



# LECCIONES BREVES DE ESTADÍSTICA

Cristina Estruch Miñana | Valentín Gregori Gregori  
Bernardino Roig Sala | Almanzor Sapena Piera

Cristina Estruch Miñana  
Valentín Gregori Gregori  
Bernardino Roig Sala  
Almanzor Sapena Piera

# Lecciones breves de Estadística

Colección *Punto de Partida*

Citar como:

Estruch Miñana, Cristina; Gregori Gregori, Valentín; Roig Sala, Bernardino; Sapena Piera, Almanzor (2022). *Lecciones breves de Estadística*. Valencia: edUPV

© Cristina Estruch Miñana  
Valentín Gregori Gregori  
Bernardino Roig Sala  
Almanzor Sapena Piera

© 2022, edUPV

Venta: [www.lalibreria.upv.es](http://www.lalibreria.upv.es) / Ref.: 0368\_10\_01\_01

ISBN: 978-84-1396-040-1

DL: V-1889-2022

edUPV se compromete con la ecoimpresión y utiliza papeles de proveedores que cumplen con los estándares de sostenibilidad medioambiental

<https://editorialupv.webs.upv.es/compromiso-medioambiental/>

Imprime: Byprint Percom, sl

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a [edicion@editorial.upv.es](mailto:edicion@editorial.upv.es)

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo [edicion@editorial.upv.es](mailto:edicion@editorial.upv.es)

Impreso en España

# Índice

<b>Índice de notaciones</b>	<b>8</b>
<b>Prólogo</b>	<b>9</b>
<b>1 Estadística Descriptiva</b>	<b>11</b>
1.1 Representación de variables estadísticas . . . . .	11
1.1.1 Población y variable estadística . . . . .	11
1.1.2 Ejemplo . . . . .	12
1.1.3 Tablas de frecuencias . . . . .	12
1.1.4 Ejemplo . . . . .	12
1.1.5 Ejemplo . . . . .	13
1.1.6 Representaciones gráficas . . . . .	13
1.2 Medidas de centralización y de dispersión de una variable es- tadística cuantitativa . . . . .	17
1.2.1 Medidas de posición central . . . . .	17
1.2.2 Ejemplo . . . . .	19
1.2.3 Ejemplo . . . . .	19
1.2.4 Propiedades de la media aritmética . . . . .	20
1.2.5 Ejemplo . . . . .	21
1.2.6 La media ponderada . . . . .	21
1.2.7 Ejemplo . . . . .	22
1.2.8 Otras medias . . . . .	22
1.2.9 Medidas de dispersión de una variable estadística cuan- titativa . . . . .	24
1.2.10 Ejemplo . . . . .	25
1.2.11 La varianza para expresiones lineales . . . . .	26

1.2.12	Estadísticos robustos . . . . .	27
1.2.13	Ejemplo . . . . .	27
1.3	Diagrama box-and-whisker . . . . .	28
1.4	Ejercicios resueltos . . . . .	29
1.5	Ejercicios propuestos . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Distribuciones bidimensionales</b>	<b>39</b>
2.1	Distribuciones bidimensionales . . . . .	39
2.1.1	Variable estadística bidimensional . . . . .	39
2.1.2	Representación gráfica de una distribución bidimensional	40
2.1.3	Ejemplo . . . . .	40
2.1.4	Medidas de centralización y dispersión . . . . .	41
2.1.5	Nota . . . . .	42
2.1.6	Ejemplo . . . . .	42
2.1.7	Frecuencias marginales . . . . .	43
2.1.8	Ejemplo . . . . .	44
2.2	Regresión y correlación . . . . .	45
2.2.1	Líneas de regresión . . . . .	45
2.2.2	Rectas de regresión . . . . .	46
2.2.3	Ejemplo . . . . .	47
2.2.4	Cálculo de las rectas de regresión con parámetros estadísticos . . . . .	48
2.2.5	Ejemplo . . . . .	49
2.2.6	El coeficiente de correlación lineal . . . . .	49
2.2.7	Ejemplo . . . . .	50
2.3	Ejercicios resueltos . . . . .	51
2.4	Ejercicios propuestos . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Probabilidad</b>	<b>61</b>
3.1	Espacios probabilísticos . . . . .	61
3.1.1	Experimentos aleatorios . . . . .	61
3.1.2	Ejemplo . . . . .	62
3.1.3	Nota . . . . .	62
3.1.4	Álgebra de sucesos . . . . .	62
3.1.5	Ejemplo . . . . .	63

3.1.6	Probabilidad . . . . .	63
3.1.7	Nota . . . . .	63
3.1.8	Ejemplo . . . . .	64
3.1.9	Propiedades de una función probabilidad . . . . .	65
3.1.10	Axiomática de Kolmogorov . . . . .	65
3.1.11	Probabilidad de Laplace . . . . .	65
3.1.12	Ejemplo . . . . .	66
3.1.13	Pruebas repetidas. Espacio producto . . . . .	66
3.1.14	Ejemplo . . . . .	67
3.1.15	Probabilidad suma . . . . .	67
3.1.16	Probabilidad compuesta . . . . .	67
3.1.17	Nota . . . . .	68
3.1.18	Ejemplo . . . . .	69
3.1.19	Ejemplo . . . . .	69
3.1.20	Diagramas de árbol . . . . .	70
3.1.21	Ejemplo . . . . .	70
3.1.22	Probabilidad y porcentaje . . . . .	71
3.2	Probabilidad condicionada. Teorema de Bayes . . . . .	71
3.2.1	Probabilidad condicionada . . . . .	72
3.2.2	Ejemplo . . . . .	74
3.2.3	Probabilidad total . . . . .	74
3.2.4	Ejemplo . . . . .	75
3.2.5	Teorema de Bayes . . . . .	76
3.2.6	Ejemplo . . . . .	76
3.2.7	Nota . . . . .	77
3.2.8	Probabilidad geométrica . . . . .	77
3.2.9	Ejemplo . . . . .	77
3.2.10	Nota . . . . .	78
3.3	Ejercicios resueltos . . . . .	78
3.4	Ejercicios propuestos . . . . .	96
<b>4</b>	<b>VARIABLES ALEATORIAS</b>	<b>99</b>
4.1	VARIABLES ALEATORIAS . . . . .	99
4.1.1	VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS . . . . .	99
4.1.2	Ejemplo . . . . .	100

4.1.3	Función de distribución de una variable aleatoria discreta . . . . .	100
4.1.4	Ejemplo . . . . .	101
4.1.5	Propiedades de la función de distribución $F$ de una variable aleatoria discreta $X$ . . . . .	102
4.1.6	Elección de la función de probabilidad . . . . .	102
4.1.7	Esperanza de una variable aleatoria discreta . . . . .	103
4.1.8	Ejemplo (El dado perfecto) . . . . .	103
4.1.9	Nota . . . . .	104
4.1.10	Ejemplo . . . . .	104
4.1.11	Varianza de una variable aleatoria discreta . . . . .	105
4.1.12	Nota . . . . .	106
4.1.13	Ejemplo . . . . .	106
4.2	Variables aleatorias continuas . . . . .	106
4.2.1	Variable aleatoria continua . . . . .	106
4.2.2	Ejemplo . . . . .	108
4.2.3	Esperanza y varianza de una variable aleatoria continua . . . . .	109
4.2.4	Ejemplo . . . . .	109
4.2.5	Algunas propiedades . . . . .	109
4.2.6	Distribución de una variable . . . . .	111
4.3	Ejercicios resueltos . . . . .	111
4.4	Ejercicios propuestos . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Distribuciones discretas</b>	<b>131</b>
5.1	La distribución binomial . . . . .	131
5.1.1	Distribución binomial . . . . .	131
5.1.2	Ejemplo . . . . .	132
5.1.3	Gráfica de una distribución binomial . . . . .	132
5.1.4	Parámetros fundamentales de la distribución binomial . . . . .	133
5.1.5	Ejemplo . . . . .	133
5.1.6	Ajuste de una distribución binomial a una distribución de frecuencias . . . . .	134
5.1.7	Ejemplo . . . . .	134
5.2	La distribución de Poisson . . . . .	135
5.2.1	Ejemplo . . . . .	136
5.2.2	Ajuste de una distribución de Poisson a una binomial . . . . .	136

5.3	Ejercicios resueltos . . . . .	137
5.4	Ejercicios propuestos . . . . .	148
<b>6</b>	<b>Distribuciones continuas</b>	<b>151</b>
6.1	La distribución uniforme . . . . .	151
6.2	La distribución normal . . . . .	152
6.2.1	Distribución normal . . . . .	152
6.2.2	La distribución normal estándar . . . . .	153
6.2.3	Ejemplo . . . . .	156
6.2.4	Ajuste de una distribución normal a una distribución de frecuencias . . . . .	157
6.2.5	Nota . . . . .	158
6.2.6	Ejemplo . . . . .	158
6.2.7	Ajuste de una distribución normal a una binomial . . .	160
6.2.8	Ejemplo . . . . .	160
6.2.9	Ajuste de una distribución normal a una de Poisson . .	161
6.3	La distribución exponencial . . . . .	161
6.3.1	Distribución exponencial . . . . .	161
6.3.2	Ejemplo . . . . .	162
6.4	Ejercicios resueltos . . . . .	163
6.5	Ejercicios propuestos . . . . .	180
	<b>Bibliografía</b>	<b>183</b>
	<b>Índice de materias</b>	<b>184</b>
	<b>Tablas estadísticas</b>	<b>186</b>

# Índice de notaciones

$B(n, p)$	distribución binomial
$E(X)$	esperanza de una variable aleatoria $X$
$\emptyset$	suceso imposible (conjunto vacío)
$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales
$N(\mu, \sigma)$	distribución normal
$\mu$	esperanza de una variable aleatoria ( $E(X)$ )
$\Omega$	suceso seguro (conjunto referencial), espacio muestral
$P_\lambda(k)$	probabilidad de Poisson de esperanza $\lambda$
$\sigma_{xy}$	covarianza
$\sigma$	desviación típica
$\sigma^2$	varianza
$\text{var}(X)$	varianza de la variable aleatoria $X$
$\bar{x}$	media de $x_1, x_2, \dots, x_N$
$\in$	símbolo de pertenencia
$\subset$	símbolo de inclusión
$\cap$	símbolo de intersección
$\cup$	símbolo de unión
$A - B$	diferencia de conjuntos
$\bar{A}$	suceso contrario (conjunto complementario)
$\dot{p}$	múltiplo de $p$
<i>i.e.</i>	id est (expresión latina y se lee “es decir”)
$V_m^n$	variaciones de $m$ elementos de orden $n$
$RV_m^n$	variaciones con repetición de $m$ elementos de orden $n$
$C_m^n$	combinaciones de $m$ elementos de orden $n$
$\binom{m}{n}$	número combinatorio equivalente a $C_m^n$
$n!$	factorial de $n$
$Ri.j$	ejercicio resuelto $j$ del capítulo $i$
$Pi.j$	ejercicio propuesto $j$ del capítulo $i$

# Prólogo

La Universidad Española emprendió hace años una etapa inédita con el denominado Plan Bolonia. En el nuevo plan, el tiempo del que dispone el profesorado para la impartición de la docencia matemática se ha reducido drásticamente. De esta manera, la clásica clase magistral del siglo anterior se vuelve, en ocasiones, menos expositiva y más orientadora hacia la búsqueda de conocimientos en los que el universitario deberá involucrarse de una manera más activa.

El presente libro es un texto elemental de Estadística, y como insinúa su título, es una versión reducida y actualizada del texto *Lecciones de Estadística* (UPV Ref.: 322). El texto está concebido para los alumnos de Ingeniería que se graduarán en estos nuevos planes aunque básicamente el contenido corresponde al curso que algunos autores han impartido en la Escuela Politécnica Superior de Gandía (EPSG) en anteriores cursos académicos. El poco tiempo de que se dispone para su impartición queda patente, en cierta manera, en la ausencia de demostraciones, en su sentido más estricto (el capítulo tres podría considerarse una excepción), pues éstas sólo aparecen como tales en la resolución de algunos ejercicios de carácter teórico que se encuentran al final de cada capítulo. Ello permite una lectura fluida del texto.

No obstante lo dicho en el párrafo anterior, y aun usando terminología sencilla, la redacción matemática del texto es rigurosa en su exposición. Si en algún momento, por motivos que entendemos pedagógicos, hemos relajado el rigor, éste habitualmente se ve reflejado por escritura en cursiva o con la aparición de un epígrafe en letra pequeña (cuya lectura puede omitirse sin perjuicio de comprender el resto del texto), que pone énfasis en el aspecto matemático cuyo rigor había sido *diluido*, a conciencia.

Permítasenos afirmar que, modestamente, es en la exposición didáctica en donde los autores se han esmerado. En efecto, además de las detalladas argumentaciones del contenido a lo largo del texto, éstas van acompañadas de un buen número de ejemplos y tablas diseñadas para cálculos y gráficos. Al final de cada capítulo se ofrece una lista de ejercicios con una resolución detallada de cada uno y después se proponen otros que motiven al estudioso.

Concretando el programa desarrollado, los 6 capítulos seleccionados, por este orden, han sido: Estadística descriptiva, distribuciones bidimensionales, probabilidad, variables aleatorias, distribuciones discretas y distribuciones continuas.

Para la comprensión del texto, además de un conocimiento elemental del cálculo, y de conceptos matemáticos básicos, se requieren del Álgebra conocimientos de combinatoria elemental que se usan en el cálculo de probabilidades y en el estudio de la distribución binomial. Del Análisis Matemático se necesita un conocimiento básico de la integral definida de Riemann, y también de la derivada, para el tratamiento de las variables aleatorias continuas.

Para variables aleatorias discretas se han demostrado algunos resultados que han sido extendidos, de manera natural, para variables aleatorias continuas aunque, como se pone de manifiesto en su momento, las pruebas en este último caso requieren de conocimientos más profundos sobre la integral de Riemann.

Otros aspectos interesantes, como el cálculo del área que encierra la campana de Gauss, o la obtención del sistema normal de ecuaciones de las rectas de regresión, se sugiere desde estas líneas que deben ser considerados como ejercicios en algún curso de Análisis Matemático.

Los autores agradecerán cualquier sugerencia tendente a mejorar esta nueva edición del texto para ediciones sucesivas.

Los autores

# Capítulo 1

## Estadística Descriptiva

Se podría entender la Estadística como la ciencia que tiene por objeto el estudio de datos. Los *métodos estadísticos* se aplican a datos generalmente numéricos que proceden de observaciones efectuadas sobre alguna característica de un colectivo o sobre resultados de una experimentación.

La Estadística Descriptiva, de la que nos ocuparemos en el texto básicamente, es el primer paso del estudio del conjunto de datos y se limita a la obtención de gráficos y parámetros representativos de la *serie* de datos. La extrapolación de conclusiones de los datos obtenidos de una parte de un colectivo a todo el colectivo constituye la técnica de la Inferencia Estadística que queda excluida del presente texto.

### 1.1 Representación de variables estadísticas

#### 1.1.1 Población y variable estadística

**Población** es un conjunto de elementos (*individuos*) con algún *carácter* común. **Muestra** es un subconjunto *representativo* de dicha población. Nosotros, salvo algún caso aislado, siempre consideraremos poblaciones finitas. En Estadística se consideran dos tipos de caracteres (que se explican por su denominación): *cualitativos* y *cuantitativos*. Al carácter objeto de estudio se le denomina **variable estadística** (cualitativa o cuantitativa), y ésta divide la población, de manera natural, en clases (subconjuntos disjuntos) al considerar los diversos *atributos* de la variable, que a su vez pueden dar lugar a subclases.

### 1.1.2 Ejemplo

En un aula determinada, los alumnos constituyen la población, el sexo y el lugar de nacimiento son variables cualitativas, mientras que el peso y la talla de cada alumno son cuantitativas. Si escogemos al azar dos filas de alumnos, éstos constituyen una muestra. La población puede quedar dividida en dos clases: la de los chicos y la de las chicas. A su vez, cada clase puede dar lugar a subclases atendiendo a los diversos pesos, por ejemplo.

### 1.1.3 Tablas de frecuencias

**Frecuencia (absoluta)** de una clase es el número de elementos de la clase. **Frecuencia relativa** de una clase es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número de elementos de la población (supuesto éste finito). La recopilación de los datos de una variable se efectúa disponiéndolos en “tablas de frecuencias”, que se denominan distribuciones unidimensionales o bidimensionales según que intervenga una o dos variables. Por brevedad, denominamos *tabla* a una *tabla de frecuencias* en donde al menos aparecen  $x_i$  y las frecuencias absolutas  $f_i$  correspondientes. Los  $N$  valores numéricos  $x_i$  que puede tomar una variable se denominan *serie estadística*, *serie de datos* (o de números) o con otras expresiones alusivas similares, según los autores.

En el caso de una variable cuantitativa, que haya sido ordenada de menor a mayor, se denomina **frecuencia absoluta acumulada** a la suma de las frecuencias absolutas de un determinado valor de la variable y de todos los anteriores. De manera similar se define el concepto de **frecuencia relativa acumulada**. El lector reconocerá algunas propiedades sencillas de estos conceptos observando el siguiente ejemplo.

### 1.1.4 Ejemplo

Las calificaciones en la asignatura de Física obtenidas por 20 alumnos de una determinada clase, siguiendo el listado, son las siguientes: 6, 4, 5, 8, 7, 3, 4, 5, 5, 10, 9, 7, 8, 2, 9, 3, 10, 4, 7, 4. Aquí, la población es la clase de 20 alumnos, la variable estadística, “calificación en Física”, es cuantitativa, y sus valores numéricos  $x_i$  son los números naturales del 2 al 10.

La recopilación de los datos de este ejemplo da lugar a la siguiente **tabla de frecuencias**, de interpretación obvia, y en donde dejamos constancia de la notación que se empleará en este capítulo, al referirnos a las diversas frecuencias. Cuando recurramos al signo de sumatorio  $\sum$  omitiremos el recorrido de los subíndices de éste si no hay posibilidad de confusión. Obsérvese la conveniencia de presentar los valores  $x_i$  en forma creciente.

**Para seguir leyendo, inicie el  
proceso de compra, click aquí**