UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

# Matrices inversas generalizadas definidas mediante proyectores y su aplicación a órdenes parciales matriciales


Presentada por: María Valeria Hernández

Dirigida por: D. Néstor Thome Coppo

D. Marina Lattanzi


junio-2022

D. Néstor Thome Coppo, Catedrático de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València; y Dª. Marina B. Lattanzi, Profesora Adjunta de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa,

CERTIFICAN:

que la presente memoria *"Matrices inversas generalizadas definidas mediante proyectores y su aplicación a órdenes parciales matriciales"*, ha sido realizada bajo su dirección por María Valeria Hernández, y constituye su tesis para optar al grado de Doctora por la Universitat Politècnica de València.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, se ratifican en la autorización de la presentación de la referida tesis doctoral ante la Comisión de Doctorado de la Universitat Politècnica de València, firmando el presente certificado.

Valencia, junio de 2022.

Néstor Thome Coppo | Marina B. Lattanzi

# Resumen

El Análisis Matricial proporciona herramientas muy útiles en la Matemática Aplicada. La teoría de matrices inversas generalizadas constituye una de estas herramientas. Su aplicación a otras áreas de las matemáticas y a otras disciplinas es importante. En esta tesis doctoral se definen e investigan nuevas inversas generalizadas, y se encuentran y caracterizan nuevos órdenes parciales definidos a partir de algunas de ellas. Por lo tanto, esta tesis doctoral se enmarca en dos importantes áreas: el Análisis Matricial y la Teoría de Matrices, y el Álgebra de la Lógica (Estructuras Algebraicas Ordenadas).

Un procedimiento para introducir nuevas inversas generalizadas es presentarlas como combinación de otras previamente conocidas y estudiadas. Este mecanismo fue utilizado, por ejemplo, por O. Baksalary y G. Trenkler en [3] para introducir la inversa core en el conjunto de matrices cuadradas de índice a lo sumo 1, a partir de la inversa de grupo y la inversa de Moore-Penrose. Por otra parte, S. Malik y N. Thome [48] extendieron la inversa core a matrices cuadradas de índice arbitrario. Los autores introdujeron la inversa generalizada DMP como un caso híbrido de la inversa de Drazin y la inversa de Moore-Penrose.

Motivados por estos trabajos, en la primera parte de esta tesis se define e investiga una nueva clase de inversas generalizadas híbridas, las inversas GDMP (y dualmente, las MPGD inversas) en el conjunto de matrices cuadradas de índice arbitrario, como una extensión de las inversas DMP a una clase más general.

En [69], H. X. Wang y X. J. Liu introdujeron la noción de inversa G-Drazin debilitando las condiciones que definen la inversa de Drazin. Recientemente, C. Coll, M. Lattanzi y N. Thome se basaron en este trabajo para encontrar en [22] un sistema de ecuaciones más simple que las caracteriza.

En esta tesis se presentan las nuevas inversas generalizadas GDMP como cierto producto de matrices que involucra las inversas G-Drazin y la inversa de Moore- Penrose. Se investigan sus propiedades mediante diferentes enfoques y se caracterizan desde diferentes puntos de vista. Como complemento, se proporciona un algoritmo para hallarlas, que además permite encontrar una inversa G-Drazin.

El estudio de proyectores es un área importante en diferentes ramas de las Matemáticas y en el Análisis Matricial en particular. La teoría de inversas generalizadas se utiliza como herramienta para analizarlos y operar con ellos. En la segunda parte de esta tesis se estudia el comportamiento de ciertos proyectores oblicuos definidos mediante inversas generalizadas. A partir de la definición de una adecuada relación de equivalencia en conjuntos particulares de matrices complejas, se introduce una nueva clase de matrices inversas generalizadas como el representante "más simple" de cada clase de equivalencia. Además, se representan como combinación de una inversa interior y la inversa de Moore-Penrose. Esta es la razón por la que se las ha denominado inversas 1MP y MP1. Estas nuevas clases de inversas generalizadas resultan ser tanto inversas interiores como exteriores pues, si $B$ y $C$ son $\{1\}$-inversas de $A$, entonces el producto $BAC$ es una $\{1, 2\}$-inversa de $A$.

Tanto la inversa core como la inversa DMP se expresan como un producto adecuado involucrando una inversa exterior específica y la inversa de Moore-Penrose. En esta tesis se presenta una clase de inversas que generaliza a las anteriores, pues se expresan mediante una inversa exterior arbitraria y la inversa de Moore-Penrose. Además, el enfoque para introducir estas inversas no es el clásico, sino que es novedoso. De hecho, se presentará a partir del estudio del comportamiento de ciertos proyectores, de la misma manera que se hizo con las 1MP y MP1, como representantes de ciertas clases de equivalencia. Se definen así las inversas 2MP y sus duales, las MP2.

M. Mehdipour y A. Salemi definieron en [53] la inversa CMP de una matriz cuadrada $A$ poniendo el énfasis en la parte core de la propia matriz $A$. En esta tesis doctoral se realiza un análisis similar, centrando el enfoque en las inversas 2MP. Surgen de esta manera las inversas generalizadas C2MP. Del análisis de las propiedades de estas nuevas inversas se desprende una caracterización de las inversas exteriores que también son inversas interiores.

La teoría de inversas generalizadas se relaciona estrechamente con la de órdenes parciales. En el año 1978, Drazin [26] utilizó la noción de inversa generalizada de Moore-Penrose para definir y caracterizar el orden estrella. Motivado por el orden estrella, R. Hartwig definió en el año 1980 [34] el orden menos, en el contexto de anillos. Esta relación de orden fue caracterizada en el contexto de matrices rectangulares complejas utilizando inversas interiores.

Debilitando las condiciones que definen el orden estrella, J.K. Baksalary y J. Hauke introdujeron en el año 1990 [1] una nueva relación de orden en el conjunto de las matrices complejas de tamaño $m \times n$. Basándose en este estudio, L. Lebtahi, P. Patrício y N. Thome [45] analizaron y caracterizaron este orden en el contexto de anillos. Actualmente, esta relación binaria es conocida como orden diamante.

En esta tesis se retoma el estudio de las propiedades del orden diamante en conjuntos de matrices rectangulares. Se demuestran nuevas propiedades y se encuentra una nueva caracterización de esta relación de orden a partir de su relación con el orden menos. Además, se proporcionan nuevas caracterizaciones de los predecesores de una matriz arbitraria bajo el orden diamante.

Como una aplicación de las inversas generalizadas 1MP y MP1, se definen dos nuevas relaciones de orden en conjuntos de matrices rectangulares. Se estudian sus propiedades y se caracterizan los sucesores de una matriz arbitraria bajo estos órdenes. Por último, como otra aplicación de las inversas generalizadas 1MP y MP1 investigadas en esta tesis, se encuentra, a partir de ellas, otra caracterización del orden diamante.

Esta tesis está organizada en cuatro capítulos. En el Capítulo 1 se desarrollan algunos antecedentes del tema de la tesis y se presentan los resultados preliminares necesarios para el desarrollo del resto de los capítulos. En el Capítulo 2 se presentan las clases de matrices GDMP y MPGD, se demuestran propiedades de estas inversas y se describe un algoritmo para hallarlas. El Capítulo 3 se dedica al estudio de ciertos proyectores que permiten definir las clases de inversas generalizadas 1MP, MP1, 2MP y MP2. Particularizando la inversa exterior considerada, se definen las inversas C2MP. Además, se presentan las inversas definidas en esta tesis como inversas con espacio rango y espacio nulo prescrito. Finalmente, en el Capítulo 4, con la intención de estudiar una aplicación de la teoría de inversas generalizadas, se profundiza en el estudio de órdenes parciales, proporcionando nuevas propiedades del orden diamante. También, se presentan e investigan dos nuevas relaciones de orden en el conjunto de matrices rectangulares y se analizan sus propiedades. Algunos de los resultados obtenidos en esta tesis pueden encontrarse en [37, 38, 39, 40, 41].

# Resum

L'Anàlisi Matricial proporciona eines molt útils en la Matemàtica Aplicada. La teoria de matrius inverses generalitzades constitueix una d'aquestes eines. La seua aplicació a altres àrees de les matemàtiques i a altres disciplines és important. En aquesta tesi doctoral es defineixen i investiguen noves inverses generalitzades, i es troben i caracteritzen nous ordres parcials definits a partir d'algunes d'elles. Per tant, aquesta tesi doctoral s'emmarca en dues importants àrees: l'Anàlisi Matricial i la Teoria de Matrius, i l'Àlgebra de la Lògica (Estructures Algebraiques Ordenades).

Un procediment per a introduir noves inverses generalitzades és presentar-les com a combinació d'unes altres prèviament conegudes i estudiades. Aquest mecanisme va ser utilitzat, per exemple, per O. Baksalary i G. Trenkler en [3] per a introduir la inversa core en el conjunt de matrius quadrades d'índex com a màxim 1, a partir de la inversa de grup i la inversa de Moore-Penrose. D'altra banda, S. Malik i N. Thome [48] van estendre la inversa core a matrius quadrades d'índex arbitrari. Els autors van introduir la inversa generalitzada DMP com un cas híbrid de la inversa de Drazin i la inversa de Moore-Penrose.

Motivats per aquests treballs, en la primera part d'aquesta tesi es defineix i investiga una nova classe d'inverses generalitzades híbrides, les inverses GDMP (i dualment, les MPGD inverses) en el conjunt de matrius quadrades d'índex arbitrari, com una extensió de les inverses DMP a una classe més general.

En [69], H. X. Wang i X. J. Liu van introduir la noció d'inversa G-Drazin afeblint les condicions que defineixen la inversa de Drazin. Recentment, C. Coll, M. Lattanzi i N. Thome es van basar en aquest treball per a trobar en [22] un sistema d'equacions més simple que les caracteritza.

En aquesta tesi es presenten les noves inverses generalitzades GDMP com a cert producte de matrius que involucra les inverses G-Drazin i la inversa de Moore-Penrose. S'investiguen les seues propietats mitjançant diferents enfocaments i es caracteritzen des de diferents punts de vista. Com a complement, es proporciona un algorisme per a trobar-les, que a més permet trobar una inversa G-Drazin.

L'estudi de projectors és una àrea important en diferents branques de les Matemàtiques i en l'Anàlisi Matricial en particular. La teoria d'inverses generalitzades s'utilitza com a eina per a analitzar-los i operar amb ells. En la segona part d'aquesta tesi s'estudia el comportament d'uns certs projectors oblics definits mitjançant inverses generalitzades. A partir de la definició d'una adequada relació d'equivalència en conjunts particulars de matrius complexes, s'introdueix una nova classe de matrius inverses generalitzades com el representant "més simple" de cada classe d'equivalència. A més, es representen com a combinació d'una inversa interior i la inversa de Moore-Penrose. Aquesta és la raó per la qual se les ha denominades inverses 1MP i MP1. Aquestes noves classes d'inverses generalitzades resulten ser tant inverses interiors com exteriors perquè, si $B$ i $C$ són $\{1\}$-inverses de $A$, llavors el producte $BAC$ és una $\{1, 2\}$-inversa de $A$.

Tant la inversa core com la inversa DMP s'expressen com un producte adequat involucrant una inversa exterior específica i la inversa de Moore-Penrose. En aquesta tesi es presenta una classe d'inverses que generalitza a les anteriors, perquè s'expressen mitjançant una inversa exterior arbitrària i la inversa de Moore-Penrose. A més, l'enfocament per a introduir aquestes inverses no és el clàssic, sinó que és nou. De fet, es presentarà a partir de l'estudi del comportament d'uns certs projectors, de la mateixa manera que es va fer amb les 1MP i MP1, com a representants d'unes certes classes d'equivalència. Es defineixen així les inverses 2MP i els seus duals, les MP2.

M. Mehdipour i A. Salemi van definir en [53] la inversa CMP d'una matriu quadrada $A$ posant l'èmfasi en la part core de la pròpia matriu $A$. En aquesta tesi doctoral es realitza una anàlisi similar, centrant l'enfocament en les inverses 2MP. Sorgeixen d'aquesta manera les inverses generalitzades C2MP. De l'anàlisi de les propietats d'aquestes noves inverses es desprén una caracterització de les inverses exteriors que també són inverses interiors.

La teoria d'inverses generalitzades es relaciona estretament amb la d'ordres parcials. L'any 1978, Drazin [26] va utilitzar la noció d'inversa generalitzada de Moore-Penrose per a definir i caracteritzar l'ordre estrela. Motivat per l'ordre estrela, R. Hartwig va definir l'any 1980 [34] l'ordre menys, en el context d'anells. Aquesta relació d'ordre va ser caracteritzada en el context de matrius rectangulars complexes utilitzant inverses interiors.

Afeblint les condicions que defineixen l'ordre estrela, J.K. Baksalary i J. Hauke van introduir l'any 1990 [1] una nova relació d'ordre en el conjunt de les matrius complexes de grandària $m \times n$. Basant-se en aquest estudi, L. Lebtahi, P. Patrício i N. Thome [45] van analitzar i van caracteritzar aquest ordre en el context d'anells. Actualment, aquesta relació binària és coneguda com a ordre diamant.

En aquesta tesi es reprén l'estudi de les propietats de l'ordre diamant en conjunts de matrius rectangulars. Es demostren noves propietats i es troba una nova caracterització d'aquesta relació d'ordre a partir de la seua relació amb l'ordre menys. A més, es caracteritzen els predecessors d'una matriu arbitrària sota l'ordre diamant.

Com una aplicació de les inverses generalitzades 1MP i MP1, es defineixen dues noves relacions d'ordre en conjunts de matrius rectangulars. S'estudien les seues propietats i es caracteritzen els successors d'una matriu arbitrària sota aquests ordres. Finalment, com una altra aplicació de les inverses generalitzades 1MP i MP1 investigades en aquesta tesi, es troba, a partir d'elles, una altra caracterització de l'ordre diamant.

Aquesta tesis està organitzada en quatre capítols. En el Capítol 1 es desenvolupen alguns antecedents del tema de la tesi i es presenten els resultats preliminars necessaris per al desenvolupament de la resta dels capítols. En el Capítol 2 es presenten les classes de matrius GDMP i MPGD, es demostren propietats d'aquestes inverses i es descriu un algorisme per a trobar-les. El Capítol 3 es dedica a l'estudi d'uns certs projectors que permeten definir les classes d'inverses generalitzades 1MP, MP1, 2MP i MP2. Particularitzant la inversa exterior considerada, es defineixen les inverses C2MP. A més, es presenten les inverses definides en aquesta tesi com a inverses amb espai rang i espai nul prescrit. Finalment, en el Capítol 4, amb la intenció d'estudiar una aplicació de la teoria d'inverses generalitzades, s'aprofundeix en l'estudi d'ordres parcials, proporcionant noves propietats de l'ordre diamant. També, es presenten i investiguen dues noves relacions d'ordre en el conjunt de matrius rectangulars i s'analitzen les seues propietats. Alguns dels resultats obtinguts en aquesta tesi poden trobar-se en [37, 38, 39, 40, 41].

# Summary

The Matrix Analysis provides with very useful tools for the Applied Mathematics. The theory of Generalized Inverse Matrices constitutes one of these tools. Its application is important for other areas of mathematics and other disciplines. In this PhD. thesis, new generalized inverses are defined and investigated, and new partial orders defined by some of them are found and characterized. Therefore, this PhD. thesis is based on two important areas: the Matrix Analysis and the Theory of Matrices, and the Algebra of Logic (Ordered Algebraic Structures).

A method to introduce new generalized inverses is to present them as special products of others previously known and studied. This procedure was used, for example, by O. Baksalary and G. Trenkler in [3] to introduce the Core inverse in the setting of square matrices having index at most 1, by using the group inverse and the Moore-Penrose inverse. On the other hand, S. Malik and N. Thome [48] extended the core inverse to square matrices of an arbitrary index. The authors introduced the generalized DMP inverse as a hybrid case from the Drazin inverse and the Moore-Penrose inverse.

Motivated by these ideas, in the first part this PhD. thesis, a new kind of hybrid generalized inverse is defined and investigated, the GDMP-inverses (and their duals, the MPGD-inverses), in the setting of square matrices of an arbitrary index, as an extension of the DMP inverses to a more general class.

In [69], H. X. Wang and X. J. Liu introduced the notion of G-Drazin inverse weakening the conditions that define the Drazin inverse. Recently, C. Coll, M. Lattanzi and N. Thome were based on this work to find in [22] a system of simpler equations that characterizes them.

In this PhD. thesis, generalized GDMP-inverses are introduced as a certain product of matrices that involve the G-Drazin inverse and the Moore-Penrose inverse. The properties are investigated by different methods and characterized from different points of view. As a complement, it is provided an algorithm to compute them, which also allows to find a G-Drazin inverse.

The study of projectors is an important area in different branches of Mathematics and particularly in the Matrix Analysis. The theory of generalized inverses is used as a tool to analyze them and operate with them. In the second part of this PhD. thesis, the behaviour of certain oblique projectors defined by generalized inverses is studied. From the definition of an adequate equivalence relation in particular sets of complex matrices, a new class of generalized inverse matrices is introduced as the "simplest" representant of each class of equivalence. Besides, they are represented as a product of an inner inverse and the Moore-Penrose inverse. This is the reason why they have been named 1MP and MP1 inverses. These new classes of generalized inverses prove to be not only inner but also outer inverses, since if $B$ and $C$ are $\{1\}$-inverses of $A$, the product $BAC$ is a $\{1, 2\}$-inverse of $A$.

Both the core inverse and the DMP inverse are expressed as an adequate product involving a specific outer inverse and the Moore-Penrose inverse. A class of inverses that generalizes the previous ones is presented in this PhD. thesis, they are expressed by an arbitrary outer inverse and the Moore-Penrose inverse. It is remarkable that the novelty of this method, which is not the classical one. In fact, it will be presented from the study of the behavior of certain projectors, in the same way as it was done with the 1MP and MP1, as representatives of certain classes of equivalence. Thus, the 2MP inverses and their duals, the MP2 inverses, are defined.

M. Mehdipour and A. Salemi defined in [53] the CMP inverse of a square matrix $A$, emphasizing the core part of the $A$ matrix itself. In this PhD. thesis, a similar analysis is done, focusing on the core part of 2MP inverses. In this way, the generalized C2MP inverses are investigated. A characterization of the outer inverses, which are also inner inverses, is deduced from the analysis of the properties of these new inverses.

The theory of generalized inverses is closely related to that one of the partial orders. In 1978, Drazin [26] used Moore-Penrose´s generalized inverse notion to define and characterize the star order. Motivated by the star order, R. Hartwig defined in 1980 [34] the minus order, in the context of rings. This order relation was characterized in the context of complex rectangular matrices using inner inverses.

By weakening the conditions that define the star order, J.K. Baksalary and J. Hauke introduced in 1990 [1] a new order relation in the set of $m \times n$ complex matrices. Based on this study, L. Lebtahi, P. Patricio and N. Thome [45] analyzed and characterized this order in the context of rings. At present, this binary relation is known as the diamond order.

The study of the diamond order properties in sets of rectangular matrices is investigated in this PhD. thesis. New properties are proved and a new characterization of this order relation is found from its relation with the minus order. Besides, new characterizations of the predecessors of an arbitrary matrix are characterized under the diamond order.

Two new order relations in sets of rectangular matrices are defined as an application of the generalized 1MP and MP1 inverses. Their properties are studied and the successors of an arbitrary matrix are characterized under these orders. Finally, based on them, another characterization of the diamond order is found as application of the generalized 1MP and MP1 inverses investigated in this PhD. thesis.

This PhD. thesis is organized into four chapters. In Chapter 1, some introduction of the PhD. thesis topic are developed and the preliminary results needed for the development of the rest of the chapters are presented. In Chapter 2, the classes of GDMP and MPGD matrices are presented, properties of these inverses are proved and an algorithm to find them is described. Chapter 3 is focused on the study of certain projectors that allow to define the classes of generalized 1MP, MP1, 2MP and MP2 inverses. When taking a particular case of outer inverse, the C2MP inverses are defined. Moreover, the inverses defined in this PhD. thesis are presented as inverses with prescribed range and null space. Finally, in Chapter 4, the partial orders are studied in more detail, providing new properties of the diamond order, with the purpose of studying an application of the theory of generalized inverses. Finally, two new order relations are presented and investigated in the set of rectangular matrices and their properties are analyzed. Some of the results obtained in this PhD. thesis can be found in [37, 38, 39, 40, 41].

# Agradecimientos

Mi agradecimiento a mis directores de tesis, Néstor y Marina, por ser parte de este desafío. Gracias por compartir conmigo sus conocimientos matemáticos, por la confianza que depositaron en mí y por su gran paciencia. Gracias por guiarme en todo momento, haciendo que este trabajo fuera posible.

Gracias a mi familia, por su incondicional apoyo.

María Valeria Hernández

# Índice general


**Índice general** **xix**

**1 Preliminares** **1**

1.1 Introducción . . . 1

1.2 Resultados preliminares . . . 11

**2 Inversas GDMP y sus duales** **29**

2.1 Introducción . . . 29

2.2 Definición y propiedades de las inversas GDMP . . . 32

2.3 Cálculo de inversas GDMP usando la descomposición de Hartwig-Spindelböck 36

2.4 Inversas GDMP como solución de un sistema de ecuaciones matriciales . . . 45

2.5 Inversas duales de las GDMP . . . 49

2.6 Algoritmo para calcular las inversas generalizadas GD y GDMP . . . 51

**3 Inversas generalizadas definidas a partir de proyectores** **55**

3.1 Introducción . . . 55

3.2 Inversas 1MP . . . 57

3.3 Inversas MP1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68
3.4 Inversas 2MP y sus duales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71
3.5 Inversas C2MP . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 80
3.6 Inversas generalizadas con espacio imagen y nulo prescritos . . . . . . . . . 90

**4 Relaciones de orden para matrices rectangulares 95**

4.1 Introducción . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 95
4.2 Propiedades del orden diamante . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
4.3 Predecesores de una matriz arbitraria bajo el orden diamante . . . . . . . . 113
4.4 Órdenes parciales asociados a las matrices inversas 1MP y sus duales . . . . 117
4.5 Matrices inversas generalizadas 1MP, MP1 y su relación con el orden diamante 128

**Bibliografía 139**

# Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1 Introducción

Este trabajo se enmarca en el Análisis Matricial. Se definen e investigan nuevas inversas generalizadas, y se introducen y caracterizan nuevos órdenes parciales definidos a partir de algunas de ellas.

Muchas áreas y disciplinas se nutren de las investigaciones realizadas en el campo del Análisis Matricial. En particular, la teoría de inversas generalizadas y las relaciones de órdenes parciales definidas sobre diferentes conjuntos de matrices aparecen como herramienta en distintos contextos. Entre ellos cabe mencionar la utilización de relaciones de orden definidas sobre conjuntos de matrices para el tratamiento de imágenes digitales [8] y en el estudio de condiciones de convergencia para resolver sistemas lineales grandes y dispersos del tipo $Ax = b$ mediante métodos iterativos

[18]. También cabe destacar la aplicación de inversas generalizadas a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales [14], la extensión de esta teoría al estudio de propiedades de elementos de anillos y de operadores definidos en espacios de Banach [16, 19, 61, 72], al análisis de redes neuronales [71] y a la estadística [43]. Como otras aplicaciones, se ha utilizado la teoría de inversas generalizadas para establecer condiciones de convergencia de series [20], profundizar el estudio de la teoría de cuaterniones [44] y caracterizar diferentes conjuntos matriciales [31]. Otros resultados, aplicaciones y extensiones de estas inversas generalizadas pueden encontrarse en [17, 22, 30, 46, 48]. A su vez, estas diferentes líneas de investigación también abren nuevos caminos en otros campos disciplinares, como la biología, la medicina, la física, etc. [9, 52, 60].

Se sabe que una matriz tiene inversa sólo si es cuadrada y además este hecho no es suficiente. La inversa de una matriz cuadrada existe sólo si ésta es no singular, es decir, si sus filas (o columnas) son linealmente independientes. Con el avance de las investigaciones en diferentes campos de aplicación de la matemática ha surgido la necesidad de considerar un tipo de inversa "parcial" para matrices cuadradas singulares e incluso para matrices rectangulares. Así surgió el concepto de *inversa generalizada*. Es decir, una matriz $X$ asociada a una matriz $A$ y que posee algunas de las propiedades de la inversa habitual, coincide con ella en el caso de que $A$ sea cuadrada y no singular, pero se define en una clase mayor a la de las matrices no singulares. Se cree que la primera inversa que apareció en este sentido, fue la inversa generalizada definida por E. H. Moore en 1920. Este autor definió una única inversa para matrices singulares y la denominó, en inglés, *general reciprocal*. Más de treinta años después, R. Penrose realizó un trabajo sistematizado acerca de inversas generalizadas y publicó en 1955, desconociendo el trabajo de E. H. Moore, otra definición para la misma inversa generalizada definida por este autor. Por esta razón, hoy se la conoce como la inversa de Moore-Penrose. Estos y otros hechos históricos del tema pueden encontrarse en [7, 13, 66, 67]. El trabajo de Penrose fue realizado cuando todavía era estudiante. El mismo Roger Penrose fue el primer matemático al que se le otorgó el Premio Nobel en 2020, si bien no como matemático sino en su faceta de Físico, por su contribución al estudio de las causas de la formación de agujeros negros.

Los avances en la teoría de inversas generalizadas han sido muy significativos y variados desde las primeras aportaciones, hace poco más de un siglo. Son muchos los autores que han profundizado su estudio, tanto teórico como práctico. Se presenta a continuación un recorrido cronológico acerca de investigaciones en el área de las inversas generalizadas y sus aplicaciones, desde sus comienzos hasta la actualidad.

La inversa de Drazin fue introducida en 1958 por M. P. Drazin en [27] con la intención de captar propiedades espectrales que no eran transparentes en la inversa de Moore-Penrose. La inversa de Drazin posee aplicaciones en la teoría de ecuaciones diferenciales, análisis numérico, teoría de control y cadenas de Markov [10, 11, 12, 55, 56]. En 1978, S. L. Campbell y C. D. Meyer [14] extienden esta inversa generalizada e introducen la inversa generalizada de Drazin débil con el objetivo de estudiar algunos tipos especiales de sistemas de ecuaciones diferenciales. El mismo año, Drazin [26] utiliza la inversa generalizada de Moore-Penrose para definir una relación de orden sobre los elementos de semigrupos especiales y estudiar así propiedades de estos conjuntos. Este orden es muy conocido y estudiado en la literatura, denominado orden parcial estrella. De este modo surge el vínculo entre las áreas de inversas generalizadas y los órdenes parciales, tan fructíferas en la actualidad.

El orden menos fue introducido por R. Hartwig [34] en el año 1980. En primer lugar, el autor define una relación de orden en el conjunto de elementos regulares de un semigrupo. Encuentra algunas propiedades de esta relación y prueba que, para matrices sobre un anillo de división, este orden parcial puede caracterizarse a través de una propiedad conocida como de *substractivity rank*, verificada por dos matrices donde el rango de su diferencia es igual a la diferencia de los rangos de cada una de ellas. Esta relación de orden definida sobre el conjunto de matrices complejas es conocida actualmente en la literatura como el orden parcial menos. Se ha estudiado su extensión a otros contextos, utilizando este orden para establecer propiedades de distintos conjuntos. Entre otros, se puede mencionar su aplicación al estudio de descomposiciones en un anillo [65], elementos en un anillo de Rickart [25] y matrices nilpotentes [33].

Otro nexo entre inversas generalizadas y relaciones de orden aparece en el año 1987, cuando S.K. Mitra utiliza en [57] la inversa generalizada de grupo para definir el orden grupo (*sharp order*, en inglés) en el conjunto de matrices cuadradas de índice 1. Además, el autor compara en este trabajo el nuevo orden definido con el orden estrella.

En el año 1990, J.K. Baksalary y J. Hauke introdujeron en [1] un orden parcial en el conjunto de las matrices rectangulares complejas. Los autores analizaron propiedades y estudiaron su relación con otros órdenes conocidos. Este orden es extendido por L. Lebtahi, P. Patrício y N. Thome en [45] al contexto de los elementos de un anillo y denominado por estos autores como orden diamante (*diamond order*, en inglés).

Cambiando el contexto, en [35], R.E. Hartwig y K. Spindelböck investigaron la clase de matrices complejas para las cuales $A^*$ y $A^\dagger$ conmutan. Estudiaron algunas propiedades fundamentales y pudieron encontrar una forma canónica para representarlas. Asimismo, analizaron la relación de esta clase de matrices con otras clases especiales de matrices, como las matrices $EP$ y las matrices idempotentes. En el año 2009 O.M. Baksalary, G. Styan y G. Trenkler [2] utilizan la descomposición de Hartwig-Spindelböck como herramienta para explorar propiedades de otros conjuntos matriciales, como isometrías parciales ($A^\dagger = A^*$), matrices $EP$, etc. Como una aplicación, encontraron caracterizaciones para relaciones de orden conocidas, considerándolas sobre conjuntos particulares de matrices.

Muchos órdenes basan su definición en ciertas igualdades que involucran inversas generalizadas previamente definidas. En este sentido, O. Baksalary y G. Trenkler [3] definieron en el año 2010 la inversa generalizada core para matrices cuadradas. Los autores encontraron propiedades de esta inversa generalizada y una representación matricial para ella. Además, demostraron que una condición necesaria y suficiente para la existencia y unicidad de la inversa core de una matriz cuadrada $A$ es que el índice de la matriz $A$ sea menor o igual a uno. Asimismo, definieron el orden core para matrices cuadradas. Los autores hallaron propiedades de esta relación y conexiones con el orden parcial matricial estrella. También probaron que la inversa core coincide con la inversa de grupo en la clase de matrices $EP$. La inversa generalizada de grupo había sido definida en el año 1967 por I. Erdelyi [28] con el objetivo de estudiar las soluciones de la ecuación matricial $Ax = \lambda Bx$. El orden core fue analizado desde otros puntos de vista en [68] y [24].

En 2014, S. Malik y N. Thome [48] introdujeron una nueva inversa generalizada, denominada por los autores como inversa DMP, que es una extensión de la inversa core a matrices cuadradas de índice arbitrario. Definieron esta inversa generalizada a partir de la inversa de Drazin y de la inversa de Moore-Penrose y la caracterizaron como la única solución de un sistema de ecuaciones matriciales apropiado. Además, encontraron una representación matricial de esta inversa generalizada a partir de la descomposición de Hartwig-Spindelböck. También estudiaron propiedades de la inversa DMP y hallaron una representación de la inversa generalizada de Drazin. Los autores también definieron otra inversa generalizada, dual a la inversa DMP, y que denominaron por esta razón la inversa MPD.

El mismo año, K. Manjunatha Prasad y K. Mohana [49] encontraron otra extensión de la inversa core a matrices cuadradas de índice arbitrario. Los autores denominaron a esta nueva inversa generalizada como inversa core $EP$. Estudiaron sus propiedades y hallaron una fórmula para calcularla basada en una combinación lineal particular de los menores complementarios de la matriz original.

Dos años más tarde, M. Mehdipour y A. Salemi [53] introdujeron la inversa generalizada CMP utilizando la parte core de una matriz y la inversa de Moore-Penrose. Presentaron esta nueva inversa como la única solución de un sistema de ecuaciones matriciales y estudiaron sus propiedades. Además, probaron que la inversa CMP coincide con la inversa de Moore-Penrose si y solo si el índice de la matriz $A$ involucrada es menor o igual a uno. Asimismo, demostraron que una condición necesaria y suficiente para que las inversas CMP y la inversa de Drazin coincidan es que la matriz $A$ sea core EP. Esa clase de matrices es definida en este trabajo, donde además prueban que coinciden con las matrices m-EP introducidas por S. Malik, L. Rueda y N. Thome en [47]. Por último, caracterizaron a las matrices core EP como la clase de matrices en la que las inversas DMP y MPD coinciden.

En el año 2016 X. Wang y X. Liu [69] publicaron un trabajo donde utilizaron la descomposición core-nilpotente para estudiar distintos órdenes parciales. Estos autores encontraron caracterizaciones del orden C-N definido por S. K. Mitra y R. E. Hartwig utilizando también la descomposición mencionada anteriormente [59]. Los autores también definieron el concepto de inversa generaliza G-Drazin, centrándose en la información relativa a 1-inversas y a la parte nilpotente de una matriz dada. También utilizaron la descomposición core nilpotente para encontrar representaciones de una matriz inversa G-Drazin y probaron que se puede definir una relación binaria que involucra igualdades donde aparecen estas inversas generalizadas y que resulta un orden parcial matricial para matrices cuadradas. En este trabajo también establecieron propiedades y caracterizaciones del nuevo orden considerado.

Un año más tarde, C. Coll, M. Lattanzi y N. Thome [22] estudiaron la extensión de la inversa G-Drazin al conjunto de matrices rectangulares. Estos autores utilizaron una matriz peso para definir la inversa G-Drazin ponderada y mostraron que recupera la inversa G-Drazin tomando matrices cuadradas y considerando como peso la matriz identidad. Los autores encontraron caracterizaciones para las inversas G-Drazin ponderadas y, como consecuencia, hallaron nuevas caracterizaciones para las inversas generalizadas G-Drazin. Asimismo definieron, a partir de las inversas generalizadas G-Drazin ponderadas, un nuevo preorden para matrices rectangulares. Hallaron propiedades de este preorden, que también redundaron en nuevas propiedades del orden G-Drazin.

Las inversas generalizadas DMP y CMP fueron extendidas recientemente, de matrices cuadradas a matrices rectangulares, haciendo uso de una matriz adicional denominada *matriz de peso o de ponderación*.

L. Meng [54] obtuvo en 2017 una extensión de las inversas DMP para matrices rectangulares, mostrándola como la única solución de un sistema de ecuaciones matriciales que involucran este peso. Denominó a esta nueva matriz como inversa DMP ponderada y mostró que recupera como casos particulares a las inversas DMP y core. Además, encontró una forma canónica de la nueva inversa utilizando la descomposición en valores singulares y demostró algunas propiedades.

Siguiendo una estrategia similar, en [62] D. Mosić definió en 2018 la inversa CMP ponderada. Además, halló una forma canónica para esta nueva inversa generalizada y encontró algunas propiedades de la inversa CMP ponderada utilizando esta nueva representación. Como consecuencia de estos resultados, obtuvo nuevas caracterizaciones y propiedades de la inversa CMP.

En 2019, D. Mosić [63] extendió la clase de inversas G-Drazin ponderadas de matrices rectangulares al conjunto de operadores definidos en espacios de Banach. Generalizó algunas propiedades de las inversas de G-Drazin ponderadas y encontró otras nuevas. Utilizando estas inversas G-Drazin ponderadas presentó y caracterizó en este trabajo un nuevo preorden en el conjunto de todos los operadores lineales acotados definidos en espacios de Banach. Como aplicación, también presentó y estudió la inversa de G-Drazin y el orden parcial G-Drazin para operadores en espacios de Banach. Otras extensiones de relaciones de orden pueden encontrarse en [20, 50].

Recientemente, la misma autora definió en [61] dos nuevas clases de matrices cuadradas, a las que denominó matrices Drazin-estrella y estrella-Drazin, con el objetivo de resolver determinadas ecuaciones matriciales. En este trabajo D. Mosić demostró varias caracterizaciones de estas nuevas matrices e investigó algunas relaciones entre varias inversas generalizadas conocidas y las matrices Drazin-estrella y estrella-Drazin. También encontró diferentes representaciones para estas clases de matrices desde distintos enfoques. Particularizando estos resultados para una matriz cuadrada de índice uno, definió y estudió las matrices grupo-estrella y estrella-grupo.

Una manera de introducir nuevas inversas generalizadas es a partir de otras ya definidas. Como se expuso anteriormente, las inversas G-Drazin y sus duales fueron introducidas por X. Wang y X. Liu [69] para matrices cuadradas.

En este trabajo se presentan dos nuevas clases de inversas generalizadas utilizando la clase de inversas G-Drazin y la inversa de Moore-Penrose. Se denomina a estas nuevas clases de matrices como inversas GDMP y MPGD. Como la existencia de las inversas G-Drazin y de la inversa de Moore-Penrose están garantizadas, siempre es posible encontrar matrices GDMP y MPGD, aunque en general no son únicas pues las inversas G-Drazin involucradas en su definición no lo son.

En esta tesis, analizando el comportamiento de proyectores del tipo $A^-A$ y $AA^-$ para una matriz rectangular $A$, se encuentra una manera novedosa de introducir inversas generalizadas, como los representantes "más simples" de las clases de equivalencia determinadas por relaciones de equivalencia adecuadas definidas sobre el conjunto de matrices rectangulares complejas. Así se definen las inversas 1MP y MP1. Ahora bien, ¿cómo sería el comportamiento de estas inversas al considerar una inversa exterior en lugar de $A^{-}$? Utilizando otras relaciones de equivalencia se obtienen dos nuevas clases de inversas generalizadas, que se denominan inversas 2MP y sus duales, inversas MP2. Analizando las propiedades de estas dos nuevas clases de matrices, se encuentra una generalización natural para matrices rectangulares de las inversas CMP definidas por M. Mehdipour y A. Salemi en [53] para matrices cuadradas. Una ventaja del método utilizado en esta tesis para encontrar esta extensión es que no se utiliza una matriz peso adicional, que es la manera usual en que se han realizado hasta el momento extensiones de inversas de matrices cuadradas a matrices rectangulares [22, 54, 62, 63].

Como se observó anteriormente, una aplicación de la teoría de inversas generalizadas es introducir relaciones de orden en diferentes conjuntos. En este sentido, en esta tesis se analizan propiedades del orden diamante [1, 45]. También, se utilizan las clases de matrices 1MP y MP1 para dar una nueva caracterización del orden diamante. Además, a partir de estas nuevas clases de inversas generalizadas, se introducen dos nuevas relaciones de orden definidas en el conjunto de matrices rectangulares.

En resumen, en esta tesis se presentan nuevas inversas generalizadas para matrices cuadradas y matrices rectangulares. Como aplicación se encuentran dos nuevas relaciones de orden a partir de clases de inversas generalizadas definidas para matrices rectangulares.

Cabe remarcar que se ilustran diferentes puntos de vista que permiten introducir nuevas inversas generalizadas. En primer lugar, a partir de la inversa de Moore-Penrose y la inversa G-Drazin se definen dos nuevas clases de inversas generalizadas, las inversas GDMP y sus duales, las inversas MPGD, en el conjunto de matrices cuadradas de índice arbitrario. Se investigan sus propiedades a partir de diferentes descomposiciones matriciales conocidas en la literatura. Asimismo, se proporciona un algoritmo para hallarlas. Desde otro punto de vista, a partir de la definición de relaciones de equivalencia adecuadas sobre el conjunto de matrices rectangulares, se introducen nuevas clases de inversas generalizadas: las 1MP, MP1, 2MP y MP2. Se estudian sus propiedades y se utilizan las inversas 2MP para definir las inversas C2MP. Se profundiza el estudio del orden diamante, caracterizando los predecesores de una matriz dada y demostrando otras propiedades de este orden. A partir de las inversas generalizadas 1MP y sus duales, las MP1, se proporciona una nueva caracterización del orden diamante y se definen y estudian dos nuevos órdenes parciales sobre el conjunto de matrices rectangulares.

Esta tesis se organiza de la siguiente forma. En el Capítulo 2 se definen las inversas GDMP y MPGD, utilizando diferentes descomposiciones matriciales para analizar sus propiedades. Se encuentran distintas caracterizaciones de estas inversas. También se analiza su relación con las inversas G-Drazin y se encuentra una forma canónica para las inversas GDMP en algunos conjuntos particulares de matrices. Además, se diseña un algoritmo para hallar una inversa GD y una inversa GDMP a partir de una matriz dada.

En el Capítulo 3 se definen relaciones de equivalencia apropiadas en el conjunto de matrices rectangulares para definir las inversas 1MP, MP1, 2MP y MP2. Se analizan sus propiedades y se encuentran formas canónicas de cada una de ellas. También se formulan distintas caracterizaciones para todas ellas. Se utilizan las inversas 2MP para extender las inversas generalizadas CMP a matrices rectangulares, obteniendo algunos resultados para estas nuevas inversas. Además, como todas las nuevas inversas generalizadas son inversas exteriores, se encuentra para cada una de ellas una representación como una inversa con espacio rango y espacio nulo prescritos.

Por último, en el Capítulo 4 se estudian relaciones de orden conocidas en el conjunto de matrices rectangulares complejas, obteniendo nuevos resultados. Algunos de ellos involucran las inversas 1MP y MP1, definidas en el capítulo anterior. Luego se introducen dos órdenes parciales en el mismo conjunto a partir de estas dos inversas generalizadas y se analizan relaciones entre ellos y con el orden diamante.

## 1.2 Resultados preliminares

En esta sección se presentan definiciones y resultados básicos necesarios para el desarrollo de la tesis. Todos los resultados presentados en esta sección son conocidos y pueden encontrarse, por ejemplo, en [7, 13, 58, 66]. Se presentan demostraciones de algunos de los resultados para mayor claridad o porque el enunciado difiere ligeramente, en algún sentido, con el encontrado en la literatura.

Sea $\mathbb{C}^{m\times n}$ el anillo de todas las matrices complejas de tamaño $m \times n$. Para una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, los símbolos $A^*$, $A^{-1}$, $\mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{N}(A)$ denotan respectivamente la traspuesta conjugada, la inversa (si existe, cuando $m = n$) y los subespacios imagen y núcleo de la matriz $A$. El rango de $A$ se denota por $rg(A)$ y si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, el *índice* de $A$ es el menor entero no negativo $k$ tal que $\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1})$ y es denotado por $k = ind(A)$. Además, los símbolos $I_n$ y $0_{m\times n}$ denotan respectivamente la matriz identidad de tamaño $n\times n$ y la matriz nula de tamaño $m\times n$. Estos subíndices serán omitidos cuando esto no cause confusión.

**Definición 1.2.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La inversa de Moore-Penrose de $A$, denotada por $A^\dagger$, es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisface las condiciones*

$$(1)\, AXA = A, \quad (2)\, XAX = X, \quad (3)\, (AX)^* = AX \quad y \quad (4)\, (XA)^* = XA.$$

En general, para $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, el conjunto de matrices $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisface las ecuaciones $(i), (j), \ldots, (t) \in \{(1), (2), (3), (4)\}$ es denotado por $\mathcal{A}\{i, j, \ldots, t\}$. Una matriz $X \in \mathcal{A}\{i, j, \ldots, t\}$ es llamada una $\{i, j, \ldots, t\}$-inversa de $A$. Si $X \in \mathcal{A}\{1\}$ se dice que $X$ es una matriz inversa interior o $\{1\}$-inversa de $A$, mientras que si $X \in \mathcal{A}\{2\}$ se dice que $X$ es una inversa exterior o $\{2\}$-inversa de $A$.

Se presentan a continuación algunas propiedades de la inversa de Moore-Penrose que se utilizan en el desarrollo de esta tesis.

**Lema 1.2.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces, la inversa de Moore-Penrose de $A$ satisface las siguientes propiedades:*

(a) $A^* = A^*AA^\dagger = A^\dagger AA^*$.

(b) $(A^*A)^\dagger = A^\dagger(A^*)^\dagger$.

(c) $(AA^*)^\dagger = (A^*)^\dagger A^\dagger$.

(d) $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger$.

A diferencia de lo que ocurre con la inversa habitual, en general, $(AB)^\dagger \neq B^\dagger A^\dagger$. Sin embargo, se conocen condiciones bajo las cuales se verifica la igualdad. Se tiene que

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \text{ si y solo si } A^*ABB^* \text{ es hermítica.} \tag{1.1}$$

En particular, para toda matriz $A$ se verifica que

$$(AA^\dagger)^\dagger = AA^\dagger \quad \text{y} \quad (A^\dagger A)^\dagger = A^\dagger A.$$

**Definición 1.2.2.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz de índice a lo sumo 1. La inversa de grupo de $A$, denotada por $A^\#$, es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface las condiciones*

$$AXA = A, \quad XAX = X \quad y \quad AX = XA.$$

**Definición 1.2.3.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se denomina inversa de Drazin de $A$, y se denota por $A^D$, a la la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que verifica las condiciones*

$$XAX = X, \quad XA = AX \quad y \quad A^{k+1}X = A^k.$$

Si $A$ es una matriz de índice a lo sumo 1, la inversa de Drazin y la inversa de grupo de $A$ coinciden.

Se presentan a continuación las definiciones de otras inversas generalizadas utilizadas en este trabajo.

**Definición 1.2.4.** [69] *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es llamada una inversa G-Drazin de $A$ si verifica*

$$AXA = A, \quad XA^{k+1} = A^k \quad y \quad A^{k+1}X = A^k.$$

Para cada matriz $A$, siempre existe una inversa G-Drazin de $A$ pero, en general, no es única.

**Definición 1.2.5.** [4] *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $k = ind(A)$. Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface*

$$AX = AA^{\dagger} \quad y \quad \mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A)$$

*es llamada la inversa core de $A$.*

No toda matriz cuadrada es core invertible, aunque si existe una inversa core de $A$, es única y se denota por $A^{\textcircled{\#}}$. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de la matriz inversa core es que el índice de $A$ sea menor o igual a 1. Además, se sabe que $A^{\textcircled{\#}} = A^{\#}AA^{\dagger}$. La inversa core dual de una matriz cuadrada $A$, si existe, se define mediante $A_{\textcircled{\#}} = A^{\dagger}AA^{\#}$.

**Definición 1.2.6.** [48] *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. La DMP inversa de $A$, denotada por $A^{D,\dagger} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se define como la matriz que satisface la igualdad*

$$A^{D,\dagger} = A^{D}AA^{\dagger}.$$

La existencia y unicidad de la inversa DMP de una matriz cuadrada $A$ está garantizada.

**Definición 1.2.7.** [53] *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. La CMP inversa de $A$ es una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface*

$$XAX = X, \quad AXA = A_1, \quad AX = A_1A^\dagger \quad y \quad XA = A^\dagger A_1,$$

*donde $A_1 = AA^DA$.*

La expresión $A_1$ anterior suele llamarse parte core de la matriz $A$ pues recoge la información de índice 1 de dicha matriz.

La inversa CMP de una matriz cuadrada A siempre existe, es única y es denotada por $A^{c,\dagger}$. Además, puede ser representada como $A^{c,\dagger} = A^\dagger A_1 A^\dagger$.

**Definición 1.2.8.** [49] *Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la inversa core-EP de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si $X$ es una inversa exterior de $A$ y satisface que*

$$\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X^*) = \mathcal{R}(A^k),$$

*donde $k$ es el índice de la matriz $A$.*

La inversa core-EP existe, es única y es denotada por $A^{\textcircled{\dagger}}$. Aunque la expresión original que hallaron los autores K. Manjunatha Prasad y K. S. Mohana en [49] fue $A^{\textcircled{\dagger}} = A^k((A^*)^kA^{k+1})^\dagger(A^*)^k$, en [70] dicha expresión fue simplificada a $A^{\textcircled{\dagger}} = A^k(A^{k+1})^\dagger$.

Una importante aplicación del cálculo de matrices $\{1\}$-inversas es la resolución de ecuaciones matriciales de la forma $AXB = C$, como lo demostró Penrose en el siguiente teorema que lleva su nombre.

**Teorema 1.2.1.** (Penrose) *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$ y $C \in \mathbb{C}^{m\times q}$. Entonces la ecuación matricial*

$$AXB = C$$

*tiene solución (en $X$) si y solo si para alguna $A^-$ en $\mathcal{A}\{1\}$ y alguna $B^-$ en $\mathcal{B}\{1\}$ se cumple que*

$$AA^-CB^-B = C.$$

*En este caso, la solución general de la ecuación $AXB = C$ es*

$$X = A^-CB^- + Y - A^-AYBB^-,$$

*para $Y \in \mathbb{C}^{n\times p}$ arbitraria.*

Dada una matriz $A$, existen diferentes maneras de representar las matrices $\{1\}$-inversas de $A$. Se dan a continuación algunas de estas representaciones, que serán utilizadas en los capítulos posteriores.

**Teorema 1.2.2.** [58, Teorema 2.3.8] *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $G$ una matriz $\{1\}$-inversa de $A$ fija. La clase de todas las $\{1\}$-inversas de $A$ está dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\{1\} &= \{G + U - GAUAG : U \in \mathbb{C}^{n\times m} \text{ es arbitraria}\}\\ &= \{G + (I - GA)V + W(I - AG) : V, W \in \mathbb{C}^{n\times m} \text{ son arbitrarias}\}.\end{aligned}$$

**Lema 1.2.2.** *Sea $C$ una matriz de la forma $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde $A$ es una matriz cuadrada no singular. Entonces toda matriz $\{1\}$-inversa de $C$ es de la forma*

$$C^- = \begin{pmatrix} A^{-1} & L \\ M & N \end{pmatrix},$$

*donde $L$, $M$ y $N$ son matrices arbitrarias de tamaños adecuados.*

Se presentan a continuación diversas descomposiciones de una matriz que se utilizan en el desarrollo de esta tesis.

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una matriz de rango $a > 0$. Entonces $A$ puede descomponerse de la forma

$$A = U \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*, \tag{1.2}$$

donde $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices unitarias y $D_a = diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_a)$, donde $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_a > 0$ son los valores singulares de $A$. Esta representación se denomina *descomposición en valores singulares* de $A$. Si $A$ está escrita mediante una descomposición en valores singulares como en (1.2), entonces la inversa de Moore-Penrose de $A$ se representa mediante

$$A^\dagger = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*. \tag{1.3}$$

Además, bajo esta representación de $A$, la forma general de toda matriz $\{1\}$-inversa de $A$ está dada por

$$A^- = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} U^*, \tag{1.4}$$

donde $A_{12}, A_{21}$ y $A_{22}$ son matrices arbitrarias de tamaños adecuados.

También, bajo la misma representación de $A$, se puede encontrar la forma general de toda matriz $\{2\}$-inversa de $A$, como se muestra en el siguiente resultado.

**Lema 1.2.3.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ escrita mediante una descomposición en valores singulares como en* (1.2). *Si $A^{(2)}$ es una inversa exterior de $A$, entonces $A^{(2)}$ se puede representar como*

$$A^{(2)} = V \begin{pmatrix} M & MY_{12} \\ Y_{21}M & Y_{21}MY_{12} \end{pmatrix} U^* \text{ con } MD_aM = M, \tag{1.5}$$

*donde $Y_{12}$, $Y_{21}$ son matrices arbitrarias de tamaños adecuados.*

*Demostración.* Considerar $A$ escrita como en (1.2) y sea $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$ particionada de acuerdo al tamaño de los bloques de A como

$$A^{(2)} = V \begin{pmatrix} M & N \\ R & S \end{pmatrix} U^*.$$

Se tiene que la igualdad $A^{(2)}AA^{(2)} = A^{(2)}$ es equivalente a las condiciones $MD_aM = M$, $MD_aN = N$, $RD_aM = R$, $RD_aN = S$. De $MD_aM = M$ se tiene que $MD_a$ y $D_aM$ son matrices idempotentes. De $(I - MD_a)N = 0$ se obtiene que $\mathcal{R}(N) \subseteq \mathcal{N}(I - MD_a) = \mathcal{R}(MD_a) = \mathcal{R}(M)$. Luego, existe una matriz $Y_{12}$ tal que $N = MY_{12}$.

Análogamente, de $R(I - D_aM) = 0$, se obtiene $\mathcal{N}(M) = \mathcal{N}(D_aM) = \mathcal{R}(I - D_aM) \subseteq \mathcal{N}(R)$. Entonces, existe una matriz $Y_{21}$ tal que $R = Y_{21}M$. Por lo tanto, $S = RD_aN = Y_{21}MD_aMY_{12} = Y_{21}MY_{12}$.

Para probar que las matrices de la forma encontrada son inversas exteriores, es suficiente realizar el producto matricial $A^{(2)}AA^{(2)}$. $\square$

La descomposición core nilpotente ([13, Teoremas 7.2.1, 7.3.2 y 7.3.3]) de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(A) = k$ y $\mathrm{rg}(A) = a > 0$, está dada por

$$A = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1}, \tag{1.6}$$

donde $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $C \in \mathbb{C}^{a\times a}$ son matrices no singulares y $N \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ es una matriz nilpotente con índice de nilpotencia $k$.

Además, si $A$ está escrita como en (1.6), se tiene que

$$A^D = P \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{1.7}$$

También se sabe ([69]) que si $A$ está escrita como en (1.6), entonces

$$A^{GD} = P \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & N^{-} \end{pmatrix} P^{-1}, \tag{1.8}$$

donde $N^{-} \in N\{1\}$.

Considerar una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de rango $a > 0$. Una descomposición de Hartwig-Spindelböck [2, 35] de $A$ está dada por

$$A = U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{*}, \tag{1.9}$$

donde $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es unitaria, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1 I_{a_1}, \sigma_2 I_{a_2}, \ldots, \sigma_t I_{a_t})$, los elementos $\sigma_i$ de la diagonal son los valores singulares de $A$, $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_t > 0$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_t = a$, $K \in \mathbb{C}^{a\times a}$, $L \in \mathbb{C}^{a\times(n-a)}$ y se satisface la condición $KK^{*} + LL^{*} = I_a$.

Si $A$ está escrita en una descomposición de Hartwig-Spindelböck como en (1.9), su inversa de Moore-Penrose tiene la siguiente representación matricial:

$$A^{\dagger} = U \begin{pmatrix} K^{*}\Sigma^{-1} & 0 \\ L^{*}\Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^{*}. \tag{1.10}$$

Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ de rango $a > 0$ posee una representación de la forma $A = RS$, donde $R \in \mathbb{C}^{m\times a}$, $S \in \mathbb{C}^{a\times n}$ y además $rg(R) = rg(S) = rg(A)$. En este caso se dice que $(R, S)$ es una factorización de rango completo de la matriz $A$. Esta descomposición siempre existe y en general no es única ([58, Teorema 2.2.2]).

Una relación binaria definida sobre un conjunto no vacío es un preorden si verifica las propiedades reflexiva y transitiva. Si además, una relación de este tipo satisface la propiedad antisimétrica, se dice que es un orden parcial. A continuación se presentan algunas de estas relaciones y resultados conocidos sobre ellas, que serán utilizarán en este trabajo.

**Definición 1.2.9.** *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Se dice que $A$ es menor o igual que $B$ bajo el orden parcial menos, y se denota $A \leq^- B$, si y solo si existe una matriz $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$ tal que $A^-A = A^-B$ y $AA^- = BA^-$.*

En este caso se dice que $A$ es un predecesor de $B$, o equivalentemente que $B$ es un sucesor de $A$, bajo el orden menos.

Existen diferentes caracterizaciones del orden menos. Se presentan a continuación algunas de ellas, que son utilizadas para el desarrollo de esta tesis.

**Lema 1.2.4.** [6, Teorema 2.1] *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ no nulas. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $A \leq^- B$.

(b) $BB^-A = AB^-B = AB^-A = A$ *para toda* $B^- \in \mathcal{B}\{1\}$.

(c) $\mathcal{B}\{1\} \subseteq \mathcal{A}\{1\}$.

(d) $rg(B) = rg(A) + rg(B - A)$.

**Teorema 1.2.3.** [58, Teorema 3.4.3] *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces*

$$A \leq^- B \text{ si y solo si existe } A^- \in \mathcal{A}\{1\} : \; B = A + (I - AA^-)W(I - A^-A),$$

*donde $W$ es una matriz arbitraria de tamaño adecuado.*

**Teorema 1.2.4.** [58, Teorema 3.4.4] *Sea $A$ una matriz no singular. Si las matrices* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y $B$ tienen el mismo tamaño, entonces*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq^- B$$

*si y solo si*

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -AL \\ I \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} -MA & I \end{pmatrix},$$

*para alguna matriz $Z$ y para matrices arbitrarias $L$ y $M$, todas de tamaños adecuados.*

*Demostración.* Sea $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por el Teorema 1.2.3 se sabe que $C \leq^- B$ si y solo si $B = C + (I - CC^-)W(I - C^-C)$ para alguna matriz $C^- \in \mathcal{C}\{1\}$ y alguna matriz $W$ de tamaño adecuado. Además, por el Lema 1.2.2 se tiene que $C^- = \begin{pmatrix} A^{-1} & L \\ M & N \end{pmatrix}$, donde L, M y N son matrices arbitrarias de tamaños adecuados. Reemplazando las representaciones matriciales de $C$ y de $C^-$ en la expresión $B = C + (I - CC^-)W(I - C^-C)$, considerando la matriz $W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$ particionada adecuadamente y realizando las operaciones indicadas, resulta que ésta es equivalente a

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ALW_{22}MA & -ALW_{22} \\ -W_{22}MA & W_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -AL \\ I \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} -MA & I \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con $Z = W_{22}$. □

**Observación 1.2.1.** En el Teorema 1.2.4 se tiene que $B$ es no singular si y solo si $Z$ es no singular.

En efecto, si $Z$ no singular, el complemento de Schur de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} A + ALZMA & -ALZ \\ -ZMA & Z \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} B/Z &= (A + ALZMA) - (-ALZ)\, Z^{-1}\, (-ZMA) \\ &= A + ALZMA - ALZMA \\ &= A. \end{aligned}$$

Por ser $A$ no singular, se tiene que $B/Z$ es no singular. Así, $B$ es no singular.

Recíprocamente, si $B$ es no singular, se considera el producto

$$B \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ M & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -ALZ \\ 0 & Z \end{pmatrix}.$$

En esta igualdad, el miembro de la izquierda es una matriz no singular y así el miembro de la derecha también lo es. Luego, $Z$ es no singular.

**Teorema 1.2.5.** [58, Teorema 3.4.6] *Sea $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una matriz no nula con una factorización de rango completo $(P, Q)$. Entonces el conjunto de todas las matrices $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tales que $A \leq^{-} B$ está dado por*

$$\{PTQ : T \textit{ es idempotente}\}.$$

En el siguiente resultado se supondrá que $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ está representada mediante una descomposición en valores singulares a través la expresión

$$A = U \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*. \tag{1.11}$$

Observar que $A = 0 \leq^- B$, para toda matriz $B$.

**Teorema 1.2.6.** [58, Teorema 3.7.3] *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, con $rg(A) = a$, $rg(B) = b$, y $b > a \geq 1$, donde $A$ está escrita como en* (1.11)*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(*a*) $A \leq^- B$.

(*b*) *Existen matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y matrices no singulares $T_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $T_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que*

$$A = UT_1\mathrm{diag}(D_a, 0_{b-a}, 0)T_2V^* \quad y \quad B = UT_1\mathrm{diag}(D_a, D_{b-a}, 0)T_2V^*,$$

*donde $D_a$ y $D_{b-a}$ son matrices diagonales definidas positivas.*

*Demostración.* (*b*) $\Longrightarrow$ (*a*) Sigue de [58, Teorema 3.3.5, $vi) \to i)$].

(*a*) $\Longrightarrow$ (*b*) Suponer $A \leq^- B$. Considerar para $A$ una descomposición en valores singulares

$$A = U' \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V'^*, \tag{1.12}$$

donde $U' \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V' \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices unitarias y $D_a$ es una matriz diagonal definida positiva.

Así, $rg(A) = rg(D_a) = a$ y $rg(B) = rg(B^*) = b$. Se particionan las matrices $U'$ y $V'$ de acuerdo al tamaño de los bloques de $\begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de la forma

$$U' = \begin{pmatrix} U_1' & U_2' \end{pmatrix} \text{ y } V'^* = \begin{pmatrix} V_1'^* \\ V_2'^* \end{pmatrix},$$

con $U_1'$ formada por las $a$ primeras columnas de $U'$ y $U_2'$ por el resto, $V_1'^*$ formada por las $a$ primeras filas de $V'^*$ y $V_2'^*$ por las restantes. Entonces

$$A = \begin{pmatrix} U_1' & U_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1'^* \\ V_2'^* \end{pmatrix} = U_1' D_a V_1'^*.$$

Esto es, $A = U_1' D_a V_1'^*$, con $U_1' \in \mathbb{C}^{m\times a}$ y $V_1' \in \mathbb{C}^{a\times n}$.

Como $U'$ es una matriz unitaria se tiene que

$$I_m = \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & I_{m-a} \end{pmatrix} = U'^* U' = \begin{pmatrix} U_1'^* \\ U_2'^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1' & U_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1'^* U_1' & U_1'^* U_2' \\ U_2'^* U_1' & U_2'^* U_2' \end{pmatrix}.$$

Luego, $U_1'^* U_1' = I_a$. Análogamente, $V_1'^* V_1' = I_a$. Esto es, las columnas de $U_1'$ y las de $V_1'$ son ortonormales con respecto al producto escalar canónico de $\mathbb{C}^a$. Además, $rg(U_1') = a = rg(V_1')$. Notar que

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(U_1' D_a V_1'^*) \subseteq \mathcal{R}(U_1') \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(V_1' D_a U_1'^*) \subseteq \mathcal{R}(V_1').$$

Luego, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(U_1')$ y $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(V_1')$.

Por otra parte, como por hipótesis $A \leq^- B$, se sabe que $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ y $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*)$. Luego, $\mathcal{R}(U_1') \subseteq \mathcal{R}(B)$ y $\mathcal{R}(V_1') \subseteq \mathcal{R}(B^*)$. Por lo tanto, existe una matriz $U_2 \in \mathbb{C}^{m\times(b-a)}$ cuyas columnas son ortonormales tal que las columnas de $\begin{pmatrix} U_1' & U_2 \end{pmatrix}$ forman una base de $\mathcal{R}(B)$ y, análogamente, existe una matriz $V_2 \in$

$\mathbb{C}^{n\times(b-a)}$ con columnas ortonormales tal que las columnas de $\begin{pmatrix} V_1' & V_2 \end{pmatrix}$ forman una base ortonormal de $\mathcal{R}(B^*)$.

Como $\mathcal{R}(B)$ y $\mathcal{R}(B^*)$ son subespacios vectoriales de los respectivos espacios euclídeos $\mathbb{C}^m$ y $\mathbb{C}^n$, las bases anteriores se pueden extender a bases ortonormales de $\mathbb{C}^m$ y $\mathbb{C}^n$, respectivamente.

Esto es, existen matrices $U_3 \in \mathbb{C}^{m\times(m-b)}$ y $V_3 \in \mathbb{C}^{n\times(n-b)}$, ambas con columnas ortonormales, tales que las columnas de $U = \begin{pmatrix} U_1' & U_2 & U_3 \end{pmatrix}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^m$ y las de $V = \begin{pmatrix} V_1' & V_2 & V_3 \end{pmatrix}$ una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$. Por lo tanto, $U$ y $V$ son matrices unitarias y, además, es inmediato que $A = U_1'D_aV_1'^* = U\mathrm{diag}(D_a, 0_{b-a}, 0)V^*$.

Por otro lado,

$$U^*BV = \begin{pmatrix} U_1'^* \\ U_2^* \\ U_3^* \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} V_1' & V_2 & V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1'^*BV_1' & U_1'^*BV_2 & U_1'^*BV_3 \\ U_2^*BV_1' & U_2^*BV_2 & U_2^*BV_3 \\ U_3^*BV_1' & U_3^*BV_2 & U_3^*BV_3 \end{pmatrix}.$$

Ahora, $\mathcal{R}(BV_1') \subseteq \mathcal{R}(B)$ y por construcción de $U$, $\mathcal{R}(U_3)$ es ortogonal a $\mathcal{R}(B)$, con lo que $U_3^*BV_1' = 0$. Análogamente, como $\mathcal{R}(BV_2) \subseteq \mathcal{R}(B)$ se tiene que $U_3^*BV_2 = 0$.

Además $(U_1'^*BV_3)^* = V_3^*B^*U_1'$, $\mathcal{R}(B^*U_1') \subseteq \mathcal{R}(B^*)$ y por construcción de la base $V$, $V_3^*$ es ortogonal a $\mathcal{R}(B^*)$. Luego $V_3^*B^* = 0$. Así, $U_i'^*BV_3 = 0$ para $i = 1, 2, 3$. Por lo tanto, considerando

$$M = \begin{pmatrix} U_1'^*BV_1' & U_1'^*BV_2 \\ U_2^*BV_1' & U_2^*BV_2 \end{pmatrix}$$

se tiene que $B = U \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*$, con $M$ no singular (pues $rg(M) = b$ y $U$ y $V$ son unitarias).

Como $A \leq^- B$ se sabe por [58, Teorema 3.3.4] que $U^*AV \leq^- U^*BV$. Esto es

$$\operatorname{diag}(D_a, 0_{b-a}, 0) \leq^- \operatorname{diag}(M, 0), \text{ que es equivalente a}$$

$$\operatorname{diag}(D_a, 0_{b-a}) \leq^- M.$$

Luego, por el Teorema 1.2.4 existe una matriz $Z$ de tamaño adecuado tal que

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -D_aL_1 \\ I_{b-a} \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} -L_2D_a & I_{b-a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_a + D_aL_1ZL_2D_a & -D_aL_1Z \\ -ZL_2D_a & Z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $L_1$ y $L_2$ son matrices arbitrarias de tamaños adecuados. Como $M$ es no singular, por la Observación 1.2.1 se tiene que $Z$ es no singular.

Notar que si se consideran

$$P = \begin{pmatrix} I_a & -D_aL_1 \\ 0 & I_{b-a} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ -L_2D_a & I_{b-a} \end{pmatrix}$$

se tiene que $P, Q \in \mathbb{C}^{b\times b}$ son matrices no singulares y además

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} Q &= \begin{pmatrix} I_a & -D_aL_1 \\ 0 & I_{b-a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} Q \\ &= \begin{pmatrix} D_a & -D_aL_1Z \\ 0 & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ -L_2D_a & I_{b-a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_a + D_aL_1ZL_2D_a & -D_aL_1Z \\ -ZL_2D_a & Z \end{pmatrix} = M \end{aligned}$$

y

$$P\begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q = \begin{pmatrix} I_a & -D_aL_1 \\ 0 & I_{b-a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$$
$$= \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_a & 0 \\ -L_2D_a & I_{b-a} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $Z$ es una matriz no singular de tamaño $(b-a)\times(b-a)$, entonces $Z$ posee una descomposición en valores singulares de la forma $Z = RD_{b-a}S$, donde $D_{b-a}$ es una matriz diagonal definida positiva y $R$ y $S$ son matrices unitarias de tamaño $(b-a)\times(b-a)$. Entonces, si se consideran las matrices $T_1 = \mathrm{diag}(P\mathrm{diag}(I_a, R), I_{m-b})$ y $T_2 = \mathrm{diag}(\mathrm{diag}(I_a, S)Q, I_{n-b})$ donde claramente $T_1$ y $T_2$ son no singulares, se verifica que

$$UT_1\mathrm{diag}(D_a, 0_{b-a}, 0_{(m-b)\times(n-b)})T_2V^* = U\mathrm{diag}(D_a, 0_{b-a}, 0_{(m-b)\times(n-b)})V^* = A.$$

Análogamente,

$$UT_1\mathrm{diag}(D_a, D_{b-a}, 0_{(m-b)\times(n-b)})T_2V^* = B.$$

$\square$

**Corolario 1.2.1.** [58, Corolario 3.7.4] *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $rg(A) = a$, $rg(B) = b$ y $b > a \geq 1$. Entonces $A \leq^- B$ si y solo si existen matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, una matriz diagonal definida positiva $D_a$ y matrices no singulares $Z \in \mathbb{C}^{(b-a)\times(b-a)}$ y $M \in \mathbb{C}^{b\times b}$ tales que*

$$A = U\mathrm{diag}(D_a, 0_{b-a}, 0)V^*, \quad B = U\mathrm{diag}(M, 0)V^*$$

*y*

$$M = \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -D_a L_1 \\ I \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} -L_2 D_a & I \end{pmatrix},$$

*donde $L_1$ y $L_2$ son matrices arbitrarias de tamaños adecuados.*

**Definición 1.2.10.** *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se dice que $A$ es menor o igual que $B$ bajo el orden parcial estrella, y se denota $A \leq^* B$, si*

$$AA^* = BA^* \quad y \quad A^*A = A^*B.$$

**Observación 1.2.2.** En las igualdades utilizadas para definir el orden estrella puede reemplazarse $A^*$ por $A^\dagger$.

**Definición 1.2.11.** *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se dice que $A$ precede a $B$ bajo el preorden espacio, y se denota $A \prec^s B$, si se verifican las condiciones*

$$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B) \quad y \quad \mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*).$$

Se sabe que $A \leq^* B$ implica $A \leq^- B$ y también que si $A \leq^- B$, entonces $A \prec^s B$.

# Capítulo 2

# Inversas GDMP y sus duales

## 2.1 Introducción

Tal como se definió en el Capítulo 1, dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ siempre existe su inversa de Drazin, y su unicidad está garantizada. Además, coincide con su inversa de grupo cuando $ind(A) \leq 1$. Un análisis detallado de estas inversas generalizadas puede encontrarse, por ejemplo, en [7, 13, 67] y algunas aplicaciones en [42].

S.L. Campbell y C.D. Meyer consideraron en [14] algunas modificaciones a la inversa de Drazin introduciendo inversas de Drazin débiles. Un caso particular de estas inversas de Drazin débiles fue definido por H.X. Wang y X.J. Liu en [69], quienes introdujeron en ese trabajo la noción de inversa G-Drazin. El símbolo $\mathcal{A}\{GD\}$ representa al conjunto de todas las inversas G-Drazin de $A$ y un elemento de este conjunto se denota por $A^{GD}$.

C. Coll, M. Lattanzi y N. Thome probaron en [22] que el conjunto de ecuaciones que definen esta inversa es equivalente a un sistema de ecuaciones más reducido y sencillo que el dado por Wang y Liu y está dado por, dado por

$$AXA = A \quad \text{y} \quad A^k X = XA^k. \tag{2.1}$$

Se pueden encontrar más detalles de las inversas G-Drazin en [22, 63, 69].

Una manera de definir nuevas inversas generalizadas y sus duales es a partir de otras previamente estudiadas. Para una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, dos de tales inversas generalizadas híbridas, $A^{\oplus} := A^{\#}AA^{\dagger}$ y $A_{\oplus} := A^{\dagger}AA^{\#}$, fueron definidas por C.R. Rao y S.K. Mitra en [66, p.97]. Ambas inversas fueron redescubiertas por O.M. Baksalary y G. Trenkler en [4], quienes introducen la inversa $A^{\oplus}$ como la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $AX = AA^{\dagger}$ y $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Claramente, las matrices $A^{\oplus}$ y $A_{\oplus}$ solo existen cuando $ind(A) \leq 1$; tales matrices son conocidas como la inversa *core* y la inversa *core dual* de $A$, respectivamente.

En [68, Teorema 2.1], H.X. Wang y X.J. Liu probaron que si $ind(A) \leq 1$, entonces la inversa core de $A$ es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface las siguientes tres ecuaciones

$$AXA = A, \quad AX^2 = X \quad \text{y} \quad (AX)^* = AX. \tag{2.2}$$

Estas inversas fueron generalizadas para matrices de índice arbitrario por S.B. Malik y N. Thome en [48]. Para una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de índice $k$, estos autores introdujeron la inversa DMP de $A$ como la única solución del sistema de ecuaciones matriciales

$$XAX = X, \quad XA = A^D A \quad \text{y} \quad A^k X = A^k A^{\dagger}, \tag{2.3}$$

y la denotaron por $A^{D,\dagger}$. También probaron que $A^{D,\dagger} = A^D AA^{\dagger}$. Similarmente, definieron su dual como $A^{\dagger,D} = A^{\dagger}AA^D$.

Algunas propiedades y extensiones de las inversas DMP y otras inversas generalizadas se pueden encontrar en [16, 17, 23, 71, 72].

Para una $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de índice $k$, se introdujo recientemente su inversa Drazin estrella, definida por D. Mosić en [61] como $A^{D,*} = A^D AA^*$, que es una $\{2\}$-inversa de $(A^\dagger)^*$. Dualmente se introdujo la matriz $A^{*,D} = A^* AA^D$, que se llama la inversa estrella Drazin de $A$.

Otros resultados y aplicaciones de estas inversas generalizadas en el contexto de espacios de Banach pueden encontrarse en [53].

Las inversas mencionadas anteriormente, a excepción de las inversas G-Drazin, tienen garantizada su existencia y unicidad. Además, cada una de ellas puede representarse como la (única) solución de un sistema de ecuaciones matriciales adecuado.

El principal objetivo de este capítulo es introducir e investigar una nueva clase de inversas generalizadas híbridas, las inversas GDMP (y dualmente, las inversas MPGD). Estas nuevas clases de matrices proporcionan una extensión de las inversas DMP y MPD a clases más generales.

En [7, Lema 3, p.45] se probó que si $B$ y $C$ son $\{1\}$-inversas de $A$, entonces el producto $BAC$ es una $\{1, 2\}$-inversa de $A$. Se estudiará esta clase de $\{1, 2\}$-inversas considerando el caso en que $B$ o $C$ sean la inversa de Moore-Penrose de $A$.

El capítulo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 2.2, se introducen nuevas inversas generalizadas, llamadas inversas GDMP, que proporcionan una generalización de las inversas DMP (y sus duales). Además, se obtiene una representación de las inversas GDMP utilizando la descomposición core nilpotente. Después de dar una representación de las inversas G-Drazin, en la Sección 2.3 se obtiene una caracterización de las inversas GDMP a través de la descomposición de Hartwing-Spindelböck. En la Sección 2.4 se presenta a las inversas GDMP como la solución de un sistema de ecuaciones matriciales. En la Sección 2.5 se muestra que las inversas duales de las inversas GDMP pueden ser introducidas y analizadas de manera similar. Finalmente, en la Sección 2.6 se presenta un algoritmo que permite obtener, a partir de una matriz $A$, una inversa GD y una inversa GDMP de A.

## 2.2 Definición y propiedades de las inversas GDMP

Esta sección presenta nuevas inversas generalizadas, denominadas inversas GDMP, que se pueden considerar como una generalización de las inversas DMP.

**Definición 2.2.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $k = ind(A)$. Para cada matriz $A^{GD} \in \mathcal{A}\{GD\}$ se define la inversa GDMP de A, denotada por $A^{GD\dagger}$, como la matriz de tamaño $n \times n$*

$$A^{GD\dagger} = A^{GD} AA^{\dagger}.$$

El conjunto de todas las inversas GDMP de $A$ se denota $\mathcal{A}\{GD\dagger\}$ y es no vacío pues $\mathcal{A}\{GD\}$ es no vacío. Este conjunto contiene en general más de un elemento. La clase de matrices inversas GDMP de $A$ puede representarse como el conjunto

$$A\{GD\dagger\} = \{A^{GD} AA^{\dagger} : A^{GD} \in \mathcal{A}\{GD\}\}.$$

Se presentan a continuación algunas propiedades de estas matrices inversas generalizadas.

**Proposición 2.2.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $k = ind(A)$. Entonces, para cada matriz $A^{GD} \in A\{GD\}$, la matriz $A^{GD\dagger}$ verifica las siguientes propiedades:*

(a) $A^{GD\dagger} \in A\{1,2\}$.

(b) $AA^{GD\dagger} = AA^{\dagger}$ *y* $A^{GD\dagger}A = A^{GD}A$.

(c) $A^s A^{GD\dagger} = A^s A^{\dagger}$ *y* $A^{GD\dagger}A^s = A^{GD}A^s$ *para cualquier entero positivo s.*

(*d*) $A^{GD\dagger}A^{k+1} = A^k$.

(*e*) $A^{GD\dagger} = A^{GD}AA^{GD\dagger}$.

*Demostración.* (*a*) Como $A^{GD}$ y $A^\dagger \in A\{1\}$ se tiene, por lo observado en la sección anterior, que el producto $A^{GD}AA^\dagger = A^{GD\dagger} \in A\{1,2\}$.

(*b*) $AA^{GD\dagger} = (AA^{GD}A)A^\dagger = AA^\dagger$. Por otro lado, $A^{GD\dagger}A = A^{GD}(AA^\dagger A) = A^{GD}A$.

(*c*) $A^sA^{GD\dagger} = A^sA^{GD}AA^\dagger = A^{s-1}(AA^{GD}A)A^\dagger = A^{s-1}AA^\dagger = A^sA^\dagger$. Además $A^{GD\dagger}A^s = A^{GD}AA^\dagger A^s = A^{GD}(AA^\dagger A)A^{s-1} = A^{GD}A^s$.

(*d*) Utilizando el apartado anterior se tiene que $A^{GD\dagger}A^{k+1} = A^{GD\dagger}A^kA = A^{GD}A^kA = A^{GD}A^{k+1} = A^k$.

(*e*) $A^{GD\dagger} = A^{GD\dagger}AA^{GD\dagger} = A^{GD}(AA^\dagger A)A^{GD\dagger} = A^{GD}AA^{GD\dagger}$. □

Como las inversas G-Drazin proporcionan una generalización de la inversa de Drazin, si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, para cada $A^{GD} \in \mathcal{A}\{GD\}$, la inversa GDMP constituye una generalización de la inversa DMP. En [48, p.8] los autores consideran la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que verifica que $ind(B) = 2$, y además

$$B^D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B^{D,\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se observa que $B^{D,\dagger}$ no es una $\{1\}$-inversa de $B$ pues $\mathrm{rg}(B) \not\leq \mathrm{rg}(B^{D,\dagger})$. Entonces, por la Proposición 2.2.1 (a), es claro que $B^{D,\dagger} \notin \mathcal{B}\{GD\dagger\}$. Por medio de este ejemplo se muestra que $\{B^{D,\dagger}\}$ no está contenido en $\mathcal{B}\{GD\dagger\}$.

Ahora se presenta una descomposición de las inversas GDMP de una matriz $A$ a partir de su descomposición core nilpotente [13, 58].

Si $A$ está escrita en su descomposición core nilpotente como en (1.6), entonces toda inversa G-Drazin de $A$ puede ser escrita como en (1.8).

La descomposición core nilpotente permite encontrar condiciones necesarias (pero no suficientes) para la caracterización de la matriz $A^{GD\dagger}$.

**Teorema 2.2.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ escrita como en (1.6). Entonces, para cada inversa G-Drazin $A^{GD}$ de $A$, la inversa GDMP de $A$ puede ser representada como*

$$A^{GD\dagger} = P \begin{pmatrix} C^{-1} & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix} P^{-1},$$

*donde $A_2$ y $A_4$ son matrices de tamaños adecuados tales que $A_2N = 0$, $A_4N = N^-N$ y $A_4 = N^-NA_4$, para alguna $N^- \in N\{1\}$ (en consecuencia, $A_4 \in N\{1,2\}$) .*

*Demostración.* Considerar $A$ y $A^{GD}$ escritas como en (1.6) y (1.8), respectivamente. Sea

$$A^{GD\dagger} = P \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

particionada acorde al tamaño de los bloques de $A$. Puede observarse que

$$A^{GD\dagger}A = P \begin{pmatrix} A_1C & A_2N \\ A_3C & A_4N \end{pmatrix} P^{-1}$$

y

$$A^{GD}A = P \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & N^-N \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Por la Proposición 2.2.1 $(b)$, $A^{GD\dagger}A = A^{GD}A$. Así, $A_1 = C^{-1}$, $A_2N = 0$, $A_3 = 0$ y $A_4N = N^-N$.

Por lo tanto

$$A^{GD\dagger} = P \begin{pmatrix} C^{-1} & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

y

$$A^{GD\dagger}AA^{GD\dagger} = P \begin{pmatrix} C^{-1} & A_2 \\ 0 & N^-NA_4 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Por la Proposición 2.2.1 $(a)$, $A^{GD\dagger}AA^{GD\dagger} = A^{GD\dagger}$. Luego, $N^-NA_4 = A_4$, y así se completa la prueba. $\square$

Considerar la matriz $A$ de índice 2 escrita en su descomposición core-nilpotente como en (1.6), a partir de

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si se toman las matrices

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N^- = A_4,$$

se observa que se verifican las condiciones requeridas en la Proposición 2.2.1. Así,

$$H = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \in \mathcal{A}\{GD\dagger\}.$$

Sin embargo, $HA \neq A^D A$ y así $H \neq A^{D,\dagger}$. De esta manera se muestra que $\mathcal{A}\{GD\dagger\} \not\subseteq \{A^{D,\dagger}\}$.

**Observación 2.2.1.** Notar que si $ind(A) \leq 1$, entonces la única inversa GDMP es la inversa core y por lo tanto $\mathcal{A}\{GD\dagger\} = \{A^{\oplus}\} = \{A^{D,\dagger}\}$

## 2.3 Cálculo de inversas GDMP usando la descomposición de Hartwig-Spindelböck

En esta sección se proporciona una caracterización para una matriz inversa GDMP de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ utilizando la descomposición de Hartwig-Spindelböck de $A$.

Se presenta una descomposición para cada $A^{GD} \in \mathcal{A}\{GD\}$ a partir de una descomposición de Hartwig-Spindelböck de $A$. Para lograr este objetivo se demuestran algunas propiedades.

**Observación 2.3.1.** Considerar $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ escrita en su descomposición de Hartwig-Spindelböck como en (1.9), con $\mathrm{rg}(A) = a$, $ind(A) = k$. Si $\Delta := (\Sigma K)^{GD}$ es una inversa G-Drazin de $\Sigma K$ y $P := (\Sigma K)^k \Delta^k$, entonces se verifican las siguientes propiedades:

(p1) $ind(\Sigma K) = k - 1$, ([48, Lema 2.8]).

(p2) $\Delta^{k-1}$ es una inversa G-Drazin de $(\Sigma K)^{k-1}$, ([29, Lema 3.1]).

(p3) $\Delta(\Sigma K)^k = (\Sigma K)^k\Delta = (\Sigma K)^{k-1}$.

(p4) $(\Sigma K)^{k-1}\Delta = \Delta(\Sigma K)^{k-1}$.

(p5) $(\Sigma K)^k\Delta^k(\Sigma K)^k = (\Sigma K)^k$.

(p6) $P = (\Sigma K)^{k-1}\Delta^{k-1}$.

(p7) $P(\Sigma K)^{k-1} = (\Sigma K)^{k-1}P = (\Sigma K)^{k-1}$. En consecuencia, $P(\Sigma K)^k = (\Sigma K)^k P = (\Sigma K)^k$.

(p8) $P\Delta(\Sigma K)^k = (\Sigma K)^{k-1}$.

(p9) $\Sigma K P\Delta = P$.

*Demostración.* Las propiedades (p3) y (p4) resultan directamente de la definición de inversa G-Drazin y (p1). Ahora, como $(\Sigma K)^{k-1}\Delta^{k-1}(\Sigma K)^{k-1} = (\Sigma K)^{k-1}$ por (p2), la afirmación (p5) sigue pre-multiplicando por $(\Sigma K)\Delta$, posmultiplicando por $\Sigma K$, y aplicando las propiedades (p4) y (p3). La propiedad (p6) se obtiene considerando la definición de $P$ y aplicando (p3). A partir de (p6), posmultiplicando por $(\Sigma K)^{k-1}$ y utilizando (p2) y (p4), se obtiene (p7). La propiedad (p8) es obtenida a partir de (p6), posmultiplicando por $\Delta(\Sigma K)^k$ y usando (p3) y (p2). Finalmente, (p9) se obtiene realizando el producto $\Sigma K P\Delta$ utilizando (p6). □

**Teorema 2.3.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ escrita en su descomposición de Hartwig-Spindelböck como en* (1.9)*, con $rg(A) = a$, $ind(A) = k$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

*(a)* $X \in \mathcal{A}\{GD\}$.

(*b*) *Existen matrices* $X_i$, *para* $i = 1, 2, 3, 4$ *de tamaños adecuados tales que*

$$X = U \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} U^*, \tag{2.4}$$

*y se satisfacen las siguientes cuatro condiciones:*

(*i*) $\Sigma K X_1 + \Sigma L X_3 = I_a$,

(*ii*) $X_1 (\Sigma K)^k = (\Sigma K)^{k-1}$,

(*iii*) $X_3 (\Sigma K)^{k-1} = 0$,

(*iv*) $(\Sigma K)^{k+1} X_2 + (\Sigma K)^k \Sigma L X_4 = (\Sigma K)^{k-1} \Sigma L$.

(*c*) *Existe una inversa G-Drazin* $\Delta := (\Sigma K)^{GD}$ *de* $\Sigma K$ *tal que para matrices arbitrarias* $S \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$, $Z \in \mathbb{C}^{a\times a}$, $\Gamma_1 \in \mathbb{C}^{a\times(n-a)}$ *y* $\Gamma_2 \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$, $X$ *puede ser escrita como en* (2.4), *donde* $P := (\Sigma K)^{k-1}\Delta^{k-1}$ *y*

$$\begin{aligned}
&X_1 = P\Delta + Z(I_a - P),\\
&X_2 = K^*\Sigma^{-1}\Delta P \Sigma L + (I_a - K^*\Sigma^{-1}P\Sigma K)\Gamma_1 - K^*\Sigma^{-1}P\Sigma L\Gamma_2,\\
&X_3 = S(I_a - P),\\
&X_4 = L^*\Sigma^{-1}\Delta P\Sigma L + (I_{n-a} - L^*\Sigma^{-1}P\Sigma L)\Gamma_2 - L^*\Sigma^{-1}P\Sigma K\Gamma_1,\\
&(\Sigma K Z + \Sigma L S)(I_a - P) = (I_a - P).
\end{aligned}$$

*Demostración.* Considerar $A$ escrita en su descomposición de Hartwig-Spindelböck como en (1.9). Entonces, se obtienen las siguientes representaciones matriciales:

$$A^k = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^k & (\Sigma K)^{k-1}\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

y

$$A^{k+1} = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{k+1} & (\Sigma K)^k \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

$(a) \implies (b)$ Sea $X \in \mathcal{A}\{GD\}$ particionada como en (2.4), acorde al tamaño de los bloques de $A$. De $AXA = A$ se obtiene, realizando los productos matriciales y teniendo en cuenta que $KK^* + LL^* = I_a$, que $\Sigma K X_1 + \Sigma L X_3 = I_a$.

Ahora, de $XA^{k+1} = A^k$ se obtienen, al realizar los cálculos matriciales correspondientes, las cuatro igualdades siguientes:

$X_1(\Sigma K)^{k+1} = (\Sigma K)^k$,

$X_1(\Sigma K)^k \Sigma L = (\Sigma K)^{k-1} \Sigma L$,

$X_3(\Sigma K)^{k+1} = 0$ y

$X_3(\Sigma K)^k \Sigma L = 0$.

Posmultiplicando la primera por $K^*$, la segunda por $L^*$ y sumando miembro a miembro las igualdades obtenidas, se tiene $X_1 (\Sigma K)^k = (\Sigma K)^{k-1}$.

Análogamente se tiene $X_3 (\Sigma K)^{k-1} = 0$ partiendo de las dos últimas igualdades.

Finalmente, al realizar los cálculos matriciales que corresponden para analizar la igualdad $A^{k+1}X = A^k$, se obtiene

$$(\Sigma K)^{k+1} X_2 + (\Sigma K)^k \Sigma L X_4 = (\Sigma K)^{k-1} \Sigma L.$$

$(b) \implies (c)$ En primer lugar, se resuelve la ecuación en $(ii)$ utilizando el Teorema 1.2.1. Notar que existe una inversa G-Drazin $\Delta := (\Sigma K)^{GD}$ de $\Sigma K$ tal que $\Delta^k$ es una $\{1\}$-inversa de $(\Sigma K)^k$ (ver la Observación 2.3.1 (p5)). Claramente, la ecuación $X_1 (\Sigma K)^k = (\Sigma K)^{k-1}$ tiene (al menos) una solución en $X_1$. La solución general de este sistema está dada por

$$X_1 = P\Delta + Z(I_a - P), \text{ con } Z \in \mathbb{C}^{a\times a} \text{ una matriz arbitraria.}$$

Análogamente, por el Teorema 1.2.1 y usando la Observación 2.3.1 (p2) y (p6), se resuelve la ecuación matricial en $(iii)$ y se obtiene

$$X_3 = S(I_a - P), \text{ donde } S \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a} \text{ es una matriz arbitraria.}$$

Reemplazando $X_1$ y $X_3$ en la ecuación matricial en $(i)$ y realizando los cálculos correspondientes se obtiene, utilizando la Observación 2.3.1 (p6),

$$(\Sigma K Z + \Sigma L S)(I_a - P) = I_a - P.$$

Ahora se resuelve la ecuación matricial en $(iv)$ usando el Teorema 1.2.1, teniendo en cuenta que se puede escribir como

$$(\Sigma K)^k \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ X_4 \end{pmatrix} = (\Sigma K)^{k-1}\Sigma L. \tag{2.5}$$

En efecto, realizando los cálculos correspondientes se observa que $\begin{pmatrix} K^* \\ L^* \end{pmatrix} \Sigma^{-1}\Delta^k$ es una $\{1\}$-inversa de $(\Sigma K)^k \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \end{pmatrix}$. Así, la ecuación (2.5) tiene (al menos) una solución en $\begin{pmatrix} X_2 \\ X_4 \end{pmatrix}$, y la solución general del sistema (2.5) está dada por

$$\begin{aligned} X_2 &= K^*\Sigma^{-1}\Delta P \Sigma L + (I_a - K^*\Sigma^{-1}P\Sigma K)\Gamma_1 - K^*\Sigma^{-1}P\Sigma L\Gamma_2, \\ X_4 &= L^*\Sigma^{-1}\Delta P\Sigma L + (I_{n-a} - L^*\Sigma^{-1}P\Sigma L)\Gamma_2 - L^*\Sigma^{-1}P\Sigma K\Gamma_1, \end{aligned}$$

para matrices arbitrarias $\Gamma_1 \in \mathbb{C}^{a\times(n-a)}$ y $\Gamma_2 \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$.

$(c) \Longrightarrow (a)$ Observar que

$$AXA = U \begin{pmatrix} (\Sigma K X_1 + \Sigma L X_3)\Sigma K & (\Sigma K X_1 + \Sigma L X_3)\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

Utilizando las expresiones para $X_1$ y $X_3$, (p9) y la última condición de la hipótesis, se realizan las operaciones correspondientes y se obtiene

$$\begin{aligned} \Sigma K X_1 + \Sigma L X_3 &= \Sigma K P \Delta + \Sigma K Z(I_a - P) + \Sigma L S(I_a - P) \\ &= P + (\Sigma K Z + \Sigma L S)(I_a - P) = P + (I_a - P) \\ &= I_a. \end{aligned}$$

Entonces,

$(\Sigma K X_1 + \Sigma L X_3)\Sigma K = \Sigma K \quad$ y $\quad (\Sigma K X_1 + \Sigma L X_3)\Sigma L = \Sigma L.$

Así, $AXA = A$. Por otro lado,

$$XA^k = U \begin{pmatrix} X_1(\Sigma K)^k & X_1(\Sigma K)^{k-1}\Sigma L \\ X_3(\Sigma K)^k & X_3(\Sigma K)^{k-1}\Sigma L \end{pmatrix} U^*,$$

y

$$A^k X = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^k X_1 + (\Sigma K)^{k-1}\Sigma L X_3 & (\Sigma K)^k X_2 + (\Sigma K)^{k-1}\Sigma L X_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

Ahora se reemplazan $X_1$ y $X_3$ en los bloques matriciales de $XA^k$ y $A^k X$. Por (p7), se tiene $X_3(\Sigma K)^{k-1} = 0$. Además, usando (p7) y (p8), se obtiene $X_1(\Sigma K)^k = (P\Delta + Z(I_a - P))(\Sigma K)^k = P\Delta(\Sigma K)^k = (\Sigma K)^{k-1}$.

De la igualdad $\Sigma K X_1 + \Sigma L X_3 = I_a$ resulta

$(\Sigma K)^k X_1 + (\Sigma K)^{k-1}\Sigma L X_3 = (\Sigma K)^{k-1}(\Sigma K X_1 + \Sigma L X_3) = (\Sigma K)^{k-1}.$

Ahora, de (p7), (p4) y (p2) se obtiene

$$\begin{aligned} X_1(\Sigma K)^{k-1}\Sigma L &= (\Sigma K)^{k-1}\Delta^k(\Sigma K)^{k-1}\Sigma L + Z(I_a - P)(\Sigma K)^{k-1}\Sigma L \\ &= (\Sigma K)^{k-1}\Delta\Sigma L. \end{aligned}$$

Finalmente, al reemplazar $X_2$ y $X_4$ en el bloque de $A^kX$ que aparecen y aplicar la propiedad distributiva resulta

$$(\Sigma K)^k X_2 + (\Sigma K)^{k-1}\Sigma L X_4 = (\Sigma K)^{k-1}[\Delta P\Sigma L + (I_a - P)(\Sigma K\Gamma_1 + \Sigma L\Gamma_2)].$$

Aplicando las propiedades (p4) y (p7) se obtiene

$$(\Sigma K)^k X_2 + (\Sigma K)^{k-1}\Sigma L X_4 = (\Sigma K)^{k-1}\Delta\Sigma L.$$

Por lo tanto, $XA^k = A^kX$. Luego, $X \in \mathcal{A}\{GD\}$. □

A continuación se establece una caracterización para las inversas GDMP. El siguiente resultado establece la forma de cualquier $A^{GD\dagger} \in \mathcal{A}\{GD\dagger\}$ a partir de la descomposición de Hartwig-Spindelböck de $A$.

**Teorema 2.3.2.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ escrita en su descomposición de Hartwig-Spindelböck como en (1.9), con $rg(A) = a$, $ind(A) = k$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $Y \in \mathcal{A}\{GD\dagger\}$.

(b) *Existen matrices $X_1 \in \mathbb{C}^{a\times a}$ y $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$ tales que*

$$Y = U\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_3 & 0 \end{pmatrix}U^*, \tag{2.6}$$

*y se satisfacen las siguientes tres condiciones:*

$(i)$ $\Sigma K X_1 + \Sigma L X_3 = I_a$,

$(ii)$ $X_1 (\Sigma K)^k = (\Sigma K)^{k-1}$,

$(iii)$ $X_3 (\Sigma K)^k = 0$.

$(c)$ *Existe una inversa G-Drazin* $\Delta := (\Sigma K)^{GD}$ *de* $\Sigma K$ *tal que, para matrices arbitrarias* $S \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$ *y* $Z \in \mathbb{C}^{a\times a}$, *la matriz* $Y$ *puede ser escrita como en* (2.6), *donde* $P := (\Sigma K)^{k-1}\Delta^{k-1}$ *y*

$$\begin{aligned} &X_1 = P\Delta + Z(I_a - P), \\ &X_3 = S(I_a - P), \\ &(\Sigma K Z + \Sigma L S - I_a)(I_a - P) = 0. \end{aligned}$$

*Demostración.* Considerar $A$ escrita como en (1.9).

$(a) \Longrightarrow (b)$ Como $Y \in \mathcal{A}\{GD\dagger\}$, existe $X \in \mathcal{A}\{GD\}$ tal que $Y = XAA^\dagger$. Por el Teorema 2.3.1, la matriz $X$ puede ser escrita como

$$X = U \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} U^*,$$

particionada acorde al tamaño de los bloques de $A$, y las condiciones $(i)$, $(ii)$, y $(iii)$ del apartado $(b)$ se verifican. Como

$$A^\dagger = U \begin{pmatrix} K^*\Sigma^{-1} & 0 \\ L^*\Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^*,$$

se tiene

$$Y = XAA^\dagger = U \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_3 & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

$(b) \implies (c)$ Se sigue directamente del Teorema 2.3.1.

$(c) \implies (a)$ Sea

$$X = U \begin{pmatrix} X_1 & K^*\Sigma^{-1}\Delta P\Sigma L \\ X_3 & L^*\Sigma^{-1}\Delta P\Sigma L \end{pmatrix} U^*.$$

Por el Teorema 2.3.1, se tiene que $X \in \mathcal{A}\{GD\}$.

Además, $XAA^\dagger = Y$. Así, $Y \in \mathcal{A}\{GD\dagger\}$. $\square$

Como consecuencia de los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2 se obtienen nuevos resultados.

**Corolario 2.3.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ escrita en su descomposición de Hartwig-Spindelböck como en* (1.9)*, con $ind(A) = k$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(a) $\mathcal{A}\{GD\dagger\} \subseteq \mathcal{A}\{GD\}$ *si y solo si* $(\Sigma K)^{k-1}\Sigma L = 0$.

(b) $\mathcal{A}\{GD\} \subseteq \mathcal{A}\{GD\dagger\}$ *si y solo si* $(\Sigma K)^{k-1}\Sigma L = 0, X_2 = 0$ *y* $X_4 = 0$.

(c) $\mathcal{A}\{GD\} = \mathcal{A}\{GD\dagger\}$ *si y solo si* $\mathcal{A}\{GD\} \subseteq \mathcal{A}\{GD\dagger\}$.

Dos subclases de matrices son de particular interés. Están dadas por las matrices EP ($AA^\dagger = A^\dagger A$) y las isometrías parciales ($A^\dagger = A^*$).

**Corolario 2.3.2.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ escrita en su descomposición de Hartwig-Spindelböck como en* (1.9)*, con $rg(A) = a$, $ind(A) = k$.*

*Se verifican las siguientes afirmaciones:*

*(a) Si $A$ es una matriz EP, entonces*

$$Y \in \mathcal{A}\{GD\dagger\} \quad \textit{si y solo si} \quad Y = U \begin{pmatrix} K^*\Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

*Esto es, la inversa GDMP de una matriz EP es única y* $A^{GD\dagger} = A^{\dagger} = A^{\#}$.

(b) *Si* $A$ *es una isometría parcial, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $Y \in \mathcal{A}\{GD\dagger\}$.

(ii) *Existen matrices* $X_1 \in \mathbb{C}_{a\times a}$ *y* $X_3 \in \mathbb{C}_{(n-a)\times a}$ *tales que*

$$Y = U \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_3 & 0 \end{pmatrix} U^*,$$

*y las siguientes condiciones se satisfacen:*

(1) $KX_1 + LX_3 = I_a$,

(2) $X_1K^k = K^{k-1}$,

(3) $X_3K^k = 0$.

*Demostración.* En [35, Corolario 6] se probó que $A$ es una matriz $EP$ si y solo si $L = 0$ (o equivalentemente, $K$ es una matriz unitaria); y $A$ es una isometría parcial si y solo si $\Sigma = I_a$. Entonces, la prueba es inmediata por el Teorema 2.3.2. □

## 2.4 Inversas GDMP como solución de un sistema de ecuaciones matriciales

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Por la Proposición 2.2.1, si $X \in \mathcal{A}\{GD\dagger\}$, entonces existe $Z \in \mathcal{A}\{GD\}$ tal que $X = ZAA^{\dagger}$ y $X$ satisface las ecuaciones del sistema

$$XAX = X, \quad AX = AA^{\dagger} \quad \text{y} \quad XA^k = ZA^k. \tag{2.7}$$

El objetivo de esta sección es probar que el conjunto $\mathcal{A}\{GD\dagger\}$ es el conjunto solución del sistema de ecuaciones matriciales (2.7), para cualquier $Z \in \mathcal{A}\{GD\}$.

**Teorema 2.4.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $X \in \mathcal{A}\{GD\dagger\}$.

(b) *Existe $A^{GD} \in \mathcal{A}\{GD\}$ tal que $X$ es solución del sistema*

$$XAX = X, \quad AX = AA^\dagger \quad y \quad XA^k = A^{GD}A^k.$$

(c) *Para cada $Z \in \mathcal{A}\{GD\}$, $X$ es solución del sistema* (2.7).

*Demostración.* $(a) \Longrightarrow (b)$ Ha sido demostrado en la Proposición 2.2.1.
$(b) \Longrightarrow (a)$ Considerar $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ escrita en su descomposición de Hartwig-Spindelböck como en (1.9), con $\mathrm{rg}(A) = a$, $ind(A) = k$, y sea $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ particionada de acuerdo al tamaño de los bloques de $A$,

$$X = U \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} U^*.$$

Entonces,

$$AX = U \begin{pmatrix} \Sigma K X_1 + \Sigma L X_3 & \Sigma K X_2 + \Sigma L X_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

Por otro lado, se sabe que

$$AA^\dagger = U \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

De $AX = AA^{\dagger}$ se tiene en forma directa que

$$\Sigma K X_1 + \Sigma L X_3 = I_a. \tag{2.8}$$

Considerar $A^{GD} = U \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} U^*$ particionada de acuerdo al tamaño de los bloques de $A$.

Por el Teorema 2.3.1, la hipótesis $A^{GD} \in \mathcal{A}\{GD\}$ implica que se verifican las siguientes condiciones:

$(i)$ $\Sigma K Z_1 + \Sigma L Z_3 = I_a$,

$(ii)$ $Z_1 (\Sigma K)^k = (\Sigma K)^{k-1}$,

$(iii)$ $Z_3 (\Sigma K)^{k-1} = 0$,

$(iv)$ $(\Sigma K)^{k+1} Z_2 + (\Sigma K)^k \Sigma L Z_4 = (\Sigma K)^{k-1} \Sigma L$.

Entonces,

$$A^{GD} A^k = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{k-1} & Z_1 (\Sigma K)^{k-1} \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

Además,

$$X A^k = U \begin{pmatrix} X_1 (\Sigma K)^k & X_1 (\Sigma K)^{k-1} \Sigma L \\ X_3 (\Sigma K)^k & X_3 (\Sigma K)^{k-1} \Sigma L \end{pmatrix} U^*.$$

Comparando bloques en $XA^k = A^{GD}A^k$ y utilizando las propiedades anteriores se tiene

$$\begin{aligned}
X_1\left(\Sigma K\right)^k &= \left(\Sigma K\right)^{k-1}, && (2.9)\\
X_1\left(\Sigma K\right)^{k-1}\Sigma L &= \left(\Sigma K\right)^k Z_2 + \left(\Sigma K\right)^{k-1}\Sigma L Z_4, && (2.10)\\
X_3\left(\Sigma K\right)^k &= 0, && (2.11)\\
X_3\left(\Sigma K\right)^{k-1}\Sigma L &= 0. && (2.12)
\end{aligned}$$

Considerar la matriz

$$Z_0 := U\begin{pmatrix} X_1 & Z_2 \\ X_3 & Z_4 \end{pmatrix}U^*.$$

Se tiene entonces que $Z_0 \in \mathcal{A}\{GD\}$. En efecto, premultiplicando la ecuación (2.10) por $\Sigma K$ y utilizando las igualdades (2.9), (2.8) y (2.12) se obtiene

$$\begin{aligned}
\left(\Sigma K\right)^{k+1} Z_2 + \left(\Sigma K\right)^k \Sigma L Z_4 &= \Sigma K X_1\left(\Sigma K\right)^{k-1}\Sigma L\\
&= \Sigma K X_1 X_1\left(\Sigma K\right)^k \Sigma L\\
&= (I_a - \Sigma L X_3) X_1\left(\Sigma K\right)^k \Sigma L\\
&= X_1\left(\Sigma K\right)^k \Sigma L - \Sigma L X_3\left(\Sigma K\right)^{k-1}\Sigma L\\
&= \left(\Sigma K\right)^{k-1}\Sigma L.
\end{aligned}$$

Luego, de la última igualdad, y por (2.8), (2.9), (2.11) y el Teorema 2.3.1 se tiene que $Z_0 \in \mathcal{A}\{GD\}$. Por lo tanto, existe $Z_0 \in \mathcal{A}\{GD\}$ tal que $X = Z_0 AA^\dagger$, es decir, $X \in \mathcal{A}\{GD\dagger\}$.

$(b) \Longrightarrow (c)$ Por [29, Teorema 3.2], $Z \in \mathcal{A}\{GD\}$ si y solo si para matrices arbitrarias $T$ y $W$, $Z = A^{GD} + (I - P_{A^k})T(I - P_A) + (I - Q_A)W(I - P_{A^k})$, donde $P_{A^k} = A^k(A^{GD})^k$, $P_A = AA^{GD}$ y $Q_A = A^{GD}A$. Observar que, para matrices arbitrarias $T$ y $W$, la matriz $X$ satisface las ecuaciones del sistema (2.7) pues $P_A A^k = A^k$ y $P_{A^k}A^k = A^k$.

$(c) \implies (b)$ Se sigue inmediatamente pues $\mathcal{A}\{GD\} \neq \emptyset$. $\square$

## 2.5 Inversas duales de las GDMP

De manera similar a lo realizado para introducir las inversas generalizadas GDMP se puede obtener su clase dual de matrices, llamadas inversas MPGD.

Como el desarrollo es análogo al realizado para las inversas GDMP, solo se presenta su definición y los resultados más importantes, sin detallar sus demostraciones.

**Definición 2.5.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(A) = k$. Para cada $A^{GD} \in \mathcal{A}\{GD\}$, la inversa MPGD de $A$, denotada por $A^{\dagger GD}$, es la matriz de tamaño $n \times n$*

$$A^{\dagger GD} = A^{\dagger} A A^{GD}.$$

El símbolo $\mathcal{A}\{\dagger GD\}$ designa al conjunto de todas las inversas MPGD de $A$, esto es

$$\mathcal{A}\{\dagger GD\} = \{A^{\dagger} A A^{GD} : \, A^{GD} \in \mathcal{A}\{GD\}\}.$$

Definidas de esta manera, las inversas MPGD de $A$ siempre existen y, en general, no son únicas.

El siguiente resultado caracteriza a cualquier $A^{\dagger GD} \in \mathcal{A}\{\dagger GD\}$, a partir de la descomposición de Hartwig-Spindelböck de $A$.

**Teorema 2.5.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ escrita en su descomposición de Hartwig-Spindelböck como en* (1.9)*, con* $\operatorname{rg}(A) = a$*, $ind(A) = k$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(*a*) $Y \in \mathcal{A}\{\dagger GD\}$.

(*b*) *Existen matrices* $X_2 \in \mathbb{C}^{a\times(n-a)}$ *y* $X_4 \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ *tales que*

$$Y = U \begin{pmatrix} K^*\Sigma^{-1} & K^*KX_2 + K^*LX_4 \\ L^*\Sigma^{-1} & L^*KX_2 + L^*LX_4 \end{pmatrix} U^*, \tag{2.13}$$

*donde* $(\Sigma K)^{k+1}X_2 + (\Sigma K)^k\Sigma LX_4 = (\Sigma K)^{k-1}\Sigma L$.

Observar que $X_2$ y $X_4$ se pueden determinar como en el Teorema 2.3.2. Es decir

$$\begin{aligned} X_2 &= K^*\Sigma^{-1}\Delta P\Sigma L + (I_a - K^*\Sigma^{-1}P\Sigma K)\Gamma_1 - K^*\Sigma^{-1}P\Sigma L\Gamma_2, \\ X_4 &= L^*\Sigma^{-1}\Delta P\Sigma L + (I_{n-a} - L^*\Sigma^{-1}P\Sigma L)\Gamma_2 - L^*\Sigma^{-1}P\Sigma K\Gamma_1, \end{aligned}$$

donde $\Delta := (\Sigma K)^{GD}$ es una inversa G-Drazin de $\Sigma K$ y $P := (\Sigma K)^{k-1}\Delta^{k-1}$, con $\Gamma_1 \in \mathbb{C}^{a\times(n-a)}$ y $\Gamma_2 \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ matrices arbitrarias.

Por otro lado, las inversas MPGD pueden ser caracterizadas de la siguiente manera.

**Teorema 2.5.2.** *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *con* $ind(A) = k$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(*a*) $X \in \mathcal{A}\{\dagger GD\}$.

(*b*) *Existe* $A^{GD} \in \mathcal{A}\{GD\}$ *tal que* $X$ *es solución del sistema*

$$XAX = X, \quad XA = A^\dagger A \quad y \quad A^kX = A^kA^{GD}.$$

(*c*) *Para cada* $Z \in \mathcal{A}\{GD\}$, $X$ *es solución del sistema*

$$XAX = X, \quad XA = A^\dagger A \quad y \quad A^kX = A^kZ.$$

## 2.6 Algoritmo para calcular las inversas generalizadas GD y GDMP

En esta sección se presentan algoritmos para calcular las inversas generalizadas GD y GDMP. Para ello se diseñan dos algoritmos. El Algoritmo 1 calcula una inversa GD de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ utilizando la forma core-nilpotente de la matriz $A$. El Algoritmo 2 calcula una inversa GD y una inversa GDMP de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mediante la descomposición de Hartwig-Spindelböck (Algoritmo 0) de $A$. Durante su ejecución, el Algoritmo 2 invoca al Algoritmo 1 para calcular una GD inversa de una matriz de tamaño más pequeño que la original.

El siguiente algoritmo calcula la descomposición de Hartwig-Spindelböck de una matriz. La notación $A(f_1 : f_2, c_1 : c_2)$ indica que, de la matriz $A$, se seleccionan las filas consecutivas desde la $f_1$ hasta la $f_2$ y las columnas consecutivas desde la $c_1$ hasta la $c_2$.

**ALGORITMO 0**

*Entrada:* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

*Salidas:* $U, \Sigma, K, L$.

**Paso 1.** Calcular $a = \mathrm{rg}(A)$.
**Paso 2.** Obtener una descomposición en valores singulares de $A$: $A = U\mathrm{diag}(\Sigma, 0)V^*$.
**Paso 3.** Calcular $K = V^*U(1 : a, 1 : a)$ y $L = V^*U(1 : a, a + 1 : n)$.

El siguiente algoritmo calcula una GD inversa de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a partir de la descomposición core-nilpotente de la propia matriz $A$.

**ALGORITMO 1**

*Entrada:* $A$.

*Salida:* $A^{GD}$.

**Paso 1.** Obtener matrices invertibles $Q$ y $C$ y una matriz nilpotente $N$ tal que $AQ = Q\text{diag}(C, N)$.
**Paso 2.** Calcular $Q^{-1}$ y $C^{-1}$.
**Paso 3.** Hallar $N^{-}$, una matriz $\{1\}$-inversa de $N$.
**Paso 4.** Obtener $A^{GD} = Q(C^{-1} \oplus N^{-})Q^{-1}$.

En el Paso 3 se puede utilizar el método proporcionado en la referencia [33] para hallar $N^{-}$. El siguiente algoritmo permite calcular una inversa GDMP y, a partir de ella, una inversa GD, teniendo en cuenta los resultados de la Sección 3.2.1

**ALGORITMO 2**

*Entrada:* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

*Salidas:* $A^{GDMP}$ y $A^{GD}$.

**Paso 1.** Ejecutar el **ALGORITMO 0** con parámetro de entrada la matriz $A$.
**Paso 2.** Calcular $\Sigma K$.
**Paso 3.** Ejecutar el **ALGORITMO 1** con parámetro de entrada la matriz $\Sigma K$ y salida $\Delta := (\Sigma K)^{GD}$.
**Paso 4.** Calcular $k = \text{ind}(A)$.
**Paso 5.** Calcular $P = (\Sigma K)^{k-1}\Delta^{k-1}$.
**Paso 6.** Computar $W = \Sigma^{-1}(I - P)$.
**Paso 7.** Calcular $X_1 = P\Delta + K^*W$ y $X_3 = L^*W$.
**Paso 8.** Obtener $A^{GDMP} = U \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_3 & 0 \end{pmatrix} U^*$.
**Paso 9.** Computar $B = \Sigma^{-1}\Delta P \Sigma L$.
**Paso 10.** Calcular $X_2 = K^*B$ y $X_4 = L^*B$.

**Paso 11.** Obtener $A^{GD} = U \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} U^*$.

**Justificación de los Algoritmos**

El Algoritmo 0 permite calcular la descomposición (1.9) de la matriz $A$. Observar que, para el cálculo de $K$ y $L$ se consideran sólo las $a$ primeras filas del producto $V^*U$ a partir de una SVD de $A$, como se indica en [2]. En el Algoritmo 1, los Pasos 1 y 2 resultan de la fórmula (1.6), el Paso 3 puede realizarse, por ejemplo, aplicando el método dado en [33] para el cálculo de una $\{1\}$-inversa de una matriz nilpotente, y el Paso 4 resulta de aplicar la fórmula (1.8). En el Algoritmo 2, los Pasos 1 a 3 permiten calcular $(\Sigma K)^{GD}$, necesario para ejecutar los pasos subsiguientes (fundamentados en el Teorema 2.3.2($c$)). Observar que, para establecer el Paso 7, se han particularizado las matrices $Z = K^*\Sigma^{-1}$ y $S = L^*\Sigma^{-1}$ a las que hace referencia el mencionado teorema. Los Pasos 9 a 11 resultan de la demostración de $(c) \Longrightarrow (b)$ en el Teorema 2.3.2.

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de los algoritmos. Los mismos fueron programados y ejecutados con el paquete informático MATLAB R2020b.

**Ejemplo 2.6.1.** *Considerar la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Al aplicar el Paso 1 del Algoritmo 2 se obtienen las matrices*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2.3187 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8379 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7040 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.3194 & 0.0217 & -0.2143 \\ 0.6417 & 0.4751 & -0.4918 \\ 0.4315 & -0.8718 & -0.1616 \end{pmatrix}$$

*y*

$$L = \begin{pmatrix} 0.9228 \\ -0.3475 \\ -0.1664 \end{pmatrix}.$$

*Aplicando los Pasos 2 y 3 se encuentra la matriz*

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0.1354 & 0.1144 & -0.1058 \\ 0.4826 & 0.4078 & -0.3770 \\ -0.1580 & -0.1336 & 0.1235 \end{pmatrix}$$

*que permite, ejecutando los Pasos 4 a 11, hallar las matrices*

$$A^{GDMP} = \begin{pmatrix} 0.6667 & -0.6667 & 0.3333 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 1.0000 & -0.5000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.5000 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

*y*

$$A^{GD} = \begin{pmatrix} 0.6667 & -0.6667 & 0.3333 & 0.5926 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 1.0000 & -0.5000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.5000 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

# Capítulo 3

# Inversas generalizadas definidas a partir de proyectores

## 3.1 Introducción

Las inversas generalizadas GDMP y MPGD introducidas en el Capítulo 2 se definieron a partir de otras previamente conocidas y ampliamente estudiadas. Este procedimiento es muy utilizado en la literatura. Por ejemplo, la inversa core y la inversa core dual se definieron para matrices cuadradas de índice a lo sumo 1 [4], y a partir de ellas se introdujeron dos tipos de extensiones para matrices de índice arbitrario, a saber, la inversa DMP y su dual [48] y la inversa core-EP [49]. Este mecanismo también fue utilizado para definir la inversa CMP para matrices arbitrarias cuadradas [53].

Otro mecanismo encontrado en la literatura para definir inversas generalizadas ha sido presentarlas como la solución de un sistema de ecuaciones matriciales. Este método fue utilizado, por ejemplo, para definir la inversa de Moore-Penrose, la inversa de Drazin y la inversa de grupo [13].

En este capítulo se presentan nuevas clases de inversas generalizadas híbridas para matrices complejas rectangulares, es decir, mediante la utilización de otras inversas conocidas. Se introducen como representantes de una clase de equivalencia, para ciertas relaciones de equivalencia sobre conjuntos que se deberán elegir con ciertas particularidades. El procedimiento utilizado a lo largo del capítulo para introducir nuevas inversas generalizadas es diferente del clásico y puede servir como punto de partida para que otros autores analicen las inversas generalizadas desde un nuevo punto de vista.

La importancia de los proyectores, en todas las ramas de las Matemáticas, es indudable. Las inversas generalizadas son una herramienta muy interesante para representar este tipo de proyectores y operar con ellos.

El procedimiento utilizado en este capítulo consiste en analizar ciertos proyectores oblicuos definidos mediante inversas generalizadas, a partir de una adecuada relación de equivalencia y, posteriormente, pasar al conjunto cociente. De esta manera, se puede definir una nueva clase de inversas generalizadas a partir del representante más simple de cada clase de equivalencia.

También se dan en este capítulo caracterizaciones y expresiones generales para las inversas generalizadas definidas de esta manera, y se presentan propiedades que verifican las inversas generalizadas introducidas.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 3.2 se introduce una nueva clase de inversas generalizadas, llamadas inversas 1MP, a partir del análisis de los proyectores oblicuos del tipo $A^{-}A$. Estas inversas generalizadas pueden ser consideradas como una generalización de la inversa core a matrices rectangulares. Las inversas 1MP de una matriz $A$ son caracterizadas aquí a partir de una descomposición en valores singulares de $A$. Además, se presentan otras caracterizaciones de las inversas 1MP de $A$: como $\{1,2,3\}$-inversas de $A$, como solución de un sistema de ecuaciones matriciales adecuado y como un conjunto uniparamétrico. Luego, se analiza la restricción de las inversas 1MP al conjunto de las isometrías parciales. En la Sección 3.3 se introducen las inversas MP1, duales de las 1MP, siguiendo un mecanismo similar al que se usó en la Sección 3.2. A partir del análisis de proyectores del tipo $A^{(2)}A$ y $AA^{(2)}$ en el conjunto de las inversas exteriores de una matriz $A$ se introducen, en la Sección 3.4, dos nuevas clases de inversas generalizadas: las inversas 2MP y sus duales, las inversas MP2. La clase de inversas 2MP es utilizada en la Sección 3.5 para extender las inversas CMP a matrices rectangulares, definiendo las inversas C2MP. También aquí se obtienen diferentes representaciones y se presentan sus principales propiedades. Finalmente, en la Sección 3.6, se presentan todas las inversas generalizadas definidas en este trabajo como inversas generalizadas exteriores con espacio imagen y espacio nulo prescritos.

Recordar que el rango de una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se denota por $\mathrm{rg}(A) = a$ y que, a menos que se indique lo contrario, se considera $a > 0$.

## 3.2 Inversas 1MP

El procedimiento para introducir estas nuevas inversas generalizadas pone el énfasis en los proyectores representados mediante la expresión $A^-A$, donde $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$. En primer lugar, se analiza qué información se puede extraer de estos productos y luego se utiliza esta información para definir una nueva clase de inversas generalizadas. Esta clase proporciona una generalización de la inversa core de matrices cuadradas a matrices rectangulares.

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ escrita mediante una descomposición en valores singulares, es decir,

$$A = U \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*, \tag{3.1}$$

donde $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices unitarias y $D_a \in \mathbb{C}^{a\times a}$ es una matriz diagonal definida positiva.

Considerar una matriz $\{1\}$-inversa de $A$. Por (1.4) se tiene que

$$\begin{aligned} A^- A &= V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} U^* U \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^* \\ &= V \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ A_{21} D_a & 0 \end{pmatrix} V^*. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ahora, para una matriz dada $A$, se analiza bajo qué condiciones dos proyectores del tipo $A^- A$ son diferentes al variar la matriz $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$. Para ello se define una relación de equivalencia en el conjunto $\mathcal{A}\{1\}$.

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se define la relación binaria $\delta_i$ en el conjunto $\mathcal{A}\{1\}$ como sigue. Para $A^-, A^= \in \mathcal{A}\{1\}$,

$$A^- \, \delta_i \, A^= \quad \text{si y solo si} \quad A^- A = A^= A$$

(donde el subíndice $i$ es utilizado para indicar la multiplicación a izquierda por una inversa interior de la matriz $A$).

Observar que $\delta_i$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{A}\{1\}$. La clase de equivalencia de $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$ está dada por

$$[A^-]_{\delta_i} = \{A^= \in \mathcal{A}\{1\} : A^- A = A^= A\}.$$

Teniendo en cuenta (3.2) se observa que

$$A^{=} = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} U^* \in [A^-]_{\delta_i} \quad \text{si y solo si} \quad A_{21} = B_{21}.$$

Esto es,

$$[A^-]_{\delta_i} = \left\{ V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & B_{12} \\ A_{21} & B_{22} \end{pmatrix} U^* \in \mathcal{A}\{1\} : \, B_{12} \in \mathbb{C}^{a\times(m-a)}, \, B_{22} \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(m-a)} \right\}.$$

El conjunto cociente de $\mathcal{A}\{1\}$ por $\delta_i$ está dado por

$$\mathcal{A}\{1\}/\delta_i = \{[A^-]_{\delta_i} : A^- \in \mathcal{A}\{1\}\}.$$

Un conjunto completo de representantes de la partición en $\mathcal{A}\{1\}$ inducida por $\delta_i$ está dado por

$$\mathcal{R}_{\delta_i} = \left\{ V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} U^* : A_{21} \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a} \text{ es arbitraria} \right\}.$$

Recordando que, para $A$ escrita como en (3.1), la inversa de Moore-Penrose de $A$ está dada por

$$A^\dagger = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*, \tag{3.3}$$

y observando que todo elemento de $\mathcal{R}_{\delta_i}$ puede ser escrito como $A^- A A^\dagger$, se establece la siguiente definición.

**Definición 3.2.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Para cada $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$, la matriz*

$$A^{-\dagger} = A^- A A^\dagger \in \mathbb{C}^{n\times m}$$

*es llamada una inversa 1MP de $A$.*

De esta manera, las inversas $A^{-\dagger}$ son definidas como los representantes "mas simple" de las clases de equivalencia de $\mathcal{A}\{1\}$ por $\delta_i$.

El símbolo $\mathcal{A}\{-\dagger\}$ se utiliza para representar al conjunto de todas las inversas 1MP de $A$. Observar que, como la matriz $A^\dagger$ es un elemento de este conjunto, $\mathcal{A}\{-\dagger\} \neq \emptyset$. Además,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\{-\dagger\} &= \{A^- AA^\dagger : A^- \in \mathcal{A}\{1\}\} \\ &= \left\{ V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} U^* : A_{21} \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a} \right\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

La existencia de $\{1\}$-inversas y de la inversa de Moore-Penrose de $A$ garantizan la existencia de inversas 1MP de $A$.

Notar que $\mathcal{A}\{-\dagger\} = \{A^{-1}\}$ cuando $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es no singular, y además, la matriz nula tiene una única inversa 1MP, que coincide con ella misma.

Observar que, dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, utilizando una descomposición en valores singulares de $A$, se puede presentar una forma canónica de las inversas 1MP de $A$ como aquellas matrices de la forma (3.4).

El interés se centra ahora en considerar el caso en que, para matrices $A^-, A^= \in \mathcal{A}\{1\}$ se tiene que $A^-A \neq A^=A$, o dicho de otro modo, cuándo ambas $A^-$ y $A^=$ proporcionan la misma inversa 1MP de $A$. Este hecho se muestra en el siguiente resultado, donde la expresión $M \simeq N$ indica que existe una biyección entre los conjuntos $M$ y $N$.

**Proposición 3.2.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces,*

$$\mathcal{A}\{1\}/\delta_i \quad \simeq \quad \mathcal{A}\{-\dagger\} \quad \simeq \quad \mathbb{C}^{(n-a)\times a}.$$

*Demostración.* Sea $\varphi : \mathcal{A}\{1\}/\delta_i \to \mathcal{A}\{-\dagger\}$ la función definida por $\varphi([A^-]_{\delta_i}) = A^-AA^\dagger$. Claramente, $\varphi$ está bien definida. Sean $[A^-]_{\delta_i}$ y $[A^=]_{\delta_i}$ en $\mathcal{A}\{1\}/\delta_i$ tales que

$\varphi([A^-]_{\delta_i}) = \varphi([A^=]_{\delta_i})$. Entonces $A^-AA^\dagger = A^=AA^\dagger$, así $A^-AA^\dagger A = A^=AA^\dagger A$. Luego, $A^-A = A^=A$, es decir, $[A^-]_{\delta_i} = [A^=]_{\delta_i}$, de donde $\varphi$ es inyectiva. Si $Y \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$, por (3.4) existe $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$ tal que $Y = A^-AA^\dagger$. Así, $\varphi([A^-]_{\delta_i}) = A^-AA^\dagger = Y$. Por lo tanto, $\varphi$ es sobreyectiva. Entonces, $\varphi$ es una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $\mathcal{A}\{1\}/\delta_i$ y $\mathcal{A}\{-\dagger\}$, es decir, $\mathcal{A}\{1\}/\delta_i \simeq \mathcal{A}\{-\dagger\}$.

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ escrita mediante una descomposición en valores singulares como en (3.1). Se considera la función $\Gamma : \mathcal{A}\{-\dagger\} \to \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$ definida por $\Gamma(A^{-\dagger}) = A_{21}$, donde $A^{-\dagger}$ está dada como en (3.4). Es fácil ver que, por construcción, $\Gamma$ es una función biyectiva. Así, $\mathcal{A}\{-\dagger\} \simeq \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$. $\square$

Por el Teorema 1.2.1, fijada $A^-$, si se resuelve la ecuación matricial $A^-A = A^=A$ (en $A^=$) se obtiene que su conjunto solución está dado por

$$[A^-]_{\delta_i} = \{A^= \in \mathcal{A}\{1\} : A^= = A^-AA^\dagger + Y(I - AA^\dagger), Y \in \mathbb{C}^{n\times m} \text{ arbitraria}\}.$$

De esta manera, se expresa el conjunto solución de la ecuación planteada como un conjunto dependiente de un parámetro.

El siguiente resultado presenta propiedades que verifican las inversas 1MP.

**Proposición 3.2.2.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Dada una matriz $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$, la matriz $A^{-\dagger} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ satisface las siguientes propiedades:*

(a) $A^{-\dagger} \in \mathcal{A}\{1, 2, 3\}$.

(b) $A^{-\dagger}A = A^-A$ *y* $AA^{-\dagger} = AA^\dagger$, *(esto es, $A^{-\dagger}A$ es un proyector oblicuo sobre $\mathcal{R}(A^-A)$ a lo largo de $\mathcal{N}(A)$ y $AA^{-\dagger}$ es un proyector ortogonal sobre $\mathcal{R}(A)$) paralelo a $\mathcal{N}(A^\dagger)$.*

*Demostración.* (a) Como $A^-, A^\dagger \in \mathcal{A}\{1\}$, se sigue que $A^{-\dagger} \in \mathcal{A}\{1, 2\}$. Dado que $AA^{-\dagger} = AA^-AA^\dagger = AA^\dagger$ es una matriz hermítica, se tiene $A^{-\dagger} \in \mathcal{A}\{3\}$.

(b) De $A^- AA^\dagger A = A^- A$, se tiene que $A^{-\dagger} A$ es un proyector sobre $\mathcal{R}(A^- A)$ a lo largo de $\mathcal{N}(A^- A) = \mathcal{N}(A)$. La otra igualdad se demostró en el apartado anterior. $\square$

Por la Proposición 3.2.2 (b) y recordando que dos proyectores de igual tamaño coinciden si y solo si tienen simultáneamente el mismo espacio imagen y el mismo espacio nulo, se puede establecer que

$$[A^-]_{\delta_i} = \{A^= \in \mathcal{A}\{1\} : A^- \mathcal{R}(A) = A^= \mathcal{R}(A)\}.$$

En esta representación, para cualquier conjunto $M$, la notación $AM$ significa $AM = \{Am : m \in M\}$.

Recordar que un *sistema completo de invariantes* de una relación de equivalencia $\approx$ sobre un conjunto no vacío $S$ es una familia $\mathcal{F}$ de funciones definidas en $S$ que satisfacen $s_1 \approx s_2$ si y solo si $f(s_1) = f(s_2)$, para toda $f \in \mathcal{F}$.

Se concluye que, para $A$ escrita mediante una descomposición en valores singulares como en (3.1), la familia $\mathcal{F}$ que contiene únicamente a la función

$$f : \mathcal{A}\{1\} \to \mathbb{C}^{(n-a)\times n},$$

definida para toda matriz $X \in \mathcal{A}\{1\}$ escrita como en (1.4) por

$$f(X) = \begin{bmatrix} 0 & I_a \end{bmatrix} V^* X U \begin{bmatrix} I_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

constituye un sistema completo de invariantes en $\mathcal{A}\{1\}$ para la relación de equivalencia $\delta_i$ pues

$$A^- \,\delta_i A^= \quad\Longleftrightarrow\quad A_{21} = B_{21} \quad\Longleftrightarrow\quad f(A^-) = f(A^=).$$

### 3.2.1 Caracterizaciones de las inversas 1MP

En esta sección se obtienen caracterizaciones de las inversas 1MP desde varios puntos de vista.

Por la Proposición 3.2.2 (a) se sabe que $\mathcal{A}\{-\dagger\} \subseteq \mathcal{A}\{1,2,3\}$. Como se verá a continuación, estos conjuntos coinciden.

También, por la Proposición 3.2.2, toda matriz $X \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$ satisface las dos ecuaciones del sistema dado por

$$XAX = X \quad \text{y} \quad AX = AA^{\dagger}. \tag{3.5}$$

Se demuestra que el conjunto $\mathcal{A}\{-\dagger\}$ es el conjunto solución del sistema (3.5), caracterizando de esta manera las soluciones del sistema mencionado.

Se presentan a continuación estos resultados.

**Teorema 3.2.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $Z \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$.

(b) $Z$ *es solución del sistema* (3.5).

(c) $Z \in \mathcal{A}\{1,2,3\}$.

*Demostración.* (a) $\Rightarrow$ (b) Sigue directamente de la Proposición 3.2.2.

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponer que $Z$ satisface $XAX = X$ y $AX = AA^{\dagger}$, y sea $A$ escrita en una descomposición en valores singulares como en (3.1). Sea

$$Z = V \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} U^*,$$

particionada acorde al tamaño de los bloques de $A$. Se observa que

$$AZ = U \begin{pmatrix} D_a Z_{11} & D_a Z_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad \text{y} \quad AA^\dagger = U \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

De $AZ = AA^\dagger$, se tiene $Z_{11} = D_a^{-1}$ y $Z_{12} = 0$. Además,

$$ZAZ = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & 0 \\ Z_{21} & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

Como $ZAZ = Z$, se obtiene $Z_{22} = 0$. De esta manera,

$$Z = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & 0 \\ Z_{21} & 0 \end{pmatrix} U^*,$$

donde $Z_{21} \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$ es arbitraria. Así, de (3.4), se tiene $Z \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$.
(b) $\Rightarrow$ (c) Por hipótesis $Z$ satisface las ecuaciones $XAX = X$ y $AX = AA^\dagger$. Entonces $Z \in \mathcal{A}\{2,3\}$. Ahora, $AZA = AA^\dagger A = A$, así $Z \in \mathcal{A}\{1\}$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Suponer $Z \in \mathcal{A}\{1,2,3\}$. Entonces $Z$ satisface la primera ecuación del sistema (3.5). Se considera una descomposición en valores singulares de $A$ como en (3.1). Como $Z \in \mathcal{A}\{1\}$, por (1.4) $Z$ puede escribirse como $Z = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} U^*$, donde la partición ha sido realizada de acuerdo al tamaño de los bloques de $A$. De la igualdad $(AZ)^* = AZ$ se tiene que $Z_{12} = 0$. Luego $AZ = U \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^* = AA^\dagger$. Se obtiene así el apartado (b). $\square$

La Proposición 3.2.1 caracteriza al conjunto $\mathcal{A}\{-\dagger\}$ como sigue

$$\mathcal{A}\{-\dagger\} = \{X \in \mathbb{C}^{n\times m} : \; XAX = X, \, AX = AA^\dagger\} = \mathcal{A}\{1,2,3\}.$$

**Observación 3.2.1.** Observar que $A\{2,3\} \not\subseteq \mathcal{A}\{-\dagger\}$. Por ejemplo, tomando la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}\{2,3\}$$

pero no pertenece al conjunto $\mathcal{A}\{-\dagger\}$, pues no es una $\{1\}$-inversa de $A$.

Notar también que $\mathcal{A}\{1\} \not\subseteq \mathcal{A}\{-\dagger\}$, como se ve en el siguiente ejemplo. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in A\{1\}$$

pero no es una $\{2\}$-inversa de $A$.

Se presenta a continuación otra caracterización del conjunto $\mathcal{A}\{-\dagger\}$ a partir de una inversa 1MP fija de $A$.

**Proposición 3.2.3.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y sea $A^{-\dagger}$ una matriz fija en $\mathcal{A}\{-\dagger\}$. El conjunto de todas las inversas 1MP de $A$ está dado por el conjunto uniparamétrico*

$$\mathcal{A}\{-\dagger\} = \{A^{-\dagger} + (I_n - A^{-\dagger}A)WAA^{-\dagger} : W \in \mathbb{C}^{n\times m} \textit{es arbitraria}\}.$$

*Demostración.* Denotar

$$\mathcal{S} = \{A^{-\dagger} + (I_n - A^{-\dagger}A)WAA^{-\dagger}, W \in \mathbb{C}^{n\times m} \text{arbitraria}\}.$$

Entonces $\mathcal{A}\{-\dagger\} = \mathcal{S}$. En efecto, utilizando la Proposición 3.2.2, se puede ver que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}\{-\dagger\}$ pues, si $Z \in \mathcal{S}$ entonces $Z = A^{-\dagger} + (I_n - A^{-\dagger}A)WAA^{-\dagger}$ para alguna matriz $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Luego,

$$AZ = A[A^{-\dagger}+(I_n-A^{-\dagger}A)WAA^{-\dagger}] = AA^{-\dagger}+A(I_n-A^{-\dagger}A)WAA^{-\dagger} = AA^{-\dagger} = AA^{\dagger}.$$

Además,

$$\begin{aligned}
ZAZ &= [A^{-\dagger} + (I_n - A^{-\dagger}A)WAA^{-\dagger}]A[A^{-\dagger} + (I_n - A^{-\dagger}A)WAA^{-\dagger}] \\
&= [A^{-\dagger} + (I_n - A^{-\dagger}A)WAA^{-\dagger}]AA^{-\dagger} \\
&= A^{-\dagger} + (I_n - A^{-\dagger}A)WAA^{-\dagger} \\
&= Z.
\end{aligned}$$

Ahora, recordando las equivalencias entre (a) y (b) en el Teorema 3.2.1, se tiene el resultado deseado.

Por otro lado, si $Z \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$, existe $C \in \mathcal{A}\{1\}$ tal que $Z = CAA^{\dagger}$. Además, la matriz fija $A^{-\dagger} \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$ dada en la hipótesis puede ser escrita como $A^{-\dagger} = A^{-}AA^{\dagger}$, para alguna matriz $A^{-} \in \mathcal{A}\{1\}$. Ahora, por el Teorema 1.2.2, existe $W \in C^{n\times m}$ tal que $C = A^{-} + W - A^{-}AWAA^{-}$. Por lo tanto,

$$Z = CAA^{\dagger} = (A^{-} + W - A^{-}AWAA^{-})AA^{\dagger} = A^{-\dagger} + WAA^{\dagger} - A^{-}AWAA^{-\dagger}.$$

Dado que $AA^{\dagger} = AA^{-\dagger}$ y $A^{-}A = A^{-\dagger}A$ se tiene, aplicando nuevamente la propiedad distributiva,

$$Z = A^{-\dagger} + (I_n - A^{-\dagger}A)WAA^{-\dagger}.$$

Así, $Z \in \mathcal{S}$. Por lo tanto, $\mathcal{A}\{-\dagger\} \subseteq \mathcal{S}$. $\square$

### 3.2.2 Inversas 1MP para isometrías parciales

Recordar que una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ es una *isometría parcial* si y solo si $A^{\dagger} = A^*$. Además, esta afirmacón es equivalente a $AA^*A = A$ [13]. En este caso, $A^{-\dagger} = A^-AA^* \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$. El siguiente resultado analiza la restricción de las inversas 1MP al conjunto de isometrías parciales.

**Proposición 3.2.4.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una isometría parcial. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *El sistema de ecuaciones matriciales*

$$XAX = X \quad y \quad AX = AA^* \tag{3.6}$$

*tiene solución.*

(b) *Existe una matriz $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$ tal que*

$$X = A^-AA^* + (I - A^-A)WAA^*, \tag{3.7}$$

*para alguna matriz $W$ de tamaño adecuado.*

*Demostración.* (a) $\Rightarrow$ (b) Como $A$ es una isometría parcial, $A^{\dagger} = A^*$ y por lo tanto el sistema (3.6) es equivalente al sistema (3.5). Entonces, por el Teorema 3.2.1, se obtiene $X \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$. Luego, existe $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$ tal que $X = A^-AA^*$. Así, usando la Proposición 3.2.3 y teniendo en cuenta que $A^{-\dagger}A = A^-A$ y $AA^{-\dagger} = AA^*$ se concluye que $X = A^-AA^* + (I - A^-A)WAA^*$, para alguna $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea $X = A^-AA^* + (I - A^-A)WAA^*$, con $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ para alguna matriz fija $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$. Así, $AX = A(A^-AA^* + (I - A^-A)WAA^*)$. Aplicando la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que $A^-$ es una $\{1\}$-inversa de $A$, se tiene que $AX = AA^*$. Ahora, premultiplicando por $X$ se tiene que $XAX = XAA^* = (A^-AA^* +$

$(I - A^- A)WAA^*)AA^*$. Aplicando la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que $AA^*A = A$, se concluye que $XAX = X$. □

Observar que si se considera una matriz $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$ y a partir de ella se obtiene una inversa 1MP particular utilizando la Proposición 3.2.4 (b), se pueden encontrar todas las soluciones del sistema (3.6) usando la Proposición 3.2.3.

## 3.3 Inversas MP1

Esta sección está dedicada a presentar las inversas duales de las inversas 1MP introducidas y caracterizadas en la Sección 3.2 precedente.

Procediendo de manera análoga a la efectuada en la Sección 3.2, si $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ es escrita mediante una descomposición en valores singulares como en (3.1) y se considera una matriz $\{1\}$-inversa de $A$ escrita en su forma general dada por (1.4), se obtiene

$$AA^- = U \begin{pmatrix} I_a & D_a A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

Ahora, definiendo la relación de equivalencia: Dadas $A^-$, $A^= \in \mathcal{A}\{1\}$,

$$A^- \, \delta_d \, A^= \quad \text{si y solo si} \quad AA^- = AA^=$$

(aquí el subíndice $d$ es utilizado para indicar la multiplicación a derecha por una inversa interior de la matriz $A$), se tiene que la clase de $A^-$ por $\delta_d$ se representa mediante

$$[A^-]_{\delta_d} = \left\{ V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & A_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} U^* \in \mathcal{A}\{1\} : B_{21} \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}, B_{22} \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(m-a)} \right\}.$$

Un conjunto completo de representantes de la partición inducida por $\delta_d$ en $\mathcal{A}\{1\}$ está dado por

$$\mathcal{R}_{\delta_d} = \left\{ V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* : A_{12} \in \mathbb{C}^{a\times(m-a)} \text{ es arbitraria} \right\}.$$

Observar que cualquier elemento en $\mathcal{R}_{\delta_d}$ puede ser escrito como $A^\dagger AA^-$. Así, se considera una nueva clase de inversas generalizadas que es la dual de la clase de las inversas 1MP.

**Definición 3.3.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Para cada $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$, la inversa MP1 de $A$, denotada por $A^{\dagger -}$, es la matriz de tamaño $n \times m$ dada por*

$$A^{\dagger -} = A^\dagger AA^-.$$

El símbolo $\mathcal{A}\{\dagger -\}$ representa el conjunto de todas las inversas MP1 de $A$. Por ser $A^\dagger$ una $\{1,2\}$-inversa de $A$ se tiene que esta matriz es un elemento de $\mathcal{A}\{\dagger -\}$ y por lo tanto este conjunto es no vacío. En general, $\mathcal{A}\{\dagger -\} = \{A^\dagger AA^- : A^- \in \mathcal{A}\{1\}\}$ es un conjunto que posee más de un elemento.

Se presentan a continuación propiedades de esta clase de matrices inversas generalizadas, cuyas demostraciones se omiten por ser análogas a las realizadas en la Sección 3.2.

**Proposición 3.3.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Dada una matriz $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$, la matriz $A^{\dagger -} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ satisface las siguientes propiedades:*

(a) $A^{\dagger -} \in \mathcal{A}\{1, 2, 4\}$.

(b) $AA^{\dagger -} = AA^-$ *y* $A^{\dagger -}A = A^\dagger A$.

Por otro lado, si $A$ está escrita como en (3.1) entonces existe $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$ tal que $Z = A^\dagger A A^- \in \mathcal{A}\{\dagger -\}$ si y solo si

$$Z = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & Z_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*,$$

para una matriz $Z_{12} \in \mathbb{C}^{a\times(m-a)}$.

También se puede establecer una fórmula uniparamétrica para caracterizar a las inversas MP1. En efecto, sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, entonces $Z \in \mathcal{A}\{\dagger -\}$ si y solo si existe $A^{\dagger -} \in \mathcal{A}\{\dagger -\}$ tal que $Z = A^{\dagger -} + A^{\dagger -}AW(I - AA^{\dagger -})$, donde $W$ es una matriz arbitraria de tamaño adecuado.

El siguiente resultado muestra otras caracterizaciones del conjunto $\mathcal{A}\{\dagger -\}$.

**Teorema 3.3.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $Z \in \mathcal{A}\{\dagger -\}$.

(b) *$Z$ es solución del sistema de ecuaciones matriciales*

$$XAX = X, \quad XA = A^\dagger A.$$

(c) $Z \in \mathcal{A}\{1, 2, 4\}$.

**Observación 3.3.1.** Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si $ind(A) \leq 1$ entonces $A$ es core invertible. Además, se sabe que $A^{\#\!\!\!\bigcirc} \in \mathcal{A}\{1, 2, 3\}$ y por lo tanto es inmediato que $A^{\#\!\!\!\bigcirc} \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$. Por otro lado, observar que si $A^{D,\dagger} \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$ entonces $AA^{D,\dagger} = AAA^\dagger$. Posmultiplicando ambos miembros de la igualdad por $A$ se tiene $AA^DAA^\dagger A = AA^\dagger A$. Es decir $AA^DA = A$. Como las matrices $A$ y $A^D$ conmutan, se tiene que $A^2A^D = A$ y así $ind(A) \leq 1$, de donde $A^{D,\dagger} = A^{\#\!\!\!\bigcirc}$. Esto es, $A^{D,\dagger} \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$ si y solo si $A^{D,\dagger} = A^{\#\!\!\!\bigcirc}$. Similarmente, para la inversa core dual se tiene: $A^{\dagger,D} \in \mathcal{A}\{\dagger -\}$ si y solo si $A_{\#\!\!\!\bigcirc} = A^{\dagger,D}$.

**Observación 3.3.2.** Dada $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se tiene que las clases de inversas generalizadas GDMP y MPGD introducidas en el Capítulo 2 forman una subclase de $\mathcal{A}\{-\dagger\}$ y de $\mathcal{A}\{\dagger-\}$, respectivamente. Para ello, basta observar que las inversas G-Drazin de una matriz $A$ pertenecen al conjunto $\mathcal{A}\{1\}$.

Se finaliza esta sección estableciendo una interesante relación entre las inversas 1MP de $A$ y sus duales, las inversas MP1 de $A$, como se muestra en el siguiente resultado.

**Proposición 3.3.2.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Entonces*

$$\mathcal{A}\{-\dagger\} \cap \mathcal{A}\{\dagger-\} = \{A^\dagger\}.$$

*Demostración.* Se sigue directamente de $\mathcal{A}\{-\dagger\} = \mathcal{A}\{1,2,3\}$ y $\mathcal{A}\{\dagger-\} = \mathcal{A}\{1,2,4\}$. $\square$

**Observación 3.3.3.** Notar que, si $A^{c,\dagger}$ es una inversa interior de $A$, se tiene que $AA^{c,\dagger} = AA^\dagger$ y $A^{c,\dagger}A = A^\dagger A$. Entonces, $A^{c,\dagger} \in \mathcal{A}\{-\dagger\} \cap \mathcal{A}\{\dagger-\}$. Por lo tanto, $A^{c,\dagger}$ es una inversa interior de $A$ si y solo si $A^{c,\dagger} = A^\dagger$.

## 3.4 Inversas 2MP y sus duales

El procedimiento utilizado para introducir las inversas generalizadas 1MP y MP1 se puede extender a otro contexto y así obtener nuevas inversas generalizadas.

En esta sección se analizan los proyectores oblicuos del tipo $A^{(2)}A$ y $AA^{(2)}$, con $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$, que dan lugar a la definición de dos nuevas clases de inversas generalizadas: las inversas 2MP y sus duales, las inversas MP2.

Dada una matriz $A$ escrita mediante una descomposición en valores singulares como en (3.1), toda matriz $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$ se puede expresar mediante

$$A^{(2)} = V \begin{pmatrix} M & MY_{12} \\ Y_{21}M & Y_{21}MY_{12} \end{pmatrix} U^* \text{ con } MD_aM = M, \tag{3.8}$$

donde $Y_{12}$, $Y_{21}$ son matrices arbitrarias de tamaños adecuados.

Utilizando estas representaciones, se tiene que

$$A^{(2)}A = V \begin{pmatrix} MD_a & 0 \\ Y_{21}MD_a & 0 \end{pmatrix} V^*, \text{ donde } MD_aM = M. \tag{3.9}$$

Para determinar bajo qué condiciones dos proyectores del tipo $A^{(2)}A$ resultan diferentes cuando varía la matriz $A^{(2)}$ en el conjunto $\mathcal{A}\{2\}$ se define una relación de equivalencia apropiada en el conjunto $\mathcal{A}\{2\}$.

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se define la relación binaria $\zeta_i$ en el conjunto $\mathcal{A}\{2\}$ como sigue. Para $A^{(2)_1}, A^{(2)_2} \in \mathcal{A}\{2\}$, se dice que

$$A^{(2)_1}\, \zeta_i\, A^{(2)_2} \quad \text{si y solo si} \quad A^{(2)_1}A = A^{(2)_2}A.$$

Así definida, $\zeta_i$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{A}\{2\}$.

Para cada $A^{(2)_1} \in \mathcal{A}\{2\}$, existen matrices $M, Y_{12}, Y_{21}$ de tamaños adecuados tal que $A^{(2)_1}$ se puede representar como en (3.8). Esta representación permite realizar el siguiente análisis.

La clase de equivalencia de $A^{(2)_1}$ está dada por

$$[A^{(2)_1}]_{\zeta_i} = \{A^{(2)_2} \in \mathcal{A}\{2\} : A^{(2)_2}A = A^{(2)_1}A\}.$$

Considerar otra inversa exterior de $A$,

$$A^{(2)_2} = V \begin{pmatrix} M' & M'Y'_{12} \\ Y'_{21}M' & Y'_{21}M'Y'_{12} \end{pmatrix} U^* \text{ con } M'D_aM' = M'.$$

Utilizando la expresión (3.9) se tiene que

$A^{(2)_2} \in [A^{(2)_1}]_{\zeta_i}$ si y solo si

$$V \begin{pmatrix} M'D_a & 0 \\ Y'_{21}M'D_a & 0 \end{pmatrix} U^* = V \begin{pmatrix} MD_a & 0 \\ Y_{21}MD_a & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

Es decir,

$$M' = M, \quad Y'_{21}M' = Y_{21}M.$$

Esto es,

$$[A^{(2)_1}]_{\zeta_i} = \left\{ V \begin{pmatrix} M & MY'_{12} \\ Y_{21}M & Y_{21}MY'_{12} \end{pmatrix} U^* \in \mathcal{A}\{2\}, MD_aM = M, Y'_{12} \text{ e } Y'_{21} \text{ arb.} \right\}. \tag{3.10}$$

Un conjunto completo de representantes para la partición en $\mathcal{A}\{2\}$ inducida por $\zeta_i$ está dado por

$$\mathcal{R}_{\zeta_i} = \left\{ V \begin{pmatrix} M & 0 \\ Y_{21}M & 0 \end{pmatrix} U^* \in \mathbb{C}^{n\times m} : MD_aM = M,\, Y_{21} \text{ arbitraria} \right\}.$$

Ahora, se observa que todo elemento de $\mathcal{R}_{\zeta_i}$ puede ser escrito como $A^{(2)}AA^\dagger$, con lo que se establece la siguiente definición.

**Definición 3.4.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Para cada $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$, la matriz*

$$A^{(2)\dagger} = A^{(2)}AA^\dagger \in \mathbb{C}^{n\times m}$$

*se llama una inversa 2MP de $A$.*

Esto es, las inversas $A^{(2)\dagger}$ son definidas como los representantes "mas simples" de las clases de equivalencia de $A^{(2)}$ por $\zeta_i$.

El símbolo $\mathcal{A}\{(2)\dagger\}$ denota el conjunto de todas las inversas 2MP de $A$, esto es,

$$\mathcal{A}\{(2)\dagger\} = \{A^{(2)}AA^{\dagger} : A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}\}.$$

La existencia de las $\{2\}$-inversas y de la inversa de Moore-Penrose garantizan que las inversas 2MP de $A$ existen. Claramente, $A^{\dagger}$ es un elemento de este conjunto y así $\mathcal{A}\{(2)\dagger\} \neq \emptyset$. En particular, es claro que $\mathcal{A}\{(2)\dagger\} = \{A^{-1}\}$ cuando $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible y, además, la única inversa 2MP de la matriz nula es ella misma. En general, el conjunto $\mathcal{A}\{(2)\dagger\}$ no es unitario.

El siguiente resultado proporciona una representación canónica de los elementos del conjunto $\mathcal{A}\{(2)\dagger\}$.

**Lema 3.4.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ escrita como en (3.1). Si $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$ está escrita como en (3.8), entonces*

$$A^{(2)\dagger} = V \begin{pmatrix} M & 0 \\ Y_{21}M & 0 \end{pmatrix} U^* \in \mathbb{C}^{n\times m}, \text{ con } MD_aM = M,\ Y_{21} \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}. \quad (3.11)$$

El siguiente resultado presenta las condiciones bajo las cuales dos matrices $A^{(2)_1}, A^{(2)_2} \in \mathcal{A}\{2\}$ verifican que $A^{(2)_1}A \neq A^{(2)_2}A$. Se omite su demostración por ser análoga a la realizada para matrices inversas 1MP.

**Lema 3.4.2.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ escrita como en (3.1). Entonces*

$$\mathcal{A}\{2\}/\zeta_i \quad \simeq \quad \mathcal{A}\{(2)\dagger\}.$$

Si se resuelve (en $A^{(2)_2}$) la ecuación matricial

$$A^{(2)_1}A = A^{(2)_2}A,$$

su conjunto solución está dado por

$$[A^{(2)_1}]_{\zeta_i} = \{A^{(2)_2} \in \mathcal{A}\{2\} : A^{(2)_2} = A^{(2)_1}AA^\dagger + Y(I - AA^\dagger),\, Y \in \mathbb{C}^{n\times m} \text{ arb.}\}.$$

Nuevamente, se puede expresar el conjunto solución de la ecuación matricial $A^{(2)_1}A = A^{(2)_2}A$ como un conjunto uniparamétrico.

Notar que $A^{(2)\dagger}A = A^{(2)}A$, con lo cual $AA^{(2)\dagger}A = AA^{(2)}A$. De manera análoga a lo realizado por Malik y Thome en [48], para $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y cada $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$, se considera la expresión $C_2^A = AA^{(2)\dagger}A = AA^{(2)}A$, la cual denota la parte core de una inversa 2MP de A. Se obtienen entonces los siguientes resultados.

**Teorema 3.4.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Para cada $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$, la matriz $A^{(2)\dagger}$ es la única solución del siguiente sistema de ecuaciones matriciales (en $X$):*

$$(i)\, XAX = X, \quad (ii)\, XA = A^{(2)}A, \quad (iii)\, C_2^A X = C_2^A A^\dagger. \tag{3.12}$$

*Demostración.* Es inmediato que $A^{(2)\dagger}$ satisface las ecuaciones (i), (ii) y (iii). Para probar la unicidad, suponer que existen $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisfacen las ecuaciones (i), (ii) y (iii). Entonces,

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1AX_1 = A^{(2)}AX_1 = A^{(2)}AA^{(2)}AX_1 = A^{(2)}C_2^AX_1 \\ &= A^{(2)}C_2^AX_2 = A^{(2)}AA^{(2)}AX_2 = A^{(2)}AX_2 = X_2AX_2 \\ &= X_2. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.4.2.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Dada $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$, la matriz $A^{(2)\dagger} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ satisface las siguientes propiedades:*

(a) *$AA^{(2)\dagger}$ es un proyector oblicuo sobre $\mathcal{R}(C_2^A)$ a lo largo de $\mathcal{N}(A^{(2)\dagger})$. Además, $\mathcal{R}(A^{(2)\dagger}) \subseteq \mathcal{R}(A^{(2)})$.*

(b) *$A^{(2)\dagger}A$ es un proyector oblicuo sobre $\mathcal{R}(A^{(2)}A) = \mathcal{R}(A^{(2)\dagger}) = \mathcal{R}(A^{(2)})$ a lo largo de $\mathcal{N}(A^{(2)}A) = \mathcal{N}(C_2^A)$.*

*Demostración.* (a) Se tiene que

$$\begin{aligned}(AA^{(2)\dagger})(AA^{(2)\dagger}) &= AA^{(2)}(AA^\dagger A)A^{(2)}AA^\dagger \\ &= A(A^{(2)}AA^{(2)})AA^\dagger = AA^{(2)}AA^\dagger = AA^{(2)\dagger}.\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(AA^{(2)\dagger}) &= \mathcal{R}((AA^{(2)})AA^\dagger) = AA^{(2)}\mathcal{R}(AA^\dagger) \\ &= AA^{(2)}\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^{(2)}A) = \mathcal{R}(C_2^A).\end{aligned}$$

Observar que $\mathcal{R}(A^{(2)\dagger}) = \mathcal{R}(A^{(2)}AA^\dagger) \subseteq \mathcal{R}(A^{(2)})$. Por otro lado,

$$\mathcal{N}(AA^{(2)\dagger}) = \mathcal{N}(AA^{(2)}AA^\dagger) = \mathcal{N}(A^{(2)}AA^\dagger) = \mathcal{N}(A^{(2)\dagger}).$$

(b) Es claro que $A^{(2)\dagger}A = A^{(2)}A$, que es una matriz idempotente. Ahora,

$$\mathcal{R}(A^{(2)\dagger}A) = \mathcal{R}(A^{(2)}A) = A^{(2)}\mathcal{R}(A) = A^{(2)}\mathcal{R}(AA^\dagger) = \mathcal{R}(A^{(2)}AA^\dagger) = \mathcal{R}(A^{(2)\dagger}).$$

Por otro lado, $\mathcal{R}(A^{(2)\dagger}A) = \mathcal{R}(A^{(2)}A) \subseteq \mathcal{R}(A^{(2)}) = \mathcal{R}(A^{(2)}AA^{(2)}) \subseteq \mathcal{R}(A^{(2)}A)$. Por último,

$$\mathcal{N}(A^{(2)\dagger}A) = \mathcal{N}(A^{(2)}A) = \mathcal{N}(AA^{(2)}A) = \mathcal{N}(C_2^A).$$

□

**Teorema 3.4.3.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Para cada $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$, la matriz $A^{(2)\dagger}$ es la única matriz que satisface las siguientes propiedades:*

$$(i)\, AX = P_{\mathcal{R}(C_2^A)\mathcal{N}(X)}, \quad (ii)\, \mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^{(2)}). \tag{3.13}$$

*Demostración.* Por el Teorema 3.4.2 (a) se tiene que $A^{(2)\dagger}$ satisface las propiedades (i) y (ii).

Para probar la unicidad, suponer que existen matrices $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisfacen las condiciones (i) y (ii). Entonces $AX_1 = P_{\mathcal{R}(C_2^A)\mathcal{N}(C_2^A A^\dagger)} = AX_2$, así $A(X_1 - X_2) = 0$ y por lo tanto $\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{N}(A)$.

Ahora, de $\mathcal{R}(X_i) \subseteq \mathcal{R}(A^{(2)})$ para $i \in \{1, 2\}$ se tiene $\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{R}(A^{(2)})$. Entonces $\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{R}(A^{(2)}) \cap \mathcal{N}(A)$. Como $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^{(2)}A)$ y $\mathcal{R}(A^{(2)}) = \mathcal{R}(A^{(2)}A)$ se obtiene $\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{R}(A^{(2)}A) \cap \mathcal{N}(A^{(2)}A) = \{0\}$. Por lo tanto $X_1 = X_2$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que las inversas 2MP son diferentes de las inversas exteriores conocidas en la literatura. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si se considera

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}\{2\},$$

se obtiene que

$$Y = XAA^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}\{2\dagger\}.$$

Observar que $Y \neq A^\dagger = A^{c,\dagger}$. Además, $Y \neq A^{D,\dagger}$ (pues $AY \neq AA^\dagger$).

Notar que, para cada matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y particularizando $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$, la matriz $A^{(2)\dagger} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ permite recuperar la inversa de Moore-Penrose, la inversa DMP, la inversa core y la inversa CMP, como se ve reflejado en el siguiente cuadro.

| $A^{(2)}$ | $A^{(2)\dagger}$ |
|---|---|
| $A^\dagger$ | $A^\dagger$ |
| $A^D$ | $A^{d,\dagger}$ |
| $A^\#$ | $A^{\textcircled{\#}}$ |
| $A^\dagger AA^D$ | $A^{c,\dagger}$ |

Las matrices inversas duales a las inversas 2MP se introducen mediante el análisis del comportamiento de los proyectores de la forma $AA^{(2)}$.

El procedimiento es análogo al anterior. Para $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, se define la relación binaria $\zeta_d$ en el conjunto $\mathcal{A}\{2\}$ como sigue. Para $A^{(2)_1}, A^{(2)_2} \in \mathcal{A}\{2\}$

$$A^{(2)_1}\, \zeta_d\, A^{(2)_2} \quad \text{si y solo si} \quad AA^{(2)_1} = AA^{(2)_2}.$$

Se obtiene que

$$\mathcal{R}_{\zeta_d} = \left\{ V \begin{pmatrix} D_a M & D_a M Y_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* : Y_{12} \in \mathbb{C}^{a\times(m-a)} \text{ es arbitraria} \right\}$$

es un conjunto completo de representantes de la partición en $\mathcal{A}\{2\}$ inducida por $\zeta_d$.

El hecho de que todo elemento de $\mathcal{R}_{\zeta_d}$ puede ser escrito como $A^\dagger A A^{(2)}$ permite introducir, de manera análoga a la definición de estas inversas, un nuevo tipo de inversas generalizadas, que es la dual de las inversas 2MP.

**Definición 3.4.2.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Para cada $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$, la matriz*

$$A^{\dagger(2)} = A^\dagger A A^{(2)} \in \mathbb{C}^{n\times m}$$

*se llama una inversa MP2 de $A$.*

El conjunto de todas las inversas MP2 de $A$ se denota con el símbolo $\mathcal{A}\{\dagger(2)\}$, este conjunto es no vacío pues $A^\dagger \in \mathcal{A}\{\dagger(2)\}$ y además $\mathcal{A}\{\dagger(2)\} \subseteq \mathcal{A}\{2\}$. En símbolos,

$$\mathcal{A}\{\dagger(2)\} = \{A^\dagger A A^{(2)} : A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}\}.$$

En este caso, el conjunto $\mathcal{A}\{\dagger(2)\}$ puede ser caracterizado como sigue:

$$\mathcal{A}\{\dagger(2)\} = \{X \in \mathbb{C}^{n\times m} : XAX = X, AX = AA^{2-}, XC_2^A = A^\dagger C_2^A\}.$$

También en este caso se puede establecer una fórmula uniparamétrica para las nuevas inversas.

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces, $Z \in \mathcal{A}\{\dagger(2)\}$ si y solo si existe $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$ tal que $Z = A^\dagger A A^{(2)} + (I - A^\dagger A)Y$, para una matriz arbitraria $Y$ de tamaño adecuado.

## 3.5 Inversas C2MP

En las secciones precedentes de este capítulo se presentó un enfoque novedoso para definir las nuevas inversas generalizadas 1MP, MP1, 2MP y MP2. Se introdujeron estas inversas como los representantes "más simples" de clases de equivalencia determinadas por relaciones definidas sobre conjuntos particulares de matrices complejas. En cada caso, el punto de partida fue el estudio del comportamiento de ciertos proyectores.

En esta sección se analiza el producto de la propia matriz $A$ por un proyector del tipo $A^{(2)}A$, extendiendo el procedimiento utilizado en las secciones anteriores para definir nuevas inversas.

Dada $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, considerar la relación binaria $\rho$, definida en el conjunto $\mathcal{A}\{2\}$ de la siguiente manera:

Para $A^{(2)_1}, A^{(2)_2} \in \mathcal{A}\{2\}$, se dice que

$$A^{(2)_1}\,\rho\,A^{(2)_2} \quad \text{si y solo si} \quad AA^{(2)_1}A = AA^{(2)_2}A.$$

Claramente, $\rho$ es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathcal{A}\{2\}$.

Además,

$$A^{(2)_2} \in [A^{(2)_1}]_\rho \quad \text{si y solo si} \quad AA^{(2)_1}A = AA^{(2)_2}A.$$

Por otro lado, para $A$ y $A^{(2)_1}$ representadas, respectivamente, mediante (3.1) y (3.8), se tiene que el proyector $A^{(2)_1}A$ tiene la representación matricial (3.9).

Luego, para $A^{(2)_2} \in \mathcal{A}\{2\}$ representada mediante

$$A^{(2)_2} = V \begin{pmatrix} M' & M'Y'_{12} \\ Y'_{21}M' & Y'_{21}M'Y'_{12} \end{pmatrix} U^*, \text{ con } M'D_aM' = M',$$

se tiene que $A^{(2)_2} \in [A^{(2)_1}]_\rho$ si y solo si

$$U\begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M'D_a & 0 \\ Y_{21}'M'D_a & 0 \end{pmatrix}U^* = U\begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} MD_a & 0 \\ Y_{21}MD_a & 0 \end{pmatrix}U^*.$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} D_aM'D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_aMD_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto es, $M' = M$.

De esta manera, se tiene que

$$[A^{(2)_1}]_\rho = \left\{ V\begin{pmatrix} M & MY_{12}' \\ Y_{21}'M & Y_{21}'MY_{12}' \end{pmatrix}U^* \in \mathcal{A}\{2\}, MD_aM = M, Y_{12}' \text{ e } Y_{21}' \text{ arb.} \right\}.$$

Considerando los representantes "más simples" de las clases de equivalencia, se obtiene el siguiente conjunto completo de representantes para la partición en $\mathcal{A}\{2\}$ inducida por $\rho$:

$$\mathcal{R}_\rho = \left\{ V\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \in \mathbb{C}^{n\times m} : MD_aM = M \right\}.$$

Al analizar la representación de los elementos de $\mathcal{R}_\rho$ se observa que, si se consideran los proyectores ortogonales $P_A := AA^\dagger$ y $Q_A := A^\dagger A$, esas representaciones matriciales se obtienen calculando los productos

$$Q_AA^{(2)}P_A = A^\dagger AA^{(2)}AA^\dagger = A^\dagger AA^{2MP}AA^\dagger.$$

Este hecho motiva la consideración de la siguiente definición.

**Definición 3.5.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Para cada $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$, la matriz*

$$A^{C2MP} = A^\dagger C_2^A A^\dagger \in \mathbb{C}^{n\times m}$$

*es llamada una inversa C2MP de A, donde* $C_2^A = AA^{2MP}A = AA^{(2)}A$.

Observar que las inversas C2MP representan una generalización natural para matrices rectangulares de las inversas CMP definidas por M. Mehdipour y A. Salemi en [53] para una matriz cuadrada $A$ mediante

$$A^{c,\dagger} = A^\dagger A_1 A^\dagger, \text{ con } A_1 = AA^D A.$$

Además, la extensión de las inversas CMP que se presenta en esta sección es diferente de la introducida por D. Mosić en [62], donde se utilizó la inversa $W$-Drazin ponderada en lugar de la inversa de Drazin para realizar la extensión. Esto es, la autora utilizó una matriz de ponderación $W$ para definir la inversa CMP $W$-ponderada como

$$A^{c,\dagger,W} = A^\dagger AWA^{D,W}WAA^\dagger,$$

donde $A^{D,W}$ denota la inversa de Drazin $W$-ponderada introducida por Cline y Greville en [21].

En cambio, para realizar la extensión, en esta sección se utilizó una inversa exterior de una matriz rectangular $A$ en lugar de la inversa de Drazin $W$-ponderada de $A$. Específicamente, para introducir esta nueva clase de inversas generalizadas se utilizó la parte core de una inversa 2MP de $A$, es decir, para $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$ se usó la matriz $AA^{2MP}A = AA^{(2)}A = C_2^A$.

Observar que al utilizar este enfoque no es necesario tomar una matriz peso auxiliar, sino que se usa la propia matriz $A$ para realizar la extensión. Este hecho representa una ventaja interesante, puesto que esta extensión depende únicamente de la matriz $A$ sin la necesidad de trabajar con un par de matrices $(A, W)$.

Notar que las inversas C2MP no son únicas aunque siempre existen, ya que toda matriz posee al menos una inversa exterior. Por ejemplo, si se considera $A^{(2)} = A^\dagger$ se obtiene $A^{C2MP} = A^\dagger$.

El símbolo $\mathcal{A}\{C2MP\}$ denota el conjunto de todas las inversas C2MP de la matriz $A$, esto es,

$$\mathcal{A}\{C2MP\} = \{A^\dagger C_2^A A^\dagger : C_2^A = AA^{(2)}A, \text{ para cada } A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}\}.$$

Notar también que, para matrices cuadradas, si se considera $A^{(2)} = A^D$ entonces $A^{C2MP} = A^{CMP}$.

El siguiente ejemplo muestra que la inversa CMP ponderada de una matriz $A$ definida por Mosić en [62] como $A^{c,\dagger,W} = A^\dagger AWA^{D,W}WAA^\dagger$ es, en general, diferente de una inversa C2MP de $A$.

**Ejemplo 3.5.1.** *Considerar*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Entonces*

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad y \qquad A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}.$$

*Por definición se tiene*

$$A^{D,W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2^A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{c,\dagger,W} = W \quad y \quad A^{C2MP} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Así,* $A^{C2MP} \neq A^{c,\dagger,W}$.

Se presentan a continuación algunas propiedades que verifican las inversas C2MP de una matriz $A$ y se establecen algunas relaciones con las inversas 2MP y MP2 de $A$.

**Proposición 3.5.1.** *Considerar* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *y, fijando* $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$, *considerar las dos matrices* $C_2^A{=}AA^{(2)}A$ *y* $A^{C2MP} = A^\dagger C_2^A A^\dagger$. *Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

(a) $A^{C2MP} = A^{MP2}AA^{2MP}$.

(b) $A^{C2MP} = A^\dagger AA^{2MP}AA^\dagger$.

(c) $A^{C2MP} \in \mathcal{A}\{2\}$.

(d) $AA^{C2MP}A = C_2^A$.

(e) $AA^{C2MP} = C_2^A A^\dagger = AA^{2MP}$.

(f) $A^{C2MP}A = A^\dagger C_2^A = A^{MP2}A$.

*Demostración.* Para simplificar la notación en toda la demostración se denota $X := A^{C2MP}$. En efecto,

(a) $X = A^\dagger C_2^A A^\dagger = A^\dagger AA^{(2)}AA^\dagger = A^\dagger AA^{(2)}AA^{(2)}AA^\dagger = A^{MP2}AA^{2MP}$.

(b) $X = A^\dagger C_2^A A^\dagger = A^\dagger AA^{2MP}AA^\dagger$.

(c) $XAX = A^\dagger C_2^A A^\dagger AA^\dagger C_2^A A^\dagger = A^\dagger AA^{(2)}AA^\dagger AA^{(2)}AA^\dagger$. Luego,

$$XAX = A^\dagger AA^{(2)}AA^\dagger = A^\dagger C_2^A A^\dagger = X.$$

(d) $AXA = AA^\dagger C_2^A A^\dagger A = AA^\dagger AA^{(2)} AA^\dagger A = AA^{(2)} A = C_2^A$.

(e) $AX = AA^\dagger C_2^A A^\dagger = AA^\dagger AA^{(2)} AA^\dagger = AA^{(2)} AA^\dagger$. Entonces,

$$AX = (AA^{(2)} A)A^\dagger = C_2^A A^\dagger.$$

Por otro lado, $AX = A(A^{(2)} AA^\dagger) = AA^{2MP}$.

(f) $XA = A^\dagger C_2^A A^\dagger A = A^\dagger AA^{(2)} AA^\dagger A = A^\dagger AA^{(2)} A$. Así,

$$XA = A^\dagger (AA^{(2)} A) = A^\dagger C_2^A.$$

Además, $XA = (A^\dagger AA^{(2)})A = A^{MP2} A$.

□

El siguiente resultado muestra que, dada una inversa exterior de una matriz, la inversa C2MP asociada a ella se puede expresar como la única solución de un apropiado sistema de ecuaciones matriciales.

**Teorema 3.5.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Para $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$, la matriz $A^{C2MP}$ es la única matriz que satisface las ecuaciones del siguiente sistema matricial:*

$$(i)\, XAX = X, \quad (ii)\, AX = C_2^A A^\dagger, \quad (iii)\, XA = A^\dagger C_2^A. \tag{3.14}$$

*Demostración.* Por la Proposición 3.5.1 se tiene que $A^{C2MP}$ satisface las ecuaciones en (3.14). Para demostrar la unicidad suponer que $X_1$ y $X_2$ son dos soluciones del sistema de ecuaciones (3.14). Entonces,

$$X_1 = X_1 AX_1 = X_1 C_2^A A^\dagger = X_1 AX_2 = A^\dagger C_2^A X_2 = X_2 AX_2 = X_2.$$

□

El siguiente ejemplo muestra que, en general, las inversas C2MP de $A$ no son inversas interiores de $A$.

**Ejemplo 3.5.2.** *Considerar $A$ como en el Ejemplo 3.5.1. Si tomamos*

$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}\{2\}$ *se obtiene* $C_2^A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Por lo tanto,*

$$A^{C2MP} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Realizando los productos matriciales correspondientes se verifica que*

$$AA^{C2MP}A \neq A.$$

Se presentan ahora otras propiedades de las inversas C2MP. En todos los casos se consideran los proyectores ortogonales $P_A := AA^\dagger$ y $Q_A := A^\dagger A$.

**Proposición 3.5.2.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Para cada $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$ se verifican las siguientes propiedades:*

(a) $A^{C2MP} \in A\{1\}$ *si y solo si* $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{1\}$.

(b) $A^{C2MP} = Q_A A^{(2)} P_A = Q_A A^{2MP} P_A$.

(c) $A^{C2MP}$ *es una* $\{1,2\}$*-inversa de* $C_2^A$.

(d) $C_2^A A^{C2MP} = AA^{C2MP}$.

(e) $A^{C2MP} C_2^A = A^{C2MP} A$.

(f) $P_A C_2^A Q_A = C_2^A$.

*Demostración.* (a) Utilizando la definición de $A^{C2MP}$ y que $A^\dagger$ es una inversa interior de $A$ se tiene que

$$A(A^\dagger AA^{(2)}AA^\dagger)A = A \text{ si y solo si } AA^{(2)}A = A.$$

(b) La primera igualdad es inmediata por la definición de la matriz $A^{C2MP}$. La segunda igualdad sigue de la Proposición 3.5.1 (b).

(c) $C_2^A A^{C2MP} C_2^A = AA^{(2)}AA^\dagger A(A^{(2)}AA^\dagger AA^{(2)}A) = AA^{(2)}AA^{(2)}A = C_2^A$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} A^{C2MP}C_2^A A^{C2MP} &= A^\dagger AA^{(2)}AA^\dagger AA^{(2)}AA^\dagger AA^{(2)}AA^\dagger = A^\dagger AA^{(2)}AA^\dagger \\ &= A^\dagger C_2^A A^\dagger = A^{C2MP}. \end{aligned}$$

(d) $C_2^A A^{C2MP} = AA^{(2)}AA^\dagger AA^{(2)}AA^\dagger = AA^{(2)}AA^\dagger = C_2^A A^\dagger = AA^{C2MP}$.

(e) $A^{C2MP}C_2^A = A^\dagger AA^{(2)}AA^\dagger AA^{(2)}A = A^\dagger AA^{(2)}A = A^\dagger C_2^A = A^{C2MP}A$.

(f) $P_A C_2^A Q_A = AA^\dagger AA^{(2)}AA^\dagger A = AA^{(2)}A = C_2^A$.

□

El siguiente lema establece una forma canónica para toda inversa C2MP de $A$ y para la matriz $C_2^A$ involucrada en su definición.

**Lema 3.5.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ escrita como en* (3.1) *y $A^{(2)}$ escrita como en* (3.8). *Entonces,*

$$C_2^A = U\begin{pmatrix} D_aMD_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^* \quad y \quad A^{C2MP} = V\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*,$$

*con* $MD_aM = M$.

*Demostración.* La demostración es inmediata teniendo en cuenta la expresión (3.3) para $A^\dagger$ y realizando los productos matriciales involucrados en las definiciones de $C_2^A$ y $A^{C2MP}$. $\square$

**Teorema 3.5.2.** *Sea* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Fijada* $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $A^{C2MP} = A^\dagger$.

(b) $C_2^A = A$.

(c) $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{1\}$.

(d) $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{1, 2\}$.

(e) $M = D_a^{-1}$, *para* $A$ *escrita como en* (3.1) *y* $A^{(2)}$ *como en* (3.8),

(f) $A^{C2MP} \in \mathcal{A}\{1\}$.

*Demostración.* (a) $\Rightarrow$ (b) Si $A^{C2MP} = A^\dagger$, entonces pre y pos multiplicando por $A$ se tiene que $P_A C_2^A Q_A = A$. Por la Proposición 3.5.2 (f) se obtiene $C_2^A = A$.

(b) $\Rightarrow$ (c) y (c) $\Rightarrow$ (d) se verifican trivialmente.

(d) $\Rightarrow$ (a) Como $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{1\}$, se tiene que $C_2^A = A$. Entonces,

$$A^{C2MP} = A^\dagger C_2^A A^\dagger = A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger.$$

(e) $\Leftrightarrow$ (a) La demostración es inmediata por el Lema 3.5.1.

(c) $\Leftrightarrow$ (f) Se demostró en la Proposición 3.5.2. $\square$

**Observación 3.5.1.** Si se considera $A^{(2)} = A^\dagger$ entonces $C_2^A = A$ y $A^{C2MP} = A^\dagger$. En general, la recíproca no se verifica. Para comprobarlo, considerar $A$ como en el Ejemplo 3.5.1. Tomar

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & c \\ 0 & 1 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{A}\{1,2\} \text{ con } c \neq 0 \text{ o } d \neq 0.$$

Luego, $C_2^A = A$ y $A^{C2MP} = A^\dagger$ pero $A^{(2)} \neq A^\dagger$.

**Teorema 3.5.3.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ escrita como en* (3.1). *Para cada $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$ escrita como en* (3.8), *se satisfacen las siguientes propiedades:*

(a) $(A^{C2MP})^\dagger = U \begin{pmatrix} M^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*$, *donde $M$ verifica $MD_aM = M$.*

(b) $(A^\dagger)^{C2MP} = U \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*$, *donde $T$ verifica $TD_a^{-1}T = T$.*

(c) $(A^{C2MP})^\dagger = (A^\dagger)^{C2MP}$ *si y solo si $M^\dagger = T$, $MD_aM = M$ y $TD_a^{-1}T = T$.*

(d) $A^{C2MP} = A^*$ *si y solo si $M = D_a$.*

(e) $A^{C2MP} = 0$ *si y solo si $A^{(2)} = 0$ si y solo si if $C_2^A = 0$.*

(f) $A^{C2MP} = A^\dagger$ *si y solo si $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{1\}$.*

*Demostración.* (a) Se verifica trivialmente.

(b) Si $A$ está escrita como en (3.1) entonces

$$(A^\dagger)^{(2)} = U \begin{pmatrix} T & TZ_{12} \\ Z_{21}T & Z_{21}TZ_{12} \end{pmatrix} V^*, \quad \text{con } T \text{ que satisface } TD_a^{-1}T = T.$$

Utilizando las representaciones matriciales dadas, calculando
$(A^\dagger)^{C2MP} = AA^\dagger(A^\dagger)^{(2)}A^\dagger A$ se tiene el resultado que se quiere probar.

(c) Sigue inmediatamente de (a) y (b).

Los apartados (d) y (e) siguen inmediatamente considerando las expresiones dadas.

(f)

$$A^{C2MP} = A^\dagger \text{ si y solo si } A^\dagger AA^{(2)}AA^\dagger = A^\dagger. \text{ Es decir,}$$

$$AA^\dagger AA^{(2)}AA^\dagger A = AA^\dagger A \text{ si y solo si } AA^{(2)}A = A.$$

$\square$

## 3.6 Inversas generalizadas con espacio imagen y nulo prescritos

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una matriz fija y sea $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una $\{1,2\}$-inversa de $A$. Se conocen las siguientes propiedades de los proyectores $AX$ y $XA$:

- $(XA)^2 = XA$ y $(AX)^2 = AX$.
- $\mathcal{N}(XA) = \mathcal{N}(A)$ y $\mathcal{R}(AX) = \mathcal{R}(A)$ (por ser $X$ una $\{1\}$-inversa de $A$).
- $\mathcal{N}(AX) = \mathcal{N}(X)$ y $\mathcal{R}(XA) = \mathcal{R}(X)$ (por ser $X$ una $\{2\}$-inversa de $A$).

Además, es conocido el siguiente resultado relativo a la existencia y unicidad de inversas que satisfacen condiciones relativas a su espacio imagen y espacio nulo.

**Teorema 3.6.1.** [7, Teorema 14] *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $rg(A) = a$, $T$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$ de dimensión $t \leq a$ y $S$ un subespacio de $\mathbb{C}^m$ de dimensión $m - t$. Entonces,*

*$A$ tiene una $\{2\}$-inversa tal que $\mathcal{R}(X) = T$ y $\mathcal{N}(X) = S$ si y solo si*

$$AT \oplus S = \mathbb{C}^m,$$

*en cuyo caso $X$ es única.*

Este resultado dio lugar a la siguiente definición.

**Definición 3.6.1.** *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $rg(A) = a$, $T$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$ de dimensión $t \leq a$ y $S$ un subespacio de $\mathbb{C}^m$ de dimensión $m - t$. Se llama $\{2\}$-inversa generalizada de $A$ con espacio imagen $T$ y espacio nulo $S$ a la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ (si existe) tal que*

$$XAX = X, \qquad \mathcal{R}(X) = T, \qquad \mathcal{N}(X) = S,$$

*y se denota por $A^{(2)}_{T,S}$.*

Si además, $X$ satisface $AXA = A$, la única $\{1, 2\}$-inversa generalizada de $A$ con espacio rango $T$ y espacio nulo $S$ se denota por $A^{(1,2)}_{T,S}$.

Diversas inversas generalizadas exteriores conocidas son analizadas en la literatura y presentadas como inversas $A^{(2)}_{T,S}$, para subespacios $T$ y $S$ especiales. En particular, se conoce esta representación para la inversa de Moore-Penrose, la inversa de grupo y la inversa de Drazin.

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Notar que los conjuntos $\mathcal{A}\{-\dagger\}$ y $\mathcal{A}\{\dagger-\}$ son subconjuntos de $\mathcal{A}\{1, 2\}$. Utilizando las propiedades enunciadas al comienzo de la sección, para cada $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$ se tiene:

- $\mathcal{R}(A^{-\dagger}) = \mathcal{R}(A^{-\dagger}A) = \mathcal{R}(A^-AA^\dagger A) = \mathcal{R}(A^-A) = A^-\mathcal{R}(A)$.
- $\mathcal{N}(A^{-\dagger}) = \mathcal{N}(AA^{-\dagger}) = \mathcal{N}(AA^-AA^\dagger) = \mathcal{N}(AA^\dagger) = \mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A^*)$.

- $\mathcal{R}(A^{\dagger -}) = \mathcal{R}(A^{\dagger}A) = \mathcal{R}(A^{\dagger}) = \mathcal{R}(A^{*})$.
- $\mathcal{N}(A^{\dagger -}) = \mathcal{N}(AA^{\dagger -}) = \mathcal{N}(AA^{\dagger}AA^{-}) = \mathcal{N}(AA^{-})$.

Por otro lado, dada $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$, se tiene que las inversas generalizadas 2MP y MP2 son inversas exteriores de $A$. Por lo tanto:

- $\mathcal{R}(A^{(2)\dagger}) = \mathcal{R}(A^{(2)}AA^{\dagger}) = \mathcal{R}(A^{(2)}AA^{\dagger}A) = \mathcal{R}(A^{(2)}A) = A^{(2)}\mathcal{R}(A)$ .
- $\mathcal{N}(A^{(2)\dagger}) = \mathcal{N}(A^{(2)}AA^{\dagger})$.
- $\mathcal{R}(A^{\dagger(2)}) = \mathcal{R}(A^{\dagger}AA^{(2)}) = A^{\dagger}A\mathcal{R}(A^{(2)})$.
- $\mathcal{N}(A^{\dagger(2)}) = \mathcal{N}(A^{\dagger}AA^{(2)}) = \mathcal{N}(AA^{\dagger}AA^{(2)}) = \mathcal{N}(AA^{(2)})$.

Si se considera una matriz $A^{GD}$ inversa G-Drazin de $A$, se tiene que las inversas generalizadas GDMP y MPGD definidas a partir de ella son inversas exteriores de $A$. Entonces:

- $\mathcal{R}(A^{GDMP}) = \mathcal{R}(A^{GD}AA^{\dagger}) = \mathcal{R}(A^{GD}AA^{\dagger}A) = \mathcal{R}(A^{GD}A) = A^{GD}\mathcal{R}(A)$.
- $\mathcal{N}(A^{GDMP}) = \mathcal{N}(A^{GD}AA^{\dagger}) = \mathcal{N}(AA^{GD}AA^{\dagger}) = \mathcal{N}(AA^{\dagger}) = \mathcal{N}(A^{*})$.
- $\mathcal{R}(A^{MPGD}) = \mathcal{R}(A^{\dagger}AA^{GD}) = \mathcal{R}(A^{\dagger}AA^{GD}A) = \mathcal{R}(A^{\dagger}A) = \mathcal{R}(A^{*})$.
- $\mathcal{N}(A^{MPGD}) = \mathcal{N}(A^{\dagger}AA^{GD}) = \mathcal{N}(AA^{\dagger}AA^{GD}) = \mathcal{N}(AA^{GD})$.

Como las inversas C2MP también son inversas exteriores, dada $A^{(2)} \in \mathcal{A}\{2\}$ y utilizando los apartados (e) y (f) de la Proposición 3.5.1 se tiene que:

- $\mathcal{N}(A^{C2MP}) = \mathcal{N}(AA^{C2MP}) = \mathcal{N}(AA^{2MP})$.
- $\mathcal{R}(A^{C2MP}) = \mathcal{R}(A^{C2MP}A) = \mathcal{R}(A^{MP2}A)$.

Observar que, denotando $X$ cada una de las inversas exteriores consideradas, si se toma $T = \mathcal{R}(X)$ y $S = \mathcal{N}(X)$ se tiene

$$AT \oplus S = A\mathcal{R}(X) \oplus \mathcal{N}(X) = \mathcal{R}(AX) \oplus \mathcal{N}(AX) = \mathbb{C}^m.$$

De esta manera, las inversas generalizadas presentadas en los Capítulos 2 y 3 permiten ampliar la información de los casos particulares de la inversa $A^{(2)}_{T,S}$ de una matriz $A$. Esta información se resume en el siguiente cuadro.

| $A^{\{2\}}_{T,S}$ | $\{1\}$- inversa | $T$ | $S$ |
|---|---|---|---|
| $A^\dagger$ | si | $\mathcal{R}(A^*)$ | $\mathcal{N}(A^*)$ |
| $A^D$ | no | $\mathcal{R}(A^k)$ | $\mathcal{N}(A^k)$ |
| $A^\#$ | si | $\mathcal{R}(A)$ | $\mathcal{N}(A)$ |
| $A^{-\dagger}$ | si | $A^-\mathcal{R}(A)$ | $\mathcal{N}(A^*)$ |
| $A^{\dagger -}$ | si | $\mathcal{R}(A^*)$ | $\mathcal{N}(AA^-)$ |
| $A^{GDMP}$ | si | $A^{GD}\mathcal{R}(A)$ | $\mathcal{N}(A^*)$ |
| $A^{MPGD}$ | si | $\mathcal{R}(A^*)$ | $\mathcal{N}(AA^{MPGD})$ |
| $A^{(2)\dagger}$ | no | $A^{(2)}\mathcal{R}(A)$ | $\mathcal{N}(A^{(2)}AA^\dagger)$ |
| $A^{\dagger(2)}$ | no | $A^\dagger A\mathcal{R}(A^{(2)})$ | $\mathcal{N}(AA^{(2)})$ |
| $A^{C2MP}$ | no | $\mathcal{R}(A^{MP2}A)$ | $\mathcal{N}(AA^{2MP})$ |

**Observación 3.6.1.** Como se mencionó anteriormente, las inversas 2MP y sus duales, las MP2, recuperan como casos particulares otras inversas generalizadas presentes en la literatura. En dos trabajos recientes, se definieron inversas generalizadas que constituyen casos particulares de inversas definidas en este capítulo. La inversa core débil fue definida para matrices cuadradas por D. Ferreyra, F. Levis, A. Priori y N. Thome en [32] como $A^{ⓦ,\dagger} = A^{ⓦ}AA^\dagger$, donde $A^{ⓦ}$ es la inversa de grupo débil [15]. Como $A^{ⓦ}$ es una inversa exterior, se tiene que $A^{ⓦ,\dagger}$ es una 2MP inversa. Análogamente, las inversas OMP, MPO y MPOMP, introducidas para matrices rectangulares por D. Mosić y P. Stanimirović en [64], respectivamente, como $A^{(2),\dagger}_{T,S} = A^{(2)}_{T,S}AA^\dagger$,

$A_{T,S}^{\dagger,(2)} = A^\dagger A A_{T,S}^{(2)}$ y $A_{T,S}^{\dagger,(2),\dagger} = A^\dagger A A_{T,S}^{(2)} A A^\dagger$, son recuperadas, respectivamente, por las inversas 2MP, MP2 y C2MP considerando, si existe, $A^{(2)} = A_{T,S}^{(2)}$.

# Capítulo 4

# Relaciones de orden para matrices rectangulares

## 4.1 Introducción

En [1], J.K. Baksalary y J. Hauke introdujeron una nueva relación de orden sobre conjuntos de matrices complejas, definida de la siguiente manera:

**Definición 4.1.1.** *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se dice que $A \preceq B$ cuando $A \prec^s B$ y $AB^*A = AA^*A$.*

Notar que, por definición, $A \preceq B$ si y solo si se verifican las condiciones

$$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B), \quad \mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*) \quad \text{y} \quad AB^*A = AA^*A.$$

Podría pensarse que lo que motivó a estos autores a definir este nuevo orden es analizar qué sucede si se debilitan las condiciones que definen el orden estrella. Se observa que si, en las expresiones $A^*A = A^*B$ y $AA^* = BA^*$ que definen al orden estrella, se posmultiplica por $A^*$ en la primera o premultiplica por $A^*$ en la segunda y luego se aplica la operación $^*$ aparece la igualdad involucrada en la definición del nuevo orden, a la cual se le debe agregar la condición $A \prec^s B$ para que se verifique la transitividad y resulte así una relación de orden.

Este orden es retomado por L. Lebtahi, P. Patrício y N. Thome en [45]. En este trabajo los autores extienden el orden definido por J. Baksalary y J. Hauke al contexto de los elementos de un anillo, lo nombran orden diamante y lo denotan por $\leq^\diamond$. También presentan algunas caracterizaciones del orden diamante y analizan su relación con otros órdenes conocidos en la literatura en el contexto de anillos.

En el mismo contexto, J. Marovt, D. Rakić y D. Djordjević definen en [51] el orden estrella para elementos de anillos particulares. Utilizan representaciones matriciales de los elementos para: encontrar propiedades de este orden, caracterizar el orden menos y hallar condiciones bajo las cuales el orden menos implica el orden estrella. También en este trabajo, los autores introducen otra definición del orden diamante que resulta equivalente a la introducida en [45] para anillos regulares con unidad.

De aquí en adelante, la relación de orden entre matrices complejas de la Definición 4.1.1 se denomina *orden diamante* y se denota por $\leq^\diamond$.

Se sabe que el orden estrella implica el orden menos y el orden diamante, es decir,

$$A \leq^* B \Rightarrow A \leq^- B \quad \text{y} \quad A \leq^* B \Rightarrow A \leq^\diamond B.$$

La pregunta natural es: ¿bajo qué condiciones valen las implicaciones recíprocas? En [36], R. Hartwig y G. Styan establecieron condiciones extras que deben agregarse a la relación de sustractividad del rango (orden parcial menos) para que se verifique el orden estrella. Concretamente, los autores probaron que, dadas $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $\mathrm{rg}(B) > \mathrm{rg}(A) \geq 1$, $A \leq^{-} B \Rightarrow A \leq^{*} B$ si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

(1) $A^*B$ y $BA^*$ son ambas hermíticas.

(2) $A^\dagger B$ y $BA^\dagger$ son ambas hermíticas.

(3) $AB^\dagger$ y $B^\dagger A$ son ambas hermíticas.

(4) $B^\dagger - A^\dagger = (B-A)^\dagger$.

(5) $B^\dagger - A^\dagger$ es una $\{1,3\}$-inversa generalizada de $B-A$.

(6) $B^\dagger - A^\dagger$ es una $\{1,4\}$-inversa generalizada de $B-A$.

(7) $BA^\dagger B = A$.

(8) $BA^\dagger B = AXA$ para alguna matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

(9) $B^\dagger AB^\dagger = A^\dagger$.

(10) $B^\dagger AXAB^\dagger = A^\dagger$ para alguna matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

En [1] se estableció que las expresiones $A \preceq B$ y $A^\dagger \leq^{-} B^\dagger$ son equivalentes. Como consecuencia, los autores observaron que las 10 condiciones anteriores pueden ser utilizadas para analizar cómo completar la condición sobre el orden diamante para que implique el orden estrella.

En síntesis, en [36] y [1] se probaron las equivalencias del siguiente resultado.

**Teorema 4.1.1.** *Sean $A$, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \leq^{*} B$.

(b) $A \leq^{-} B$ *y se cumple alguna de las condiciones* (1)-(10).

(c) *$A \leq^{\diamond} B$ y se cumple alguna de las condiciones* (1)-(10).

También, en [45], se probaron algunos resultados relativos al orden diamante, para elementos de un anillo. L. Lebtahi, P. Patricio y N. Thome demostraron algunas caracterizaciones del orden diamante y además describieron los sucesores y predecesores de un elemento bajo este orden.

El objetivo de este capítulo es ampliar estos resultados. Se retoman estas relaciones de orden en el contexto de matrices complejas. Se demuestran nuevas propiedades del orden diamante y de la inversa de Moore-Penrose de matrices relacionas bajo este orden. Además, se encuentran nuevas caracterizaciones del orden diamante, utilizando diferentes aproximaciones. Por otro lado, a partir de una descomposición en valores singulares de una matriz, se describen sus predecesores y se diagrama un algoritmo para hallarlos.

En el Capítulo 3 se definieron las matrices inversas generalizadas 1MP y sus duales. Estas matrices permiten definir nuevas relaciones de orden en conjuntos de matrices complejas rectangulares. Se definen y analizan en este capítulo tales relaciones de orden. Además, las inversas 1MP y sus duales permiten dar una nueva caracterización del orden diamante. De este modo se amplía el enfoque conocido hasta el momento sobre este orden y se lo pone en un contexto más general, caracterizándolo en términos de igualdades que involucran inversas interiores y la inversa de Moore-Penrose.

En la próxima sección se obtienen propiedades del orden diamante y luego, en la Sección 4.3, se describen, a partir de descomposiciones propias del conjunto de matrices complejas, los predecesores de una matriz arbitraria bajo este orden. La Sección 4.4 presenta dos nuevas relaciones de orden, utilizando las matrices inversas generalizadas 1MP y sus duales. Para finalizar el capítulo, en la Sección 4.5 se utilizan estas nuevas inversas generalizadas para dar una caracterización del orden diamante.

## 4.2 Propiedades del orden diamante

Se encuentran en la literatura diferentes propiedades y caracterizaciones del orden diamante.

En lo que resta de la sección, el símbolo $\mathcal{A}^\dagger\{1\}$ denota el conjunto de todas las matrices $\{1\}$-inversas de $A^\dagger$.

En [1, Teorema 2] se demostró, para $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, que

$$A \leq^{\diamond} B \text{ si y solo si } A^\dagger \leq^{-} B^\dagger. \tag{4.1}$$

La equivalencia anterior permite asegurar, utilizando el Lema 1.2.4, que

$$A \leq^{\diamond} B \text{ si y solo si } B^\dagger(B^\dagger)^- A^\dagger = A^\dagger(B^\dagger)^- B^\dagger = A^\dagger(B^\dagger)^- A^\dagger = A^\dagger, \tag{4.2}$$

para toda $(B^\dagger)^- \in \mathcal{B}^\dagger\{1\}$.

Además, la misma equivalencia permite afirmar que

$$A \leq^{\diamond} B \text{ si y solo si } \mathcal{B}^\dagger\{1\} \subseteq \mathcal{A}^\dagger\{1\}. \tag{4.3}$$

Recientemente, como un primer avance, O.M. Baksalary y G. Trenkler demostraron en [5] que, si dos matrices cuadradas verifican que sus respectivas inversas de Moore-Penrose son ambas idempotentes y además estas inversas se relacionan bajo el orden menos, se puede encontrar una representación matricial de una de ellas a partir de la descomposición de Hartwig-Spindelböck de la otra matriz involucrada. Es importante remarcar que este hecho sólo ha sido tratado para la clase particular de matrices idempotentes, sin hacer mención alguna al caso general. Se pueden reformular estos resultados [5, Lema 3, Lema 4] en términos del orden diamante. Teniendo en cuenta (4.1), se establece el siguiente resultado.

**Lema 4.2.1.** *Sean* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que* $A^\dagger$ *y* $B^\dagger$ *son ambas idempotentes, con* $A$ *escrita como en* (1.9). *Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si* $B \leq^\diamond A$*, entonces*

$$B^\dagger = U \begin{pmatrix} E & 0 \\ G & 0 \end{pmatrix} U^*,$$

*donde* $E$ *es idempotente,* $GE = G$ *y* $G = L^*\Sigma^{-1}E$*.*

(b) *Si* $A \leq^\diamond B$*, entonces*

$$B^\dagger = U \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ G & H \end{pmatrix} U^*,$$

*donde* $H$ *es idempotente,* $HG = 0$ *y* $G + HL^*\Sigma^{-1} = L^*\Sigma^{-1}$*.*

En lo que resta de la sección, se presentan y demuestran nuevas propiedades del orden diamante. Algunas de ellas se utilizan en las próximas secciones para obtener resultados derivados.

Desde aquí y hasta el final del capítulo, dadas $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se denota $rg(A) = a$, $rg(B) = b$ y se supone $b > a \geq 1$, excluyendo los casos $A = 0$ y $A = B$, que son dos situaciones que se demuestran de forma inmediata en todos los resultados.

**Lema 4.2.2.** *Sean* $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \leq^\diamond B$.

(b) $A^* \leq^\diamond B^*$.

(c) $UAV^* \leq^\diamond UBV^*$*, para todo par de matrices unitarias* $U$ *y* $V$ *de tamaños adecuados.*

*Demostración.* (a) $\Rightarrow$ (b) Suponer $A \leq^{\diamond} B$. Entonces, $A \prec^{s} B$ y $AB^{*}A = AA^{*}A$. Por definición del preorden espacio, se tiene que $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ y $\mathcal{R}(A^{*}) \subseteq \mathcal{R}(B^{*})$. Teniendo en cuenta que $(A^{*})^{*} = A$ y $(B^{*})^{*} = B$ se tiene que $A^{*} \prec^{s} B^{*}$. Además, $(AB^{*}A)^{*} = (AA^{*}A)^{*}$. Así, $A^{*}(B^{*})^{*}A^{*} = A^{*}(A^{*})^{*}A^{*}$. Luego, $A^{*} \leq^{\diamond} B^{*}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) La demostración es análoga a la de (a) $\Rightarrow$ (b).

(a) $\Rightarrow$ (c) Suponer $A \leq^{\diamond} B$. Luego, $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$, $\mathcal{R}(A^{*}) \subseteq \mathcal{R}(B^{*})$ y $AB^{*}A = AA^{*}A$.

Sean $U$ y $V^{*}$ matrices unitarias de tamaños adecuados. Entonces, $\mathcal{R}(AV^{*}) = \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(BV^{*})$. Ahora, si $y \in \mathcal{R}(UAV^{*})$, entonces existe $x \in \mathbb{C}^{n}$ tal que $y = UAV^{*}x$. Luego, $U^{*}y = AV^{*}x \in \mathcal{R}(AV^{*})$ y por lo tanto $U^{*}y \in \mathcal{R}(BV^{*})$. Así, $U^{*}y = BV^{*}x'$ para algún $x' \in \mathbb{C}^{n}$, es decir, $y = UBV^{*}x'$, con $x' \in \mathbb{C}^{n}$. Luego, $\mathcal{R}(UAV^{*}) \subseteq \mathcal{R}(UBV^{*})$. Análogamente, se prueba que $\mathcal{R}((UAV^{*})^{*}) \subseteq \mathcal{R}((UBV^{*})^{*})$.

Además, si en la expresión $AB^{*}A = AA^{*}A$ se multiplica a izquierda y derecha por $U$ y $V^{*}$ respectivamente, teniendo en cuenta que $V^{*}V = U^{*}U = I$, se obtiene la igualdad

$$UAV^{*}((V^{*})^{*}B^{*}U^{*})UAV^{*} = UAV^{*}((V^{*})^{*}A^{*}U^{*})UAV^{*}.$$

Es decir,

$$(UAV^{*})(UBV^{*})^{*}(UAV^{*}) = (UAV^{*})(UAV^{*})^{*}(UAV^{*}).$$

Se tiene entonces que $UAV^{*} \leq^{\diamond} UBV^{*}$.

(c) $\Rightarrow$ (a) La demostración es análoga a la de (a) $\Rightarrow$ (c). $\square$

En el Lema 4.2.2 (b) no se puede cambiar $*$ por $\dagger$. En consecuencia, las expresiones $A \leq^{\diamond} B$ y $A^{\dagger} \leq^{\diamond} B^{\dagger}$ no son equivalentes.

Para verificarlo, basta considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene entonces,

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se verifica que $A \leq^\diamond B$ pues $\mathrm{rg}(B^\dagger - A^\dagger) = 1 = \mathrm{rg}(B^\dagger) - \mathrm{rg}(A^\dagger)$ y así $A^\dagger \leq^- B^\dagger$. Sin embargo, $A^\dagger \not\leq^\diamond B^\dagger$ pues $\mathrm{rg}(B - A) \neq \mathrm{rg}(B) - \mathrm{rg}(A)$. La implicación recíproca tampoco es válida. Para comprobarlo basta considerar las matrices $C = A^\dagger$ y $D = B^\dagger$ anteriores. Entonces, $C^\dagger \leq^\diamond D^\dagger$ y, sin embargo, $C \not\leq^\diamond D$.

Teniendo en cuenta la caracterización del orden menos presentada en el Corolario 1.2.1 se puede obtener una caracterización del orden diamante. Se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 4.2.1.** *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \leq^\diamond B$.

(b) *Existen matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, una matriz diagonal definida positiva $\Lambda_a$ y matrices no singulares $Z \in \mathbb{C}^{(b-a)\times(b-a)}$ y $\Gamma \in \mathbb{C}^{b\times b}$ tales que*

$$A = U\mathrm{diag}(\Lambda_a, 0_{b-a}, 0)V^*, \quad B = U\mathrm{diag}(\Gamma, 0)V^*$$

*y*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Lambda_a & L_1 \\ L_2 & Z^{-1} + L_2\Lambda_a^{-1}L_1 \end{pmatrix},$$

*con $L_1$ y $L_2$ matrices arbitrarias de tamaños adecuados.*

*Demostración.* (a) $\Rightarrow$ (b) Suponer $A \leq^{\diamond} B$. Entonces, $A^{\dagger} \leq^{-} B^{\dagger}$. Se sabe además que el rango de una matriz es el mismo que el de su inversa de Moore-Penrose. Entonces, por el Corolario 1.2.1, existen matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, una matriz diagonal definida positiva $\Sigma_a$ y matrices no singulares $Z \in \mathbb{C}^{(b-a)\times(b-a)}$ y $M \in \mathbb{C}^{b\times b}$ tales que

$$A^{\dagger} = V\mathrm{diag}(\Sigma_a, 0_{b-a}, 0)U^*, \quad B^{\dagger} = V\mathrm{diag}(M, 0)U^*$$

y

$$M = \begin{pmatrix} \Sigma_a + \Sigma_a L_1 Z L_2 \Sigma_a & -\Sigma_a L_1 Z \\ -Z L_2 \Sigma_a & Z \end{pmatrix},$$

donde $L_1$ y $L_2$ son matrices arbitrarias de tamaños adecuados.

Como $M$ y $Z$ son no singulares, es conocido que el complemento de Schur de $Z$ en $M$ es no singular,

$$\begin{aligned} M/Z &= \Sigma_a + \Sigma_a L_1 Z L_2 \Sigma_a - (-\Sigma_a L_1) Z Z^{-1} Z(-L_2\Sigma_a) \\ &= \Sigma_a + \Sigma_a L_1 Z L_2 \Sigma_a - \Sigma_a L_1 Z L_2 \Sigma_a \\ &= \Sigma_a \end{aligned}$$

y

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (M/Z)^{-1} & (M/Z)^{-1}\Sigma_a L_1 Z Z^{-1} \\ Z^{-1} Z L_2 \Sigma_a (M/Z)^{-1} & Z^{-1} + Z^{-1} Z L_2 \Sigma_a (M/Z)^{-1} \Sigma_a L_1 Z^{-1} Z \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_a^{-1} & L_1 \\ L_2 & Z^{-1} + L_2 \Sigma_a L_1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, tomando $\Gamma = M^{-1}$ y $\Lambda_a = \Sigma_a^{-1}$, se obtienen las matrices

$$A = (A^\dagger)^\dagger = U \mathrm{diag}(\Lambda_a, 0_{b-a}, 0) V^*, \quad B = (B^\dagger)^\dagger = U \mathrm{diag}(\Gamma, 0) V^*$$

y

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Lambda_a & L_1 \\ L_2 & Z^{-1} + L_2 \Lambda_a^{-1} L_1 \end{pmatrix},$$

para matrices arbitrarias $L_1$ y $L_2$ de tamaños adecuados.

(b) $\Rightarrow$ (a) De (b) se tiene que

$$A^\dagger = V \mathrm{diag}(\Lambda_a^{-1}, 0_{b-a}, 0) U^*, \quad B^\dagger = V \mathrm{diag}(\Gamma^{-1}, 0) U^*$$

y

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Lambda_a & L_1 \\ L_2 & Z^{-1} + L_2 \Lambda_a^{-1} L_1 \end{pmatrix}.$$

Se debe probar que $A^\dagger \leq^- B^\dagger$. Por el Lema 1.2.4, basta probar que

$$B^\dagger \left(B^\dagger\right)^- A^\dagger = A^\dagger \left(B^\dagger\right)^- B^\dagger = A^\dagger \left(B^\dagger\right)^- A^\dagger = A^\dagger \text{ para toda } (B^\dagger)^- \in \mathcal{B}^\dagger\{1\}. \quad (4.4)$$

Del Lema 1.2.2 es claro que toda $\{1\}$-inversa de $B^\dagger$ tiene la forma

$$\left(B^\dagger\right)^- = U \begin{pmatrix} \Gamma & R \\ S & T \end{pmatrix} V^*,$$

para matrices arbitrarias $R, S, T$.

Ahora se comprueba que se verifican las igualdades en (4.4), que caracterizan el orden menos. En efecto,

$$
\begin{aligned}
B^\dagger (B^\dagger)^- A^\dagger =& V \begin{pmatrix} \Gamma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* U \begin{pmatrix} \Gamma & R \\ S & T \end{pmatrix} V^* V \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \\
=& V \begin{pmatrix} I_b & \Gamma^{-1} R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \\
=& V \operatorname{diag}(\Lambda_a^{-1}, 0) U^* \\
=& A^\dagger.
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
A^\dagger (B^\dagger)^- B^\dagger =& V \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* U \begin{pmatrix} \Gamma & R \\ S & T \end{pmatrix} V^* V \begin{pmatrix} \Gamma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \\
=& V \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_b & 0 \\ S\Gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^* \\
=& V \operatorname{diag}(\Lambda_a^{-1}, 0) U^* \\
=& A^\dagger.
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
A^\dagger \left(B^\dagger\right)^- A^\dagger =& V \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* U \begin{pmatrix} \Gamma & R \\ S & T \end{pmatrix} V^* A^\dagger \\
=& V \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix}\Gamma & \begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix} R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \\
=& V \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix}\Gamma \begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*.
\end{aligned}
$$

Se observa que

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix} \Gamma &= \begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_a & L_1 \\ L_2 & Z^{-1} + L_2 \Lambda_a^{-1} L_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_a & \Lambda_a^{-1} L_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_a & \Lambda_a^{-1} L_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{b-a} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Así, $A^\dagger \left(B^\dagger\right)^- A^\dagger = A^\dagger$. Luego, $A^\dagger \leq^- B^\dagger$ y por lo tanto $A \leq^\diamond B$. □

**Observación 4.2.1.** Si en las hipótesis del Teorema 4.2.1 se permite que $rg(A) = a = b = rg(B)$, la verificación de la equivalencia es inmediata.

En efecto, si $rg(A^\dagger) = a = b = rg(B^\dagger)$ entonces, por [58, Corolario 3.3.6], se tiene que $A^\dagger \leq^- B^\dagger$ si y solo si $A^\dagger = B^\dagger$. Por (4.1) se obtiene el resultado requerido.

Es posible dar una representación matricial de la inversa de Moore-Penrose de una matriz $B$, si ésta es un sucesor de $A$ bajo el orden diamante. Esto se expresa en el siguiente resultado.

**Observación 4.2.2.** Si $A$ y $B$ están representadas por las descomposiciones enunciadas en el Teorema 4.2.1 (b) entonces la inversa de Moore-Penrose de $B$ tiene la forma

$$B^\dagger = V \begin{pmatrix} \Lambda_a^{-1} + \Lambda_a^{-1} L_1 Z L_2 \Lambda_a^{-1} & -\Lambda_a^{-1} L_1 Z & 0 \\ -Z L_2 \Lambda_a^{-1} & Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

En el próximo resultado se proporciona otra caracterización del orden diamante. Esta vez, en términos de una parametrización de la inversa de Moore-Penrose de la matriz que precede.

**Teorema 4.2.2.** *Sean $A$, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \leq^\diamond B$.

(b) $A^\dagger = A^\dagger B A^\dagger + A^\dagger W A^\dagger - A^\dagger B B^\dagger W B^\dagger B A^\dagger$, $W \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *arbitraria.*

*Demostración.* (a) $\Rightarrow$ (b) Suponer $A \leq^\diamond B$. Por (4.3), $\mathcal{B}^\dagger\{1\} \subseteq \mathcal{A}^\dagger\{1\}$.

Sea $T \in \mathcal{B}^\dagger\{1\}$. Como $B$ también es una $\{1\}$-inversa de $B^\dagger$, por el Teorema 1.2.2, la matriz $T$ se puede representar mediante la expresión

$$T = B + W - BB^\dagger W B^\dagger B, \text{ para alguna matriz } W \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

Además, como $T \in \mathcal{A}^{\dagger}\{1\}$ se tiene que $A^{\dagger}TA^{\dagger} = A^{\dagger}$. Reemplazando en esta igualdad la expresión de $T$ se obtiene,

$$A^{\dagger} = A^{\dagger}(B + W - BB^{\dagger}WB^{\dagger}B)A^{\dagger} = A^{\dagger}BA^{\dagger} + A^{\dagger}WA^{\dagger} - A^{\dagger}BB^{\dagger}WB^{\dagger}BA^{\dagger},$$

donde $W \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

De la arbitrariedad de $T$ se obtiene (b).

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponer $A^{\dagger} = A^{\dagger}BA^{\dagger} + A^{\dagger}WA^{\dagger} - A^{\dagger}BB^{\dagger}WB^{\dagger}BA^{\dagger}$, con $W \in \mathbb{C}^{m\times n}$ arbitraria.

Sea $G \in \mathcal{B}^{\dagger}\{1\}$. Nuevamente, como $B \in \mathcal{B}^{\dagger}\{1\}$, por el Teorema 1.2.2 se tiene

$$G = B + Z - BB^{\dagger}ZB^{\dagger}B, \text{ para alguna } Z \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

Así,

$$\begin{aligned} A^{\dagger}GA^{\dagger} &= A^{\dagger}(B + Z - BB^{\dagger}ZB^{\dagger}B)A^{\dagger} \\ &= A^{\dagger}BA^{\dagger} + A^{\dagger}ZA^{\dagger} - A^{\dagger}BB^{\dagger}ZB^{\dagger}BA^{\dagger} \\ &= A^{\dagger}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $G \in \mathcal{A}^{\dagger}\{1\}$ y así, por (4.3), $A \leq^{\diamond} B$. □

Si la matriz $A$ precede a la matriz $B$ bajo el orden diamante, el Teorema 4.2.2 permite obtener diversas representaciones y propiedades de la inversa de Moore-Penrose de la matriz $A$, a partir de particularizaciones adecuadas de la matriz $W$ involucrada en el teorema. Se tiene entonces el siguiente resultado.

**Lema 4.2.3.** *Si $A \leq^{\diamond} B$ entonces se verifican las siguientes igualdades:*

(a) $A^{\dagger} = A^{\dagger}BA^{\dagger}$.

(b) $A^\dagger = A^\dagger(AB^\dagger B)A^\dagger$. *Así,* $A^\dagger A = A^\dagger AB^\dagger BA^\dagger A$ *(es decir,* $B^\dagger B$ *es una {1}-inversa de* $A^\dagger A$*). Además,* $AA^\dagger = AB^\dagger BA^\dagger$.

(c) $A^\dagger = A^\dagger(BB^\dagger AB^\dagger B)A^\dagger$.

(d) $(A^\dagger)^* = (A^\dagger)^* B^\dagger BA^* BB^\dagger (A^\dagger)^*$.

(e) $A^\dagger = A^\dagger(BB^\dagger A)A^\dagger$. *Así,* $AA^\dagger = AA^\dagger BB^\dagger AA^\dagger$ *(es decir,* $BB^\dagger$ *es una {1}-inversa de* $AA^\dagger$*). Además,* $A^\dagger A = A^\dagger BB^\dagger A$.

*Demostración.* Todas las propiedades se demuestran al considerar una matriz $W$ particular en la caracterización del orden diamante dada en el Teorema 4.2.2 (b).

(a) Se verifica inmediatamente la igualdad al considerar $W = 0$.

(b) Considerar la matriz $W = BA^\dagger A$. Por el apartado (a),

$$\begin{aligned} A^\dagger &= A^\dagger BA^\dagger + A^\dagger BA^\dagger AA^\dagger - A^\dagger BB^\dagger BA^\dagger AB^\dagger BA^\dagger \\ &= A^\dagger + A^\dagger - A^\dagger BA^\dagger AB^\dagger BA^\dagger \\ &= A^\dagger + A^\dagger - A^\dagger AB^\dagger BA^\dagger. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A^\dagger = A^\dagger AB^\dagger BA^\dagger$.

(c) Considerar $W = A$. Por (a),

$$\begin{aligned} A^\dagger &= A^\dagger BA^\dagger + A^\dagger AA^\dagger - A^\dagger BB^\dagger AB^\dagger BA^\dagger \\ &= A^\dagger + A^\dagger - A^\dagger BB^\dagger AB^\dagger BA^\dagger. \end{aligned}$$

Luego,

$$A^\dagger = A^\dagger(BB^\dagger AB^\dagger B)A^\dagger.$$

(d) Teniendo en cuenta que $BB^\dagger$ y $B^\dagger B$ son matrices hermíticas, este resultado es inmediato aplicando $*$ en la igualdad obtenida en (c).

(e) Considerar $W = AA^\dagger B$. Por (a),

$$\begin{aligned} A^\dagger &= A^\dagger BA^\dagger + A^\dagger AA^\dagger BA^\dagger - A^\dagger BB^\dagger AA^\dagger BB^\dagger BA^\dagger \\ &= A^\dagger + A^\dagger - A^\dagger BB^\dagger AA^\dagger BA^\dagger. \end{aligned}$$

Así, $A^\dagger = A^\dagger BB^\dagger AA^\dagger$ y por lo tanto $A^\dagger A = A^\dagger BB^\dagger A$.

□

Notar que las propiedades en el Lema 4.2.3 también se pueden obtener a partir de (4.2), tomando como $\{1\}$-inversa de $B^\dagger$ la matriz $B$.

Es posible obtener una caracterización del orden diamante en términos de igualdades que involucran la inversa de Moore-Penrose de alguna de las matrices involucradas. Se obtiene el siguiente resultado, el cual es interesante en el sentido que los paquetes informáticos clásicos tienen incorporadas funciones que permiten calcular la inversa de Moore-Penrose de una matriz.

**Teorema 4.2.3.** *Sean $A$, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \leq^\diamond B$.

(b) $A^\dagger = A^\dagger BA^\dagger \quad y \quad A = BB^\dagger A = AB^\dagger B$.

(c) $A^\dagger = A^\dagger BA^\dagger = A^\dagger BB^\dagger = B^\dagger BA^\dagger$.

*Demostración.* (a)⇒(b) Suponer $A \leq^\diamond B$. Como $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$, existe una matriz $X$ de tamaño adecuado que verifica $A = BX$. Si en ambos miembros de esta igualdad se premultiplica por $BB^\dagger$ se tiene

$$BB^\dagger A = BB^\dagger BX = BX = A.$$

Por lo tanto, $A = BB^\dagger A$. Como $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*)$, existe una matriz $Y$ de tamaño adecuado tal que $A = YB$. Si en ambos miembros de esta igualdad se multiplica a derecha por $B^\dagger B$ se obtiene

$$AB^\dagger B = YBB^\dagger B = YB = A.$$

Luego, $A = AB^\dagger B$.

La igualdad $A^\dagger = A^\dagger BA^\dagger$ se probó en el Lema 4.2.3 (a).

(b)⇒(c) De $A = AB^\dagger B$ se tiene

$$A^*A(B^\dagger B)(B^\dagger B)^* = A^*AB^\dagger B = A^*A,$$

que es una matriz hermítica. Luego, por (1.1),

$$(A(B^\dagger B))^\dagger = (B^\dagger B)^\dagger A^\dagger.$$

De $A = BB^\dagger A$ se obtiene, en forma análoga,

$$((BB^\dagger)A)^\dagger = A^\dagger (BB^\dagger)^\dagger.$$

Por lo tanto, se tienen las igualdades

$$A^\dagger = ((BB^\dagger)A)^\dagger = A^\dagger (BB^\dagger)^\dagger = A^\dagger BB^\dagger$$

y

$$A^\dagger = (A(B^\dagger B))^\dagger = (B^\dagger B)^\dagger A^\dagger = B^\dagger B A^\dagger.$$

(c)⇒(b) De $A^\dagger = A^\dagger B B^\dagger$ se tiene

$$(A^\dagger)^* A^\dagger (BB^\dagger)(BB^\dagger)^* = (A^\dagger)^* A^\dagger (BB^\dagger) = (A^\dagger)^* A^\dagger,$$

que es una matriz hermítica. Luego, por (1.1),

$$(A^\dagger(BB^\dagger))^\dagger = (BB^\dagger)^\dagger A = BB^\dagger A.$$

De $A^\dagger = B^\dagger B A^\dagger$ se obtiene, análogamente,

$$((B^\dagger B)A^\dagger)^\dagger = AB^\dagger B.$$

Así,

$$A = (A^\dagger)^\dagger = (A^\dagger(BB^\dagger))^\dagger = BB^\dagger A$$

y

$$A = (A^\dagger)^\dagger = ((B^\dagger B)A^\dagger)^\dagger = AB^\dagger B.$$

(b)⇒(a) De $A = B(B^\dagger A)$ y $A = (AB^\dagger)B$ se obtiene, respectivamente,

$$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*).$$

De $A^\dagger = A^\dagger B A^\dagger$, por el Lema 1.2.1, se obtiene

$$\begin{aligned} AB^*A &= ((AB^*A)^*)^* = (A^*BA^*)^* \\ &= (A^*A(A^\dagger BA^\dagger)AA^*)^* = (A^*AA^\dagger AA^*)^* \\ &= (A^*AA^*)^* = AA^*A. \end{aligned}$$

□

## 4.3 Predecesores de una matriz arbitraria bajo el orden diamante

En la sección anterior se caracterizaron los sucesores de una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ bajo el orden diamante. En esta sección, a partir de una descomposición en valores singulares de una matriz compleja de tamaño $m \times n$, se caracterizan sus predecesores. Además, se proporciona un algoritmo para hallarlos.

**Teorema 4.3.1.** *Sea $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ escrita en una descomposición en valores singulares mediante*

$$B = U \begin{pmatrix} D_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*,$$

*donde $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices unitarias y $D_b$ es una matriz diagonal definida positiva. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \leq^{\diamond} B$.

(b) *La matriz $A$ puede representarse mediante*

$$A = U \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*,$$

*donde $T$ tiene el mismo tamaño que $D_b$ y $T \leq^{\diamond} D_b$.*

*Demostración.* (a) $\Rightarrow$ (b) Considerar para $A$ una descomposición del tipo

$$A = U \begin{pmatrix} T & E \\ F & G \end{pmatrix} V^*,$$

donde la partición ha sido realizada de acuerdo al tamaño de los bloques de $B$. Como $A \leq^{\diamond} B$, por el Lema 4.2.2(c), se tiene que

$$\begin{pmatrix} T & E \\ F & G \end{pmatrix} \leq^{\diamond} \begin{pmatrix} D_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, como $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$, existe una matriz $X$ de tamaño adecuado tal que $A = BX$. Entonces,

$$U \begin{pmatrix} T & E \\ F & G \end{pmatrix} V^* = U \begin{pmatrix} D_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^* X.$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} T & E \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^* X V.$$

Tomar para $V^*XV$ una partición del tipo $V^*XV = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}$, donde los bloques son del tamaño adecuado para realizar el producto considerado. Entonces,

$$\begin{pmatrix} T & E \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_b R_1 & D_b R_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, $F = 0$ y $G = 0$.

Análogamente, de $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*)$, se obtiene $E = 0$. Así,

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq^{\diamond} \begin{pmatrix} D_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por la Definición 4.1.1 se tiene directamente que $T \leq^{\diamond} D_b$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Como $T \leq^{\diamond} D_b$ es inmediato verificar que

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq^{\diamond} \begin{pmatrix} D_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por el Lema 4.2.2(c) se tiene que $A \leq^{\diamond} B$. □

**Observación 4.3.1.** Con las notaciones del Teorema 4.3.1 se tiene que si $T \leq^{\diamond} D_b$ y $T$ es no singular, entonces $T = D_b$.
En efecto, como $T \leq^{\diamond} D_b$, entonces $TT^*T = TD_b^*T$. Premultiplicando y posmultiplicando por $T^{-1}$ se tiene que $T^* = D_b^*$ y así $T = D_b$.

**Observación 4.3.2.** Con las notaciones y supuestos del Teorema 4.3.1 se tiene que $T^\dagger = XD_b^{-1}$, con $X \in \mathbb{C}^{b\times b}$ una matriz idempotente.
En efecto, basta considerar para $D_b^\dagger = D_b^{-1}$ la factorización de rango completo $(I_b, D_b^{-1})$. Como $T \leq^{\diamond} D_b$ es equivalente a $T^\dagger \leq^{-} D_b^\dagger$, por el Teorema 1.2.5 se obtiene directamente lo requerido.

**Corolario 4.3.1.** *Sea $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, con $rg(B) = b > 0$, escrita en una descomposición en valores singulares mediante*

$$B = U \begin{pmatrix} D_b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*,$$

*donde $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices unitarias y $D_b$ es una matriz diagonal definida positiva. Entonces,*

$$\{A \in \mathbb{C}^{m\times n} : A \leq^{\diamond} B\} = \left\{ U \begin{pmatrix} (XD_b^{-1})^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^* \,:\, X^2 = X, X \in \mathbb{C}^{b\times b} \right\}.$$

*Demostración.* Se verifica inmediatamente por el Teorema 4.3.1 y la Observación 4.3.2. □

Se presenta a continuación un algoritmo que permite, teniendo como entrada una matriz no nula $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, encontrar un predecesor de la misma bajo el orden diamante.

**ALGORITMO**

*Entrada:* $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ no nula.

*Salida:* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que $A \leq^{\diamond} B$.

**Paso 1.** Calcular $b = \mathrm{rg}(B)$.

**Paso 2.** Hallar una descomposición en valores singulares de $B$. Se obtienen matrices unitarias $U$, $V$ y una matriz diagonal definida positiva $D_b$, tal que $B = U\mathrm{diag}(D_b, 0)V^*$.

**Paso 3.** Encontrar $X \in \mathbb{C}^{b\times b}$, matriz idempotente arbitraria.

**Paso 4.** Computar $T = (XD_b^{-1})^{\dagger}$.

**Paso 5.** Calcular $A = U \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*$.

En el siguiente ejemplo se muestra la aplicación de este algoritmo.

**Ejemplo 4.3.1.** *Considerar la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} -1.2 & 0.8 \\ -1.6 & -0.6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Aplicando los Pasos 1 y 2 del Algoritmo, se obtiene $b = 2$ y las matrices*

$$U = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

*y*

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Toda matriz idempotente* $X \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ *tiene la forma*

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} \quad \textit{con } bc \leq \frac{1}{4}, a = \frac{1 \pm \sqrt{1-4bc}}{2}.$$

*Por ejemplo, al considerar* $b = -3, c = \frac{5}{4}$ *y eligiendo* $a = \frac{-3}{2}$ *se tienen, aplicando los Pasos 3 y 4, las matrices*

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & -3 \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad y \quad T = \begin{pmatrix} -0.1967 & 0.1639 \\ -0.1967 & 0.1639 \end{pmatrix}.$$

*El Paso 5 permite encontrar la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -0.2295 & -0.2754 \\ -0.0328 & -0.0393 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 4.4 Órdenes parciales asociados a las matrices inversas 1MP y sus duales

Una aplicación importante de la teoría de inversas generalizadas, es definir relaciones de orden. En esta sección se define y analiza un orden parcial que involucra en su definición las matrices inversas generalizadas 1MP introducidas en el Capítulo 3. Luego, y de manera análoga, se introduce una relación binaria definida a partir de las matrices inversas MP1, también presentadas en el Capítulo 3. Esta relación también es un orden en el conjunto de matrices complejas de tamaño $m \times n$.

**Definición 4.4.1.** *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se dice que $A$ precede a $B$ bajo la relación binaria $\leq^{-\dagger}$, y se denota $A \leq^{-\dagger} B$, si existe $A^{-\dagger} \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$ tal que*

$$A^{-\dagger}A = A^{-\dagger}B \quad y \quad AA^{-\dagger} = BA^{-\dagger}.$$

Para una matriz fija $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, el siguiente resultado permite obtener todas las matrices $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tales que $A \leq^{-\dagger} B$ y, en ese caso, encontrar la forma general de $B^{-\dagger}$.

Recordar que, si $A$ se representa mediante una descomposición en valores singulares como en (3.1), por (3.4) se tiene que toda inversa 1MP puede ser expresada mediante

$$A^{-\dagger} = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} U^*, \tag{4.5}$$

para alguna matriz $A_{21} \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$.

**Teorema 4.4.1.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, representada mediante una descomposición en valores singulares como en* (3.1)*. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(a) *Para $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

  (i) *$A \leq^{-\dagger} B$.*

  (ii) *La matriz $B$ puede representarse mediante*

$$B = U \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ -B_4A_{21}D_a & B_4 \end{pmatrix} V^*, \tag{4.6}$$

  *donde $A_{21} \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$ y $B_4 \in \mathbb{C}^{(m-a)\times(n-a)}$.*

(b) *Sea $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que $A \leq^{-\dagger} B$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $X \in \mathcal{B}\{-\dagger\}$.

(ii) *Existen matrices* $X_3$ *y* $X_4$ *de tamaños adecuados tales que*

$$X = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & 0 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} U^*, \tag{4.7}$$

*donde* $B_4X_3 = B_4A_{21}$ *y* $X_4 \in \mathcal{B}_4\{-\dagger\}$.

*Demostración.* Sea $A$ escrita mediante una descomposición en valores singulares como en (3.1).

(a) (i) $\Rightarrow$ (ii) Suponer que existe $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que $A \leq^{-\dagger} B$. Entonces, existe $A^{-\dagger} \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$ tal que

$$A^{-\dagger}A = A^{-\dagger}B \quad \text{y} \quad AA^{-\dagger} = BA^{-\dagger}.$$

Por (4.5), se tiene que

$$A^{-\dagger} = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} U^*,$$

con $A_{21} \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$. Considerar para $B$ la siguiente partición:

$$B = U \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} V^*,$$

donde los bloques son de tamaño adecuado de acuerdo a la partición de $A$. Entonces,

$$A^{-\dagger}A = V \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ A_{21}D_a & 0 \end{pmatrix} V^* \quad \text{y} \quad A^{-\dagger}B = V \begin{pmatrix} D_a^{-1}B_1 & D_a^{-1}B_2 \\ A_{21}B_1 & A_{21}B_2 \end{pmatrix} V^*.$$

De $A^{-\dagger}A = A^{-\dagger}B$, se tiene $B_1 = D_a$ y $B_2 = 0$. Por otro lado,

$$AA^{-\dagger} = U \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad \text{y} \quad BA^{-\dagger} = U \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ B_3 D_a^{-1} + B_4 A_{21} & 0 \end{pmatrix} V^*.$$

De $AA^{-\dagger} = BA^{-\dagger}$, se obtiene $B_3 = -B_4 A_{21} D_a$. Luego,

$$B = U \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ -B_4 A_{21} D_a & B_4 \end{pmatrix} V^*.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Suponer que existen matrices $A_{21} \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$ y $B_4 \in \mathbb{C}^{(m-a)\times(n-a)}$ tales que $B$ es escrita como en (4.6). Sea

$$A^{-\dagger} = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

Por (4.5), $A^{-\dagger} \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$. Además,

$$\begin{aligned} A^{-\dagger}B &= V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} U^* U \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ -B_4 A_{21} D_a & B_4 \end{pmatrix} V^* \\ &= V \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ A_{21} D_a & 0 \end{pmatrix} V^* \\ &= A^{-\dagger}A. \end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene

$$BA^{-\dagger} = AA^{-\dagger}.$$

Por lo tanto, $A \leq^{-\dagger} B$.

(b) Sea $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que $A \leq^{-\dagger} B$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Por el apartado (a), se tiene que $B$ puede ser representada mediante (4.6).

Sea $X \in \mathcal{B}\{-\dagger\} = \mathcal{B}\{1,2,3\}$ (por el Teorema 3.2.1) particionada como

$$X = V \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} U^*,$$

donde los bloques tienen tamaños adecuados de acuerdo a la partición de $A^{-\dagger}$. Así,

$$BXB = U \begin{pmatrix} D_aX_1D_a - D_aX_2B_4A_{21}D_a & D_aX_2B_4 \\ B_4[(X_3 - A_{21}D_aX_1) - \Pi B_4A_{21}]D_a & B_4\Pi B_4 \end{pmatrix} V^*,$$

donde $\Pi := X_4 - A_{21}D_aX_2$.

De $BXB = B$ se obtienen las siguientes igualdades:

$$D_a(X_1 - X_2B_4A_{21})D_a = D_a, \quad D_aX_2B_4 = 0, \quad B_4(X_4 - A_{21}D_aX_2)B_4 = B_4 \quad \text{y}$$

$$B_4[(X_3 - A_{21}D_aX_1) - (X_4 - A_{21}D_aX_2)B_4A_{21}]D_a = -B_4A_{21}D_a.$$

Por $D_aX_2B_4 = 0$, se tiene $X_2B_4 = 0$. Reemplazando esta expresión en la igualdad $D_a(X_1 - X_2B_4A_{21})D_a = D_a$, se obtiene $X_1 = D_a^{-1}$. Análogamente, reemplazando en $B_4(X_4 - A_{21}D_aX_2)B_4 = B_4$, se tiene $B_4 = B_4X_4B_4$.

Sustituyendo las expresiones anteriores en la igualdad

$$B_4[(X_3 - A_{21}D_aX_1) - (X_4 - A_{21}D_aX_2)B_4A_{21}]D_a = -B_4A_{21}D_a$$

se tiene $B_4(X_3 - A_{21} - X_4B_4A_{21}) = -B_4A_{21}$. Luego, $B_4X_3 = B_4A_{21}$.

Por otro lado,

$$BX = U \begin{pmatrix} I_a & D_aX_2 \\ 0 & -B_4A_{21}D_aX_2 + B_4X_4 \end{pmatrix} U^*$$

es una matriz hermítica. Así,

$$X_2 = 0 \quad \text{y} \quad B_4X_4 = (B_4X_4)^*.$$

Ahora,

$$X = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & 0 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} U^*.$$

Por lo tanto,

$$XBX = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & 0 \\ X_3 & X_4B_4X_4 \end{pmatrix} U^*.$$

De $XBX = X$, se obtiene que $X_4 = X_4B_4X_4$.

Luego, $X_4 \in \mathcal{B}_4\{1,2,3\} = \mathcal{B}_4\{-\dagger\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Se obtiene directamente utilizando el Teorema 3.2.1. $\square$

El resultado anterior permite demostrar que $\leq^{-\dagger}$ es un orden parcial en $\mathbb{C}^{m\times n}$.

**Teorema 4.4.2.** *La relación $\leq^{-\dagger}$ definida en $\mathbb{C}^{m\times n}$ es un orden parcial matricial.*

*Demostración.* Es claro que $\leq^{-\dagger}$ es reflexiva. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ escrita como en (3.1). Sea $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que $A \leq^{-\dagger} B$ y $B \leq^{-\dagger} A$.

Por ser $B \leq^{-\dagger} A$, existe $B^{-\dagger} \in \mathcal{B}\{-\dagger\}$ tal que $B^{-\dagger}B = B^{-\dagger}A$.

De $A \leq^{-\dagger} B$, por el Teorema 4.4.1, se tiene que $B$ admite una representación de la forma (4.6). Por lo tanto, $B^{-\dagger}$ puede ser representada mediante (4.7).

Es decir, existen matrices $A_{21}$, $B_4$, $X_3$ y $X_4$ de tamaños adecuados tales que

$$B = U \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ -B_4A_{21}D_a & B_4 \end{pmatrix} V^* \quad \text{y} \quad B^{-\dagger} = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & 0 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} U^*,$$

con $B_4X_3 = B_4A_{21}$ y $X_4 \in \mathcal{B}_4\{-\dagger\}$. Entonces,

$$B^{-\dagger}B = V \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ (X_3 - X_4B_4A_{21})D_a & X_4B_4 \end{pmatrix} V^* \quad \text{y} \quad B^{-\dagger}A = V \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ X_3D_a & 0 \end{pmatrix} V^*.$$

De $B^{-\dagger}B = B^{-\dagger}A$, se tiene que $X_4B_4 = 0$.

Así, $B_4 = B_4X_4B_4 = 0$ y por lo tanto $B = A$.

Luego, $\leq^{-\dagger}$ es antisimétrica.

Para demostrar la transitividad, considerar $B, C \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tales que $A \leq^{-\dagger} B$ y $B \leq^{-\dagger} C$.

Por $B \leq^{-\dagger} C$, existe $B^{-\dagger} \in \mathcal{B}\{-\dagger\}$ tal que

$$B^{-\dagger}B = B^{-\dagger}C \quad \text{y} \quad BB^{-\dagger} = CB^{-\dagger}.$$

Por $A \leq^{-\dagger} B$, aplicando el Teorema 4.4.1, se tiene que $B$ y $B^{-\dagger}$ pueden ser escritas, respectivamente, mediante (4.6) y (4.7). Es decir,

$$B = U \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ -B_4A_{21}D_a & B_4 \end{pmatrix} V^* \quad \text{y} \quad B^{-\dagger} = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & 0 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} U^*,$$

donde $B_4X_3 = B_4A_{21}$ y $X_4 \in \mathcal{B}_4\{-\dagger\}$.

Considerar para $C$ la siguiente partición:

$$C = U \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} V^*,$$

donde los bloques tienen el tamaño correspondiente con los bloques de $A$. Entonces,

$$B^{-\dagger}B = V \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ X_3 D_a - X_4 B_4 A_{21} D_a & X_4 B_4 \end{pmatrix} V^*$$

y

$$B^{-\dagger}C = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} C_1 & D_a^{-1} C_2 \\ X_3 C_1 + X_4 C_3 & X_3 C_2 + X_4 C_4 \end{pmatrix} V^*.$$

Por ser $B^{-\dagger}B = B^{-\dagger}C$, se tiene que

$$C_1 = D_a, \quad C_2 = 0, \quad X_4 C_3 = -X_4 B_4 A_{21} D_a \quad \text{y} \quad X_4 B_4 = X_4 C_4.$$

Por otro lado,

$$BB^{-\dagger} = U \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & B_4 X_4 \end{pmatrix} U^* \quad \text{y} \quad CB^{-\dagger} = U \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ C_3 D_a^{-1} + C_4 X_3 & C_4 X_4 \end{pmatrix} U^*.$$

Por ser $BB^{-\dagger} = CB^{-\dagger}$, se tiene que

$$C_3 = -C_4 X_3 D_a \quad \text{y} \quad B_4 X_4 = C_4 X_4.$$

Por lo tanto,

$$C = U \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ -C_4 X_3 D_a & C_4 \end{pmatrix} V^*. \tag{4.8}$$

Esto es, existen matrices $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$ y $C_4 \in \mathbb{C}^{(m-a)\times(n-a)}$ tales que $C$ tiene la forma establecida en (4.8).

Así, por el Teorema 4.4.1 (a), se concluye que $A \leq^{-\dagger} C$. Por lo tanto, $\leq^{-\dagger}$ es transitiva. $\square$

Esta relación binaria se denomina orden 1MP.

**Observación 4.4.1.** Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Notar que, en general, $A \leq^{-\dagger} B$ no implica $\mathcal{B}\{-\dagger\} \subseteq \mathcal{A}\{-\dagger\}$.
En efecto, suponer que se verifica $A \leq^{-\dagger} B$. Considerar la matriz $A$ escrita como en (3.1) y $B$ con la forma establecida en el Teorema 4.4.1. Si $X \in \mathcal{B}\{-\dagger\}$, entonces $X$ puede ser escrita mediante la representación dada en el Teorema 4.4.1 (b) (ii). Por (3.4), se tiene que $X \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$ si y solo si $X_4 = 0$. Claramente, si se considera una matriz $X$ tal que $X_4 \neq 0$, la afirmación $A \leq^{-\dagger} B$ implica $\mathcal{B}\{-\dagger\} \subseteq \mathcal{A}\{-\dagger\}$ es falsa. Por otro lado, $X_4 = 0$ si y solo si $B_4 = 0$ pues $X_4 \in \mathcal{B}_4\{-\dagger\} = \mathcal{B}_4\{1, 2, 3\}$. De esta manera, $\mathcal{B}\{-\dagger\} \subseteq \mathcal{A}\{-\dagger\}$ si y solo si $A = B$.

Un procedimiento análogo al realizado para presentar el orden parcial asociado a las matrices 1MP, permite introducir un nuevo orden asociado a sus inversas generalizadas duales, las MP1. Por esta razón, se lo denomina orden MP1. Como se muestra más adelante, este orden resulta diferente del anterior.

**Definición 4.4.2.** *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se dice que $A$ precede a $B$ bajo la relación binaria $\leq^{\dagger-}$, y se denota por $A \leq^{\dagger-} B$, si existe $A^{\dagger-} \in \mathcal{A}\{\dagger-\}$ tal que*

$$A^{\dagger-}A = A^{\dagger-}B \quad y \quad AA^{\dagger-} = BA^{\dagger-}.$$

Para una matriz fija $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, se puede dar una caracterización de todas las matrices $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tales que $A \leq^{\dagger-} B$ y, en ese caso, la forma general para $B^{\dagger-}$. Se omite su demostración, por ser análoga a realizada anteriormente.

**Teorema 4.4.3.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, representada mediante una descomposición en valores singulares como en* (3.1)*. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(a) *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Existe $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que $A \leq^{\dagger -} B$.*

(ii) *Existen matrices $A_{12} \in \mathbb{C}^{a\times(m-a)}$ y $B_4 \in \mathbb{C}^{(m-a)\times(n-a)}$ tales que*

$$B = U \begin{pmatrix} D_a & -D_a A_{12} B_4 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} V^*.$$

(b) *Sea $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que $A \leq^{\dagger -} B$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $X \in \mathcal{B}\{\dagger -\}$.

(ii) *Existen matrices $X_2$ y $X_4$ de tamaño adecuado tales que*

$$X = V \begin{pmatrix} D_a^{-1} & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix} U^*,$$

*donde $X_2 B_4 = A_{12} B_4$, y $X_4 \in \mathcal{B}_4\{\dagger -\}$.*

Un procedimiento similar al que se realizó en la demostración del Teorema 4.4.2, permite probar que la relación binaria $\leq^{\dagger -}$ es un orden parcial en el conjunto de matrices complejas de tamaño $m \times n$. Se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 4.4.4.** *La relación binaria $\leq^{\dagger -}$ definida en $\mathbb{C}^{m\times n}$ es un orden parcial.*

Observar que los órdenes definidos a partir de las inversas 1MP y sus duales no son equivalentes, como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.4.1.** *Considerar la matriz $A$ representada en una descomposición en valores singulares,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*donde $U = V = I_3$. Se tiene que*

$$A^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad A^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ b & c & d \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

*Luego,*

$$A^{-\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad A^{\dagger -} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c \in \mathbb{C}.$$

*Tomar las matrices*

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

*Se construyen las matrices*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Por los Teoremas 4.4.1 y 4.4.3 se tiene que $A \leq^{\dagger -} B_1$, $A \not\leq^{-\dagger} B_1$, $A \leq^{-\dagger} B_2$ y $A \not\leq^{\dagger -} B_2$.*

## 4.5 Matrices inversas generalizadas 1MP, MP1 y su relación con el orden diamante

Las inversas generalizadas 1MP y sus duales, definidas en el Capítulo 3, han permitido definir dos nuevas relaciones de orden en el conjunto de matrices rectangulares. Se presentan a continuación relaciones entre estos nuevos órdenes y otros conocidos en la literatura. En primer lugar, se demuestra que los órdenes 1MP y MP1 definidos en la Sección 4.4 implican el preorden espacio y los órdenes diamante y menos. Se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 4.5.1.** *Sean* $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$*. Entonces:*

(a) *Si* $A \leq^{-\dagger} B$*, se verifican las siguientes afirmaciones:*

- (i) $A \prec^{s} B$.
- (ii) $A \leq^{\diamond} B$.
- (iii) $A \leq^{-} B$.

(b) *Si* $A \leq^{\dagger -} B$*, se verifican las siguientes afirmaciones:*

- (i) $A \prec^{s} B$.
- (ii) $A \leq^{\diamond} B$.
- (iii) $A \leq^{-} B$.

*Demostración.* (a) Suponer $A \leq^{-\dagger} B$. Entonces, existe $A^{-\dagger} \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$ tal que

$$A^{-\dagger}A = A^{-\dagger}B \quad \text{y} \quad AA^{-\dagger} = BA^{-\dagger}.$$

Por la Proposición 3.2.2 se tiene que

$$A^{-}A = A^{-\dagger}B \quad \text{y} \quad AA^{\dagger} = BA^{-\dagger}.$$

Si en ambas igualdades se multiplica, a izquierda en la primera y a derecha en la segunda, por $A$ se obtiene

$$AA^{-}A = AA^{-\dagger}B \quad \text{y} \quad AA^{\dagger}A = BA^{-\dagger}A.$$

Por lo tanto,

$$A = (AA^{-\dagger})B \quad \text{y} \quad A = B(A^{-\dagger}A).$$

Es decir,

$$\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B).$$

Luego, $A \prec^s B$, lo cual prueba (i).

Por otro lado, por el Teorema 4.4.1, existen matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz diagonal definida positiva $D_a$ tales que

$$A = U\mathrm{diag}(D_a, 0)V^* \quad \text{y} \quad B = U \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ -B_4A_{21}D_a & B_4 \end{pmatrix} V^*,$$

donde $A_{21} \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$ y $B_4 \in \mathbb{C}^{(m-a)\times(n-a)}$.

Luego,

$$AB^*A = U \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*V \begin{pmatrix} D_a & (-B_4A_{21}D_a)^* \\ 0 & B_4^* \end{pmatrix} U^*U \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} AB^*A &= U \begin{pmatrix} D_a^2 & D_a(-B_4A_{21}D_a)^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^* \\ &= U \begin{pmatrix} D_a^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^* \\ &= AA^*A. \end{aligned}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta el apartado (i), resulta $A \leq^{\diamond} B$, lo cual prueba (ii).

La demostración de (iii) es inmediata, pues toda inversa 1MP de $A$ es una $\{1\}$-inversa de $A$.

(b) La demostración es análoga a la del apartado (a).

□

El siguiente ejemplo muestra que el orden diamante no implica el orden 1MP, ni el orden MP1.

**Ejemplo 4.5.1.** *Considerar las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Se tiene que*

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Se observa que* $\mathrm{rg}(B^\dagger - A^\dagger) = 1 = \mathrm{rg}(B^\dagger) - \mathrm{rg}(A^\dagger)$. *Por* (4.1), $A \leq^{\diamond} B$.

*Sin embargo,* $A \not\leq^{-\dagger} B$. *En efecto, sea* $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$. *Entonces,*

$$A^- = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & e & f \end{pmatrix} \quad y \quad A^{-\dagger} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad donde\, a,\, b,\, c,\, e,\, f \in \mathbb{C}.$$

*Realizando los productos matriciales correspondientes, se tiene*

$$A^{-\dagger}A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A^{-\dagger}B = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Luego,* $A^{-\dagger}A \neq A^{-\dagger}B$ *para toda matriz* $A^{-\dagger} \in \mathcal{A}\{-\dagger\}$. *Así,* $A \not\leq^{-\dagger} B$. *De manera análoga, se prueba que* $A \not\leq^{\dagger-} B$.

**Observación 4.5.1.** Notar que las matrices $A$ y $B$ del Ejemplo 4.5.1 se pueden utilizar para mostrar que el preorden espacio no implica los órdenes 1MP y MP1. Por otro lado, si se consideran $C = A^\dagger$ y $D = B^\dagger$ como en el Ejemplo 4.5.1, se tiene que $C \leq^- D$. Un análisis similar al de dicho ejemplo muestra que $C \not\leq^{-\dagger} D$ y $C \not\leq^{\dagger-} D$. Por lo tanto, el orden menos no implica el orden 1MP, ni el orden MP1.

**Observación 4.5.2.** El orden estrella implica los órdenes 1MP y MP1, ya que la inversa de Moore-Penrose es una inversa 1MP y MP1. Por otro lado, los órdenes 1MP y MP1 no implican el orden estrella. En efecto, basta considerar las matrices del Ejemplo 4.4.1. Se tiene que $A \leq^{-\dagger} B_2$, $A \leq^{\dagger-} B_1$, $A \not\leq^{*} B_2$ (pues $AA^\dagger \neq B_2A^\dagger$) y $A \not\leq^{*} B_1$ (pues $A^\dagger A \neq A^\dagger B_1$).

Se llega así al resultado más importante de este capítulo que establece que las inversas generalizadas 1MP y sus duales permiten proporcionar una caracterización del orden diamante a partir de igualdades que involucran a estas nuevas inversas generalizadas.

**Teorema 4.5.1.** *Sea* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Son equivalentes:*

(a) *Existe* $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *tal que* $A \leq^{\diamond} B$.

(b) *Para toda matriz* $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$ *se verifican las siguientes igualdades:*

$$B^\dagger B A^{\dagger -} = A^\dagger B A^{\dagger -} = A^{\dagger -} \quad y \quad A^{-\dagger} B B^\dagger = A^{-\dagger} B A^\dagger = A^{-\dagger}.$$

(c) *Existe una matriz* $A^- \in \mathcal{A}\{1\}$ *tal que se verifican las siguientes igualdades:*

$$B^\dagger B A^{\dagger -} = A^\dagger B A^{\dagger -} = A^{\dagger -} \quad y \quad A^{-\dagger} B B^\dagger = A^{-\dagger} B A^\dagger = A^{-\dagger}.$$

*Demostración.* (a) $\Rightarrow$ (b) Suponer que existe $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que $A \leq^\diamond B$. Por la caracterización dada en el Teorema 4.2.3 (c) se tiene que

$$B^\dagger B A^\dagger = A^\dagger B A^\dagger = A^\dagger.$$

Considerar una matriz arbitraria $A^- \in A\{1\}$. Multiplicando en cada miembro de las igualdades anteriores a la derecha por $AA^-$ se obtiene

$$B^\dagger B A^\dagger A A^- = A^\dagger B A^\dagger A A^- = A^\dagger A A^-.$$

Asociando convenientemente y aplicando la definición de las inversas MP1 se obtiene

$$B^\dagger B A^{\dagger -} = A^\dagger B A^{\dagger -} = A^{\dagger -}.$$

Análogamente, de $A^\dagger B B^\dagger = A^\dagger B A^\dagger = A^\dagger$ y multiplicando a la izquierda por $A^- A$, se obtiene

$$A^- A A^\dagger B B^\dagger = A^- A A^\dagger B A^\dagger = A^- A A^\dagger.$$

Así,

$$A^{-\dagger} B B^\dagger = A^{-\dagger} B A^\dagger = A^{-\dagger}.$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Es inmediato.

(c) $\Rightarrow$ (a) Suponer que existe $A^{\dagger-} \in \mathcal{A}\{\dagger-\}$ tal que

$$B^\dagger B A^{\dagger-} = A^\dagger B A^{\dagger-} = A^{\dagger-} \quad \text{y} \quad A^{-\dagger} B B^\dagger = A^{-\dagger} B A^\dagger = A^{-\dagger}.$$

De la primera condición se tiene que

$$B^\dagger B A^\dagger A A^- = A^\dagger B A^\dagger A A^- = A^\dagger A A^-.$$

Multiplicando a derecha por $A$ en cada miembro de estas igualdades se obtiene

$$B^\dagger B A^\dagger A = A^\dagger B A^\dagger A = A^\dagger A.$$

Si ahora se multiplica por $A^\dagger$ a derecha en cada miembro de las igualdades se obtiene

$$B^\dagger B A^\dagger = A^\dagger B A^\dagger = A^\dagger.$$

De la segunda condición se sabe que $A^{-\dagger} B B^\dagger = A^{-\dagger}$. Es decir,

$$A^- A A^\dagger B B^\dagger = A^- A A^\dagger.$$

Multiplicando a izquierda por $A$ se tiene que

$$A A^- A A^\dagger B B^\dagger = A A^- A A^\dagger.$$

Luego, $AA^\dagger B B^\dagger = AA^\dagger$. Ahora, multiplicando a izquierda por $A^\dagger$ se obtiene la igualdad

$$A^\dagger A A^\dagger B B^\dagger = A^\dagger A A^\dagger.$$

Por lo tanto, $A^\dagger B B^\dagger = A^\dagger$. Así, por el Teorema 4.2.3, $A \leq^\diamond B$. $\square$

# Conclusiones y líneas futuras

El área de investigación de inversas generalizadas y órdenes parciales se encuentra en constante crecimiento. Esto se ve reflejado en el incremento de artículos de investigación sobre estos temas que han sido publicados durante las últimas décadas en revistas de carácter internacional con alto índice de impacto. Esta área de investigación también se ha ganado un lugar en congresos internacionales de gran prestigio, donde se ha incrementado notablemente el número de investigadores que abordan estas áreas de conocimiento. Del mismo modo, en la actualidad está presente a través de sociedades como ILAS (International Linear Algebra Society), SEMA (Sociedad Española de Matemática Aplicada) y la Red ALAMA (Álgebra Lineal, Análisis Matricial y Aplicaciones).

Las investigaciones en el tema se han diversificado y son varios los caminos que se abren para ser transitados. En la presente tesis se extendieron y generalizaron inversas generalizadas ya conocidas, presentando nuevas inversas generalizadas para matrices complejas. Se encontraron nuevos enfoques para introducir inversas generalizadas, mediante la utilización de relaciones de equivalencia. También se profundizó en el estudio sobre algunos órdenes parciales, encontrando nuevos resultados en esta área. Además, se introdujeron otras relaciones binarias en conjuntos de matrices rectangulares que también resultaron ser órdenes parciales.

Más precisamente, en el Capítulo 2 se introdujeron dos nuevas clases de inversas generalizadas. En las Sección 2.2 se definieron las inversas GDMP en el conjunto de las matrices cuadradas de índice arbitrario y se establecieron algunas de sus propiedades. En la sección siguiente se utilizó la descomposición de Hartwig-Spindelböck para caracterizar las inversas GD y GDMP (Teoremas 2.3.1 y 2.3.2 respectivamente). Utilizando estas caracterizaciones se encontró en la Sección 2.4 una representación de las inversas GDMP como solución de un sistema de de ecuaciones matriciales adecuadas. En el Teorema 2.4.1 se mostró el sistema de ecuaciones que las caracteriza. El eje central de la Sección 2.5 fue proporcionar los resultados "duales" a los presentados anteriormente en el capítulo. Se definió la clase de inversas MPGD y se obtuvieron los teoremas de caracterización en términos de esta nueva clase de inversas generalizadas. El propósito principal de la última sección del capítulo fue proporcionar dos algoritmos para calcular una inversa GD y una inversa GDMP. Los resultados obtenidos en este capítulo fueron publicados en [37, 39].

El objetivo principal del Capítulo 3 fue el estudio de diversos proyectores que involucran inversas generalizadas. El análisis de su comportamiento permitió encontrar un enfoque novedoso para introducir nuevas clases de inversas generalizadas. Concretamente, se introdujeron estas inversas como los representantes "más simples" de clases de equivalencia de relaciones de equivalencia definidas en conjuntos particulares de matrices rectangulares. Se definieron, de esta manera, cuatro clases de inversas más generales que las conocidas, que incluyen como casos particulares a muchas de las inversas generalizadas presentes en la literatura actual. Estas clases de inversas generalizadas fueron denominadas inversas 1MP, MP1, 2MP y MP2. Como aplicación, en la Subsección 3.2.2, se analizaron las inversas 1MP en el contexto de isometrías parciales. También, al particularizar una inversa exterior, se introdujo en la Sección

3.5 la inversa C2MP. Por último, se utilizó la teoría referida a inversas exteriores con espacio imagen y espacio nulo prescrito para representar algunas de las inversas generalizadas introducidas en esta tesis. Estas aportaciones ampliaron los resultados conocidos hasta el momento. Los resultados correspondientes a este capítulo fueron publicados en [38, 40, 41].

En el Capítulo 4 se estudiaron diferentes relaciones de orden sobre el conjunto de matrices rectangulares complejas. En la Sección 4.2 se demostraron nuevas propiedades del orden diamante. El Teorema 4.2.3 proporciona una caracterización de esta relación de orden. Muchas veces se necesita no sólo saber si dos matrices son comparables bajo un orden, sino encontrar el conjunto de matrices que suceden o preceden a otra bajo una relación de orden determinada. En la Sección 4.3 se encontraron los predecesores de una matriz bajo el orden diamante y además se diseñó un algoritmo para computarlas. En la Sección 4.4 se establecieron dos nuevas relaciones de orden, cuyas definiciones involucran las inversas 1MP y MP1. Estas inversas también fueron utilizadas en la última sección del capítulo para establecer, en el Teorema 4.5.1, una nueva caracterización del orden diamante. Actualmente, se está trabajando en la redacción de un artículo que incluya estos resultados y otros que pudieran encontrarse durante su elaboración.

Por lo expuesto anteriormente, se han alcanzado los objetivos planteados en el plan de trabajo inicial de esta tesis. Durante el desarrollo de la misma, han surgido otros problemas. Algunos de ellos han sido resueltos y otros serán considerados como futuras líneas de investigación.

A continuación se da una lista de posibles líneas de investigación para continuar este trabajo:

• Extender resultados sobre inversas generalizadas y órdenes parciales encontrados en el conjunto de matrices rectangulares a otros contextos.

En los últimos años ha aumentado significativamente la cantidad de trabajos publicados que extienden el estudio de la teoría de inversas generalizadas y relaciones de orden sobre conjuntos de matrices a operadores sobre espacios de Banach o anillos. Por lo tanto, cabe preguntarse si es posible extender algunos de los resultados presentados en esta tesis a otros contextos.

• Profundizar el estudio y las relaciones de las inversas generalizadas definidas en esta tesis, con otras inversas presentes en la literatura.

Como se dijo anteriormente, las inversas definidas en el Capítulo 2 son extensiones de inversas conocidas y ampliamente estudiadas. Además, las inversas introducidas en el Capítulo 3 generalizan otras inversas presentes en la literatura. Esto motiva a plantearse la posibilidad de encontrar diferentes relaciones de las nuevas inversas con otras ya estudiadas, o presentar otras inversas conocidas mediante el enfoque introducido en esta tesis.

• Profundizar el estudio de las relaciones de órdenes definidas en esta tesis, relacionarlos con otros órdenes presentes en la literatura y extenderlos a otros contextos.

En esta tesis se definieron las clases de inversas 1MP y MP1, que luego se utilizaron para caracterizar el orden diamante. A partir de las relaciones existentes entre el orden diamante y los órdenes menos y estrella, se pretende profundizar el estudio de las inversas 1MP y MP1 y hallar relaciones con los órdenes menos y estrella.

# Bibliografía

[1] K. Baksalary y J. Hauke. “A Further Algebraic Version of Cochran's Theorem and Matrix Partial Orderings”. En: *Linear Algebra and its applications* 127 (1990), págs. 157-169.

[2] O.M. Baksalary, G. Styan y G. Trenkler. “On a matrix decomposition of Hartwig and Spindelböck”. En: *Linear Algebra and its Applications* 430 (2009), págs. 2798-2812.

[3] O.M. Baksalary y G. Trenkler. “Core inverse of matrices”. En: *Linear and Multilinear Algebra* 58 (2010), págs. 681-697.

[4] O.M. Baksalary y G. Trenkler. “Core inverse of matrices”. En: *Linear and Multilinear Algebra* 58 (2010), págs. 681-697.

[5] O.M. Baksalary y G. Trenkler. “On matrices whose Moore-Penrose inverse is idempotent”. En: *Linear and Multilinear Algebra* (2020), págs. 1-13.

[6] R.B. Bapat. *Linear Algebra and Linear Models*. Springer, 2000.

[7] A. Ben-Israel y T.N.E. Greville. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. Springer-Verlag, 2003.

[8] B. Burgeth, A. Bruhn, N. Papenberg, M. Welk y J. Weickert. “Mathematical morphology for matrix fields induced by the Lowner ordering in higher dimensions”. En: *Signal Processing* 87 (2007), págs. 277-290.

[9] M.A. Butt, P. Maragos y R.W. Schafer. *Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing*. Springer, 1998.

[10] S.L. Campbell. “ Linear systems of differential equations with singular coefficients ”. En: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 8 (1977), págs. 1057-1066.

[11] S.L. Campbell. “Optimal control of autonomous linear processes with singular matrices in the quadratic cost functional”. En: *SIAM Journal on Control and Optimization* 14 (1976), págs. 1092-1106.

[12] S.L. Campbell, C. Meyer y N.J. Rose. “Applications of the Drazin Inverse to Linear Systems of Differential Equations with Singular Constant Coefficients”. En: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 31.3 (1976), págs. 411-425.

[13] S.L. Campbell y C.D. Meyer. *Generalized Inverses of Linear transformation*. SIAM, 2009.

[14] S.L. Campbell y C.D. Meyer. “Weak Drazin inverses”. En: *Linear Algebra Appl.* 20 (1978), págs. 167-178.

[15] J. Chen y H. Wang. "Weak group inverse". En: *Open Mathematics* 16 (2017). DOI: `10.1515/math-2018-0100`.

[16] J.L. Chen, H.H. Zhu, P. Patrício e Y.L. Zhang. "Characterizations and representations of core and dual core inverses". En: *Canadian Mathemathics Bulletin* 60.2 (2017), págs. 269-282.

[17] Y.J. Cheng, K.Z. Zuo y D. Cvetković-Ilić. "Different characterizations of DMP-inverse of matrices". En: *Linear and Multilinear Algebra* 70.3 (2022), págs. 411-418.

[18] J-J. Climent, V. Herranz y C. Perea. "Positive cones and convergence conditions for iterative methods based on splittings". En: *Linear Algebra and its Applications* 2 (2006), págs. 319-326.

[19] J-J. Climent y C. Perea. "Some comparison theorems for weak nonnegative splittings of bounded operators". En: *Linear Algebra and its Applications* 275-276 (1998), págs. 77-106.

[20] J-J. Climent, N. Thome e Y. Wei. "A geometrical approach on generalized inverses by Neumann-type series". En: *Linear Algebra and its Applications* 332 (2001), págs. 533-540.

[21] R.E. Cline y T.N.E. Greville. "A Drazin inverse for rectangular matrices". En: *Linear Algebra and its Applications* 29 (1980), págs. 53-62.

[22] C. Coll, M. Lattanzi y N. Thome. "Weighted G-Drazin inverses and a new pre-order on rectangular matrices". En: *Applied Mathematics and Computation* 317 (2018), págs. 12-24.

[23] D. Cvetković-Ilić y J. Milosevic. "Reverse order laws for $\{1,3\}$-generalized inverses". En: *Linear and Multilinear Algebra* 67.3 (2019), págs. 613-624.

[24] M.S. Djikić. "Lattice properties of the core-partial order." En: *Banach Journal of Mathematical Analysis* 11.2 (2017), págs. 398-415.

[25] D.S. Djordjević, D.S. Rakić y J. Marovt. "Minus partial order in Rickart rings". En: *Publicationes Mathematicae Debrecen* 87 (2015), págs. 291-305.

[26] M.P. Drazin. "Natural structures on semigrups with involution". En: *Bulletin of the american mathematical society* 84.1 (1978), págs. 139-141.

[27] M.P. Drazin. "Pseudo-Inverses in Associative Rings and Semigroups". En: *The American Mathematical Monthly* 65.7 (1958), págs. 506-514.

[28] I. Erdelyi. "On the matrix equation $Ax = \lambda Bx$". En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 17.1 (1967), págs. 119-132.

[29] D. Ferreyra, M. Lattanzi, F. Levis y N. Thome. "Parametrized solutions $X$ of the system $AXA = AYA$ and $A^kYAX = XAYA^k$ for a matrix $A$ having index $k$". En: *Electronic Journal of Linear Algebra* 35 (2019), págs. 503-510.

[30] D. Ferreyra, F. Levis y N. Thome. "Characterizations of k-commutative equalities for some outer generalized inverses". En: *Linear and Multilinear Algebra* 68.1 (2020), págs. 177-192.

[31] D. Ferreyra, F. Levis y N. Thome. "Maximal classes of matrices determining generalized inverses". En: *Applied Mathematics and Computation* 333 (2018), págs. 42-52.

[32] D. Ferreyra, A. Priori, F.E. Levis y N. Thome. “The weak core inverse”. En: *Aequationes Mathematicae* (2021). DOI: 10.1007/s00010-020-00752-z.

[33] M.I. Gareis, M. Lattanzi y N. Thome. “Nilpotent matrices and the minus partial order”. En: *Quaestiones Mathematicae* 40.4 (2017), págs. 519-525.

[34] R.E. Hartwig. “How to Partially Order Regular Elements”. En: *Mathematica Japonica* 25 (1980), págs. 1-13.

[35] R.E. Hartwig y K. Spindelböck. “Matrices for which $A^*$ and $A^\dagger$ commute”. En: *Linear and Multilinear Algebra* 14 (1984), págs. 241-256.

[36] R.E. Hartwig y G.P. Styan. “On some characterizations of the star partial ordering for matrices and rank subtractivity”. En: *Linear Algebra Applied* 82 (1986), págs. 145-161.

[37] M.V. Hernández, M. Lattanzi y N. Thome. “Cálculo de las inversas GD y GDMP”. En: *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial* 8 (2021), págs. 21-24.

[38] M.V. Hernández, M. Lattanzi y N. Thome. “From projectors to 1MP and MP1 generalized inverses and their induced partial orders”. En: *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* 115.3 (2021). DOI: 10.1007/s13398-021-01090-8.

[39] M.V. Hernández, M. Lattanzi y N. Thome. “GDMP-inverses of a matrix and their duals”. En: *Linear and Multilinear Algebra* (2022), págs. 1-13.

[40] M.V. Hernández, M. Lattanzi y N. Thome. “On 2MP-, MP2- and C2MP-inverses for rectangular matrices”. En: *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* 116.156 (2022). DOI: `10.1007/s13398-022-01289-3`.

[41] M.V. Hernández, M. Lattanzi y N. Thome. “Sobre una clase especial de inversas exteriores”. En: *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial* 8 (2021), págs. 25-28.

[42] A. Herrero, F. Ramírez y N. Thome. “Relationships between different sets involving group and Drazin projectors and nonnegativity”. En: *Linear Algebra and its Applications* 438.4 (2013), págs. 1688-1699.

[43] G.S. James. “Notes on a theorem of Cochran”. En: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 48.3 (1952), págs. 443-446.

[44] I. Kyrchei. “Determinantal representations of the $W$-weighted Drazin inverse over the quaternion skew field.” En: *Applied Mathematics and Computation* 264 (2015), págs. 453-465.

[45] L. Lebtahi, P. Patrício y N. Thome. “The diamond partial order in rings.” En: *Linear and Multilinear Algebra* 62.3 (2014), págs. 386-395.

[46] X. Liu y N. Cai. “High-order iterative methods for the DMP inverse.” En: *Journal of Mathematics* 2 (2018), págs. 1-6.

[47] S. Malik, L. Rueda y N. Thome. “The class of m - EP and m -normal matrices”. En: *Linear and Multilinear Algebra* 64 (2016), págs. 1-14.

[48] S. Malik y N. Thome. “On a new generalized inverse for matrices of an arbitrary index”. En: *Appl. Math. Comput.* 226 (2014), págs. 575-580.

[49] K. Manjunatha Prasad y K.S Mohana. “Core-EP inverse”. En: *Linear and Multilinear Algebra* 62 (2014), págs. 792-802.

[50] J. Marovt. “On partial orders in proper $*$-rings”. En: *Revista De La Unión Matemática Argentina* 59 (2017), págs. 193-204.

[51] J. Marovt, D.S. Rakić y D.S. Djordjević. “Star, left-star, and right-star partial orders in Rickart *-rings”. En: *Linear and Multilinear Algebra* 63.2 (2015), págs. 343-365.

[52] B.J. McCartin. *Rayleigh-Schrödinger Perturbation Theory: Pseudoinverse Formulation*. Hikari, 2009.

[53] M. Mehdipour y A. Salemi. “On a new generalized inverse of matrices”. En: *Linear and Multilinear Algebra* 66 (2018), págs. 1046-1053.

[54] L. Meng. “The DMP inverse for rectangular matrices”. En: *Filomat* 31 (2017), págs. 6015-6019.

[55] C. Meyer. “The Role of the Group Generalized Inverse in the Theory of Finite Markov Chains”. En: *SIAM Review* 17.3 (1975), págs. 443-464.

[56] C. Meyer y R.J. Plemmons. “Convergent Powers of a Matrix with Applications to Iterative Methods for Singular Linear Systems”. En: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 14.4 (1977), págs. 699-705.

[57] S.K. Mitra. "On group inverses and the sharp order". En: *Linear Algebra and its Applications* 92 (1987), págs. 17-37.

[58] S.K. Mitra, P. Bhimasankaram y S. Malik. *Matrix partial orders, shorted operators and applications*. World Scientific Publishing Company, 2010.

[59] S.K. Mitra y R.E. Hartwig. "Partial orders based on outer inverses". En: *Linear Algebra and its Applications* 176 (1992), págs. 3-20.

[60] P. Mitteroecker, P. Gunz, S. Windhager y K. Schaefer. "A brief review of shape, form, and allometry in geometric morphometrics, with applications to human facial morphology". En: *Hystrix, the Italian Journal of Mammalogy* 24.1 (2013), págs. 59-66.

[61] D. Mosić. "Drazin-star and star-Drazin matrices". En: *Results in Mathematics* 75.2 (2020). DOI: 10.1007/s00025-020-01191-7.

[62] D. Mosić. "The CMP inverse for rectangular matrices". En: *Aequationes mathematicae* 92 (2018), págs. 649-659.

[63] D. Mosić. "Weighted G-Drazin inverse for operators on Banach spaces". En: *Carpathian Journal of Mathematics* 35 (2019), págs. 171-184.

[64] D. Mosić y S.P. Stanimirović. "Composite outer inverses for rectangular matrices". En: *Quaestiones Mathematicae* 44.1 (2021), págs. 45-72.

[65] D.S. Rakić. "Decomposition of a ring induced by minus partial order". En: *Electronic Journal of Linear Algebra* 23 (2012), págs. 1040-1059.

[66] C.R. Rao y S.K. Mitra. *Generalized inverse of Matrices and its Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1971.

[67] G. Wang, Y. Wei y S. Qiao. *Generalized Inverses: Theory and Computations*. Science Press Beijing/New York, 2004.

[68] X. Wang y X. Liu. "Characterizations of the core inverse and the partial ordering". En: *Linear and Multilinear Algebra* 63.9 (2015), págs. 1829-1836.

[69] X. Wang y X. Liu. "Partial orders based on core-nilpotent decomposition". En: *Linear Algebra Applied* 488 (2016), págs. 235-248.

[70] M. Zhou y J. Chen. "Integral representations of two generalized core inverses". En: *Applied Mathematics and Computation* 333 (2018), págs. 187-193.

[71] M. Zhou, J. Chen, P. Stanimirovic, V. Katsikis y H. Ma. "Complex varying-parameter Zhang neural networks for computing core and core-EP inverse". En: *Neural Processing Letters* 51.2 (2020), págs. 1299-1329.

[72] H.H. Zhu. "On DMP inverses and $m$-EP elements in rings". En: *Linear and Multilinear Algebra* 67.4 (2018), págs. 1-11.