UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE GANDÍA

Máster en Ingeniería Acústica

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

ESCUELA POLITECNICA SUPERIOR DE GANDIA

Sistema de Afinación Musical de Proporciones Áurea.

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

Autor:

Jaime Barberá Saiz

Director/es:

Dr. D. Serafín Pazo Carracedo

Dr. D. Joan Martínez Mora

GANDIA, 2012

Sistema de Afinación Musical de Proporciones Áureas

Autor: Jaime Barberá Saiz

Director 1:Dr. D. Joan Martínez Mora

Director 2: Dr. D. Serafín Pazo Carracedo

Resumen: En este Trabajo Final de Máster se va a tratar de realizar un sistema de afinación basado en proporciones áureas. Para ello se van a realizar tres aproximaciones una con doble temperado, a la que se le denominará bilineal, una aproximación parabólica y otra exponencial. Para introducir el tema y justificar este TFM se van a explicar los distintos tipos de afinación y se van a comentar algunos tipos. Una vez generado el sistema de afinación se van a realizar una serie de cálculos para comprobar si los sistemas son compatibles con el sistema temperado igual de 12 notas. Para explicar estos cálculos, se va a hacer una introducción a la lógica borrosa.

Abstract: In this Thesis we will to try create a tuning system based on aureus proportions. For this three approaches will adopted: double tempering, which will be called bilinear, a parabolic approximation and an exponential approximation. To introduce the topic and justify this TFM we will attempt to explain the different types of tuning and will elaborate on some types. Once we have created the tuning system we will perform a series of calculations to see if the systems are compatible with the 12-note equal tempered system. To explain these calculations, we will make an introduction to fuzzy logic

.

"El conocimiento nos hace responsables."

Ernesto Che Guevara.

Agradecimientos.

En primer lugar quiero dedicarle este TFM a mi padre, una persona que se ha volcado conmigo en todo lo que he necesitado y que hoy en día está atravesando y luchando contra un duro enemigo. Fuerza y siempre adelante. Cómo no, la mujer que siempre está detrás de él, de todos los demás, y quizás la persona que necesita más fuerza de todos aquellos cuantos me rodean, gracias por todo mamá. Y si mi madre está detrás de todos, detrás de mi está la personita que siempre me pone una sonrisa en la boca y que en los últimos tiempos me hace totalmente feliz, este TFM también es tuyo mi pequeña E´lir. No puedo olvidarme de mis compañeros y sin embargo amigos, que me han hecho mucho más fácil este año. No voy a ponerme a recitar los nombres uno a uno, pero se os quiere. Mención aparte de este grupo merece el núcleo duro, los que resistimos de la carrera. Sin más agradeceros a todos, los momentos que me habéis dedicado este año, por escasos o pequeños que hayan sido.

"La humanidad, partiendo de la nada y con su sólo esfuerzo, ha llegado a alcanzar las más altas cotas de miseria."

Groucho Marx

Índice

Índice de Fifguras, Gráficas y Tablas.

1 El número Áureo

1.1 Introducción

Se trata de un número algebraico que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como "unidad" sino como relación o proporción. Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas, como en la naturaleza en elementos tales como caracolas, nervaduras de las hojas de algunos árboles, el grosor de las ramas, etc.

Asimismo, se atribuye un carácter estético especial a los objetos que siguen la razón áurea, así como una importancia mística. A lo largo de la historia, se le ha atribuido importancia en diversas obras de arquitectura y otras artes, aunque algunos de estos casos han sido objetables para las matemáticas y la arqueología.

El número áureo, también conocido como *"número de oro"* o *"divina proporción"*, es una constante que se percibe a diario. Aparece en las proporciones de edificios, cuadros, esculturas, e incluso en el cuerpo humano. Un objeto que respeta la proporción marcada por el número áureo transmite, a quien lo observa, una sensación de belleza y armonía.

El número áureo es el punto en que las matemáticas y el arte se encuentran. Existen en matemáticas varias constantes que son definidas con una letra griega:

Pi (π = 3,14159…**)**, es la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

Phi (φ = 1,61803…), el número de oro. Matemáticamente hablando, se le puede definir como aquel número al que, tanto si se le suma uno como si se eleva al cuadrado, sale el mismo resultado.

Tienen infinitas cifras decimales y no son periódicos (sus cifras decimales no se repiten periódicamente). Todos ellos son, por tanto, números irracionales.

Se llama "Phi" en honor al escultor griego Fidias, que ya lo aplicaba en sus creaciones. El número áureo era conocido en la antigua Grecia y se utilizó para establecer las proporciones de las partes de los templos. Por ejemplo, la planta del Partenón es un rectángulo en el que la relación entre el lado menor y el lado mayor es el número áureo. Esta misma proporción está presente en las tarjetas de crédito actuales, entre otras.

Los griegos creían en la existencia de unas proporciones armoniosas para el cuerpo, que buscaban aplicar en sus esculturas. Durante el renacimiento, dichas proporciones quedaron plasmadas en este famoso dibujo de Leonardo Da Vinci: el "Homo Vitrubio", que ilustra el libro "La Divina Proporción" de Luca Pacioli, editado en 1509.

1.2 La razón áurea

El valor numérico de esta razón, que se simboliza normalmente con la letra griega "fi" φ, es:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}6181 \qquad (1)$$

La **razón áurea** también es posible encontrarla en otras figuras geométricas, por ejemplo el pentágono regular, en el que la razón entre la diagonal y el lado cumple la divina proporción. Pero lo que quizás pueda resultar más curioso es la presencia de la razón áurea en la naturaleza. Hay enigmáticas conexiones de la espiral de los nautilus (un tipo de caracola) y las espirales de los girasoles con la razón áurea.

1.3 El número áureo en la música

Es necesario aclarar que cuando se menciona al número áureo en una realización artística de cualquier naturaleza no se está haciendo mención al número áureo de los matemáticos, un irracional con infinitos decimales, sino a una aproximación racional adecuada a las circunstancias o a un dibujo hecho con regla no graduada de un solo borde y longitud indefinida y un compás de abertura fija o variable. Generalmente se utilizan cocientes de números pertenecientes a la sucesión de Fibonacci que dan valores aproximados, alternativamente por defecto o por exceso, según la necesidad o la sensibilidad humana y hasta la capacidad de separación tonal de cada instrumento. Un violín, por ejemplo, puede separar hasta un tercio de tono. El oído humano sano y entrenado distingue hasta trescientos sonidos por octava. Para la distribución de tiempos o la altura de los tonos usando el número áureo se realiza una aproximación racional que resulte práctica. Existen numerosos estudios al respecto, principalmente de la Universidad de Cambridge.

- Autores como Bártok, Messiaen y Stockhausen, entre otros, compusieron obras cuyas unidades formales se relacionan (a propósito) con la sección áurea.
- El compositor mexicano Silvestre Revueltas (1899-1945) utilizó también el número áureo en su obra Alcancías, para organizar las partes (unidades formales).
- El grupo de rock progresivo norteamericano Tool, en su disco Lateralus (2001) hacen múltiples referencias al número áureo y a la sucesión de Fibonacci, sobre todo en la canción que da nombre al disco, pues los versos de la misma están cantados de forma que el número de sílabas pronunciadas en cada uno van componiendo dicha secuencia. Además la voz entra en el minuto 1:37, que pasado al sistema decimal coincide muy aproximadamente con el número áureo.

2. Sistemas de afinación

Un sistema de afinación, es cada una de las maneras de elegir los sonidos que utiliza la música.

Expresado de otra manera, un sistema de afinación es un subconjunto de $\mathbb{R}^+$que contiene las frecuencias usadas en la música. Se seleccionan las frecuencias, de todo el conjunto de sonido, que sirven para hacer música y se descartan el resto. Los seleccionados en el sistema de afinación se denominan notas musicales.

En la música occidental hay dos formas de clasificar los sistemas de afinación:

– *Afinaciones:* todos los números que aparecen multiplicando a una nota patrón, llamada *diapasón,* son racionales. En este caso los intervalos son justos.

– *Temperamentos:* en este caso aparece algún número irracional. Los intervalos son aproximados, ya que se en estos casos se varía levemente la afinación de algunos intervalos, generalmente las quintas, para conseguir ciertas ventajas armónicas.

Los sistemas de afinación se pueden clasificar como:

– *Sistemas cíclicos:* Presentan una disposición de las quintas de forma que no hay ninguna impracticable, sean o no iguales.

– *Sistemas regulares:* Son aquellos sistemas en los que todas las quintas (o todas menos una) tienen el mismo tamaño.

Por otra parte, los temperamentos se dividen en tres tipos diferentes:

– *Temperamento igual:* la octava se divide en 12 partes o semitonos iguales de razón $\sqrt[12]{2}$. Las quintas quedan ligeramente bajas y las terceras mayores muy altas.

– *Temperamentos irregulares:* sistemas en los que más de una quinta es diferente de las demás.

– *Temperamentos mesotónicos:* En sentido estricto, “de tonos medios” entre el mayor 9/8 y el menor 10/9.

El origen de los temperamentos irregulares son los temperamentos regulares que se modifican para conseguir, generalmente, eliminar la *quinta del lobo*. Para alcanzar este objetivo no hay unas reglas generales por lo que es complicado realizar una clasificación. No obstante, J. J. Goldáraz realiza una clasificación como la que sigue.

– *Temperamentos del siglo XVI (y principios del XVII):* pueden ser cíclicos o no, su misión principal es la de modificar la afinación pitagórica para acercarse a la justa entonación o distribuir la comma pitagórica.

– *Temperamentos irregulares del siglo XVIII:* parten de un temperamento mesotónico y su objetivo es cerrar el círculo de quintas para conseguir consonancias más justas en las tonalidades más usuales y más desviadas en las menos usuales.

– *Buenos temperamentos:* el término bien temperado no hace referencia a un temperamento en particular. El calificativo de bueno le viene dado que permite la modulación a todas las tonalidades, no existe la quinta del lobo y por tanto es un temperamento circular.

A la pregunta de si el tema de los sistemas de afinación es un de interés, se puede responder haciendo referencia a artículos aparecidos en diversas revistas científicas de matemáticas o física sobre temas relacionados con la música, Osserman (1993), Haluska (2000) y Schell (2002). Pero no únicamente en las revistas de divulgación científica se puede obtener una respuesta sino que es en las necesidades de los músicos y musicólogos donde este interés queda más patente. Este interés queda reflejado en dos grandes vías de estudio que se han establecido:

– La búsqueda de nuevas afinaciones que aumenten las posibilidades en la creación musical.

– La recuperación de la fidelidad a las partituras antiguas.

En referencia a este último punto cabe destacar el estudio existente en relación a la obra *"El Clave Bien Temperado"* de J. S. Bach a fin de averiguar si el sistema de afinación constaba de 12 notas por octava o se trata de otro temperamento de los que se usaba en Alemania en aquella época.

2.1 Conceptos previos

En todo el punto anterior se ha estado hablando haciendo mención al sonido. Pero, ¿Qué es el sonido? El sonido es todo fenómeno que involucre la propagación, en forma de ondas elásticas, a través de un fluido o cualquier otro medio elástico, del movimiento generado por la vibración de un cuerpo.

Para que estas ondas elásticas sean percibidas por el oído humano, las oscilaciones que producen deben ser convertidas en ondas mecánicas en el oído y percibidas por el cerebro.

La altura, la duración, la intensidad y el timbre o color, son las cuatro cualidades más importantes del sonido.

– *Altura:* permite diferenciar si un sonido es agudo, frecuencia de vibración más alta, o más grave, frecuencia de vibración más baja. De todo el espectro de vibraciones que se producen el oído humano no puede procesar todas sino que únicamente responde a excitaciones provocadas por señales sonoras que están entre los 20Hz y los 20.00 Hz.

– *Duración:* nos da idea de lo largo o corto que es el sonido.

– *Intensidad:* es la cantidad de energía acústica invertida en el sonido, es decir, lo fuerte o suave que puede resultar un sonido. La intensidad está determinada por la amplitud de las vibraciones. De la misma manera que altura en la que hay un rango de audición, el oído humano tampoco podrá percibir señales sonoras por debajo de cierto valor de amplitud.

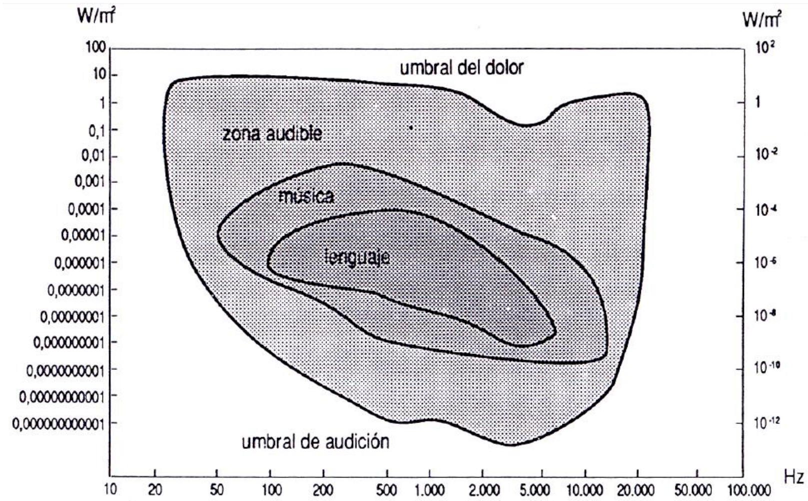


Figura 1.- Área auditiva

– *Timbre:* esta cualidad permite identificar sonidos que provienen de cuerpos diferentes. Un sonido determinado no solo está formado por la frecuencia de vibración fundamental que lo determina y le da nombre, sino también por los llamados *armónicos*. Pues bien, las diferentes amplitudes des estos armónicos determinarán el timbre de un sonido.

De todas estas cualidades, con la que se va a trabajar en este estudio de investigación va a ser con el de *altura* y se va a suponer que la variación de cualquiera de las otras características no va a afectar a esta.

En Acústica Musical, *sonido* hace referencia a la sensación agradable provocada por movimientos vibratorios, aquellos que, por tanto, no sean agradables son referidos como ruido.

2.2 Sensación de altura.

La forma de percibir la sensación de altura se conoce como tono. Para medir la sensación de altura se va a utilizar Ley de Weber-Fechner, con la cual es posible medir la sensación sonora, pero realizando algunos cambios. En primer lugar la Ley de Weber-Fechner utiliza la energía de la excitación sonora para realizar sus cálculos, en cambio, para la medición de la sensación de altura se van a usar las frecuencias sometidas a estudio.

Ley de Weber-Fechner para la sensación de sonoridad.

$$S = 10 \times \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) dB \qquad (2)$$

Variación de la Ley de Weber-Fechner para la sensación de altura.

$$S = h \times \log_{10}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) \qquad (3)$$

Para facilitar los cálculos se va a trabajar con $\log_2$ en lugar de $\log_{10}$ para ello se hace la siguiente conversión:

$$\text{Como } \log_2(a) = \frac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(2)}, \text{ se tiene que } h \times \log_{10}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = h \times \log_{10}(2) \times \log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right) \qquad (4)$$

$$\text{siendo } k = h \times \log_{10}(2) \Rightarrow S = k \times \log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right) \qquad (5)$$

Donde k es una constante que determina que la diferencia estará en unas unidades u otras. Si se hace $k = 1000$ la diferencia de altura se expresa en *savarts*, en cambio, si $k = 1200$ esta diferencia se expresa en *cents* que va a ser la unidad que se va a gastar en este documento.

2.2.2 Definiciones

En este punto se van a realizar diversas definiciones generales que puedan ser aplicadas en cualquier sistema de afinación, si bien a lo largo del proceso de investigación se realizarán algunas variaciones y matizaciones sobre alguna de ellas.

– *Octava:* en todo sistema de afinación aparece este concepto. Un sonido con frecuencia fundamental f_1 es una octava más grave que f_2 si se cumple que $f_2 = 2 \times f_1$. Algo que es totalmente intuitivo de forma que se usa de forma natural aunque no se tengan nociones musicales.

– *Distancia entre sonidos:* a esta distancia, en música, se le llama intervalo. Si los sonidos son consecutivos se denominan *intervalos melódicos* si son simultáneos se llaman *intervalos armónicos*. Hay que tener en cuenta a la hora de decidir qué distancia o intervalo es la correcta que la percepción del sonido no es lineal, algo que se ha estudiado mucho en psicoacústica y que está recogido en la *Ley de Weber-Fechner* como ya se ha comentado más arriba.

$$d(f_1, f_2) = 1200 \times \log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right) cents \qquad (6)$$

– *Siete notas:* desde el primer milenio antes de Cristo la música estaba muy relacionada con la astrología y las matemáticas. Esto dio lugar a que una gran cantidad de fenómenos cósmicos fuesen representados por comparación entre longitudes de cuerdas tirantes. De estas comparaciones aparecieron cuatro relaciones sobre las demás, asociadas con las cuatro estaciones del año, que tomaron nombres propio:

1/1 (unísono). 2/1 (octava). 3/2 (quinta). 4/3 (cuarta).

En Occidente, a partir del siglo VI a.C., se toman siete notas fundamentales y el resto son alteraciones que en función del sistema de afinación en el que se esté trabajando significarán una cosa u otra.

- *Tonos y semitonos:* son dos tipos de intervalos, quizás los más utilizados.
  - *Tono (T):* en una relación entre dos notas f_1 y f_2 se dice que f_2 es una octava más alta que f_1 si se puede obtener a partir de estas subiendo dos quintas y bajando una octava.
  - *Semitono cromático (Sc):* se obtiene subiendo f_1 siete quintas y bajando cuatro octavas.
  - *Semitono diatónico (Sd):* se obtiene subiendo f_1 cinco quintas y bajando cuatro octavas.

2.3 Afinaciones

2.3.1 Sistema de Pitágoras

Pitágoras (s. VI a. C.) enunció la ley relativa a las cuerdas al experimentar con el monocordio (instrumento de una sola cuerda).

En el *Harmonikon Enchidrion* (alrededor del 100 a.C.) de *Nicómaco* se relata cómo Pitágoras descubrió las proporciones matemáticas de la música. En él se relata cómo Pitágoras tras pasar por una herrería se sintió atraído por la sonoridad emitida por los martillazos producidos por cuatro esclavos el golpear sobre un yunque al trabajar un trozo de metal, de forma que tres de ellos emitían sonidos consonantes (agradables al oído) y el último producía una disonancia. En un principio Pitágoras creyó que esta diferencia sonora se debía a la fuerza con que golpeaba cada esclavo con el martillo e hizo que se los intercambiasen al ver que no había cambio en el sonido producido por los martillos y que el sonido disonante provenía del mismo martillo concluyó que la sonoridad no dependía de la fuerza de golpeo sino de las características del martillo. Esto entra dentro de la leyenda y, aunque no se puede afirmar con absoluta certeza, lo más probable es que Pitágoras después de una serie de experimentos, con un monocordio comprobó que al dividir la cuerda por la mitad, al dividirla en tres partes iguales y al dividirla en cuatro partes, cuando se hacía sonar estas porciones de cuerda con la cuerda original se obtenían intervalos consonantes. De hecho, para los pitagóricos estos, la octava, la quinta y la cuarta, son, junto con el unísono, los únicos intervalos consonantes.

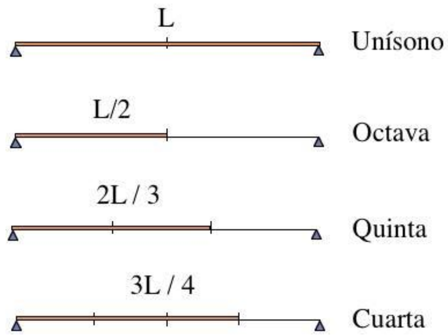


Figura 2.- Intervalos consonantes pitagóricos.

De su experimentación con la quinta natural dedujo la afinación de todas las notas. Según el sistema pitagórico, se obtienen todos los sonidos mediante un encadenamiento de quintas naturales y luego se le restan las octavas necesarias.

Del cálculo de intervalos se obtiene un *Tono (T)* (9/8) y un *Semitono Diatónico (Sd)* (256/243). El cociente del *Semitono Cromático (Sc)* es 2187/2048. Cabe recordar que el cociente de un intervalo puede obtenerse multiplicando o dividiendo los cocientes de otros dos intervalos, dependiendo de si el intervalo incógnita puede formularse como suma de otros dos o como resta uno de otro, respectivamente.

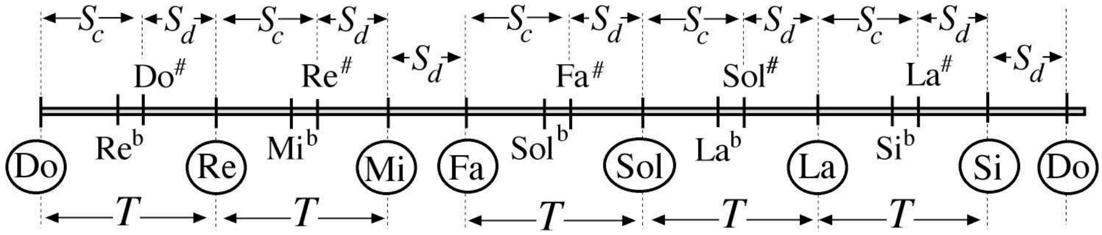


Figura 3.- Distribución de semitonos en la afinación pitagórica

Como se desprende de lo explicado anteriormente y se observa en la figura anterior (Fig. 3) el *Sc* es mayor que el *Sd* y dos notas enarmónicas sonarán diferente.

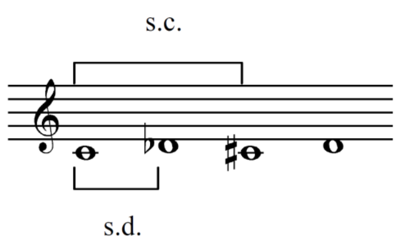


Figura 4.- Posicionamiento en un pentagrama de un Tono y sus dos semitonos.

La diferencia existente entre el *Sc* y el *Sd* se define como *Coma Pitagórica* y se puede obtener restando siete octavas de la suma de doce quintas. En un tono caben 8,69 comas.

$$\text{Coma Pitagórica} = \frac{2187}{2048} : \frac{256}{243} = \frac{531441}{524288} \qquad (7)$$

Cuando se representan 11 quintas consecutivas de la afinación pitagórica y al resto se le llama quinta del lobo se obtiene el círculo de quintas para el sistema pitagórico (Fig. 5).

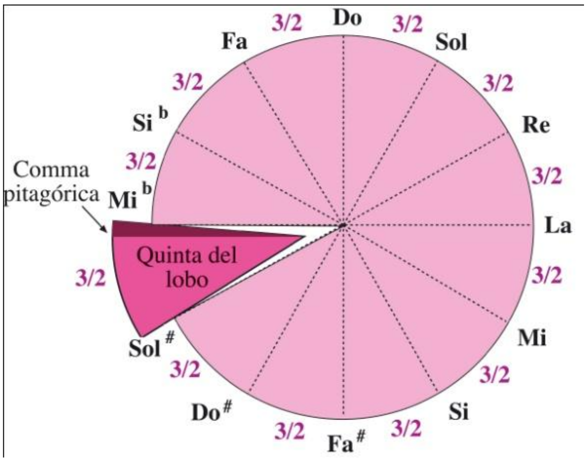


Figura 5.- Círculo de quintas del sistema pitagórico.

De todo este método no se puede extraer cual es el número idóneo de notas por octava, aunque este número no es arbitrario y suele extraerse de la sucesión 7, 12, 53, 665…

2.3.2 Afinación justa: Sistema de Zarlino

Con el nombre de afinación justa o de los físicos se conocen varios sistemas de afinación que, en la práctica, añaden el intervalo 5/4 a la afinación pitagórica para representar el intervalo de tercera (Fig. 6).

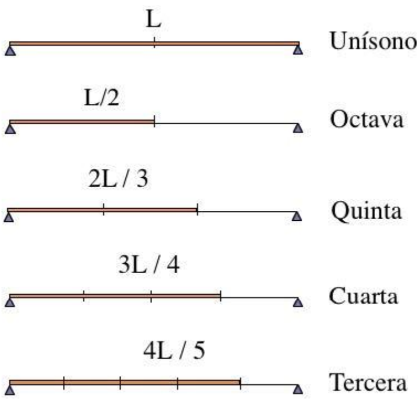


Figura 6.- Intervalos consonantes para la afinación justa.

La versión más antigua de la afinación justa se le atribuye a Aristoxenos de Tarento, sostenía que bastaba el oído y la experiencia para conseguir la afinación. Por estas afirmaciones sus discípulos eran considerados *armonistas por oído* mientras que los pitagóricos eran *armonistas por cálculo*. A partir de Aristoxenos y hasta los siglos XVI y XVII, la armonía que predominaba entre los teóricos era la pitagórica, mientras que los músicos combinaban la justa afinación y la pitagórica sin problemas.

Fue en el s. XVI cuando Zarlino, mucho antes de que se conociesen los armónicos, observó que había una relación muy estrecha entre los sonidos que tenían frecuencias proporcionales a 1, 2, 3, 4…

El objetivo de Zarlino fue el de conseguir hacer las terceras mayores y menores, justas. Aunque no fue como se va a relatar a continuación la forma en que se introdujeron los cambios para conseguir su objetivo, es una manera fácil de hacerlo y entenderlo.

La mejora radica en aproxima el intervalo de quinta justa $\left(\frac{3}{2}\right)$ por un intervalo parecido que se denominará *quinta sintónica* $\left(\frac{40}{27}\right)$. El error cometido es conocido como coma sintónica $\left(\frac{81}{80}\right)$. A continuación, e igual que en la afinación pitagórica, se realiza una sucesión de quintas naturales con la salvedad que de vez en cuando en lugar de introducir una quinta natural se introduce la nueva quinta sintónica. En la siguiente figura (Fig. 7) se observa en qué lugares se sustituyen por una quinta sintónica, este lugar es muy importante pues indica que el sistema es el de Zarlino y no otros sistemas similares como el de Delezenne.

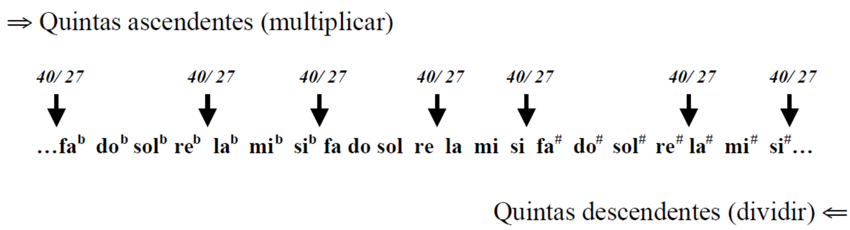


Figura 7.- Situación de la quinta sintónica de Zarlino.

La distribución en una escala de siete notas, con cinco sostenidos y cinco bemoles queda como se observa en la Figura 8.

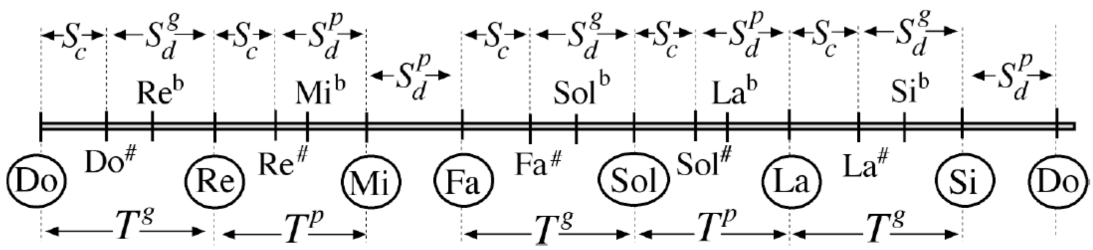


Figura 8.- Distribución de semitonos en la afinación de Zarlino.

Obsérvese que en este sistema se diferencian dos tipos de tonos uno grande (9/8) y otro más pequeño (10/9), así como tres tipos de semitonos uno cromático (25/24) y dos diatónicos, uno grande (27/25) y otro pequeño (16/15) (Fig. 9).

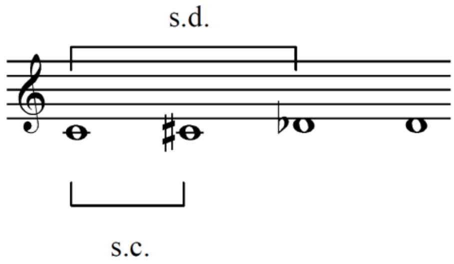


Figura 9.- Posicionamiento en un pentagrama de dos Tono y sus tres semitonos.

Cabe destacar que con esta solución propuesta no se mejora ni soluciona el problema de la quinta del lobo, sino que esta es más grande que las justas a diferencia de lo que ocurría en el sistema pitagórico, además el hecho de que haya dos tonos y tres semitonos dificulta en gran medida el uso de la justa entonación en la música polifónica.

2.3.3 Ventajas e inconvenientes de las afinaciones.

– *Ventajas:* en las afinaciones los intervalos que aparecen son naturales, es decir, las notas musicales se corresponden se corresponden con los armónicos de la serie natural. Esto es, en el pitagórico aparecen afinados los armónicos múltiplos de 2 y 3 siendo el primero el que no está afinado el 5, en cambio en la afinación justa el 5 sí está afinado y es el 7 el primero que no lo está.

– *Inconvenientes:* están relacionados sobre todo con el problema que genera la quinta del lobo, ya que al no cerrarse, el número de notas debe fijarse siguiendo principios distintos.

Otro problema que existe con las afinaciones es que al no estar distribuidas las notas uniformemente, la nota que se toma como origen es muy importante, algo que hace muy complicada la transposición.

2.4 Temperamentos regulares cíclicos

El objetivo de los temperamentos regulares cíclicos no es otro que el de solucionar los problemas que tienen las afinaciones. Para ello tratan de disminuir las quintas de forma que se pueda cerrar el círculo de quintas y eliminar así la quinta del lobo.

En este apartado se van a explicar los dos temperamentos más comunes:

– *El temperamento igual de 12 notas*, que es un temperamento igual y regular.

– *El sistema Holder*, temperamento regular mesotónico.

Para obtener los temperamentos cíclicos de n notas basta con dividir el intervalo [1, 2] en n intervalos iguales, para ir obteniendo los valores de cada una de las notas basta con ir multiplicando por x la nota anterior. No es más que una progresión geométrica de razón x.

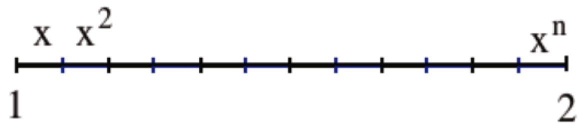


Figura 10.- Partición del intervalo [1, 2] en n subintervalos iguales.

De esta forma multiplicando n veces el 1 por x se obtiene 2:

$$x^n \times 1 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[n]{2} \qquad (8)$$

2.4.1 Temperamento igual (de 12 notas)

Este temperamento regular y cíclico divide la octava armónica en 12 intervalos iguales, cada intervalo equivale a un semitono. Así, se consigue el objetivo buscado eliminar la quinta del lobo y cerrar el círculo de quintas. El origen de este temperamento es anterior al s. XVII que fue cuando J. S. Bach logró su consagración a raíz de su obra "*El Clave Bien Temperado*".

A pesar de ser el sistema más pobre, armónicamente hablando, ya que elimina algunas notas naturales provenientes de la escala de armónicos, es el más utilizado dado que tiene unas ventajas teóricas y prácticas que compensan esas deficiencias armónicas.

Haciendo la distribución de semitonos que se ha hecho en los sistemas anteriores queda la siguiente figura (Fig. 11).

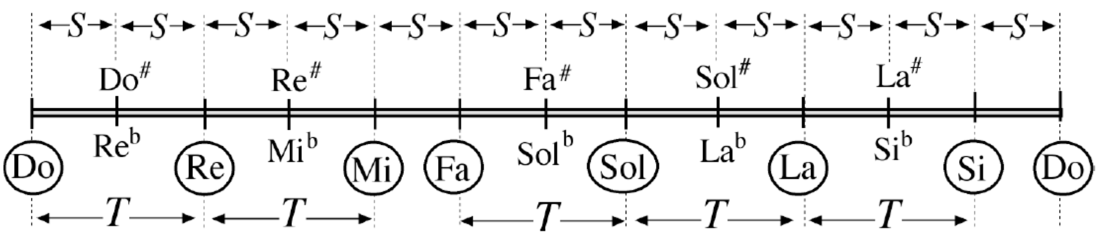


Figura 11.- Distribución de semitonos en el temperamento de 12 notas.

2.4.2 Sistema de Holder

William Holder (1614-1697) hizo una división de 53 partes, llamadas comas, por octava, cada tono contiene 9 comas, el semitono cromático tiene 5 y el diatónico 4. Este temperamento no deja de ser una adaptación del sistema creado por Pitágoras.

En este temperamento, si se hace la distribución de semitonos similar al del resto de sistemas, queda patente que es prácticamente la misma que en el sistema de afinación pitagórico, dado que tiene siete notas naturales, cinco notas con sostenido y cinco notas con bemol.

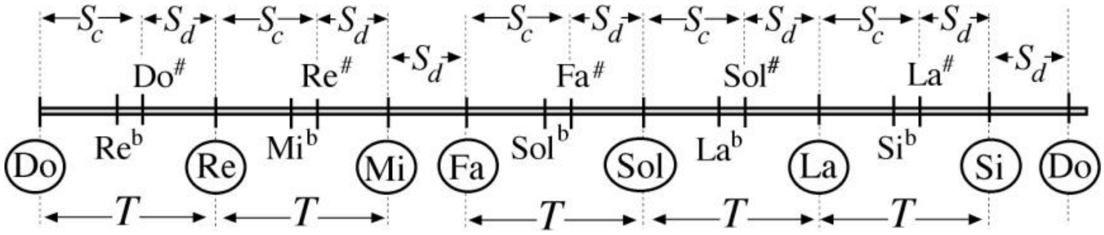


Fig. 12.- Distribución de notas para el temperamento de Holder

2.4.3 Ventajas y desventajas de los temperamentos regulares cíclicos

– *El Temperamento de 12 notas:* en este temperamento cada una de las doce partes es un semitono temperado. Todos los semitonos son iguales, de tal forma que las notas enarmónicas coinciden. En este sistema sólo existe un tipo de tono y de quinta, desapareciendo así la quinta del lobo, estas características hacen que sea un temperamento con grandes ventajas:

- o Puede modularse libremente a cualquier tonalidad sin que existan intervalos impracticables.
- o El número de notas resulta muy apropiado para la práctica musical.

Sin embargo, este temperamento también tiene algunos inconvenientes:

– No existen intervalos justos. Como los intervalos se han obtenido mediante números irracionales, no se corresponden con la serie armónica de ninguna nota.

– Aunque las quintas son bastante buenas, algo más cortas que las justas, las terceras mayores están muy desviadas, más altas.

La desafinación de las terceras, junto con la igualdad de los semitonos fue lo que hizo que se retrasase su aplicación general. Sin embargo, hoy en día los músicos están tan acostumbrados a este temperamento que las terceras mayores originales les parecen demasiado apagadas.

A la hora de valorar las propiedades de los temperamentos, se prefiere la perfección en las quintas que en las terceras.

– *El Temperamento de Holder:* El sistema de Holder está considerado como un sistema de afinación muy bueno para trabajar con la afinación pitagórica.

En el apartado de las ventajas, por un lado, las diferencias con el sistema pitagórico son inapreciables, sin embargo el hecho de dividir la octava en 53 comas-Holder iguales hace que sea mucho más fácil de manejar.

En cuanto a los inconvenientes, los intervalos que aparecen no se corresponden exactamente con los sonidos de la serie armónica. Además del gran número de notas por octava que tiene.

2.5 Un número adecuado de divisiones por octava

Un problema que tienen en común tanto los musicólogos como todo aquel que se dedica a estudiar la acústica música es el de fijar el número adecuado de notas que deben aparecer por octava. Por regla general se decide en función de dos criterios.

– *Criterios estéticos:* el número de notas debe ser tal que se pueda crear música y su elección debe hacerse de forma que las consonancias sean agradables al oído.

– *Criterios técnicos:* la distribución debe ser coherente y estar bien distribuidas dentro de la octava. Además, el número fijado debe cerrar el círculo de quintas.

En lo que a los criterios estéticos se refiere, está demostrado que con 12 notas no existe ningún problema a la hora de crear música y se consiguen muy buenos resultados. El problema real lo generan los criterios técnicos.

En los temperamentos las notas están prefijadas con anterioridad, en el temperamento igual 12 y en sistema Holder 53, es en las afinaciones donde reside el problema realmente.

La forma de comprobar la cantidad de notas es el adecuado para cerrar el círculo de quintas es representar una cantidad de notas en el intervalo [1, 2] y ver en qué número de notas representadas se acerca más al uno o al dos. A modo de ejemplo se va a representar un gráfico con 70 notas para la afinación pitagórica sin ahondar mucho más en el tema pues no es el objetivo final de esta investigación. Puede verse que las notas número 12 y número 53 son las que más se acercan al uno.

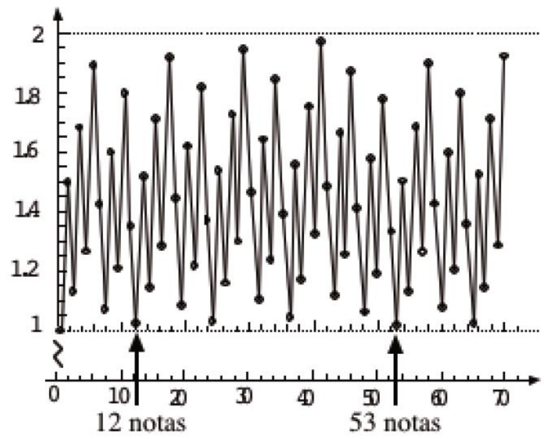


Fig. 13.- Representación de 70 notas de la afinación pitagórica.

2.6 Sensibilidad de percepción.

Entre los musicólogos sigue habiendo varias escuelas respecto al tema de sensibilidad auditiva que se pueden resumir en las dos siguientes:

- Aquellos que consideran que un oído privilegiado y educado puede distinguir una diferencia de 2 cents.
- Los que fijan la distancia mínima de percepción en 4 -5 cents banda que se denomina banda de *iso-afinación.*

3 Caso Práctico.

En este capítulo se va a explicar, teniendo en cuenta todo lo anterior, y justificar el estudio objeto de este Trabajo Final de Máster.

En este caso, se toma como origen y base de comparación el sistema temperado de 12 notas, dado que es el más utilizado y es el que se trata de variar para conseguir el objetivo; crear un sistema tal que el número áureo esté presente y ver si es factible realizar interpretaciones musicales con él.

A lo largo de todo el capítulo se va a tomar como referencia, f_0, La_4 = 440 Hz. A lo largo de la historia la nota La_4 ha sido tomada como la referencia en multitud de sistemas de afinaciones tomando diferentes frecuencias, desde los 446Hz del Renacimiento para los instrumentos de viento madera hasta los 440Hz que fijó la Organización Internacional de Estandarización en 1955 y posteriormente reafirmaría con la ISO 16 en 1975.

3.1 Intervalo entre notas.

En el sistema con el que se va a crear, parte de la condición de contorno que la octava no es $(2 \times f_0)$, sino $(\varphi \times f_0)$. A esta octava se le denominará de aquí en adelante *octava áurea*, para diferenciar ambas. El primer paso es tratar de respetar la razón de la progresión geométrica del sistema temperado igual de 12 notas. Cómo se ha comentado más arriba esta razón, *x*, se calcula:

$$x = \sqrt[12]{2} = 1{,}059 \qquad (9)$$

Como en el sistema temperado igual de 12 notas los cálculos están hechos para el intervalo cerrado [1, 2] hay que variar ligeramente la expresión anterior para poder conseguir lo resultados deseados. En primer lugar se varía el intervalo que se somete a estudio siendo este nuevo intervalo $[1, \varphi]$. De esta manera la expresión anterior queda:

$$x = \sqrt[n]{\varphi} = 1{,}059; \text{siendo } n \text{ el número de divisiones que se desea averiguar.} \qquad (10)$$

Tomando $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}6181$, se sustituyen los valores en la expresión anterior y operando da el resultado de *n* = 8, de intervalos aproximadamente iguales a los de una escala diatónica de doce semitonos convencional. Para que fuese exactamente igual debería ser de 8,331 notas.

$$n_1 = \sqrt[8{,}331]{1{,}6181} = 1{,}059 \qquad (11)$$

$$n_2 = \sqrt[8]{1{,}6181} = 1{,}062 \qquad (12)$$

La diferencia entre n_1 y n_2 es $(n_2 - n_1) = (1{,}062 - 1{,}059) = 0{,}003$

En este caso la progresión que va a seguir el sistema tendrá la razón de 1,062 quedando la progresión de la siguiente manera.

8 notas	
l_1	1,06
l_2	1,13
l_3	1,20
l_4	1,27
l_5	1,35
l_6	1,43
l_7	1,52
l_8	1,62

Tabla 1.- Progresión geométrica 8 notas.

3.2 Adaptación a teclas de piano.

Dado que los pianos están fabricados para tocar con 12 notas en lugar de con 8 y que la música convencional fija la octava en 2*(f_0) en lugar de 1,6181*(f_0), sacando la relación entre la octava armónica y la octava áurea y haciendo la raíz cuarta, ya que con el sistema de 8 intervalos faltarían 4 para poder ejecutarlos en un piano, se puede sacar la razón de la progresión con que se completan estos 12 intervalos.

$$\sqrt[4]{\frac{2}{1{,}6181}} = 1{,}054 \qquad (13)$$

Quedando la progresión de la siguiente manera.

12 notas ref. f_0 A4 (440 Hz)	
Intervalo	**Progresión**
l_1	1,06
l_2	1,13
l_3	1,2

Intervalo	Progresión
I_4	1,27
I_5	1,35
I_6	1,43
I_7	1,52
I_8	1,62
I_9	**1,71**
I_{10}	**1,8**
I_{11}	**1,9**
I_{12}	**2**

Tabla 2.- Progresión geométrica 12 notas.

3.3 Aproximación parabólica.

En los puntos anteriores se han descrito dos tipos de aproximaciones para describir los intervalos que van a componer la escala.

– El primero, es una *aproximación lineal*, con la que se consigue una escala temperada de siete notas.

– El segundo es una *aproximación bilineal*, en el que se realizan dos temperamentos diferentes; uno de ellos *áureo*, hasta la *octava áurea (φ)*, y otro entre φ y la *octava armónica*.

En este punto se propone otro tipo de aproximación, la parabólica, de esta forma será una aproximación continúa, a diferencia de la *aproximación bilineal* y, por otra parte, se soluciona el problema de la posible interpretación en instrumentos tales como el piano (12 teclas).

Otra diferencia importante es que en las dos primeras aproximaciones, la razón de la progresión geométrica es la misma entre cada uno de los intervalos y en esta varía.

Partiendo de la ecuación de la parábola:

$$f = an^2 + bn + c, siendo\ n \in [0,12] \text{ el número de orden del intervalo} \qquad (14)$$

Se establecen unas condiciones de contorno y se sustituye en la ecuación de la parábola:

$$n = 0 \text{ y } f = f_0 \Rightarrow f_0 = a0^2 + b0 + c \Longrightarrow \boldsymbol{c = f_0} \qquad (15)$$

$$n = 8 \text{ y } f = \varphi f_0 \Rightarrow \varphi f_0 = a8^2 + b8 + c, \text{se sustituye la } c = f_0 \text{ y se despeja}$$

$$\boldsymbol{(\varphi - 1) f_0 / 8 = 8a + b} \qquad \boldsymbol{(16)}$$

$$n = 12 \text{ y } f = 2f_0 \Rightarrow 2f_0 = a12^2 + 12b + c, \text{se susituye la } f_0 = c \text{ y se despeja}$$

$$\boldsymbol{f_0 / 12 = 12a + b} \qquad \boldsymbol{(17)}$$

De esta forma se provoca que en las posiciones n = 8 y n =12 se tienen los mismos valores, en esas posiciones que en la aproximación bilineal, es decir en n = 8 la octava áurea y en n = 12 la octava armónica.

Restando (16) – (17), despejando y tomando $f_0 = 440$,

$$a = \frac{f_0}{4}\left(\frac{1}{12} - \frac{\varphi - 1}{8}\right);\ a = 0{,}66869932 \Rightarrow a = 0{,}67 \qquad (18)$$

$$b = \frac{f_0}{12} - 12a;\ b = 28{,}6422748 \Rightarrow b = 28{,}64 \qquad (19)$$

Sustituyendo estos valores en la función parabólica se obtienen los siguientes valores de f para cada valor de n.

N	**razón del intervalo**
1	1,07
2	1,14
3	1,21
4	1,28
5	1,36
6	1,45
7	1,53
8	1,62

N	Razón del intervalo
9	1,71
10	1,80
11	1,90
12	2

Tabla 3.- Aproximación parabólica.

3.4 Aproximación exponencial.

Procediendo de manera análoga a la aproximación parabólica, se va a hacer una aproximación exponencial.

Partiendo de una ecuación exponencial:

$f = ae^{bn} + c,$ siendo $n \in [0, 12]$ el número de orden del intervalo. (20)

$$n = 0 \qquad f = f_0 = c + a \qquad (21)$$

$$n = 8 \qquad f = \varphi f_0 = ae^{8b} + c = ae^{8b} + f_0 - a \qquad (22)$$

$$n = 12 \qquad f = 2f_0 = ae^{12b} + c = ae^{12b} + f_0 - a \qquad (23)$$

siendo $f_0 = 440\ Hz$ y $z = e^{4b}$. La variable z se introduce para facilitar los cálculos. Los valores que se dan a continuación son resultado de sustituir (21) en (22) y (23) y operar entre ellas.

$$a = \frac{f_0}{z^3 - 1} \qquad a = 821{,}374576 \qquad (25)$$

$$b = \frac{ln\, z}{4} \qquad b = 0{,}03574817 \qquad (26)$$

$$c = f_0 - a \qquad c = -381{,}37458 \qquad (27)$$

N	razón del intervalo
1	1,07
2	1,14
3	1,21
4	1,29

n	razón del intervalo
5	1,37
6	1,45
7	1,53
8	1,62
9	1,71
10	1,80
11	1,90
12	2

Tabla 4.- Aproximación exponencial.

Con las operaciones realizadas en esta aproximación se asegura, de la misma manera que en la aproximación parabólica, que la octava áurea va a estar presente así como la octava armónica.

3.5 Comparación de sistemas.

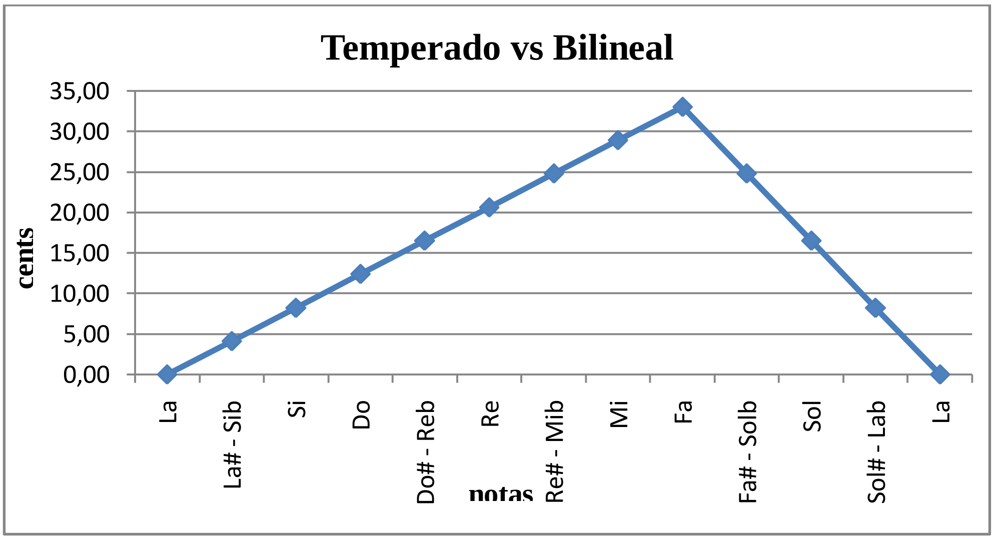
En esta sección se van a mostrar las diferencias en cents que hay entre las notas de una escala partiendo de la nota de referencia La_4 del sistema temperado igual de 12 notas y cada uno de los sistemas arriba calculados, entre una nota del sistema y la anterior y por último se va a hacer una comparación dos a dos de los sistemas bilineal, parabólico y exponencial.

- Como se puede observar en las gráficas 1, 2 y 3, extraídas de los datos que aparecen en la tabla 5, las curvas o progresiones que se dan en cada uno de los sistemas son acordes con el tipo de aproximación al que representan. En la gráfica una es claramente visible los dos temperamentos que coexisten en la escala, siendo la diferencia de frecuencias creciente en el temperamento áureo y decreciente en el segundo.

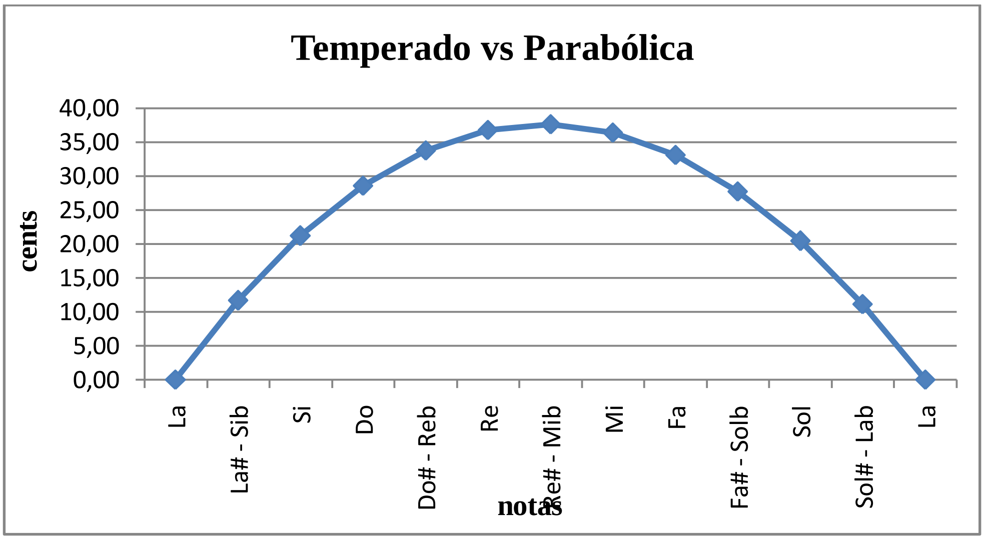
–

	Frecuencias				Comparación Cents con Temperada		
Notas	**Temperada.**	**Bilineal**	**Parabólica**	**Exponencial**	**Bilineal**	**Parabólica**	**Exponencial**
La	440	440	440	440	0,00	0,00	0,00
La# - Sib	466,16	467,28	469,31	469,89	4,14	11,65	13,80
Si	493,88	496,25	499,96	500,88	8,27	21,17	24,34
Do	523,25	527,02	531,95	532,98	12,41	28,53	31,91
Do# - Reb	554,37	559,69	565,27	566,26	16,55	33,72	36,76
Re	587,33	594,39	599,93	600,75	20,68	36,75	39,12
Re# - Mib	622,25	631,24	635,93	636,50	24,82	37,63	39,18
Mi	659,26	670,37	673,26	673,54	28,95	36,40	37,12
Fa	698,46	711,93	711,93	711,93	33,09	33,09	33,09
Fa# - Solb	739,99	750,67	751,95	751,73	24,82	27,75	27,24
Sol	783,99	791,52	793,29	792,96	16,55	20,42	19,70
Sol# - Lab	830,61	834,59	835,98	835,70	8,27	11,15	10,59
La	880	880	880	880	0,00	0,00	0,00

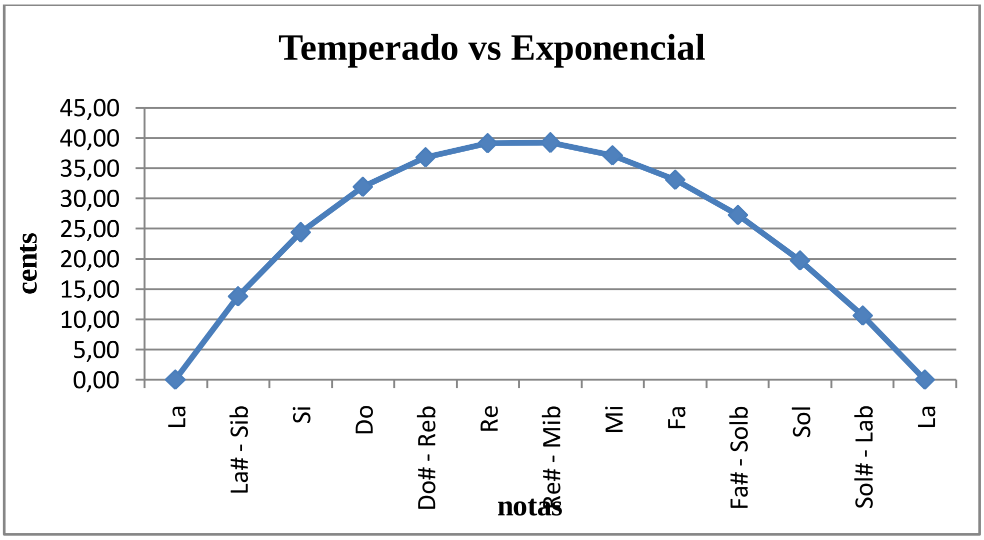
Tabla 5.- Frecuencias y comparación en cents del sistema temperado con los demás sistemas.



Gráfica 1.- Comparación en cents del sistema temperado con el sistema bilineal.



Gráfica 2.- Comparación en cents del sistema temperado con el sistema parabólico.



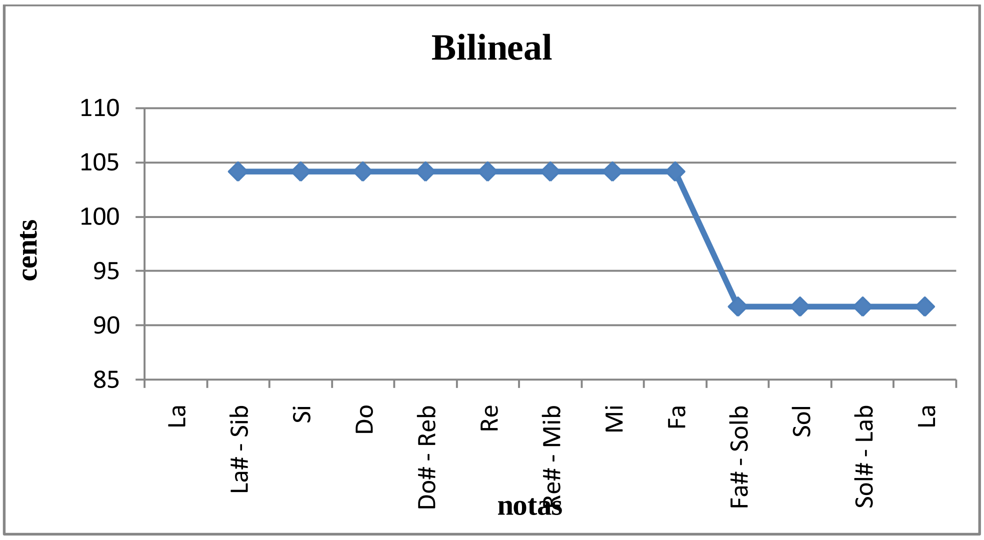
Gráfica 3.- Comparación en cents del sistema temperado con el sistema exponencial.

– En este segundo punto se han comparado las notas propias de cada uno de los sistemas entre ellas mismas, es decir, de cada uno de las aproximaciones se ha comparado la frecuencia representada por una nota con la frecuencia de la nota anterior (Tabla 6).

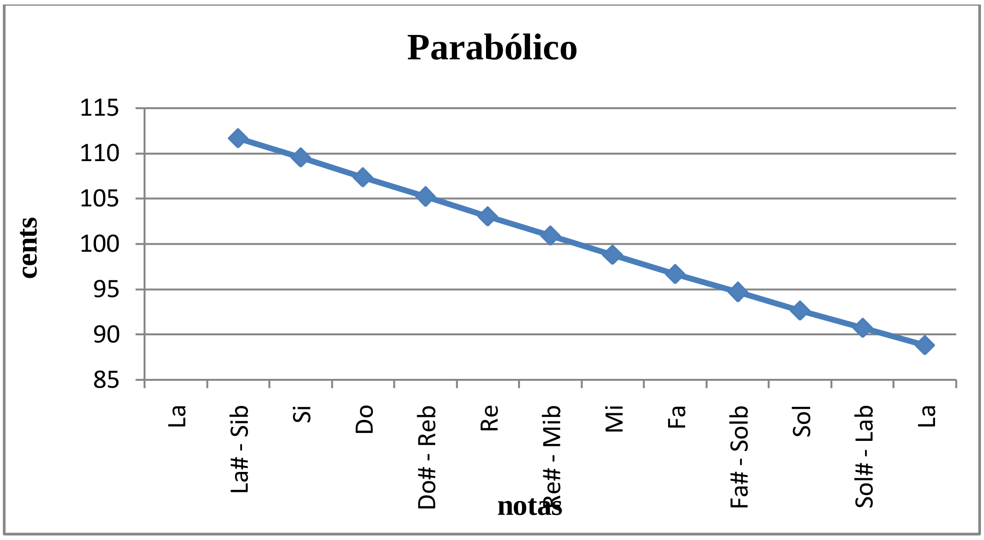
- En el caso del bilineal se observa que siempre es la misma diferencia, con la variación que hay del paso del intervalo áureo al intervalo creado para adaptarlo a 12 notas (gráfica 4).
- En el caso de los sistemas parabólico y exponencial las curvas son parecidas ya que los valores son prácticamente iguales, si bien en el caso de la aproximación exponencial la curva descrita es un poco más acusada

	Frecuencias				**Comparación en cents**		
Notas	**Temperado**	**Bilenal**	**Parabólica**	**Exponencial**	**Bilenal**	**Parabólica**	**Exponencial**
La	440	440	440	440			
La# - Sib	466,16	467,28	469,31	469,89	104,14	111,65	113,80
Si	493,88	496,25	499,96	500,88	104,14	109,52	110,54
Do	523,25	527,02	531,95	532,98	104,14	107,36	107,57
Do# - Reb	554,37	559,69	565,27	566,26	104,14	105,19	104,85
Re	587,33	594,39	599,93	600,75	104,14	103,03	102,36
Re# - Mib	622,25	631,24	635,93	636,50	104,14	100,88	100,06
Mi	659,26	670,37	673,26	673,54	104,14	98,77	97,94
Fa	698,46	711,93	711,93	711,93	104,14	96,69	95,97
Fa# - Solb	739,99	750,67	751,95	751,73	91,73	94,66	94,15
Sol	783,99	791,52	793,29	792,96	91,73	92,67	92,46
Sol# - Lab	830,61	834,59	835,98	835,70	91,73	90,73	90,88
La	880	880	880	880	91,73	88,85	89,41

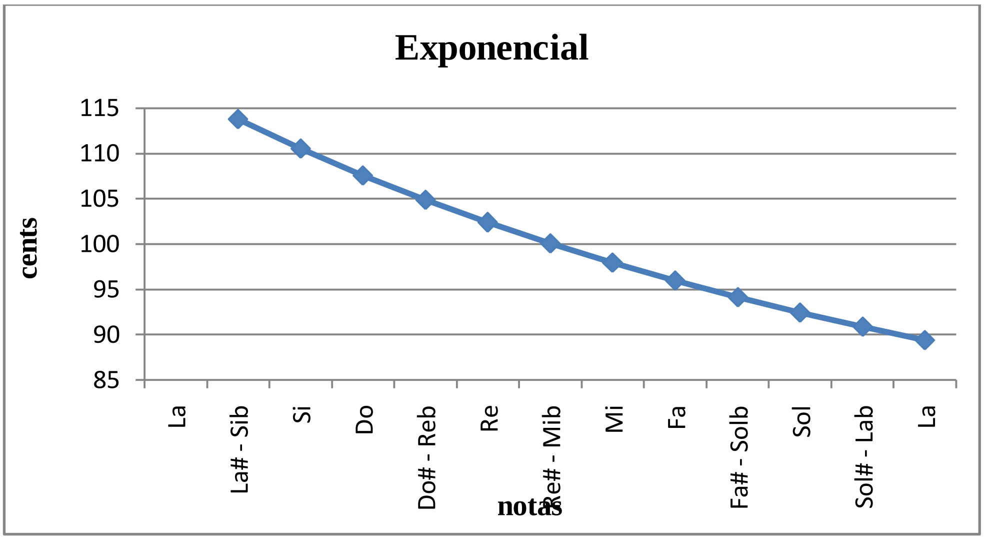
Tabla 6.- Frecuencias y comparación en cents entre las notas de cada uno de los sistemas.



Gráfica 4.- Comparación en cents del sistema bilineal nota a nota.



Gráfica 5.- Comparación en cents del sistema parabólico nota a nota.

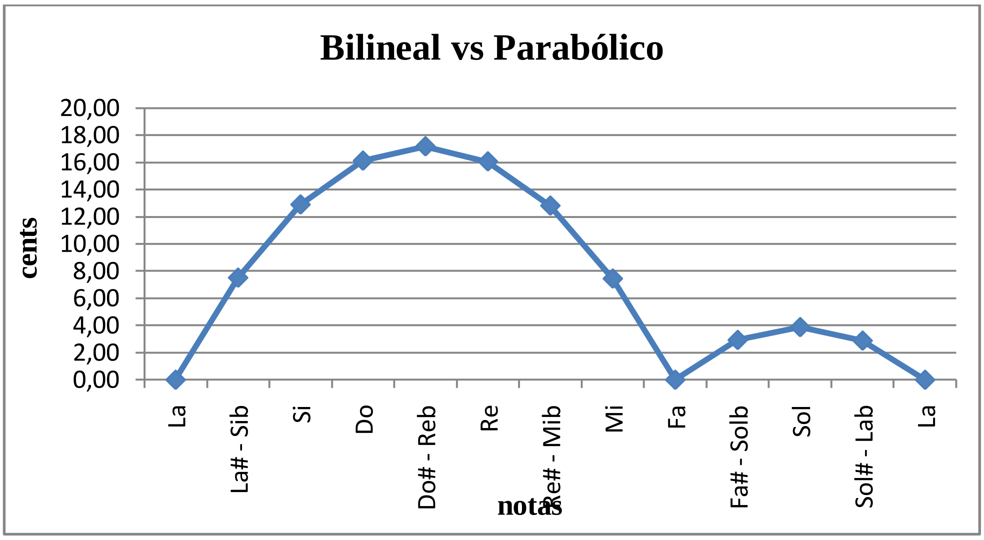


Gráfica 6.- Comparación en cents del sistema exponencial nota a nota.

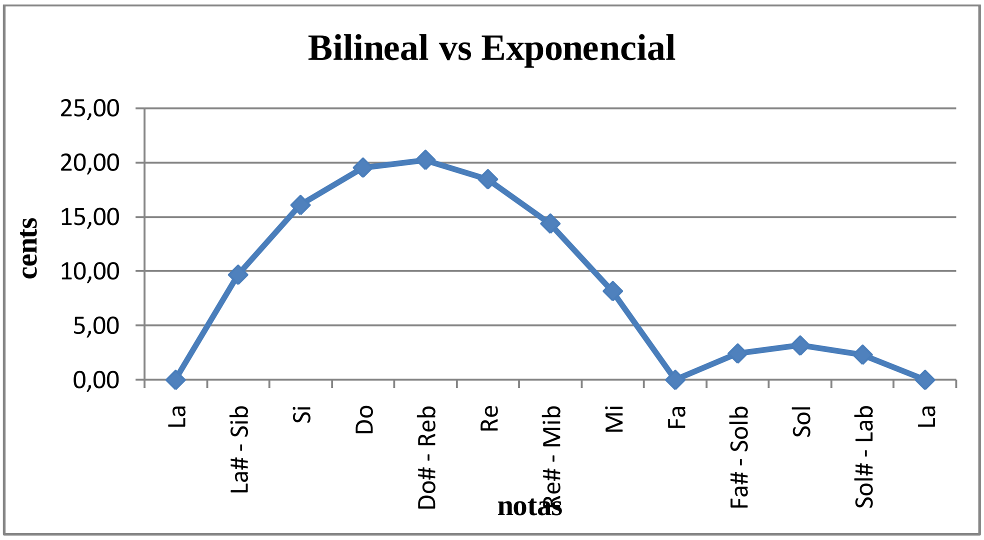
– En este último punto se representan las diferencias en cents existentes entre las notas de los diferentes sistemas creados. Las gráficas se extraen de la tabla de valores mostrada a continuación (Tabla 7).

	Frecuencias				Comparación en cents interno		
Notas	**Temperado**	**Bilenal**	**Parabólica**	**Exponencial**	**Bilineal vs Parabólica**	**Bilineal vs Exponencial**	**Parabólica vs Exponencial**
La	440	440	440	440	0,00	0,00	0,00
La# - Sib	466,16	467,28	469,31	469,89	7,51	9,66	2,15
Si	493,88	496,25	499,96	500,88	12,90	16,07	3,17
Do	523,25	527,02	531,95	532,98	16,12	19,50	3,38
Do# - Reb	554,37	559,69	565,27	566,26	17,17	20,22	3,04
Re	587,33	594,39	599,93	600,75	16,06	18,44	2,37
Re# - Mib	622,25	631,24	635,93	636,50	12,81	14,36	1,55
Mi	659,26	670,37	673,26	673,54	7,44	8,16	0,72
Fa	698,46	711,93	711,93	711,93	0,00	0,00	0,00
Fa# - Solb	739,99	750,67	751,95	751,73	2,93	2,43	-0,51
Sol	783,99	791,52	793,29	792,96	3,87	3,16	-0,72
Sol# - Lab	830,61	834,59	835,98	835,70	2,88	2,31	-0,57
La	880	880	880	880	0,00	0,00	0,00

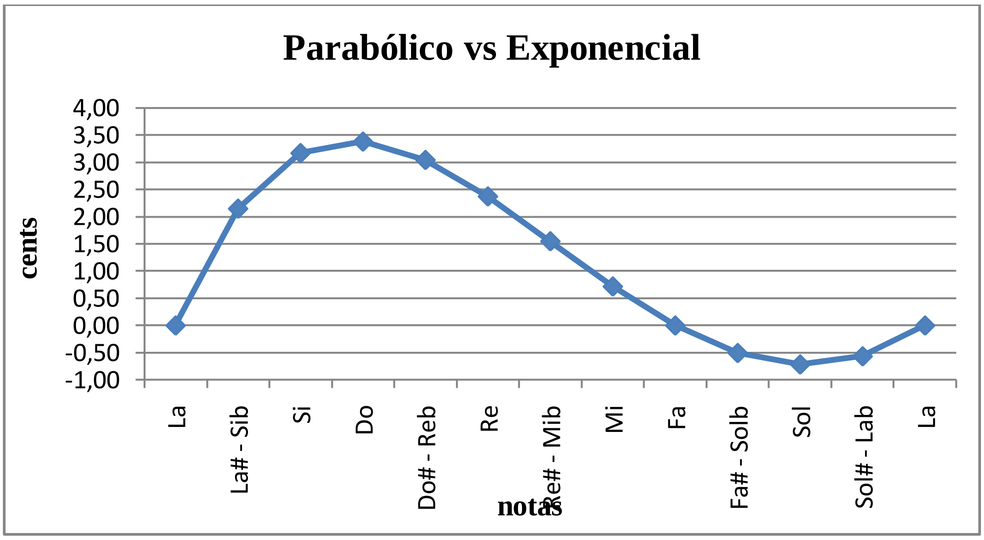
Tabla 7.- Comparación en cents de los diferentes sistemas entre ellos dos a dos.



Gráfica 7.- Comparación en cents del sistema bilineal vs parabólico.



Gráfica 8.- Comparación en cents del sistema bilineal vs exponencial.



Gráfica 9.- Comparación en cents del sistema parabólico vs exponencial.

4 Compatibilidad de los sistemas de afinación.

En este apartado se va a tratar de hacer una comparación entre los distintos sistemas de afinación para ver si son compatibles entre sí. Para ello se va a hacer una pequeña introducción a la lógica borrosa y a los distintos conceptos que se derivan de ella para acabar realizando el anteriormente citado análisis de compatibilidad entre los sistemas creados y el sistema temperado a fin de evaluar si es posible o no la ejecución de música con estos sistemas.

4.1 Introducción a la lógica borrosa.

Al tratar cualquier fenómeno humano desde el punto de vista matemático el modelo depende de los valores numéricos que se introduzcan. La validez de los estos resultados depende de las asignación que se le haga a las variables basándose en estimaciones. En ocasiones no hay ninguna base para suponer que el parámetro va a seguir una distribución de probabilidad concreta. Esto va a hacer que se pueda distinguir entre una incertidumbre estocástica o error aleatorio, y una incertidumbre borrosa.

Se parte de la base de que no por disponer de más información se va a contar con un número mayor de hechos sino que la incertidumbre, la borrosidad está en los propios hechos.

La música cuenta tanto con la incertidumbre borrosa de los propios conceptos y además esta borrosidad surge al manejar conceptos que son más importantes por su relación con otros que por sí mismos. Algunos ejemplos de estos conceptos son el tempo, matices, la afinación.

4.2 Conjuntos borrosos.

La idea principal es que el pensamiento humano no se basa en números sino en *etiquetas lingüísticas* de forma que los objetos puedan pertenecer a varias clases de forma suave y flexible.

La función característica de un conjunto se puede generalizar de forma que los valores asignados a los elementos de dicho conjunto indiquen un grado de pertenencia. Esta función se llama función de pertenencia y el conjunto definido por ella se llama conjunto borroso.

Un grado de pertenencia nulo se interpreta como no pertenencia, el 1 como pertenencia en el sentido booleano y los números intermedios reflejan una pertenencia incierta, que será interpretada de diversos modos según cada aplicación. La potencia de esta teoría se debe a que a través de la pertenencia a un conjunto se puede modelizar cualquier situación.

A continuación se van a dar algunas definiciones que resultarán útiles en el resto de la memoria:

– *Variable lingüística*: noción o concepto que se calificar de forma borrosa. Por ejemplo: la altura, la edad, el error, la variación del error...

– *Universo de discurso*: rango de valores que pueden tomar los elementos que poseen la propiedad expresada por la variable lingüística. En el caso de la variable lingüística 'altura de una persona normal', podría ser el conjunto de valores comprendido entre 1.4 y 2.3 m.

– *Valor lingüístico*: clasificación que se efectúa sobre la variable lingüística: en el caso de la altura, se puede dividir el universo de discurso en los diferentes valores lingüísticos: por ejemplo bajo, mediano y alto.

Un conjunto borroso es un valor lingüístico junto a una función de pertenencia. El valor lingüístico es el “nombre” del conjunto, y la función de pertenencia se define como aquella aplicación que asocia a cada elemento del universo de discurso el grado con que pertenece al conjunto borroso.

Dado un conjunto borroso $\tilde{A}$, con función de pertenencia $\mu_A(x)$, se define como α – corte $\tilde{A}$, al conjunto de elementos que pertenecen al conjunto borroso $\tilde{A}$ con grado mayor o igual que α, es decir:

$$A_\alpha = \{x \in X \text{ de manera que } \mu_A(x) \geq \alpha\} \qquad (28)$$

En este estudio el concepto de α – corte es muy útil ya que el parámetro α sirve para expresar el límite de tolerancia y a partir de él establecer los niveles de exigencia para que dos sistemas de afinación sean compatibles.

4.3 Números borrosos.

Un número borroso es una secuencia finita o infinita de intervalos de confianza con las siguientes propiedades:

– A cada nivel de presunción le corresponde un único intervalo de confianza.

– Los elementos que pertenecen al nivel de presunción α, pertenecen a todos los niveles de presunción menor que α.

– Existe un intervalo y sólo uno que puede reducirse a un número real único.

4.3.1 Números borrosos triangulares (NBT).

Los números borrosos triangulares, NBT, son aquellos números borrosos cuyas funciones de pertenencia son lineales.

Estos números quedan perfectamente determinados por tres números reales que marcan dónde se encuentran los vértices del triángulo.

$$\tilde{A} = (a, b, c) \qquad (29)$$

El valor "a" marca el nivel por debajo del cual no se aceptar que pertenezca al concepto que se trata, el valor "b" representa el valor cuya pertenencia es máxima y el valor "c" marca el máximo valor que aceptado como perteneciente al concepto.

Cuando los NBT son simétricos, las tolerancias por exceso y defecto son la misma, la forma habitual de escribir el número es

$$\tilde{A} = (a, \delta) \qquad (30)$$

El valor "a" expresa el valor de mayor pertenencia y δ representa la desviación máxima permitida por exceso y por defecto.

4.3.2 Notas como conjuntos borrosos.

Se puede considerar un sonido musical como un número borroso que refleja la sensación que produce una frecuencia *f*, es decir

$$s = k \cdot \log_2\left(\frac{f}{f_0}\right) \text{ siendo k una constante.} \qquad (31)$$

El valor $\Delta = 1200 \cdot \delta$ expresa en cents la incertidumbre que se asume.

$$\delta = \frac{1}{2 \cdot q} \text{ siendo } q \text{ el número de notas} \qquad (32)$$

4.3.3 Compatibilidad entre sistemas de afinación

Las condiciones que se buscan entre dos sistemas de afinación son las siguientes:

- Que ambos sistemas tengan el mismo número de notas.
- Que ambos sistemas posean el mismo grado de imprecisión δ.
- Que dada una nota de uno de los sistemas, exista una y sólo una nota del otro sistema que sea compatible con ella.

Hay que fijar un nivel de exigencia α y evaluar si a ese nivel dos sistemas son equivalentes. Por ello a la compatibilidad entre sistemas se le va a llamar α – compatibilidad. Esta compatibilidad se puede evaluar mediante la fórmula:

$$Compat(f_1, f_2) = 1 - \frac{d(f_1, f_2)}{2\Delta} \qquad (33)$$

4.4 Sistemas temperado, bilineal, parabólico y exponencial.

En este apartado se va a realizar la evaluación de compatibilidad de los distintos sistemas con el temperado con el fin de averiguar si podrían coexistir con él, además se va a evaluar si existe compatibilidad entre ellos también. Para ello se va a partir de las frecuencias de 12 notas de los distintos sistemas en la octava Do_3 – Do_4. Fijando el La_4 = 440Hz, se obtienen las siguientes frecuencias.

	Frecuencias			
Notas	**Temperado**	**Bilenal**	**Parabólica**	**Exponencial**
Do	261,62557	263,50754	265,97256	266,49244
Do# - Reb	277,18263	279,84432	282,63414	283,13141
Re	293,66477	297,19394	299,96443	300,37596
Re# - Mib	311,12698	315,61920	317,96341	318,24812
Mi	329,62756	335,18677	336,63110	336,77074
Fa	349,22823	355,96748	355,96748	355,96748
Fa# - Solb	369,99442	375,33660	375,97256	375,86288
Sol	391,99544	395,75964	396,64634	396,48237
Sol# - Lab	415,30470	417,29395	417,98882	417,85231
La	440	440	440	440
La# - Sib	466,16376	467,27886	469,31097	469,89378
Si	493,88330	496,24893	499,95935	500,87554

Tabla 8.- Frecuencia de las 12 notas de los cuatro sistemas.

Una vez se tienen las frecuencias se pueden evaluar las distancias en cents de cada una de las notas con sus homólogas en el resto de sistemas sometidos a estudio (Tabla 9).

	Cents					
Notas	**B. vs T.**	**P. vs T.**	**E. vs T.**	**B. vs P.**	**B. vs E.**	**P. vs E.**
Do	12,4089	28,5287	31,9093	16,1198	19,5004	3,3806
Do# - Reb	16,5451	33,7187	36,7620	17,1735	20,2168	3,0433
Re	20,6814	36,7455	39,1190	16,0640	18,4376	2,3735
Re# - Mib	24,8177	37,6287	39,1782	12,8110	14,3605	1,5495
Mi	28,9540	36,3979	37,1159	7,4439	8,1619	0,7180
Fa	33,0903	33,0903	33,0903	0	0	0
Fa# - Solb	24,8177	27,7486	27,2435	2,9309	2,4258	0,5051
Sol	16,5451	20,4197	19,7038	3,8745	3,1587	0,7158
Sol# - Lab	8,2726	11,1530	10,5875	2,8804	2,3149	0,5655
La	0	0	0	0	0	0
La# - Sib	4,1363	11,6488	13,7974	7,5125	9,6611	2,1486
Si	8,2726	21,1687	24,3384	12,8961	16,0658	3,1697

Tabla 9.- Cents de los cuatro sistemas.

Para poder realizar el análisis correctamente hay que puntualizar que las 12 notas de cada sistema son NBT en cuyo centro se encuentra la frecuencia indicada en la tabla 8 y con una tolerancia de:

$$\Delta = 1200 \cdot \frac{1}{2 \cdot q} = 1200 \cdot \frac{1}{2 \cdot 12} = 1200 \cdot \frac{1}{24} = 50\,cents \qquad (34)$$

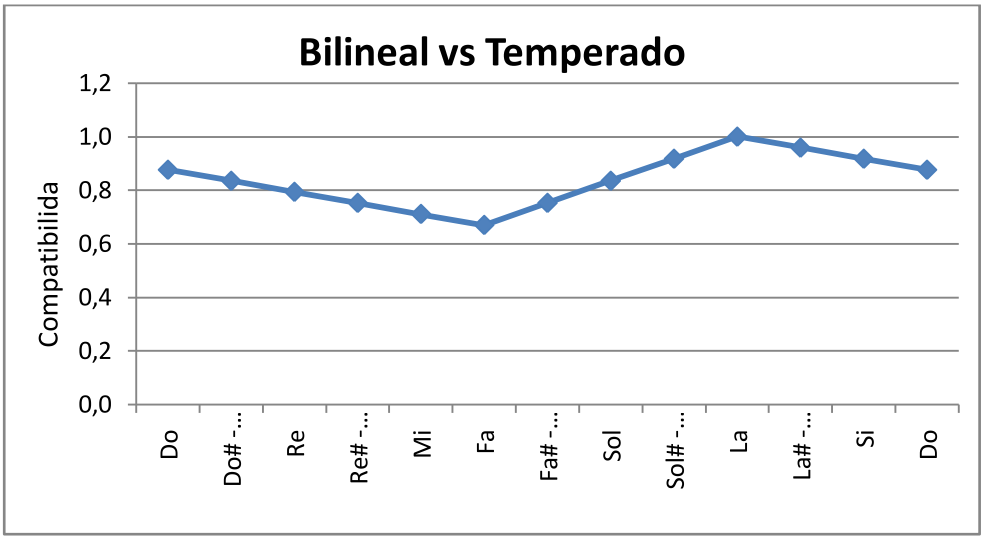
Para calcular la compatibilidad se aplica la expresión citada en el apartado anterior:

$$Compat(f_1, f_2) = 1 - \frac{d(f_1, f_2)}{2\Delta} \qquad (35)$$

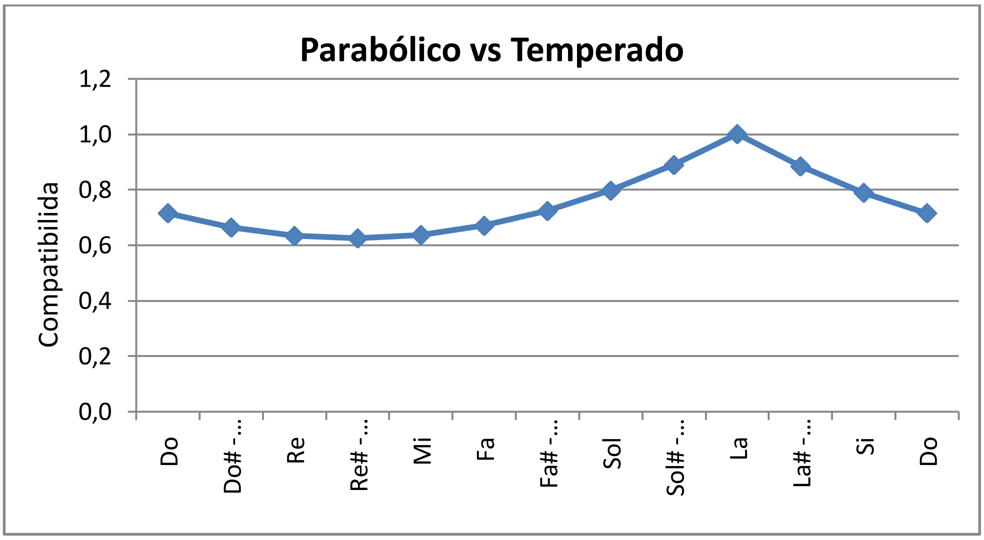
	Compatiblidad					
Notas	**B.vs T**	**P. vs T.**	**E. vs T.**	**B. vs P.**	**B. vs E.**	**P. vs E.**
Do	0,87591	0,71471	0,68091	0,83880	0,80500	0,96619
Do# - Reb	0,83455	0,66281	0,63238	0,82826	0,79783	0,96957
Re	0,79319	0,63255	0,60881	0,83936	0,81562	0,97626
Re# - Mib	0,75182	0,62371	0,60822	0,87189	0,85640	0,98451
Mi	0,71046	0,63602	0,62884	0,92556	0,91838	0,99282
Fa	0,66910	0,66910	0,66910	1	1	1
Fa# - Solb	0,75182	0,72251	0,72756	0,97069	0,97574	0,99495
Sol	0,83455	0,79580	0,80296	0,96125	0,96841	0,99284
Sol# - Lab	0,91727	0,88847	0,89412	0,97120	0,97685	0,99435
La	1	1	1	1	1	1
La# - Sib	0,95864	0,88351	0,86203	0,92487	0,90339	0,97851
Si	0,91727	0,78831	0,75662	0,87104	0,83934	0,96830

Tabla 10.- Compatiblidad entre los distintos sistemas de afinación.

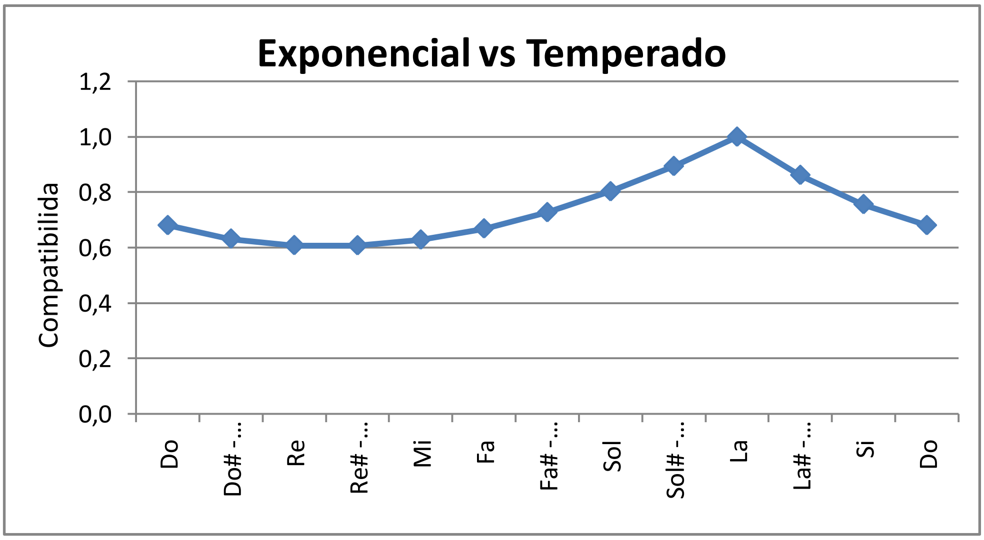
En las siguientes gráficas se va a poder observar mejor hasta qué nivel son compatibles cada uno de los sistemas. Únicamente se representan las comparaciones con el sistema temperado.



Gráfica 10.- Compatiblidad entre sistema bilineal y temperado



Gráfica 11.- Compatiblidad entre sistema parabólico y temperado



Gráfica 12.- Compatiblidad entre sistema exponencial y temperado

Hasta ahora se ha comparado nota a nota si son compatibles para, sin embargo para poder afirmar que dos sistemas son compatibles hay que comprobar que cada nota es compatible con una nota y solo con una del otro sistema. En las tablas siguientes se va a exponer el nivel de compatibilidad de cada nota del sistema temperado con cada una de las notas de los demás sistemas.

	Compatibilidad nota a nota Temperado y Bilineal											
Notas	**Do**	**Do#**	**Re**	**Re#**	**Mi**	**Fa**	**Fa#**	**Sol**	**Sol#**	**La**	**La#**	**Si**
Do	**0,88**	0,12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Do# - Reb	0	**0,83**	0,17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Re	0	0	**0,79**	0,21	0	0	0	0	0	0	0	0
Re# - Mib	0	0	0	**0,75**	0,25	0	0	0	0	0	0	0
Mi	0	0	0	0	**0,71**	0	0	0	0	0	0	0
Fa	0	0	0	0	0	**0,67**	0	0	0	0	0	0
Fa# - Solb	0	0	0	0	0	0	**0,75**	0	0	0	0	0
Sol	0	0	0	0	0	0	0	**0,83**	0	0	0	0
Sol# - Lab	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,92**	0	0	0
La	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1,00**	0	0
La# - Sib	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,96**	0
Si	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,92**

Tabla 11.- Compatibilidad entre Temperado y Bilineal.

	Compatibilidad nota a nota Temperado y Parabólico											
Notas	**Do**	**Do#**	**Re**	**Re#**	**Mi**	**Fa**	**Fa#**	**Sol**	**Sol#**	**La**	**La#**	**Si**
Do	**0,71**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Do# - Reb	0,21	**0,66**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Re	0	0,32	**0,63**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Re# - Mib	0	0	0	**0,62**	0	0	0	0	0	0	0	0
Mi	0	0	0	0,36	**0,64**	0	0	0	0	0	0	0
Fa	0	0	0	0	0,33	**0,67**	0	0	0	0	0	0
Fa# - Solb	0	0	0	0	0	0,28	**0,72**	0	0	0	0	0
Sol	0	0	0	0	0	0	0	**0,80**	0	0	0	0
Sol# - Lab	0	0	0	0	0	0	0	0,11	**0,89**	0	0	0
La	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1,00**	0	0
La# - Sib	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,88**	0
Si	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,79**

Tabla 12.- Compatibilidad entre Temperado y Parabólico.

	Compatibilidad nota a nota Temperado y Exponencial											
Notas	**Do**	**Do#**	**Re**	**Re#**	**Mi**	**Fa**	**Fa#**	**Sol**	**Sol#**	**La**	**La#**	**Si**
Do	**0,68**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Do# - Reb	0,30	**0,63**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Re	0	0	**0,61**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Re# - Mib	0	0	0,39	**0,61**	0	0	0	0	0	0	0	0
Mi	0	0	0	0,37	**0,63**	0	0	0	0	0	0	0
Fa	0	0	0	0	0,33	**0,67**	0	0	0	0	0	0

Notas	Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
Fa# - Solb	0	0	0	0	0	0,27	**0,73**	0	0	0	0	0
Sol	0	0	0	0	0	0	0,20	**0,80**	0	0	0	0
Sol# - Lab	0	0	0	0	0	0	0	0,11	**0,89**	0	0	0
La	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1,00**	0	0
La# - Sib	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,86**	0
Si	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,76**

Tabla 13.- Compatibilidad entre Temperado y Parabólico.

Del análisis de los resultados anteriores se extrae que los sistemas son compatibles con el temperado pero con niveles de compatibilidad diferentes aunque muy cercanos entre sí, especialmente el parabólico y el exponencial, que como se ha ido observando a lo largo de toda la memoria son muy parecidos entre sí.

- Los sistemas Temperado y Bilineal son compatibles hasta el nivel 0,67.
- Los sistemas Temperado y Parabólicos son compatibles hasta el nivel 0,62.
- Los sistemas Temperado y Exponencial son compatibles hasta el nivel 0,61.

N. A. Garbuzov propuso en su artículo “*The zonal nature of the human aural perception*”, que la diferencia máxima para poder afirmar que se trata dos notas unísonas debía de ser de 12 cents esto es una compatibilidad de 0,88.

Esta afirmación provoca que si bien numéricamente la compatiblidad entre los sistemas con el temperado es alta, la convivencia de música afinada en cualquiera de ellos iba a suponer problemas de afinación, dado que existen distancias cercanas al tercio de tono temperado, algo que se distingue perfectamente.

5 Futuras investigaciones.

Queda pendiente de realizar un estudio psicoacústico sobre una población especialista, es decir músico profesionales que puedan responder con conocimiento de causa a una serie de preguntas. Este estudio se podría extender en una segunda instancia a una población no especialista y comparar resultados. En este primer estudio se realizaría un test de percepción musical de notas e intervalos tanto a alumnos como profesores de diferentes Conservatorios Musicales como de Escuelas de Música.

Otro estudio interesante sería el de analizar la α – Compatibilidad de los diferentes sistemas a través de una pieza musical.

6 Referencias

http://eduardokacheli-articulos.blogspot.com.es/2007/03/sistemas-de-afinacin-en-la-msica.html

http://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=ZqslJKK9ABIC&oi=fnd&pg=PP1&dq=sistemas+de+afinaci%C3%B3n&ots=piVrCAoJXS&sig=WxU54Y2cpXsUweYJmz9T54cLoeY#v=onepage&q=sistemas%20de%20afinaci%C3%B3n&f=true

http://ed.gba.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educacionartistica/34seminarios/htmls/descargas/bibliografia/interpretacion-musical/Afinacionesytemperamentos.Historiaypresente.pdf

http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/405/40521124004.pdf

http://revistasuma.es/IMG/pdf/62/107-113.pdf

http://revistasuma.es/IMG/pdf/61/113-118.pdf

http://www.sinewton.org/numeros/numeros/35/Articulo03.pdf

http://www.doredin.mec.es/documentos/01520073000102.pdf

http://museovirtual.csic.es/salas/acustica/sonido3/mm11.htm

http://www.elsaposabio.com/musica/?cat=18

http://tonalsoft.com/monzo/aristoxenus/318tet.html

J. Agulló (Editor), Acústica musical. Ed. Prensa Científica S. A., Barcelona, 1989.

A. Baker, A concise introduction to the theory of numbers. Ed. Cambridge University Press, 1984.

A. Calvo-Manzano Ruiz, Acústica físico-musical. Ed. Real Musical, Madrid, 1993.

J. Chailley, H. Challan, Teoría completa de la Música. Ed. Alphonse Leduc, Paris, 1965.

G. Fernández de la Gándara, M. Lorente, Acústica Musical. Ed. Instituto Complutense de Ciencias Musicales, Madrid, 1998.

J. J. Goldáraz Gaínza, Afinación y temperamento en la música occidental. Ed. Alianza Editorial, Madrid, 1992.

R. W. Hall, K. Josíc, The Mathematics of Musical Instruments. The American Mathematical Monthly, 108, pp. 347-357, Washintong, 2001.

V. Liern, Taller de Música y Matemáticas. Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Sevilla, 1990.

V. Liern, Aristógeno versus Pitágoras: dos criterios matemáticos para la afinación musical. XIXth International Congress of History of Science, Zaragoza, 1993.

V. Liern, La música y sus materiales: una ayuda para la clase de Matemáticas. Suma, 14, pp. 60-64, Granada, 1994.

V. Liern, Métodos numéricos en música. Epsilon, 30, pp. 51-60, Sevilla, 1994.

V. Liern, Fuzzy tuning systems: the mathematics of musicians. Fuzzy Sets and Systems, 150, 35-52, Holanda, 2005.

J. L. Monzo, The measurement of Aristoxenus's Divisions of the Tetrachord.

U. Michels, Atlas de Música 1 y 2. Ed. Alianza Editorial, Madrid, 1994.

J. Piles Estellés, Intervalos y gamas. Ed. Piles, Valencia, 1982.

D. Schell, Optimality in musical melodies and harmonics progressions: The travelling musician, European Journal of Operational Resarch, 140, pp. 354-372, Amsterdam, 2002.