



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Dpto. de Matemàtica Aplicada

Técnicas de perturbación para ecuaciones diferenciales
con incertidumbre y aplicaciones

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Investigación Matemática

AUTOR/A: Valencia Sullca, Joaquín Francisco

Tutor/a: Cortés López, Juan Carlos

Cotutor/a: Roselló Ferragud, María Dolores

CURSO ACADÉMICO: 2021/2022

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

invest
mat

Trabajo Fin de Máster

**Técnicas de Perturbación para
Ecuaciones Diferenciales con
Incertidumbre y Aplicaciones**

Joaquin Francisco Valencia Sullca

Co-directores

Dr. Juan Carlos Cortés López (Universitat Politècnica de València)

Dra. María Dolores Roselló Ferragud (Universitat Politècnica de València)

Resumen

El presente trabajo de fin de máster tiene como objetivo extender las técnicas de perturbación determinísticas a ecuaciones diferenciales no lineales con incertidumbre en la fuente externa. Para este propósito, la incertidumbre estará determinada por procesos estocásticos con propiedades como la estacionariedad, gaussianidad, etc. A partir de estas técnicas se pretende aproximar, vía el método de perturbación de primer orden, la solución en estado estacionaria de los primeros momentos estadísticos como la media, varianza, correlación, etc. Seguidamente, se utilizarán las técnicas de entropía para aproximar la función de densidad de probabilidad del estado estacionario. Finalmente, para los modelos estudiados se elegirán las distribuciones y procesos estocásticos fuente adecuados, que nos permitan realizar simulaciones a partir de los resultados teóricos obtenidos.

Acrónimos

$X(t)$: Posición del Sistema Oscilatorio.

ξ : Constante de Amortiguamiento.

ω_0 : Frecuencia Angular no Amortiguada.

ϵ : Parámetro de Perturbación.

$Y(t)$: Excitación Estocástica.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: Espacio de Probabilidad.

Ω : Espacio de Muestra.

\mathcal{F} : σ -álgebra de Ω .

\mathbb{P} : Medida de Probabilidad.

FDP: Función de Densidad de Probabilidad.

FD: Función de Distribución.

FIDIS: Función de Distribución Finita.

PME: Principio de Máxima Entropía.

F_X : FD de la Variable Aleatoria X .

f_X : FDP de la Variable Aleatoria X .

$\mathbb{E}\{.\}$: Operador Esperanza.

$\mathbb{V}\{.\}$: Operador Varianza.

$\mathbb{C}\{.\}$: Operador Covarianza.

μ_X : Esperanza de $X(t)$, $\mathbb{E}\{X\}$.

σ_X^2 : Varianza de $X(t)$, $\mathbb{V}\{X\}$.

$C_X(t, s)$: Operador Covarianza del Proceso $X(t)$.

$\Gamma_X(t, s)$: Correlación del Proceso $X(t)$, dado por $\mathbb{E}\{X(t)X(s)\}$.

$W(t)$: Proceso de Wiener.

$N(\mu; \sigma^2)$: Distribución Normal o Gaussiana de Parámetros μ y $\sigma > 0$.

Índice general

Resumen	III
Acrónimos	V
Índice general	1
1 Introducción	3
2 Procesos Estocásticos	7
2.1 Proceso Estocástico	7
2.2 Funciones de Distribución y Densidad de Probabilidad.	8
2.3 Proceso Estocástico Gaussiano	8
2.4 Funciones Estadísticas Asociadas a los Procesos Estocásticos.	9
2.5 Proceso Estocástico Estacionario.	9
2.6 Resultados Auxiliares de los Procesos Estocásticos.	10
2.7 Desigualdades Probabilísticas	11
3 Análisis Probabilístico	13
3.1 Técnica de Perturbación	14
3.2 Aproximación de los Principales Momentos Estadísticos.	16
3.2.1 Primer Modelo	16
3.2.2 Segundo Modelo.	24
3.3 Principio de Máxima Entropía.	32

4 Resultados Numéricos	35
4.1 Primer Modelo	35
4.1.1 Proceso Estocástico Trigonométrico	36
4.1.2 Proceso Ruido Blanco Gaussiano	44
4.2 Segundo Modelo	53
4.2.1 Proceso Ruido Blanco Gaussiano	53
4.2.2 Proceso Estocástico de Ornstein-Uhlenbeck	59
5 Conclusiones	67
Bibliografía	69

Capítulo 1

Introducción

Es bien conocido que el estudio de los sistemas vibratorios estocásticos no lineales, como por ejemplo, los diferentes tipos de osciladores no lineales aplicados a la física e ingeniería, han sido abordados por el análisis de perturbaciones estocásticas en sistemas dinámicos no lineales. Esto es debido a que los osciladores no lineales muestran vibraciones que suelen ser aleatorias, y por tanto no se puede conocer de manera determinista su naturaleza. Sin embargo, pueden ser caracterizados de manera estadística a través de mediciones que por lo general contienen errores e incertidumbres [1]-[3].

En general, los sistemas vibratorios no lineales se rigen por ecuaciones diferenciales con pequeños términos no lineales, que son expresados de la siguiente forma:

$$\ddot{X}(t) + \beta\dot{X}(t) + \omega_0^2 (X(t) + \epsilon g(X(t))) = Y(t), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

donde:

- $X(t)$ denota la posición del sistema oscilatorio en el instante de tiempo t .
- El parámetro β es dado por $\beta := 2\xi\omega_0$:
 - ξ es la constante de amortiguamiento,
 - $\omega_0 > 0$ la frecuencia angular no amortiguada.
- El parámetro ϵ es una pequeña perturbación $|\epsilon| \ll 1$, que afecta a la función no lineal de la posición $g(X(t))$.
- $X(t) + \epsilon g(X(t))$ se conoce como el término no lineal de la incógnita.
- $Y(t)$ representa una fuente externa/término forzado (vibración) que actúa sobre el sistema. Para los sistemas de vibración aleatoria, se supone que $Y(t)$ es un proceso estocástico, denominado excitación estocástica.

Por otro lado, el parámetro de perturbación ϵ está involucrado con el término no lineal de la incógnita en la ecuación (1.1), por tanto, es el que determina la magnitud de la perturbación no lineal, que está representado por $g(X(t))$. Si $\epsilon = 0$, la ecuación (1.1) resultante es un oscilador lineal aleatorio de la forma:

$$\ddot{X}(t) + \beta\dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = Y(t), \quad t > 0. \quad (1.2)$$

Estos tipos de osciladores lineales aleatorios han sido estudiados en [4]. Un ejemplo práctico ha sido descrito en [5], donde se ha estudiado el efecto de las estructuras terrestres con perturbaciones de tipo sísmico, siendo $Y(t)$ el desplazamiento horizontal relativo. Más recientemente, en [6], se ha analizado este tipo de osciladores lineales con dos excitaciones estocásticas en la fuente $Y(t)$, el primero por un proceso Gaussiano y el segundo por una expansión de Karhunen-Loève.

Si $\epsilon \neq 0$, la ecuación resultante es un oscilador no lineal aleatorio. La inclusión de este término no lineal, dificulta la resolución de la ecuación diferencial estocástica (1.1). En [7], por ejemplo, se ha estudiado el oscilador Duffing, que describe el modelamiento de un péndulo elástico cuya rigidez del resorte no cumple la ley de Hooke.

La implementación de la técnica de perturbación permite superar las limitaciones asociadas a la obtención de una solución en la ecuación no lineal (1.1). Esto es debido a que esta técnica nos permite obtener aproximaciones fiables de la ecuación (1.1). Para ello, considera un parámetro de perturbación ϵ pequeño.

Por esta razón, el análisis de perturbaciones estocásticas puede abordar este tipo de problemas, ya que proporciona una mejor comprensión de la dinámica de la ecuación diferencial estocástica asociada a este tipo de sistemas vibratorios estocásticos no lineales. Es así que, un número importante de contribuciones acerca de la técnica de perturbación han sido descritas en [8]-[12].

Finalmente, un objetivo importante en el ámbito de los sistemas vibratorios con incertidumbre, además del cálculo de los primeros momentos estadísticos de la respuesta del sistema o de la realización de un análisis de estabilidad del sistema bajo vibraciones estocásticas; es el cálculo de la función de distribución finita (FIDIS), que está asociada a la solución estacionaria, y en particular a la función de densidad de probabilidad (FDP) estacionaria [13]-[14]. Por esta razón, se utilizará el principio de máxima entropía (PME) [15], para determinar aproximaciones de la FDP de la solución estacionaria.

En la presente memoria, abordaremos el estudio de osciladores no lineales aleatorios sujetos a pequeñas perturbaciones que afectan el término no lineal, $g(t)$, que dependen, en primer lugar, tanto de la posición, $X(t)$, como de la velocidad, $\dot{X}(t)$, y en segundo lugar únicamente de la posición $X(t)$. Por este motivo, se ha propuesto el estudio de dos modelos como se muestra a continuación.

El primer modelo, tiene la siguiente expresión:

$$\ddot{X}(t) + 2\xi\omega_0\dot{X}(t) + \epsilon g(X(t), \dot{X}(t)) + \omega_0^2 X(t) = Y(t). \quad (1.3)$$

El segundo modelo, tiene la siguiente expresión:

$$\ddot{X}(t) + 2\xi\omega_0\dot{X}(t) + \omega_0^2 (X(t) + \epsilon g(X(t))) = Y(t). \quad (1.4)$$

Los objetivos, por lo tanto, en la presente memoria son los siguientes:

- Estudiar una clase de osciladores no lineales sujetos a pequeñas perturbaciones y excitaciones estocásticas, mediante la combinación del cálculo en media cuadrática y el método de perturbación estocástica, considerando el término no lineal, $g(t)$.
 - Para el primer modelo: $g(t) = X^2(t)\dot{X}(t)$.
 - Para el segundo modelo: $g(t) = \sin(X(t))$.
- Estudiar la dinámica de la solución sujeta a excitaciones aleatorias impulsadas por un proceso estocástico, $Y(t)$.
 - $Y(t)$ es diferenciable en media cuadrática.
 - $Y(t)$ es estacionario Gaussiano con media cero.
- Calcular las principales aproximaciones estadísticas del estado estacionario de los osciladores no lineales, considerando el término no lineal, $g(t)$.
 - Media, varianza y covarianza.
 - Momentos de orden superior.
- Obtener una aproximación fiable de la FDP de la solución de estado estacionario, a partir de:
 - Momentos de orden superior.
 - PME.
- Validar los resultados teóricos obtenidos con experimentos numéricos que puedan confirmar que las aproximaciones calculadas son fiables.

Procesos Estocásticos

En este capítulo, mostraremos algunas de las propiedades más importante de los procesos estocásticos que serán utilizadas a lo largo de toda la memoria.

El espacio de probabilidad que será utilizado está definido por $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

- Ω es un espacio de muestra.
- \mathcal{F} es una σ -álgebra de un conjunto de Ω .
- \mathbb{P} es una medida de probabilidad.

2.1 Proceso Estocástico

Se dice que $X \equiv X(t) \equiv \{X(t)(\omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$ es un proceso estocástico si $X(t)$ es una variable aleatoria para $t \in T$ [16, p. 173].

Los procesos estocásticos de entrada y solución involucrados en las ecuaciones (1.3) y (1.4), serán denotadas respectivamente,

- $Y(t) \equiv \{Y(t) : t \geq 0\}$ en lugar de $Y(t : \omega) \equiv \{Y(t)(\omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$.
- $X(t) \equiv \{X(t) : t \geq 0\}$ en lugar de $X(t : \omega) \equiv \{X(t)(\omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$.

Asimismo, el proceso $\{X(t) : t \in T\}$ se dice que es de segundo orden si $X(t)$ es una variable aleatoria de segundo orden para todo $t \in T$, es decir, tal que $\mathbb{E} [(X(t))^2] < \infty$ para todo $t \in T$. Por lo tanto, el proceso de segundo orden tiene varianza finita [16, p. 185].

2.2 Funciones de Distribución y Densidad de Probabilidad

Por otro lado, la función de distribución (FD) conjunta y la FDP de un proceso estocástico [16, p. 174], están definidas como:

- Para conjunto finito $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ de T , corresponde a un conjunto de variables aleatorias $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2), \dots$, $X_n = X(t_n)$, que tienen una FD conjunta bien definida, es decir,

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \\ = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X_1(t_1)(\omega) \leq x_1, X_2(t_2)(\omega) \leq x_2, \dots, X_n(t_n)(\omega) \leq x_n\}], \quad n \geq 1.$$

La siguiente notación $F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$ es llamada la n -ésima FD.

Siempre que existan las siguientes derivadas parciales, su n -ésima FDP, está definida de la siguiente manera:

$$f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}.$$

Fijando, $n \geq 1$, $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ o $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ son denominadas las distribuciones de dimensión finita (FIDIS).

2.3 Proceso Estocástico Gaussiano

Se dice que $\{X(t) : t \in T\}$ es un proceso estocástico Gaussiano si sus FIDIS son Gaussiano multidimensionales [16, p. 181]. Es importante mencionar que la distribución Gaussiana es caracterizada por el vector de medias μ y su matriz de covarianza Σ . Por lo tanto, un proceso estocástico Gaussiano está determinado por los valores de μ y Σ para cada FIDIS.

Dado que un proceso estocástico $X(t) = \{X(t) : t \in T\}$ puede considerarse como una colección de vectores aleatorios:

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), \quad t_1, \dots, t_n \in T, \quad n \geq 1.$$

Entonces se puede extender el concepto de esperanza y covarianza para los vectores aleatorios de un proceso estocástico y considerar estas cantidades como funciones de $t \in T$.

2.4 Funciones Estadísticas Asociadas a los Procesos Estocásticos

Seguidamente, daremos las definiciones de las principales funciones estadísticas que son utilizadas en los procesos estocásticos [16, p. 183].

- Esperanza:

$$\mu_X(t) = \mathbb{E} \{X(t)\}, \quad t \in T.$$

- Correlación:

$$\Gamma_{XX}(t_1, t_2) = \Gamma_X(t_1, t_2) = \mathbb{E} \{X(t_1)X(t_2)\}, \quad t_1, t_2 \in T.$$

- Covarianza:

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= \mathbb{C} \{X_{t_1}, X_{t_2}\} = \mathbb{E} \{(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))\} \\ &= \Gamma_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2), \quad t_1, t_2 \in T. \end{aligned}$$

- Varianza:

$$\sigma_X^2(t) = \mathbb{V} \{X(t)\} = C_X(t, t), \quad t \in T.$$

- Correlación cruzada:

$$\Gamma_{X,Y}(t_1, t_2) = \mathbb{E} \{X(t_1)Y(t_2)\}, \quad t_1, t_2 \in T.$$

2.5 Proceso Estocástico Estacionario

Un proceso estocástico $\{X(t) : t \in T\}$ se dice que es estacionario [16, p. 189], si sus FIDIS son invariantes en el tiempo:

$$(X(t_1), \dots, X(t_n)) \stackrel{d}{=} (X(t_1 + h), \dots, X(t_n + h)),$$

$$\forall t_1, \dots, t_n \in T, \forall n \geq 1, \forall h > 0 : t_1 + h, \dots, t_n + h \in T.$$

Asimismo, se puede caracterizar como:

$$F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = F_n(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau),$$

donde: $t_i + \tau \in T, i = 1, 2, \dots, n$.

Por tanto, se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbb{E} \{X(t)X(t + \tau)\} = \Gamma_{XX}(\tau) = \Gamma_X(\tau).$$

Adicionalmente, un proceso estocástico de segundo orden $\{X(t) : t \in T\}$ se dice que es estacionario en el sentido amplio [16, p. 191], si:

- $\mu_X(t) = \mu_X$ es constante.
- $C_X(t, s) = C_X(\tau)$ unicamente depende de $\tau = |t - s|$.

2.6 Resultados Auxiliares de los Procesos Estocásticos

Una vez introducidos los principales elementos asociados a los procesos estocásticos, enunciamos los siguientes resultados auxiliares que serán utilizados con el objetivo de calcular los momentos de orden superior del proceso estocástico solución, $X(t)$, de las ecuaciones diferenciales aleatorias (1.3) y (1.4). Esto es debido a que $X(t)$ depende de un producto de la excitación estocástica, $Y(t)$, evaluada en un número finito de instantes, $t_1, t_2, \dots, t_n, Y(t_i) = Y_i, 1 \leq i \leq n$.

1. Proposición 1 [17, p. 28].

Sean las variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots, Y_n conjuntamente Gaussianas con media cero, es decir, $\mathbb{E} \{Y_i\} = 0, 1 \leq i \leq n$. Entonces, todos los momentos de orden impar de estas variables aleatorias son cero, y para n par, se tiene:

$$\mathbb{E} \{Y_1 Y_2 \cdots Y_n\} = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n} \mathbb{E} \{Y_{m_1} Y_{m_2}\} \mathbb{E} \{Y_{m_3} Y_{m_4}\} \cdots \mathbb{E} \{Y_{m_{n-1}} Y_{m_n}\}. \quad (2.1)$$

Los dos resultados siguientes permiten intercambiar el operador esperanza con la derivada en media cuadrática y la integral en media cuadrática, respectivamente.

2. Proposición 2 [17, p. 97].

Sea $Y(t) \equiv \{Y(t) : t \geq 0\}$ un proceso estocástico diferenciable en media cuadrática, entonces:

$$\mathbb{E} \left\{ Y(t_1) \cdots Y(t_{n-1}) \dot{Y}(t_n) \right\} = \frac{\partial}{\partial t_n} \mathbb{E} \{ Y(t_1) \cdots Y(t_{n-1}) Y(t_n) \}, \quad (2.2)$$

siempre que las esperanzas anteriores existan.

3. **Proposición 3** [17, p. 104].

Sea $Y(t) \equiv \{Y(t) : -\infty \leq a \leq t \leq b \leq +\infty\}$ un proceso estocástico de segundo orden integrable en el sentido de media cuadrática y $h(t)$ una función Riemman determinista integrable en $t \in (a, b)$. Entonces:

$$\mathbb{E} \left\{ \int_a^b h(t)Y(t)dt \right\} = \int_a^b h(t)\mathbb{E} \{Y(t)\} dt. \quad (2.3)$$

La siguiente propiedad es distintiva de los procesos Gaussianos, ya que conservan la Gaussianidad bajo la integración en media cuadrática.

4. **Proposición 4** [17, p. 112].

Sea $Y(t) \equiv \{Y(t) : a \leq t \leq +\infty\}$ un proceso Gaussiano y sea $h(t)$ una función Riemman determinista integrable en (a, t) , tal que la siguiente integral en media cuadrática existe:

$$X(t) = \int_a^t h(t, \tau)Y(\tau)d\tau. \quad (2.4)$$

Entonces $X(t) \equiv \{X(t) : t \geq a\}$ es un proceso Gaussiano.

2.7 Desigualdades Probabilísticas

A continuación, describiremos algunas desigualdades probabilísticas [16, p. 47].

- i) Desigualdad general de Chebyshev: Si g es medible y no negativa y $\mathbb{E} \{(g(X))^k\}$ existe para algún $k \geq 0$, entonces:

$$\mathbb{P} \{g(X) > t\} \leq \frac{\mathbb{E} \{(g(X))^k\}}{t^k}, \quad \forall t > 0. \quad (2.5)$$

Si $k = 1$, $g(X) = |X|$, entonces es llamada la desigualdad de Markov:

$$\mathbb{P} \{|X| > t\} \leq \frac{\mathbb{E} \{|X|\}}{t}, \quad \forall t > 0. \quad (2.6)$$

- ii) Desigualdad de Chebyshev: Si X es una variable aleatoria de segundo orden, entonces:

$$\mathbb{P} \{|X - \mu_X| \geq \alpha\sigma_X\} \leq \frac{1}{\alpha^2}, \quad \forall \alpha > 0. \quad (2.7)$$

Análisis Probabilístico

En este capítulo, se realizará el análisis probabilístico que será dividido en tres etapas:

- En primer lugar, aplicaremos la técnica de perturbación, con el objetivo de obtener una aproximación $\hat{X}(t)$ de la solución del proceso estocástico estacionario $X(t)$.
- En segundo lugar, obtendremos aproximaciones fiables de las principales funciones estadísticas de $X(t)$, es decir:
 - Los primeros momentos de orden superior $\mathbb{E}\{X^n(t)\}$, $n = 1, \dots, 5$.
 - La varianza $\mathbb{V}\{X(t)\}$.
 - La covarianza $\mathbb{C}\{X(t_1), X(t_2)\}$.
 - La correlación $\Gamma_{XX}(\tau)$.
- En tercer lugar, a partir de los resultados obtenidos en las dos primeras etapas, se construirán aproximaciones fiables para obtener la FDP de la solución estacionaria, utilizando para este propósito, el principio de máxima entropía (PME).

Es importante mencionar que en la presente memoria, se abordarán los dos casos de estudio mencionados anteriormente.

El primer modelo está descrito por un oscilador no lineal que está sujeto a pequeñas perturbaciones que afectan el término no lineal, $g(t)$, que depende tanto de la posición, $X(t)$, como de la velocidad, $\dot{X}(t)$, es decir $g(t) = X^2(t)\dot{X}(t)$ [18]

$$\ddot{X}(t) + 2\xi\omega_0\dot{X}(t) + \epsilon X^2(t)\dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = Y(t). \quad (3.1)$$

El segundo modelo está descrito por un oscilador no lineal que está sujeto a pequeñas perturbaciones que afectan el término no lineal, $g(t)$, que depende solo de la posición, $X(t)$, es decir $g(t) = \sin(X(t))$ [19]

$$\ddot{X}(t) + 2\xi\omega_0\dot{X}(t) + \omega_0^2(X(t) + \epsilon \sin(X(t))) = Y(t). \quad (3.2)$$

3.1 Técnica de Perturbación

La principal idea de la implementación de la técnica de perturbación estocástica, es considerar que la solución $X(t)$ puede ser expresada mediante una expansión de potencias del parámetro de perturbación ϵ ,

$$X(t) = X_0(t) + \epsilon X_1(t) + \epsilon^2 X_2(t) + \dots \quad (3.3)$$

Esta técnica generalmente se aplica truncando la expansión (3.3) a la aproximación de primer orden

$$\hat{X}(t) = X_0(t) + \epsilon X_1(t). \quad (3.4)$$

Reemplazando la ecuación (3.4) en (3.1) y (3.2), entonces, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales lineales en cascada, con entradas aleatorias.

En particular, para la ecuación (3.1) se tiene:

$$\begin{aligned} \epsilon^0 & : \quad \ddot{X}_0(t) + 2\xi\omega_0\dot{X}_0(t) + \omega_0^2 X_0(t) = Y(t), \\ \epsilon^1 & : \quad \ddot{X}_1(t) + 2\xi\omega_0\dot{X}_1(t) + \omega_0^2 X_1(t) = -X_0^2(t)\dot{X}_0(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Por otro lado, para el segundo modelo es necesario una doble aproximación del término $\sin(X(t))$. En primer lugar, aplicaremos un truncamiento de la serie de Taylor tal que:

$$\sin(X(t)) \approx \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} (X(t))^{2m+1}. \quad (3.6)$$

Seguidamente, aproximamos $X(t)$ de manera que:

$$\sin(X(t)) \approx \sin(\hat{X}(t)) \approx \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} (X_0(t) + \epsilon X_1(t))^{2m+1}. \quad (3.7)$$

De este modo, para la ecuación (3.2) se tiene:

$$\begin{aligned} \epsilon^0 & : \quad \ddot{X}_0(t) + 2\xi\omega_0\dot{X}_0(t) + \omega_0^2 X_0(t) = Y(t), \\ \epsilon^1 & : \quad \ddot{X}_1(t) + 2\xi\omega_0\dot{X}_1(t) + \omega_0^2 X_1(t) = \omega_0^2 \left(\sum_{m=0}^M \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} (X_0(t))^{2m+1} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Nuestro objetivo es el análisis de la solución del estado estacionario. Para este propósito, usaremos la teoría lineal, entonces, las dos primeras ecuaciones en (3.5) y (3.8) se pueden resolver usando la convolución integral, es decir:

$$X_0(t) = \int_0^\infty h(s)Y(t-s)ds. \quad (3.9)$$

Teniendo en cuenta (3.7), para la segunda ecuación en (3.8) se tiene:

$$X_1(t) = \int_0^\infty h(s) \left[-X_0^2(t-s)\dot{X}_0(t-s) \right] ds, \quad (3.10)$$

y

$$X_1(t) = \omega_0^2 \sum_{m=0}^M \int_0^\infty h(s) \left[\frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} (X_0(t-s))^{2m+1} \right] ds, \quad (3.11)$$

donde:

$$h(t) = \begin{cases} (\omega_0^2 - \xi^2\omega_0^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \left[(\omega_0^2 - \xi^2\omega_0^2)^{\frac{1}{2}} t \right], & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t \leq 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

es la función de respuesta al impulso. Se distinguen tres casos importantes respecto del valor del parámetro ξ :

- Para el caso de un sistema con subamortiguamiento, es decir $\xi^2 < 1$. Esta situación corresponde a la condición en la que la amortiguación de un oscilador hace que vuelva al equilibrio, con la amplitud disminuyendo gradualmente hasta cero.
- Para el caso de un sistema con amortiguamiento crítico, es decir $\xi^2 = 1$. En esta situación la amortiguación de un oscilador hace que regrese lo más rápido posible a su posición de equilibrio, sin oscilar de un lado a otro alrededor de esta posición.
- Para el caso de un sistema con sobreamortiguamiento, es decir $\xi^2 > 1$. En esta situación, la amortiguación de un oscilador hace que vuelva al equilibrio sin oscilar.

3.2 Aproximación de los Principales Momentos Estadísticos

En esta sección, se realizará el cálculo de la principal información probabilística del proceso estocástico de la solución estacionaria, $X(t)$, de los dos modelos propuestos en la presente memoria, es decir las ecuaciones (3.1) y (3.2). Asimismo, asumimos que el término de la excitación de entrada $Y(t)$, tiene las siguientes propiedades:

- Es un proceso estocástico Gaussiano estacionario con media cero ($\mathbb{E}\{Y(t)\} = 0$).
- La función de correlación es conocida $\Gamma_{YY}(\tau)$.
- Se asume en algunos casos que $Y(t)$ es diferenciable en media cuadrática.
- La función de correlación de un proceso estocástico estacionario es simétrica, es decir $\Gamma_{YY}(\tau) = \Gamma_{YY}(-\tau)$, [17, p. 47].

3.2.1 Primer Modelo

Para el primer modelo se utilizarán las ecuaciones (3.1), (3.4), (3.5), (3.9), (3.10) y (3.12), respectivamente.

Para calcular la media de la aproximación $\hat{X}(t)$, utilizamos el operador esperanza en la ecuación (3.4),

$$\mathbb{E}\{\hat{X}(t)\} = \mathbb{E}\{X_0(t)\} + \epsilon\mathbb{E}\{X_1(t)\}. \quad (3.13)$$

Seguidamente, calcularemos $\mathbb{E}\{X_0(t)\}$ y $\mathbb{E}\{X_1(t)\}$ a partir de las ecuaciones de la representación de $X_0(t)$, (3.9), y $X_1(t)$, (3.10). Entonces para $\mathbb{E}\{X_0(t)\}$ se tiene:

$$\mathbb{E}\{X_0(t)\} = \mathbb{E}\left\{\int_0^\infty h(s)Y(t-s)ds\right\} = \int_0^\infty h(s)\mathbb{E}\{Y(t-s)ds\} = 0, \quad (3.14)$$

donde para calcular $\mathbb{E}\{X_0(t)\}$, hemos utilizado la Proposición 3 y que $\mathbb{E}\{Y(t)\} = 0$.

El cálculo de $\mathbb{E}\{X_1(t)\}$ se realiza de manera similar al cálculo previamente obtenido,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X_1(t)\} &= \mathbb{E}\left\{\int_0^\infty h(s)\left[-X_0^2(t-s)\dot{X}_0(t-s)\right]ds\right\} \\ &= \int_0^\infty h(s)\mathbb{E}\left\{\left[-X_0^2(t-s)\dot{X}_0(t-s)\right]ds\right\} \\ &= -\int_0^\infty h(s)\int_0^\infty h(s_1)\int_0^\infty h(s_2)\int_0^\infty h(s_3)\mathbb{E}\{Y(t-s-s_1) \\ &\quad \cdot Y(t-s-s_2)\dot{Y}(t-s-s_3)ds\}ds_3ds_2ds_1ds \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para calcular $\mathbb{E}\{X_1(t)\}$, hemos utilizado la siguientes propiedades:

- Se ha asumido que la entrada del proceso $Y(t)$ es diferenciable en media cuadrática.
- Se ha probado esta expresión denotando $u_1 = t-s-s_1$, $u_2 = t-s-s_2$ y $u_3 = t-s-s_3$. Entonces, se han aplicado las Proposiciones 1 y 2, considerando $n = 3$ para calcular la expresión (3.15),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{Y(t-s-s_1)Y(t-s-s_2)\dot{Y}(t-s-s_3)\right\} &= \mathbb{E}\left\{Y(u_1)Y(u_2)\dot{Y}(u_3)\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_3}\mathbb{E}\{Y(u_1)Y(u_2)Y(u_3)\} \quad (3.16) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, reemplazando las expresiones (3.14) y (3.15) en (3.13) se tiene:

$$\mathbb{E}\left\{\hat{X}(t)\right\} = \mathbb{E}\{X_0(t)\} + \epsilon\mathbb{E}\{X_1(t)\} = 0. \quad (3.17)$$

Para calcular el momento de segundo orden de $\hat{X}(t)$, se ha considerado despreciable el término ϵ^2 , como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\hat{X}^2(t)\right\} &= \mathbb{E}\{X_0^2(t)\} + 2\epsilon\mathbb{E}\{X_0(t)X_1(t)\} + \epsilon^2\mathbb{E}\{X_1^2(t)\}, \\ \mathbb{E}\left\{\hat{X}^2(t)\right\} &= \mathbb{E}\{X_0^2(t)\} + 2\epsilon\mathbb{E}\{X_0(t)X_1(t)\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para calcular el primer sumando de la expresión (3.18), es decir $\mathbb{E}\{X_0^2(t)\}$, se utilizará la expresión (3.9) y el teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X_0^2(t)\} &= \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1)\mathbb{E}\{Y(t-s)Y(t-s_1)\} ds_1 ds, \\ \mathbb{E}\{X_0^2(t)\} &= \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1)\Gamma_{YY}(s-s_1)ds_1 ds. \end{aligned} \quad (3.19)$$

En esta última expresión se ha considerado que $Y(t)$ es un proceso estacionario, así que:

$$\mathbb{E}\{Y(t-s)Y(t-s_1)\} = \Gamma_{YY}(t-s_1-(t-s)) = \Gamma_{YY}(s-s_1). \quad (3.20)$$

Seguidamente, calculamos el segundo sumando de (3.18), es decir $\mathbb{E}\{X_0(t)X_1(t)\}$. Para ello utilizamos las expresiones de $X_0(t)$, (3.9), y $X_1(t)$, (3.10),

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{X_0(t)X_1(t)\} &= \int_0^\infty h(s)\mathbb{E}\left\{X_0(t)\left[-X_0^2(t-s)\dot{X}_0(t-s)\right]\right\}ds \\
 &= \int_0^\infty h(s)\mathbb{E}\left\{-\int_0^\infty h(s_1)Y(t-s_1)ds_1\int_0^\infty h(s_2)Y(t-s-s_2)ds_2\right. \\
 &\quad \cdot \left.\int_0^\infty h(s_3)Y(t-s-s_3)ds_3\int_0^\infty h(s_4)\dot{Y}(t-s-s_4)ds_4\right\}ds \\
 &= -\int_0^\infty h(s)\int_0^\infty h(s_1)\int_0^\infty h(s_2)\int_0^\infty h(s_3)\int_0^\infty h(s_4)\mathbb{E}\{Y(t-s_1) \\
 &\quad \cdot Y(t-s-s_2)Y(t-s-s_3)\dot{Y}(t-s-s_4)\}ds_4ds_3ds_2ds_1ds \\
 &\stackrel{(I)}{=} -\int_0^\infty h(s)\int_0^\infty h(s_1)\int_0^\infty h(s_2)\int_0^\infty h(s_3)\int_0^\infty h(s_4)\left(\Gamma_{YY}(s_1-s-s_2)\right. \\
 &\quad \cdot \Gamma'_{YY}(s_3-s_4) + \Gamma_{YY}(s_1-s-s_3)\Gamma'_{YY}(s_2-s_4) \\
 &\quad \left. + \Gamma_{YY}(s_1-s-s_4)\Gamma'_{YY}(s_2-s_3)\right)ds_4ds_3ds_2ds_1ds \\
 &\stackrel{(II)}{=} -\int_0^\infty h(s)\int_0^\infty h(s_1)\int_0^\infty h(s_2)\int_0^\infty h(s_3)\int_0^\infty h(s_4)\left(2\Gamma_{YY}(s_1-s-s_2)\right. \\
 &\quad \cdot \Gamma'_{YY}(s_3-s_4) + \Gamma_{YY}(s_1-s-s_4)\Gamma'_{YY}(s_2-s_3)\left.)\right)ds_4ds_3ds_2ds_1ds.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

De la expresión anterior podemos observar que en el paso (I) se han aplicado las Proposiciones 2 y 1, respectivamente. Se ha denotado $u_1 = t - s_1$, $u_2 = t - s - s_2$, $u_3 = t - s - s_3$ y $u_4 = t - s - s_4$, entonces por la Proposición 2, con $n = 4$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left\{Y(t-s_1)Y(t-s-s_2)Y(t-s-s_3)\dot{Y}(t-s-s_4)\right\} &= \mathbb{E}\left\{Y(u_1)Y(u_2)Y(u_3)\dot{Y}(u_4)\right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial u_4}\mathbb{E}\{Y(u_1)Y(u_2)Y(u_3)Y(u_4)\},
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

y

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial u_4} \mathbb{E} \{Y(u_1)Y(u_2)Y(u_3)Y(u_4)\} &= \frac{\partial}{\partial u_4} (\mathbb{E} \{Y(u_1)Y(u_2)\} \mathbb{E} \{Y(u_3)Y(u_4)\}) \\
 &\quad + \mathbb{E} \{Y(u_1)Y(u_3)\} \mathbb{E} \{Y(u_2)Y(u_4)\} \\
 &\quad + \mathbb{E} \{Y(u_1)Y(u_4)\} \mathbb{E} \{Y(u_2)Y(u_3)\}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial u_4} (\Gamma_{YY}(u_2 - u_1)\Gamma_{YY}(u_4 - u_3) \\
 &\quad + \Gamma_{YY}(u_3 - u_1)\Gamma_{YY}(u_4 - u_2) \\
 &\quad + \Gamma_{YY}(u_4 - u_1)\Gamma_{YY}(u_3 - u_2)) \\
 &= \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_2)\Gamma'_{YY}(s_3 - s_4) \\
 &\quad + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_3)\Gamma'_{YY}(s_2 - s_4) \\
 &\quad + \Gamma'_{YY}(s_1 - s - s_4)\Gamma_{YY}(s_2 - s_3).
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Seguidamente, en el paso (II) se ha aprovechado la ventaja en la simetría de los índices. Entonces, sustituyendo (3.19) y (3.21) en (3.18) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \{ \hat{X}^2(t) \} &= \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \Gamma_{YY}(s - s_1) ds_1 ds \\
 &\quad - 2\epsilon \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \int_0^\infty h(s_3) \int_0^\infty h(s_4) \left(2\Gamma_{YY}(s_1 - s - s_2) \right. \\
 &\quad \cdot \Gamma'_{YY}(s_3 - s_4) + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_4)\Gamma'_{YY}(s_2 - s_3) \Big) ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Es importante notar que de la expresión anterior se obtiene que el valor $\mathbb{E} \{ \hat{X}^2(t) \}$ no depende de t . Esto es debido a que estamos trabajando con la solución en estado estacionario.

Por otro lado, como $\mathbb{E} \{ \hat{X}(t) \}$ es cero, entonces la varianza de la solución coincide con el momento de segundo orden $\mathbb{E} \{ \hat{X}^2(t) \}$, es decir:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V} \{ \hat{X}(t) \} &= \mathbb{E} \{ \hat{X}^2(t) \} - \left(\mathbb{E} \{ \hat{X}(t) \} \right)^2, \\
 \mathbb{V} \{ \hat{X}(t) \} &= \mathbb{E} \{ \hat{X}^2(t) \}.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Ahora, calculamos el momento de tercer orden de $\hat{X}(t)$ manteniendo el término de perturbación de primer orden ϵ . Por lo tanto, se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^3(t) \right\} = \mathbb{E} \left\{ X_0^3(t) \right\} + 3\epsilon \mathbb{E} \left\{ X_0^2(t) X_1(t) \right\}. \quad (3.26)$$

De la misma manera que en las expresiones anteriores calculamos $\mathbb{E} \left\{ X_0^3(t) \right\}$ y $\mathbb{E} \left\{ X_0^2(t) X_1(t) \right\}$, respectivamente.

Para calcular el primer sumando de la expresión (3.26), es decir $\mathbb{E} \left\{ X_0^3(t) \right\}$, se utilizará la Proposición 1,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ X_0^3(t) \right\} &= \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \mathbb{E} \left\{ Y(t-s) Y(t-s_1) Y(t-s_2) \right\} ds_2 ds_1 ds, \\ \mathbb{E} \left\{ X_0^3(t) \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para calcular el segundo sumando de (3.26), es decir $\mathbb{E} \left\{ X_0^2(t) X_1(t) \right\}$, utilizaremos las Proposiciones 1 y 2,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ X_0^2(t) X_1(t) \right\} &= \int_0^\infty h(s) \mathbb{E} \left\{ X_0^2(t) \left[-X_0^2(t-s) \dot{X}_0(t-s) \right] \right\} ds \\ &= - \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \int_0^\infty h(s_3) \int_0^\infty h(s_4) \int_0^\infty h(s_5) \\ &\quad \cdot \mathbb{E} \left\{ Y(t-s) Y(t-s_1) Y(t-s-s_3) Y(t-s-s_4) \right. \\ &\quad \left. \cdot \dot{Y}(t-s-s_5) \right\} ds_5 ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Seguidamente, de las ecuaciones (3.27) y (3.28) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^3(t) \right\} &= \mathbb{E} \left\{ X_0^3(t) \right\} + 3\epsilon \mathbb{E} \left\{ X_0^2(t) X_1(t) \right\}, \\ \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^3(t) \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Usando nuevamente la aproximación de primer orden de la perturbación ϵ , para el caso general se puede ver directamente que:

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^n(t) \right\} = 0, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.30)$$

Por otro lado, sabemos que:

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^n(t) \right\} = \mathbb{E} \left\{ X_0^n(t) \right\} + n\epsilon \mathbb{E} \left\{ X_0^{n-1}(t) X_1(t) \right\}. \quad (3.31)$$

Para el cálculo de la expresión general, por un lado, aplicamos en primer lugar el teorema de Fubini y la Proposición 3, y seguidamente la Proposición 1 para n impar, entonces, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ X_0^n(t) \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \left(\int_0^\infty h(s) Y(t-s) ds \right)^n \right\} \\ &= \int_0^\infty h(s_1) \cdots \int_0^\infty h(s_n) \mathbb{E} \left\{ Y(t-s_1) \cdots Y(t-s_1) \right\} ds_n \cdots ds_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Por otro lado, utilizando el mismo procedimiento que la expresión (3.28), se obtiene,

$$\mathbb{E} \left\{ X_0^{n-1}(t) X_1(t) \right\} = \int_0^\infty h(s) \mathbb{E} \left\{ X_0^{n-1}(t) \left[-X_0^2(t-s) \dot{X}_0(t-s) \right] \right\} ds = 0, \quad (3.33)$$

donde:

- Se ha aplicado la Proposición 2 para obtener la primera derivada de la esperanza.
- Se utilizado el hecho que $X_0^{n-1}(t)$, $X_0^2(t-s)$ y $\dot{X}_0(t-s)$, dependen de $n-1$, 2 y 1 términos de $Y(t)$, junto con la Proposición 1.

Para completar la información de los momentos estadísticos de la aproximación $\hat{X}(t)$, también determinamos $\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^4(t) \right\}$. El momento de cuarto orden de $\hat{X}(t)$, basado en la aproximación de primer orden mediante el método de perturbación, viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^4(t) \right\} = \mathbb{E} \left\{ X_0^4(t) \right\} + 4\epsilon \mathbb{E} \left\{ X_0^3(t) X_1(t) \right\}. \quad (3.34)$$

De manera similar a lo que hemos obtenido en la expresiones anteriores, obtenemos para el primer sumando lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ X_0^4(t) \right\} &= 3 \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \int_0^\infty h(s_3) \Gamma_{YY}(s-s_1) \\ &\quad \cdot \Gamma_{YY}(s_2-s_3) ds_3 ds_2 ds_1 ds. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Para el segundo sumando se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \{ X_0^3(t) X_1(t) \} &= - \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \int_0^\infty h(s_3) \int_0^\infty h(s_4) \int_0^\infty h(s_5) \\
 &\quad \cdot \int_0^\infty h(s_6) \mathbb{E} \{ Y(t-s_1) Y(t-s_2) Y(t-s_3) Y(t-s-s_4) \\
 &\quad \cdot Y(t-s-s_5) Y(t-s-s_6) \} ds_6 ds_5 ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds \\
 &= - \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \int_0^\infty h(s_3) \int_0^\infty h(s_4) \int_0^\infty h(s_5) \quad (3.36) \\
 &\quad \cdot \int_0^\infty h(s_6) \left[6\Gamma'_{YY}(s_5-s_6) \Gamma_{YY}(s_1-s_2) \Gamma'_{YY}(s_3-s-s_4) \right. \\
 &\quad + \Gamma'_{YY}(s_1-s-s_6) \left(2\Gamma_{YY}(s_2-s-s_4) \Gamma_{YY}(s_3-s-s_5) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \Gamma_{YY}(s_2-s_3) \Gamma_{YY}(s_4-s_5) \right) \right] ds_6 ds_5 ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds.
 \end{aligned}$$

Es importante mencionar que en el último paso de la expresión anterior, en primer lugar se ha aplicado la Proposición 2, y seguidamente la Proposición 1. De esta última proposición, sabemos que existen 15 combinaciones, pero podemos reducir la expresión por la simetría de los índices involucrados.

Una vez obtenidos los momentos estadísticos de $\hat{X}(t)$, ahora se realizará el cálculo de la aproximación de la función de correlación de $\hat{X}(t)$ a partir de (3.4), es decir, tomando la aproximación de primer orden de la expansión de la perturbación, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) &= \mathbb{E} \{ \hat{X}(t) \hat{X}(t+\tau) \}, \\
 \Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) &= \mathbb{E} \{ X_0(t) X_0(t+\tau) \} + \epsilon [\mathbb{E} \{ X_0(t) X_1(t+\tau) \} + \mathbb{E} \{ X_1(t) X_0(t+\tau) \}].
 \end{aligned} \quad (3.37)$$

El primer sumando de la expresión (3.37) corresponde a la función de correlación de $X_0(t)$. Esta expresión se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \{ X_0(t) X_0(t+\tau) \} &= \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \mathbb{E} \{ Y(t-s) Y(t+\tau-s_1) \} ds_1 ds \\
 &= \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \Gamma_{YY}(\tau-s_1+s) ds_1 ds.
 \end{aligned} \quad (3.38)$$

El segundo sumando de la expresión (3.37) corresponde a la función de correlación cruzada de $X_0(t)$ y $X_1(t)$. Estas expresiones pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X_0(t)X_1(t+\tau)\} &= \int_0^\infty h(s)\mathbb{E}\left\{X_0(t)\left[-X_0^2(t+\tau-s)\dot{X}_0(t+\tau-s)\right]\right\}ds \\ &= -\int_0^\infty h(s)\int_0^\infty h(s_1)\int_0^\infty h(s_2)\int_0^\infty h(s_3) \\ &\quad \cdot \int_0^\infty h(s_4)\left\{2\Gamma_{YY}(\tau-s-s_2+s_1)\Gamma'_{YY}(s_3-s_4)+\right. \\ &\quad \left.+\Gamma'_{YY}(\tau-s-s_4+s_1)\Gamma_{YY}(s_2-s_3)\right\}ds_4ds_3ds_2ds_1ds,\end{aligned}\tag{3.39}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X_1(t)X_0(t+\tau)\} &= \int_0^\infty h(s)\mathbb{E}\left\{\left[-X_0^2(t-s)\dot{X}_0(t-s)\right]X_0(t+\tau)\right\}ds \\ &= -\int_0^\infty h(s)\int_0^\infty h(s_1)\int_0^\infty h(s_2)\int_0^\infty h(s_3) \\ &\quad \cdot \int_0^\infty h(s_4)\left\{\Gamma_{YY}(s_1-s_2)\Gamma'_{YY}(\tau-s_4+s+s_3)+\right. \\ &\quad \left.+2\Gamma'_{YY}(s_1-s_3)\Gamma_{YY}(\tau-s_4+s+s_2)\right\}ds_4ds_3ds_2ds_1ds.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Entonces, la función de correlación de $\hat{X}(t)$ se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) &= \int_0^\infty h(s)\int_0^\infty h(s_1)\Gamma_{YY}(\tau-s_1+s)ds_1ds \\ &\quad - \epsilon \int_0^\infty h(s)\int_0^\infty h(s_1)\int_0^\infty h(s_2)\int_0^\infty h(s_3)\int_0^\infty h(s_4) \\ &\quad \cdot \left\{2\Gamma_{YY}(\tau-s-s_2+s_1)\Gamma'_{YY}(s_3-s_4)\right. \\ &\quad \left.+\Gamma'_{YY}(\tau-s-s_4+s_1)\Gamma_{YY}(s_2-s_3)+\right. \\ &\quad \left.+\Gamma_{YY}(s_1-s_2)\Gamma'_{YY}(\tau-s_4+s+s_3)+\right. \\ &\quad \left.+2\Gamma'_{YY}(s_1-s_3)\Gamma_{YY}(\tau-s_4+s+s_2)\right\}ds_4ds_3ds_2ds_1ds.\end{aligned}\tag{3.41}$$

Es importante mencionar que como $\mathbb{E}\{\hat{X}(t)\} = 0$, las funciones de covarianza y correlación de $\hat{X}(t)$ coinciden, y se expresan del siguiente modo:

$$\mathbb{C}\{\hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2)\} = \Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau), \quad \tau = |t_1 - t_2|.\tag{3.42}$$

3.2.2 Segundo Modelo

Para el segundo modelo se utilizarán las ecuaciones (3.2), (3.4), (3.8), (3.9), (3.11) y (3.12), respectivamente.

Para calcular la media de la aproximación $\hat{X}(t)$, utilizamos el operador esperanza en la ecuación (3.4),

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{X}(t) \right\} = \mathbb{E} \{X_0(t)\} + \epsilon \mathbb{E} \{X_1(t)\}. \quad (3.43)$$

Seguidamente, calcularemos $\mathbb{E} \{X_0(t)\}$ y $\mathbb{E} \{X_1(t)\}$ a partir de las ecuaciones de la representación de $X_0(t)$, (3.9), y $X_1(t)$, (3.11). Entonces para $\mathbb{E} \{X_0(t)\}$ se tiene,

$$\mathbb{E} \{X_0(t)\} = \mathbb{E} \left\{ \int_0^\infty h(s)Y(t-s)ds \right\} = \int_0^\infty h(s)\mathbb{E} \{Y(t-s)\}ds = 0, \quad (3.44)$$

donde para calcular $\mathbb{E} \{X_0(t)\}$, hemos utilizado la Proposición 3 y que $\mathbb{E} \{Y(t)\} = 0$.

El cálculo de $\mathbb{E} \{X_1(t)\}$ se realiza de manera similar al cálculo previamente obtenido. Asimismo, para este caso hemos considerado $m = 2$ para la expresión (3.11). Entonces, para $\mathbb{E} \{X_1(t)\}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{X_1(t)\} &= \mathbb{E} \left\{ -\omega_0^2 \int_0^\infty h(s)X_0(t-s)ds + \frac{\omega_0^2}{3!} \int_0^\infty h(s) (X_0(t-s))^3 ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_0^2}{5!} \int_0^\infty h(s) (X_0(t-s))^5 ds \right\} \\ &= -\omega_0^2 \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1)\mathbb{E} \{Y(t-s-s_1)\} ds_1 ds \\ &\quad + \frac{\omega_0^2}{3!} \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \int_0^\infty h(s_3) \\ &\quad \cdot \mathbb{E} \{Y(t-s-s_1)Y(t-s-s_2)Y(t-s-s_3)\} ds_3 ds_2 ds_1 ds \\ &\quad - \frac{\omega_0^2}{5!} \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \int_0^\infty h(s_3) \int_0^\infty h(s_4) \int_0^\infty h(s_5) \\ &\quad \cdot \mathbb{E} \{Y(t-s-s_1)Y(t-s-s_2)Y(t-s-s_3)Y(t-s-s_4) \\ &\quad \cdot Y(t-s-s_5)\} ds_5 ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Esto es debido a que se ha considerado $Y(t)$ como un proceso estocástico Gaussiano con media cero, es decir las siguientes expresiones se cumplen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{Y(t-s-s_1)Y(t-s-s_2)Y(t-s-s_3)Y(t-s-s_4) \cdot Y(t-s-s_5)\} &= 0, \\ \mathbb{E}\{Y(t-s-s_1)Y(t-s-s_2)Y(t-s-s_3)\} &= 0, \\ \mathbb{E}\{Y(t-s-s_1)\} &= 0.\end{aligned}\tag{3.46}$$

Entonces, reemplazando las expresiones (3.44) y (3.45) en (3.43) se tiene:

$$\mathbb{E}\{\hat{X}(t)\} = \mathbb{E}\{X_0(t)\} + \epsilon\mathbb{E}\{X_1(t)\} = 0.\tag{3.47}$$

Para calcular el momento de segundo orden de $\hat{X}(t)$, se ha considerado despreciable el término ϵ^2 , como se muestra a continuación:

$$\mathbb{E}\{\hat{X}^2(t)\} = \mathbb{E}\{X_0^2(t)\} + 2\epsilon\mathbb{E}\{X_0(t)X_1(t)\}.\tag{3.48}$$

Para calcular el primer sumando de la expresión (3.48), es decir $\mathbb{E}\{X_0^2(t)\}$, se utilizará la expresión (3.9) y el teorema de Fubini. Asimismo, el proceso $Y(t)$ se ha considerado estacionario, entonces, utilizaremos la expresión (3.20),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{X_0^2(t)\} &= \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1)\mathbb{E}\{Y(t-s)Y(t-s_1)\} ds_1 ds \\ \mathbb{E}\{X_0^2(t)\} &= \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1)\Gamma_{YY}(s-s_1) ds_1 ds.\end{aligned}\tag{3.49}$$

Seguidamente, calculamos el segundo sumando de (3.48), es decir $\mathbb{E}\{X_0(t)X_1(t)\}$, y para ello utilizaremos las expresiones de $X_0(t)$, (3.9), y $X_1(t)$, (3.11),

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{X_0(t)X_1(t)\} &= \mathbb{E}\left\{X_0(t)\left(-\omega_0^2\int_0^\infty h(s)X_0(t-s)ds + \frac{\omega_0^2}{3!}\int_0^\infty h(s)(X_0(t-s))^3 ds \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\omega_0^2}{5!}\int_0^\infty h(s)(X_0(t-s))^5 ds\right)\right\} \\
 &= \int_0^\infty h(s)\mathbb{E}\left\{X_0(t)\left(-\omega_0^2h(s)X_0(t-s)ds + \frac{\omega_0^2}{3!}(X_0(t-s))^3 ds \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\omega_0^2}{5!}h(s)(X_0(t-s))^5\right)\right\} ds \\
 &= -\omega_0^2\int_0^\infty h(s)\int_0^\infty h(s_1)\int_0^\infty h(s_2)\mathbb{E}\{Y(t-s_1)Y(t-s-s_2)\} ds_2 ds_1 ds \\
 &\quad + \frac{\omega_0^2}{3!}\int_0^\infty h(s)\int_0^\infty h(s_1)\int_0^\infty h(s_2)\int_0^\infty h(s_3)\int_0^\infty h(s_4) \\
 &\quad \cdot \mathbb{E}\{Y(t-s_1)Y(t-s-s_2)Y(t-s-s_3) \\
 &\quad \cdot Y(t-s-s_4)\} ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds \\
 &\quad - \frac{\omega_0^2}{5!}\int_0^\infty h(s)\int_0^\infty h(s_1)\int_0^\infty h(s_2)\int_0^\infty h(s_3)\int_0^\infty h(s_4) \\
 &\quad \cdot \int_0^\infty h(s_5)\int_0^\infty h(s_6)\mathbb{E}\{Y(t-s_1)Y(t-s-s_2)Y(t-s-s_3) \\
 &\quad \cdot Y(t-s-s_4)Y(t-s-s_5)Y(t-s-s_6)\} ds_6 ds_5 ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds.
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Para expresar las esperanzas de las expresiones anteriores en términos de la función de correlación $\Gamma_{YY}(\cdot)$, se aplicará que $Y(t)$ es estacionario.

Es por ello que, para calcular los momentos de orden superior de un vector normal multivariado de media cero, digamos por ejemplo (Y_1, \dots, Y_n) , en términos de su matriz de correlación, aplicaremos la simetría en los subíndices y el teorema de Isserlis-Wick [20], que se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}\{Y_1(t)\cdots Y_n(t)\} = \sum_{p \in P_n^2} \prod_{\{i,j\} \in p} \mathbb{E}\{Y_i Y_j\} = \sum_{p \in P_n^2} \prod_{\{i,j\} \in p} \Gamma(Y_i, Y_j), \tag{3.51}$$

donde:

- $\Gamma(Y_i, Y_j)$ representa la correlación del vector (Y_i, Y_j) .
- La expresión del sumatorio es las distintas formas de dividir el conjunto de índices

$\{1, 2, \dots, n\}$ en parejas $\{i, j\}$.

- El conjunto de estos pares se denota por P_n^2 , y el producto es sobre estos pares.

Para la primera expresión de la ecuación (3.50) se tiene:

$$\mathbb{E} \{Y(t - s_1)Y(t - s - s_2)\} = \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_2). \quad (3.52)$$

Para la segunda expresión de la ecuación (3.50), se ha considerando $u_1 = t - s_1$, $u_2 = t - s - s_2$, $u_3 = t - s - s_3$ y $u_4 = t - s - s_4$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \{Y(t - s_1)Y(t - s - s_2)Y(t - s - s_3)Y(t - s - s_4)\} \\ &= \mathbb{E} \{Y(u_1)Y(u_2)Y(u_3)Y(u_4)\} \\ &= \mathbb{E} \{Y(u_1)Y(u_2)\} \mathbb{E} \{Y(u_3)Y(u_4)\} + \mathbb{E} \{Y(u_1)Y(u_3)\} \mathbb{E} \{Y(u_2)Y(u_4)\} \\ & \quad + \mathbb{E} \{Y(u_1)Y(u_4)\} \mathbb{E} \{Y(u_2)Y(u_3)\} \\ &= \Gamma_{YY}(u_2 - u_1)\Gamma_{YY}(u_4 - u_3) + \Gamma_{YY}(u_3 - u_1)\Gamma_{YY}(u_4 - u_2) \\ & \quad + \Gamma_{YY}(u_4 - u_1)\Gamma_{YY}(u_3 - u_2) \\ &= \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_2)\Gamma_{YY}(s_3 - s_4) + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_3)\Gamma_{YY}(s_2 - s_4) \\ & \quad + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_4)\Gamma_{YY}(s_2 - s_3) \\ &= 3\Gamma_{YY}(s_1 - s - s_2)\Gamma_{YY}(s_3 - s_4). \end{aligned} \quad (3.53)$$

De la última expresión obtenida, hemos utilizado la simetría de los índices para simplificar esta expresión.

Para calcular la tercera expresión de la ecuación (3.50), se ha considerado el mismo procedimiento descrito anteriormente de la primera y segunda expresión, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \{Y(t - s_1)Y(t - s - s_2)Y(t - s - s_3)Y(t - s - s_4)Y(t - s - s_5)Y(t - s - s_6)\} \\ &= \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_2)\Gamma_{YY}(s_3 - s_4)\Gamma_{YY}(s_5 - s_6) + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_2)\Gamma_{YY}(s_3 - s_5)\Gamma_{YY}(s_4 - s_6) \\ & \quad + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_2)\Gamma_{YY}(s_3 - s_6)\Gamma_{YY}(s_4 - s_5) + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_3)\Gamma_{YY}(s_2 - s_4)\Gamma_{YY}(s_5 - s_6) \\ & \quad + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_3)\Gamma_{YY}(s_2 - s_5)\Gamma_{YY}(s_4 - s_6) + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_3)\Gamma_{YY}(s_2 - s_6)\Gamma_{YY}(s_4 - s_5) \\ & \quad + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_4)\Gamma_{YY}(s_2 - s_3)\Gamma_{YY}(s_5 - s_6) + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_4)\Gamma_{YY}(s_2 - s_5)\Gamma_{YY}(s_3 - s_6) \\ & \quad + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_4)\Gamma_{YY}(s_2 - s_6)\Gamma_{YY}(s_3 - s_5) + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_5)\Gamma_{YY}(s_2 - s_3)\Gamma_{YY}(s_4 - s_6) \\ & \quad + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_5)\Gamma_{YY}(s_2 - s_4)\Gamma_{YY}(s_3 - s_6) + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_5)\Gamma_{YY}(s_2 - s_6)\Gamma_{YY}(s_3 - s_4) \\ & \quad + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_6)\Gamma_{YY}(s_2 - s_3)\Gamma_{YY}(s_4 - s_5) + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_6)\Gamma_{YY}(s_2 - s_4)\Gamma_{YY}(s_3 - s_5) \\ & \quad + \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_6)\Gamma_{YY}(s_2 - s_5)\Gamma_{YY}(s_3 - s_4) \\ &= 15\Gamma_{YY}(s_1 - s - s_2)\Gamma_{YY}(s_3 - s_4)\Gamma_{YY}(s_5 - s_6). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Entonces, sustituyendo las expresiones (3.52), (3.53) y (3.54) en (3.50), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \{X_0(t)X_1(t)\} = & -\omega_0^2 \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_2) ds_2 ds_1 ds \\
 & + \frac{\omega_0^2}{2} \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \int_0^\infty h(s_3) \int_0^\infty h(s_4) \\
 & \cdot \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_2) \Gamma_{YY}(s_3 - s_4) ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds \\
 & - \frac{\omega_0^2}{8} \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \int_0^\infty h(s_3) \int_0^\infty h(s_4) \\
 & \cdot \int_0^\infty h(s_5) \int_0^\infty h(s_6) \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_2) \Gamma_{YY}(s_3 - s_4) \\
 & \cdot \Gamma_{YY}(s_5 - s_6) ds_6 ds_5 ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds.
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Es así que, sustituyendo las expresiones (3.49) y (3.55) en (3.48), obtenemos una aproximación explícita del momento de segundo orden para la aproximación $\hat{X}(t)$,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \{ \hat{X}^2(t) \} = & \mathbb{E} \{ X_0^2(t) \} + 2\epsilon \mathbb{E} \{ X_0(t)X_1(t) \}, \\
 \mathbb{E} \{ \hat{X}^2(t) \} = & \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \Gamma_{YY}(s - s_1) ds_1 ds \\
 & + 2\epsilon \left(-\omega_0^2 \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_2) ds_2 ds_1 ds \right. \\
 & + \frac{\omega_0^2}{2} \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \int_0^\infty h(s_3) \int_0^\infty h(s_4) \\
 & \cdot \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_2) \Gamma_{YY}(s_3 - s_4) ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds \\
 & - \frac{\omega_0^2}{8} \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \int_0^\infty h(s_3) \int_0^\infty h(s_4) \\
 & \cdot \int_0^\infty h(s_5) \int_0^\infty h(s_6) \Gamma_{YY}(s_1 - s - s_2) \Gamma_{YY}(s_3 - s_4) \\
 & \left. \cdot \Gamma_{YY}(s_5 - s_6) ds_6 ds_5 ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds \right).
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Ahora, calculamos el momento de tercer orden de $\hat{X}(t)$ manteniendo el término de perturbación de primer orden ϵ . Por lo tanto, se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^3(t) \right\} = \mathbb{E} \left\{ X_0^3(t) \right\} + 3\epsilon \mathbb{E} \left\{ X_0^2(t) X_1(t) \right\}. \quad (3.57)$$

De la misma manera que en las expresiones anteriores calculamos $\mathbb{E} \left\{ X_0^3(t) \right\}$ y $\mathbb{E} \left\{ X_0^2(t) X_1(t) \right\}$, respectivamente.

Para calcular el primer sumando de la expresión (3.57), es decir $\mathbb{E} \left\{ X_0^3(t) \right\}$, se utilizará la Proposición 1,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ X_0^3(t) \right\} &= \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \mathbb{E} \left\{ Y(t-s) Y(t-s_1) Y(t-s_2) \right\} ds_2 ds_1 ds, \\ \mathbb{E} \left\{ X_0^3(t) \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Para calcular el segundo sumando de (3.57), es decir $\mathbb{E} \left\{ X_0^2(t) X_1(t) \right\}$, utilizaremos las Proposiciones 1 y 2,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ X_0^2(t) X_1(t) \right\} &= \int_0^\infty h(s) \mathbb{E} \left\{ X_0^2(t) \left[-\omega_0^2 X_0(t-s) + \frac{\omega_0^2}{3!} (X_0(t)(t-s))^3 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega_0^2}{5!} (X_0(t)(t-s))^5 \right] \right\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Seguidamente, de las ecuaciones (3.58) y (3.59) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^3(t) \right\} &= \mathbb{E} \left\{ X_0^3(t) \right\} + 3\epsilon \mathbb{E} \left\{ X_0^2(t) X_1(t) \right\}, \\ \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^3(t) \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Como en el primer modelo, se puede demostrar directamente que los momentos estadísticos de orden impar son nulos, es decir,

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^{2n+1}(t) \right\} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.61)$$

Una vez obtenidos los momentos estadísticos de $\hat{X}(t)$, ahora se realizará el cálculo de la aproximación de la función de correlación de $\hat{X}(t)$ a partir de (3.4), es decir, tomando la aproximación de primer orden de la expansión de la perturbación, se obtiene:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) &= \mathbb{E} \left\{ \hat{X}(t)\hat{X}(t+\tau) \right\}, \\ \Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) &= \mathbb{E} \{ X_0(t)X_0(t+\tau) \} + \epsilon [\mathbb{E} \{ X_0(t)X_1(t+\tau) \} + \mathbb{E} \{ X_1(t)X_0(t+\tau) \}].\end{aligned}\quad (3.62)$$

El primer sumando de la expresión (3.62) corresponde a la función de correlación de $X_0(t)$. Esta expresión puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \{ X_0(t)X_0(t+\tau) \} &= \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \mathbb{E} \{ Y(t-s)Y(t+\tau-s_1) \} ds_1 ds \\ &= \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \Gamma_{YY}(\tau-s_1+s) ds_1 ds.\end{aligned}\quad (3.63)$$

El segundo sumando de la expresión (3.62) corresponde a la función de correlación cruzada de $X_0(t)$ y $X_1(t)$. Estas expresiones pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \{ X_0(t)X_1(t+\tau) \} &= \int_0^\infty h(s) \mathbb{E} \left\{ X_0(t) \left[-\omega_0^2 X_0(t+\tau-s) + \frac{\omega_0^2}{3!} (X_0(t)(t+\tau-s))^3 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega_0^2}{5!} (X_0(t)(t+\tau-s))^5 \right] \right\} \\ &= -\omega_0^2 \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \Gamma_{YY}(s_1+\tau-s-s_2) ds_2 ds_1 ds \\ &\quad + \frac{\omega_0^2}{2} \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \int_0^\infty h(s_3) \int_0^\infty h(s_4) \\ &\quad \cdot \Gamma_{YY}(s_1+\tau-s-s_2) \Gamma_{YY}(s_3-s_4) ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds \\ &\quad - \frac{\omega_0^2}{8} \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \int_0^\infty h(s_3) \int_0^\infty h(s_4) \\ &\quad \cdot \int_0^\infty h(s_5) \int_0^\infty h(s_6) \Gamma_{YY}(s_1+\tau-s-s_2) \Gamma_{YY}(s_3-s_4) \\ &\quad \cdot \Gamma_{YY}(s_5-s_6) ds_6 ds_5 ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds,\end{aligned}\quad (3.64)$$

y

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \{X_1(t)X_0(t + \tau)\} &= \int_0^\infty h(s)\mathbb{E} \left\{ X_0(t + \tau) \left[-\omega_0^2 X_0(t - s) + \frac{\omega_0^2}{3!} (X_0(t)(t - s))^3 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\omega_0^2}{5!} (X_0(t)(t - s))^5 \right] \right\} \\
 &= -\omega_0^2 \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \Gamma_{YY}(s_1 - \tau - s - s_2) ds_2 ds_1 ds \\
 &\quad + \frac{\omega_0^2}{2} \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \int_0^\infty h(s_3) \int_0^\infty h(s_4) \\
 &\quad \cdot \Gamma_{YY}(s_1 - \tau - s - s_2) \Gamma_{YY}(s_3 - s_4) ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds \\
 &\quad - \frac{\omega_0^2}{8} \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \int_0^\infty h(s_3) \int_0^\infty h(s_4) \\
 &\quad \cdot \int_0^\infty h(s_5) \int_0^\infty h(s_6) \Gamma_{YY}(s_1 - \tau - s - s_2) \Gamma_{YY}(s_3 - s_4) \\
 &\quad \cdot \Gamma_{YY}(s_5 - s_6) ds_6 ds_5 ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds.
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Entonces, la función de correlación de $\hat{X}(t)$ se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) &= \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \Gamma_{YY}(\tau - s_1 + s) ds_1 ds \\
 &\quad + \epsilon \left[\left(\omega_0^2 \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \left(\Gamma_{YY}(s_1 + \tau - s - s_2) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \Gamma_{YY}(s_1 - \tau - s - s_2) \right) ds_2 ds_1 ds \right) + \left(\frac{\omega_0^2}{2} \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \right. \\
 &\quad \cdot \int_0^\infty h(s_3) \int_0^\infty h(s_4) \left(\Gamma_{YY}(s_1 + \tau - s - s_2) + \Gamma_{YY}(s_1 - \tau - s - s_2) \right) \\
 &\quad \cdot \Gamma_{YY}(s_3 - s_4) ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds \right) + \left(-\frac{\omega_0^2}{8} \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty h(s_1) \int_0^\infty h(s_2) \right. \\
 &\quad \cdot \int_0^\infty h(s_3) \int_0^\infty h(s_4) \int_0^\infty h(s_5) \int_0^\infty h(s_6) \left(\Gamma_{YY}(s_1 + \tau - s - s_2) \right. \\
 &\quad \left. + \Gamma_{YY}(s_1 - \tau - s - s_2) \right) \Gamma_{YY}(s_3 - s_4) \\
 &\quad \left. \cdot \Gamma_{YY}(s_5 - s_6) ds_6 ds_5 ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds \right) \Big].
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Es importante mencionar que como $\mathbb{E}\{\hat{X}(t)\} = 0$, las funciones de covarianza y correlación de $\hat{X}(t)$ coinciden.

$$\mathbb{C}\{\hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2)\} = \Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau), \quad \tau = |t_1 - t_2|. \quad (3.67)$$

3.3 Principio de Máxima Entropía

En las secciones anteriores se han calculado las aproximaciones de los momentos $\mathbb{E}\{\hat{X}^n(t)\}$, para $n = 1, \dots, 5$, a partir de la aproximación de primer orden, es decir $\hat{X}(t)$; mediante el método de la perturbación de la solución del estado estacionario del oscilador aleatorio no lineal.

Aunque la información de las aproximaciones de los momentos es importante, un objetivo más ambicioso es el cálculo de la aproximación de la FDP, es decir $f_{\hat{X}(t)}(x)$. Esto es debido a que a partir de esta aproximación, se puede obtener:

- La información estocástica más importante como la media, la varianza y cualquier momento unidimensional.
- La probabilidad de que la salida se encuentre en un intervalo de interés específico, es decir $[a_1, a_2]$, para cualquier tiempo fijo arbitrario t ,

$$\mathbb{P}\{a_1 \leq \hat{X}(t) \leq a_2\} = \int_{a_1}^{a_2} f_{\hat{X}(t)}(x) dx. \quad (3.68)$$

- A partir de la FDP se pueden calcular fácilmente los intervalos de confianza en un nivel de confianza específico, como por ejemplo, $\alpha \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathbb{P}\left\{\mu_{\hat{X}}(t) - k\sigma_{\hat{X}}(t) \leq \hat{X}(t) \leq \mu_{\hat{X}}(t) + k\sigma_{\hat{X}}(t)\right\}, \\ 1 - \alpha &= \int_{\mu_{\hat{X}}(t) - k\sigma_{\hat{X}}(t)}^{\mu_{\hat{X}}(t) + k\sigma_{\hat{X}}(t)} f_{\hat{X}(t)}(x) dx, \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde:

- $\mu_{\hat{X}}(t) = \mathbb{E}\{\hat{X}(t)\} = 0$.
- $\sigma_{\hat{X}}(t) = \sqrt{\mathbb{V}\{\hat{X}(t)\}}$.
- α se toma por lo general como $\alpha = 0,05$, para construir los intervalos de confianza del 95 %.
- $k > 0$ es determinado numéricamente.

Una vez calculadas las aproximaciones de los momentos $\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^n(t) \right\}$, un método adecuado para aproximar la FDP es el Principio de Máxima Entropía (PME) [15].

- Para un t fijo, el PME busca una FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, que maximiza la llamada Entropía de Shannon, de una variable aleatoria $\hat{X}(t)$, en el intervalo $[a, b]$ definida a través del siguiente funcional:

$$\mathcal{S} \left\{ f_{\hat{X}(t)}(x) \right\} = - \int_a^b f_{\hat{X}(t)}(x) \log \left(f_{\hat{X}(t)}(x) \right) dx. \quad (3.70)$$

- La expresión anterior debe satisfacer las siguientes restricciones:

$$\int_a^b f_{\hat{X}(t)}(x) dx = 1, \quad (3.71)$$

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^n(t) \right\} = \int_a^b x^n f_{\hat{X}(t)}(x) dx = m_n \quad n = 1, \dots, M. \quad (3.72)$$

- La condición (3.71) garantiza que $f_{\hat{X}(t)}(x)$ es una FDP.
- La condición (3.72) impone que los M -momentos, m_n , coincidan con los momentos $\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^n(t) \right\}$ obtenidos por el método de perturbación estocástica.
- Para cada t fijo, la maximización del funcional (3.70), sujeto a las restricciones (3.71) y (3.72), se puede resolver a través de la función auxiliar de Lagrange:

$$\mathcal{L} \left\{ f_{\hat{X}(t)}, \lambda_0, \dots, \lambda_M \right\} = \mathcal{S} \left\{ f_{\hat{X}(t)}(x) \right\} + \sum_{i=0}^M \lambda_i \left[m_i - \int_a^b x^i f_{\hat{X}(t)}(x) dx \right], \quad (3.73)$$

donde $m_0 = 1$.

- Se puede probar que la expresión de la FDP está dada por:

$$f_{\hat{X}(t)}(x) = \mathbb{1}_{[a,b]} e^{-\sum_{i=0}^M \lambda_i x^i}, \quad (3.74)$$

donde:

- $\mathbb{1}_{[a,b]}$ denota la función característica en el intervalo $[a, b]$.
- λ_i , $i = 0, 1, \dots, M$ son los multiplicadores de Lagrange.

En conclusión, se ha mostrado la aproximación mediante la técnica de perturbación de los momentos de orden superior, es decir $\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^n(t) \right\}$, para $n = 1, \dots, 5$. Asimismo, se utilizará la técnica basada en el PME, tomando $M = 5$ y $M = 3$ para el primer y segundo modelo, para obtener los parámetros λ_i , $i = 0, 1, \dots, 5$, resolviendo numéricamente el sistema de ecuaciones no lineales formado por las expresiones (3.71) y (3.72).

Resultados Numéricos

En este capítulo, mostraremos los resultados numéricos obtenidos de los dos modelos propuestos con varios ejemplos que validan la metodología propuesta para la resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas. Para este propósito, se obtendrán los resultados de los siguientes análisis descritos anteriormente:

- Técnica de perturbación.
- Aproximación de los principales momentos estadísticos.
- Técnica del principio de máxima entropía (PME).

4.1 Primer Modelo

Para el primer modelo, consideraremos la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\ddot{X}(t) + 2\xi\omega_0\dot{X}(t) + \epsilon X^2(t)\dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = Y(t). \quad (4.1)$$

Entonces, se propondrán dos ejemplos como excitación de entrada para este primer modelo:

1. Un proceso estocástico trigonométrico.
2. Un proceso de ruido blanco Gaussiano.

Es importante mencionar que para este primer modelo, se utilizarán los siguientes datos para los parámetros del oscilador no lineal aleatorio, $\xi = 0.05$ ($\xi^2 < 1$) y $\omega_0 = 1$.

4.1.1 Proceso Estocástico Trigonométrico

Para este primer ejemplo, se considera como excitación de entrada $Y(t)$, el proceso estocástico trigonométrico definido por:

$$Y(t) = \xi_1 \cos(t) + \xi_2 \sin(t), \quad (4.2)$$

donde:

- ξ_1 y $\xi_2 \sim N(0, 1)$ son independientes.
- La excitación de entrada $Y(t)$ satisface las siguientes condiciones:
 - $\mathbb{E}\{Y(t)\} = 0$.
 - $Y(t)$ es Gaussiano.
 - $Y(t)$ es diferenciable en media cuadrática con respecto a t .
 - $Y(t)$ es estacionario.
 - La correlación de $Y(t)$ está dada por:
 - $\Gamma_{YY}(t_1, t_2) = \cos(t_1 - t_2)$.
 - $\Gamma_{YY}(\tau) = \cos(\tau)$.

Seguidamente, reemplazando los resultados mostrados previamente en la ecuación (4.1), se obtiene:

$$\ddot{X}(t) + 0.1\dot{X}(t) + \epsilon X^2(t)\dot{X}(t) + X(t) = \xi_1 \cos(t) + \xi_2 \sin(t), \quad \xi_1, \xi_2 \sim N(0, 1). \quad (4.3)$$

Entonces, obtendremos las aproximaciones de las principales funciones estadísticas de la solución aproximada, $\hat{X}(t)$, de un oscilador no lineal aleatorio, es decir:

- Aproximación de los primeros momentos $\mathbb{E}\{\hat{X}^i(t)\}$, para $i = 1, 2, \dots, 5$.
- La función de correlación $\Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau)$.
- La función de la varianza $\mathbb{V}\{\hat{X}(t)\}$.

A partir de los resultados teóricos obtenidos en el Capítulo 3, calcularemos los primeros momentos $\mathbb{E}\{\hat{X}^i(t)\}$, para $i = 1, 2, \dots, 5$.

Para el momento de primer orden se tiene:

$$\mathbb{E}\{\hat{X}(t)\} = 0. \quad (4.4)$$

Para el momento de segundo orden se tiene:

$$\mathbb{E}\{\hat{X}^2(t)\} = 100 - 200000\epsilon. \quad (4.5)$$

Es importante mencionar que de los momentos de primer y segundo orden, podemos decir que la función de la varianza es igual al momento de segundo orden, es decir:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\{\hat{X}(t)\} &= \mathbb{E}\{\hat{X}^2(t)\} - \left(\mathbb{E}\{\hat{X}(t)\}\right)^2, \\ \mathbb{V}\{\hat{X}(t)\} &= 100 - 200000\epsilon.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Para el momento de tercer orden se tiene:

$$\mathbb{E}\{\hat{X}^3(t)\} = 0.\tag{4.7}$$

Para el momento de cuarto orden se tiene:

$$\mathbb{E}\{\hat{X}^4(t)\} = 30000 - \frac{1153800000000}{6409}\epsilon.\tag{4.8}$$

Para el momento de quinto orden se tiene:

$$\mathbb{E}\{\hat{X}^5(t)\} = 0.\tag{4.9}$$

A partir de la positividad de los momentos de segundo y cuarto orden, podemos obtener un límite de variación para el parámetro de la perturbación ϵ , respectivamente,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\hat{X}^2(t)\} > 0 &\implies \epsilon < 0.000500000, \\ \mathbb{E}\{\hat{X}^4(t)\} > 0 &\implies \epsilon < 0.000166641.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Seguidamente, obtenemos la aproximación de la función de correlación:

$$\Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) = 100(1 - 2000\epsilon)\cos(\tau).\tag{4.11}$$

En la Figura 4.1, mostramos la representación gráfica de la función de correlación.

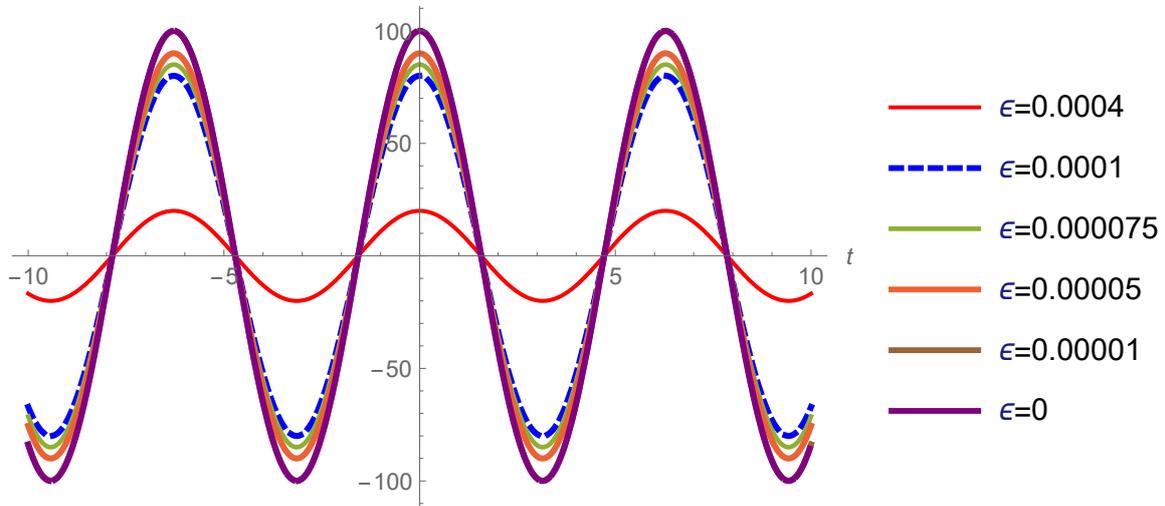


Figura 4.1: Función de correlación $\Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau)$ de \hat{X} para diferentes valores de ϵ . Modelo 1 con Proceso Estocástico Trigonométrico.

A partir de la Figura 4.1 se puede observar que:

- Cuanto menor es el valor del parámetro de perturbación ϵ , menor es la variabilidad de la función de correlación.
- Este comportamiento está de acuerdo con la interpretación física de la dinámica del oscilador, que puede ser expresado como:

$$\ddot{X}(t) + (0.1 + \epsilon X^2(t)) \dot{X}(t) + X(t) = \xi_1 \cos(t) + \xi_2 \sin(t). \quad (4.12)$$

- A medida que $\epsilon > 0$ aumenta, entonces, el coeficiente de amortiguamiento $0.1 + \epsilon X^2(t)$ también lo hace, por tanto, da como resultado que el sistema mecánico reduce sus oscilaciones.
- Como podemos ver de la Figura 4.1, para el valor del parámetro de perturbación $\epsilon = 0.0004$, únicamente satisface el primer límite de variación, es decir $\epsilon < 0.0005$. A pesar de ello, la función de correlación preserva la simetría.

Por otro lado, con los resultados obtenidos con la técnica de perturbación y la aproximación de los principales momentos estadísticos, se calculará la aproximación de la FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$.

Esta aproximación está basada en el PME, que toma el límite más restrictivo que ha sido obtenido previamente, es decir $\epsilon < 0.000166641$, con el objetivo de calcular tanto la aproximación de la FDP basada en los tres y cinco primeros momentos, respectivamente.

En primer lugar, para los tres primeros momentos se tiene la aproximación de la FDP expresada como:

$$f_{\hat{X}(t)}(x) = e^{-1-\lambda_0-\lambda_1x-\lambda_2x^2-\lambda_3x^3}, \quad (4.13)$$

donde λ_0 , λ_1 , λ_2 y λ_3 son determinadas numéricamente resolviendo el sistema dado por las expresiones (3.71) y (3.72) considerando:

- $m_0 = 1$.
- $m_1 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}(t) \right\} = 0$.
- $m_2 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\} = 100 - 200000\epsilon$.
- $m_3 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^3(t) \right\} = 0$.

Asimismo, el correspondiente dominio $[y_1, y_2]$ se obtiene a partir de la desigualdad de Bienaymé-Chebyshev [16, p. 47]. Este dominio es expresado como $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ que considera los siguientes parámetros:

- $\mu = 0$.
- $k = 10$.
- $\sigma = \sqrt{\mathbb{V} \left\{ \hat{X}(t) \right\}} = \sqrt{\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\}}$.

Es importante mencionar que con los parámetros descritos, se garantiza que el 99 % de la FDP está contenida en el intervalo $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$, independientemente de la distribución de la variable aleatoria [20].

En la Tabla 4.1, se muestran los valores de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ y λ_3 , el dominio correspondiente $[y_1, y_2]$, la media $(\mathbb{E} \{ \hat{X}(t) \})$ y la desviación estándar (σ) para los diferentes valores del parámetro de perturbación, es decir $\epsilon \in [0, 0.00001, 0.00005, 0.000075, 0.0001]$.

Tabla 4.1: Valores para $\lambda_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$, el dominio $[y_1, y_2]$ obtenido con el PME, para $\epsilon \in \{0, 0.00001, 0.00005, 0.000075, 0.0001\}$, con la media y desviación estándar (SD) para los primeros tres momentos. Modelo 1 con Proceso Estocástico Trigonómico.

	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.00001$	$\epsilon = 0.00005$	$\epsilon = 0.000075$	$\epsilon = 0.0001$
λ_0	2.22152	2.21142	2.16884	2.14026	2.10995
λ_1	0	0	0	0	0
λ_2	0.00500	0.00510	0.00555	0.00588	0.00625
λ_3	0	0	0	0	0
$[y_1, y_2]$	[-100, 100]	[-98.944, 98.944]	[-94.868, 94.868]	[-92.195, 92.195]	[-89.442, 89.442]
Media	0	0	0	0	0
σ (SD)	10	9.89949	9.48683	9.21954	8.94427

En la Figura 4.2, mostramos la representación gráfica de la FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los diferentes valores del parámetro ϵ .

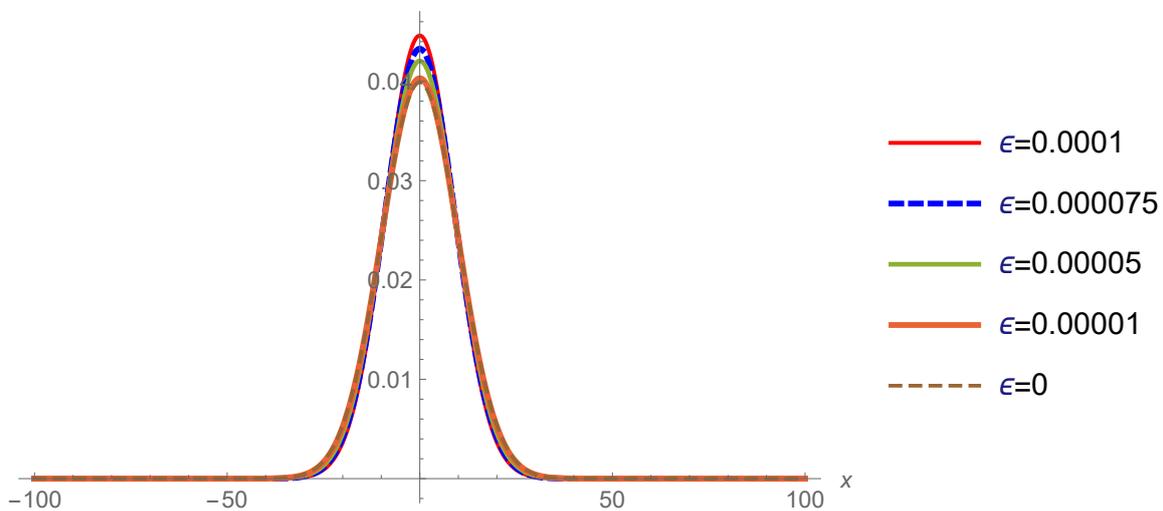


Figura 4.2: PDF, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los primeros tres momentos, tomando diferentes valores de ϵ . Modelo 1 con Proceso Estocástico Trigonómico.

En segundo lugar, para los cinco primeros momentos se tiene la aproximación de la FDP expresada como:

$$f_{\hat{X}(t)}(x) = e^{-1-\lambda_0-\lambda_1x-\lambda_2x^2-\lambda_3x^3-\lambda_4x^4-\lambda_5x^5}, \quad (4.14)$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ y λ_5 son determinadas numéricamente resolviendo el sistema dado por las expresiones (3.71) y (3.72) considerando:

- $m_0 = 1.$
- $m_1 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}(t) \right\} = 0.$
- $m_2 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\} = 100 - 200000\epsilon.$
- $m_3 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^3(t) \right\} = 0.$
- $m_4 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^4(t) \right\} = 30000 - \frac{1153800000000}{6409}\epsilon.$
- $m_5 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^5(t) \right\} = 0.$

Asimismo, el correspondiente dominio $[y_1, y_2]$ se obtiene a partir de la desigualdad de Bienaymé-Chebyshev [16, p. 47]. Este dominio es expresado como $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ que considera los siguientes parámetros:

- $\mu = 0.$
- $k = 10.$
- $\sigma = \sqrt{\mathbb{V} \left\{ \hat{X}(t) \right\}} = \sqrt{\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\}}.$

En la Tabla 4.2, se muestran los valores de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ y λ_5 , el dominio correspondiente $[y_1, y_2]$, la media $(\mathbb{E} \{ \hat{X}(t) \})$ y la desviación estándar (σ) para los diferentes valores del parámetro de perturbación, es decir $\epsilon \in [0, 0.00001, 0.00005, 0.000075, 0.0001]$.

Tabla 4.2: Valores para $\lambda_i, i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, el dominio $[y_1, y_2]$ obtenido con el PME, para $\epsilon \in \{0, 0.00001, 0.00005, 0.000075, 0.0001\}$, con la media y desviación estándar (SD) para los primeros cinco momentos. Modelo 1 con Proceso Estocástico Trigonómico.

	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.00001$	$\epsilon = 0.00005$	$\epsilon = 0.000075$	$\epsilon = 0.0001$
λ_0	2.22152	2.21990	2.24331	2.31551	2.53884
λ_1	0	0	0	0	0
λ_2	0.00500	0.00492	0.00378	0.00123	-0.00670
λ_3	0	0	0	0	0
λ_4	$-3.624 \cdot 10^{-13}$	$3.039 \cdot 10^{-7}$	$3.793 \cdot 10^{-6}$	$1.196 \cdot 10^{-5}$	$4.320 \cdot 10^{-5}$
λ_5	0	0	0	0	0
$[y_1, y_2]$	[-100, 100]	[-98.944, 98.944]	[-94.868, 94.868]	[-92.195, 92.195]	[-89.442, 89.442]
Media	0	0	0	0	0
σ (SD)	10	9.89949	9.48683	9.21954	8.94427

En la Figura 4.3, mostramos la representación gráfica de la FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los diferentes valores del parámetro ϵ .

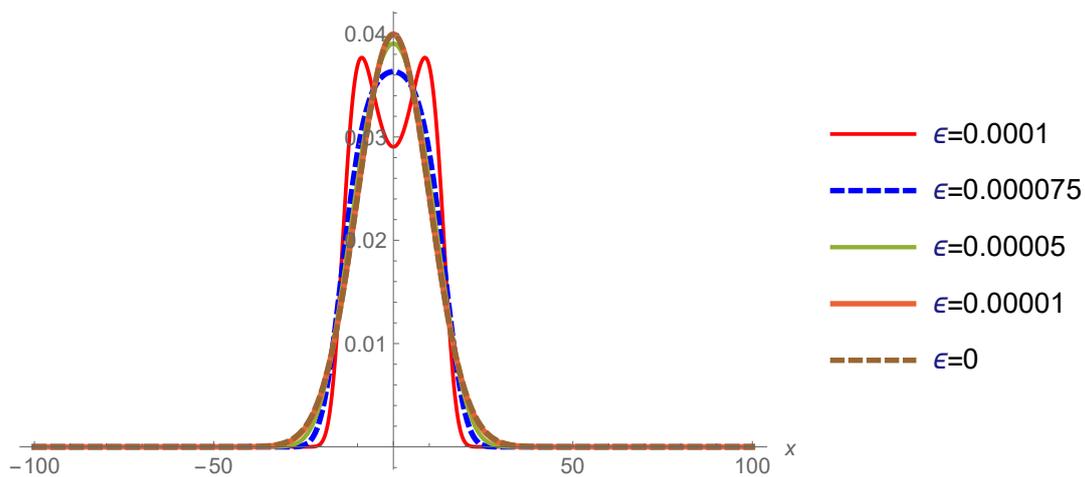


Figura 4.3: FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los primeros cinco momentos, tomando diferentes valores de ϵ . Modelo 1 con Proceso Estocástico Trigonómico.

Como podemos ver de la Figuras 4.2 y 4.3, la FDP no se aproxima para valores de $\epsilon > 0.00005$. Esto es debido a que la aproximación con los primeros cinco momentos es más restrictiva en comparación con los primeros tres momentos. Por lo tanto, tomaremos los valores de $\epsilon \leq 0.00005$.

A continuación, en las Figuras 4.4 y 4.5 mostramos la comparación entre las gráficas de la aproximación de la FDP para los momentos de tercer y quinto orden, tomando los valores de $\epsilon = 0.00005$ y $\epsilon = 0.000001$, respectivamente.

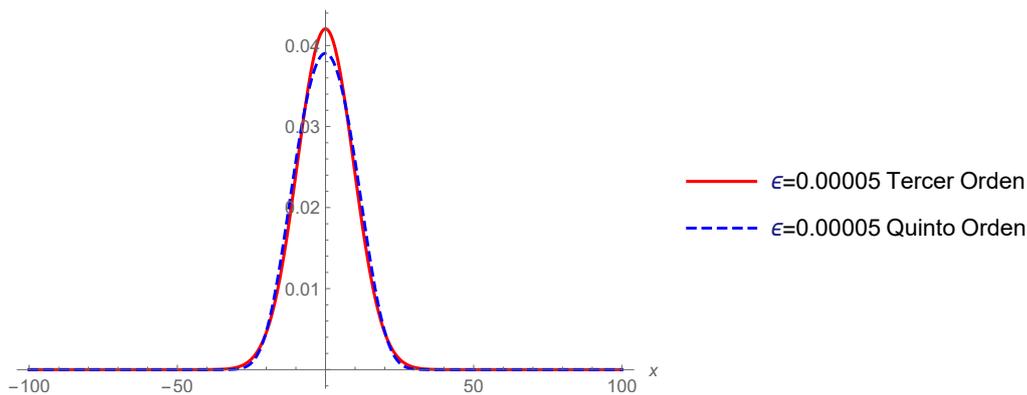


Figura 4.4: FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los primeros tres y cinco momentos, para el valor de $\epsilon = 0.00005$. Modelo 1 con Proceso Estocástico Trigonómico.

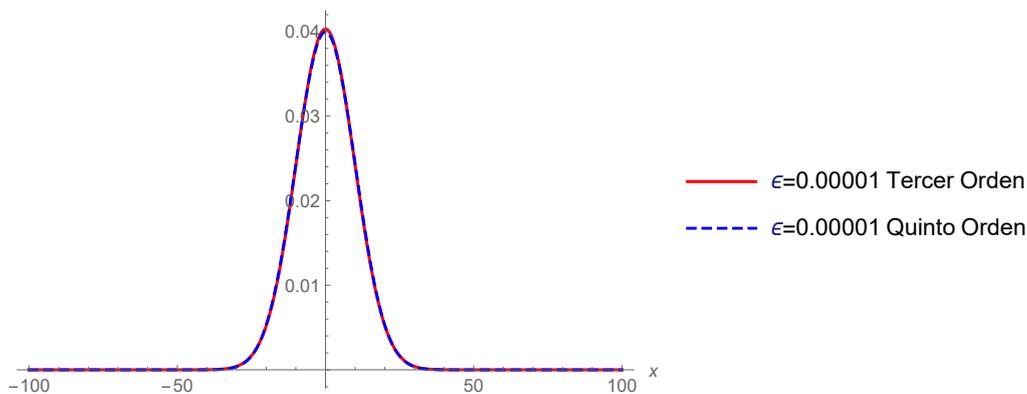


Figura 4.5: FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los primeros tres y cinco momentos, para el valor de $\epsilon = 0.000001$. Modelo 1 con Proceso Estocástico Trigonómico.

Como podemos ver de la Figura 4.4, para el valor de $\epsilon = 0.00005$ se muestra una pequeña diferencia entre ambas aproximaciones. Por el contrario, para la Figura 4.5 los resultados para ambas aproximaciones son bastante similares, lo que da evidencia de que los cálculos son consistentes.

4.1.2 Proceso Ruido Blanco Gaussiano

Para este segundo ejemplo, se considera como excitación de entrada $Y(t)$, el proceso estocástico de ruido blanco Gaussiano definido por:

$$Y(t) = \xi(t), \quad (4.15)$$

donde la excitación de entrada $Y(t)$ satisface:

- $\mathbb{E} \{Y(t)\} = 0$.
- $Y(t)$ es Gaussiano.
- $Y(t)$ es estacionario.
- $Y(t)$ no es diferenciable en media cuadrática con respecto a t .
- La correlación de $Y(t)$ está dada por:
 - $\Gamma_{YY}(\tau) = \frac{1}{2}W\delta(\tau)$.
 - La función $\delta(\tau)$ es la función delta de Dirac.
 - $W = \frac{1}{100}$.

Seguidamente, reemplazando los resultados mostrados previamente en la ecuación (4.1), se obtiene:

$$\ddot{X}(t) + 0.1\dot{X}(t) + \epsilon X^2(t)\dot{X}(t) + X(t) = \xi(t). \quad (4.16)$$

Asimismo, para este segundo ejemplo se ha tenido en cuenta las propiedades de la función delta de Dirac, con el objetivo de simplificar los cálculos realizados,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\delta(t-s)dt &= h(s), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\delta'(t-s)dt &= -h'(s). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Como en el Ejemplo 1, obtendremos las aproximaciones de las principales funciones estadísticas de la solución aproximada $\hat{X}(t)$ de un oscilador no lineal aleatorio.

Para el Ejemplo 2 del modelo 1, los momentos de ordenes 1 a 5 están dados por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left\{ \hat{X}(t) \right\} &= 0, \\
\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\} &= \frac{1}{40} - \frac{1}{160}\epsilon, \\
\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^3(t) \right\} &= 0, \\
\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^4(t) \right\} &= \frac{3}{1600} - \frac{3}{3200}\epsilon, \\
\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^5(t) \right\} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Es importante mencionar que de los momentos de primer y segundo orden, podemos decir que la función de la varianza es igual al momento de segundo orden, es decir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V} \left\{ \hat{X}(t) \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\} - \left(\mathbb{E} \left\{ \hat{X}(t) \right\} \right)^2, \\
\mathbb{V} \left\{ \hat{X}(t) \right\} &= \frac{1}{40} - \frac{1}{160}\epsilon.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

A partir de la positividad de los momentos de segundo y cuarto orden, podemos obtener un límite de variación para el parámetro de la perturbación ϵ , respectivamente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\} > 0 &\implies \epsilon < 4, \\
\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^4(t) \right\} > 0 &\implies \epsilon < 2.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Seguidamente, obtenemos la aproximación de la función de correlación:

$$\Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) = \begin{cases} f_1(\tau) & \text{si } \tau > 0, \\ f_2(\tau) & \text{si } \tau < 0, \\ \frac{1}{40} - \frac{1}{160}\epsilon & \text{si } \tau = 0, \end{cases} \tag{4.21}$$

donde:

$$f_1(\tau) = \frac{e^{-\tau/20}}{25472160} \left[-399(-1596 + (399 + 20\tau)\epsilon) \cos\left(\frac{\sqrt{399}\tau}{20}\right) + \sqrt{399}(1596 + \epsilon) \sin\left(\frac{\sqrt{399}\tau}{20}\right) \right], \quad (4.22)$$

$$f_2(\tau) = \frac{e^{\tau/20}}{25472160} \left[399(1596 + (-399 + 20\tau)\epsilon) \cos\left(\frac{\sqrt{399}\tau}{20}\right) - \sqrt{399}(1596 + \epsilon) \sin\left(\frac{\sqrt{399}\tau}{20}\right) \right]. \quad (4.23)$$

En la Figura 4.6, mostramos la representación gráfica de la función de correlación.

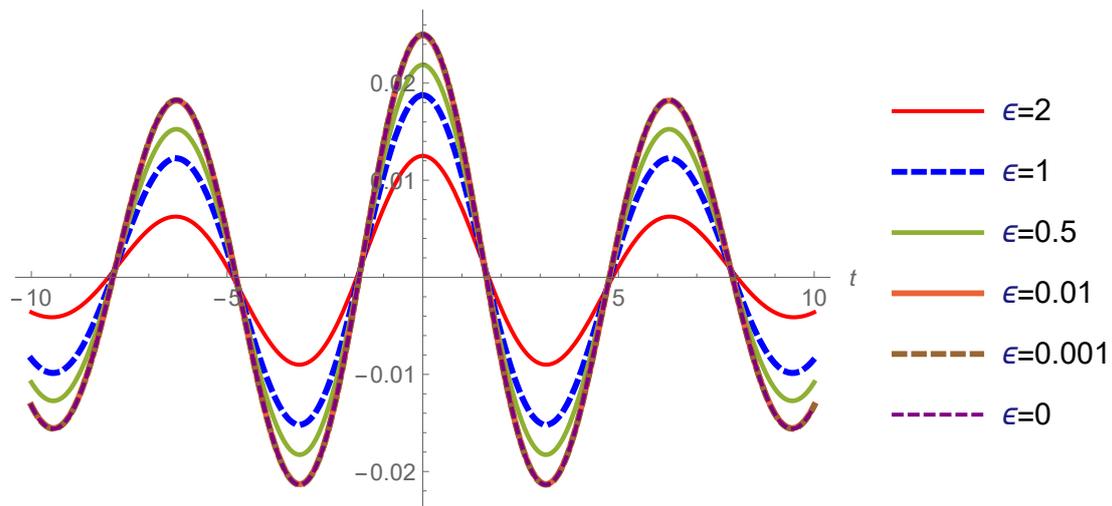


Figura 4.6: Función de correlación $\Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau)$ de \hat{X} para diferentes valores de ϵ . Modelo 1 con Proceso Ruido Blanco Gaussiano.

De la Figura 4.6 se puede observar que cuanto menor es el valor del parámetro de perturbación ϵ , menor es la variabilidad de la función de correlación. Este comportamiento está de acuerdo con la interpretación física de la dinámica del oscilador. Como podemos ver para el valor del parámetro de perturbación $\epsilon = 2$, se preserva la simetría de la función de correlación.

Por otro lado, con los resultados obtenidos con la técnica de perturbación y la aproximación de los principales momentos estadísticos, se calculará la aproximación de la FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$.

Esta aproximación está basada en el PME, que toma el límite más restrictivo que ha sido obtenido previamente, es decir $\epsilon < 2$, con el objetivo de calcular tanto la aproximación de la FDP basada en los tres y cinco primeros momentos, respectivamente.

En primer lugar, para los tres primeros momentos se tiene la aproximación de la FDP expresada como:

$$f_{\hat{X}(t)}(x) = e^{-1-\lambda_0-\lambda_1x-\lambda_2x^2-\lambda_3x^3}, \quad (4.24)$$

donde λ_0 , λ_1 , λ_2 y λ_3 son determinadas numéricamente resolviendo el sistema dado por las expresiones (3.71) y (3.72) considerando:

- $m_0 = 1$.
- $m_1 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}(t) \right\} = 0$.
- $m_2 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\} = \frac{1}{40} - \frac{1}{160}\epsilon$.
- $m_3 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^3(t) \right\} = 0$.

Asimismo, el correspondiente dominio $[y_1, y_2]$ se obtiene a partir de la desigualdad de Bienaymé-Chebyshev [16, p. 47]. Este dominio es expresado como $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ que considera los siguientes parámetros:

- $\mu = 0$.
- $k = 10$.
- $\sigma = \sqrt{\mathbb{V} \left\{ \hat{X}(t) \right\}} = \sqrt{\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\}}$.

En la Tabla 4.3, se muestran los valores de λ_0 , λ_1 , λ_2 y λ_3 , el dominio correspondiente $[y_1, y_2]$, la media $(\mathbb{E} \{ \hat{X}(t) \})$ y la desviación estándar (σ) para los diferentes valores del parámetro de perturbación, es decir $\epsilon \in [0, 0.01, 0.5, 1]$.

Tabla 4.3: Valores para λ_i , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, el dominio $[y_1, y_2]$ obtenido con el PME, para $\epsilon \in \{0, 0.01, 0.5, 1\}$, con la media y desviación estándar (SD) para los primeros tres momentos. Modelo 1 con Proceso Ruido Blanco Gaussiano.

	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.01$	$\epsilon = 0.5$	$\epsilon = 1$
λ_0	-1.92550	-1.92675	-1.99227	-2.06934
λ_1	0	0	0	0
λ_2	20	20.05012	22.85714	26.66666
λ_3	0	0	0	0
$[y_1, y_2]$	[-1.581, 1.581]	[-1.579, 1.579]	[-1.479, 1.479]	[-1.369, 1.369]
Media	0	0	0	0
σ (SD)	0.15811	0.15791	0.14790	0.13693

En la Figura 4.7, mostramos la representación gráfica de la FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los diferentes valores del parámetro ϵ .

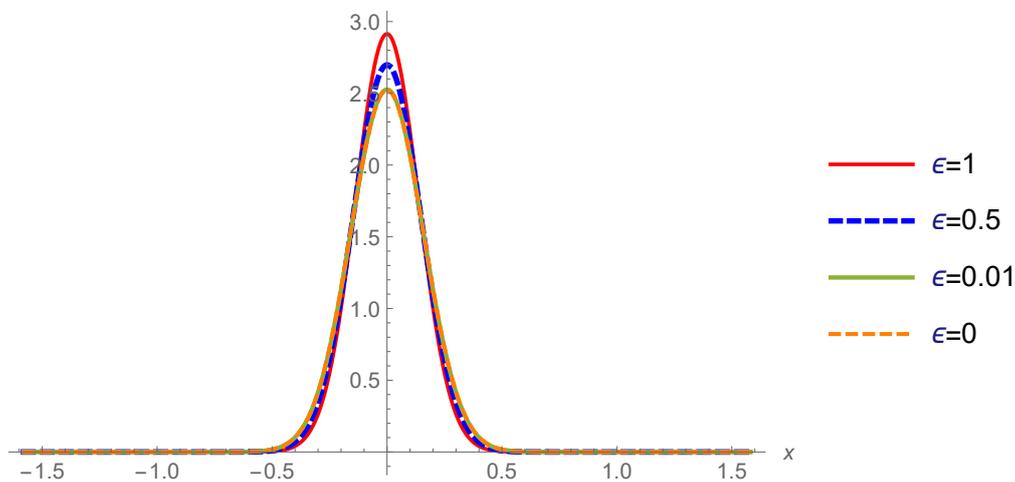


Figura 4.7: FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los primeros tres momentos, tomando diferentes valores de ϵ . Modelo 1 con Proceso Ruido Blanco Gaussiano.

En segundo lugar, para los cinco primeros momentos se tiene la aproximación de la FDP expresada como:

$$f_{\hat{X}(t)}(x) = e^{-1-\lambda_0-\lambda_1x-\lambda_2x^2-\lambda_3x^3-\lambda_4x^4-\lambda_5x^5}, \quad (4.25)$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ y λ_5 son determinadas numéricamente resolviendo el sistema dado por las expresiones (3.71) y (3.72) considerando:

- $m_0 = 1.$
- $m_1 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}(t) \right\} = 0.$
- $m_2 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\} = \frac{1}{40} - \frac{1}{160}\epsilon.$
- $m_3 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^3(t) \right\} = 0.$
- $m_4 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^4(t) \right\} = \frac{3}{1600} - \frac{3}{3200}\epsilon.$
- $m_5 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^5(t) \right\} = 0.$

Asimismo, el correspondiente dominio $[y_1, y_2]$ se obtiene a partir de la desigualdad de Bienaymé-Chebyshev [16, p. 47]. Este dominio es expresado como $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ que considera los siguientes parámetros:

- $\mu = 0.$
- $k = 10.$
- $\sigma = \sqrt{\mathbb{V} \left\{ \hat{X}(t) \right\}} = \sqrt{\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\}}.$

En la Tabla 4.4, se muestran los valores de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ y λ_5 , el dominio correspondiente $[y_1, y_2]$, la media $(\mathbb{E} \{ \hat{X}(t) \})$ y la desviación estándar (σ) para los diferentes valores del parámetro de perturbación, es decir $\epsilon \in [0, 0.01, 0.5, 1]$.

Tabla 4.4: Valores para $\lambda_i, i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, el dominio $[y_1, y_2]$ obtenido con el PME, para $\epsilon \in \{0, 0.01, 0.5, 1\}$, con la media y desviación estándar (SD) para los primeros cinco momentos. Modelo 1 con Proceso Ruido Blanco Gaussiano.

	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.01$	$\epsilon = 0.5$	$\epsilon = 1$
λ_0	-1.92550	-1.92675	-1.98414	-2.01243
λ_1	0	0	0	0
λ_2	20.00000	20.04993	22.10664	20.25302
λ_3	0	0	0	0
λ_4	$1.740 \cdot 10^{-9}$	$1.262 \cdot 10^{-3}$	5.83722	64.13645
λ_5	0	0	0	0
$[y_1, y_2]$	[-1.581, 1.581]	[-1.579, 1.579]	[-1.479, 1.479]	[-1.369, 1.369]
Media	0	0	0	0
σ (SD)	0.15811	0.15791	0.14790	0.13693

En la Figura 4.8, mostramos la representación gráfica de la FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los diferentes valores del parámetro ϵ .

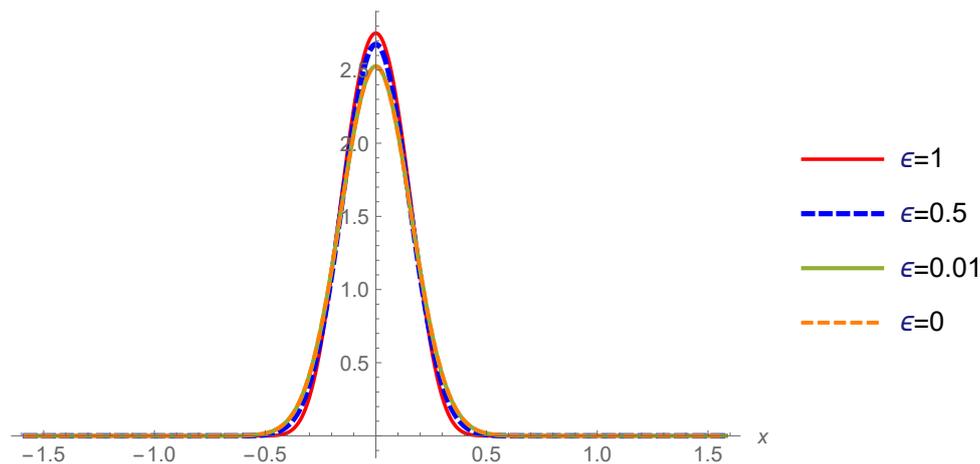


Figura 4.8: FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los primeros cinco momentos, tomando diferentes valores de ϵ . Modelo 1 con Proceso Ruido Blanco Gaussiano.

Como podemos ver de la Figuras 4.7 y 4.8, la FDP no se aproxima para valores de $\epsilon > 0.5$. Esto es debido a que esta aproximación con los primeros cinco momentos, es más restrictiva en comparación con los primeros tres momentos. Por lo tanto, tomaremos los valores de $\epsilon \leq 0.5$.

A continuación, en las Figuras 4.9, 4.10 y 4.11 mostramos la comparación entre las gráficas de la aproximación de la FDP para los momentos de tercer y quinto orden, tomando los valores de $\epsilon = 1$, $\epsilon = 0.5$ y $\epsilon = 0.01$, respectivamente.

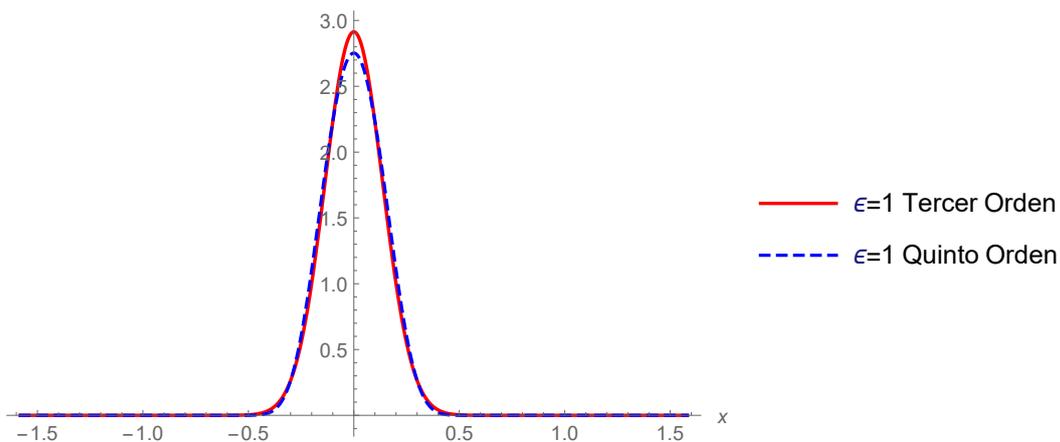


Figura 4.9: FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los primeros tres y cinco momentos, para el valor de $\epsilon = 1$. Modelo 1 con Proceso Ruido Blanco Gaussiano.

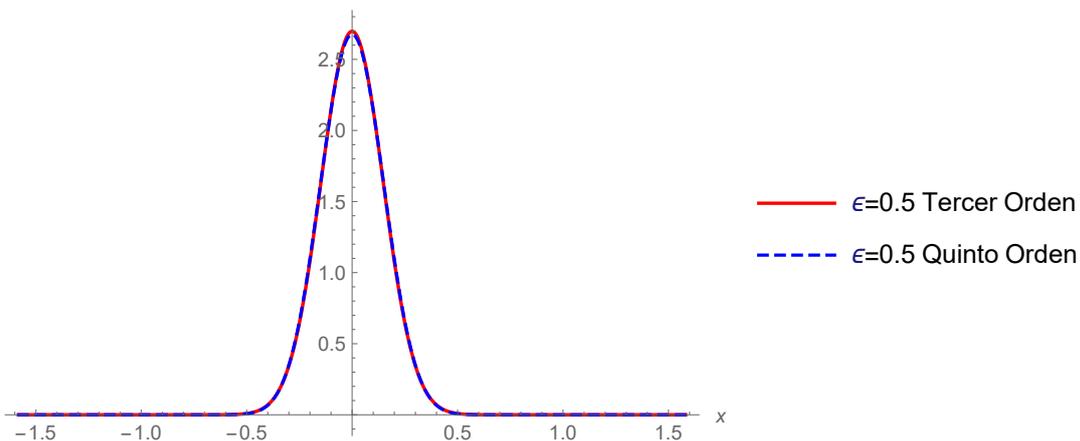


Figura 4.10: FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los primeros tres y cinco momentos, para el valor de $\epsilon = 0.5$. Modelo 1 con Proceso Ruido Blanco Gaussiano.

Como podemos ver de la Figura 4.9, para el valor de $\epsilon = 1$ se muestra una pequeña diferencia entre ambas aproximaciones.

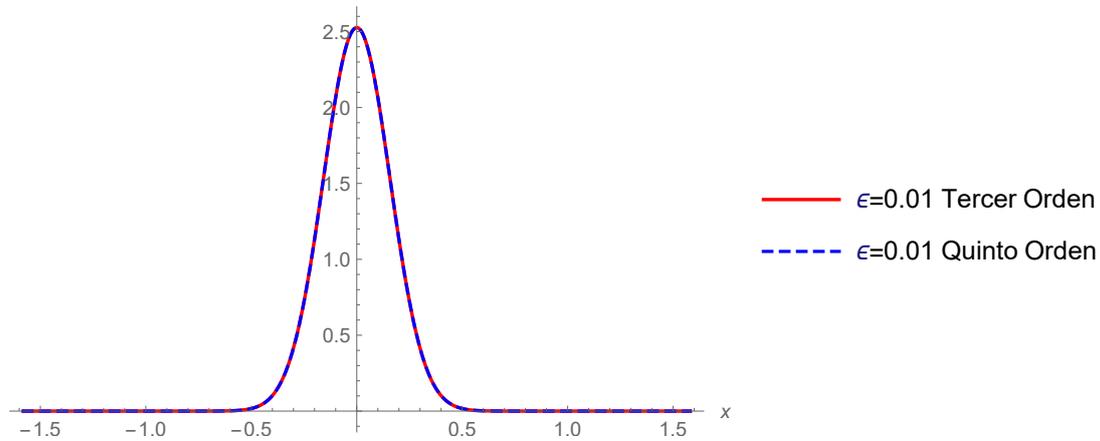


Figura 4.11: FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los primeros cinco momentos, para el valor de $\epsilon = 0.01$. Modelo 1 con Proceso Ruido Blanco Gaussiano.

Como podemos ver de las Figuras 4.10 y 4.11, para los valores del parámetro $\epsilon = 0.5$ y para $\epsilon = 0.01$, los resultados para ambas aproximaciones son bastante similares, lo que da evidencia de que los cálculos son consistentes.

En conclusión, se han validado los resultados numéricos para obtener la aproximación de la FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, mediante la técnica de perturbación, aproximación de los primeros momentos y el PME.

Finalmente, se ha comprobado que la diferencia entre las aproximaciones entre los tres y cinco primeros momentos para calcular, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, es muy pequeña para un valor del parámetro de perturbación ϵ adecuado. Por este motivo, para los siguientes ejemplos sólo consideraremos los primeros tres momentos, para realizar las aproximaciones de la FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$.

4.2 Segundo Modelo

Para el segundo modelo, consideraremos la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\ddot{X}(t) + 2\xi\omega_0\dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) + \omega_0^2 \epsilon \sin(X(t)) = Y(t). \quad (4.26)$$

Entonces, se propondrá dos ejemplos como excitación de entrada para este segundo modelo:

1. Un proceso de ruido blanco Gaussiano.
2. Un proceso estocástico de Ornstein-Uhlenbeck.

4.2.1 Proceso Ruido Blanco Gaussiano

Para este primer ejemplo, se considera como excitación de entrada $Y(t)$, el proceso estocástico de ruido blanco Gaussiano definido por:

$$Y(t) = \xi(t), \quad (4.27)$$

donde la excitación de entrada $Y(t)$ satisface:

- $\mathbb{E}\{Y(t)\} = 0$.
- $Y(t)$ es Gaussiano.
- $Y(t)$ es estacionario.
- La correlación de $Y(t)$ está dada por:
 - $\Gamma_{YY}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$.
 - La función $\delta(\tau)$ es la función delta de Dirac.
 - $N_0 = \frac{1}{100}$.

Es importante mencionar que para el primer ejemplo de este modelo se utilizarán los siguientes datos para los parámetros del oscilador no lineal aleatorio, $\xi = 0.05$ ($\xi^2 < 1$) y $\omega_0 = 1$.

Seguidamente, reemplazando los resultados mostrados previamente en la ecuación (4.26), se obtiene:

$$\ddot{X}(t) + 0.1\dot{X}(t) + X(t) + \epsilon \sin(X(t)) = \xi(t). \quad (4.28)$$

Como en los ejemplos anteriores, obtendremos las aproximaciones de las principales funciones estadísticas de la solución aproximada, $\hat{X}(t)$, de un oscilador no lineal aleatorio, para este ejemplo nuevamente utilizaremos las propiedades de la función delta de Dirac dados en la ecuación (4.17).

Para el Ejemplo 1 del modelo 2, los momentos de ordenes 1 a 3 están dados por:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\hat{X}(t)\} &= 0, \\ \mathbb{E}\{\hat{X}^2(t)\} &= \frac{1}{40} - \frac{12641}{512000}\epsilon, \\ \mathbb{E}\{\hat{X}^3(t)\} &= 0.\end{aligned}\tag{4.29}$$

Es importante mencionar que de los momentos de primer y segundo orden, podemos decir que la función de la varianza es igual al momento de segundo orden, es decir:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\{\hat{X}(t)\} &= \mathbb{E}\{\hat{X}^2(t)\} - \left(\mathbb{E}\{\hat{X}(t)\}\right)^2, \\ \mathbb{V}\{\hat{X}(t)\} &= \frac{1}{40} - \frac{12641}{512000}\epsilon.\end{aligned}\tag{4.30}$$

De la positividad del momento de segundo orden, podemos obtener un límite en el parámetro de la perturbación ϵ ,

$$\mathbb{E}\{\hat{X}^2(t)\} \implies \epsilon < 1.01258.\tag{4.31}$$

Seguidamente, obtenemos la aproximación de la función de correlación:

$$\Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) = \begin{cases} f_1(\tau) & \text{si } \tau > 0, \\ f_2(\tau) & \text{si } \tau < 0, \\ \frac{1}{40} - \frac{12641}{512000}\epsilon & \text{si } \tau = 0, \end{cases}\tag{4.32}$$

donde:

$$f_1(\tau) = \frac{e^{-\tau/20}}{81510912000} \left[399(5107200 + 12641\epsilon(-399 + 10\tau)) \cos\left(\frac{\sqrt{399}\tau}{20}\right) + \sqrt{399}(5107200 - 12641\epsilon(599 + 3990\tau)) \sin\left(\frac{\sqrt{399}\tau}{20}\right) \right], \quad (4.33)$$

$$f_2(\tau) = -\frac{e^{-\tau/20}}{81510912000} \left[399(-5107200 + 12641\epsilon(399 + 10\tau)) \cos\left(\frac{\sqrt{399}\tau}{20}\right) + \sqrt{399}(5107200 + 12641\epsilon(-599 + 3990\tau)) \sin\left(\frac{\sqrt{399}\tau}{20}\right) \right]. \quad (4.34)$$

En la Figura 4.12, mostramos la representación gráfica de la función de correlación.

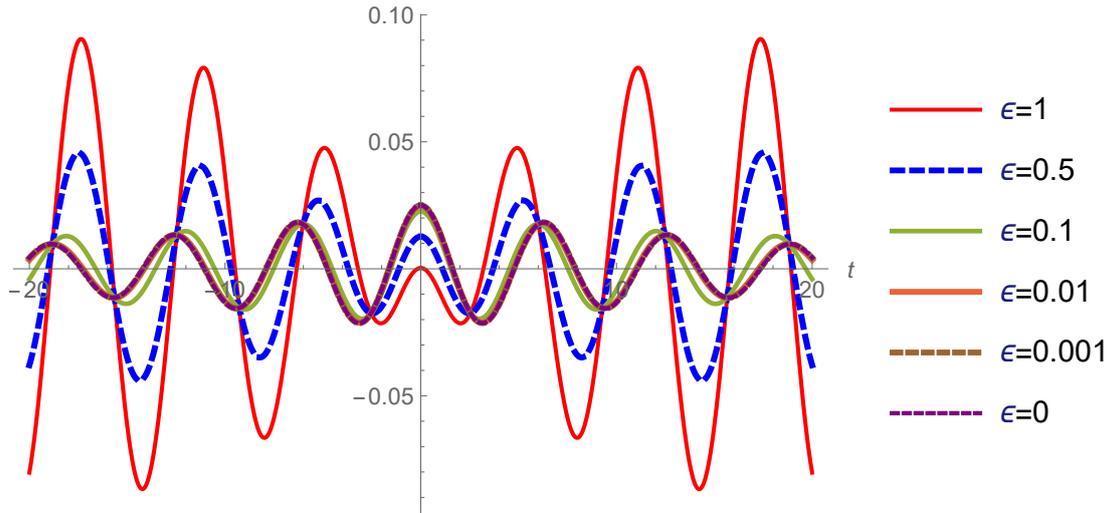


Figura 4.12: Función de correlación $\Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau)$ de \hat{X} para diferentes valores de ϵ . Modelo 2 con Proceso Ruido Blanco Gaussiano.

De la Figura 4.12 se puede observar que cuanto menor es el valor del parámetro de perturbación ϵ , menor es la variabilidad de la función de correlación. Este comportamiento está de acuerdo con la interpretación física de la dinámica del oscilador. Como podemos ver para el valor del parámetro de perturbación $\epsilon = 1$, se preserva la simetría de la función de correlación.

En la Figura 4.13, mostramos la representación gráfica de la función de correlación, con valores del parámetro de perturbación $\epsilon \leq 0.1$. Como podemos ver claramente la función de correlación para $\epsilon = 0$, $\epsilon = 0.001$ y $\epsilon = 0.01$ son muy similares.

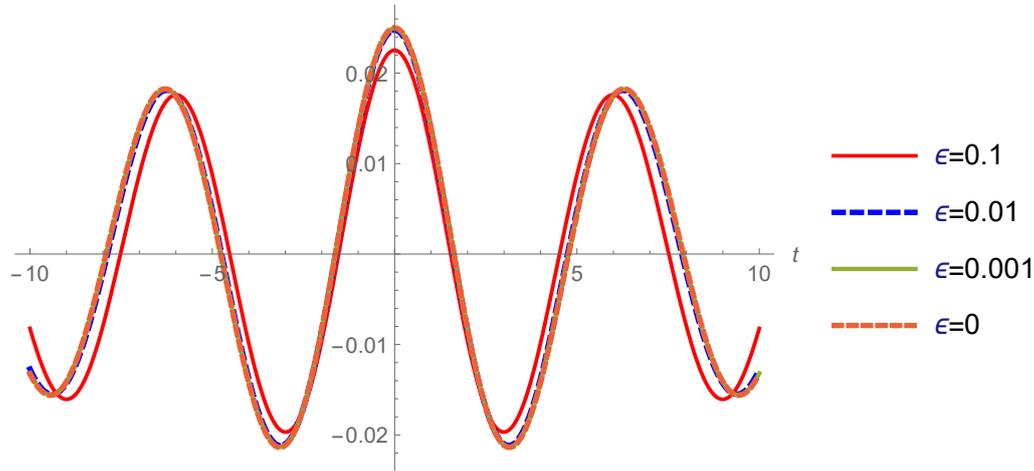


Figura 4.13: Función de correlación $\Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau)$ de \hat{X} para valores de $\epsilon = \{0, 0.001, 0.01, 0.1\}$. Modelo 2 con Proceso Ruido Blanco Gaussiano.

A partir de la técnica de perturbación y la aproximación de los principales momentos estadísticos, se calculará la aproximación de la FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$. Entonces, para los tres primeros momentos se tiene la aproximación de la FDP expresada como:

$$f_{\hat{X}(t)}(x) = e^{-1-\lambda_0-\lambda_1x-\lambda_2x^2-\lambda_3x^3}, \quad (4.35)$$

donde λ_0 , λ_1 , λ_2 y λ_3 son determinadas numéricamente resolviendo el sistema dado por las expresiones (3.71) y (3.72) considerando:

- $m_0 = 1$.
- $m_1 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}(t) \right\} = 0$.
- $m_2 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\} = \frac{1}{40} - \frac{12641}{512000} \epsilon$.
- $m_3 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^3(t) \right\} = 0$.

Asimismo, el correspondiente dominio $[y_1, y_2]$ se obtiene a partir de la desigualdad de Bienaymé-Chebyshev [16, p. 47]. Este dominio es expresado como $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ que considera los siguientes parámetros:

- $\mu = 0$.
- $k = 10$.
- $\sigma = \sqrt{\mathbb{V} \left\{ \hat{X}(t) \right\}} = \sqrt{\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\}}$.

En la Tabla 4.5, se muestran los valores de λ_0 , λ_1 , λ_2 y λ_3 , el dominio correspondiente $[y_1, y_2]$, la media $(\mathbb{E}\{\hat{X}(t)\})$ y la desviación estándar (σ) para los diferentes valores del parámetro de perturbación, es decir $\epsilon \in [0, 0.01, 0.1, 0.5]$.

Tabla 4.5: Valores para λ_i , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, el dominio $[y_1, y_2]$ obtenido con el PME, para $\epsilon \in \{0, 0.01, 0.1, 0.5\}$, con la media y desviación estándar (SD) para los primeros tres momentos. Modelo 2 con Proceso Ruido Blanco Gaussiano.

	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.01$	$\epsilon = 0.1$	$\epsilon = 0.5$
λ_0	-1.92550	-1.93046	-1.97749	-2.26590
λ_1	0	0	0	0
λ_2	20.00000	20.19948	22.19159	39.50922
λ_3	0	0	0	0
$[y_1, y_2]$	[-1.581, 1.581]	[-1.573, 1.573]	[-1.501, 1.501]	[-1.124, 1.124]
Media	0	0	0	0
σ (SD)	0.15811	0.15733	0.15010	0.11249

En la Figura 4.14, mostramos la representación gráfica de la FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los diferentes valores del parámetro ϵ .

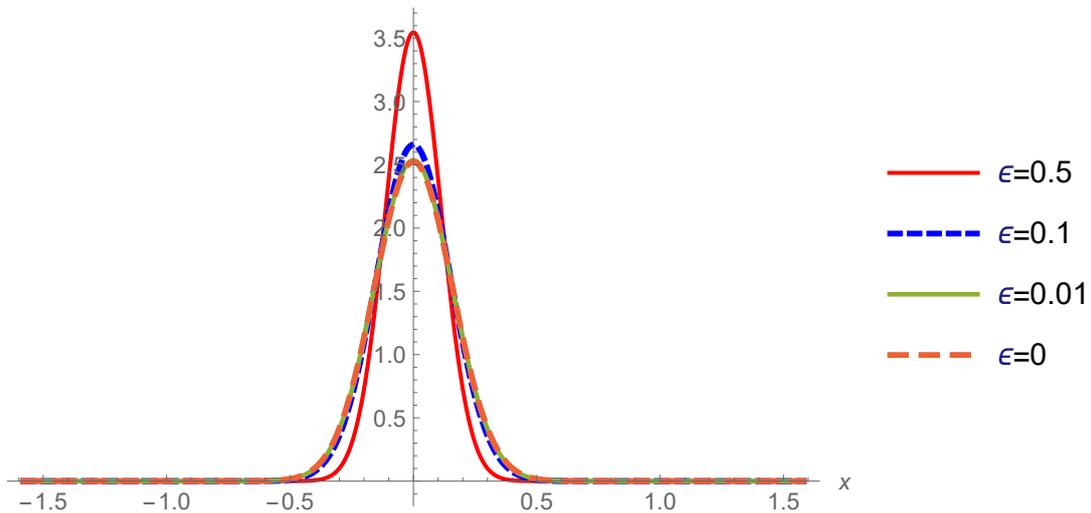


Figura 4.14: FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los primeros tres momentos, tomando diferentes valores de ϵ . Modelo 2 con Proceso Ruido Blanco Gaussiano.

Como podemos ver de la Figura 4.14, la FDP no se aproxima para valores de $\epsilon > 0.1$. A continuación, en las Figuras 4.15 y 4.16 mostramos la comparación entre las gráficas de la aproximación de la FDP para el momento de tercer orden, tomando los valores de $\epsilon = 0$, $\epsilon = 0.01$ y $\epsilon = 0.1$, respectivamente.

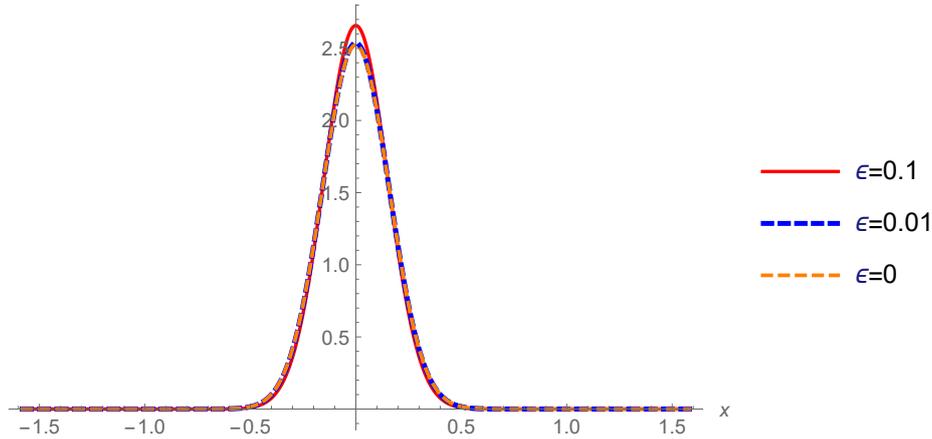


Figura 4.15: FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los primeros tres momentos, para valores de $\epsilon = \{0, 0.01, 0.1\}$. Modelo 2 con Proceso Ruido Blanco Gaussiano.

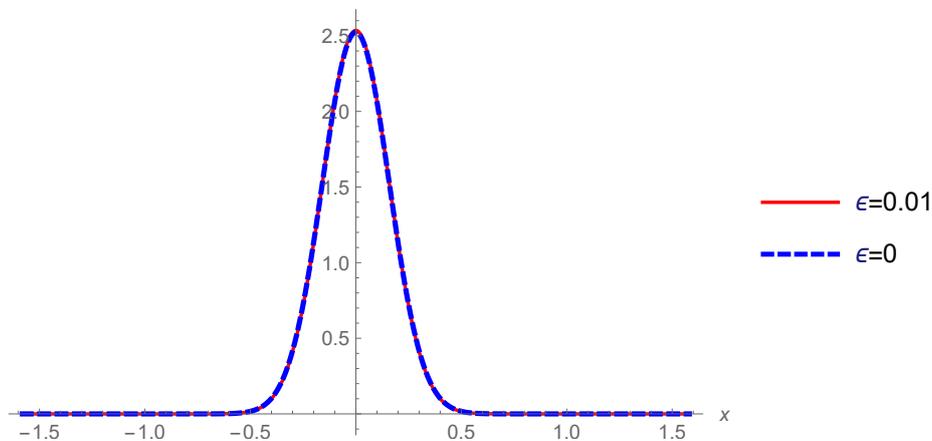


Figura 4.16: PDF, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los primeros tres momentos, para valores de $\epsilon = \{0, 0.01\}$. Modelo 2 con Proceso Ruido Blanco Gaussiano.

Como podemos ver de la Figura 4.15, para el valor de $\epsilon = 0.1$ se muestra una pequeña diferencia entre las aproximaciones para $\epsilon = 0.01$ y $\epsilon = 0$. Por el contrario, para la Figura 4.16 con el valor del parámetro de perturbación $\epsilon = 0.01$, los resultados para ambas aproximaciones son bastante similares, lo que da evidencia de que los cálculos son consistentes.

4.2.2 Proceso Estocástico de Ornstein-Uhlenbeck

Para este segundo ejemplo, se considera como excitación de entrada de Langevin $Y(t)$ [21], el proceso estocástico de Ornstein-Uhlenbeck se obtiene a partir de la ecuación Langevin:

$$\frac{dY(t)}{dt} + \alpha Y(t) = \sigma_1 \frac{dW(t)}{dt}, \quad \alpha > 0, \quad (4.36)$$

donde:

- $W(t)$ es el proceso de Wiener.
- $\alpha > 0$ garantiza que la solución alcance un estado estacionario.

El proceso estocástico de Ornstein-Uhlenbeck está definido por:

$$Y(t) = \xi(t), \quad (4.37)$$

donde la excitación de entrada $Y(t)$ satisface:

- $\mathbb{E}\{Y(t)\} = 0$.
- $Y(t)$ es Gaussiano.
- $Y(t)$ es estacionario.
- La correlación de $Y(t)$ está dada por:

$$\Gamma_{YY}(\tau) = \sigma_1^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

Es importante mencionar que para el segundo ejemplo de este modelo se utilizarán los siguiente datos para los parámetros del oscilador no lineal aleatorio, $\xi = 0.01$ ($\xi^2 < 1$), $\omega_0 = 1$, $\sigma_1 = 0.01$ y $\alpha = 0.5$.

Seguidamente, reemplazando los resultados mostrados previamente en la ecuación (4.26), se obtiene:

$$\ddot{X}(t) + 0.02\dot{X}(t) + X(t) + \epsilon \sin(X(t)) = \xi(t). \quad (4.38)$$

Como en los ejemplos previamente mostrados, obtendremos las aproximaciones de las principales funciones estadísticas de la solución aproximada, $\hat{X}(t)$, de un oscilador no lineal aleatorio.

Para el Ejemplo 2 del modelo 2, los momentos de ordenes 1 a 3 están dados por:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left\{ \hat{X}(t) \right\} &= 0, \\ \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\} &= \frac{13}{6300} - \frac{465955883861}{126023688000000} \epsilon, \\ \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^3(t) \right\} &= 0.\end{aligned}\tag{4.39}$$

Es importante mencionar que de los momentos de primer y segundo orden, podemos decir que la función de la varianza es igual al momento de segundo orden, es decir:

$$\begin{aligned}\mathbb{V} \left\{ \hat{X}(t) \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\} - \left(\mathbb{E} \left\{ \hat{X}(t) \right\} \right)^2, \\ \mathbb{V} \left\{ \hat{X}(t) \right\} &= \frac{13}{6300} - \frac{465955883861}{126023688000000} \epsilon.\end{aligned}\tag{4.40}$$

De la positividad del momento de segundo orden, podemos obtener un límite en el parámetro de la perturbación ϵ ,

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\} \implies \epsilon < 0.558098.\tag{4.41}$$

Seguidamente, obtenemos la aproximación de la función de correlación:

$$\Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) = \begin{cases} f_1(\tau) & \text{si } \tau > 0, \\ f_2(\tau) & \text{si } \tau < 0, \\ \frac{13}{6300} - \frac{465955883861}{126023688000000} \epsilon & \text{si } \tau = 0, \end{cases}\tag{4.42}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 f_1(\tau) = & \frac{e^{-\tau/2}}{149487090896609928000000} \left[-145804168125(-65620800 + 104891723\epsilon) \right. \\
 & + 2e^{49\tau/100} \left(1111 \left(134517389515740000 + (-241860961268936053 \right. \right. \\
 & \left. \left. + 1747442548006575\tau)\epsilon \right) \cos \left(\frac{3\sqrt{1111}\tau}{100} \right) + \sqrt{1111} \left(116604702563580000 \right. \right. \\
 & \left. \left. - (253701643606249726 + 2239645748777508225\tau)\epsilon \right) \sin \left(\frac{3\sqrt{1111}\tau}{100} \right) \right) \left. \right], \tag{4.43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(\tau) = & -\frac{e^{\tau/100}}{149487090896609928000000} \left[1542901250e^{49\tau/100}(-6201165600 + 9912267739\epsilon) \right. \\
 & + 209979 \left(-1423464439320000 + (2559375252144029 + 18491435830000\tau)\epsilon \right) \\
 & \cdot \cos \left(\frac{3\sqrt{1111}\tau}{100} \right) + 63\sqrt{1111} \left(3701736589320000 - 8046438192936529\epsilon \right. \\
 & \left. \left. + 71099789276670000\tau\epsilon \right) \sin \left(\frac{3\sqrt{1111}\tau}{100} \right) \right]. \tag{4.44}
 \end{aligned}$$

En la Figura 4.17, mostramos la representación gráfica de la función de correlación.

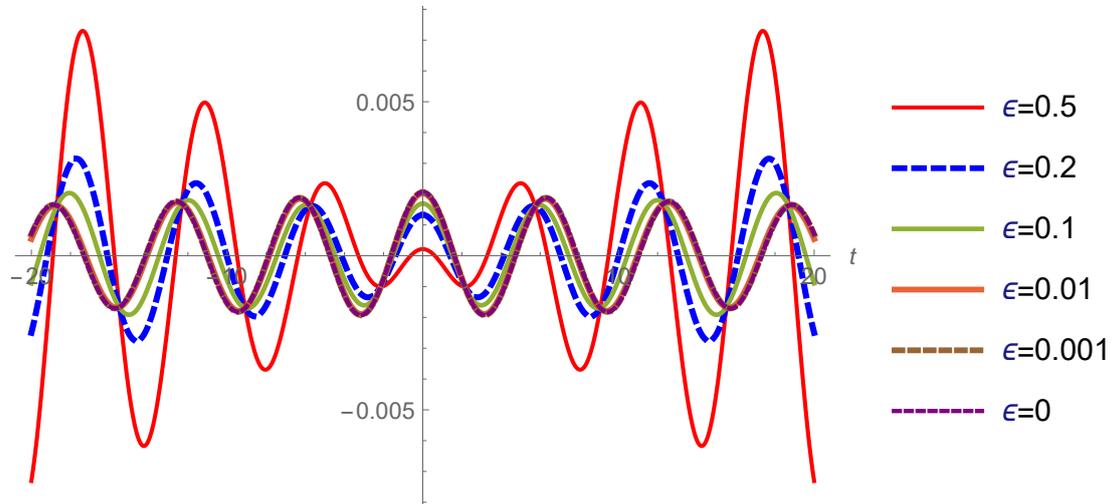


Figura 4.17: Función de correlación $\Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau)$ de \hat{X} para diferentes valores de ϵ . Modelo 2 con Proceso Estocástico de Ornstein-Uhlenbeck.

De la Figura 4.17 se puede observar que cuanto menor es el valor del parámetro de perturbación ϵ , menor es la variabilidad de la función de correlación. Este comportamiento está de acuerdo con la interpretación física de la dinámica del oscilador. Como podemos ver para el valor del parámetro de perturbación $\epsilon = 0.5$, preserva la simetría de la función de correlación.

En la Figura 4.18, mostramos la representación gráfica de la función de correlación, con valores del parámetro de perturbación $\epsilon \leq 0.1$. Como podemos ver claramente la función de correlación para $\epsilon = 0$, $\epsilon = 0.001$ y $\epsilon = 0.01$ son muy similares.

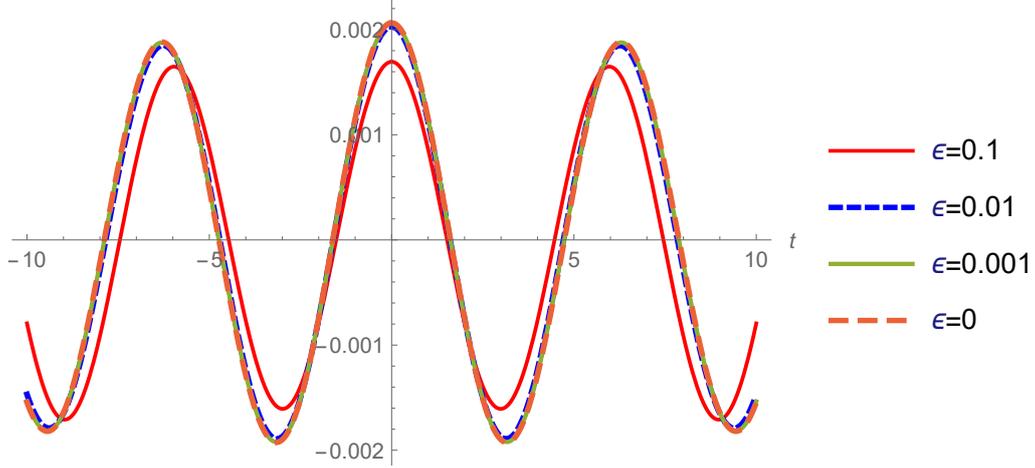


Figura 4.18: Función de correlación $\Gamma_{\hat{X}\hat{X}}(\tau)$ de \hat{X} para valores de $\epsilon = \{0, 0.001, 0.01, 0.1\}$. Modelo 2 con Proceso Estocástico de Ornstein-Uhlenbeck.

A partir de la técnica de perturbación y la aproximación de los principales momentos estadísticos, se calculará la aproximación de la FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$. Entonces, para los tres primeros momentos se tiene la aproximación de la FDP expresada como:

$$f_{\hat{X}(t)}(x) = e^{-1-\lambda_0-\lambda_1x-\lambda_2x^2-\lambda_3x^3}, \quad (4.45)$$

donde λ_0 , λ_1 , λ_2 y λ_3 son determinadas numéricamente resolviendo el sistema dado por las expresiones (3.71) y (3.72) considerando:

- $m_0 = 1$.
- $m_1 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}(t) \right\} = 0$.
- $m_2 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\} = \frac{13}{6300} - \frac{465955883861}{126023688000000} \epsilon$.
- $m_3 = \mathbb{E} \left\{ \hat{X}^3(t) \right\} = 0$.

Asimismo, el correspondiente dominio $[y_1, y_2]$ se obtiene a partir de la desigualdad de Bienaymé-Chebyshev [16, p. 47]. Este dominio es expresado como $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ que considera los siguientes parámetros:

- $\mu = 0$.
- $k = 10$.
- $\sigma = \sqrt{\mathbb{V} \left\{ \hat{X}(t) \right\}} = \sqrt{\mathbb{E} \left\{ \hat{X}^2(t) \right\}}$.

En la Tabla 4.6, se muestran los valores de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ y λ_3 , el dominio correspondiente $[y_1, y_2]$, la media $\left(\mathbb{E}\left\{\hat{X}(t)\right\}\right)$ y la desviación estándar (σ) para los diferentes valores del parámetro de perturbación, es decir $\epsilon \in [0, 0.01, 0.1, 0.2]$.

Tabla 4.6: Valores para $\lambda_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$, el dominio $[y_1, y_2]$ obtenido con el PME, para $\epsilon \in \{0, 0.01, 0.1, 0.2\}$, con la media y desviación estándar (SD) para los primeros tres momentos. Modelo 2 con Proceso Estocástico de Ornstein-Uhlenbeck.

	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.01$	$\epsilon = 0.1$	$\epsilon = 0.2$
λ_0	-3.17274	-3.18178	-3.27147	-3.39460
λ_1	0	0	0	0
λ_2	242.30769	246.72857	295.20202	377.63820
λ_3	0	0	0	0
$[y_1, y_2]$	[-0.454, 0.454]	[-0.450, 0.450]	[-0.411, 0.411]	[-0.363, 0.363]
Media	0	0	0	0
σ (SD)	0.04542	0.04501	0.04115	0.03638

En la Figura 4.19, mostramos la representación gráfica de la FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los diferentes valores del parámetro ϵ .

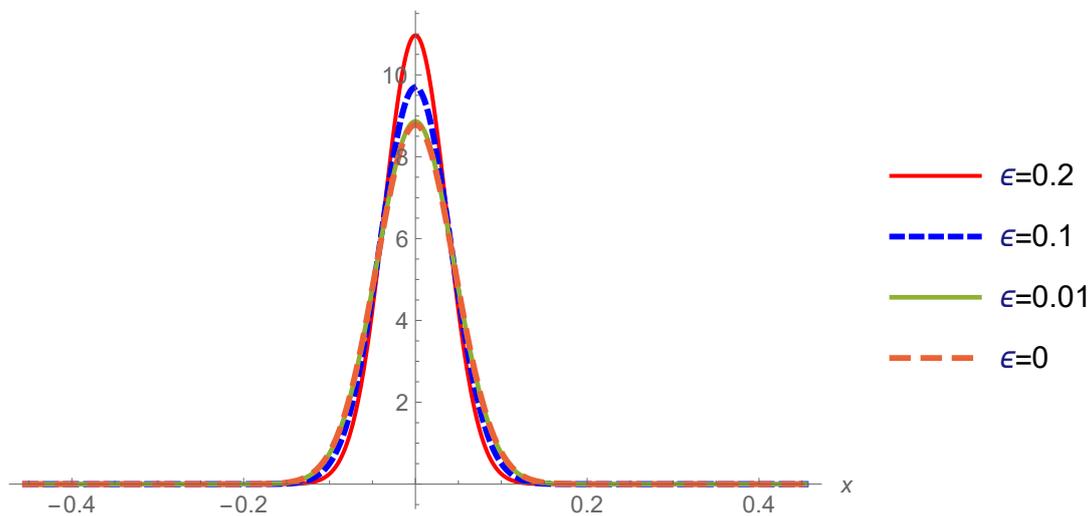


Figura 4.19: FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los primeros tres momentos, tomando diferentes valores de ϵ . Modelo 2 con Proceso Estocástico de Ornstein-Uhlenbeck.

Como podemos ver de la Figura 4.19, la FDP no se aproxima para valores de $\epsilon > 0.1$. A continuación, en las Figuras 4.20 y 4.21 mostramos la comparación entre las gráficas de la aproximación de la FDP para el momento de tercer orden, tomando los valores de $\epsilon = 0$, $\epsilon = 0.01$ y $\epsilon = 0.1$, respectivamente.

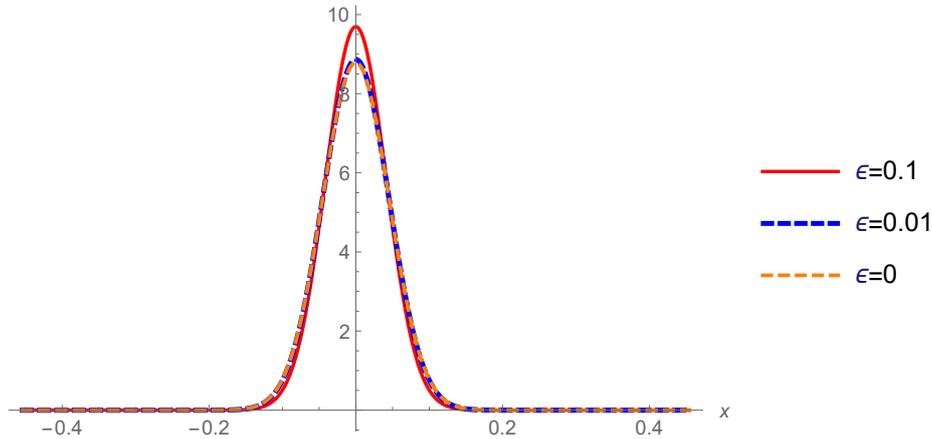


Figura 4.20: FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los primeros tres momentos, para valores de $\epsilon = \{0, 0.01, 0.1\}$. Modelo 2 con Proceso Estocástico de Ornstein-Uhlenbeck.

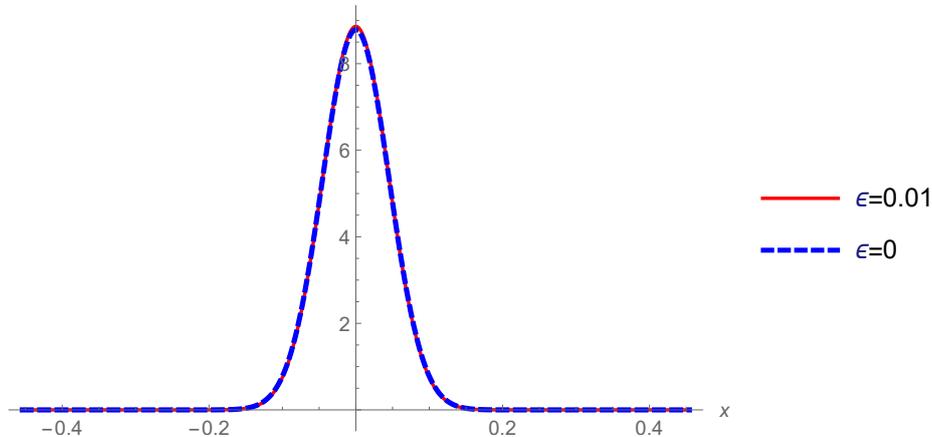


Figura 4.21: FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, para los primeros tres momentos, para valores de $\epsilon = \{0, 0.01\}$. Modelo 2 con Proceso Estocástico de Ornstein-Uhlenbeck.

Como podemos ver de la Figura 4.20, para el valor de $\epsilon = 0.1$ se muestra una pequeña diferencia entre las aproximaciones para $\epsilon = 0.01$ y $\epsilon = 0$. Por el contrario, para la Figura 4.21 con el valor del parámetro de perturbación $\epsilon = 0.01$, los resultados para ambas aproximaciones son bastante similares, lo que da evidencia de que los cálculos son consistentes.

En conclusión, se han validado los resultados numéricos para obtener la aproximación de la FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, mediante la técnica de perturbación, aproximación de los primeros momentos y la técnica del PME.

Finalmente, se ha comprobado que la diferencia entre las aproximaciones tomando los tres primeros momentos para calcular $f_{\hat{X}(t)}(x)$ es muy pequeña cuando se considera un valor del parámetro de perturbación ϵ adecuado. Esto se ha validado con los ejemplos descritos anteriormente, que muestran que las aproximaciones de la FDP, $f_{\hat{X}(t)}(x)$, son fiables.

Conclusiones

En la presente memoria se ha estudiado, desde un punto de vista probabilístico, una familia de osciladores no lineales sujetos a pequeñas perturbaciones en el término no lineal, que dependen tanto de la posición como de la velocidad, y cuya fuente de excitación es un proceso estocástico estacionario que posee ciertas propiedades que son comunes para las aplicaciones en física e ingeniería.

Se ha realizado el estudio de dos modelos. En el primer modelo, el término no lineal depende de la posición y de la velocidad. Para el segundo modelo, depende sólo de la posición, y para este modelo se ha aproximado el término no lineal usando un polinomio de Taylor, con el objetivo de aplicar el método de perturbaciones estocásticas para obtener los principales momentos estadísticos de la solución estacionaria de los dos modelos.

Para los modelos propuestos, se ha validado el procedimiento descrito con varios ejemplos numéricos, donde la excitación estocástica es impulsada por diferentes procesos estocásticos, como por ejemplo, el proceso estocástico trigonométrico, el proceso de ruido blanco Gaussiano y el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, respectivamente.

Finalmente, los resultados obtenidos muestran que el cálculo de las aproximaciones de la función de densidad de probabilidad de la solución estacionaria son fiables. Esto se ha conseguido mediante la combinación del método de perturbación estocástica, la aproximación de los principales momentos y el principio de máxima entropía.

Bibliografía

- [1] A. Yildirim, H. Askari, Z. Saadatnia, M. KalamiYazdi, and Y. Khan, “Analysis of nonlinear oscillations of a punctual charge in the electric field of a charged ring via a hamiltonian approach and the energy balance method,” *Comput. Math. Appl.*, 2011, 62, 486-490.
- [2] Y. Khan, H. Vazquez-Leal, and L. Hernandez-Martinez, “Removal of noise oscillation term appearing in the nonlinear equation solution,” *J. Appl. Math.*, 2012, 387365.
- [3] Y. Khan and A. Mirzabeigy, “Improved accuracy of He’s energy balance method for analysis of conservative nonlinear oscillator,” *Neural Comput. Appl.*, 2014, 25, 889–895.
- [4] J. L. Bogdanoff, J. E. Goldberg, and M. Bernard, “Response of a simple structure to a random earthquake-type disturbance,” *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 1961, 51, 293–310.
- [5] L. Su and G. Ahmadi, “Earthquake response of linear continuous structures by the method of evolutionary spectra,” 1988, 10, 47–56.
- [6] J. Calatayud, J.-C. Cortés, and M. Jornet, “The damped pendulum random differential equation: A comprehensive stochastic analysis via the computation of the probability density function,” *Phys. A Stat. Mech. Appl.*, 2018, 512, 261-279.
- [7] D. Lobo, T. Ritto, D. Castello, and E. Cataldo, “Dynamics of a Duffing oscillator with the stiffness modeled as a stochastic process,” *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, 116, 273-280.
- [8] E. Hinch, *Perturbation Methods*. Cambridge Texts in Applied Mathematics: New York, NY, USA, 1991.

- [9] J. G. Simmonds and J. E. Mann Jr, *A First Look at Perturbation Theory*. Dover Books on Physics, Dover Publications: New York, NY, USA, 2013.
- [10] R. E. Bellman, *Perturbation Techniques in Mathematics, Engineering and Physics*. Dover Books on Physics, Dover Publications: New York, NY, USA, 2003.
- [11] A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods*. Wiley Classics Library, Wiley VCH: New York, NY, USA, 2000.
- [12] M. Gitterman, *The Noisy Oscillator: Random Mass, Frequency, Damping*. World Scientific: Singapore, 2013.
- [13] H. Zhu, G. Er, V. Iu, and K. Kou, “Probabilistic solution of nonlinear oscillators excited by combined Gaussian and Poisson white noises,” *J. Sound Vib.*, 2011, 330, 2900–2909.
- [14] L. Chen, J. Qian, H. Zhu, and J.-q. Sun, “The closed-form stationary probability distribution of the stochastically excited vibro-impact oscillators,” *J. Sound Vib.*, 2019, 439, 260–270.
- [15] J. V. Michalowicz, J. M. Nichols, and F. Bucholtz, *Handbook of Differential Entropy*. CRC Press: Abingdon, UK, 2018.
- [16] J. Calatayud Gregori, J. C. Cortés López, M. Jornet Sanz, and R. J. Villanueva Micó, “An Introduction to Random Variables, Random Vectors and Stochastic Processes,” *Colección Académica*, 2019.
- [17] T. T. Soong, *Random Differential Equations in Science and Engineering*. Academic Press: New York, NY, USA, 1973, Volume 103.
- [18] J.-C. Cortés, E. López-Navarro, J.-V. Romero, and M.-D. Roselló, “Approximating the density of random differential equations with weak nonlinearities via perturbation techniques,” *Mathematics*, vol. 9, no. 3, p. 204, 2021.
- [19] J.-C. Cortés, E. López-Navarro, J.-V. Romero, and M.-D. Roselló, “Probabilistic analysis of random nonlinear oscillators subject to small perturbations via probability density functions: theory and computing,” *The European Physical Journal Plus*, vol. 136, no. 7, pp. 1–23, 2021.
- [20] G. Casella and R. L. Berger, *Statistical Inference*. Cengage Learning, New Delhi, 2007.

- [21] O. Contreras-Vergara, N. Lucero-Azuara, N. Sánchez-Salas, and J. Jiménez-Aquino, “Langevin original approach and Ornstein-Uhlenbeck-type processes,” *Phys. A Stat. Mech. Appl.*, 2021, 584, 126349.