabilidad nominal de un bucle cerrado es relativamente fácil de alcanzar sin más que seleccionar los parámetros de diseño de un GPC y, asumiendo que el modelo es correcto, comprobar que con estos parámetros el bucle cerrado es estable. De hecho ésta es la forma de trabajo de la mayoría de aplicaciones de control predictivo en la industria. Pero, a pesar de la popularidad del controlador GPC no existe, hasta el momento, una teoría clara para garantizar la estabilidad del bucle cerrado en función de sus parámetros de diseño.

De hecho la estabilidad asintótica está garantizada sólo para algunos casos especiales, en general con **horizontes infinitos** (por ejemplo cuando ambos horizontes, el de predicción y el de control, son infinitos, o cuando  $N_u = 1$ , el horizonte de predicción es infinito y el proceso es estable). En general, es fácil encontrar ejemplos para los cuales un GPC no puede controlar el proceso (basta con colocar una pareja polo-cero cercanos fuera del círculo unidad).

Como solución al problema de la estabilidad, diferentes autores han propuesto algunas variantes del GPC que garantizan la estabilidad del bucle cerrado:

- *Stabilizing input-output receding horizon control* (SIORHC) [Mosca y Zhang 1992], [Mosca 1995].
- *Constrained receding-horizon predictive control* (CRHPC) [Clarke y Scattolini 1991].
- *Infinite horizon generalized predictive control* (GPC $^\infty$ ) [Sokaert y Clarke 1993], [Sokaert 1997].
- *Stable generalized predictive control* (SGPC) [Kouvaritakis *et al.* 1992], [Kouvaritakis y Rossiter 1993].
- *Generalized predictive control with end-point state weighting* (GPCW) [Demircioglu y Clarke 1992], [Demircioglu y Clarke 1993].
- *Receding-horizon predictive control with exponential weighting* [Yoon y Clarke 1993b].

Frente al uso de *horizontes infinitos*, tanto el algoritmo de control CRHPC como SIORHC **imponen restricciones** sobre la salida, haciendo que ésta sea igual a la referencia en un horizonte más allá del horizonte de predicción. Esto fuerza a que el índice de coste sea monótono decreciente [Sokaert y Clarke 1994]. En la variante SGPC, se diseña un bucle cerrado estable antes de aplicar la estrategia de control predictivo. Estos tres diseños son, de hecho, equivalentes aunque tienen diferentes propiedades numéricas debido a su diferente implementación [Rossiter y Kouvaritakis 1994].

El resto de aproximaciones también fuerzan a que el índice de coste decrezca monótonamente utilizando técnicas definidas para espacio de estados, incluyendo en el índice de coste una ponderación del vector de estados al final del horizonte de predicción (GPCW)

o empleando ponderación exponencial en los errores y acciones de control [Yoon y Clarke 1993b]. Este incremento secuencial de la ponderación según el instante de predicción conduce a una mejora de las prestaciones del controlador.

En este capítulo la atención se centra sobre el controlador CRHPC, dado que cubre la mayor parte de estrategias al ser equivalente al SIORHC y al SGPC [Rossiter y Kouvaritakis 1994].

La estructura del capítulo es la siguiente, en primer lugar se presenta el CRHPC en la sección 6.2, el cual se expresará con diferentes formulaciones equivalentes, y se mostrará mediante un ejemplo la capacidad de estabilidad nominal que presenta dicho controlador. Posteriormente en la sección 6.3, frente al fracaso del CRHPC ante discrepancias entre el modelo y proceso, se presenta el CRHPC-BDU, que en definitiva es un GPC estable y robusto, que pretende mejorar la robustez del sistema. Para finalizar la última sección se dedicará a las conclusiones del presente capítulo.

## 6.2 Constrained Receding-Horizon Predictive Control (CRHPC).

[Clarke y Scattolini 1991] desarrollaron una variación del GPC estándar denominada *Constrained Receding-Horizon Predictive Control* (CRHPC), la cual permite asegurar la estabilidad del bucle de control bajo ciertas condiciones. La idea básicamente consiste en calcular una secuencia de acciones de control futuras para forzar a que la salida predicha sea exactamente igual a la referencia durante un horizonte  $m$  suficientemente largo tras el horizonte de predicción (figura 6.1). En realidad, algunos grados de libertad del controlador se utilizan para forzar esta igualdad mientras que el resto se utilizan para minimizar el índice de coste a lo largo del horizonte de predicción.

Partiendo del modelo CARIMA

$$y(k) = \frac{\mathbf{B}(z^{-1})}{\mathbf{A}(z^{-1})}u(k-1) + \frac{\mathbf{T}(z^{-1})}{\Delta\mathbf{A}(z^{-1})}\xi(k) \quad (6.1)$$

y utilizando el modelo de predicción que se usa en el GPC (ecuaciones (5.23) y (5.24)), se predice la salida para todo el horizonte de predicción, teniendo en cuenta que  $\Delta u(k+N_u) = \Delta u(k+N_u+1) = \dots = \Delta u(k+N-1) = 0$

$$\begin{bmatrix} y(k+1|k) \\ y(k+2|k) \\ \vdots \\ y(k+N|k) \end{bmatrix} = \mathbf{G}_1 \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_u-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(k+1|k) \\ f(k+2|k) \\ \vdots \\ f(k+N|k) \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

o bien

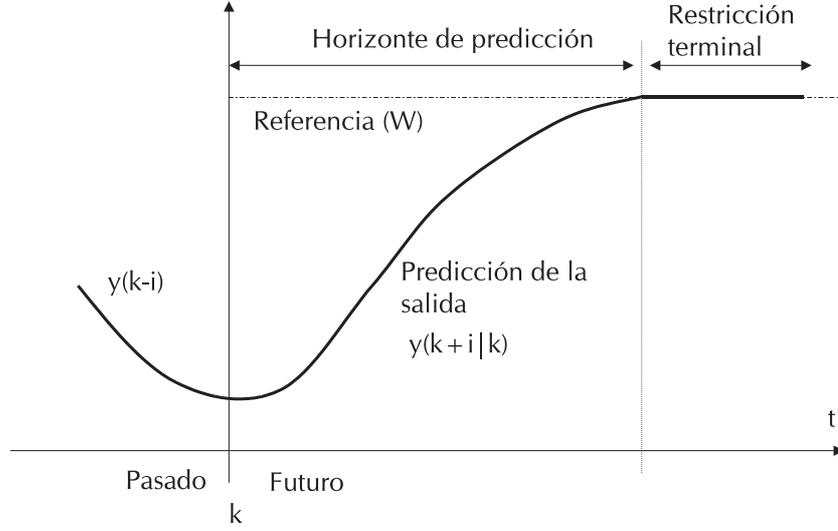


Figura 6.1: Restricción terminal.

$$\mathbf{y}_{1_{N \times 1}} = \mathbf{G}_{1_{N \times N_u}} \Delta \mathbf{u}_{N_u \times 1} + \mathbf{f}_{1_{N \times 1}}, \quad (6.3)$$

donde la matriz formada por los coeficientes  $g_i$  de la respuesta del proceso ante un escalón unitario, se denomina  $\mathbf{G}_1$  para distinguirla de la matriz  $\mathbf{G}_2$  que aparece posteriormente

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \dots & g_{N-N_u} \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Si se extiende la predicción  $m$  instantes más allá de este horizonte, se obtiene

$$\begin{bmatrix} y(k+N+1|k) \\ y(k+N+2|k) \\ \vdots \\ y(k+N+m|k) \end{bmatrix} = \mathbf{G}_2 \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_u-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(k+N+1|k) \\ f(k+N+2|k) \\ \vdots \\ f(k+N+m|k) \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

o bien

$$\mathbf{y}_{2_{m \times 1}} = \mathbf{G}_{2_{m \times N_u}} \Delta \mathbf{u}_{N_u \times 1} + \mathbf{f}_{2_{m \times 1}}, \quad (6.6)$$

donde

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} g_N & g_{N-1} & \cdots & g_{N+1-N_u} \\ g_{N+1} & g_N & \cdots & g_{N+2-N_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N+m-1} & g_{N+m-2} & \cdots & g_{N+m-N_u} \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

### 6.2.1 Obtención de la ley de control del CRHPC.

El problema CRHPC se plantea del mismo modo que el GPC estándar, utilizando el mismo índice cuadrático

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} J(\Delta \mathbf{u}) = \min_{\Delta \mathbf{u}} \left[ \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i [y(k+i|k) - w(k+i)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \rho_j [\Delta u(k+j-1)]^2 \right] \quad (6.8)$$

pero en este caso el problema de minimización está sujeto a nuevas restricciones planteadas del siguiente modo ( $N_1 = 1, N_2 = N$ )<sup>1</sup>

$$y(k+N+i) = w(k+N), \quad i \in [1, \dots, m], \quad (6.9)$$

$$\Delta u(k+N_u+j) = 0, \quad j \geq 0. \quad (6.10)$$

Tal y como se planteó en el capítulo anterior, se continua con la denominación de  $\rho$  para el parámetro de penalización del esfuerzo de control, dejando  $\lambda$  para designar el parámetro de penalización o regularización que proporciona la técnica BDU, y que sustituirá a  $\rho$  cuando se utilice dicha técnica.

Expresando (6.8) en forma cuadrática como

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}} & \quad [[\mathbf{y}_1 - \mathbf{w}_1]^T \mathbf{A} [\mathbf{y}_1 - \mathbf{w}_1] + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{u}] \\ \text{s.a.} & \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{w}_2, \end{aligned} \quad (6.11)$$

donde  $\mathbf{A}_{N \times N}$  y  $\mathbf{P}_{N_u \times N_u}$  son matrices diagonales, siendo habitualmente constantes,  $\mathbf{P} = \rho \mathbf{I}$  y  $\mathbf{A} = \alpha \mathbf{I}$ , y donde

$$\mathbf{w}_1 = [w(k+1), \dots, w(k+N)]^T, \quad (6.12)$$

$$\mathbf{w}_2 = [w(k+N), \dots, w(k+N)]^T. \quad (6.13)$$

---

<sup>1</sup>Se asume un horizonte de predicción igual a  $N$ .

Asumiendo  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ , por simplicidad, y llamando error obtenido a la diferencia entre la referencia y la predicción de la respuesta libre del sistema

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{f}_1, \quad (6.14)$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{f}_2, \quad (6.15)$$

se puede expresar (6.11) como

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \mathbf{u}} [(\mathbf{G}_1 \Delta \mathbf{u} - \mathbf{e}_1)^T (\mathbf{G}_1 \Delta \mathbf{u} - \mathbf{e}_1) + \Delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{I} \Delta \mathbf{u}] \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{G}_2 \Delta \mathbf{u} = \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (6.16)$$

o bien

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \mathbf{u}} [\|\mathbf{G}_1 \Delta \mathbf{u} - \mathbf{e}_1\|_2^2 + \rho \|\Delta \mathbf{u}\|_2^2] \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{G}_2 \Delta \mathbf{u} = \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Una solución analítica a este problema de minimización puede ser calculada utilizando multiplicadores de Lagrange, produciendo el siguiente resultado

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{G}} [\mathbf{I} - \mathbf{G}_2^T \mathbf{M} \mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}}] \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T \mathbf{M} \mathbf{e}_2 \quad (6.18)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{G}}_{N_u \times N_u} = [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}]^{-1}, \quad (6.19)$$

$$\mathbf{M}_{m \times m} = [\mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T]^{-1}. \quad (6.20)$$

Como se observa, el resultado es bastante más complejo y con una carga computacional mayor, comparado con la solución de un GPC estándar. Hay que tener cuidado con la inversión de las matrices  $[\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}]$  y  $[\mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T]$  puesto que se pueden dar casos de mal condicionamiento.

Un modo de evitar la inversión de matrices, consiste en plantear la siguiente ecuación lineal extendida [Yoon y Clarke 1995b]

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}^{-1} & \mathbf{G}_2^T \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

donde  $\nu$  es el multiplicador de Lagrange para la restricción terminal. El sistema se resuelve fácilmente mediante eliminación Gaussiana, por lo que se recomienda esta expresión para la implementación.

A partir de este sistema también se puede obtener la solución (6.18) calculando el *complemento de Schur* y aplicando el lema de inversión de matrices. A partir de

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}^{-1} & \mathbf{G}_2^T \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

y siendo  $\tilde{\mathbf{G}}^{-1}$  y  $\mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T$  no singulares, se puede expresar mediante el *complemento de Schur*

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}[\mathbf{I} - \mathbf{G}_2^T \mathbf{M} \mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}}] & \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} \mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

de donde se obtiene la expresión (6.18) para  $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ .

Este algoritmo, bajo ciertas propiedades, es capaz de estabilizar cualquier tipo de proceso (inestable, fase no mínima, etc.). Dichas propiedades se basan en la idea de que, si existe una solución y el horizonte de predicción es suficientemente largo como para cubrir el régimen transitorio de la salida, la función de coste decrece monótonamente (siempre que no existan perturbaciones y el modelo sea igual al proceso) y puede ser interpretada como una función de Lyapunov para garantizar estabilidad.

En concreto, se puede demostrar que el bucle cerrado es asintóticamente estable si [Sokaert y Clarke 1993], [Yoon y Clarke 1995b]:

1.  $\alpha_i \geq 0, \rho_j \geq 0,$
2.  $m = n_a,$
3.  $N_u \geq m,$
4.  $N \geq N_u + \max(n_b, n_a) - n_a$

donde<sup>2</sup>  $n_a = \deg(\mathbf{A}(z^{-1})\Delta)$  y  $n_b = \deg(\mathbf{B}(z^{-1}))$ . Así pues, el mínimo número de restricciones que hay que incluir para garantizar la estabilidad está determinado por  $n_a$ , siendo conveniente utilizar este valor para obtener unas matrices de menor tamaño y no realizar cálculos innecesarios.

Si la condición  $N_u \geq m$  se particulariza como  $N_u = m$ , en ese caso la matriz  $\mathbf{G}_2$  resulta cuadrada, y por tanto la solución (6.18) se puede simplificar resultando

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{G}_2^{-1} \mathbf{e}_2, \quad (6.24)$$

---

<sup>2</sup>Asumiendo que  $\mathbf{A}(z^{-1})\Delta$  y  $\mathbf{B}(z^{-1})$  no poseen factores comunes.

ya que en este caso, los  $N_u$  grados de libertad de la acción de control se utilizan en cumplir la restricción terminal

$$\mathbf{G}_2 \Delta \mathbf{u} = \mathbf{e}_2 \quad (6.25)$$

no quedando grados de libertad disponibles para la minimización del índice.

### 6.2.2 CRHPC como un problema de mínimos cuadrados.

El controlador CRHPC garantiza la estabilidad nominal del bucle cerrado minimizando un índice cuadrático sujeto a una restricción de tipo igualdad. Una forma interesante de obtener una solución aproximada a este tipo de problemas puede obtenerse solucionando el siguiente problema de mínimos cuadrados regularizado sin restricción

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left[ \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mu \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\mu - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mu \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 + \rho \|\Delta \mathbf{u}_\mu\|_2^2 \right] \quad (6.26)$$

para valores elevados de  $\mu$ .

En [Golub y van Loan 1996] se demuestra que  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu \rightarrow \Delta \hat{\mathbf{u}}$  solución del problema expresado en (6.18), según  $\mu \rightarrow \infty$ , y se ofrece una expresión para medir la diferencia entre las dos soluciones para un  $\mu$  dado.

Llamando

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mu \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mu \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

la solución dependiente de  $\mu$  resulta

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \rho \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{e} \quad (6.28)$$

$$= [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \mu^2 \mathbf{G}_2^T \mathbf{G}_2 + \rho \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + \mu^2 \mathbf{G}_2^T \mathbf{e}_2]. \quad (6.29)$$

Se puede obtener una solución al problema anterior que no dependa de  $\mu$  (tras aplicar el límite  $\mu \rightarrow \infty$ ) haciendo uso de la GSVD (*Generalized Singular Value Decomposition*) [Golub y van Loan 1996].

A partir de (6.26) considerando  $\rho = 0$  por simplicidad (después se mostrará el caso para  $\rho \neq 0$ ), donde  $\mathbf{G}_1 \in \mathbb{R}^{N \times N_u}$  con  $N \geq N_u$  y  $\mathbf{G}_2 \in \mathbb{R}^{m \times N_u}$  con  $N_u \geq m$ , existen matrices ortogonales  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  y  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y una matriz invertible  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N_u \times N_u}$  tales que

$$\mathbf{U}^T \mathbf{G}_1 \mathbf{X} = \mathbf{D}_\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_{N_u}) \in \mathbb{R}^{N \times N_u} \quad \alpha_i \geq 0 \quad (6.30)$$

y

$$\mathbf{V}^T \mathbf{G}_2 \mathbf{X} = \mathbf{D}_\beta = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^{m \times N_u} \quad \beta_i \geq 0. \quad (6.31)$$

A partir de estas definiciones se puede expresar el problema

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mu \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\mu - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mu \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (6.32)$$

como

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{U} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{X}^{-1} \\ \mu \mathbf{V} \mathbf{D}_\beta \mathbf{X}^{-1} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\mu - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mu \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (6.33)$$

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\alpha \\ \mu \mathbf{D}_\beta \end{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} \Delta \mathbf{u}_\mu - \begin{bmatrix} \mathbf{U}^T \mathbf{e}_1 \\ \mu \mathbf{V}^T \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2. \quad (6.34)$$

Definiendo  $\mathbf{y} = \mathbf{X}^{-1} \Delta \mathbf{u}_\mu$ , y siendo  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N]$ ,  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$  y  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_u}]$ , entonces la solución aproximada para  $\mu$  elevados se puede expresar

$$\hat{\mathbf{y}}_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_1 + \mu^2 \beta_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{e}_2}{\alpha_i^2 + \mu^2 \beta_i^2} & i = 1, \dots, m \\ \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_1}{\alpha_i} & i = m + 1, \dots, N_u \end{cases} \quad (6.35)$$

que tras deshacer el cambio de variables

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = \mathbf{X} \hat{\mathbf{y}} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_u}] [\hat{\mathbf{y}}_1, \dots, \hat{\mathbf{y}}_{N_u}]^T \quad (6.36)$$

resulta

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_1 + \mu^2 \beta_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{e}_2}{\alpha_i^2 + \mu^2 \beta_i^2} \mathbf{x}_i + \sum_{i=m+1}^{N_u} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_1}{\alpha_i} \mathbf{x}_i. \quad (6.37)$$

Aplicando el límite para  $\mu \rightarrow \infty$  la solución exacta ya no depende de  $\mu$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{e}_2}{\beta_i} \mathbf{x}_i + \sum_{i=m+1}^{N_u} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_1}{\alpha_i} \mathbf{x}_i. \quad (6.38)$$

Para el caso  $\rho \neq 0$ , se puede expresar (6.26) como un problema de mínimos cuadrados sin restricción

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \sqrt{\rho} \mathbf{I} \\ \mu \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\mu - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mu \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (6.39)$$

donde teniendo en cuenta el siguiente cambio de variables

$$\tilde{\mathbf{G}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \sqrt{\rho} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

se obtiene

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1 \\ \mu \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\mu - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ \mu \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (6.41)$$

que sólo se diferencia de (6.32) en las dimensiones de las matrices  $\tilde{\mathbf{G}}_1 \in \mathbb{R}^{(N+N_u) \times N_u}$  y  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{(N+N_u) \times (N+N_u)}$ , siendo  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N+N_u}]$ . Aplicando la GSVD se puede obtener una solución similar a (6.38).

### 6.2.3 CRHPC mediante la SVD.

Otro método para obtener la solución analítica del CRHPC consiste en plantear el problema de minimización con restricciones como la solución de dos sistemas de ecuaciones lineales:

1. Por un lado se debe cumplir la restricción terminal o lo que es lo mismo, se debe resolver el sistema compatible indeterminado ( $m \leq N_u$ ) de ecuaciones

$$\mathbf{G}_{2_{m \times N_u}} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{e}_{2_{m \times 1}}. \quad (6.42)$$

2. Por otro, se debe resolver el sistema de ecuaciones incompatible ( $N > N_u$ ) que conduce a la minimización del índice de coste

$$\mathbf{G}_{1_{N \times N_u}} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{e}_{1_{N \times 1}}, \quad (6.43)$$

el cual, de forma general se plantea como el problema de mínimos cuadrados regularizado (6.17)

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} \left[ \|\mathbf{G}_1 \Delta \mathbf{u} - \mathbf{e}_1\|_2^2 + \rho \|\Delta \mathbf{u}\|_2^2 \right]. \quad (6.44)$$

Así pues, este sistema de ecuaciones se resolverá calculando una solución de mínimos cuadrados pero restringida por la restricción terminal (6.42).

Para resolver el sistema de ecuaciones indeterminado (6.42), se pueden generar todas sus posibles soluciones expresando la solución general  $\Delta \hat{\mathbf{u}}$  de este sistema como

$$\{\Delta \hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{N_u} \mid \mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{e}_2\} = \{\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{z} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{G}_2)\} \quad (6.45)$$

donde

- $\Delta \hat{\mathbf{u}}_p$  es una solución particular del sistema de ecuaciones.
- $\mathbf{z}$  es la solución general del sistema homogéneo de ecuaciones asociado

$$\mathcal{N}(\mathbf{G}_2) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{N_u} \mid \mathbf{G}_2 \mathbf{z} = \mathbf{0}\} \quad (6.46)$$

siendo  $\mathcal{N}(\mathbf{G}_2)$  el espacio nulo de la matriz  $\mathbf{G}_2$ .

De esta forma, si  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p$  y  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{G}_2)$ , entonces

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{G}_2 [\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{z}] \quad (6.47)$$

por lo que  $\mathbf{z}$  representa, de algún modo, los grados de libertad en la solución del sistema (6.42) y caracteriza las diferentes soluciones que producen el mismo resultado.

### 6.2.3.1 Obtención de la solución particular.

Una solución particular  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_p$  del sistema (6.42), muy apropiada para control, puede ser la denominada *solución de mínima norma*, o solución del sistema de ecuaciones que minimiza  $\|\Delta \mathbf{u}\|_2^2$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{u}}_p &= \underset{\Delta \mathbf{u}}{\operatorname{arg\,min}} \Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} \\ \text{s.a.} \quad &\mathbf{G}_2 \Delta \mathbf{u} = \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (6.48)$$

La solución de este problema es

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{u}}_p &= \mathbf{G}_2^T [\mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^T]^{-1} \mathbf{e}_2 \\ &= \mathbf{G}_2^+ \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (6.49)$$

donde  $\mathbf{G}_2^+$  es la pseudoinversa de  $\mathbf{G}_2$ , también denominada inversa derecha de  $\mathbf{G}_2$ .

Para calcular  $\mathbf{G}_2^+_{N_u \times m}$ , se utiliza la descomposición SVD de la matriz  $\mathbf{G}_2$

$$\mathbf{G}_2^+ = \mathbf{V} \Sigma^+ \mathbf{U}^T. \quad (6.50)$$

Además, haciendo uso de dicha descomposición es posible calcular el espacio nulo  $\mathcal{N}(\mathbf{G}_2)$ . Al tener más columnas que filas, la matriz  $\mathbf{G}_2$  tan sólo posee  $m$  valores singulares distintos de cero. Los vectores  $[\mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_{N_u}]$  de la matriz  $\mathbf{V}_{N_u \times N_u}$  asociados a los valores singulares nulos forman una base para  $\mathcal{N}(\mathbf{G}_2)$ .

Es decir, es posible expresar cualquier vector de acciones de control  $\Delta \mathbf{u}$  que cumpla  $\mathbf{G}_2 \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ , como una combinación lineal de estos vectores, puesto que

$$\mathbf{G}_2 \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad \forall i \in [m+1, \dots, N_u]. \quad (6.51)$$

Por lo tanto, definiendo la matriz  $\mathbf{H}$  como

$$\mathbf{H} = [ \mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_{N_u} ] \quad (6.52)$$

donde  $\mathbf{v}_i$  es el  $i$ -ésimo vector de la matriz  $\mathbf{V}$  proveniente de la descomposición SVD de la matriz  $\mathbf{G}_2$ , es posible expresar el espacio nulo definido en (6.46) como

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{v}_{m+1} \Delta u_{f_1} + \mathbf{v}_{m+2} \Delta u_{f_2} + \dots + \mathbf{v}_{N_u} \Delta u_{f_{N_u-m}} \\ &= \mathbf{H}_{N_u \times (N_u-m)} \Delta \mathbf{u}_f \end{aligned} \quad (6.53)$$

y el vector  $\Delta \mathbf{u}_{f_{(N_u-m) \times 1}}$  representa el conjunto de variables libres o grados de libertad en la solución del sistema (6.42), que pueden ser usadas para satisfacer otras especificaciones, como por ejemplo, minimizar el índice de coste.

### 6.2.3.2 Obtención de la solución homogénea.

Una vez calculada la solución particular  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_p$  y la matriz  $\mathbf{H}$ , se puede obtener el vector  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_f$ , sustituyendo la solución general  $(\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_f)$  en el índice (6.44)

$$\begin{aligned} J(\Delta \mathbf{u}_f) &= [\mathbf{G}_1 [\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_f] - \mathbf{e}_1]^T [\mathbf{G}_1 [\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_f] - \mathbf{e}_1] + \\ &+ [\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_f]^T \rho [\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_f]. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Minimizando para el conjunto de variables *libres*  $\Delta \mathbf{u}_f$

$$\begin{aligned} \nabla J(\Delta \mathbf{u}_f) &= \mathbf{0} \\ &= 2[\mathbf{G}_1 \mathbf{H}]^T [\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]] + 2\rho \mathbf{H}^T [\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_f] \end{aligned} \quad (6.55)$$

se llega a

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_f = [\mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}] \mathbf{H}]^{-1} \left[ [\mathbf{G}_1 \mathbf{H}]^T \mathbf{e}_1 - \mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}] \Delta \hat{\mathbf{u}}_p \right]. \quad (6.56)$$

### 6.2.3.3 Obtención de la ley de control.

La ley de control final puede expresarse como

$$\begin{aligned}\Delta \hat{\mathbf{u}} &= \Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f \\ &= \Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} [\mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}] \mathbf{H}]^{-1} \left[ [\mathbf{G}_1 \mathbf{H}]^T \mathbf{e}_1 - \mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}] \Delta \hat{\mathbf{u}}_p \right]\end{aligned}\quad (6.57)$$

que haciendo uso de (6.49) se obtiene

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{M} \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + [\mathbf{I} - \mathbf{M} [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}]] \mathbf{G}_2^+ \mathbf{e}_2 \quad (6.58)$$

donde

$$\mathbf{M} = \mathbf{H} [\mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}] \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T. \quad (6.59)$$

Este resultado, también más complejo que la solución analítica del GPC original, tan sólo requiere la inversión de la matriz  $[\mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}] \mathbf{H}]$ , frente a la inversión de 2 matrices que se lleva a cabo en la ecuación (6.18).

De nuevo, si la condición  $N_u \geq m$  se particulariza como  $N_u = m$ , en ese caso la matriz  $\mathbf{G}_2$  resulta cuadrada, y por tanto no existe  $\mathbf{H}$  resultando

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{G}_2^{-1} \mathbf{e}_2, \quad (6.60)$$

ya que en este caso, los  $N_u$  grados de libertad de la acción de control se utilizan en cumplir la restricción terminal

$$\mathbf{G}_2 \Delta \mathbf{u} = \mathbf{e}_2 \quad (6.61)$$

no quedando disponibles grados de libertad para la minimización del índice.

### 6.2.4 Equivalencia entre soluciones.

Hasta este punto se han planteado cuatro formas equivalentes de expresar la ley de control del CRHPC, desde la obtenida mediante multiplicadores de Lagrange (ecuaciones de (6.18) a (6.20))

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{G}} [\mathbf{I} - \mathbf{G}_2^T \mathbf{M} \mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}}] \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T \mathbf{M} \mathbf{e}_2, \quad (6.62)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}]^{-1}, \quad (6.63)$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T]^{-1}, \quad (6.64)$$

pasando por la expresión para valores elevados de  $\mu$  (ecuación (6.29))

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \mu^2 \mathbf{G}_2^T \mathbf{G}_2 + \rho \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + \mu^2 \mathbf{G}_2^T \mathbf{e}_2] \quad (6.65)$$

o aplicando la GSVD (ecuación (6.38))

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{e}_2}{\beta_i} \mathbf{x}_i + \sum_{i=m+1}^{N_u} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_1}{\alpha_i} \mathbf{x}_i \quad (6.66)$$

hasta la expresión obtenida mediante la SVD (ecuaciones de (6.58) a (6.59))

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{M} \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + [\mathbf{I} - \mathbf{M} [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}]] \mathbf{G}_2^+ \mathbf{e}_2, \quad (6.67)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{H} [\mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}] \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T. \quad (6.68)$$

La equivalencia de las tres primeras formulaciones se desprende del desarrollo de las mismas que se ha mostrado en el capítulo. Para mostrar la equivalencia entre la última y la primera, basta con demostrar que los términos que multiplican a  $\mathbf{e}_1$  son iguales (pues igualando los términos que multiplican a  $\mathbf{e}_2$  se obtiene la misma expresión). Por tanto debe ocurrir que de (6.62) y (6.67)

$$\tilde{\mathbf{G}} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{G}_2^T [\mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T]^{-1} \mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} \right] \mathbf{G}_1^T = \mathbf{H} [\mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}] \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{G}_1^T, \quad (6.69)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{G}_2^T [\mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T]^{-1} \mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} \right] = \mathbf{H} [\mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T, \quad (6.70)$$

o bien

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T [\mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T]^{-1} \mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{H} [\mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T \quad (6.71)$$

como se demuestra a continuación.

***Demostración:*** Dadas las matrices siguientes considerando  $m = 1$  y  $N_u = 2$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix}, \quad (6.72)$$

se debe obtener cualquier base nula para  $\mathbf{G}_2$ , es decir,  $\mathcal{N}(\mathbf{G}_2) = \mathbf{H}$ , como por ejemplo

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -r_2 \\ r_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.73)$$

ya que se cumple

$$\mathbf{G}_2 \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (6.74)$$

Así pues sustituyendo las matrices  $\tilde{\mathbf{G}}$ ,  $\mathbf{G}_2$  y  $\mathbf{H}$  en ambas partes de la ecuación (6.69) se obtiene el mismo resultado

$$\frac{g_2 g_3 - g_1 g_4}{r_2^2 g_4 + r_2 [g_2 + g_3] r_1 + g_1 r_1^2} \begin{bmatrix} -r_2^2 & r_2 r_1 \\ r_2 r_1 & -r_1^2 \end{bmatrix}, \quad (6.75)$$

por lo que dicha equivalencia es cierta, para cualquier  $\tilde{\mathbf{G}}$ ,  $\mathbf{G}_2$  y  $\mathbf{H} = \mathcal{N}(\mathbf{G}_2)$ . ■

Por otra parte, si se sustituye  $\mathbf{G}_2$  por su descomposición SVD

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (6.76)$$

siendo

$$\mathbf{\Sigma}_{m \times N_u} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times (N_u - m)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m \end{bmatrix}, \quad (6.77)$$

$$\mathbf{V}_{N_u \times N_u} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N_u \times m} & \mathbf{H}_{N_u \times (N_u - m)} \end{bmatrix}, \quad (6.78)$$

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{X} \mathbf{X}^T \neq \mathbf{I}, \quad \mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{H} \mathbf{H}^T \neq \mathbf{I}, \quad (6.79)$$

$$\mathbf{X} \mathbf{X}^T + \mathbf{H} \mathbf{H}^T = \mathbf{I}, \quad (6.80)$$

y se elige no cualquier base nula, si no la que se obtiene a partir de la matriz ortonormal  $\mathbf{V}$ ,  $\mathcal{N}(\mathbf{G}_2) = \mathbf{H}$ , resulta curioso que la expresión (6.71) se satisface incluso si se sustituye  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{G}_2^T$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{X} \left[ \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{X} \right]^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{H} \left[ \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{H} \right]^{-1} \mathbf{H}^T \quad (6.81)$$

como se demuestra a continuación.

***Demostración:*** Sustituyendo  $\mathbf{G}_2 = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$  en la ecuación (6.70) se obtiene

$$\tilde{\mathbf{G}} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^T \mathbf{U}^T \left[ \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^T \mathbf{U}^T \right]^{-1} \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{G}} \right] = \mathbf{H} \left[ \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{H} \right]^{-1} \mathbf{H}^T, \quad (6.82)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{V}\Sigma^T \left[ \Sigma\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{V}\Sigma^T \right]^{-1} \Sigma\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{G}} \right] = \mathbf{H} \left[ \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{H} \right]^{-1} \mathbf{H}^T. \quad (6.83)$$

Siendo  $\mathbf{V}\Sigma^T = \mathbf{X}\mathbf{S}$  resulta

$$\tilde{\mathbf{G}} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{S} \left[ \mathbf{S}\mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{X}\mathbf{S} \right]^{-1} \mathbf{S}\mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{G}} \right] = \mathbf{H} \left[ \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{H} \right]^{-1} \mathbf{H}^T, \quad (6.84)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{X} \left[ \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{X} \right]^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{G}} \right] = \mathbf{H} \left[ \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{H} \right]^{-1} \mathbf{H}^T \quad (6.85)$$

o bien

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{X} \left[ \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{X} \right]^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{H} \left[ \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{H} \right]^{-1} \mathbf{H}^T \quad (6.86)$$

expresión que se cumple para cualquier  $\tilde{\mathbf{G}}$  cuadrada y para cualquier matriz ortogonal dividida en dos partes  $\mathbf{V} = [\mathbf{X} \quad \mathbf{H}]$ . ■

### 6.2.5 Ejemplo 1.

En este ejemplo se pretende mostrar el efecto que tiene la restricción de tipo igualdad en la estabilización del sistema. Para ello se mostrará cómo un GPC no logra estabilizar un proceso dado cuando proceso y modelo coinciden, y en cambio el GPC con restricción terminal (CRHPC) sí lo logra. Por tanto, el CRHPC asegura la estabilidad nominal.

Si se considera el siguiente proceso discreto de fase no mínima

$$G(z) = \frac{z - 1.55}{(z - 0.9)(z - 0.8)}, \quad (6.87)$$

y se diseña un GPC estándar con los siguientes parámetros

$N_1$	$N_2$	$N_u$	$\mathbf{T}(z^{-1})$	$\rho$
1	6	3	1	1

(6.88)

el sistema no logra estabilizarse tal y como se muestra en la figura 6.2.

Lo mismo ocurre si se considera  $N_u = 4$  (ver figura 6.3).

Sin embargo, un controlador de tipo CRHPC diseñado en base a los siguientes parámetros ( $n_a = \deg(\mathbf{A}(z^{-1})\Delta) = 3 = m$ ,  $n_b = \deg(\mathbf{B}(z^{-1})) = 1$ )

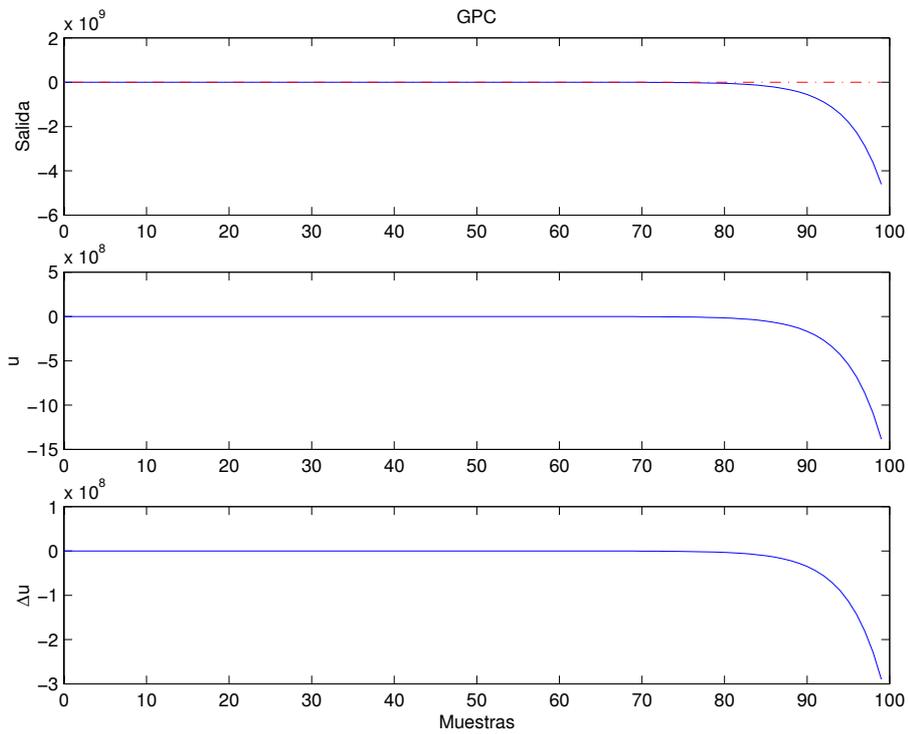


Figura 6.2: Respuesta del proceso con GPC ( $N_u = 3$ ) cuando modelo y proceso coinciden.

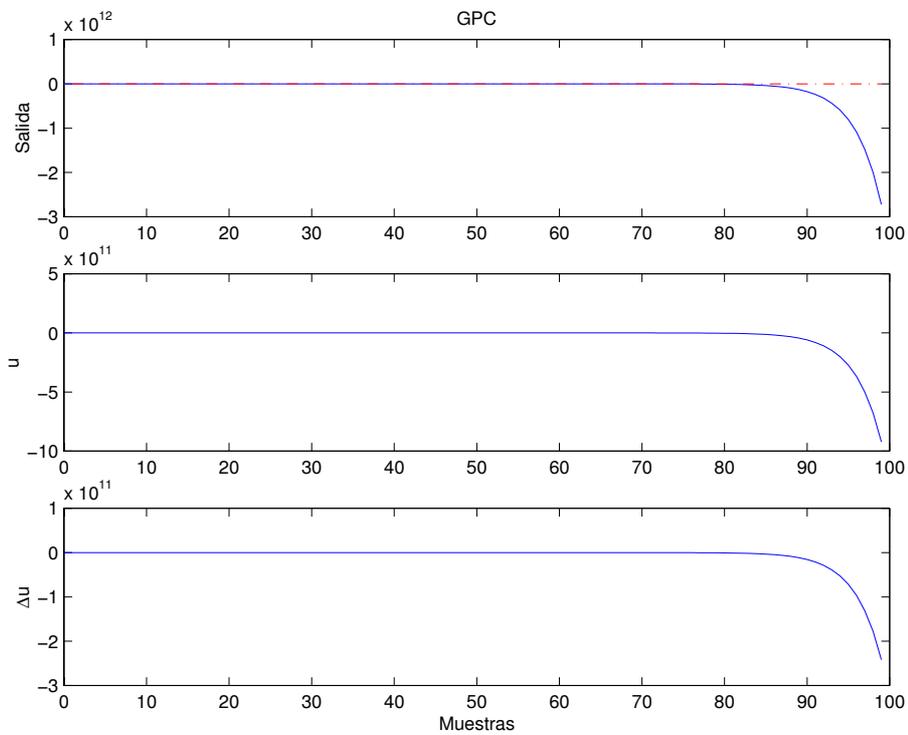


Figura 6.3: Respuesta del proceso con GPC ( $N_u = 4$ ) cuando modelo y proceso coinciden.

$N_1$	$N_2$	$m$	$N_u$	$\mathbf{T}(z^{-1})$	$\rho$
1	6	3	3	1	1

(6.89)

es capaz de estabilizar el sistema, tal y como se muestra en la figura 6.4.

En este caso, al ser  $N_u = m$ , realmente el controlador CRHPC es simplemente

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{G}_2^{-1} \mathbf{e}_2 \quad (6.90)$$

como se mostró anteriormente. Se observa que para  $N_u = 4 > m$  también el CRHPC estabiliza el sistema frente al GPC, tal y como se muestra en la figura 6.5. Se destaca que se ha obtenido la simulación del CRHPC con las cuatro alternativas mostradas en el apartado anterior, verificándose la equivalencia de todas ellas.

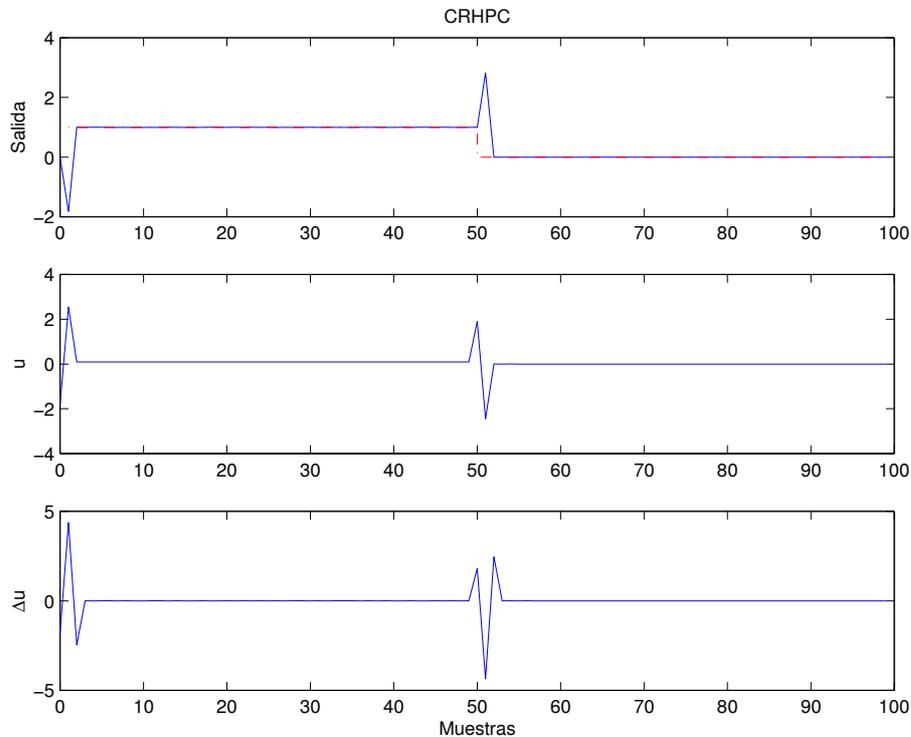


Figura 6.4: Respuesta con CRHPC ( $N_u = 3$ ) cuando modelo y proceso coinciden.

## 6.3 CRHPC-BDU.

La mayoría de resultados en Control Predictivo en general, y en el GPC en particular, se basan en la suposición de que el modelo describe perfectamente el proceso real, y ausencia de perturbaciones. Pero, en realidad, el modelo siempre difiere del proceso [Skogestad y Postlethwaite 1996].

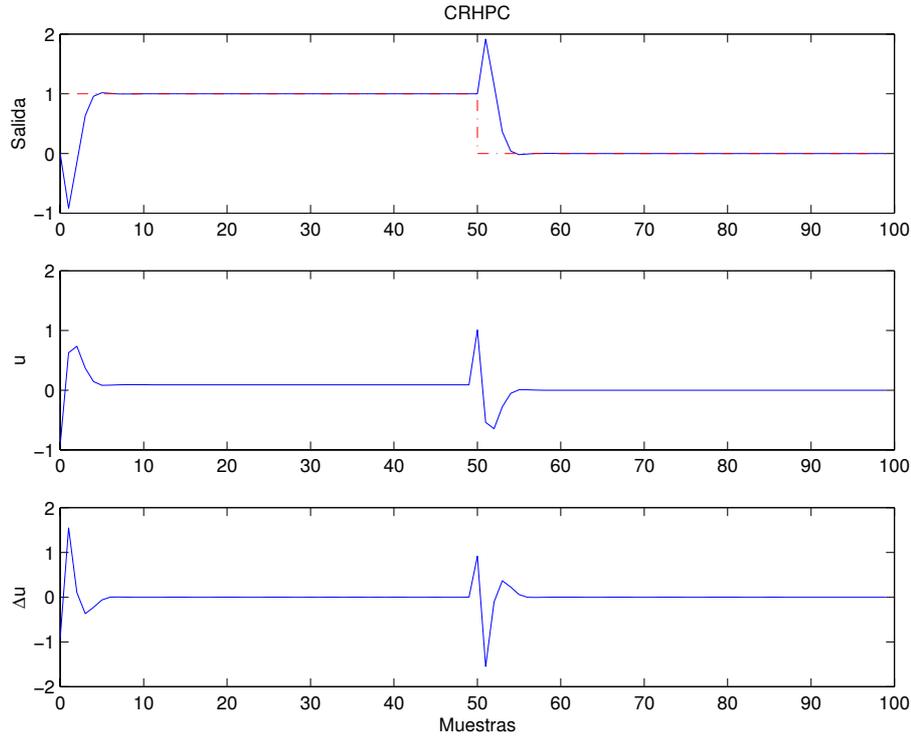


Figura 6.5: Respuesta con CRHPC ( $N_u = 4$ ) cuando modelo y proceso coinciden.

El CRHPC asegura la estabilidad nominal, pero ésta no queda asegurada cuando existen discrepancias entre modelo y proceso. Del mismo modo que en el capítulo anterior se sintonizó el GPC usando BDU para mejorar la robustez del sistema, en este capítulo se procede al sintonizado del CRHPC mediante BDU con el mismo objetivo.

Así pues, las diferentes expresiones del CRHPC mostradas anteriormente se verán modificadas. Por tanto, frente al CRHPC formulado como un problema de mínimos cuadrados regularizado mostrado en la sección anterior, a continuación se va a plantear el CRHPC-BDU formulado como un problema BDU, y el CRHPC mediante SVD se transformará en CRHPC-BDU mediante SVD.

### 6.3.1 CRHPC-BDU como un problema BDU.

Se plantea la ley de control como la solución al siguiente problema BDU con restricción terminal para el peor caso

$$\begin{aligned}
 \min_{\Delta \mathbf{u}} \quad & \max_{\substack{\|\delta \mathbf{G}_1\|_2 \leq \eta_{G_1} \\ \|\delta \mathbf{e}_1\|_2 \leq \eta_{e_1}}} \left[ \|\mathbf{G}_1 + \delta \mathbf{G}_1\| \Delta \mathbf{u} - [\mathbf{e}_1 + \delta \mathbf{e}_1]\|_2^2 + \rho \|\Delta \mathbf{u}\|_2^2 \right] \\
 \text{s.a.} \quad & \max_{\substack{\|\delta \mathbf{G}_2\|_2 \leq \eta_{G_2} \\ \|\delta \mathbf{e}_2\|_2 \leq \eta_{e_2}}} \|\mathbf{G}_2 + \delta \mathbf{G}_2\| \Delta \mathbf{u} - [\mathbf{e}_2 + \delta \mathbf{e}_2]\|_2 = 0. \quad (6.91)
 \end{aligned}$$

Del mismo modo que en el CRHPC, una forma interesante de obtener una solución aproximada a este problema consiste en solucionar el problema BDU sin restricción siguiente

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{G}_1\|_2 \leq \eta_{G_1} \\ \|\delta \mathbf{e}_1\|_2 \leq \eta_{e_1} \\ \|\delta \mathbf{G}_2\|_2 \leq \eta_{G_2} \\ \|\delta \mathbf{e}_2\|_2 \leq \eta_{e_2}}} \left[ \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 + \delta \mathbf{G}_1 \\ \mu [\mathbf{G}_2 + \delta \mathbf{G}_2] \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\mu - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 + \delta \mathbf{e}_1 \\ \mu [\mathbf{e}_2 + \delta \mathbf{e}_2] \end{bmatrix} \right\|_2^2 + \rho \|\Delta \mathbf{u}_\mu\|_2^2 \right] \quad (6.92)$$

para valores elevados de  $\mu$ .

Llamando

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mu \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{G}_1 \\ \mu \delta \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mu \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{e}_1 \\ \mu \delta \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \quad (6.93)$$

y asumiendo una *incertidumbre global*

$$\|\delta \mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G, \quad (6.94)$$

$$\|\delta \mathbf{G}\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} \delta \mathbf{G}_1 \\ \mu \delta \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\|\delta \mathbf{G}_1\|_2^2 + \|\mu \delta \mathbf{G}_2\|_2^2}, \quad (6.95)$$

$$\|\delta \mathbf{G}\|_2 = \sqrt{\|\delta \mathbf{G}_1\|_2^2 + \mu^2 \|\delta \mathbf{G}_2\|_2^2} \leq \sqrt{\eta_{G_1}^2 + \mu^2 \eta_{G_2}^2} = \eta_G, \quad (6.96)$$

es decir

$$\eta_G = \sqrt{\eta_{G_1}^2 + \mu^2 \eta_{G_2}^2}, \quad (6.97)$$

$$\eta_e = \sqrt{\eta_{e_1}^2 + \mu^2 \eta_{e_2}^2}, \quad (6.98)$$

resulta

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G \\ \|\delta \mathbf{e}\|_2 \leq \eta_e}} \left[ \|\mathbf{G} + \delta \mathbf{G}\|_2 \|\Delta \mathbf{u}_\mu - [\mathbf{e} + \delta \mathbf{e}]\|_2^2 + \rho \|\Delta \mathbf{u}_\mu\|_2^2 \right], \quad (6.99)$$

cuya solución BDU

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda_G \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{e}, \quad (6.100)$$

$$\lambda_G = \frac{\eta_G \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}\|_2}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu\|_2} + \frac{\rho \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}\|_2}{\|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}\|_2 + \eta_G \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu\|_2 + \eta_e}, \quad (6.101)$$

tras deshacer el cambio de variables se puede expresar

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \mu^2 \mathbf{G}_2^T \mathbf{G}_2 + \lambda_G \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + \mu^2 \mathbf{G}_2^T \mathbf{e}_2], \quad (6.102)$$

$$\begin{aligned} \lambda_G = & \frac{\sqrt{\eta_{G_1}^2 + \mu^2 \eta_{G_2}^2} \sqrt{\|\mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}_1\|_2^2 + \mu^2 \|\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}_2\|_2^2}}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu\|_2} + \\ & + \frac{\rho \sqrt{\|\mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}_1\|_2^2 + \mu^2 \|\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}_2\|_2^2}}{\sqrt{\|\mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}_1\|_2^2 + \mu^2 \|\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}_2\|_2^2 + \sqrt{\eta_{G_1}^2 + \mu^2 \eta_{G_2}^2} \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu\|_2 + \sqrt{\eta_{e_1}^2 + \mu^2 \eta_{e_2}^2}}}. \end{aligned} \quad (6.103)$$

Teniendo en cuenta que se debe aplicar el límite  $\mu \rightarrow \infty$ , resulta que el escalar  $\lambda_G$  se podría simplificar, expresando la solución como

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \mu^2 \mathbf{G}_2^T \mathbf{G}_2 + \lambda_G \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + \mu^2 \mathbf{G}_2^T \mathbf{e}_2], \quad (6.104)$$

$$\lambda_G = \frac{\eta_{G_2} \|\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}_2\|_2}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu\|_2} \mu^2. \quad (6.105)$$

Como se observa, en este planteamiento la solución no depende del parámetro  $\rho$ .

Al igual que con el CRHPC, se puede obtener una solución al problema anterior que no dependa de  $\mu$  (tras aplicar el límite  $\mu \rightarrow \infty$ ) haciendo uso de la GSVD (*Generalized Singular Value Decomposition*) [Golub y van Loan 1996].

Comparando la solución del CRHPC (6.29)

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \mu^2 \mathbf{G}_2^T \mathbf{G}_2 + \rho \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + \mu^2 \mathbf{G}_2^T \mathbf{e}_2] \quad (6.106)$$

con la del CRHPC-BDU (ecuaciones (6.104) y (6.105)), la única diferencia radica en que el parámetro  $\rho$  (que no depende de  $\mu$ ) se ha sustituido por  $\lambda_G$  (que depende de  $\mu^2$ ). Por ello, llamando

$$\lambda_G = \frac{\eta_{G_2} \|\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}_2\|_2}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu\|_2} \mu^2 = \lambda^* \mu^2, \quad (6.107)$$

se puede expresar el CRHPC-BDU como un problema de mínimos cuadrados sin restricción, similar a (6.39)

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mu \begin{bmatrix} \mathbf{G}_2 \\ \sqrt{\lambda^*} \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\mu - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mu \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (6.108)$$

donde teniendo en cuenta el siguiente cambio de variables

$$\tilde{\mathbf{G}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_2 \\ \sqrt{\lambda} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.109)$$

se obtiene

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mu \tilde{\mathbf{G}}_2 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\mu - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mu \tilde{\mathbf{e}}_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (6.110)$$

y se puede hacer uso de la GSVD (*Generalized Singular Value Decomposition*), calculando las matrices ortogonales  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  y la matriz invertible  $\mathbf{X}$ , al igual que se mostró con el CRHPC.

### 6.3.2 CRHPC-BDU mediante la SVD.

Planteando el problema CRHPC-BDU como la solución de dos sistemas de ecuaciones:

1. Por un lado se debe cumplir la restricción terminal, planteada para el peor caso como un problema de tipo BDU

$$\max_{\substack{\|\delta \mathbf{G}_2\|_2 \leq \eta_{G_2} \\ \|\delta \mathbf{e}_2\|_2 \leq \eta_{e_2}}} \left\| [\mathbf{G}_2 + \delta \mathbf{G}_2] \Delta \mathbf{u} - [\mathbf{e}_2 + \delta \mathbf{e}_2] \right\|_2 = \mathbf{0}. \quad (6.111)$$

2. Por otro, se debe minimizar el siguiente índice de coste (también planteado como un problema BDU)

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{G}_1\|_2 \leq \eta_{G_1} \\ \|\delta \mathbf{e}_1\|_2 \leq \eta_{e_1}}} \left[ \left\| [\mathbf{G}_1 + \delta \mathbf{G}_1] \Delta \mathbf{u} - [\mathbf{e}_1 + \delta \mathbf{e}_1] \right\|_2^2 + \rho \left\| \Delta \mathbf{u} \right\|_2^2 \right]. \quad (6.112)$$

Este sistema de ecuaciones se resolverá calculando una solución BDU pero restringida por la restricción terminal (6.111).

#### 6.3.2.1 Obtención de la solución particular.

En primer lugar se resuelve el problema BDU (6.111)

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_p} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{G}_2\|_2 \leq \eta_{G_2} \\ \|\delta \mathbf{e}_2\|_2 \leq \eta_{e_2}}} \left\| [\mathbf{G}_2 + \delta \mathbf{G}_2] \Delta \mathbf{u}_p - [\mathbf{e}_2 + \delta \mathbf{e}_2] \right\|_2, \quad (6.113)$$

cuya solución resulta

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_p = \mathbf{G}_2^T [\mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^T + \lambda_{G_2} \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{e}_2, \quad (6.114)$$

$$\lambda_{G_2} = \frac{\eta_{G_2} \|\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p - \mathbf{e}_2\|_2}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_p\|_2}. \quad (6.115)$$

Tal y como se mostró en el capítulo 3, se define la incertidumbre en el peor caso  $\hat{\delta} \mathbf{G}_2$  y  $\hat{\delta} \mathbf{e}_2$ , de modo que

$$\min_{\substack{\Delta \mathbf{u}_p \\ \|\delta \mathbf{G}_2\|_2 \leq \eta_{G_2} \\ \|\delta \mathbf{e}_2\|_2 \leq \eta_{e_2}}} \max \left\| [\mathbf{G}_2 + \delta \mathbf{G}_2] \Delta \mathbf{u}_p - [\mathbf{e}_2 + \delta \mathbf{e}_2] \right\|_2 = \min_{\Delta \mathbf{u}_p} \left\| [\mathbf{G}_2 + \hat{\delta} \mathbf{G}_2] \Delta \mathbf{u}_p - [\mathbf{e}_2 + \hat{\delta} \mathbf{e}_2] \right\|_2, \quad (6.116)$$

una vez obtenida la solución, se puede expresar dicha incertidumbre como (ver capítulo 3)

$$\hat{\delta} \mathbf{G}_2 = \eta_{G_2} \frac{[\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p - \mathbf{e}_2]}{\|\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p - \mathbf{e}_2\|_2} \frac{\Delta \hat{\mathbf{u}}_p^T}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_p\|_2}, \quad (6.117)$$

$$\hat{\delta} \mathbf{e}_2 = -\eta_{e_2} \frac{[\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p - \mathbf{e}_2]}{\|\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p - \mathbf{e}_2\|_2}. \quad (6.118)$$

Del mismo modo que con el CRHPC, es posible generar todas las posibles soluciones expresando la solución general  $\Delta \hat{\mathbf{u}}$  de este sistema como

$$\{\Delta \hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{N_u} \mid [\mathbf{G}_2 + \hat{\delta} \mathbf{G}_2] \Delta \hat{\mathbf{u}} = [\mathbf{e}_2 + \hat{\delta} \mathbf{e}_2]\} = \{\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{z} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{N}([\mathbf{G}_2 + \hat{\delta} \mathbf{G}_2])\} \quad (6.119)$$

donde

- $\Delta \hat{\mathbf{u}}_p$  es una solución particular del sistema de ecuaciones.
- $\mathbf{z}$  es la solución general del sistema homogéneo de ecuaciones asociado

$$\mathcal{N}([\mathbf{G}_2 + \hat{\delta} \mathbf{G}_2]) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{N_u} \mid [\mathbf{G}_2 + \hat{\delta} \mathbf{G}_2] \mathbf{z} = \mathbf{0}\} \quad (6.120)$$

siendo  $\mathcal{N}([\mathbf{G}_2 + \hat{\delta} \mathbf{G}_2])$  el espacio nulo de la matriz  $[\mathbf{G}_2 + \hat{\delta} \mathbf{G}_2]$ .

De esta forma, si  $[\mathbf{e}_2 + \hat{\delta} \mathbf{e}_2] = [\mathbf{G}_2 + \hat{\delta} \mathbf{G}_2] \Delta \hat{\mathbf{u}}_p$  y  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}([\mathbf{G}_2 + \hat{\delta} \mathbf{G}_2])$ , entonces

$$[\mathbf{e}_2 + \hat{\delta} \mathbf{e}_2] = [\mathbf{G}_2 + \hat{\delta} \mathbf{G}_2] [\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{z}] \quad (6.121)$$

por lo que  $\mathbf{z}$  representa, de algún modo, los grados de libertad en la solución del sistema (6.111) y caracteriza las diferentes soluciones que producen el mismo resultado.

Si se utiliza la descomposición SVD de la matriz  $[\mathbf{G}_2 + \hat{\delta}\mathbf{G}_2]$

$$[\mathbf{G}_2 + \hat{\delta}\mathbf{G}_2] = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T, \quad (6.122)$$

es posible calcular el espacio nulo  $\mathcal{N}([\mathbf{G}_2 + \hat{\delta}\mathbf{G}_2])$ . Los vectores  $[\mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_{N_u}]$  de la matriz  $\mathbf{V}_{N_u \times N_u}$  asociados a los valores singulares nulos forman una base para  $\mathcal{N}([\mathbf{G}_2 + \hat{\delta}\mathbf{G}_2])$ .

Es decir, es posible expresar cualquier vector de acciones de control  $\Delta\mathbf{u}$  que cumpla  $[\mathbf{G}_2 + \hat{\delta}\mathbf{G}_2]\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , como una combinación lineal de estos vectores, puesto que

$$[\mathbf{G}_2 + \hat{\delta}\mathbf{G}_2]\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad \forall i \in [m+1, \dots, N_u]. \quad (6.123)$$

Por lo tanto, definiendo la matriz  $\mathbf{H}$  como

$$\mathbf{H} = [\mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_{N_u}] \quad (6.124)$$

donde  $\mathbf{v}_i$  es el  $i$ -ésimo vector de la matriz  $\mathbf{V}$  proveniente de la descomposición SVD de la matriz  $[\mathbf{G}_2 + \hat{\delta}\mathbf{G}_2]$ , es posible expresar el espacio nulo definido en (6.120) como

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\Delta\mathbf{u}_f \quad (6.125)$$

y el vector  $\Delta\mathbf{u}_f$  representa el conjunto de variables libres o grados de libertad en la solución del sistema (6.111), que pueden ser usadas para satisfacer otras especificaciones, como por ejemplo, minimizar el índice de coste (6.112).

### 6.3.2.2 Obtención de la solución homogénea.

Una vez calculada la solución particular  $\Delta\hat{\mathbf{u}}_p$  y la matriz  $\mathbf{H}$ , se puede obtener el vector  $\Delta\hat{\mathbf{u}}_f$ , sustituyendo la solución general  $(\Delta\hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H}\Delta\mathbf{u}_f)$  en el índice (6.112)

$$\min_{\substack{\Delta\mathbf{u}_f \\ \|\delta\mathbf{G}_1\|_2 \leq \eta_{G_1} \\ \|\delta\mathbf{e}_1\|_2 \leq \eta_{e_1}}} \max \left[ \frac{\|[\mathbf{G}_1 + \delta\mathbf{G}_1][\Delta\hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H}\Delta\mathbf{u}_f] - [\mathbf{e}_1 + \delta\mathbf{e}_1]\|_2^2}{+\rho \|\Delta\hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H}\Delta\mathbf{u}_f\|_2^2} \right] = (6.126)$$

$$\min_{\substack{\Delta\mathbf{u}_f \\ \|\delta\mathbf{G}_1\|_2 \leq \eta_{G_1} \\ \|\delta\mathbf{e}_1\|_2 \leq \eta_{e_1}}} \max \left[ \frac{\|[\mathbf{G}_1\mathbf{H} + \delta\mathbf{G}_1\mathbf{H}]\Delta\mathbf{u}_f - [[\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1\Delta\hat{\mathbf{u}}_p] + [\delta\mathbf{e}_1 - \delta\mathbf{G}_1\Delta\hat{\mathbf{u}}_p]]\|_2^2}{+\rho \|\Delta\hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H}\Delta\mathbf{u}_f\|_2^2} \right] (6.127)$$

que tras el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G} &\rightarrow \mathbf{G}_1 \mathbf{H}, & \mathbf{e} &\rightarrow \mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p, \\
 \delta \mathbf{G} &\rightarrow \delta \mathbf{G}_1 \mathbf{H}, & \delta \mathbf{e} &\rightarrow \delta \mathbf{e}_1 - \delta \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p, \\
 \eta_G &\rightarrow \eta_{G_1} \|\mathbf{H}\|_2, & \eta_e &\rightarrow \eta_{e_1} + \eta_{G_1} \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_p\|_2,
 \end{aligned}$$

resulta

$$\min_{\substack{\Delta \mathbf{u}_f \\ \|\delta \mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G \\ \|\delta \mathbf{e}\|_2 \leq \eta_e}} \max \left[ \|\mathbf{G} + \delta \mathbf{G}\| \Delta \mathbf{u}_f - [\mathbf{e} + \delta \mathbf{e}] \|_2^2 + \rho \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_f \|_2^2 \right]. \quad (6.128)$$

Sustituyendo la maximización del problema BDU tal y como se mostró en el capítulo 3 se obtiene

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_f} \left[ \|\mathbf{G} \Delta \mathbf{u}_f - \mathbf{e} \|_2 + \eta_G \|\Delta \mathbf{u}_f \|_2 + \eta_e \right]^2 + \rho \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_f \|_2^2. \quad (6.129)$$

Minimizando para el conjunto de variables *libres*  $\Delta \mathbf{u}_f$

$$\begin{aligned}
 \nabla J = & 2 \left[ \|\mathbf{G} \Delta \mathbf{u}_f - \mathbf{e} \|_2 + \eta_G \|\Delta \mathbf{u}_f \|_2 + \eta_e \right] \left[ \frac{2 \mathbf{G}^T [\mathbf{G} \Delta \mathbf{u}_f - \mathbf{e}]}{2 \|\mathbf{G} \Delta \mathbf{u}_f - \mathbf{e} \|_2} + \frac{2 \eta_G \Delta \mathbf{u}_f}{2 \|\Delta \mathbf{u}_f \|_2} \right] + \\
 & + 2 \rho \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_f \|_2 \frac{2 \mathbf{H}^T [\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_f]}{2 \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_f \|_2} \quad (6.130)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & 2 \left[ \|\mathbf{G} \Delta \mathbf{u}_f - \mathbf{e} \|_2 + \eta_G \|\Delta \mathbf{u}_f \|_2 + \eta_e \right] \left[ \frac{\mathbf{G}^T [\mathbf{G} \Delta \mathbf{u}_f - \mathbf{e}]}{\|\mathbf{G} \Delta \mathbf{u}_f - \mathbf{e} \|_2} + \frac{\eta_G \Delta \mathbf{u}_f}{\|\Delta \mathbf{u}_f \|_2} \right] + \\
 & + 2 \rho \mathbf{H}^T [\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} \Delta \mathbf{u}_f]. \quad (6.131)
 \end{aligned}$$

Resolviendo  $\nabla J(\Delta \hat{\mathbf{u}}_f) = \mathbf{0}$  resulta

$$\begin{aligned}
 & \left[ \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e} \|_2 + \eta_G \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f \|_2 + \eta_e \right] \left[ \frac{\mathbf{G}^T [\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}]}{\|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e} \|_2} + \frac{\eta_G \Delta \hat{\mathbf{u}}_f}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f \|_2} \right] + \\
 & + \rho \mathbf{H}^T [\Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f] = \mathbf{0}, \quad (6.132)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mathbf{G}^T \mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{G}^T \mathbf{e}}{\|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e} \|_2} + \eta_G \frac{\Delta \hat{\mathbf{u}}_f}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f \|_2} + \frac{\rho \mathbf{H}^T \Delta \hat{\mathbf{u}}_p}{\|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e} \|_2 + \eta_G \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f \|_2 + \eta_e} + \\
 & + \frac{\rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f}{\|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e} \|_2 + \eta_G \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f \|_2 + \eta_e} = \mathbf{0}, \quad (6.133)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{G}^T \mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{G}^T \mathbf{e} + \frac{\eta_G \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f + \frac{\rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_f}{\|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2 + \eta_G \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2 + \eta_e} + \\
& + \frac{\rho \mathbf{H}^T \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p}{\|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2 + \eta_G \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2 + \eta_e} \frac{\Delta \hat{\mathbf{u}}_f^T \Delta \hat{\mathbf{u}}_f}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2^2} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{6.134}$$

Definiendo la matriz  $\mathbf{\Lambda}$  como

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Lambda} = & \frac{\eta_G \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2 \mathbf{I}}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2} + \frac{\rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2}{\|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2 + \eta_G \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2 + \eta_e} + \\
& + \frac{\rho \mathbf{H}^T \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p}{\|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2 + \eta_G \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2 + \eta_e} \frac{\Delta \hat{\mathbf{u}}_f^T}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2^2},
\end{aligned} \tag{6.135}$$

se llega a

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{G}^T \mathbf{e} + \mathbf{\Lambda} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f = \mathbf{0}, \tag{6.136}$$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_f = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \mathbf{\Lambda}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{e}, \tag{6.137}$$

que tras deshacer el cambio de variables resulta

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_f = [\mathbf{H}^T \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 \mathbf{H} + \mathbf{\Lambda}]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{G}_1^T [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]. \tag{6.138}$$

### 6.3.2.3 Obtención de la ley de control.

La ley de control final puede expresarse como

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f \tag{6.139}$$

$$= \Delta \hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} [\mathbf{H}^T \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 \mathbf{H} + \mathbf{\Lambda}]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{G}_1^T [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p] \tag{6.140}$$

donde teniendo en cuenta  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_p$  (6.114) y sustituyendo el cambio de variables en la expresión de  $\mathbf{\Lambda}$  para  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\eta_G$  y  $\eta_e$ , se obtiene la ley de control formada por las ecuaciones desde (6.141) hasta (6.146)

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + [\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1] \Delta \hat{\mathbf{u}}_p, \quad (6.141)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_p = \mathbf{G}_2^T [\mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^T + \lambda_{G_2} \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{e}_2, \quad (6.142)$$

$$\lambda_{G_2} = \frac{\eta_{G_2} \|\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p - \mathbf{e}_2\|_2}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_p\|_2}, \quad (6.143)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{H} [\mathbf{H}^T \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 \mathbf{H} + \Lambda]^{-1} \mathbf{H}^T, \quad (6.144)$$

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{\eta_{G_1} \|\mathbf{H}\|_2 \|\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]\|_2 \mathbf{I}}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2} + \\ & + \frac{\rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \|\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]\|_2}{\|\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]\|_2 + \eta_{G_1} \|\mathbf{H}\|_2 \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2 + [\eta_{e_1} + \eta_{G_1} \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_p\|_2]} + \\ & + \frac{\rho \mathbf{H}^T \|\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]\|_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p}{\|\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]\|_2 + \eta_{G_1} \|\mathbf{H}\|_2 \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2 + [\eta_{e_1} + \eta_{G_1} \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_p\|_2]} \cdot \\ & \frac{\Delta \hat{\mathbf{u}}_f^T}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2^2}, \end{aligned} \quad (6.145)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_f = [\mathbf{H}^T \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 \mathbf{H} + \Lambda]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{G}_1^T [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]. \quad (6.146)$$

De nuevo, si la condición  $N_u \geq m$  se particulariza como  $N_u = m$ , en ese caso la matriz  $\mathbf{G}_2$  resulta cuadrada, y por tanto no existe  $\mathbf{H}$ , es decir  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_f = \mathbf{0}$ , resultando

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \Delta \hat{\mathbf{u}}_p = \mathbf{G}_2^T [\mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^T + \lambda_{G_2} \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{e}_2, \quad (6.147)$$

ya que en este caso, los  $N_u$  grados de libertad de la acción de control se utilizan en cumplir la restricción terminal, no quedando disponibles grados de libertad para la minimización del índice.

Por otra parte, a partir de la ecuación (6.134) es posible llevar a cabo otro desarrollo que proporcione una ley de control equivalente a la anterior aunque un poco más parecida en apariencia a la ley de control sin incertidumbre, es decir al CRHPC formulado mediante la SVD (ecuaciones (6.58) y (6.59)). Si en la ecuación (6.134)

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}^T \mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{G}^T \mathbf{e} + \frac{\eta_G \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f + \frac{\rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_f}{\|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2 + \eta_G \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2 + \eta_e} + \\ & + \frac{\rho \mathbf{H}^T \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p}{\|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2 + \eta_G \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2 + \eta_e} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (6.148)$$

se definen los escalares  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$

$$\lambda_1 = \frac{\eta_G \|\mathbf{G}\Delta\hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2}{\|\Delta\hat{\mathbf{u}}_f\|_2} + \frac{\rho \|\mathbf{G}\Delta\hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2}{\|\mathbf{G}\Delta\hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2 + \eta_G \|\Delta\hat{\mathbf{u}}_f\|_2 + \eta_e}, \quad (6.149)$$

$$\lambda_2 = \frac{\rho \|\mathbf{G}\Delta\hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2}{\|\mathbf{G}\Delta\hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{e}\|_2 + \eta_G \|\Delta\hat{\mathbf{u}}_f\|_2 + \eta_e}, \quad (6.150)$$

resulta, teniendo en cuenta que  $\mathbf{H}^T\mathbf{H} = \mathbf{I}$

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G}\Delta\hat{\mathbf{u}}_f - \mathbf{G}^T\mathbf{e} + \lambda_1\Delta\hat{\mathbf{u}}_f + \lambda_2\mathbf{H}^T\Delta\hat{\mathbf{u}}_p = \mathbf{0}, \quad (6.151)$$

$$\Delta\hat{\mathbf{u}}_f = [\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \lambda_1\mathbf{I}]^{-1}[\mathbf{G}^T\mathbf{e} - \lambda_2\mathbf{H}^T\Delta\hat{\mathbf{u}}_p], \quad (6.152)$$

que tras deshacer el cambio de variables resulta

$$\Delta\hat{\mathbf{u}}_f = [\mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T\mathbf{G}_1 + \lambda_1\mathbf{I}] \mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{H}^T\mathbf{G}_1^T [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1\Delta\hat{\mathbf{u}}_p] - \lambda_2\mathbf{H}^T\Delta\hat{\mathbf{u}}_p] \quad (6.153)$$

y la ley de control final puede expresarse como

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\mathbf{u}} &= \Delta\hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H}\Delta\hat{\mathbf{u}}_f \\ &= \Delta\hat{\mathbf{u}}_p + \mathbf{H} [\mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T\mathbf{G}_1 + \lambda_1\mathbf{I}] \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T\mathbf{e}_1 - [\mathbf{G}_1^T\mathbf{G}_1 + \lambda_2\mathbf{I}]\Delta\hat{\mathbf{u}}_p] \end{aligned} \quad (6.154)$$

donde teniendo en cuenta  $\Delta\hat{\mathbf{u}}_p$  (6.114) y sustituyendo el cambio de variables en las expresiones de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  para  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\eta_G$  y  $\eta_e$ , se obtiene la ley de control formada por las ecuaciones desde (6.155) hasta (6.161)

$$\Delta\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^* \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + [\mathbf{I} - \mathbf{M}^* [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \lambda_2 \mathbf{I}]] \Delta\hat{\mathbf{u}}_p, \quad (6.155)$$

$$\Delta\hat{\mathbf{u}}_p = \mathbf{G}_2^T [\mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^T + \lambda_{G_2} \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{e}_2, \quad (6.156)$$

$$\lambda_{G_2} = \frac{\eta_{G_2} \|\mathbf{G}_2 \Delta\hat{\mathbf{u}}_p - \mathbf{e}_2\|_2}{\|\Delta\hat{\mathbf{u}}_p\|_2}, \quad (6.157)$$

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{H} [\mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \lambda_1 \mathbf{I}] \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T, \quad (6.158)$$

$$\lambda_1 = \frac{\eta_{G_1} \|\mathbf{H}\|_2 \|\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]\|_2}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2} + \quad (6.159)$$

$$+ \frac{\rho \|\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]\|_2}{\|\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]\|_2 + \eta_{G_1} \|\mathbf{H}\|_2 \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2 + [\eta_{e_1} + \eta_{G_1} \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_p\|_2]},$$

$$\lambda_2 = \frac{\rho \|\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]\|_2}{\|\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]\|_2 + \eta_{G_1} \|\mathbf{H}\|_2 \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2 + [\eta_{e_1} + \eta_{G_1} \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_p\|_2]}, \quad (6.160)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_f = [\mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \lambda_1 \mathbf{I}] \mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{H}^T \mathbf{G}_1^T [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p] - \lambda_2 \mathbf{H}^T \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]. \quad (6.161)$$

De nuevo, si  $N_u = m$  resulta

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \Delta \hat{\mathbf{u}}_p = \mathbf{G}_2^T [\mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^T + \lambda_{G_2} \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{e}_2. \quad (6.162)$$

### 6.3.3 Equivalencia entre soluciones.

Se han presentado dos formulaciones para el CRHPC-BDU mediante SVD, ecuaciones de (6.141) a (6.146) y de (6.155) a (6.161), ambas equivalentes pues proceden del desarrollo de la misma ecuación (6.134).

Sin embargo, como se comentó, en la segunda formulación se observa más claramente cómo en ausencia de incertidumbre, las ecuaciones se transforman en la ley de control del CRHPC.

Así mientras en la primera formulación, si se considera que no hay incertidumbre, es decir

$$\eta_{G_1} = 0, \quad (6.163)$$

$$\eta_{G_2} = 0, \quad (6.164)$$

$$\eta_{e_1} = 0, \quad (6.165)$$

$$\eta_{e_2} = 0, \quad (6.166)$$

se obtiene

$$\lambda_{G_2} = 0, \quad (6.167)$$

$$\Lambda = \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{G}_2^+ \mathbf{e}_2 \frac{\Delta \hat{\mathbf{u}}_f^T}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2^2}, \quad (6.168)$$

y como se observa para la ley de control final es necesario calcular  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_f$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + [\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1] \mathbf{G}_2^+ \mathbf{e}_2, \quad (6.169)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{H} [\mathbf{H}^T \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 \mathbf{H} + \Lambda]^{-1} \mathbf{H}^T, \quad (6.170)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_f = [\mathbf{H}^T \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 \mathbf{H} + \Lambda]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{G}_1^T [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]. \quad (6.171)$$

En cambio para la segunda formulación, en ausencia de incertidumbre ( $\eta_{G_1} = \eta_{G_2} = \eta_{e_1} = \eta_{e_2} = 0$ ) se obtiene

$$\lambda_{G_2} = 0, \quad (6.172)$$

$$\lambda_1 = \rho, \quad (6.173)$$

$$\lambda_2 = \rho, \quad (6.174)$$

y no hay que calcular  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_f$ . Por tanto las ecuaciones del CRHPC-BDU coinciden con las ecuaciones (6.58) y (6.59) del CRHPC como es de esperar

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^* \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + [\mathbf{I} - \mathbf{M}^* [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}]] \mathbf{G}_2^+ \mathbf{e}_2, \quad (6.175)$$

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{H} [\mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}] \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T. \quad (6.176)$$

En cualquier caso, en ambas formulaciones aparece el parámetro  $\rho$ , mientras que en las expresiones (6.104) y (6.105) del CRHPC-BDU planteado sin SVD no aparece, debido al hecho de considerar la incertidumbre de manera global

$$\eta_G = \sqrt{\eta_{G_1}^2 + \mu^2 \eta_{G_2}^2}, \quad (6.177)$$

$$\eta_e = \sqrt{\eta_{e_1}^2 + \mu^2 \eta_{e_2}^2}. \quad (6.178)$$

Esta consideración simplifica enormemente el problema pero también proporciona un resultado más conservador, ya que equivale a la formulación con SVD pero asumiendo un  $\rho$  con valores muy elevados, originado por la consideración de  $\mu \rightarrow \infty$  en su planteamiento.

### 6.3.4 Ejemplo 2.

En este ejemplo se pretende mostrar cómo el efecto estabilizador del CRHPC se puede perder cuando existen discrepancias entre el modelo y el proceso, pues lo que asegura el CRHPC es la estabilidad nominal.

Frente a ello, el CRHPC-BDU incrementa la robustez del sistema y puede proporcionar resultados satisfactorios.

Para ello se considera el mismo modelo del ejemplo anterior

$$G(z) = \frac{z - 1.55}{(z - 0.9)(z - 0.8)}, \quad (6.179)$$

pero en este caso el proceso real resulta ligeramente diferente

$$G_p(z) = \frac{z - 1.55}{(z - 0.9)(z - 0.85)}. \quad (6.180)$$

Si se controla dicho proceso con el CRHPC diseñado en el ejemplo anterior, se muestra cómo es incapaz de estabilizar el sistema, tanto para  $N_u = 3$  (ver figura 6.6) como  $N_u = 4$  (ver figura 6.7).

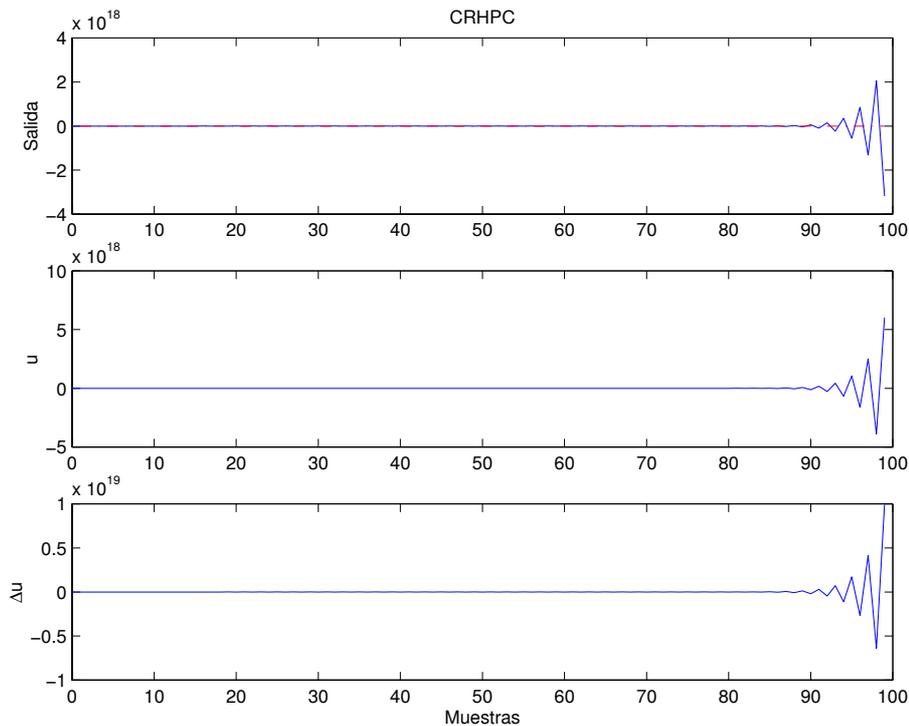


Figura 6.6: Respuesta del proceso con CRHPC ( $N_u = 3$ ) cuando modelo y proceso no coinciden.

Para aplicar el CRHPC-BDU se debe obtener la cota superior para el posible conjunto de incertidumbres  $\delta \mathbf{G}_1$  y  $\delta \mathbf{G}_2$ . Para ello se calculan las respuestas ante entrada en forma de escalón del modelo y del proceso y se construyen a partir de estas respuestas las matrices dinámicas  $\mathbf{G}_1$ ,  $\mathbf{G}_{1p}$ ,  $\mathbf{G}_2$  y  $\mathbf{G}_{2p}$ .

Por un lado las matrices  $\mathbf{G}_1$  y  $\mathbf{G}_2$  son las que se utilizan en el controlador. Por otro

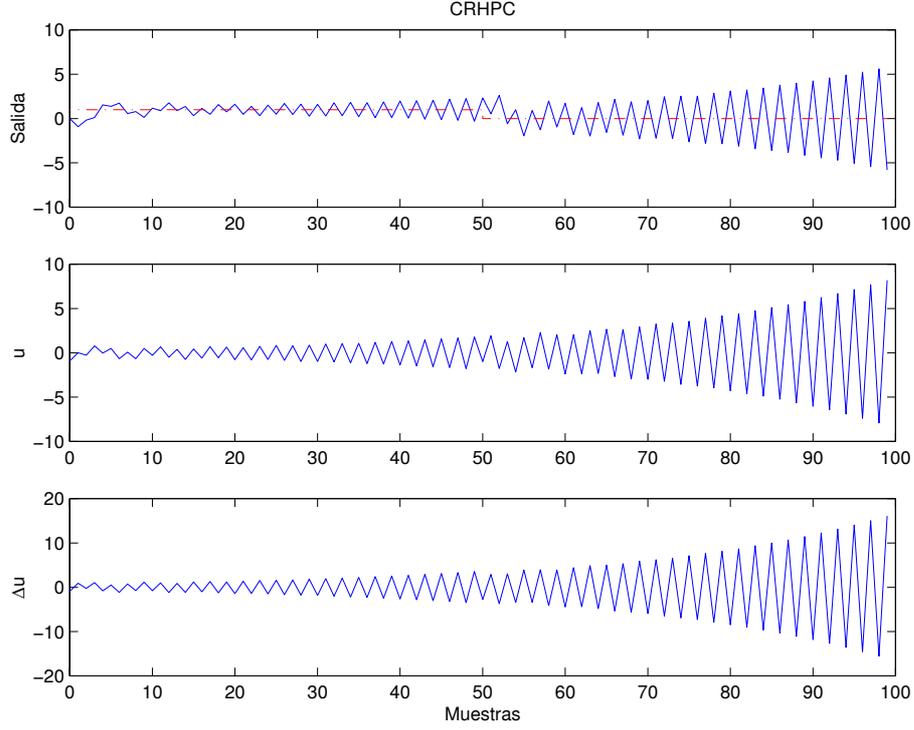


Figura 6.7: Respuesta del proceso con CRHPC ( $N_u = 4$ ) cuando modelo y proceso no coinciden.

las matrices  $\delta \mathbf{G}_1$  y  $\delta \mathbf{G}_2$  se pueden calcular como la diferencia entre las matrices que usa el controlador y las que resultan del proceso real  $\mathbf{G}_{1p}$  y  $\mathbf{G}_{2p}$ , es decir

$$\delta \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_{1p} - \mathbf{G}_1, \quad (6.181)$$

$$\delta \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_{2p} - \mathbf{G}_2, \quad (6.182)$$

y la cota superior  $\eta_{G_1}$  y  $\eta_{G_2}$  se calcula de la siguiente forma

$$\eta_{G_1} = \|\delta \mathbf{G}_1\|_2, \quad (6.183)$$

$$\eta_{G_2} = \|\delta \mathbf{G}_2\|_2, \quad (6.184)$$

resultando en este caso  $\eta_{G_1} = 0.29$  y  $\eta_{G_2} = 0.79$ , considerando  $\eta_{e_1} = \eta_{e_2} = 0$ .

Con el CRHPC-BDU diseñado (formulado mediante la SVD) se obtiene la respuesta estable de la figura 6.8.

En la figura 6.9 se muestran los parámetros de regularización  $\lambda_{G_2}$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , los cuales se ajustan dinámicamente para hacer frente a las discrepancias entre el modelo y

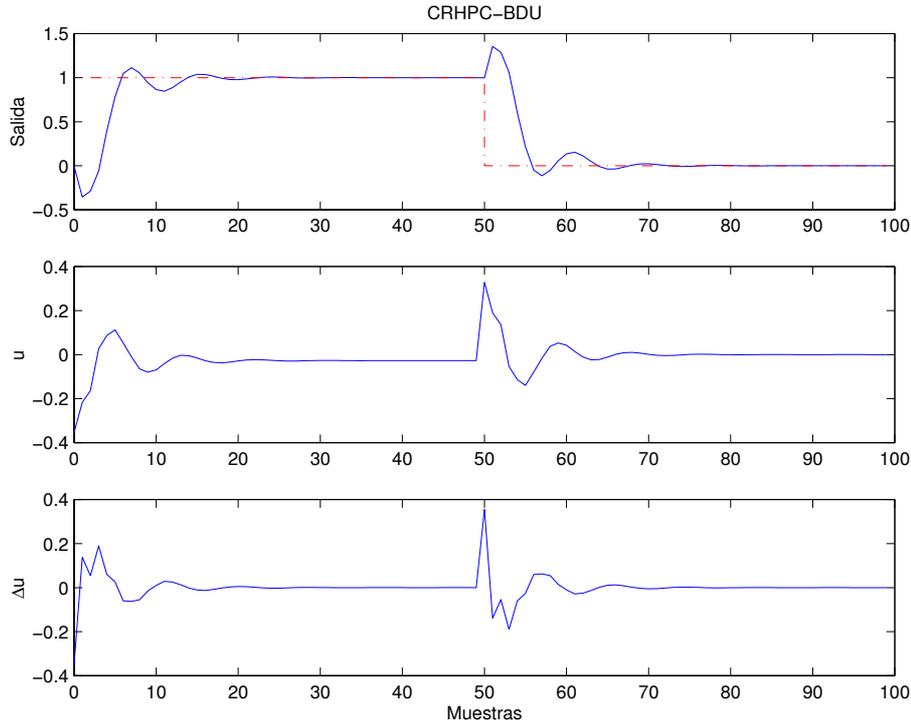


Figura 6.8: Respuesta del proceso con CRHPC-BDU ( $N_u = 3$ ) cuando modelo y proceso no coinciden.

el proceso, aunque en este caso particular, al ser  $N_u = m$ , no se ajustan  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  al haber sólo grados de libertad disponibles para cumplir la restricción terminal.

Para  $N_u = 4$ , la respuesta (figura 6.10) también es estable y, en cambio, los parámetros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  sí varían tal y como se muestra en la figura 6.11.

Si se compara el CRHPC-BDU anterior, formulado mediante la SVD, con el CRHPC-BDU que considera la incertidumbre de manera global

$$\eta_G = \sqrt{\eta_{G_1}^2 + \mu^2 \eta_{G_2}^2}, \quad (6.185)$$

$$\eta_e = \sqrt{\eta_{e_1}^2 + \mu^2 \eta_{e_2}^2}, \quad (6.186)$$

resulta, como se comentó, que esta simplificación equivale a considerar valores de  $\rho$  muy elevados, proporcionando acciones de control menos agresivas. La diferencia entre ambas formulaciones no existe para  $N_u = m$ , apreciándose cada vez más conforme se eligen valores más elevados de  $N_u$  (ver figura 6.12 para  $N_u = 4$  y 6.13 para  $N_u = 6$ ).

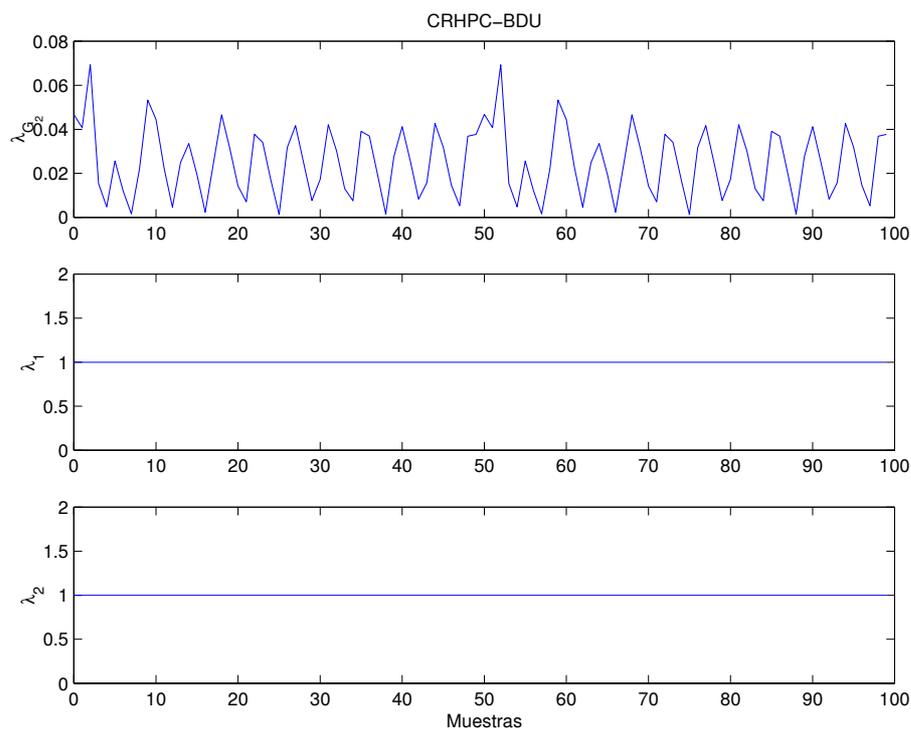


Figura 6.9: Ajuste dinámico de  $\lambda_{G_2}$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  para  $N_u = 3$ .

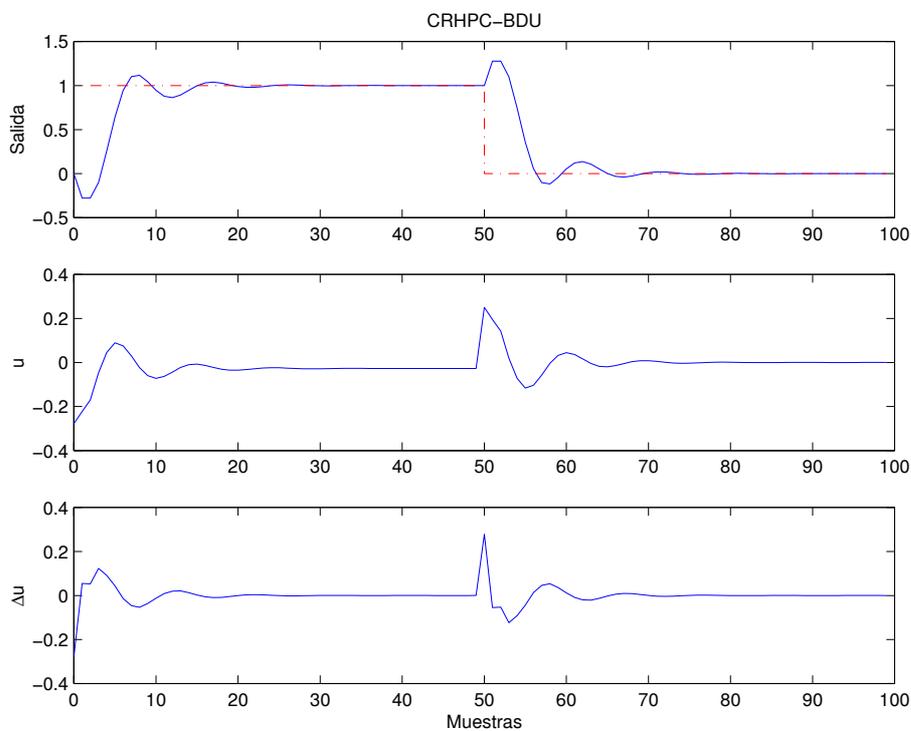


Figura 6.10: Respuesta del proceso con CRHPC-BDU ( $N_u = 4$ ) cuando modelo y proceso no coinciden.

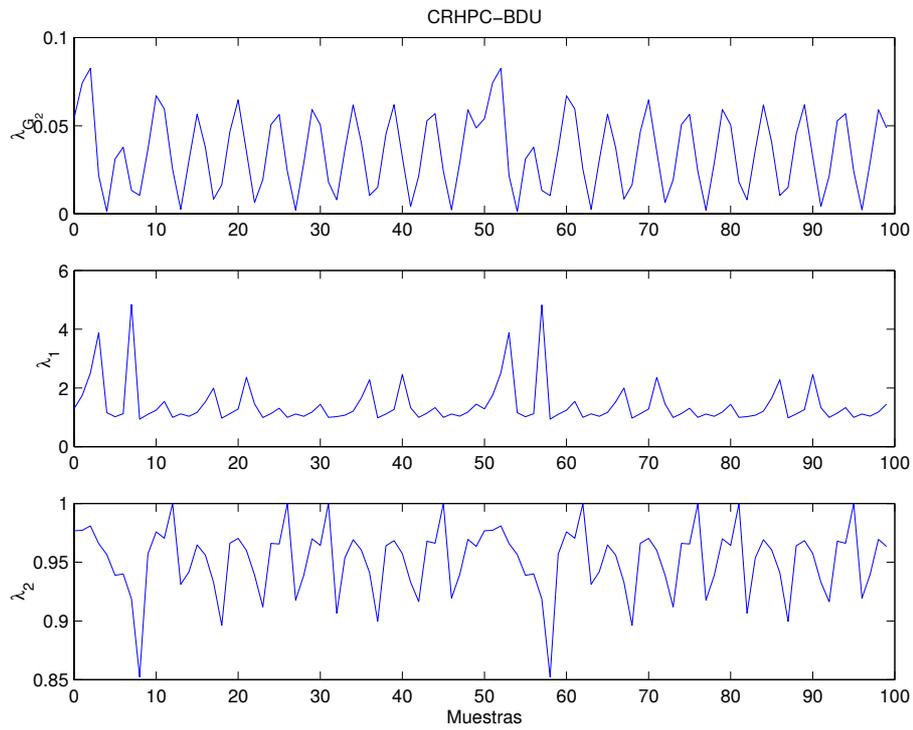


Figura 6.11: Ajuste dinámico de  $\lambda_{G_2}$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  para  $N_u = 4$ .

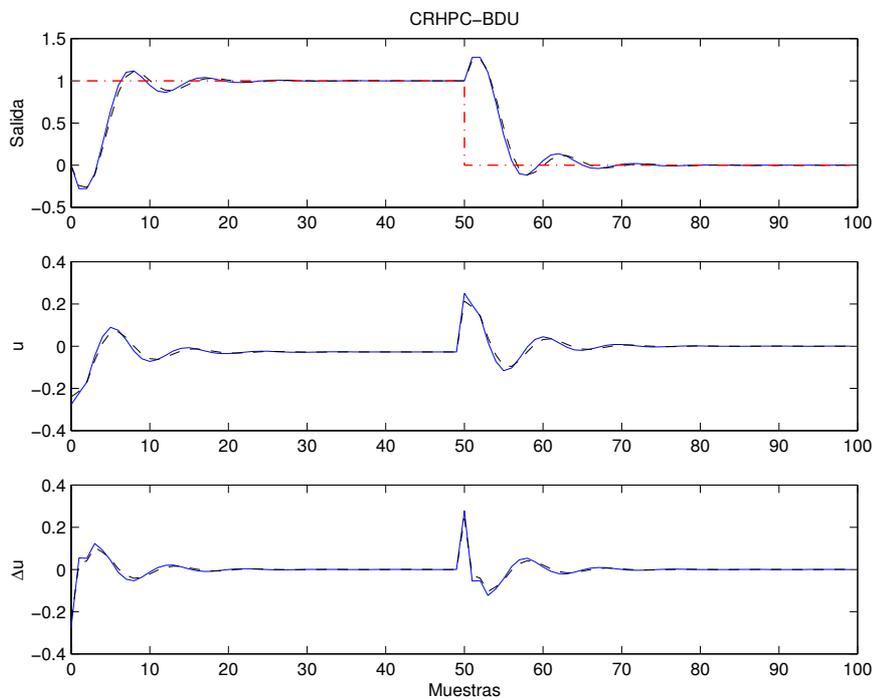


Figura 6.12: CRHPC-BDU mediante SVD (línea continua) y mediante  $\mu \rightarrow \infty$  (línea discontinua) para  $N_u = 4$ .

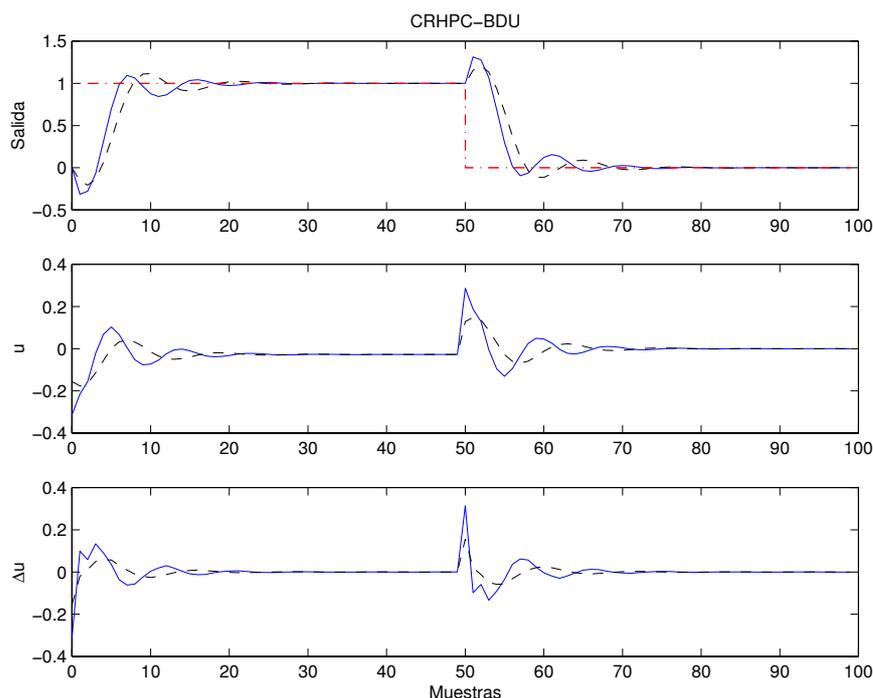


Figura 6.13: CRHPC-BDU mediante SVD (línea continua) y mediante  $\mu \rightarrow \infty$  (línea discontinua) para  $N_u = 6$ .

## 6.4 Conclusiones.

En este capítulo se aborda la estabilidad del controlador GPC-BDU, tomando como referencia la estabilidad del GPC. Así en cuanto a la estabilidad del GPC, y de entre las diferentes alternativas que se plantean, se elige el CRHPC (*Constrained Receding-Horizon Predictive Control*) [Clarke y Scattolini 1991] como referente, ya que es equivalente a otras alternativas, y se evita así el uso de horizontes infinitos.

El CRHPC asegura la estabilidad nominal, pero ésta no queda asegurada cuando existen discrepancias entre modelo y proceso. Así para mejorar la robustez del sistema, se ha procedido al sintonizado del CRHPC mediante BDU, por tanto el controlador CRHPC-BDU resulta ser el GPC estable y robusto buscado, objeto de la tesis.

Tanto para el CRHPC como CRHPC-BDU, se presentan diferentes planteamientos matemáticos, y se analiza la equivalencia entre ellos.



## Capítulo 7

### Conclusiones de la tesis y trabajos futuros.

7.1	Conclusiones principales y aportaciones. . . . .	179
7.2	Líneas futuras. . . . .	180



## 7.1 Conclusiones principales y aportaciones.

En esta tesis se ha presentado una metodología de ajuste de controladores robustos basada en la técnica BDU. Dicha técnica permite ajustar ciertos parámetros de los controladores tradicionalmente ajustados de manera empírica, teniendo en cuenta la cota de la incertidumbre presente en el sistema.

Las principales características de la metodología son:

- Facilita el ajuste de ciertos parámetros de los reguladores, ya que se realiza de modo guiado, como son en el caso particular de la tesis, el parámetro de penalización del esfuerzo de control del LQR, CPEE, GPC y CRHPC.
- Además proporciona mayor robustez al sistema.
- Dicha técnica también ha sido aplicable cuando además se exigía estabilidad al sistema, combinándola con restricciones terminales u horizontes infinitos en el caso del LQR, y con el CRHPC.

Con estas características, la metodología resulta especialmente útil en el CPBM, mostrando los resultados en los ejemplos que aparecen a lo largo de la tesis.

De forma detallada las principales conclusiones/aportaciones de esta tesis son:

1. Estudio detallado de los diferentes tipos de controladores CPBM, y del problema de robustez en los mismos, abordando las diferentes formas de representar la incertidumbre, así como las diferentes técnicas para mejorar la robustez en CPBM.
2. Estudio de las diferentes técnicas de regularización para solventar los problemas de mal condicionamiento numérico y sensibilidad a errores en los datos asociados al problema de mínimos cuadrados. Dichas técnicas se han clasificado en dos grupos, las que llevan a cabo una regularización positiva, y las que regularizan negativamente, destacando que interesa la regularización positiva desde el punto de vista de control, y centrandolo, de entre ellas, la atención en la técnica BDU.
3. Estudio detallado de la técnica BDU, y de la posibilidad de aplicación al controlador LQR.
4. Desarrollo de un controlador LQR-BDU robusto y estable, cuya robustez viene proporcionada por el uso de la técnica BDU en el sintonizado del parámetro de penalización del esfuerzo de control, consiguiendo la estabilidad mediante el uso de restricción terminal o la consideración de un horizonte de predicción infinito. Dicha aportación queda reflejada en [Ramos *et al.* 2004c], [Ramos *et al.* 2004a], [Ramos *et al.* 2005].

5. Extensión al caso de sistemas n-dimensionales, abordando el problema que se plantea (TPBVP) mediante un algoritmo iterativo. Presentación de resultados mediante su aplicación a diferentes ejemplos. Comparación con otra técnica que incorpora una matriz de peso para el caso de sistemas n-dimensionales.
6. Tras los resultados obtenidos con el LQR, extensión al CPBM y en particular al CPEE y GPC, lo que conlleva:
  - Estudio del CPEE y desarrollo del controlador CPEE-BDU.
  - Estudio del GPC (se han plasmado resultados en [Ramos *et al.* 2001], [Martínez *et al.* 2002]), análisis del problema de mal condicionamiento que presenta (el GPC es equivalente a un problema de mínimos cuadrados), y de las diferentes técnicas para solventarlo (con aportaciones en el campo de las componentes principales [Sanchis *et al.* 2001], [Sanchis *et al.* 2002], [Sanchis *et al.* 2003]). Finalmente, desarrollo del controlador GPC-BDU (tanto para GPC con o sin penalización inicial del esfuerzo de control  $\rho$ ), donde la técnica BDU proporciona una manera guiada de ajustar el parámetro de penalización del esfuerzo de control del GPC, proporcionando asimismo robustez al sistema.
7. Desarrollo del GPC-BDU estable, lo que conlleva:
  - Estudio del controlador GPC estable mediante la consideración de restricción terminal (CRHPC), como técnica para asegurar la estabilidad nominal del GPC.
  - Como aportación, análisis y comparación de las diferentes formulaciones del CRHPC y aplicación mediante un ejemplo.
  - Desarrollo analítico del CRHPC-BDU, también con diferentes formulaciones, comparación de las mismas, y presentación de resultados en un ejemplo.

## 7.2 Líneas futuras.

Las líneas futuras de investigación pueden ir encaminadas a cubrir los siguientes aspectos:

- **Consideración de restricciones.** Incorporación de restricciones, habituales en CPBM, en los controladores GPC-BDU y CRHPC-BDU, obteniendo así controladores robustos, estables y que a la vez satisfacen ciertas restricciones.
- **Aplicación en el control no lineal.** Consideración del controlador GPC-BDU ante sistemas no lineales, resolviendo el problema BDU (*min-max*) mediante técnicas de optimización heurística.

- **Tratamiento de la incertidumbre.** Estudio y análisis del modo de adaptación de los diferentes tipos de incertidumbre presentes en los sistemas físicos reales, al formato BDU de modo que se permita aplicar las herramientas mostradas en esta tesis.
- **Aplicación a procesos.** Se tiene prevista la aplicación de los resultados de la tesis a procesos que son objeto de proyectos del grupo de investigación, tales como el control climático en un invernadero para el cultivo hidropónico de rosas o el control de un motor diesel turboalimentado.



# Bibliografía.

- ALBERTOS, P. y R. ORTEGA. On generalized predictive control: Two alternative formulations. *Automatica*, 25(5):753–755, 1989.
- ALLWRIGHT, J. C. y G. C. PAPAVALIOU. On linear programming and robust model-predictive control using impulse-responses. *Systems and Control Letters*, 18:159–164, 1992.
- ANSAY, P. y V. WERTZ. Model uncertainties in GPC: A systematic two-step design. En *Proc. of the ECC 97* (Brussels, 1997).
- ASTRÖM, K. J. y B. WITTENMARK. *Computer Controlled Systems. Theory and Design* (Prentice Hall Information and Systems Sciences Series, 1997).
- BADGWELL, T. A. Robust model predictive control of stable linear systems. *Int. Journal of Control*, 68(4):797–818, 1997.
- BALAS, G., R. CHIANG, A. PACKARD, y M. SAFONOV. *Robust Control Toolbox For Use* (The Mathworks, Inc., 2005).
- BEMPORAD, A. y M. MORARI. Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints. *Automatica*, 35:407–427, 1999a.
- BEMPORAD, A. y M. MORARI. Robust model predictive control: A survey. En A. Garulli, A. Tesi, y A. Vicino, (Editores) *Robustness in Identification and Control*, págs. 207–226 (Springer-Verlag, 1999b).
- BEMPORAD, A. y E. MOSCA. Fulfilling hard constraints in uncertain linear systems by reference managing. *Automatica*, 34(4):451–461, 1998.
- BITMEAD, R. R., M. GEVERS, y V. WERTZ. *Adaptive Optimal Control: The Thinking Man's GPC* (Prentice Hall, 1990).
- BLASCO, F. X. *Control predictivo basado en modelos mediante la incorporación de técnicas de optimización heurística. Aplicación a procesos no lineales y multivariados*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1999.
- BLASCO, F. X., M. MARTÍNEZ, J. M. HERRERO, C. RAMOS, y J. SANCHIS. Model based predictive control of greenhouse climate by reducing energy and water consumption. *Computers and Electronics in Agriculture (accepted)*, 2006.

## BIBLIOGRAFÍA.

---

- BOYD, S., L. E. GHAOUI, E. FERON, y V. BALAKRISHNAN. Linear matrix inequalities in control theory (SIAM, Philadelphia, 1994).
- CAMACHO, E. F. Constrained generalized predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(2):327–332, 1993.
- CAMACHO, E. F. y C. BORDÓNS. *Model Predictive Control in the Process Industry* (Springer, 1995).
- CAMACHO, E. F. y C. BORDÓNS. *Model Predictive Control* (Springer-Verlag, 1999).
- CAMACHO, E. F. y C. BORDÓNS. Control predictivo: Pasado, presente y futuro. *RIAI, CEA-IFAC*, 1(3), 2004a.
- CAMACHO, E. F. y C. BORDÓNS. *Model Predictive Control*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing (Springer, 2004b).
- CAMPO, P. J. y M. MORARI. Robust model predictive control. En *American Control Conference*, tomo 2, págs. 1021–1026 (1987).
- CHANDRASEKARAN, S., G. H. GOLUB, M. GU, y A. H. SAYED. Worst-case parameter estimation with bounded model uncertainties. En *American Control Conference* (1997).
- CHANDRASEKARAN, S., G. H. GOLUB, M. GU, y A. H. SAYED. Parameter estimation in the presence of bounded data uncertainties. *SIMAX*, 19(1):235–252, 1998.
- CHANDRASEKARAN, S., G. H. GOLUB, M. GU, y A. H. SAYED. An efficient algorithm for a bounded errors-in-variables model. *SIMAX*, 20(4):839–859, 1999.
- CHANDRASEKARAN, S., E. GOMEZ, Y. KARANT, y K. SCHUBERT. Backward error estimation. *Hawaii International Conference on Computer Science*, 2004.
- CHEN, H. y F. ALLGÖWER. A computationally attractive nonlinear predictive control scheme with guaranteed stability for stable systems. *Accepted for Journal of Process Control*, 1998.
- CHEN, S., S. A. BILLINGS, y P. M. GRANT. Non-linear system identification using neural networks. *Int. J. Control*, 51(6):1191–1214, 1990.
- CHOW, C. M. y D. W. CLARKE. Actuator nonlinearities in predictive control. En D. W. C. Editor, (Editor) *Advances in Model-Based Predictive Control*, págs. 245–259 (Oxford University Press, 1994).
- CHOW, C. M., A. KUZNETSOV, y D. W. CLARKE. Application of generalized predictive control to the benchmark paper machine. Informe Técnico OUEL 2017/94, Department of Engineering Science, 1994.
- CLARKE, D. W. Application of generalized predictive control to industrial processes. *IEEE Control Systems Magazine*, 138:49–55, 1988.

- CLARKE, D. W. Adaptive generalized predictive controller. Informe Técnico OUEL 1879/91, Department of Engineering Science, 1991.
- CLARKE, D. W. Advances in model-based predictive control. En D. W. C. Editor, (Editor) *Advances in Model-Based Predictive Control*, págs. 3–21 (Oxford University Press, 1994).
- CLARKE, D. W. y C. MOHTADI. Properties of generalized predictive control. *Automatica*, 25(6):859–875, 1989.
- CLARKE, D. W., C. MOHTADI, y P. S. TUFFS. Generalized Predictive Control-Part I. *Automatica*, 23(2):137–148, 1987a.
- CLARKE, D. W., C. MOHTADI, y P. S. TUFFS. Generalized Predictive Control-Part II. Extensions and Interpretations. *Automatica*, 23(2):149–160, 1987b.
- CLARKE, D. W. y R. SCATTOLINI. Constrained receding-horizon predictive control. *IEEE Proceedings-D*, 138(4):347–354, 1991.
- CUTLER, C. R. y D. L. RAMAKER. Dynamic matrix control - a computer control algorithm. En *Proceedings of the Joint Automatic Control Conference (JACC)* (San Francisco, CA, USA, 1980).
- DE KEYSER, R. M. C. Basic principles of model based predictive control. *1st. European Control Conference*, 1(1):1753–1758, 1991.
- DE KEYSER, R. M. C. y A. R. VAN CUAWENBERGHE. Extended prediction self-adaptive control. págs. 1317–1322, 1985.
- DE KEYSER, R. M. C., G. A. VAN DE VELDE, y F. A. G. DUMORTIER. A comparative study of self-adaptive long-range predictive control methods. *Automatica*, 24(2):149–163, 1988.
- DEMIRCIOGLU, H. y D. W. CLARKE. GPC with guaranteed stability properties. *IEEE Proceedings-D*, 139(4):371–379, 1992.
- DEMIRCIOGLU, H. y D. W. CLARKE. Generalised predictive control with end-point state weighting. *IEEE Proceedings-D*, 140(4):275–282, 1993.
- ESPINOSA, J. y J. VANDEWALLE. Constrained predictive control using fuzzy models. En *Proc. 8th. International Fuzzy Systems Association World Congress (IFSA-99)*, págs. 649–654 (Taipei, Taiwan, 1999a).
- ESPINOSA, J. y J. VANDEWALLE. The use of convex programming on fuzzy model based predictive control. En *Proc. IEEE International Symposium on Intelligent Control Intelligent Systems and Semiotics (ISIC-ISAS-1999)*, págs. 411–416 (Cambridge. UK., 1999b).

## BIBLIOGRAFÍA.

---

- FROISY, J. B. Model predictive control: past, present and future. *ISA Transactions*, 33:235–243, 1994.
- GARCIA, C. E. y A. M. MORSHEDI. Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC). *Chemical Eng. Commun.*, 46:73–87, 1986.
- GARCIA, C. E., D. M. PRETT, y M. MORARI. Model predictive control: Theory and practice - a survey. *Automatica*, 25(3):355–348, 1989.
- GENCELI, H. y M. NIKOLAOU. Robust stability analysis of constrained  $\ell_1$ -norm model predictive control. *AIChE Journal*, 39(12):1954–1965, 1993.
- GENCELI, H. y M. NIKOLAOU. Design of robust constrained model-predictive controllers with volterra series. *AIChE Journal*, 41(9):2098–2107, 1995.
- GENCELI, H. y M. NIKOLAOU. New approach to constrained predictive control with simultaneous model identification. *AIChE Journal*, 42:2857–2869, 1996.
- GHAOUI, L. E. y H. LEBRET. Robust least squares and applications. En *In Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control* (1996).
- GHAOUI, L. E. y H. LEBRET. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIMAX*, 18(4):1035–1064, 1997.
- GOLUB, G. H., P. C. HANSEN, y D. P. O'LEARY. Tikhonov regularization and total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 21:185–194, 1999.
- GOLUB, G. H. y C. F. VAN LOAN. An analysis of the total least squares problem. *SIMAX*, 17:883–893, 1980.
- GOLUB, G. H. y C. F. VAN LOAN. *Matrix Computations* (Johns Hopkins University Press, 1996).
- GOMEZ, E., Y. KARANT, y K. E. SCHUBERT. Multiple column partitioned Min-Max. *International Conference on Computer Science and its Applications*, 2005.
- GÓMEZ, J. y E. F. CAMACHO. Mobile robot navigation in a partially structured environment using neural predictive control. *Control Engineering Practice*, 4:1669–1679, 1996.
- GRECO, C., G. MENGA, E. MOSCA, y G. ZAPPA. Performance improvement of self tuning controllers by multistep horizons: the MUSMAR approach. *Automatica*, 20:681–700, 1984.
- GROSDIDIER, P., B. FROISY, y M. HAMMANN. The IDCOM–M controller. En *Model based process control. Proceedings of the IFAC Workshop* (Atlanta, Georgia, USA, 1988).
- HANSEN, P. C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *SIAM Review*, 34:561–580, 1992.

- 
- HENRION, D., D. ARZELIER, D. PEAUCELLE, y M. SEBEK. An LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes. *Automatica*, 37(3):461–468, 2001.
- HOERL, A. E. y R. W. KENNARD. Ridge regression: applications to nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12:69–82, 1970a.
- HOERL, A. E. y R. W. KENNARD. Ridge regression: biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12:55–67, 1970b.
- JIA, D., B. KROGH, y O. STURBERG. An LMI approach to robust model predictive control. *Journal of Optimization Theory and Application*, pág. 35, 2002.
- KILMER, M. E. y D. P. O’LEARY. Choosing regularization parameters in iterative methods for ill-posed problems. *SIMAX*, 22:1204–1221, 2001.
- KINNAERT, M. Adaptive generalised predictive controller for MIMO systems. *Int. Journal of Control*, 50(1):161–172, 1989.
- KOTHARE, M. V., V. BALAKRISHNAN, y M. MORARI. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(10):1361–1379, 1996.
- KOUVARITAKIS, B. y J. A. ROSSITER. Multivariable stable generalised predictive control. *IEE Proceedings-D*, 140(5):364–372, 1993.
- KOUVARITAKIS, B., J. A. ROSSITER, y A. O. T. CHANG. Stable generalised predictive control: an algorithm with guaranteed stability. *IEE Proceedings-D*, 139(4):349–362, 1992.
- KOUVARITAKIS, B., J. A. ROSSITER, y G. J. JU. Robust stable generalised predictive control. *Int. Journal of Control*, 67(3):411–434, 1997.
- KOZUB, D., J. MACGREGOR, y T. HARRIS. Optimal IMC inverses: Design and robustness considerations. *Chem. Eng. Science*, 44(10):2121–2136, 1989.
- KRÄMER, K. y H. UBEHAUEN. Predictive adaptive control. comparison of main algorithms. En *Proceedings 1st European Control Conference*, págs. 327–332 (Grenoble, 1991).
- KUZNETSOV, A. G. y D. W. CLARKE. Application of constrained GPC for improving performance of controlled plants. En D. W. C. Editor, (Editor) *Advances in Model-Based Predictive Control*, págs. 318–329 (Oxford University Press, 1994).
- LAWSON, C. L. y R. J. HANSON. Solving least-squares problems. *SIAM*, 1995.
- LEE, J. H. y Z. YU. Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters. *Automatica*, 33(5):763–781, 1997.
- LEMOIS, J. M. y E. MOSCA. A multipredictor based LQ self-tuning controller. En *IFAC Symp. on identification and system parameter estimation* (York, UK, 1985).

## BIBLIOGRAFÍA.

---

- LINKENS, D. A. y M. MAHFOUF. Generalized predictive control (GPC) in clinical anaesthesia. En D. W. Clarke, (Editor) *Advances in Model-Based Predictive Control*, págs. 402–414 (Oxford University Press, 1994).
- LIU, G. P., V. KADIRKAMANATHAN, y S. A. BILLINGS. Predictive control for non-linear systems using neural networks. *Int. J. Control*, 71(6):1119–1132, 1998.
- LOBO, M., L. VANDENBERGHR, y S. BOYD. *Software for second-order cone programming. User's guide*. <http://www.stanford.edu/boyd/SOCP.html>, 1997.
- LU, Y. y Y. ARKUN. Quasi-min-max MPC algorithms for LPV systems. *Automatica*, 36:527–540, 2000.
- MÄKILÄ, P. M., J. R. PARTINGTON, y T. K. GUSTAFSSON. Worst-case control - relevant identification. *Automatica*, 31:1799–1819, 1995.
- MANER, B. R., F. J. DOYLE, B. A. OGUNNAIKE, y R. K. PEARSON. Nonlinear model predictive control of a simulated multivariable polymerization reactor using second-order volterra models. *Automatica*, 32(9):1285–1301, 1996.
- MARLIN, T. E. *Process Control. Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance* (Mc Graw-Hill, 1995).
- MARTÍNEZ, M., C. RAMOS, y J. M. HERRERO. Control predictivo con restricciones en los actuadores. En *XXI Jornadas de Automática* (Sevilla (España), 2000).
- MARTÍNEZ, M., C. RAMOS, J. M. HERRERO, y J. V. SALCEDO. Predictive control with actuators constraints using Lagrangian multipliers. En *Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering* (Alicante (Spain), 2002).
- MARTÍNEZ, M., J. S. SENENT, y F. X. BLASCO. A comparative study of classical vs genetic algorithm optimization applied in GPC controller. *IFAC World congress*, 1996.
- MARTÍNEZ, M., J. S. SENENT, y F. X. BLASCO. Generalized predictive control using genetic algorithms (GAGPC). *Engineering applications of artificial intelligence*, 11(3):355–368, 1998.
- MAURATH, P. R., D. A. MELLICHAMP, y D. E. SEBORG. Predictive controller design for single-input/single-output (SISO) systems. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 27:956–963, 1988.
- MAYNE, D. Q. *Nonlinear model predictive control: challenges and opportunities*, capítulo Nonlinear Model Predictive Control, págs. 23–44 (Birkhäuser Verlag, 2000).
- MAYNE, D. Q., J. B. RAWLINGS, C. V. RAO, y P. O. M. SCOKAERT. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica* 36, págs. 789–814, 2000.
- MEGÍAS, D., J. SERRANO, y C. DE PRADA. Uncertainty treatment in GPC: design of T polynomial. En *Proceedings ECC 97*, págs. FR–A B1 (Brussels, 1997).

- MEGÍAS, D., J. SERRANO, y C. DE PRADA. Min-max constrained quasi-infinite horizon model predictive control using linear programming. En *International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes (ADCHEM 2000)*, págs. 23–32 (Pisa (Italy), 2000).
- MEGÍAS, D., J. SERRANO, y C. DE PRADA. Min-max constrained infinite horizon model predictive control: standard vs. feedback formulation. En *European Control Conf. (ECC-01)*, págs. 3765–3770 (Porto (Lisbon), 2001).
- MILANESE, M. y A. VICINO. Information-based complexity and nonparametric worst-case system identification. *Journal of Complexity*, 9:427–446, 1993.
- MOHTADI, C. On the role of prefiltering in parameter estimation and control. En *Workshop on Adaptive Control Strategies for Industrial Use* (Alberta, Canadá, 1988).
- MORARI, M. Controlling hybrid systems - from theory to applications. En *Ruperto Carola Symposium* (University of Heidelberg, 2005).
- MORARI, M. y J. H. LEE. Model predictive control: past, present and future. En *PSE'97-ESCAPE-7 symposium* (Trondheim, Norway, 1997).
- MORARI, M. y J. H. LEE. Model predictive control: Past, present and future. *Computers and Chemical Engineering*, 23:667–682, 1999.
- MOSCA, E. *Optimal, predictive, and adaptive control* (Prentice-Hall Information and System Sciences Series, 1995).
- MOSCA, E., J. M. LEMOS, y J. ZHANG. Stabilizing I/0 receding horizon control. 1990.
- MOSCA, E. y J. ZHANG. Stable redesign of predictive control. *Automatica*, 28(6):1229–1233, 1992.
- MUSKE, K. R. y J. B. RAWLINGS. Model predictive control with linear models. *AIChE Journal*, 39(2):262–287, 1993.
- NAHAS, E. P., M. A. HENSON, y D. E. SEBORG. Nonlinear internal model control strategy for neural network models. *Computer Che. Engng*, 16(12):1039–1057, 1992.
- NASCIMENTO, V. H. y A. H. SAYED. Optimal state regulation for uncertain state-space models. En *American Control Conference*, tomo 1, págs. 419–424 (San Diego, 1999).
- NEUBAUER, A. y O. SCHERZER. Regularization for curve representations: uniform convergence for discontinuous solutions of ill-posed problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 58:1891–1900, 1998.
- NIKOLAOU, M. Model predictive controllers: A critical synthesis of theory and industrial needs. En *Advances in Chemical Engineering Series*. (Academic Press, 1998).

## BIBLIOGRAFÍA.

---

- NORMEY, J. E. y E. F. CAMACHO. Robust design of GPC for processes with time delay. En *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, tomo 10, págs. 1105–1127 (2000).
- O'LEARY, D. P. Near-optimal parameters for tikhonov and other regularization methods. *SIAM Journal on scientific computing*, 23(4):1161–1171, 2001.
- OLLERO, A. *Control por computador: descripción interna y diseño óptimo*, pág. 374. ISBN 8426708137 (Marcombo, 1991).
- ONNEN, C., R. BALBUSKA, U. KAYMAK, J. M. SOUSA, H. B. VERBRUGGEN, y R. ISERMANN. Genetic algorithms for optimization in predictive control. *Control Engineering Practice*, 5(10):1363–1372, 1997.
- ORDYS, A. W. y D. W. CLARKE. A state-space description for GPC controllers. *Int. J. Systems Sci.*, 24:1727–1744, 1993.
- PÉREZ, A. *Aplicación de técnicas de programación dinámica a control predictivo basado en modelos*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Educación a Distancia. Facultad de Ciencias, 1995.
- PETERKA, V. Predictor-based self-tuning control. *Automatica*, 20(1):39–50, 1984.
- PHILLIPS, C. L. y J. M. PARR. *Signals, systems and transforms* (Prentice Hall, 2003), 3er edition edición.
- POLYAK, B. T. y R. TEMPO. Probabilistic robust design with linear quadratic regulators. *Systems and Control Letters*, (43):343–353, 2001.
- PRETT, D. M. y M. MORARI. The Shell Process Control Workshop. Process Control Research: Industrial and Academic Perspectives. *Butterworths. Boston, (USA)*, págs. 355–360, 1987.
- PRIMBS, J. A., V. NEVISTIĆ, y J. C. DOYLE. A receding horizon generalization of pointwise min-norm controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45:898–909, 2000.
- PROPOI, A. I. Use of LP methods for synthesizing sampled-data automatic systems. *Automatic Remote Control*, 1963.
- QIN, S. J. y T. A. BADGWELL. An overview of industrial model predictive control technology. En J. C. Kantor, C. E. Garcia, y B. Carnahan, (Editores) *5th Int. Conf. on Chemical Process Control.*, tomo 93, págs. 232–256 (AIChE Symposium Series 316, 1997).
- QIN, S. J. y T. A. BADGWELL. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, 11:733–764, 2003.

- QIN, S. J. y J. H. LEE. Overview of industrial model predictive control, 2001. Lecture Notes Taiwan MPC Workshop.
- RAMOS, C., J. M. HERRERO, M. MARTÍNEZ, y X. BLASCO. Control predictivo multivariable de una planta piloto utilizando buses de campo. En *XXII Jornadas de Automática* (ISBN 84-699-4593-9, Barcelona (Spain), 2001).
- RAMOS, C., M. MARTÍNEZ, X. BLASCO, y J. M. HERRERO. Use of filtered Smith predictor in DMC. En *10th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation* (Lisbon (Portugal), 2002a).
- RAMOS, C., J. SANCHIS, M. MARTÍNEZ, y J. M. HERRERO. Diseño robusto del LQR vía BDU. En *XXV Jornadas de Automática* (Proceedings del congreso, ISBN 84-688-7460-4, Universidad de Castilla-La Mancha, 2004a).
- RAMOS, C., J. SANCHIS, M. MARTÍNEZ, y J. M. HERRERO. LQR and predictive control tuned via BDU. En *XV International Conference on Systems Science*, tomo 2, págs. 386–397 (Wroclaw (Poland), 2004b).
- RAMOS, C., J. SANCHIS, M. MARTÍNEZ, y J. M. HERRERO. Sintonizado del LQR y control predictivo mediante BDU. En *XI Congreso Latinoamericano de Control* (La Habana (Cuba), 2004c).
- RAMOS, C., J. SANCHIS, M. MARTÍNEZ, y J. M. HERRERO. LQR and predictive control tuned via BDU. *Systems Science (ISSN 0137-1223)*, 31(1):15–25, 2005.
- RAMOS, C., J. S. SENENT, X. BLASCO, y J. SANCHIS. LP-DMC control of a chemical plant with integral behaviour. En *15th World Congress IFAC2002* (Barcelona (Spain), 2002b).
- RAO, C. V. y J. B. RAWLINGS. Optimization strategies for linear model predictive control. En C. Georgakis, (Editor) *5th IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems (DYCOPS-5)*, págs. 41–46 (1998).
- RAWLINGS, J. B. Tutorial overview of model predictive control. *IEEE Control Systems Magazine*, págs. 38–52, 2000.
- RAWLINGS, J. B., E. S. MEADOWS, y K. R. MUSKE. Nonlinear model predictive control: A tutorial and survey. En *Proc. Int. Symp. Adv. Control of Chemical Processes (ADCHEM)* (Kyoto (Japan), 1994).
- RAWLINGS, J. B. y K. R. MUSKE. Stability of constrained receding horizon control. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 38(10):1512–1516, 1993.
- RICHALET, J. Industrial applications of model based predictive control. *Automatica*, 29(5):1251–1274, 1993.

## BIBLIOGRAFÍA.

---

- RICHALET, J., S. A. ATA-DOSS, C. ARBER, H. B. KUNTZE, A. JACUBASH, y W. SCHILL. Predictive functional control. application to fast and accurate robots. 1987.
- RICHALET, J., A. RAULT, J. L. TESTUD, y J. PAPON. Algorithmic control of industrial processes. 1976.
- RICHALET, J., A. RAULT, J. L. TESTUD, y J. PAPON. Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. *Automatica*, 14:413–428, 1978.
- ROBINSON, T. y D. CLARKE. Robustness effects of a prefilter in receding-horizon predictive control. *IEEE-D*, 138:2–8, 1991.
- ROSSITER, J. A. y B. KOUVARITAKIS. Numerical robustness and efficiency of generalised predictive control algorithms with guaranteed stability. *IEE Proc.- Control Theory Applications*, 141(3):154–162, 1994.
- ROSSITER, J. A., B. KOUVARITAKIS, y R. M. DUNNETT. Application of generalized predictive control to a boiler turbine unit for electricity generation. *IEE Proceedings-D*, 138:59–67, 1991.
- ROUHANI, R. y R. K. MEHRA. Model algorithmic control: Basic properties. *Automatica*, 18:401–414, 1982.
- SALCEDO, J. V. *GPCs en espacio de estados para el control de sistemas no lineales*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2005.
- SALCEDO, J. V. y M. MARTÍNEZ. Control predictivo generalizado con índice de coste modular. En *Seminario Anual de Automática, Electrónica Industrial e Instrumentación (SAAEI'00)* (Terrassa (Spain), 2000).
- SALCEDO, J. V., M. MARTÍNEZ, C. RAMOS, y J. M. HERRERO. Predictive lpv control of a liquid-gas separation process. *Advances in Engineering Software (accepted)*, 2006.
- SÁNCHEZ-PEÑA, R. S. y M. SZNAIER. *Robust systems, theory and applications* (John Wiley and Sons, New York, 1998).
- SANCHIS, J. *GPC mediante SVD. Análisis de Componentes Principales (PCA) y criterios de selección*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia (España), 2002.
- SANCHIS, J., M. MARTÍNEZ, X. BLASCO, y C. RAMOS. GPC con restricciones. reducción en el tiempo de cálculo basada en el uso de componentes principales. En *XXIV Jornadas de Automática* (León (España), 2003).
- SANCHIS, J., M. MARTÍNEZ, C. RAMOS, y J. V. SALCEDO. Principal component GPC with terminal equality constraint. En *15th. IFAC World Congress* (Barcelona. Spain, 2002).

- SANCHIS, J., C. RAMOS, M. MARTÍNEZ, y F. X. BLASCO. Principal component weighting (PCW) for constrained GPC design. En *9 th. IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation MED'01*. (Dubrovnik. Croatia, 2001).
- SAYED, A. H. y V. H. NASCIMENTO. Design criteria for uncertain models with structured and unstructured uncertainties. En *Robustness in Identification and Control*, tomo 245, págs. 159–173 (Springer Verlag, London, 1999).
- SAYED, A. H., V. H. NASCIMENTO, y S. CHANDRASEKARAN. Estimation and control with bounded data uncertainties. En *Linear Algebra and its Applications*, tomo 284, págs. 259–306 (Elsevier, 1998).
- SAYED, A. H., V. H. NASCIMENTO, y F. A. M. CIPPARRONE. A regularized robust design criterion for uncertain data. En *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, tomo 23, págs. 1120–1142 (2002).
- SAYED, A. H. y A. SUBRAMANIAN. State-space estimation with uncertain models. En S. V. Huffel y P. Lemmerling, (Editores) *Total Least Squares and Errors-in-Variables Modeling*, tomo III, págs. 191–202 (Kulwer, 2002).
- SCHUBERT, K. E. *A new look at robust estimation and identification*. Tesis Doctoral, University of California, Santa Barbara, 2003.
- SCOKAERT, P. O. M. Infinite horizon generalized predictive control. *Int. Journal of Control*, 66(1):161–175, 1997.
- SCOKAERT, P. O. M. y D. W. CLARKE. Stability questions in predictive control. Informe Técnico OUEL 1970/93, Department of Engineering Science. University of Oxford, 1993.
- SCOKAERT, P. O. M. y D. W. CLARKE. Stabilising properties of constrained predictive control. *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 141:295–304, 1994.
- SCOKAERT, P. O. M. y D. Q. MAYNE. Min-Max feedback model predictive control for constrained linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(8):1136–1142, 1998.
- SHRIDHAR, R. y D. J. COOPER. A tuning strategy for unconstrained SISO model predictive control. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 36:729–746, 1997.
- SKOGESTAD, S. y I. POSTLETHWAITE. *Multivariable feedback control. Analysis and Design* (John Wiley and Sons, 1996).
- SMITH, B. E. y C. KRAVARIS. Design issues in set-based control of linear processes with parametric uncertainty. En *Proceedings of the American Control Conference* (Chicago, Illinois, 2000).
- STEIN, C. Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate distribution. tomo 1, págs. 197–206 (University California Press, 1956).

## BIBLIOGRAFÍA.

---

- SUBRAMANIAN, A. y A. H. SAYED. A robust minimum-variance filter for time varying uncertain discrete-time systems. En *American Control Conference*, págs. 1885–1889 (Denver, Colorado, 2003).
- TIKHONOV, A. Regularization of incorrectly posed problems. *Soviet Math*, 4:1624–1627, 1963.
- TSANG, T. T. C. y D. W. CLARKE. Generalized predictive control with input constraints. *IEE Proceedings.*, 135:451–460, 1988.
- TYLER, J. S. y F. B. TUTEUR. The use of a quadratic performance index to design multivariable invariant plants. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-11:84–92, 1966.
- VAN HUFFEL, S. y J. VANDEWALLE. The total least squares problem: Computational aspects and analysis. *SIAM*, 1991.
- WATSON, G. A. Data fitting problems with bounded uncertainties in the data. En *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, tomo 22, págs. 1274–1293 (2001).
- YDSTIE, B. Extended horizon adaptive control. 1984.
- YOON, T. W. y D. W. CLARKE. Prefiltering in receding-horizon predictive control. Informe Técnico OUEL 1995/93, Department of Engineering Science. University of Oxford, 1993a.
- YOON, T. W. y D. W. CLARKE. Receding-horizon predictive control with exponential weighting. *Int. J. Systems Sci.*, 24(9):1745—1757, 1993b.
- YOON, T. W. y D. W. CLARKE. Observer design in receding-horizon control. *Int Journal of Control*, 2:171–191, 1995a.
- YOON, T. W. y D. W. CLARKE. A reformulation of receding-horizon predictive control. *Int J System Science*, 26(7):1383–1400, 1995b.
- ZAFIRIOU, E. Robust model predictive control of systems with hard constraints. *Computers and Chemical Engineering*, 14:359–371, 1990.
- ZAMARREÑO, J. M. *Identificación y control predictivo basado en modelos mediante red neuronal en espacio de estados*. Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid, Valladolid, 1996.
- ZHENG, A. y M. MORARI. Robust stability of constrained model predictive control. En *American Control Conference*, tomo 1, págs. 379–383 (San Francisco, CA., 1993).
- ZHENG, A. y M. MORARI. Stability of model predictive control with mixed constraints. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40(10):1818–1823, 1995.
- ZHENG, Z. Q. *Robust Control of Systems Subject to Constraints*. Tesis Doctoral, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, 1995.