



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Dpto. de Matemàtica Aplicada

Campos vectoriales de Killing e isometrías en variedades
semiriemannianas

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Investigación Matemática

AUTOR/A: González Ibáñez, Fernán

Tutor/a: Monserrat Delpalillo, Francisco José

Cotutor/a externo: GIMENO GARCIA, VICENT

CURSO ACADÉMICO: 2021/2022

Resumen

En este trabajo se estudiará la definición y algunas propiedades de los campos vectoriales de Killing en una variedad semi-riemanniana. Así como su relación con el grupo de isometría, ciertas magnitudes conservadas a lo largo de las geodésicas de la variedad semi-riemanniana y con los tensores de curvatura. Se explicitará también como realizar un cambio conforme en el tensor métrico para obtener campos de Killing geodésicos y se particularizarán todos los resultados anteriores en algunos espacio-tiempo clásicos ampliamente estudiados en el campo de la Relatividad General. Se finalizará introduciendo las variedades producto warped y una idea para el cálculo de los campos vectoriales de Killing en dichas variedades.

Abstract

En este trabajo se estudiará la definición y algunas propiedades de los campos vectoriales de Killing en una variedad semi-riemanniana. Así como su relación con el grupo de isometría, ciertas magnitudes conservadas a lo largo de las geodésicas de la variedad semi-riemanniana y con los tensores de curvatura. Se explicitará también como realizar un cambio conforme en el tensor métrico para obtener campos de Killing geodésicos y se particularizarán todos los resultados anteriores en algunos espacio-tiempo clásicos ampliamente estudiados en el campo de la Relatividad General. Se finalizará introduciendo las variedades producto warped y una idea para el cálculo de los campos vectoriales de Killing en dichas variedades.

Palabras clave

Geometría diferencial, Campos vectoriales de Killing, Espacios tiempo producto warped

Keywords

Differential Geometry, Killing Vector Fields, Warped Space-times

Índice general

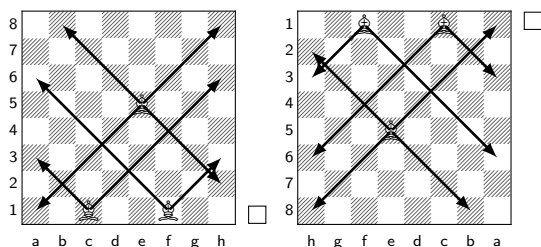
1. Introducción	5
2. Campos vectoriales de Killing	9
2.1. Conceptos previos	10
2.2. Derivadas de Lie	12
2.3. Campos vectoriales de Killing	17
2.3.1. Propiedades de los campos vectoriales de Killing	18
2.3.2. Isometrías y campos vectoriales de Killing	20
2.4. Ejemplos de campos vectoriales de Killing	24
2.4.1. Esfera bidimensional	24
2.4.2. Espacio-tiempo de Minkowski	26
2.4.3. Espacio-tiempo de Schwarzschild	29
2.5. Campos vectoriales conformes	32
2.5.1. Ejemplo de campos vectoriales conformes	33
3. Campos vectoriales de Killing, geodésicas y tensor de curva-	

tura.	37
3.1. Relación de los campos vectoriales de Killing y las curvas geodésicas	38
3.1.1. Magnitudes conservadas en diferentes espacio-tiempo	39
3.2. Relación de los campos vectoriales de Killing y los tensores curvatura	42
3.2.1. Relación de los campos vectoriales de Killing y el tensor de curvatura	44
3.3. Campos vectoriales de Killing en el espacio-tiempo de Minkowski y campo electromagnético	46
4. Variedades producto <i>warped</i>	49
4.1. Derivadas de Lie en espacios producto <i>warped</i>	54
4.2. Espacios-tiempos de Robertson-Walker generalizados	57
4.3. Idea para el cálculo de campos vectoriales de Killing en variedades producto <i>warped</i>	58
4.3.1. Cálculo de los campos vectoriales de Killing en variedades producto warped.	60
5. Conclusiones	67
A. Ejemplo para la ecuación (2.14)	69
B. Código en <i>Maple</i> para el cálculo de las derivadas de Lie	71

Capítulo 1

Introducción

Las simetrías en la geometría diferencial y en relatividad general se representan mediante la invariancia del tensor métrico bajo la acción de una transformación. Estas transformaciones pueden ser rotaciones, translaciones, combinaciones de estas... Utilizando un símil de Richard Feynmann en las *Feynmann Lectures* entre el ajedrez y las simetrías podemos ver que un alfil, que únicamente se mueve en diagonal, si rotamos el tablero su movimiento seguirá siendo el mismo o si dejamos de jugar por mucho tiempo, sus reglas serán las mismas. Por lo tanto, podemos observar que un alfil presenta simetría bajo rotaciones y translaciones temporales.



Una transformación que preserve el tensor métrico se dice que induce una simetría. A esta clase de transformaciones se las conoce como el grupo

continuo de isometrías. Estas representan los movimientos generados por el flujo asociado a un campo vectorial. Esta clase de campos vectoriales son conocidos como campo vectorial de Killing, en honor al matemático Wilhem Killing.[9]

Este grupo de campos vectoriales permite clasificar las variedades en diferentes familias, como pueden ser las variedades homogéneas o isótropas. Debido a que el universo debe de ser homogéneo e isótropo, los campos vectoriales de Killing nos ayudan a buscar soluciones para las ecuaciones de Einstein del vacío. pero también inducen una clasificación sobre los espacios tiempo, como pueden ser los espacios tiempos estacionarios o con simetría esférica.

En el primer capítulo se realizará una introducción a los campos vectoriales de Killing. Se comenzará con una introducción a ciertos conceptos que se usarán a lo largo del trabajo, como pueden ser la conexión de Levi-Civita, las álgebras de Lie o los corchetes de Lie. Posteriormente, se mostrarán las derivadas de Lie, comenzando con la derivada de Lie de funciones, campos vectoriales, y se finalizará con la derivada de Lie de campos tensoriales para mostrar la derivada de Lie del tensor métrico. Estos conceptos se utilizarán para definir los campos vectoriales de Killing mediante la ecuación de Killing. También se mostrarán algunas propiedades de estos campos vectoriales y la relación con el grupo de isometrías de una variedad. Se calcularán los campos vectoriales de Killing de la esfera y del espacio-tiempo de Minkowski además se mostrará la ecuación de Killing para el espacio-tiempo de Schwarzschild. Para finalizar el capítulo se introducirán los campos vectoriales conformes, que son una generalización de los campos vectoriales de Killing, y se calcularán los campos vectoriales conformes de la esfera.

En el segundo capítulo se mostrarán las relaciones de los campos vectoriales de Killing con las geodésicas y el tensor de curvatura y la relación de los campos vectoriales de Killing con el tensor electromagnético en el espacio de Minkowski. Se comenzará el capítulo explicando que el movimiento

de una curva geodésica a lo largo de un campo vectorial de Killing conlleva una magnitud conservada. Posteriormente se introducirán los conceptos de tensor de curvatura y se expondrá la relación de los campos vectoriales de Killing. Esta relación ayuda a simplificar el cálculo de los campos vectoriales de Killing en variedades Ricci planas. Se finalizará el capítulo con un teorema que permite saber si dos cuadripotenciales electromagnéticos generan el mismo tensor electromagnético.

En el tercer capítulo se presentarán las variedades diferenciables producto *warped*. La importancia de estas variedades yace en que la mayoría de las soluciones de las ecuaciones del vacío de Einstein pueden ser escritas como producto *warped* o secuencialmente *warped*. El capítulo se finalizará con una idea que nos facilitará buscar todos los campos vectoriales de Killing en una variedad producto *warped* basándose en los Killing y los conformales de las variedades iniciales. Se aplicará dicha idea para el cálculo de los campos vectoriales de Killing de toda variedad riemanniana de curvatura seccional constante y también se mostrarán los campos vectoriales de Killing espacio-tiempo de Schwarzschild aplicando esta idea.

Capítulo 2

Campos vectoriales de Killing

Los campos vectoriales de Killing son un grupo de campos vectoriales satisfacen que la derivada de Lie del tensor métrico es nula. Para poder estudiar estos campos vectoriales se van a introducir conceptos básicos de geometría diferencial con el objetivo de definir las derivadas de Lie de funciones, campos vectoriales y tensores. Posteriormente, se particularizará en el tensor métrico con el que se definirán los campos vectoriales de Killing y se dará la ecuación de Killing de un campos vectorial. Más adelante expondrán algunas propiedades de los campos vectoriales de Killing y su relación con las isometrías de una variedad. Todos estos conceptos se ejemplificarán en la esfera y en los espacios-tiempos de Minkowski y Schwarzschild.

Para finalizar el capítulo se introduciendo los campos vectoriales conformes. Este grupo de campos vectoriales es una generalización de los campos vectoriales de Killing. Mientras que los campos vectoriales de Killing representan isometrías, que son una clase de cambios conformes con factor conforme nulo, los campos vectoriales conformes representan los campos vectoriales que inducen cambios conformes de la métrica. Se finalizará el capítulo calculando los campos vectoriales conformes de la esfera.

2.1. Conceptos previos

Para comenzar el capítulo sobre las derivadas de Lie primero se van a introducir una serie de definiciones y lemas previos.

Definición 2.1.1 (Ver [3]). *Sea M una variedad diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial sobre M . Se dirá que la curva diferenciable $\alpha :]a, b[\rightarrow M$ es una **curva integral** de X si cumple que $\dot{c}(t) = X_{c(t)}$.*

Definición 2.1.2 (Ver [3]). *Sea M una variedad diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial sobre M . Para cada $p \in M$ existe un entorno abierto de p , $W \in \mathcal{N}(p)$, un intervalo, $I =]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R}$. A una aplicación $F : I \times W \rightarrow M$ se le llamará **flujo local de X** si satisface las siguientes propiedades:*

1. *Dado un $q \in W$ la curva $c_q(t) : I \rightarrow M$ definida como $c_q(t) := F(t, q)$ es una curva integral de X que cumple que $c_q(0) = q$, es decir, F verifica que:*
 - $F(0, q) = q$
 - $\frac{\partial F}{\partial t}(t, q) = X_{F(t, q)}$
2. *F es diferenciable.*

El siguiente lema será usado para demostrar la equivalencia entre la derivada de Lie de campos vectoriales y el corchete de Lie.

Lema 2.1.3 (Ver [3]). *Sea $h :]-\delta, \delta[\times V \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable que cumple que $h(0, q) = 0$ para todo $q \in V$. Entonces existe una aplicación diferenciable $g :]-\delta, \delta[\times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(t, q) = t \cdot g(t, q)$ tal que $g(0, q) := \left. \frac{\partial h(t, q)}{\partial t} \right|_{t=0}$.*

Demostración. Para demostrar la existencia de la aplicación g será utilizada la caracterización de esta en 0:

$$g(0, q) := \left. \frac{\partial h(t, q)}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Si la ecuación es integrada se obtendrá que:

$$g(t, q) = \int_0^1 \frac{\partial h(ts, q)}{\partial ts} ds$$

Haciendo el cambio de variable $s = ts$ obtenemos que

$$t \cdot g(t, q) = \int_0^t \frac{\partial h(ts, q)}{\partial ts} d(ts) \quad (2.1)$$

$$t \cdot g(t, q) = h(t, q) - h(0, q) = h(t, q).$$

Por lo tanto se ha demostrado que dada una función que cumple que $h(0, q) = 0$ para todo $q \in V$ se puede escribir como $h(t, q) = t \cdot g(t, q)$. \square

Definición 2.1.4 (Ver [3]). *Sea (M, g) una variedad semiriemanniana. Definimos la aplicación **corchete de Lie** como:*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$X, Y \rightarrow XY - YX$$

Proposición 2.1.5 (Ver [3]). *Sea (M, g) una variedad semiriemanniana. La aplicación corchete de Lie es bilineal, antisimétrica, cumple la identidad de Jacobi y la regla de Leibniz.*

Definición 2.1.6 (Ver [3]). *A un espacio vectorial real V equipado con la aplicación corchete de Lie se le llama **álgebra de Lie**.*

Proposición 2.1.7 (Ver [3]). *Sea (M, g) una variedad semiriemanniana equipada con la conexión, ∇ , de Levi-Civita. Entonces satisface la siguiente igualdad, conocida como la formula de Koszul:*

$$g(Z, \nabla_Y X) = \frac{1}{2} \left(Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \right. \\ \left. - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Y], Z) \right) \quad (2.2)$$

Demostración. La conexión de Levi-Civita es la única conexión libre de torsión y compatible con la métrica. Por lo tanto se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
2. $Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$
3. $Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$

Entonces sumamos 1 y 2 y restamos 3:

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) = & g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ & + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ & - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \end{aligned}$$

Sumando y restando $g(Z, \nabla_Y X)$ y utilizando que g es simétrica:

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) = & g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) \\ & - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\ & + 2g(\nabla_Y X, Z) - g(Z, \nabla_Y X) \end{aligned}$$

Aprovechando que ∇ es libre de torsión :

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) = & g([X, Y], Z) + g([Y, Z], X) \\ & + g([X, Y], Z) + 2g(Z, \nabla_Y X) \end{aligned}$$

Despejando $g(\nabla_Y X, Z)$ queda demostrada la proposición. □

2.2. Derivadas de Lie

La **derivada de Lie de una función diferenciable** a lo largo de un campo vectorial, $X \in \mathfrak{X}(M)$, mide el cambio de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a lo largo del campo vectorial. Esta variación en un punto $p \in M$ puede ser estudiada mediante un flujo vectorial de X . Para ello, se tomará un entorno abierto de p , $W \in \mathcal{N}(p)$, y el flujo $\phi : I \times W \rightarrow M$ de X entonces la variación de f en

un punto p vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}_X(f)(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\phi(t, p)) - f(p)}{t}. \quad (2.3)$$

Proposición 2.2.1. Sean (M, g) una variedad semiriemanniana, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Se cumple que:

$$\mathcal{L}_X(f)(p) = X(f)(p)$$

Demostración. Si se desarrolla la fórmula 2.3 se obtendrá que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(f)(p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\phi(t, p)) - f(p)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\phi(t, p)) - f(\phi(0, p))}{t} \\ &= df \left(\frac{\partial \phi(t, p)}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} \\ &= X(f)(p). \end{aligned} \quad (2.4)$$

□

También se puede realizar la derivada de Lie de campos vectoriales, es decir, la derivada de Lie de un campo vectorial, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, a lo largo de otro, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Esta idea es análoga a la definición de la derivada de Lie de una función, pero adaptada a campos vectoriales. En otras palabras, la derivada de Lie un campo vectorial respecto a otro es la variación del campo vectorial Y cuando se va desplazando a lo largo del campo vectorial X .

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos vectoriales sobre M y sea $p \in M$. Tomando el flujo local de X en un entorno abierto de p , $V \in \mathcal{N}(p)$ la derivada de Lie de Y a lo largo de X será definida de forma análoga al caso de derivada de Lie de una función diferenciable

$$\mathcal{L}_X Y(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi(t, p)} - d\phi(t, p)Y_p}{t}. \quad (2.5)$$

Proposición 2.2.2. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos vectoriales sobre M y $p \in M$.

$$\mathcal{L}_X Y(p) = [X, Y](p)$$

Demostración. Tomando una función f diferenciable en el entorno de p dado y se define la función:

$$h(t, p) := f(\phi(t, p)) - f(p).$$

Aplicando el lema visto en la sección anterior se obtiene que existe una función $g(t, p)$ tal que:

- $f \circ \phi(t, p) = f(p) + t \cdot g(t, p)$.
- $g(0, p) = \frac{\partial (f(\phi(t, p)) - f(p))}{\partial t}(0) = X_p(f)$.

Con el fin de simplificar los cálculos se desarrollará $(d\phi(t, p)Y_p)f$:

$$(d\phi(t, p)Y_p)f = Y_p(f \circ \phi(t, p)) = Y_p f + tY_p g(t, p).$$

Desarrollando la definición de derivada de Lie de dos campos vectoriales:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X Y(f) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi(t, p)} - d\phi(t, p)Y_p}{t}(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi(t, p)}f - (Y_p f + tY_p g(t, p))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Yf(\phi(t, p)) - Y_p f}{t} - Y_p g(0, p) = X_p(Yf) - Y_p(Xf) \\ &= [X, Y](f). \end{aligned}$$

Por lo tanto se ha obtenido la igualdad. □

En general podemos definir la derivada de Lie de un campo tensorial tensorial covariante de la siguiente forma.

Definición 2.2.3. Sea (M, g) una variedad semiriemanniana y sean $X, Y_1, \dots, Y_n \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriales en M y

$\mathcal{T} : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Se define la **derivada de Lie del tensor** \mathcal{T} :

$$\mathcal{L}_X \mathcal{T} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Psi_t^*(\mathcal{T}) - \mathcal{T}) \quad (2.6)$$

donde Ψ_t es el flujo de X .

Proposición 2.2.4. Sea \mathcal{T} un campo tensorial 2-covariante sobre M y sea $p \in M$. Tomando dos campos vectoriales V y $W \in \mathfrak{X}(M)$ entonces para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ la derivada de Lie del tensor \mathcal{T} en el punto p será:

$$\mathcal{L}_X \mathcal{T}(W_p, V_p) = X_p \mathcal{T}(W_p, V_p) - \mathcal{T}([X, W]_p, V_p) - \mathcal{T}([X, V]_p, W_p). \quad (2.7)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \mathcal{T}(W_p, V_p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Psi_t^*(\mathcal{T}) - \mathcal{T})(W_p, V_p) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\Psi_t^* \mathcal{T}(W_p, V_p) - \mathcal{T}(W_p, V_p) \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sumando y restando la expresión $\mathcal{T}(W_{\psi_{t,p}}, V_{\psi_{t,p}})$ se obtiene:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi_t^* \mathcal{T}(W_p, V_p) - \mathcal{T}(W_{\psi_{t,p}}, V_{\psi_{t,p}})}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}(W_{\psi_{t,p}}, V_{\psi_{t,p}}) - \mathcal{T}(W_p, V_p)}{t}.$$

Desarrollando ambos límites por separado, se comenzará por el segundo. Para este segundo límite tomaremos la curva integral α de X definida como $\alpha(t) = \Psi_t(p)$, que cumplirá que $\alpha(0) = p$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}(W_{\psi_{t,p}}, V_{\psi_{t,p}}) - \mathcal{T}(W_p, V_p)}{t} = \left. \frac{d \mathcal{T}(V_\alpha, W_\alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \dot{\alpha}(0) \mathcal{T}(W_p, V_p).$$

Por cómo está definida α se obtiene que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}(W_{\psi_{t,p}}, V_{\psi_{t,p}}) - \mathcal{T}(W_p, V_p)}{t} = X_p \mathcal{T}(W_p, V_p).$$

Utilizando el tensor pull-back en el primer límite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi_t^* \mathcal{T}(W_p, V_p) - \mathcal{T}(W_{\psi_{t,p}}, V_{\psi_{t,p}})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}(d\Psi_t W_p, d\Psi_t V_p) - \mathcal{T}(W_{\psi_{t,p}}, V_{\psi_{t,p}})}{t}.$$

Sumando y restando el tensor $\mathcal{T}(d\Psi_t(W_p), V_{\psi_{t,p}})$ el límite se puede dividir en dos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}(d\Psi_t W_p, d\Psi_t V_p) - \mathcal{T}(W_{\psi_{t,p}}, V_{\psi_{t,p}})}{t} = \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}(d\Psi_t W_p - W_{\psi_{t,p}}, V_{\psi_{t,p}})}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}(d\Psi_t W_p, d\Psi_t V_p - V_{\psi_{t,p}})}{t}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Aprovechando la bilinealidad del tensor y identidad del flujo se obtiene que:

$$-\mathcal{T}\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{W_{\psi_{t,p}} - d\Psi_t W_p}{t}, \lim_{t \rightarrow 0} V_{\psi_{t,p}}\right) - \mathcal{T}\left(\lim_{t \rightarrow 0} d\Psi_t W_p, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\psi_{t,p}} - d\Psi_t V_p}{t}\right).$$

Utilizando la definición de la derivada de Lie de campos vectoriales se puede concluir que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi_t^* \mathcal{T}(W_p, V_p) - \mathcal{T}(W_{\psi_{t,p}}, V_{\psi_{t,p}})}{t} = -\mathcal{T}([X, W]_p, V_p) - \mathcal{T}([X, V]_p, W_p).$$

Por lo tanto sumando los dos límites se obtiene la ecuación 2.7. \square

Proposición 2.2.5. *Sea (M, g) una variedad semiriemanniana, la derivada de Lie del tensor métrico es*

$$\mathcal{L}_X g(V, W) = g(\nabla_V X, W) + g(\nabla_W X, V). \quad (2.10)$$

Demostración. Utilizando la conexión de Levi-Civita, que cumple que es compatible con la métrica y libre de torsión, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g(W_p, V_p) &= Xg(W_p, V_p) - g([X, W]_p, V_p) - g([X, V]_p, W_p) \\ &= g(\nabla_X W, V) + g(\nabla_X W, V) - g(\nabla_X W, V) + g(\nabla_W X, V) \\ &\quad - g(\nabla_X W, V) + g(\nabla_W X, V) \\ &= g(\nabla_V X, W) + g(\nabla_W X, V). \end{aligned}$$

Por lo tanto queda probado que $\mathcal{L}_X g(V, W) = g(\nabla_V X, W) + g(\nabla_W X, V)$. \square

2.3. Campos vectoriales de Killing

Usando la derivada de Lie del tensor métrico se pueden definir los campos vectoriales de Killing mediante la ecuación (2.10).

Definición 2.3.1 (Ver [3]). *Sea (M, g) una variedad semiriemanniana y sea $K \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial. Se dirá que K es un **campo vectorial de Killing** si y solo si $\mathcal{L}_K g(Y, Z) = 0$ para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

La definición de un campo vectorial de Killing en un entorno de un punto, $\mathcal{U} \in \mathcal{N}(p)$ con $p \in M$, se puede particularizar utilizando una parametrización de \mathcal{U} . Por ser M una variedad diferenciable existe una función inyectiva $x : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{U}$ tal que $x^{-1}(\mathcal{U})$ es un abierto de \mathbb{R}^n y $p \in x(V)$. Respecto de esta carta un campo vectorial, $X \in \mathfrak{X}(M)$, puede ser expresado de la siguiente forma: $X = a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ con las funciones $a_i : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposición 2.3.2. *Sea (M, g) una variedad n -dimensional y sea (U, x) una carta de M . Sea $K \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial de Killing cuya expresión en cartas locales es $K = K^k \frac{\partial}{\partial x^k}$. La expresión respecto de la carta es*

$$\left(\Gamma_{ik}^l g_{jl} + g_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma_{jk}^l g_{il} + g_{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) K^k = 0. \quad (2.11)$$

Demostración. Sea $\frac{\partial}{\partial x^i}$ y $\frac{\partial}{\partial x^j}$ dos elementos de la base del espacio tangente en particular cumplirá que $\mathcal{L}_K g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = 0$, uniendo esta ecuación y la ecuación (2.10) obtenemos que:

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} K^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} K^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = 0. \quad (2.12)$$

Si desarrollamos esta fórmula utilizando la conexión de Levi-Civita se obtiene

que:

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial K^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} + K^k \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k}\right) + g\left(\frac{\partial K^k}{\partial x^j} + K^k \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = 0$$

Utilizando la bilinealidad de la métrica y la definición de los símbolos de Christoffel.

$$\begin{aligned} 0 = & K^k \Gamma_{ik}^l g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) + \frac{\partial K^k}{\partial x^i} g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\ & + K^k \Gamma_{jk}^l g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) + \frac{\partial K^k}{\partial x^j} g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right). \end{aligned}$$

Simplificando la notación de forma que $g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = g_{ik}$.

$$K^k \Gamma_{ik}^l g_{jl} + \frac{\partial K^k}{\partial x^i} g_{jk} + K^k \Gamma_{jk}^l g_{il} + \frac{\partial K^k}{\partial x^j} g_{ik} = 0. \quad (2.13)$$

Por lo tanto se ha obtenido la expresión de la ecuación de Killing respecto de la carta (U, x) . \square

Esta fue la ecuación que Wilhem Killing presentó en 1891 en su artículo *Über die Grundlagen der Geometrie*". De dicha ecuación obtenemos que los campos vectoriales de Killing únicamente están determinados por la expresión del tensor métrico. [9]

2.3.1. Propiedades de los campos vectoriales de Killing

En esta subsección se verán algunas definiciones equivalentes para un campo vectorial de Killing.

Definición 2.3.3. Sea (M, g) una variedad semiriemannian y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial. Definimos el operador $A_X : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ como

$$Z \mapsto A_X(Z) := \nabla_Z X.$$

Proposición 2.3.4. *Sea K un campo vectorial de tipo Killing. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:*

1. $\mathcal{L}_K g = 0$.
2. $g(\nabla_Y K, Z) + g(\nabla_Z K, Y) = 0$.
3. El operador $A_K(Z)$ es métricamente antisimétrico

$$g(A_K(Y), Z) = -g(A_K(Z), Y).$$

Demostración.

$1 \Leftrightarrow 2$ Sean $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos vectoriales. Por lo tanto se tiene que $\mathcal{L}_K g(Y, Z) = 0$ por la ecuación (2.10) se obtiene la equivalencia entre

$$\mathcal{L}_K g(Y, Z) = g(\nabla_Y K, Z) + g(\nabla_Z K, Y) = 0$$

.

$2 \Leftrightarrow 3$ Partiendo de que el operador $A_K(Z) := \nabla_Z K$ es antisimétrico:

$$g(A_K(Y), Z) = -g(A_K(Z), Y) \Rightarrow g(A_K(Y), Z) + g(A_K(Z), Y) = 0.$$

Si se reescribe la ecuación respecto del operador se obtiene que:

$$g(\nabla_Y K, Z) + g(\nabla_Z K, Y) = 0.$$

Por lo tanto se ha probado la equivalencia entre $g(\nabla_Y K, Z) + g(\nabla_Z K, Y) = 0$ y que el operador A_K es antisimétrico. \square

Proposición 2.3.5. *Sea (M, g) una variedad semiriemanniana y sean $K, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tales que K un campo vectorial de Killing por lo tanto se satisface la siguiente igualdad,*

$$g(\nabla_Y K, Y) = 0. \tag{2.14}$$

La afirmación contraria no siempre es verdad, un contraejemplo se puede utilizando el espacio tiempo de Schwarzschild se puede ver en el apéndice A. Esta proposición es de utilidad a la hora de buscar campos vectoriales de Killing pero se debe de validar si el resultado obtenido pertenece a esta familia de campos vectoriales o no.

2.3.2. Isometrías y campos vectoriales de Killing

Definición 2.3.6 (Ver [5]). Sean (M, g_M) y (N, g_N) dos variedades semi-riemannianas. Un difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ se dice es una **isometría** si:

$$g_p(u, v) = g_{f(p)}(df(u), df(v)) \quad \text{Para todo } p \in M \text{ y } u, v \in T_p M. \quad (2.15)$$

Se puede ver que las isometrías de una variedad forman un grupo.

Proposición 2.3.7 (Ver [5]). Las isometrías de una variedad semiriemanniana forman el grupo de las isometrías de (M, g) que será denotado como $(\mathcal{I}(M), \circ)$.

Demostración. Veamos primero que la composición es una ley interna, es decir, que dadas dos isometrías su composición es una isometría. Sean dos isometrías $f, g \in \mathcal{I}(M)$ veamos que $f \circ g \in \mathcal{I}(M)$:

$$\begin{aligned} g_{f(g(p))}(df(dg(v)), df(dg(u))) &= g_{f(p)}(df(v), df(u)) \\ &= g_p(v, u). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por lo tanto la composición de isometrías es una isometría. Ahora veamos que cumplen los tres axiomas de los grupos:

1. Asociatividad respecto de la composición, para toda $f, g, h \in \mathcal{I}(M)$ se

cumple que:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Esto se cumple debido a que la composición de funciones es asociativa.

2. Existencia de elemento neutro, es decir, la identidad es una isometría, $id \in \mathcal{I}(M)$.

Veamos que $g_p(u, v) = g_{id(p)}(id(u), id(v))$

$$g_{id(p)}(d(id)(u), d(id)(v)) = g_p(u, v). \quad (2.17)$$

Por lo tanto $id \in \mathcal{I}(M)$.

3. Existencia de elemento inverso, es decir, para todo $f \in \mathcal{I}(M)$ existe un único $f^{-1} \in \mathcal{I}(M)$. La existencia de f^{-1} es debido a que f es biyectiva, queda demostrar que f^{-1} es un isomorfismo. Sean $u, v \in T_p M$ entonces por ser f biyectiva existe $u' = f(u)$ y $v' = f(v)$ por lo tanto $g(u', v') = g(f(u), f(v)) = g(u, v)$ por lo tanto es una isometría.

Por lo tanto queda probado que $(\mathcal{I}(M), \circ)$ forman un grupo. \square

Un objeto que es preservado por todas las isometrías tenemos se dirá que es un invariante isométrico. Existe una fuerte relación entre el grupo de isometrías y los campos vectoriales de Killing, este vínculo puede ser observado en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.8 (Ver [5]). *Diremos que $K \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial de Killing si y sólo si su flujo local está formado por isometrías locales.*

Demostración. Partamos de que el flujo $\phi(t, p)$ de K . Si cada flujo es una isometría, se tiene que $\phi^*g(v, v) = g(v, v)$. Por la definición de la derivada de Lie del tensor métrico obtenemos que:

$$\mathcal{L}_K g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi^*g - g}{t} = 0. \quad (2.18)$$

por lo tanto X es un campo vectorial de Killing.

A la inversa, si $\mathcal{L}_K g = 0$, tomando un vector tangente a un punto de la imagen del flujo, $w = d\phi_s(v)$. Por la definición de derivada de Lie del tensor métrico obtenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_K g &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(d\phi_t(w), d\phi_t(w)) - g(w, w)}{t} \\ &\text{Utilizando la aditividad de flujos, } \phi_s \phi_t = \phi_{s+t}. \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(d\phi_t(d\phi_s(v)), d\phi_t(d\phi_s(v))) - g(d\phi_s(v), d\phi_s(v))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(d\phi_{t+s}(v), d\phi_{t+s}(v)) - g(d\phi_s(v), d\phi_s(v))}{t} = 0.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Si se toma la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $s \rightarrow g(d\phi_s(v), d\phi_s(v))$, por el lema 2.1.3 tenemos la derivada de f que es nula. Se puede concluir que $g(v, v) = g(d\phi_s(v), d\phi_s(v))$, es decir, ϕ es una isometría. \square

Proposición 2.3.9 (Ver [5]). *Sea (M, g) una variedad semiriemanniana y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos vectoriales de Killing. Entonces el campo vectorial $[X, Y]$ es un campo vectorial de Killing.*

Demostración. Para ello tomemos dos campos vectoriales de Killing $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y veamos que $[X, Y]$ es un campo vectorial de Killing:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{[X, Y]} g &= \mathcal{L}_{XY - YX} g = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y g - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X g \\ &= \mathcal{L}_X 0 - \mathcal{L}_Y 0 = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $[X, Y]$ es un campo vectorial de Killing. \square

Como consecuencia de las proposiciones anteriores podemos decir que el conjunto de los campos vectoriales de Killing de una variedad forman un álgebra de Lie y será denotada por \mathfrak{K} .

Teorema 2.3.10 (Ver [5]). *Sea (M, g) una variedad semiriemanniana entonces la dimensión de \mathfrak{K} como álgebra de Lie es a lo sumo dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$.*

Demostración. Debido a que el espacio euclídeo es el espacio más simétrico posible, como se demuestra en *Transformation Groups in Differential Geometry* [6]. Se toma el espacio euclídeo \mathbb{R}^n en coordenadas cartesianas todos los símbolos de Christoffel son nulos, por lo tanto la ecuación de Killing se reduce a:

$$\left(g_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) K^k = 0.$$

Entonces la solución general para esta ecuación es:

$$K_i = a_i + b_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Con $a_i, b_{ij} \in \mathbb{R}$. Entonces si observamos la ecuación de Killing los coeficientes b_{ij} son antisimétricos, es decir, que $b_{ij} = -b_{ji}$ por lo tanto el número de combinaciones linealmente independientes de las soluciones se reduce a $\frac{n(n+1)}{2}$. \square

Las isometrías sirven para clasificar las variedades semiriemannianas. Dada una variedad (M, g) , se dice que es **homogénea** en un punto $p \in M$ si el grupo de isometrías $(\mathcal{I}(M), \circ)$ actúa transitivamente sobre p . El significado es que si dados dos punto $p, q \in M$ existe una isometría, $\phi \in \mathcal{I}(M)$ tal que $\phi(p), q$.

Existe otra propiedad ligada a las isometrías de una variedad semiriemanniana: el concepto de **isotropía**. Se dirá que una variedad (M, g) es isotropica si dados dos vectores $u, v \in T_p M$ tales que $g(u, u) = g(v, v)$ entonces existe una isometría, $\phi \in \mathcal{I}(M)$, tal que $d\phi(u) = v$. Se dirá que una variedad es isotrópica si todo punto es isotrópico.

Proposición 2.3.11. [5] *Sea (M, g) una variedad isotrópica entonces también es homogénea.*

2.4. Ejemplos de campos vectoriales de Killing

2.4.1. Esfera bidimensional

Usando las cartas dadas por las coordenadas $\{\theta, \varphi\}$ geográficas de la esfera la expresión del tensor métrico de la esfera puede ser escrito de la siguiente forma:

$$g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi \quad (2.20)$$

Entonces, los símbolos de Christoffel no nulos que tenemos son:

$$\Gamma_{\theta,\varphi}^\varphi = \cot(\theta), \quad \Gamma_{\varphi,\varphi}^\theta = -\sin(\theta)\cos(\theta).$$

Por lo tanto tenemos que las ecuaciones de Killing (2.27) será:

- Si $i = j = \theta$:

$$\nabla_\theta K_\theta + \nabla_\theta K_\theta = 0$$

Entonces, viendo los símbolos de Christoffel tenemos que $\frac{\partial}{\partial\theta} K_\theta = 0$ por lo tanto tenemos que una solución puede ser $K = \frac{\partial}{\partial\varphi}$.

- Si $i = \theta$ y $j = \varphi$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla_\theta K_\varphi + \nabla_\varphi K_\theta &= 0 \\ \frac{\partial K_\theta}{\partial\varphi} + \frac{\partial K_\varphi}{\partial\theta} - 2\frac{1}{\tan\theta} K_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

- Si $i = j = \varphi$ tenemos que:

$$\nabla_\varphi K_\varphi + \nabla_\varphi K_\varphi = 0 \rightarrow \frac{\partial K_\varphi}{\partial\varphi} = -\cos\theta \sin\theta K_\theta$$

Entonces obtenemos que las soluciones a este sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ K_2 &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ K_3 &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Puede ser observado que $\dim(\langle\{K_1, K_2, K_3\}\rangle) = 3$ que es la dimensión máxima del álgebra de Lie para una variedad de dimensión $2 \frac{2(2+1)}{2} = 3$. La representación de estos 3 campos vectoriales puede observarse en la imagen 2.1. En ella se puede apreciar como la primera figura representan las rotaciones entorno a los paralelos. Mientras que las otras dos presentan ciertas singularidades en algunos puntos del ecuador.

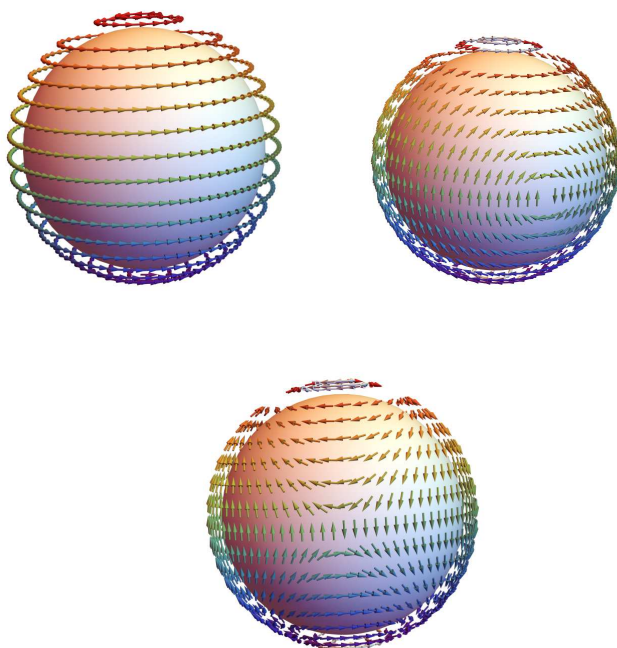


Figura 2.1: Representación de los campos de Killing en la esfera. De izquierda a derecha se corresponden con K_1 , K_2 y K_3 calculado previamente.

2.4.2. Espacio-tiempo de Minkowski

La teoría de la relatividad general, postulada por Albert Einstein en sus artículos de 1915 y 1916, presentó la idea de la teoría de la relatividad especial. Esta teoría tiene una base puramente geométrica. Estas bases se rigen por unas ecuaciones que describen el espacio, estas son las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.23)$$

En estas ecuaciones se presentan las siguientes variables:

1. $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci.
2. $g_{\mu\nu} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)$ la componente $\mu\nu$ de la métrica.
3. $T_{\mu\nu}$ tensor energía momento.

Además de la constante cosmológica, Λ , y la curvatura de Ricci, R . Existen múltiples soluciones para estas ecuaciones según cómo sea el espacio. Por ejemplo, la métrica de Minkowski sería la solución más simple para estas ecuaciones. Una de las primeras soluciones sería la presentada por Karl Schwarzschild en 1916, unos pocos meses después de la presentación de los trabajos de Einstein. Esta solución presenta una distribución del universo con una masa esférica y constante. Esta métrica nos ayuda a teorizar cómo de extremas son las condiciones de un cuerpo en las cercanías de pulsares o de un agujeros negros.

El espacio-tiempo de Minkowski es (\mathbb{R}^4, g) :

$$g = -c^2 dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz. \quad (2.24)$$

En el espacio de Minkowski podemos caracterizar los campos de Killing

de la siguiente forma

Teorema 2.4.1. *Sea (\mathbb{R}^4, g) el espacio tiempo de Minkowski la expresión del tensor métrico respecto de las coordenadas cartesianas es*

$$K = K^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Es un campo vectorial de Killing, si y solo si, K puede ser escrito como

$$\begin{pmatrix} K^0 \\ K^1 \\ K^2 \\ K^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^0 \\ C^1 \\ C^2 \\ C^3 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Siendo C^0, C^1, C^2, C^3 constantes y η cualquier matriz tal que

$$g\eta g = -\eta^T, \quad (2.25)$$

con

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que en la ecuación (2.25) implica que η es una matriz del álgebra de Lie $\mathfrak{o}(1, 3)$. En [7] pagina 235 tenemos caracterizadas las matrices de $\mathfrak{o}(1, 3)$ como

$$\mathfrak{o}(1, 3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & b \end{pmatrix} : b \in \mathfrak{o}(3), A \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad (2.26)$$

Demostración. Debido a que todos los símbolos de Christoffel son nulos se obtiene que la ecuación de Killing se reduce a lo siguiente:

$$\left(g_{kj} \frac{\partial}{\partial x^i} + g_{ki} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) K^k = 0 \quad (2.27)$$

Por lo que

$$0 = -c^2 \delta_{0j} \frac{\partial K^0}{\partial x^i} - c^2 \delta_{0i} \frac{\partial K^0}{\partial x^j} + \delta_{1j} \frac{\partial K^1}{\partial x^i} + \delta_{1i} \frac{\partial K^1}{\partial x^j} + \delta_{2j} \frac{\partial K^2}{\partial x^i} + \delta_{2i} \frac{\partial K^2}{\partial x^j} + \delta_{3j} \frac{\partial K^3}{\partial x^i} + \delta_{3i} \frac{\partial K^3}{\partial x^j}.$$

Esto da en principio tantas ecuaciones como parejas podemos formar de i - j .

Por ejemplo para $i = j = 0$ tenemos

$$\frac{\partial K^0}{\partial t} = 0.$$

Análogamente,

$$\frac{\partial K^1}{\partial x} = \frac{\partial K^2}{\partial y} = \frac{\partial K^3}{\partial z} = 0$$

Esto implica que K^i solo depende de x^j para $j \neq i$. En los términos cruzados tenemos, por ejemplo si $i = 0$ y $j = 1$

$$-c^2 \frac{\partial K^0}{\partial x} + \frac{\partial K^1}{\partial t} = 0$$

Es fácil ver que para $j = 0$ y $i = 1$ tenemos las mismas ecuaciones. Similarmente,

$$\begin{aligned} -c^2 \frac{\partial K^0}{\partial y} + \frac{\partial K^2}{\partial t} &= 0 \\ -c^2 \frac{\partial K^0}{\partial z} + \frac{\partial K^3}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

para el resto de parejas i, j podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial K^2}{\partial x} + \frac{\partial K^1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial K^3}{\partial x} + \frac{\partial K^1}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial K^3}{\partial y} + \frac{\partial K^2}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos 8 EDPs de primer orden para determinar 4 componentes de K .

Derivando cualquiera de las ecuaciones con términos cruzados obtenemos que

$$\frac{\partial^2 K^\alpha}{\partial \beta^2} = 0 \quad \text{si } \alpha \neq \beta.$$

Esto implica que K^k solo puede depender linealmente de x^j con $j \neq k$, o sea,

$$K^k = c^k + \eta_l^k x^l$$

con $\eta_l^l = 0$.

Aplicando de nuevo la ecuación (2.27) obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \left(g_{kj} \frac{\partial}{\partial x^i} + g_{ki} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \left(c^k + \eta_l^k x^l \right) = g_{kj} \eta_l^k \delta_i^l + g_{ki} \eta_l^k \delta_j^l \\ &= g_{kj} \eta_i^k + g_{ki} \eta_j^k \\ &= g_{jk} \eta_i^k + g_{ik} \eta_j^k = [g \cdot \eta]_{ji} + [g \cdot \eta]_{ij}. \end{aligned}$$

Lo que significa que

$$g\eta + (g\eta)^T = 0.$$

Por lo que

$$g\eta g = -\eta^T$$

□

2.4.3. Espacio-tiempo de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild es:

$$\begin{aligned} g &= -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt \otimes dt + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} dr \otimes dr \\ &\quad + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Las constantes que aparecen en esta métrica son:

- c , velocidad de la luz en el vacío, $3 \times 10^8 \frac{m}{s}$
- G , constante de gravitación universal, $6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$
- M , masa del objeto que perturba el espacio tiempo.

Las variables que hay en esta métrica:

- r , distancia a la que se encuentra el objeto del origen.
- θ , es la colatitud
- ϕ , es el ángulo azimutal

Los símbolos de Christoffel son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r &= \frac{c^2 r_s (r - r_s)}{2r^3}, & \Gamma_{tr}^t &= \frac{r_s}{2r(r - r_s)}, & \Gamma_{rr}^r &= -\frac{r_s}{2r(r - r_s)} \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot \theta, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -(r - r_s) \sin^2 \theta, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

La ecuación de Killing en la métrica de Schwarzschild será la siguiente:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{4}{1 - \frac{r_s}{r}} + 4 \left(-1 + \frac{r_s}{r} \right) + 4r^2 + 8r^2 \sin^2(\theta) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \phi} K^3 + \frac{\partial}{\partial r} K^3 + \frac{\partial}{\partial t} K^3 + \frac{\partial}{\partial \theta} K^3 \right) + \\
& K^3 \left(\frac{8r^2 \sin^2(\theta)}{\tan(\theta)} - 4r^2 \sin(2\theta) + 8r \sin^2(\theta) + \frac{8(-r + r_s) \sin^2(\theta)}{1 - \frac{r_s}{r}} \right) + \\
& \left(\frac{4}{1 - \frac{r_s}{r}} + 8r^2 + 4r^2 \sin^2(\theta) + 4 \left(-1 + \frac{r_s}{r} \right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \phi} K^2 + \frac{\partial}{\partial r} K^2 + \frac{\partial}{\partial t} K^2 + \frac{\partial}{\partial \theta} K^2 \right) + \\
& K^2 \left(8r + \frac{8(-r + r_s)}{1 - \frac{r_s}{r}} + \frac{8r^2 \sin^2(\theta)}{\tan(\theta)} \right) + \\
& \left(\frac{\partial}{\partial \phi} K^1 + \frac{\partial}{\partial r} K^1 + \frac{\partial}{\partial t} K^1 + \frac{\partial}{\partial \theta} K^1 \right) \left(4r^2 \sin^2(\theta) + 4r^2 + 4 \left(-1 + \frac{r_s}{r} \right) + \frac{8}{1 - \frac{r_s}{r}} \right) + \\
& K^1 \left(8r \sin^2(\theta) + 8r + \frac{4r_s \left(-1 + \frac{r_s}{r} \right)}{r(r - r_s)} - \frac{4r_s}{r \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) (r - r_s)} \right) + \\
& \left(4r^2 \sin^2(\theta) + 4r^2 + 8 \left(-1 + \frac{r_s}{r} \right) + \frac{4}{1 - \frac{r_s}{r}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \phi} K^0 + \frac{\partial}{\partial r} K^0 + \frac{\partial}{\partial t} K^0 + \frac{\partial}{\partial \theta} K^0 \right) + \\
& K^0 \left(\frac{r_s \left(-1 + \frac{r_s}{r} \right)}{r(r - r_s)} + \frac{r_s(r - r_s)}{r^3 \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)} \right) = 0
\end{aligned}$$

En esta ecuación únicamente se ven dos soluciones claras:

$$K = \frac{\partial}{\partial t} \quad y \quad K = \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Los espacios con campos de Killing de la forma $\frac{\partial}{\partial t}$ se dice que son **espacios-tiempo estacionarios**. Localmente, se pueden tomar unas coordenadas (t, x^1, \dots, x^n) tal que $K = \frac{\partial}{\partial t}$, cada $\frac{\partial}{\partial x^i}$ es espacial y los componentes de la métrica son independientes de la coordenada t . Esta clase de campos vectoriales de Killing se utilizan para clasificar las variedades Lorentzianas de curvatura seccional constante.

2.5. Campos vectoriales conformes

Definición 2.5.1. Sea (M, g) una variedad semiriemanniana y sea $\Phi : M \rightarrow M$ una función suave. Diremos que Φ es una **transformación conforme** o **conformal** si cumple que existe una función $\Lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$, a la que llamaremos **factor conforme**, que cumple que $\Phi^*g = \Lambda g$.

Esta definición es una generalización de la definición de isometría. El caso de estas últimas el factor conforme sería la función constante 1. Al igual que las isometrías están asociadas a los campos vectoriales de Killing las aplicaciones conformes tienen asociados los campos vectoriales conformes.

Definición 2.5.2. Sea (M, g) una variedad diferenciable y sea $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función positiva y además sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial. Diremos que X es un **campo vectorial de Killing conforme** si cumple la siguiente igualdad:

$$\mathcal{L}_X g = 2\lambda g.$$

Cuando λ es la función nula, X es un campo vectorial de Killing usual.

Nota 2.5.3. Estos campos vectoriales lo que representan son deformaciones continuas que pueden ser medidas mediante una función. En el caso de la función λ sea una constante no nula representaría una homotecias. Cuando λ es la función nula X es un campo vectorial de Killing usual.

Esta familia de campos vectoriales también forma un álgebra de Lie de la misma manera que lo generaban los campos vectoriales de Killing pero en este caso la dimensión estará acotada por $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. La prueba completa se puede ver en el libro *Transformation groups in differential geometry* de Kobayashi el teorema 6.1 en la página 143.

Proposición 2.5.4 (Ver [4]). Sea (M, g) una variedad semiriemanniana equipada con la conexión de Levi-Civita y sea $C \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial conformal entonces:

$$\nabla_i C_j + \nabla_j C_i = f(p)g_{ij}.$$

Teorema 2.5.5. *Sea (M, g) una variedad semiriemanniana y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $C \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial conformal para la variedad (M, g) si y solo si C es un campo vectorial conformal para la variedad conformal (M, f^2g) .*

Demostración. Sea $C \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial conformal para la variedad (M, g) . Entonces se tiene que:

$$\mathcal{L}_C g = 2\lambda g$$

Por lo tanto la derivada de Lie del tensor métrico conformal f^2g será:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C f^2g &= f^2 \mathcal{L}_C g + C(f^2)g \\ &= f^2 \lambda g + C(f^2)g = (f^2 \lambda + C(f^2))g. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Entonces se tendrá que C es un campo vectorial conformal de f^2g .

Sea $C \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial conformal para la variedad (M, f^2g) . Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C f^2g &= 2\lambda g \\ \mathcal{L}_C f^2g &= f^2 \mathcal{L}_C g + C(f^2)g \\ 2\lambda g &= f^2 \mathcal{L}_C g + C(f^2)g \\ \frac{2\lambda - C(f^2)}{f^2} g &= \mathcal{L}_C g \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que C será un campo conformal de (M, g) . □

2.5.1. Ejemplo de campos vectoriales conformes

Ejemplo 2.5.6 (Campos vectoriales conformes de la esfera \mathbb{S}^2). *Como se ha mostrado anteriormente la métrica de \mathbb{S}^2 en coordenadas geográficas:*

$$ds^2 = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi.$$

Con $\theta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$. El cálculo de los campos vectoriales conformes en la esfera es muy complejo, para ello se tomarán las coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}x &= \sin \theta \cos \varphi \\y &= \sin \theta \sin \varphi \\z &= \cos \theta.\end{aligned}$$

Donde tenemos que:

$$\begin{aligned}dx &= \cos \theta \cos \varphi d\theta - \sin \theta \sin \varphi d\varphi \\dy &= \cos \theta \sin \varphi d\theta + \sin \theta \cos \varphi d\varphi \\dz &= -\sin \theta d\theta.\end{aligned}$$

Entonces obtenemos la expresión de los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ en función de las cartas cartesianas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta} &= \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= -\cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y}, \\ \eta &= \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}$$

Se debe de cumplir la siguiente igualdad:

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial}{\partial z} = A \frac{\partial}{\partial \theta} + B \frac{\partial}{\partial \varphi} + C \eta.$$

Es decir:

$$\begin{aligned}a_1 &= A \cos \theta \cos \varphi - B \sin \theta \sin \varphi + C \sin \theta \cos \varphi \\a_2 &= A \cos \theta \sin \varphi + B \sin \theta \cos \varphi + C \sin \theta \sin \varphi \\a_3 &= -A \sin \theta + C \cos \theta\end{aligned} \tag{2.30}$$

Entonces tenemos que los campos conformales de la esfera son:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
C_2 &= \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
C_3 &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\
K_1 &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
K_2 &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
K_3 &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

La cantidad de los campos vectoriales conformes de la esfera es 6 que es el máximo número de campos vectoriales de conformales de dimensión 2. Con el código en Maple del apéndice B se puede comprobar que los campos que hemos calculado son campos vectoriales de Killing. Obtenemos que las derivadas de Lie de cada uno de los campos vectoriales es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{C_1} g &= -2 \sin \theta \cos \varphi g \\
\mathcal{L}_{C_2} g &= -2 \sin \varphi \sin \theta g \\
\mathcal{L}_{C_3} g &= 2 \cos \theta g
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Similar al caso de los campos vectoriales de Killing estos campos conformes se pueden representar en la esfera. Se puede apreciar como el campo C_3 representa flujos que se mueven a lo largo de los meridianos. Esta deformación es constante y claramente depende del ángulo θ

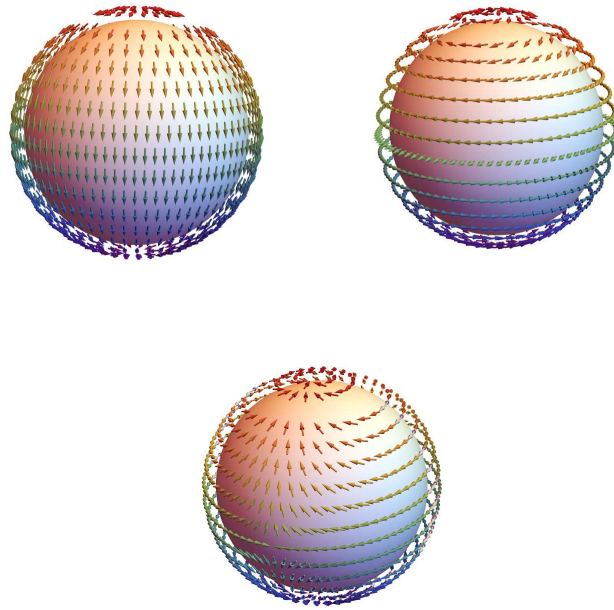


Figura 2.2: Representación de los campos vectoriales de conformales con función conformal no nula. De izquierda a derecha y de arriba a bajo representan los campos C_3 , C_2 y C_1 .

Capítulo 3

Campos vectoriales de Killing, geodésicas y tensor de curvatura.

En este capítulo se mostrarán algunos resultados de la relación de los campos vectoriales de Killing con diferentes objetos matemáticos. Comenzaremos mostrando la relación existente entre los campos vectoriales de Killing y las curvas geodésicas mediante una magnitud conservada. Para ver dicha magnitud conservada se expondrán algunos ejemplos en los espacios-tiempo previamente mostrados.

Posteriormente mostraremos la relación de los campos vectoriales de Killing y los tensores de curvatura para poder simplificar el cálculo de los campos vectoriales de Killing en algunas variedades. Se finalizará la sección mostrando una relación entre los campos vectoriales de Killing y los campos electromagnéticos en el espacio tiempo de Minkowsky.

3.1. Relación de los campos vectoriales de Killing y las curvas geodésicas

La relación de los campos vectoriales de Killing y las curvas geodésicas es debido a que el movimiento a lo largo de una curva geodésica el producto escalar del vector tangente de dicha curva por el campo vectorial de Killing se mantiene constante.

Teorema 3.1.1 (Ver [4]). *Sea (M, g) una variedad semiriemanniana, sea $K \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial de Killing y $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ una curva geodésica. Entonces existe una magnitud conservada al actuar K sobre la curva geodésica. Es decir:*

$$g(K, \dot{\gamma}(\tau)) = l \in \mathbb{R} \quad \forall \tau \in]-\varepsilon, \varepsilon[. \quad (3.1)$$

Demostración. Por ser γ una curva geodésica existe un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que para todo $\tau \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tal que $\dot{\gamma}(\tau) = X_{\gamma(\tau)}$. Vamos a ver que:

$$\frac{d}{d\tau}g(X, K) = 0.$$

Si se desarrolla la ecuación anterior se tiene que:

$$\frac{d}{d\tau}g(X, K) = \nabla_X g(X, K)$$

$$= g(\nabla_X X, K) + g(\nabla_X K, X)$$

Por ser X un campo vectorial geodésico tenemos

$$\text{que } \nabla_X X = 0:$$

$$= g(\nabla_X K, X)$$

Por ser K un campo vectorial de Killing tenemos que

$$\mathcal{L}_K g(X, X) = 0:$$

$$= 0.$$

Se puede concluir que $g(X, K)$ es constante. □

Este teorema tiene una consecuencia física muy usada en relatividad general. Una partícula con masa la cantidad conservada, l , se dice que es la componente del momento angular por unidad de masa asociada al campo vectorial K . [4]

El hecho de la existencia de una magnitud conservada implica la existencia de una simetría y por lo tanto una simplificación de la métrica. Esto se puede observar en la métrica de Schwarzschild donde la coordenada φ tiene asociada una magnitud conservada lo cual permite una simplificación de la métrica, como será mostrado en la siguiente sección.

3.1.1. Magnitudes conservadas en diferentes espacio-tiempo

Espacio-tiempo de Minkowski

Sea ahora $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^4$ una curva geodésica en el espacio de Minkowski dada por

$$s \mapsto \gamma(s) = (t(s), x(s), y(s), z(s)).$$

Aplicando el Teorema 3.1.1 tenemos que para cualquier campo de Killing K ocurre que

$$-c^2 K^0 \dot{t}(s) + K^1 \dot{x}(s) + K^2 \dot{y}(s) + K^3 \dot{z}(s)$$

tiene que ser constante a lo largo de la geodésica γ . Por el Teorema 2.4.1, tenemos esta familia de magnitudes conservadas

$$-c^2(C^0 + \eta_l^0 x^l) \dot{t}(s) + (C^1 + \eta_l^1 x^l) \dot{x}(s) + (C^2 + \eta_l^2 x^l) \dot{y}(s) + (C^3 + \eta_l^3 x^l) \dot{z}(s)$$

Que por (2.26) deducimos que

$$\begin{aligned}
C = & -c^2(C^0 + A_1x(s) + A_2y(s) + A_3z(s))\dot{t}(s) \\
& + (C^1 + A_1t(s) + b_1^2y(s) + b_1^3z(s))\dot{x}(s) \\
& + (C^2 + A_2t(s) + b_2^1x(s) + b_2^3z(s))\dot{y}(s) \\
& + (C^3 + A_3t(s) + b_3^1x(s) + b_3^2y(s))\dot{z}(s)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

nos describe la familia completa de magnitudes conservadas.

Observemos que el caso particular $A = 0$, $b = 0$ nos conduce a que cualquier combinación lineal de la forma

$$C^0\dot{t}(s) + C^1\dot{x}(s) + C^2\dot{y}(s) + C^3\dot{z}(s)$$

es constante lo que nos permite obtener las curvas geodésicas del espacio de Minkowski como las rectas

$$s \mapsto \gamma(s) = (a_0, a_1, a_2, a_3) + (b_0, b_1, b_2, b_3)s$$

Por otra parte la elección $C = 0$, $A = 0$ en (3.2), teniendo en cuenta que la matriz b es antisimétrica, nos conduce a

$$\begin{aligned}
C = & (b_1^2y(s) + b_1^3z(s))\dot{x}(s) + (b_2^1x(s) + b_2^3z(s))\dot{y}(s) \\
& + (b_3^1x(s) + b_3^2y(s))\dot{z}(s) \\
= & b_1^2(y(s)\dot{x}(s) - x(s)\dot{y}(s)) + b_1^3(z(s)\dot{x}(s) - x(s)\dot{z}(s)) \\
& + b_2^3(z(s)\dot{y}(s) - y(s)\dot{z}(s))
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Lo que implica que las cantidades

$$\left| \begin{array}{cc} x(s) & y(s) \\ \dot{x}(s) & \dot{y}(s) \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} x(s) & z(s) \\ \dot{x}(s) & \dot{z}(s) \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} y(s) & z(s) \\ \dot{y}(s) & \dot{z}(s) \end{array} \right|$$

son cantidades conservadas a lo largo de la curva geodésica. Por lo que tene-

mos la conservación del momento angular

$$L = \vec{r} \times \vec{v} = (x(s), y(s), z(s)) \times (\dot{x}(s), \dot{y}(s), \dot{z}(s))$$

Por último el caso $C = 0$, $b = 0$ en (3.2), nos conduce a

$$C = A_1(-c^2 x(s)\dot{t}(s) + t(s)\dot{x}(s)) + A_2(-c^2 y(s)\dot{t}(s) + t(s)\dot{y}(s)) \\ + A_3(-c^2 z(s)\dot{t}(s) + t(s)\dot{z}(s))$$

Que implica la conservación de las cantidades

$$-c^2 x(s)\dot{t}(s) + t(s)\dot{x}(s), \quad -c^2 y(s)\dot{t}(s) + t(s)\dot{y}(s), \quad -c^2 z(s)\dot{t}(s) + t(s)\dot{z}(s)$$

Espacio tiempo de Schwarzschild

Supongamos que tenemos una partícula que describe una trayectoria geodésica, $\gamma(\tau)$, veamos cuales son las cantidades conservadas en dicha trayectoria siguiendo la idea del teorema 3.1.1. Tomando el campo vectorial de Killing $K = \frac{\partial}{\partial \phi}$:

$$K_i \dot{\gamma}^i = K^i g_{ij} \dot{\gamma}^j = K^4 g_{4j} \dot{\gamma}^j = K^4 g_{44} \dot{\gamma}^4. \quad (3.4)$$

Observamos que la componente del momento angular asociada al campo vectorial de Killing K es $r^2 \sin(\vartheta) \dot{\phi}$. Tomando que la cantidad conservada es nula:

$$r^2 \sin(\vartheta) \dot{\phi} = 0$$

Nos indica que $\dot{\phi} = 0$, es decir, que la velocidad angular es nula, $\omega(r, \vartheta) = 0$.

Por lo tanto se puede hacer la simplificación:

$$g = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt \otimes dt + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} dr \otimes dr + r^2 \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi. \quad (3.5)$$

3.2. Relación de los campos vectoriales de Killing y los tensores curvatura

La curvatura de una variedad es una propiedad intrínseca de esta y está relacionada a su vez con diferentes propiedades, como pueden ser las curvas geodésicas o la suma de los ángulos de un triángulo geodésicos.

En esta sección se va a mostrar la relación que existe entre los campos vectoriales de Killing y los tensores de curvatura. Para ello introduciremos los conceptos de tensores de curvatura de Riemann y de Ricci para definir posteriormente la curvatura escalar o escalar de Ricci y la curvatura seccional. Además, se presentará el teorema de Killing-Hopf, que clasifica las variedades de curvatura seccional constante y que será utilizado posteriormente. Finalizaremos mostraremos las relaciones entre los campos vectoriales de Killing y los tensores de curvatura.

Definición 3.2.1 (Ver [3]). *Sea M una variedad semi-Riemanniana y sea ∇ la conexión de Levi-Civita. La curvatura, R , de la conexión ∇ es una aplicación que para cada terna de campos vectoriales $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, les asocia otro campo vectorial de la forma:*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$(X, Y, Z) \rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

*Es un campo tensorial $(1,3)$, y se le llama **Tensor Curvatura Riemann** de M .*

El tensor de curvatura de Riemann tiene n^4 componente y en relatividad general contiene mucha información redundante. Entonces se define el tensor curvatura de Ricci como la contracción del tensor de curvatura de Riemann.

Definición 3.2.2 (Ver [3]). *El **Tensor de curvatura de Ricci** es un*

tensor $(0,2)$ localmente definido como:

$$\text{Ricc}(X, Y) = dx^k \left(R \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, X \right) Y \right) \quad (3.6)$$

Localmente lo podemos escribir el tensor de la siguiente forma:

$$\text{Ric} = R_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (3.7)$$

Donde:

$$R_{ij} = \text{Ricc} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = dx^k \left(R \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = R_{kij}^k \quad (3.8)$$

En [8] se demuestra que en variedades con dimensión menor o igual que 3 el tensor curvatura de Ricci y de Riemann contienen la misma información.

El tensor de curvatura de Riemann nos permite también calcular la curvatura seccional de una variedad.

Definición 3.2.3 (Ver [3]). *Sea Π un subespacio vectorial de dimensión 2 del plano tangente a M en el punto p . Se define la **curvatura seccional de Π** en p , y se denotará por $K(\Pi)$, como:*

$$K(u, v) = - \frac{R(u, v, u, v)}{g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2} \quad (3.9)$$

Para toda base $\{u, v\}$ de Π .

Ahora enunciaremos el teorema de Killing-Hopf que clasifica las variedades Riemannianas de curvatura seccional constante entres clases, según las enunció Riemann existen tres clases que *formas* que son el espacio hiperbólico, el espacio euclídeo y la esfera. [9]

Teorema 3.2.4 (Ver [3]). *Sea M una variedad riemanniana completa y simplemente conexa con curvatura seccional constante K . Entonces es isométrico a una de las siguientes variedades:*

- Si $K = -1$ entonces es isométrico al espacio hiperbólico \mathbb{H}^n .
- Si $K = 0$ entonces es isométrico al espacio euclideo \mathbb{E}^n .
- Si $K = 1$ entonces es isométrico a la esfera \mathbb{S}^n .

3.2.1. Relación de los campos vectoriales de Killing y el tensor de curvatura

Como se ha visto la definición de de los tensores de curvatura están relacionadas con los campos vectoriales de tal forma que

Teorema 3.2.5 (Ver [10]). *Sea (M, g) una variedad semiriemanniana y sea $K = K^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial de Killing,*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(K^j \right) = R_{ilk}^j K^k$$

Demostración. Por ser K un campo vectorial de Killing se cumple que:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(K^j \right) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(K^i \right) = 0$$

También serán verdaderas las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(K^l \right) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \left(K^j \right) &= 0 \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \left(K^i \right) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(K^l \right) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la suma y resta de las ecuaciones anteriores también será nula:

$$\begin{aligned}
& \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(K^j \right) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(K^i \right) \\
& - \left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \left(K^i \right) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(K^l \right) \right] \\
& + \left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(K^l \right) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \left(K^j \right) \right] \\
& - \left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(K^j \right) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(K^i \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

Si reagrupamos los términos usando conmutadores:

$$\begin{aligned}
& \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(K^j \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(K^i \right) + [\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}] \left(K^i \right) \\
& - [\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}] \left(K^l \right) + [\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}}] \left(K^j \right) = 0
\end{aligned}$$

Si reinterpretamos los conmutadores como el tensor curvatura:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(K^j \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(K^i \right) + R_{jli}^k K^i - R_{ijl}^k K^l + R_{lij}^k K^j = 0$$

Utilizando la ecuación de Killing:

$$2\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(K^j \right) = \left(-R_{jli}^k K^i + R_{ijl}^k K^l - R_{lij}^k K^j \right)$$

$$2\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(K^j \right) = \left(R_{ijl}^k K^k + R_{ijl}^k K^k \right)$$

Utilizando las antisimetrías del tensor curvatura

$$2\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(K^j \right) = 2R_{ijl}^k K^k$$

Podemos concluir que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(K^j \right) = R_{ilk}^j K^k$

□

Si contraemos el resultado de la proposición anterior obtenemos que:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(K^l \right) = R_{il} K^l$$

Esta relación simplifica bastante el cálculo de las componentes del campo vectorial de Killing en variedades planas o que los tensores de curvatura se anulen entre sí. Por ejemplo en el espacio de Minkowski tendremos que el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\frac{\partial^2 K^k}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

Por lo tanto la solución general de esta ecuación será $K^k = c_k + \eta_{kl} x^l$, donde η_{kl} es una matriz antisimétrica.

3.3. Campos vectoriales de Killing en el espacio-tiempo de Minkowski y campo electromagnético

Por la ecuación (2.27) sabemos que K es un campo de Killing si

$$g_{kj} \frac{\partial}{\partial x^i} K^k + g_{ki} \frac{\partial}{\partial x^j} K^k = 0. \quad (3.10)$$

Como los coeficientes del tensor métrico en las coordenadas dadas para describir el espacio-tiempo de Minkowski son constantes tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (g_{kj} K^k) + \frac{\partial}{\partial x^j} (g_{ki} K^k) = 0.$$

Que puede ser re-escrito como

$$\frac{\partial}{\partial x^i} K_j + \frac{\partial}{\partial x^j} K_i = 0. \quad (3.11)$$

En relatividad especial y en electrodinámica clásica el campo eléctrico viene descrito por una 1-forma conocida como el cuadripotencial electromagnético

$$A = A_\mu dx^\mu.$$

A partir de esta 1-forma el tensor electromagnético puede ser construido como la 2-forma

$$F = dA.$$

Que en coordenadas locales viene descrito como

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

Por lo que podemos enunciar el siguiente teorema

Teorema 3.3.1. Sean A_μ y \tilde{A}_μ dos cuadripotenciales electromagnéticos del espacio de Minkowski. Entonces A y \tilde{A} generan el mismo tensor electromagnético, si y solos si,

$$A_\mu - \tilde{A}_\mu = g_{\mu\nu} K^\nu,$$

siendo K un campo vectorial de Killing.

Capítulo 4

Variedades producto *warped*

En este capítulo se presentarán las variedades *warped* o en castellano, alabeadas. Esta familia de variedades nace como el producto de dos variedades, llamadas base y fibra, y cuyo tensor métrico será una composición de los tensores métricos de la base mas el de la base multiplicado por una función, llamada función *warped*.

La importancia de esta clase de variedades se debe a que una gran parte de las soluciones para las ecuaciones de Einstein, como pueden ser la métrica de Schwarzschild, previamente usada, o los espacios tiempos de Robertson-Walker generalizados son variedades *warped*. Por lo tanto el estudio de los campos vectoriales de Killing tiene una gran importancia, debido a que, como se ha mencionado, estos campos representan las simetrías de una variedad y pueden ayudar a simplificar ciertas ecuaciones o simulaciones.

Una vez presentadas la variedades producto *warped* se estudiará cómo son las derivadas de Lie en las variedades *warped* y sucesionalmente *warped*. Estos resultados serán aplicados para el estudio de los campos vectoriales de Killing concluyendo que los campos vectoriales de Killing, pueden ser escritos como una combinación de los campos conformes de la fibra y campos vectoriales

de Killing de la base.

A partir de este resultado se presentará una idea para la búsqueda de los campos vectoriales de Killing en variedades *warped*. Esta idea será aplicada a variedades riemannianas simplemente conexas donde se calcularán todos los campos vectoriales de Killing. Esto se ejemplificará en la esfera, el plano euclidiano y el espacio hiperbólico. Se finalizará dando los campos vectoriales de Killing en el espacio-tiempo de Schwarzschild utilizando la idea previamente mencionada.

Definición 4.0.1 (Ver [7]). Sean (B, g_B) y (F, g_F) dos variedades semi-riemannianas y sea $f \in \mathcal{C}^\infty(B)$ definida positiva. El **producto warped** $\bar{M} = B \times F$ es la variedad producto dotada del siguiente tensor métrico:

$$\bar{g} = \pi_B^*(g_B) + (f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F).$$

Donde las proyecciones π_B y π_F en $B \times F$ van a B y a F respectivamente. A la variedad (B, g_B) se le denotará como base y a la variedad (F, g_F) como fibrado, y a la función f se la denotará como función warped.

Como convenio para todo $v \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ las proyección serán denotadas por $\pi_F(v) = v_F \in \mathfrak{X}(F)$ y $\pi_B(v) = v_B \in \mathfrak{X}(B)$.

Definición 4.0.2 (Ver [7]). Una **variedad lorentziana** es una variedad semi-riemannianas que cumple que la signatura del tensor métrico es $n - 1$, donde n es la dimensión de la variedad.

Proposición 4.0.3 (Ver [7]). Sean (B, g_B) una variedad riemanniana y (I, g_I) una variedad semi-riemannianas y $f \in \mathcal{C}^\infty(B)$ la función warped. El producto warped $\bar{M} = B \times I$ con $\bar{g} = \pi_B^*(g_B) + (f \circ \pi_B)^2 \pi_I^*(g_I)$ es una métrica lorentziana.

Demostración. Se va a demostrar que \bar{g} es un tensor métrico lorentziano. Con el fin de probar la afirmación es tomado un punto del espacio producto,

$(p, q) \in B \times F$ y dos vectores del espacio tangente $u, v \in T_{(p,q)}I \times B$ en dicho punto, entonces la expresión de la métrica con dichos parámetros es:

$$\bar{g}(u, v) = g_B(d\pi_B(u), d\pi_B(v)) + f(q)g_I(d\pi_I(u), d\pi_I(v)).$$

- Claramente es un tensor simétrico ya que es la suma de dos tensores simétricos.
- Para demostrar que es no degenerada, supongamos que $\bar{g}(u, v) = 0$ para todo $u \in T_{(p,q)}I \times M$. En particular se tiene que para todo $w \in T_{(p,q)}0 \times M$ se tiene que: $g(d\pi_M v, d\pi_M w) = 0$ como $d\pi_I(w) = 0$. Pero como $d\pi_I(w)$ llena todo $T_p M$ por lo tanto tenemos que $d\pi_I(v) = 0$. Se haría de forma similar para ver que $d\pi_M(v) = 0$, por ende, $v = 0$.
- Para ver que la signatura de \bar{g} es $n - 1$, se tiene que si se toma una base ortonormal de $T_p I$ y de $T_q B$ combinadas generan una base ortonormal de $T_{(p,q)}I \times M$. Por lo tanto el índice de \bar{M} será $Ind(M) + Ind(I)$ es decir $n-1$.

Por lo tanto se ha probado que \bar{g} es una métrica lorentziana y por ende (\bar{M}, \bar{g}) es un espacio lorentziano. \square

Los espacios-tiempos se pueden clasificar de múltiples formas según el comportamiento con los campos vectoriales de Killing temporales. A aquellos espacios-tiempos que admiten campos vectoriales de Killing temporales se les llama **espacios-tiempos estacionarios**.

Definición 4.0.4. *Sea (M, g) un espacio tiempo y sea $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial de M . Si se cumple que $\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} g = 0$ entonces se dirá que es un **espacio tiempo estacionario**.*

Además, cuando el campo vectorial de Killing temporal cumple que para todo par de elementos de la distribución ortogonal de K , $D_K := \{X \in$

$\mathfrak{X}(M) : \{g(X, K) = 0\}$, son envolventes, es decir, que dados $X, Y \in D_K$ entonces $[X, Y] \in D_K$, se dice que el espacio-tiempo es estático.

Para comenzar a hablar de los espacios-tiempos productos *warped* vamos a introducir la noción más básica en dicha clase de espacios-tiempo. Un **espacio-tiempo *standard* estático** es un espacio tiempo producto de la forma: $\bar{M} = I \times M$ con una variedad riemanniana base, (M, g_M) , un fibrado, $(I, g_I = -dt^2)$ y una función *warped*, $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, definida positiva. De esta forma se puede definir el la métrica lorentziana sobre \bar{M} de la siguiente forma:

$$\bar{g} := \pi_M^* g_M + (h \circ \pi_M)^2 \pi_I^* g_I.$$

Donde las proyecciones π_I y π_M en $I \times M$ van a I y a M respectivamente. Si se añadieran términos no dependientes del tiempo al último sumando el espacio-tiempo obtenido se dirá que es estacionario. El espacio tiempo estacionario más simple que hay es el generado por el producto Lorentziano de la recta real negativa, $(\mathbb{R}, -dt^2)$, y una variedad semiriemanniana, (M, g) . Existen otros ejemplos clásicos como veremos que ocurre en el espacio tiempo de Minkowski o el de Schwartzchild.

Ejemplo 4.0.5 (\mathbb{S}^2 como producto *warped*). *El tensor métrico de la esfera \mathbb{S}^2 en coordenadas esféricas se puede expresar como el producto warped $([0, \pi[, d\theta \otimes d\theta) \times_{\sin \theta} ([0, 2\pi[, d\varphi \otimes d\varphi)$. Por lo tanto la expresión de la métrica será:*

$$g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi$$

Ejemplo 4.0.6 ($\mathbb{R}^3 - 0$ como producto *warped*). *El tensor métrico euclídeo del espacio $\mathbb{R}^3 - 0$ en coordenadas esféricas se expresa de la siguiente forma:*

$$g = dr \otimes dr + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi).$$

Claramente se puede ver que $\mathbb{R}^3 - 0$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$ mediante la aplicación $(t, p) \leftrightarrow tp$. De esta forma el espacio $\mathbb{R}^3 - 0$ con la métrica previamente mencionada se puede ver como el producto de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$ con la función warped r donde la base será \mathbb{R}^+ y el fibrado será la esfera con la métrica

usual.

Existe una generalización de los productos *warped*, son las variedades sucesionalmente warped. Esta clase de variedades *warped* cumplen que cuya base o fibra o bien ambos pueden ser escritos como productos *warped*. La importancia de esta clase de espacios radica en que muchas de la soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein pueden expresarse como una variedad sucesionalmente *warped*. Un ejemplo de esto es la solución de Schwarzschild que puede ser escrita de dicha forma.

Definición 4.0.7. Sean (M_1, g_1) , (M_2, g_2) y (M_3, g_3) tres variedades semi-riemannianas y sean $f_1 : M_1 \rightarrow]0, \infty[$ y $f_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow]0, \infty[$. Definimos la **variedad sucesionalmente warped** de estas tres variedades como:

$$\begin{aligned}\bar{M} &= (M_1 \times_{f_1} M_2) \times_{f_2} M_3 \\ \bar{g} &= (g_1 \oplus f_1^2 g_2) \oplus f_2^2 g_3\end{aligned}$$

Por consecuente los resultados vistos en para variedades producto *wapred* tenemos que se pueden generalizar a productos sucesionalmente *warped*.

Ejemplo 4.0.8. La métrica de Schwarzschild vista en el ejemplo (2.28) puede ser escrita como espacios sucesionalmente warped. Observando la métrica de Schwarzschild se puede ver que es de la forma:

$$g = (\mathbb{R}^2, \bar{g}) \times_{r^2} (\mathbb{S}^2, d\Omega).$$

Donde $d\Omega$ es la métrica usual de la esfera. Por lo tanto tenemos que ver cómo escribir la base, (\mathbb{R}^2, \bar{g}) como producto warped. Podemos tomar la base como la métrica conformal $(\mathbb{R}, \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}} dr \otimes dr)$ y la fibra $(\mathbb{R}, dt \otimes dt)$ con la función warped $c\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}$ por lo tanto obtenemos que:

$$(\mathbb{R}^2, \bar{g}) = (\mathbb{R}, \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}} dr \otimes dr) \times_{c\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}} (\mathbb{R}, dt \otimes dt).$$

Finalmente la expresión de la métrica de Schwarzschild como un producto

sucesionalmente warped es la siguiente:

$$g = \left(\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr \otimes dr - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt \otimes dt \right) + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi).$$

4.1. Derivadas de Lie en espacios producto *warped*

Todo campo vectorial en el espacio tiempo *warped*, $X \in \mathfrak{X}(\bar{M})$, puede ser escrito de la siguiente forma $X = X_B + X_F$ donde $X_B = (\pi_B(X), 0)$ y $X_F = (0, \pi_F(X))$.

Teorema 4.1.1 (Ver [2]). *Sea $X \in \mathfrak{X}(\bar{M})$. La derivada de Lie del tensor métrico \bar{g} puede ser escrita de la siguiente forma:*

$$\mathcal{L}_X \bar{g} = \mathcal{L}_{X_B} (\pi_B^*(g_B)) + X_B (f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F) + (f \circ \pi_B)^2 \mathcal{L}_{X_F} (\pi_F^*(g_F))$$

Demostración.

$$\mathcal{L}_X \bar{g} = \mathcal{L}_{X_B + X_F} (\pi_B^*(g_B) + (f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F)).$$

Aprovechando la linealidad de la derivada de Lie:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \bar{g} = & \mathcal{L}_{X_B} (\pi_B^*(g_B)) + \mathcal{L}_{X_B} ((f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F)) \\ & + \mathcal{L}_{X_F} (\pi_B^*(g_B)) + \mathcal{L}_{X_F} ((f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F)). \end{aligned}$$

Debido a que $\mathcal{L}_{X_B} (\pi_F^*(g_F)) = \mathcal{L}_{X_F} (\pi_B^*(g_B)) = X_F(f) = 0$ se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}_X \bar{g} = \mathcal{L}_{X_B} (\pi_B^*(g_B)) + X_B (f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F) + (f \circ \pi_B)^2 \mathcal{L}_{X_F} (\pi_F^*(g_F))$$

□

Corolario 4.1.2 (Ver [2]). *Si nos restringimos a un campo vectorial en \bar{M} , es decir, $X \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ puede descomponerse como la suma de sus proyecciones, $X = X_B + X_F$. Entonces se obtienen las siguientes expresiones de las derivadas de Lie en la fibra y en la base:*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_B}g_B(\cdot, \cdot) &= \mathcal{L}_{X_B}^B g_B(\cdot, \cdot) + g_B(\cdot, [d\pi_F(\cdot), X_B]) + g_B([d\pi_F(\cdot), X_B], \cdot) \\ \mathcal{L}_{X_F}g_F(\cdot, \cdot) &= \mathcal{L}_{X_F}^F g_F(\cdot, \cdot) + g_F(\cdot, [d\pi_B(\cdot), X_F]) + g_F([d\pi_B(\cdot), X_F], \cdot)\end{aligned}$$

Corolario 4.1.3. *Sea (\bar{M}, \bar{g}) una variedad sucesionalmente warped de la forma definida anteriormente, entonces la derivada de Lie de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ puede ser escrito como $X = X_1 + X_2 + X_3$ donde cada $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}(X)$ entonces la derivada de Lie será:*

$$\mathcal{L}_X \bar{g} = \mathcal{L}_{X_1} g_1 + f_1^2 \mathcal{L}_{X_2} g_2 + f_2^2 \mathcal{L}_{X_3} g_3 + 2X_1(f_1)g_2 + 2(X_2 + X_1)(f_2)g_3$$

Esto puede ser demostrado de forma análoga con la realizada en el caso de un espacio resultante del producto warped de mas variedades.

Lema 4.1.4 (Ver [2]). *Sea (\bar{M}, \bar{g}) un espacio producto warped y sea $K \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ un campo vectorial de Killing entonces cumplirá que:*

- *Sea $K_B = \pi_B(K)$ entonces se cumplirá que $\mathcal{L}_{K_B} g_B = 0$.*
- *Sea $K_F = \pi_F(K)$ entonces se cumplirá que $\mathcal{L}_{K_F} g_F = f g_F$.*

Demostración.

Para demostrar que si K es un campo vectorial de Killing en \bar{M} entonces $K_B = \pi_B(K)$ es un campo vectorial de Killing en la base. Para ello tomamos dos vectores $u, v \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ tales que $\pi_F(u) = \pi_F(v) = 0$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_K \bar{g}(u, v) &= \mathcal{L}_{K_B}(\pi_B^*(g_B))(\pi_B(u), \pi_B(v)) + K_F(f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F)(0, 0) \\ &\quad + (f \circ \pi_B)^2 \mathcal{L}_{K_F}(\pi_F^*(g_F))(0, 0) = 0.\end{aligned}$$

Se simplifica en:

$$\mathcal{L}_K \bar{g}(u, v) = \mathcal{L}_{K_B}(\pi_B^*(g_B))(\pi_B(u), \pi_B(v)) = 0$$

Por lo tanto ocurre que $\mathcal{L}_{K_B} g_B = 0$ para todo par de vectores y por ende será un campo vectorial de Killing en la base.

Ahora veamos que K cumple que es un campo vectorial conforme en la fibra. Tomando dos vectores $u, v \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ tales que $u_B = v_B = 0$ por lo tanto la derivada de Lie del tensor métrico en estos dos vectores será:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K \bar{g}(u, v) &= \mathcal{L}_{K_B}(\pi_B^*(g_B))(0, 0) + K_F(f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F)(u_F, u_F) \\ &\quad + (f \circ \pi_B)^2 \mathcal{L}_{K_F}(\pi_F^*(g_F))(u_F, 0) = 0. \end{aligned}$$

Debido a que ambos vectores yacen únicamente en la fibra tenemos que:

$$K_F(f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F)(u_F, u_F) + (f \circ \pi_B)^2 \mathcal{L}_{K_F}(\pi_F^*(g_F))(u_F, 0) = 0.$$

Es decir,

$$\mathcal{L}_{K_F}(\pi_F^*(g_F))(u_F, v_F) = -\frac{K_F(f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F)(u_F, u_F)}{(f \circ \pi_B)^2}.$$

Por lo tanto tenemos que K_F es un campo conformal en la fibra. \square

Proposición 4.1.5. *Sea (\bar{M}, \bar{g}) una variedad producto warped construida a partir de (B, g_B) y (F, g_F) y una función warped $f \in \mathcal{C}(B)$. Sea $K \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial de Killing que yace en la base entonces se tiene que $X_B(f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F) = 0$*

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K \bar{g} &= \mathcal{L}_{X_B}(\pi_B^*(g_B)) + X_B(f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F) + (f \circ \pi_B)^2 \mathcal{L}_0(\pi_F^*(g_F)) \\ &= X_B(f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F) \end{aligned}$$

Por ser K un campo vectorial de Killing se tiene que $\mathcal{L}_K \bar{g} = 0$ entonces se puede concluir que $X_B(f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F) = 0$. \square

De esta forma se puede reescribir la derivada de Lie de cualquier campo vectorial de Killing en la variedad \bar{M} respecto de la base escogida de la siguiente forma:

$$L_K g = (da^i(\cdot) \otimes g_B(K_i, \cdot) + g_B(K_i, \cdot) \otimes da^i(\cdot)) + K_B(f^2)g_F \\ da^{\bar{i}}(\cdot) \otimes g_F(C_{\bar{i}}, \cdot) + g_F(C_{\bar{i}}, \cdot) \otimes da^{\bar{i}}(\cdot) + 2f^2 a^{\bar{i}} \sigma^{\bar{i}} g_F$$

4.2. Espacios-tiempos de Robertson-Walker generalizados

Definición 4.2.1. Sea (\bar{M}, \bar{g}) una variedad lorentziana $(n+1)$ -dimensional y sea $K \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ un campo vectorial temporal. Se dirá que K es un **campo vectorial temporal conformal** si existe una función $\rho \in C^\infty(\bar{M})$ tal que $\mathcal{L}_K \bar{g} = 2\rho \bar{g}$.

A la variedad (\bar{M}, \bar{g}) será clasificada como **espacio-tiempo estacionario conformal**, será denotará como espacios-tiempos CS, debido a que admite campos vectoriales conformales temporales.

El concepto de *espacio-tiempo CS* viene motivado de la generalización de los campos vectoriales de Killing. Si \bar{g} admite un campo vectorial temporal conformal, K , entonces K es un campo vectorial de Killing para la nueva métrica lorentziana relacionada puntualmente con \bar{g} , de la siguiente forma $\frac{-\bar{g}}{\bar{g}(K,K)}$.

Una subclase de los espacios-tiempos CS son la familia de los **espacios-tiempos generalizados de Robertson-Walker**, se suele denotar por *espacios-tiempos GRW*. Los espacios-tiempos GRW tienen la siguiente forma: $\bar{M} = I \times M$ con una métrica lorentziana:

$$\bar{g} = -\pi_I^*(dt^2) + (f \circ \pi_I)^2 \cdot \pi_M^* g \\ \bar{g} = -dt^2 + f^2 \cdot g. \tag{4.1}$$

donde (M, g) es una variedad riemanniana. Por lo tanto (\bar{M}, \bar{g}) será un producto *warped* con base $(\mathbb{R}, -dt^2)$ y fibrado (M, g) , y una función *warped*, $f \in C^\infty(M)$.

4.3. Idea para el cálculo de campos vectoriales de Killing en variedades producto *warped*

El cálculo de los campos vectoriales de Killing en variedades producto *warped* se puede simplificar, ya que todo campo vectorial de Killing de dicha variedad puede ser escrito como combinación de $\{K^i\}_{i=1}^n$ campos vectoriales de Killing de la base y $\{C^{\bar{i}}\}_{\bar{i}=n}^{m+n}$ campos vectoriales conformes de la fibra de la siguiente forma:

$$K = a^i K_i + a^{\bar{i}} C_{\bar{i}}.$$

con $a^i : F \rightarrow \mathbb{R}$ y $a^{\bar{i}} : B \rightarrow \mathbb{R}$ funciones dependientes de las coordenadas en la fibra y en la base respectivamente. Por ser K un campo vectorial de Killing sabemos que:

$$\mathcal{L}_{a^i K_i + a^{\bar{i}} C_{\bar{i}}} \bar{g} = 0.$$

Proposición 4.3.1 (Ver [2]). Sean (B, g_B) y (F, g_F) la base y la fibra de una variedad producto *warped* (\bar{M}, \bar{g}) y sean $A \in \mathfrak{X}(B)$ y $B \in \mathfrak{X}(F)$ dos campos vectoriales y \bar{A} y \bar{B} los campos vectoriales en la variedad *warped* se tiene que:

- \bar{A} es un campo vectorial de Killing en (\bar{M}, \bar{g}) si y solo si es un campo vectorial de Killing en la base y cumple que $A(f) = 0$.
- \bar{B} es un campo vectorial de Killing en (\bar{M}, \bar{g}) si y solo si es un campo vectorial de Killing en la fibra.

Demostración. Sea A un campo vectorial de Killing en la base que satisface

que $A(f^2)g_F = 0$ por lo tanto tomando su extensión, \overline{A} , en la variedad producto *warped* se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\overline{A}}g &= \mathcal{L}_A g_B + A(f^2)g_F + \mathcal{L}_0 g_F \\ &= \mathcal{L}_A g_B + A(f^2)g_F = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto es un campo vectorial de Killing de la base.

Sea B un campo vectorial de Killing en la fibra tomando su extensión, \overline{B} , en la variedad producto *warped* se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\overline{B}}g &= \mathcal{L}_0 g_B + 0(f^2)g_F + \mathcal{L}_B g_F \\ &= \mathcal{L}_B g_F = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto es un campo vectorial de Killing de la fibra. \square

Gracias a esta proposición se pueden buscar los campos vectoriales de Killing en el producto *warped* en la fibra y en la base. Un ejemplo de esto es el cálculo de los campos vectoriales de Killing en el espacio-tiempo de Schwarzschild donde, utilizando las coordenadas cartesianas isotrópicas, la búsqueda de los campos vectoriales de Killing es únicamente buscar los campos vectoriales de Killing de la fibra.

Una forma de buscar los campos vectoriales de Killing en variedades producto *warped* de la forma $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2, g)$ con tensor métrico de la forma $g = dr \otimes dr + f^2(r)d\Omega$ se genera una variedad riemanniana de dimensión 3. Esta variedad satisfecerá las hipótesis del teorema de Killing-Hopf y se tendrá que son espacios máximamente simétricos por lo tanto tendrán 6 campos vectoriales de Killing.

La búsqueda de los campos vectoriales de Killing se puede realizar utilizando la proposición 4.3.1. Por lo tanto se tendrán los campos vectoriales de la fibra y además se tendrán otros campos vectoriales de Killing que serán combinación de conformes de la fibra, $C \in \mathfrak{X}(F)$ cuya función conforme es σ ,

y de Killing de la base, $X \in \mathfrak{X}(B)$, que viene dada por la siguiente ecuación

$$K = -\sigma X + \frac{df(r)}{f} C \quad (4.2)$$

La demostración de este enunciado se ha relalizado utilizando el software matemático *Maple* y puede consultar en la siguiente dirección <https://github.com/FernanGI/TFM>

El cálculo de los campos vectoriales de Killing en estas variedades se muestra en la siguiente subsección. Con este cálculo se obtienen los 6 campos vectoriales de Killing para todas las variedades riemannianas simplemente conexas de curvatura seccional constante 3 dimensionales. Esto se puede generalizar para cualquier variedad riemannianas simplemente conexas de curvatura seccional constante únicamente hay que calcular los campos vectoriales de Killing de la esfera como se ha mostrado anteriormente.

Un problema abierto es la búsqueda de una fórmula como la ecuación (4.2) para los campos vectoriales de Killing en otras variedades semiriemannianas producto *warped*.

4.3.1. Cálculo de los campos vectoriales de Killing en variedades producto warped.

Espacio euclídeo \mathbb{R}^3

La métrica del espacio euclídeo de \mathbb{R}^3 en coordenadas polares es:

$$g = dr \otimes dr + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi)$$

Que es el producto warped de la variedad base $(\mathbb{R}, dr \otimes dr)$ por la esfera $(\mathbb{R}^2, d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi)$ con la función warped $f(r) = r$.

Por lo tanto para el cálculo de los campos vectoriales de Killing necesitamos los campos de Killing de la base, que será $W = \frac{\partial}{\partial r}$ y los campos conformes de la fibra:

$$C_1 = \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{con función conforme } \sigma_1 = -\sin \theta \cos \varphi$$

$$C_2 = \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{con función conforme } \sigma_2 = -\sin \theta \sin \varphi$$

$$C_3 = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{con función conforme } \sigma_3 = \cos \theta$$

$$K_1 = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$K_2 = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$K_3 = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Entonces, todo campo vectorial de Killing de \mathbb{R}^3 puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K = & \lambda_1 \frac{\partial}{\partial r} + \lambda_{\bar{1}} \left(\cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ & + \lambda_{\bar{2}} \left(\cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \lambda_{\bar{3}} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ & + \lambda_{\bar{4}} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \lambda_{\bar{5}} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ & + \lambda_{\bar{6}} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Con $\lambda_{\bar{1}}, \lambda_{\bar{2}}, \lambda_{\bar{3}}, \lambda_{\bar{4}}, \lambda_{\bar{5}}, \lambda_{\bar{6}} \in \mathcal{C}(r)$ y $\lambda_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Algunos ejemplos de los campos vectoriales de Killing en el espacio \mathbb{R}^3 son:

- $\lambda_{\bar{4}} = 1$ entonces $K = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ tenemos que es un campo vectorial de Killing ya que es un campo vectorial de Killing de la fibra. Lo mismo ocurriría con K_2 y K_3 .
- Si $\lambda_1 = \cos \theta$ y $\lambda_{\bar{3}} = -\frac{1}{r}$ tenemos el campo vectorial $K = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} -$

$\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$. Si se realiza la derivada de Lie de K se tiene que

$$\mathcal{L}_K g = \mathcal{L}_{\cos \theta \frac{\partial}{\partial r}}(dr \otimes dr) - \mathcal{L}_{\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}} d\Omega = 0$$

- Si $\lambda_1 = \cos \varphi \sin \theta$ y $\lambda_{\bar{1}} = \frac{1}{r}$ se tiene que el campo vectorial $K = \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \partial \varphi \right)$.
- Si $\lambda_1 = \sin \theta \sin \varphi$ y $\lambda_{\bar{2}} = \frac{1}{r}$ se tiene el campo vectorial

$$K = \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

Por lo tanto los 6 campos vectoriales de Killing del espacio euclídeo 3-dimensional serán:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ K_2 &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ K_3 &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ K_4 &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ K_5 &= \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \partial \varphi \right) \\ K_6 &= \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \end{aligned}$$

Espacio hiperbólico \mathbb{H}^3

El espacio n - dimensional viene dado con el tensor métrico

$$g = dr \otimes dr + \sinh^2 r^2 ((d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi))$$

Esta variedad puede ser expresada como el producto *warped* de la variedad base $(\mathbb{R}, dr \otimes dr)$ por la fibra que será la esfera dos-dimensional con la función *warped* $f(x_n) = \sinh x_n$. En esta variedad se tendrán que los campos vectoriales de Killing serán de la forma:

$$\begin{aligned} K = & \lambda_1 \frac{\partial}{\partial r} + \lambda_{\bar{1}} \left(\cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ & + \lambda_{\bar{2}} \left(\cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \lambda_{\bar{3}} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ & + \lambda_{\bar{4}} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \lambda_{\bar{5}} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ & + \lambda_{\bar{6}} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Con $\lambda_{\bar{1}}, \lambda_{\bar{2}}, \lambda_{\bar{3}}, \lambda_{\bar{4}}, \lambda_{\bar{5}}, \lambda_{\bar{6}} \in \mathcal{C}(r)$ y $\lambda_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$. Por lo tanto los campos vectoriales de Killing serán los siguientes:

- $K = \frac{\partial}{\partial \varphi}$
- $K = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$
- $K = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$
- $K = -\sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos r}{\sinh r} \left(\cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$
- $K = -\sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos r}{\sinh r} \left(\cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$
- $K = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos r}{\sinh r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$

Esfera \mathbb{S}^3

El espacio n -dimensional viene dado con el tensor métrico

$$g = dr \otimes dr + \sin^2 r (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi)$$

Esta variedad puede ser expresada como el producto *warped* de la variedad base $(\mathbb{R}, dr \otimes dr)$ por la fibra que será la esfera dos-dimensional con la función *warped* $f(x_n) = \sin x_n$. En esta variedad se tendrán que los campos vectoriales de Killing serán de la forma:

$$\begin{aligned} K = & \lambda_1 \frac{\partial}{\partial r} + \lambda_{\bar{1}} \left(\cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ & + \lambda_{\bar{2}} \left(\cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \lambda_{\bar{3}} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ & + \lambda_{\bar{4}} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \lambda_{\bar{5}} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ & + \lambda_{\bar{6}} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Con $\lambda_{\bar{1}}, \lambda_{\bar{2}}, \lambda_{\bar{3}}, \lambda_{\bar{4}}, \lambda_{\bar{5}}, \lambda_{\bar{6}} \in \mathcal{C}(r)$ y $\lambda_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Por lo tanto los campos vectoriales de Killing serán los siguientes:

- $K = \frac{\partial}{\partial \varphi}$
- $K = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$
- $K = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$
- $K = -\sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos r}{\sin r} \left(\cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$
- $K = -\sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos r}{\sin r} \left(\cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$
- $K = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos r}{\sin r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$

Espacio-tiempo de Schwarzschild

Para expresar el espacio-tiempo de Schwarzschild utilizaremos las coordenadas cartesianas isotrópicas calculadas por H. A. Buchdahl en su artículo

Isotropic coordinates and Schwarzschild metric[1]. La expresión del tensor métrico en dichas coordenadas es la siguiente

$$g = -c^2 \left(\frac{1 - \frac{r_s}{\rho}}{1 + \frac{r_s}{\rho}} \right)^2 dt \otimes dt + \left(1 + \frac{r_s}{\rho} \right)^4 (dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz)$$

Donde $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ y $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. En estas coordenadas se observa claramente cómo el espacio-tiempo de Schwarzschild es el producto de una variedad conformal de \mathbb{R}^3 con un factor $\left(1 + \frac{r_s}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)^4$ multiplicado por $(\mathbb{R}, dt \otimes dt)$ con una función *warped*

$$f(x, y, z) = \frac{1 - \frac{r_s}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{1 + \frac{r_s}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}$$

.

Por lo tanto se tienen que calcular los campos de Killing de $(\mathbb{R}^3, \left(1 + \frac{r_s}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)^4 (dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz))$. Debido al teorema 2.5.5 se tiene que todo campo vectorial conforme de $(\mathbb{R}, dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz)$ será también conforme para la variedad conforme. Entonces los campos vectoriales de Killing para la variedad conformal serán:

$$\begin{aligned} K_1 &= y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \\ K_2 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \\ K_3 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Debido a que se ha roto la simetría de los desplazamientos al multiplicar por $1 + \frac{r_s}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, los campos conformales de $(\mathbb{R}, dt \otimes dt)$ serán $t \frac{\partial}{\partial t}$ y $\frac{\partial}{\partial t}$. Por lo tanto todo vector de Killing del espacio de Schwarzschild puede ser escrito

como:

$$\begin{aligned}
K = & \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{\bar{1}} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
& + \lambda_{\bar{2}} \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \lambda_{\bar{3}} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Con $\lambda_1, \lambda_{\bar{1}}, \lambda_{\bar{2}}, \lambda_{\bar{3}} \in \mathcal{C}(M)$. Por ser un espacio tiempo estático se tiene que el campo vectorial generado por $\lambda_1 = 1$ y el resto de elementos nulos el campo resultante $K = \frac{\partial}{\partial t}$ será un campo vectorial de Killing. Debido a que todos los campos vectorial de Killing de la base cumplen que $K_i(f) = 0$ se tiene por la proposición 4.3.1 que son campos vectoriales de Killing. Entonces los cuatro campos vectoriales de Killing en el espacio de Schwarzschild son:

$$\begin{aligned}
K_0 &= \frac{\partial}{\partial t} \\
K_1 &= y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \\
K_2 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \\
K_3 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Conclusiones

Los campos vectoriales de Killing en el estudio una variedad diferenciable son de suma importancia debido a que representan las simetrías de una variedad. Además, tienen relación con las curvas geodésicas y los tensores de curvatura, como se ha visto a lo largo del trabajo.

Un gran problema a la hora de buscar los campos vectoriales de Killing es la resolución de la ecuación de Killing. Por ello es muy importante seleccionar bien las cartas si se quiere resolver dicha ecuación. Aunque, gracias a la relación previamente mencionada con el tensor de curvatura de Ricci y el sistema de ecuaciones en derivadas parciales visto en la sección 3.2, se observa que la importancia de estas es relativa porque los tensores no varían con el cambio de cartas.

Gracias a la expresión de variedades complejas como producto *warped*, como puede ser el espacio tiempo de Schwarzschild, el espacio de búsqueda de los campos vectoriales de Killing se ve reducido. Además, la idea presentada en la última sección del trabajo la búsqueda de los campos vectoriales de Killing se ve reducida a buscar campos vectoriales de Killing tanto de la base como de la fibra que satisfagan una serie de propiedades y combinaciones de

estos.

En la última sección se han presentado todos los campos de los campos vectoriales de Killing en las variedades riemannianas producto *warped* simplemente conexas de curvatura seccional constante. Estos son los campos vectoriales de Killing de la fibra y una combinación de los campos vectoriales conformes de la base y killing de la fibra, como se puede ver en la ecuación (4.2).

A partir de esta idea se plantean dos cuestiones. La primera es la búsqueda de una proposición sobre los campos vectoriales conformes en variedades producto *warped* similar a la enunciada en la sección 4.3. La segunda, es la búsqueda de una caracterización más general para los campos vectoriales de Killing en variedades semiriemannianas como la dada en la ecuación (4.2).

Apéndice A

Ejemplo para la ecuación (2.14)

Proposición A.0.1. *Existen campos vectoriales que no son de Killing, $X \in \mathfrak{X}(M)$ que satisfacen la siguiente ecuación:*

$$g(X, \nabla_Y X) = 0 \tag{A.1}$$

Demostración. Si tomamos como variedad semiriemanniana el espacio-tiempo de Schwarzschild y como campos vectoriales

$$X = \frac{\partial}{\partial \theta} \quad e \quad Y = \frac{\partial}{\partial r}$$

Veamos primero que no cumple la ecuación de Killing:

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial \theta}} g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 2 \cdot g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial r}\right)$$

obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \frac{\partial}{\partial r}\right) &= g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \Gamma_{\theta,r}^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\
 &= \Gamma_{\theta,r}^l \cdot g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\
 &= \Gamma_{\theta,r}^l \cdot g_{lr}
 \end{aligned}$$

Como g es diagonal tenemos que únicamente será igual cuando $l=r$

$$= \Gamma_{\theta,r}^r \cdot g_{rr}$$

Pero como $\Gamma_{\theta,r}^r = 0$

$$= 0$$

Por lo tanto hemos encontrado dos campos vectoriales que no cumplen la ecuación de Killing pero si la ecuación A.1. □

Apéndice B

Código en *Maple* para el cálculo de las derivadas de Lie

```
with(DifferentialGeometry); with(Tensor); with(LieAlgebras);
DGsetup([theta, phi], S2)
g := evalDG((dtheta&t dtheta) + sin(theta)^2 * (dphi&t dphi))
C1 := evalDG(cos(theta) * cos(phi) * D_theta - sin(theta)sin(phi) * D_phi)
C2 := evalDG(cos(theta) * sin(phi) * D_theta + sin(theta)cos(phi) * D_phi)
C3 := evalDG(sin(theta) * D_theta)
LieDerivative(C1, g)
LieDerivative(C1, g)
LieDerivative(C1, g)
```


Bibliografía

- [1] H. A. Buchdahl. «Isotropic coordinates and Schwarzschild metric». En: *International Journal of Theoretical Physics* (jul. de 1985).
- [2] Miguel Sánchez Caja. «On the geometry of generalized Robertson-Walker spacetimes: curvature and Killing fields». En: *Journal Geometry and physics* 27 (1999), págs. 1-15.
- [3] Manfredo P. do Carmo. *Riemannian Geometry: Theory & Applications*. Birkhäuser, 2011.
- [4] Kip S. Thorne y John Archibald Wheeler Charles W. Misner. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017.
- [5] M O Katanaev. «Killing vector fields and a homogeneous isotropic universe». En: *Physics-Uspekhi* 59.7 (jul. de 2016), págs. 689-700.
- [6] Shoshichi Kobayashi. *Transformation Groups in Differential Geometry*. Springer, 1995.
- [7] Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [8] P. Petersen. *Riemannian geometry*. Springer., 2016.
- [9] Roberto Torretti. *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*. Springer, 1978.
- [10] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.