

Resumen

El Análisis Matricial proporciona herramientas muy útiles en la Matemática Aplicada. La teoría de matrices inversas generalizadas constituye una de estas herramientas. Su aplicación a otras áreas de las matemáticas y a otras disciplinas es importante. En esta tesis doctoral se definen e investigan nuevas inversas generalizadas, y se encuentran y caracterizan nuevos órdenes parciales definidos a partir de algunas de ellas. Por lo tanto, esta tesis doctoral se enmarca en dos importantes áreas: el Análisis Matricial y la Teoría de Matrices, y el Álgebra de la Lógica (Estructuras Algebraicas Ordenadas).

Un procedimiento para introducir nuevas inversas generalizadas es presentarlas como combinación de otras previamente conocidas y estudiadas. Este mecanismo fue utilizado, por ejemplo, por O. Baksalary y G. Trenkler en [3] para introducir la inversa core en el conjunto de matrices cuadradas de índice a lo sumo 1, a partir de la inversa de grupo y la inversa de Moore-Penrose. Por otra parte, S. Malik y N. Thome [48] extendieron la inversa core a matrices cuadradas de índice arbitrario. Los autores introdujeron la inversa generalizada DMP como un caso híbrido de la inversa de Drazin y la inversa de Moore-Penrose.

Motivados por estos trabajos, en la primera parte de esta tesis se define e investiga una nueva clase de inversas generalizadas híbridas, las inversas GDMP (y dualmente, las MPGD inversas) en el conjunto de matrices cuadradas de índice arbitrario, como una extensión de las inversas DMP a una clase más general.

En [69], H. X. Wang y X. J. Liu introdujeron la noción de inversa G-Drazin debilitando las condiciones que definen la inversa de Drazin. Recientemente, C. Coll, M. Lattanzi y N. Thome se basaron en este trabajo para encontrar en [22] un sistema de ecuaciones más simple que las caracteriza.

En esta tesis se presentan las nuevas inversas generalizadas GDMP como cierto producto de matrices que involucra las inversas G-Drazin y la inversa de Moore- Penrose. Se investigan sus propiedades mediante diferentes enfoques y se caracterizan desde diferentes puntos de vista. Como complemento, se proporciona un algoritmo para hallarlas, que además permite encontrar una inversa G-Drazin.

El estudio de proyectores es un área importante en diferentes ramas de las Matemáticas y en el Análisis Matricial en particular. La teoría de inversas generalizadas se utiliza como herramienta para analizarlos y operar con ellos. En la segunda parte de esta tesis se estudia el comportamiento de ciertos proyectores oblicuos definidos mediante inversas generalizadas. A partir de la definición de una adecuada relación de equivalencia en conjuntos particulares de matrices complejas, se introduce una nueva clase de matrices inversas generalizadas como el representante “más simple” de cada clase de equivalencia. Además, se representan como combinación de una inversa interior y la inversa de Moore-Penrose. Esta es la razón por la que se las ha denominado inversas IMP y MP1. Estas nuevas clases de inversas generalizadas resultan ser tanto inversas interiores como exteriores pues, si B y C son $\{1\}$ -inversas de A , entonces el producto BAC es una $\{1, 2\}$ -inversa de A .

Tanto la inversa core como la inversa DMP se expresan como un producto adecuado involucrando una inversa exterior específica y la inversa de Moore-Penrose. En esta tesis se presenta una clase de inversas que generaliza a las anteriores, pues se expresan mediante una inversa exterior arbitraria y la inversa de Moore-Penrose. Además, el enfoque para introducir estas inversas no es el clásico, sino que es novedoso. De hecho, se presentará a partir del estudio del comportamiento de ciertos proyectores, de la misma manera que se hizo con las 1MP y MP1, como representantes de ciertas clases de equivalencia. Se definen así las inversas 2MP y sus duales, las MP2.

M. Mehdipour y A. Salemi definieron en [53] la inversa CMP de una matriz cuadrada A poniendo el énfasis en la parte core de la propia matriz A . En esta tesis doctoral se realiza un análisis similar, centrando el enfoque en las inversas 2MP. Surgen de esta manera las inversas generalizadas C2MP. Del análisis de las propiedades de estas nuevas inversas se desprende una caracterización de las inversas exteriores que también son inversas interiores.

La teoría de inversas generalizadas se relaciona estrechamente con la de órdenes parciales. En el año 1978, Drazin [26] utilizó la noción de inversa generalizada de Moore-Penrose para definir y caracterizar el orden estrella. Motivado por el orden estrella, R. Hartwig definió en el año 1980 [34] el orden menos, en el contexto de anillos. Esta relación de orden fue caracterizada en el contexto de matrices rectangulares complejas utilizando inversas interiores.

Debilitando las condiciones que definen el orden estrella, J.K. Baksalary y J. Hauke introdujeron en el año 1990 [1] una nueva relación de orden en el conjunto de las matrices complejas de tamaño $m \times n$. Basándose en este estudio, L. Lebtahi, P. Patricio y N. Thome [45] analizaron y caracterizaron este orden en el contexto de anillos. Actualmente, esta relación binaria es conocida como orden diamante.

En esta tesis se retoma el estudio de las propiedades del orden diamante en conjuntos de matrices rectangulares. Se demuestran nuevas propiedades y se encuentra una nueva caracterización de esta relación de orden a partir de su relación con el orden menos. Además, se caracterizan los predecesores de una matriz arbitraria bajo el orden diamante.

Como una aplicación de las inversas generalizadas 1MP y MP1, se definen dos nuevas relaciones de orden en conjuntos de matrices rectangulares. Se estudian sus propiedades y se caracterizan los sucesores de una matriz arbitraria bajo estos órdenes. Por último, como otra aplicación de las inversas generalizadas 1MP y MP1 investigadas en esta tesis, se encuentra, a partir de ellas, otra caracterización del orden diamante.

Esta tesis está organizada en cuatro capítulos. En el Capítulo 1 se desarrollan algunos antecedentes del tema de la tesis y se presentan los resultados preliminares necesarios para el desarrollo del resto de los capítulos. En el Capítulo 2 se presentan las clases de matrices GDMP y MPGD, se demuestran propiedades de estas inversas y se describe un algoritmo para hallarlas. El Capítulo 3 se dedica al estudio de ciertos proyectores que permiten definir las clases de inversas generalizadas 1MP, MP1, 2MP y MP2. Particularizando la inversa exterior considerada, se definen las inversas C2MP. Además, se presentan las inversas definidas en esta tesis como inversas con espacio rango y espacio nulo prescrito. Finalmente, en el Capítulo 4, con la intención de estudiar una aplicación de la teoría de inversas generalizadas, se profundiza en el estudio de órdenes parciales, proporcionando nuevas propiedades del orden diamante. También, se presentan e investigan dos nuevas relaciones de orden en el conjunto de matrices rectangulares y se analizan sus propiedades. Algunos de los resultados obtenidos en esta tesis pueden encontrarse en [37, 38, 39, 40, 41].