

Contribuciones al estudio de sistemas lineales con retardos: el enfoque de funcionales de tipo completo

Sabine Mondié ^{a, *}, Marco A. Gomez^b

^aDepartamento de Control Automático, Cinvestav, IPN, México D.F.

^bDepartamento de Ingeniería Mecánica, DICIS, Universidad de Guanajuato, Salamanca, México.

To cite this article: Mondié, S., Gomez, M.A. 2022. Contributions to the study of linear systems with delays: the complete type functionals approach. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 19, 381-393. <https://doi.org/10.4995/riai.2022.16828>

Resumen

Se introducen resultados recientes del enfoque de funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo para sistemas lineales con retardos. Se explican brevemente los principales conceptos y resultados para el caso de sistemas con un retardo así como las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad expresadas en términos del análogo de la matriz de Lyapunov. Las extensiones de este tipo de condiciones de estabilidad a otras clases de sistemas con retardos son expuestas brevemente. También se presentan aplicaciones existentes del enfoque de funcionales de tipo completo a problemas de análisis y de diseño de controladores. El trabajo se enfoca a contribuciones de investigadores de México a este tema de estudio.

Palabras clave: Sistemas con retardos, Análisis de estabilidad, Sistemas lineales, Diseño de controladores.

Linear time-delay systems: the complete type functionals approach

Abstract

Recent results on Lyapunov-Krasovskii functionals of complete type for linear time-delay systems are presented. The main concepts and results are introduced for the single delay system case, and necessary and sufficient stability conditions expressed in terms of the Lyapunov delay matrix are explained. The use of complete type functionals in analysis and controller design is discussed. The contribution focuses mainly at results of researchers in Mexico.

Keywords: Time-delay systems, Stability analysis, Linear systems Controller design.

1. Introducción

Los fenómenos de transporte de materia o de información en los sistemas dinámicos en el ámbito tecnológico, manufacturero, biológico y socio económico pueden ser interpretados como retardos en los estados, entradas o salidas de los sistemas. Algunos ejemplos son la tele operación (Castaños et al., 2018; Nuño et al., 2018), el consenso a través de redes de comunicación (Ramírez and Sipahi, 2019; Nuño and Ortega, 2018; González et al., 2020), la deshidratación de alimentos (Santos-Sánchez et al., 2021), los sistemas de población y epidemias (Castaños and Mondié, 2021), los tiempos de medición de va-

riables de salida y de cálculo de leyes de control, entre muchos otros. Si bien los retardos producen generalmente un deterioro del desempeño de los sistemas, también sustituyen de manera exitosa acciones derivativas en las leyes de control debido a sus propiedades de filtraje (Ramírez et al., 2021; Hernández-Díez et al., 2019; Ochoa-Ortega et al., 2019; Ramírez-Neria et al., 2019; Ramírez et al., 2016).

Lo anterior ha motivado el estudio extenso de ecuaciones diferenciales en diferencias, también llamadas ecuaciones diferenciales funcionales, en el dominio del tiempo y, para el caso lineal, el de los cuasipolinomios en las variables dependientes

* Autor para correspondencia: smondie@ctrl.cinvestav.mx
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

s y e^{-hs} , donde h es el retardo. Esta presentación se inscribe en el enfoque temporal lineal, en particular, en la extensión de la teoría de Lyapunov a los sistemas con retardos desarrollada por Krasovskii (1963).

El uso de funcionales de tipo prescrito ha sido objeto de intensa investigación en las décadas pasadas: la propuesta de funcionales parametrizadas que se derivan a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado conduce a condiciones suficientes expresadas como desigualdades lineales o bilineales matriciales que se resuelven simultáneamente para los parámetros de la funcional y las ganancias del control. Este enfoque es sumamente útil en los problemas de síntesis ya que es posible formular numerosos problemas de control y encontrar soluciones gracias a los grados de libertad de sus parámetros (Ramírez Jerónimo et al., 2020; Ramírez et al., 2015; Villafuerte et al., 2011, 2013; Ramírez et al., 2018). En un contexto de análisis, el método es más limitado ya que las condiciones son suficientes, y no hay garantía de que, dado un sistema estable, existan valores de los parámetros de la funcional de forma prescrita que satisfagan los teoremas de estabilidad. Cabe observar que, en esta línea de estudio, la reducción del conservadurismo en búsqueda de alcanzar la necesidad es un objetivo arduamente perseguido.

Nuestro trabajo pertenece al enfoque recíproco de la teoría de Lyapunov Krasovskii: dada una derivada prescrita negativa, se presenta la funcional de Lyapunov-Krasovskii asociada al sistema lineal con retardos estudiado. Esta funcional se expresa en términos de una función matricial, nombrada matriz de Lyapunov para sistemas con retardos que se puede construir. Completando la funcional, se establece que ésta admite una cota cuadrática inferior cuando el sistema es estable (Kharitonov and Zhabko, 2003).

Un tema importante en este marco de trabajo es el de la presentación del análogo del famoso criterio de estabilidad de Lyapunov para sistemas sin retardos, que plantea que la matriz de Lyapunov, solución de la ecuación de Lyapunov, es positiva definida si y solo si el sistema es estable. La solución a este problema no es una simple extensión, ya que la matriz de Lyapunov del sistema con retardo es una función matricial definida sobre el intervalo del retardo, que satisface no solo una ecuación algebraica, sino también una propiedad dinámica.

Este artículo se divide en dos partes de acuerdo a lo previamente comentado. La primera parte, que comprende las seis primeras secciones, está dedicada a la presentación del marco teórico general de las funcionales y el estado del arte de la extensión del criterio de Lyapunov para sistemas con retardos. Específicamente, los principales resultados de la teoría de funcionales de Lyapunov Krasovskii de tipo completo se introducen en la sección 2. Condiciones necesarias de estabilidad en términos de la matriz de Lyapunov son presentados en la sección 3, y condiciones necesarias y suficientes en la sección 4. En la sección 5 se describen las expresiones que permiten realizar el cálculo de la matriz de Lyapunov, la cual es pieza fundamental para emplear las condiciones de estabilidad. En la sección 6 se discuten las extensiones a otras clases de sistemas lineales, en particular, para sistemas con retardos distribuidos, sistemas de tipo neutral, sistemas con coeficientes periódicos, ecuaciones en diferencias y ecuaciones integrales.

En la segunda parte del artículo, se exponen algunos de los desarrollos realizados, en particular en México, en el marco de funcionales de tipo completo. En la sección 7, se presentan resultados concernientes al análisis. Se ejemplifica la determinación de las zonas de estabilidad en el espacio de parámetros empleando las condiciones necesarias de estabilidad, las cuales complementan métodos basados en el enfoque frecuencial. Se proporcionan cotas de robustez ante incertidumbre en parámetros del sistema y en los retardos, y ante no linealidades no modeladas. También se reformula la determinación de cotas exponenciales en términos de robustez. Finalmente, se caracteriza la norma H_2 de sistemas con retardos en términos de la matriz de Lyapunov. En la sección 8, se presentan resultados útiles para el diseño de controladores. En particular para control de sistemas con retardos en la entrada, para control óptimo, y para la minimización de ciertos índices de desempeño como la norma H_2 . La contribución termina con algunas observaciones generales.

Notación: El espacio de funciones continuas a trozos y continuamente diferenciables sobre $[-H, 0]$ y evaluadas en \mathbb{R}^n se escribe como $PC([-H, 0], \mathbb{R}^n)$ y $C^{(1)}([-H, 0], \mathbb{R}^n)$, respectivamente. La norma vectorial euclidiana y la norma matricial inducida se escriben $\|\cdot\|$. Para la función $\varphi \in PC([-H, 0], \mathbb{R}^n)$, se usa la norma uniforme

$$\|\varphi\|_H = \sup_{\theta \in [-H, 0]} \|\varphi(\theta)\|$$

y la seminorma

$$\|\varphi\|_H = \sqrt{\|\varphi(0)\|^2 + \int_{-H}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta}$$

La notación $A > 0$ ($A \geq 0$, $A \not\geq 0$) significa que la matriz A es positiva definida (positiva semidefinida, no positiva semidefinida). $\lambda_{\min}(A)$ es el valor propio mínimo de una matriz A . La función que mapea y al menor entero superior inmediato es $\lceil y \rceil$. Finalmente, $[A_{ij}]_{i,j=1}^r$ denota la matriz a bloques de forma

$$\begin{matrix} i \setminus j & 1 & 2 & \dots & r \\ 1 & \left(\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \end{matrix} \right) \\ 2 & \left(\begin{matrix} A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2r} \end{matrix} \right) \\ \vdots & \left(\begin{matrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{matrix} \right) \\ r & \left(\begin{matrix} A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rr} \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

donde A_{ij} son matrices cuadradas.

2. Preliminares: Funcionales y matriz de Lyapunov para sistemas con retardos

Con el fin de que los conceptos fundamentales y el hilo conductor de la argumentación sean lo más transparentes posible, los resultados se presentan para el caso de sistemas lineales con un retardo único de forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad t \geq 0, \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0], \end{aligned} \tag{1}$$

donde A_0 y A_1 son matrices reales constantes de dimensión $n \times n$, y h es el retardo.

Sin pérdida de generalidad, el tiempo inicial es cero. Las funciones iniciales φ pertenecen al espacio de funciones continuas a trozos $PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. La restricción de la solución $x(t, \varphi)$ del sistema (1) al intervalo $[t - h, t]$ es

$$x_t(\varphi) : \theta \rightarrow x(t + \theta, \varphi), \quad \theta \in [-h, 0].$$

Definición 2.1. (Kharitonov, 2013) El sistema (1) es exponencialmente estable si existen constantes $\gamma \geq 1$ y $\sigma > 0$, tales que

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \gamma e^{-\sigma t} \|\varphi\|_H, \quad t \geq 0.$$

Se introduce ahora el concepto de matriz fundamental.

Definición 2.2. (Kharitonov, 2013) La función matricial $K(t)$ de dimensión $n \times n$ es la matriz fundamental del sistema (1) si

$$\dot{K}(t) = A_0 K(t) + A_1 K(t - h), \quad t \geq 0,$$

con condiciones iniciales $K(0) = I, \quad K(t) = 0, \quad t < 0$.

Esta matriz puede construirse empleando el método "paso a paso" sobre intervalos de tiempo finitos. Además, permite expresar la solución sobre el intervalo $[0, \infty)$ mediante la formula de Cauchy:

$$x(t, \varphi) = K(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 K(t - \theta - h)A_1\varphi(\theta)d\theta. \quad (2)$$

Recordemos ahora las ideas principales del enfoque recíproco. De acuerdo a Kharitonov and Zhabko (2003), para toda matriz positiva definida W , la funcional $v_0(x_t)$ que satisface

$$\frac{d}{dt}v_0(x_t(\varphi)) = -x^T(t, \varphi)Wx(t, \varphi)$$

a lo largo de las soluciones del sistema (1) es

$$v_0(\varphi) = \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 U^T(\theta + h)A_1\varphi(\theta)d\theta + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1)A_1^T \int_{-h}^0 U(\theta_1 - \theta_2)A_1\varphi(\theta_2) d\theta_2 d\theta_1, \quad (3)$$

donde la función matricial

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t)WK(t + \tau)dt, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

es la *matriz de Lyapunov* para sistemas con retardos. Esta definición no puede emplearse para construir $U(\tau)$ porque la integral converge solo si el sistema es estable y además requiere conocer $K(t), t \geq 0$. Esta restricción se supera a partir de la siguiente definición:

Definición 2.3. (Kharitonov, 2013) La matriz de Lyapunov $U(\tau), \tau \in \mathbb{R}$, del sistema (1), asociada a una matriz simétrica dada W , es una función continua que satisface

$$\frac{d}{d\tau}U(\tau) = U(\tau)A_0 + U(\tau - h)A_1, \quad \tau \geq 0, \quad (5)$$

$$U(\tau) = U^T(-\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

$$U(-h_0)A_0 + A_0^T U(0) + U(-h)A_1 + A_1^T U(h) = -W. \quad (7)$$

Estas tres ecuaciones, denominadas propiedades dinámica, simétrica y algebraica, respectivamente, juegan un papel análogo al de la ecuación de Lyapunov para los sistemas libres de retardo. La solución $U(\tau)$ es única si el sistema (1) satisface la condición de Lyapunov (Kharitonov, 2013), es decir su ecuación característica no tiene raíces s_0 tales que $-s_0$ también es raíz. Su construcción se discute en la sección 5.

De particular interés para el desarrollo de la siguiente sección es la funcional cuadrática

$$v_1(\varphi) = v_0(\varphi) + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta)W\varphi(\theta) d\theta = \int_{-h}^\infty x^T(t, \varphi)Wx(t, \varphi)dt, \quad (8)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (1) es

$$\frac{d}{dt}v_1(x_t(\varphi)) = -x^T(t - h, \varphi)Wx(t - h, \varphi).$$

Enunciamos el siguiente resultado de estabilidad:

Teorema 1. (Egorov, 2016; Kharitonov, 2013) Si el sistema (1) es exponencialmente estable, entonces existe $\alpha_1 > 0$, tal que

$$v_1(\varphi) \geq \alpha_1 \|\varphi\|_H^2, \quad \varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n). \quad (9)$$

Este resultado permite deducir la cota cuadrática inferior

$$v_1(\varphi) \geq \alpha_1^* \|\varphi(0)\|^2, \quad \varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n),$$

donde

$$\alpha_1^* = \frac{\beta}{m + 1},$$

con $\beta > 0$ tal que

$$\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} A_0^T + A_0 & A_1 \\ A_1^T & 0 \end{pmatrix} \geq 0.$$

El número α_1^* es un escalar real positivo que puede ser calculado, sea el sistema estable o no.

En resumen, el enfoque recíproco permite construir, mediante las propiedades (5,6,7), la matriz de Lyapunov $U(\tau), \tau \in [-h, h]$, asociada a todo sistema de forma (1) que satisface la condición de Lyapunov. Esta matriz define a su vez la funcional de Lyapunov $v_0(x_t)$ definida en (3) asociada al sistema. Finalmente, la desigualdad (9) del Teorema 1 es condicion necesaria para la estabilidad en términos de la funcional $v_1(x_t)$ definida en (8). Estos resultados son el punto de partida para la determinación de condiciones necesarias y suficientes de estabilidad expresadas en términos de la matriz de Lyapunov, y para varias aplicaciones de análisis y diseño que se exploran en el resto del artículo.

3. Condiciones necesarias de estabilidad

Los criterios de estabilidad para el caso de ecuaciones escalares con un retardo, presentados en Mondié (2012) y Egorov and Mondié (2013), mostraron que había esperanza de encontrar un criterio de estabilidad en el marco de Lyapunov-Krasovskii. En los primeros intentos (Mondié et al., 2011), se observó que la sustitución de condiciones iniciales sencillas en la expresión de la funcional combinada con la cota cuadrática inferior conducía a condiciones de inestabilidad/estabilidad: por ejemplo, la condición inicial $\hat{\varphi}(\theta) = \mu$ para $\theta = 0$ y $\hat{\varphi}(\theta) = 0$ para $\theta \neq 0$ donde μ es un vector arbitrario no nulo, conduce a $v_1(\hat{\varphi}) = \mu^T U(0)\mu$, de manera que se concluye que una condición necesaria de estabilidad del sistema es $U(0) > 0$.

En Mondié et al. (2012) se encontró que, en el caso de un solo retardo, funciones iniciales de forma $\mu e^{A_0\theta}$, donde μ es un vector arbitrario no nulo, permitía poner en evidencia la matriz de Lyapunov. La observación de que en este caso particular $e^{A_0\theta}$ es la expresión de la matriz fundamental $K(\theta)$, $\theta \in [0, h]$, detonó la investigación de condiciones necesarias, con la propuesta de condiciones iniciales (Egorov and Mondié, 2014):

$$\psi_r(\theta) = \sum_{i=1}^r K(\theta + \tau_i)\gamma_i, \quad \theta \in [-h, 0], \quad (10)$$

donde $\tau_i \in [0, h]$ y $\gamma_i \in \mathbb{R}^n$. El papel clave de esta función ψ_r se explica en el desarrollo de esta y la siguiente sección.

La sustitución de la condición inicial ψ_r dada por (10) en la funcional v_1 conduce a productos de matrices fundamentales y de matrices de Lyapunov. Se demostró (Egorov and Mondié, 2014), suponiendo la estabilidad del sistema, que estas interacciones están gobernadas por diferentes propiedades. Esta suposición fue posteriormente relajada con el fin de usar las propiedades en la prueba de suficiencia.

La primera propiedad, llamada ecuación algebraica generalizada, la cual se cumple para $\tau \geq 0$, está dada por

$$U(\tau)A_0 + A_0^T U(\tau) + U(\tau - h)A_1 + A_1^T U(\tau + h) = -WK(\tau).$$

Ésta se reduce a la ecuación algebraica (7) cuando $\tau = 0$. La segunda propiedad, una fórmula de Cauchy generalizada válida para $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \in \mathbb{R}$, es

$$\begin{aligned} U(\tau_1 + \tau_2) &= U(\tau_2)K(\tau_1) \\ &+ \int_{-h}^0 U(\tau_2 - \theta - h)A_1K(\tau_1 + \theta) d\theta \\ &+ \int_{-\tau_1}^0 K^T(\tau_2 + \theta)WK(\tau_1 + \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Un elemento clave de nuestro enfoque es la funcional bilineal

$$\begin{aligned} z(\varphi, \psi) &= \varphi^T(0)U(0)\psi(0) \\ &+ \varphi^T(0) \int_{-h}^0 U^T(\theta + h)A_1\psi(\theta)d\theta + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta)A_1^T U(\theta + h) d\theta\psi(0) \\ &+ \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1) \cdot A_1^T \int_{-h}^0 U(\theta_1 + h - \theta_2 - h)A_1\psi(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1 \\ &+ \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta)W\psi(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Al sustituir en esta funcional las condiciones iniciales

$$\varphi(\theta) = K(\tau_1 + \theta)\mu, \quad \psi(\theta) = K(\tau_2 + \theta)\eta, \quad \theta \in [-h, 0],$$

donde $\tau_1, \tau_2 \in [0, h]$ y μ, η son vectores reales arbitrarios no nulos, cálculos largos y tediosos (Egorov and Mondié, 2014) que explotan las propiedades generalizadas arriba mencionadas, exhiben una reducción contundente: para todo $\tau_1, \tau_2 \in [0, h]$,

$$z(K(\tau_1 + \theta)\mu, K(\tau_2 + \theta)\eta) = \mu^T U(-\tau_1 + \tau_2)\eta.$$

Gracias a esta reducción, la sustitución de la condición (10) en la funcional (8) permite llegar a un arreglo matricial. El reemplazar este arreglo en la desigualdad (9) del Teorema 1 conduce a las siguientes condiciones necesarias de estabilidad:

Teorema 2. Si el sistema (1) es exponencialmente estable, entonces

$$\widehat{\mathcal{K}}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) := \left[U(-\tau_i + \tau_j) \right]_{i,j=1}^r > 0, \quad (11)$$

donde $\tau_k \in [0, h]$, $k = \overline{1, r}$, y $\tau_i \neq \tau_j$, si $i \neq j$.

Observación 1. Para $r = 2$, la matriz en (11) toma la forma

$$\widehat{\mathcal{K}}_2(\tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} U(0) & U(\tau_2 - \tau_1) \\ U(\tau_1 - \tau_2) & U(0) \end{pmatrix},$$

para $r = 3$,

$$\widehat{\mathcal{K}}_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \begin{pmatrix} U(0) & U(\tau_2 - \tau_1) & U(\tau_3 - \tau_1) \\ U(\tau_1 - \tau_2) & U(0) & U(\tau_3 - \tau_2) \\ U(\tau_1 - \tau_3) & U(\tau_2 - \tau_3) & U(0) \end{pmatrix},$$

etc. De la propiedad de simetría (6), se deduce que las matrices $\widehat{\mathcal{K}}_2(\tau_1, \tau_2)$ y $\widehat{\mathcal{K}}_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ son simétricas.

Observación 2. El Teorema 2 provee una familia de condiciones necesarias cuya complejidad incrementa cuando el parámetro r en (11) crece. Cuando $r = 1$ se obtiene la condición $U(0) > 0$, la cual corresponde al conocido criterio de estabilidad de sistemas libres de retardo. Cabe notar que el criterio de estabilidad para la ecuación escalar (Egorov and Mondié, 2013) se recupera cuando $r = 2$.

4. Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad

Una pregunta inmediata es si las condiciones necesarias del Teorema 2 son también suficientes. Para la discusión de esta cuestión, es de principal interés la siguiente elección particular de parámetros τ_i de la función ψ_r definida en (10):

$$\tau_i = \frac{i-1}{r-1}h, \quad i = \overline{1, r}, \quad r \geq 2. \quad (12)$$

Con estos parámetros, la matriz en (11) es

$$\mathcal{K}_r := \widehat{\mathcal{K}}_r \left(0, \frac{1}{r-1}h, \dots, \frac{r-2}{r-1}h, h \right) = \left[U \left(\frac{j-i}{r-1}h \right) \right]_{i,j=1}^r, \quad r \geq 2.$$

Si $r = 1$, entonces se define $\mathcal{K}_1 := U(0)$.

En diversos ejemplos numéricos (Cuvas et al., 2019), se observa que cuando el número prescrito r es suficientemente grande la condición (11) puede revelar las zonas exactas de estabilidad en el espacio de parámetros del sistema. Considere por ejemplo el sistema (1) con matrices

$$A_0 = 0 \text{ y } A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ 0 & p \end{pmatrix}. \quad (13)$$

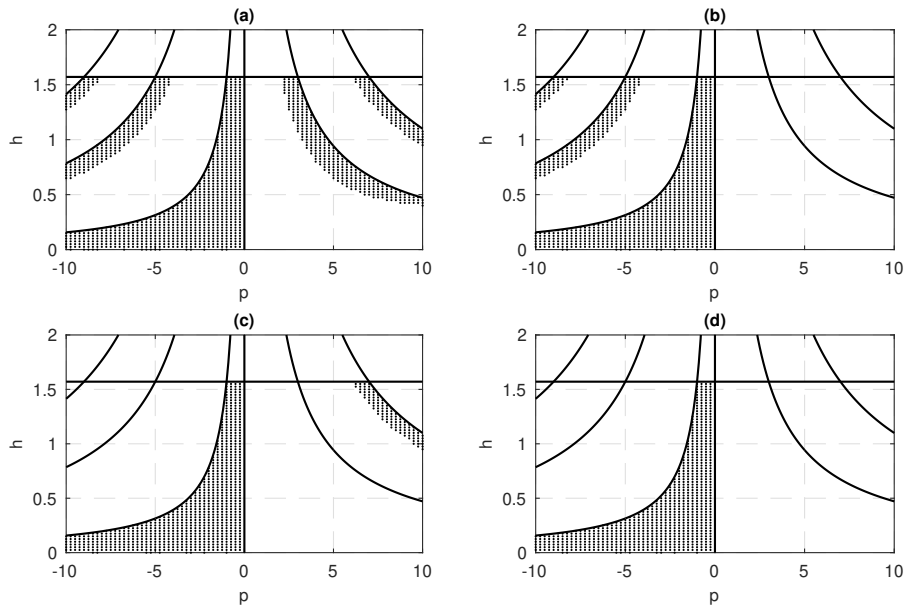


Figura 1: Mapas de estabilidad en el espacio de parámetros (p, h) del sistema (1) con matrices (13). Un procedimiento para su obtención es descrito en la subsección 7.1. Las líneas continuas corresponden a las D-particiones del sistema. Los puntos negros indican los parámetros (p, h) para los cuales se cumple la condición $\mathcal{K}_r > 0$ para diferentes valores de r . Los puntos mostrados en el panel (a) corresponden a $r = 2$; en el panel (b) a $r = 3$; en el panel (c) a $r = 4$; y en el panel (d) a $r = 6, 7, 8, 9, 10$.

En la Figura 1, las líneas continuas son las fronteras de estabilidad/inestabilidad obtenidas mediante D-particiones; los puntos negros aislados corresponden a valores de los parámetros (p, h) para los cuales la condición necesaria de estabilidad $\mathcal{K}_r > 0$ se cumple para diferentes valores de r . En los paneles (a), (b), (c) y (d) se observa que el incremento de r permite excluir los puntos donde $\mathcal{K}_r \not> 0$, es decir puntos donde el sistema es inestable. En el panel (d) donde $r \geq 6$, se detecta la zona exacta de estabilidad del sistema.

La observación anterior motivó resultados de suficiencia presentados primeramente en Egorov (2014), y después en Egorov (2016) y Gomez et al. (2019a). Específicamente, en Egorov (2014) se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 3. *El sistema (1) es exponencialmente estable si y solo si la condición de Lyapunov se cumple y para todo número natural r*

$$\mathcal{K}_r > 0. \tag{14}$$

Además, si la condición de Lyapunov se cumple y el sistema es inestable, existe un número r tal que

$$\mathcal{K}_r \not> 0.$$

Es importante notar que, para asegurar si el sistema es estable o no empleando el teorema anterior, la condición $\mathcal{K}_r > 0$ requiere ser verificada para todo natural r , lo cual induce un número infinito de operaciones matemáticas. Es por esta razón que nos referimos a las condiciones de estabilidad del Teorema 3 como criterio no finito.

Si bien es cierto que el Teorema 3 proporciona condiciones necesarias y suficientes de estabilidad, su uso en la determinación de estabilidad resulta impráctico, pues no proporciona un número $r = r_0$ finito para el cual la condición $\mathcal{K}_{r_0} > 0$ permita concluir estabilidad.

Un primer intento en la obtención de un estimado del número r_0 es reportado en Egorov (2016). Sin embargo, la condición de estabilidad ahí presentada ya no depende únicamente de la matriz de Lyapunov, sino también de la matriz fundamental del sistema. En Gomez et al. (2019a) se elimina la dependencia de la matriz fundamental y se proporciona un número r_0 para el que la condición $\mathcal{K}_{r_0} > 0$ es un criterio de estabilidad. Ya que para determinar la estabilidad del sistema ambos criterios requieren verificar la positividad de una matriz de dimensión finita nos referimos a ellos como criterios finitos.

El criterio reportado en Gomez et al. (2019a) se enuncia en el siguiente teorema:

Teorema 4. *El sistema (1) es exponencialmente estable si y solo si la condición de Lyapunov se cumple y*

$$\mathcal{K}_{r_0} > 0, \tag{15}$$

donde

$$r_0 = 1 + \left\lceil e^{Lh} h (M + L) \left(\alpha^* + \sqrt{\alpha^* (\alpha^* + 1)} \right) - Lh \right\rceil, \tag{16}$$

con $\alpha^* = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $M = \|A_0\| + \|A_1\|$ y L es tal que $\|\dot{K}(t)\| \leq L$, $t \in (0, h)$.

El número α_2 es tal que $v_1(\varphi) \leq \alpha_2 \|\varphi\|_H^2$, y está dado por

$$\alpha_2 = (1 + \|A_1\|h)^2 \|U(0)\| + h \|W\|.$$

El parámetro α_1 es obtenido a partir del Lema 2 enunciado en los próximos párrafos. Finalmente, ya que $K(t) = e^{A_0 t}$, $t \in [0, h)$, es posible calcular L a partir de $\|\dot{K}(t)\| \leq \|A_0\| e^{\|A_0\| t} \leq L$, para $t \in (0, h)$. Se observa claramente que estos números dependen de los parámetros del sistema.

La prueba de suficiencia y la estimación de r_0 se basan en dos resultados auxiliares. El primero, reportado en Egorov

(2016), es la aproximación de funciones que pertenecen al conjunto compacto

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in C^{(1)}([-h, 0], \mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_H = \|\varphi(0)\| = 1, \|\dot{\varphi}\| \leq M\}$$

por funciones de la forma (10):

Lema 1. Sea la función ψ_r definida como en (10) con τ_i como en (12). Para toda función $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\|\varphi - \psi_r\|_H \leq \frac{(M+L)e^{Lh}}{1/\delta_r + L},$$

$$\text{donde } \delta_r = \frac{h}{r-1}.$$

El estimado del error de aproximación de cualquier función del compacto \mathcal{S} por una función ψ_r es obtenido estableciendo los vectores $\gamma_i \in \mathbb{R}^n$ en (10) tales que $\varphi(-\tau_i) = \psi_r(-\tau_i)$, $i = 1, r$. El segundo resultado es la siguiente condición de inestabilidad:

Lema 2. Si el sistema (1) es inestable, entonces existe $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que

$$v_1(\varphi) \leq -\alpha_1,$$

con

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_{\min}(W)}{4\hat{\alpha}} e^{-2\hat{\alpha}h} \cos^2(b),$$

donde $\hat{\alpha}$ es un estimado de la abscisa espectral del sistema y b es solución única de la ecuación $((\hat{\alpha}h)^2 + b^2) \sin^4(b) = (\hat{\alpha}h)^2$ en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

El Lema 2 es semejante al resultado de inestabilidad empleado en la prueba de suficiencia del criterio no finito; vea el Teorema 8 en Egorov (2014). Sin embargo, en el Lema 2 se proporciona un estimado del número α_1 , lo cual resulta de fundamental importancia. La prueba de suficiencia se basa en este hecho y en el Lema 1: Considérese alguna función $\varphi \in \mathcal{S}$ y defínase $E_r := \varphi - \psi_r$. Se supone que el sistema es inestable. Entonces,

$$\begin{aligned} v_1(\psi_r) &= v_1(\varphi) - 2z(\varphi, E_r) + v_1(E_r) \\ &\leq -\alpha_1 + 2\alpha_2\|E_r\|_H + \alpha_2\|E_r\|_H^2. \end{aligned}$$

Por el Lema 1, se puede demostrar que con r_0 dado por (16)

$$-\alpha_1 + 2\alpha_2\|E_{r_0}\|_H + \alpha_2\|E_{r_0}\|_H^2 \leq 0,$$

lo cual permite concluir que

$$v_1(\psi_{r_0}) = \gamma^T \mathcal{K}_{r_0} \gamma \leq 0.$$

El estimado del número r en el Teorema 4 puede ser demasiado grande. Para ilustrar esto, retomamos el ejemplo con matrices dadas en (13). En la siguiente tabla se muestran algunos valores calculados de r_0 de acuerdo a (16) para diferentes pares de parámetros (p, h) :

Tabla 1: Verificación de estabilidad del sistema (1) con matrices (13) empleando el Teorema 4.

| Parámetros (p, h) | r_0 | Tiempo [seg] | Resultado |
|---------------------|-------|--------------|-----------------------------|
| (-1,25, 0,5) | 89 | 1,30 | $\mathcal{K}_{89} > 0$ |
| (-1,25, 0,75) | 395 | 1,57 | $\mathcal{K}_{395} > 0$ |
| (1,25, 0,5) | 79 | 1,35 | $\mathcal{K}_{79} \neq 0$ |
| (1,25, 1,25) | 3416 | 23,84 | $\mathcal{K}_{3416} \neq 0$ |

Las primeras dos filas corresponden a sistemas estables, mientras que las dos últimas a sistemas inestables. Se observa que el número estimado difiere en una medida considerable del $r = 6$ con el que se recupera la zona exacta de estabilidad (Figura 1, panel (d)). El tiempo de cálculo mostrado en la Tabla 1 incluye el cálculo de r_0 , la construcción de \mathcal{K}_{r_0} y la verificación de la positividad de la matriz. Es importante notar que el máximo consumo de tiempo se encuentra en la construcción de \mathcal{K}_{r_0} , lo cual implica el cálculo de la matriz de Lyapunov, y en la verificación de su positividad, llevada a cabo en este ejemplo empleando la función `chol` de Matlab. Los experimentos se llevaron a cabo en una computadora con un procesador Intel Core i5 de dos núcleos 2.5GHz y con memoria de RAM de 8GB.

Un estimado de r tan conservativo puede hacer impráctico el criterio de estabilidad finito del Teorema 4 ya que la matriz \mathcal{K}_{r_0} es de dimensión $nr_0 \times nr_0$. Sin embargo, un hecho significativo desde el punto de vista teórico es que uno puede determinar la estabilidad del sistema (1) en un número finito de operaciones matemáticas. Claramente, la determinación de un valor r_0 más cercano a los valores de r observados en los ejemplos es un reto para los investigadores del tema.

5. Construcción de la matriz de Lyapunov

El cálculo de la matriz de Lyapunov es un paso obligatorio para la verificación de las condiciones de estabilidad de las secciones anteriores, o bien para emplear la funcional (3) en problemas de análisis o diseño. En el caso de un solo retardo, o retardos conmensurables, la matriz de Lyapunov se puede construir empleando el método semi-analítico (Kharitonov, 2013) (llamado así porque se expresa en términos de una exponencial matricial que corresponde a una serie infinita). Este método consiste en resolver el análogo de la ecuación de Lyapunov formado por las propiedades (5), (6) y (7), cuya solución es única si el sistema satisface la condición de Lyapunov.

Para $\tau \leq 0$, la matriz de Lyapunov satisface la ecuación

$$\frac{d}{d\tau} U(\tau) = -A_0^T U(\tau) - A_1^T U(\tau + h). \quad (17)$$

Introduciendo las variables $Y(\tau) = U(\tau)$ y $Z(\tau) = U(\tau - h)$, las ecuaciones (6) y (17) se reducen al sistema libre de retardos

$$\begin{aligned} \frac{dY(\tau)}{d\tau} &= Y(\tau)A_0 + Z(\tau)A_1 \\ \frac{dZ(\tau)}{d\tau} &= -A_0^T Z(\tau) - A_1^T Y(\tau), \end{aligned} \quad (18)$$

y las condiciones (5) y (7) conducen a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} Y(0) &= Z(h) \\ -W &= A_0^T Y(0) + Y(0)A_0 + A_1^T Y(h) + Z(0)A_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Este sistema diferencial matricial con condiciones de frontera de tipo mixto se resuelve empleando productos de Kronecker y técnicas de vectorización. Definiendo $y(\tau) = \text{vec}(Y(\tau))$ y $z(\tau) = \text{vec}(Z(\tau))$, el sistema (18) se escribe como

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} (I \otimes A_0) & (I \otimes A_1) \\ -(A_1^T \otimes I) & -(A_0^T \otimes I) \end{pmatrix} \quad (20)$$

y las condiciones de frontera se expresan como

$$M \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} y(h) \\ z(h) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} \quad (21)$$

donde $w = \text{vec}(W)$ y

$$M = \begin{pmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ A_0^T \otimes I + I \otimes A_0 & I \otimes A_1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & -I_{n \times n} \\ A_1^T \otimes I & 0_{n \times n} \end{pmatrix}.$$

Si el sistema satisface la condición de Lyapunov, la matriz $(M + Ne^{Lh})$ es invertible, y la solución del sistema (20), (21) es única:

$$\begin{pmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} = -e^{L\tau} (M + Ne^{Lh})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}.$$

La matriz $U(\tau)$ se obtiene desvectorizando el vector $y(\tau)$.

6. Estado del arte de las extensiones

El enfoque descrito en las secciones anteriores ha permitido presentar condiciones necesarias, y en ocasiones suficientes, de estabilidad exponencial para diversas clases de sistemas con retardos. Cabe notar que si bien el hilo conductor es el mismo, cada clase de sistemas presenta particularidades y retos no triviales.

6.1. Sistemas con retardos concentrados y distribuidos

Los resultados se extienden en Cuvas and Mondié (2016) y Egorov et al. (2017) al caso de sistemas con retardos concentrados múltiples y distribuidos de forma

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^m A_j x(t - h_j) + \int_{-H}^0 G(\theta) x(t + \theta) d\theta,$$

donde $G \in PC([-H, 0], \mathbb{R}^{n \times n})$ se denomina kernel de la distribución. Los resultados son similares a los de las secciones anteriores, pero es claro que la matriz de Lyapunov es la que se calcula para la clase de sistema estudiada.

6.2. Sistemas de tipo neutral

La extensión de los criterios de estabilidad finitos se ha presentado en Gomez et al. (2018) y Gomez et al. (2020) para sistemas de tipo neutral con un retardo de la forma

$$\frac{d}{dt} (x(t) - Dx(t - h)) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h).$$

Para sistemas neutrales con múltiples retardos conmensurables solo se han reportado condiciones necesarias de estabilidad (Gomez et al., 2019b). Las extensiones al caso neutral requieren un análisis técnico más cuidadoso debido a las posibles discontinuidades en las soluciones del sistema.

6.3. Sistemas periódicos lineales con retardo

En Gomez et al. (2016b), inspirados por los resultados conversos presentados en Letyagina and Zhabko (2009), se estudió la clase de sistemas

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^m A_j(t) x(t - h_j), \quad (22)$$

donde $A_j(t)$, $j = \overline{0, m}$, son matrices con coeficientes continuos con periodo T , es decir, $A_j(t) = A_j(t + T)$, en $\mathbb{R}^{n \times n}$, y $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m$ son retardos constantes. Las condiciones necesarias de estabilidad son similares a las del caso de sistemas invariantes en el tiempo:

Teorema 5. *Sea el sistema (22) exponencialmente estable. Para cualquier entero positivo r , $\tau_i \in [0, h_m]$, $i = \overline{1, r}$, y $t_0 \in [0, T)$ se cumple:*

$$\widehat{\mathcal{K}}_r(t_0, \tau_1, \dots, \tau_r) = \left[U(t_0 - \tau_i, t_0 - \tau_j) \right]_{i,j=1}^r \geq 0,$$

donde U es la matriz de Lyapunov del sistema (22).

En este caso, la matriz de Lyapunov del sistema es función de dos argumentos, y es solución de una ecuación diferencial parcial con condiciones de frontera. Su cálculo numérico ha resultado ser un problema no trivial. Algunos avances en esta dirección se presentan en Gomez et al. (2019d). La extensión de los resultados de suficiencia permanece abierta.

6.4. Ecuaciones en diferencia en tiempo continuo y ecuaciones integrales

Finalmente, se han generalizado estos resultados a sistemas no-diferenciales lineales, en particular a ecuaciones en diferencias en tiempo continuo de forma

$$x(t) = \sum_{j=1}^m A_j x(t - h_j), \quad (23)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, A_1, \dots, A_m son matrices reales constantes de dimensión $n \times n$, y $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m$ son los retardos. Se determinó la forma de las condiciones de estabilidad para ecuaciones en diferencias en Rocha et al. (2018): Si (23) es estable, dados $\tau_i \in [0, h_m]$, $i = \overline{1, r}$, $\tau_i \neq \tau_j$, si $i \neq j$,

$$\widehat{\mathcal{K}}_r(\tau_1, \dots, \tau_r) = \left[F(\tau_i, \tau_j) \right]_{i,j=1}^r > 0, \quad (24)$$

donde $F(\tau_i, \tau_j) = U(0) - U(-\tau_i) - U(\tau_j) + U(\tau_j - \tau_i)$. Con el fin de abordar las discontinuidades típicas de estos sistemas se emplearon derivadas de Dini.

El estudio de ecuaciones integrales de forma

$$x(t) = \int_{-h}^0 G(\theta) x(t + \theta) d\theta, \quad (25)$$

con kernel $G \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^{n \times n})$, y retardo h , inició en Melchor-Aguilar et al. (2010). Se presentan estimados exponenciales de las soluciones en Mondié and Melchor-Aguilar (2012) y resultados de robustez en Arismendi-Valle and Melchor-Aguilar (2019). En Ortiz et al. (2020) se obtuvieron condiciones necesarias de forma general (24) y se demostró la suficiencia en Ortiz et al. (2021).

7. Aplicaciones: análisis

El criterio de estabilidad de las secciones anteriores era un eslabón faltante de la teoría de funcionales y matrices para sistemas con retardos (Kharitonov, 2013). En efecto, muchos resultados parten de la suposición de que el sistema nominal es estable. A continuación, presentamos varios problemas de análisis donde las funcionales de tipo completo tienen un papel significativo: la exploración del espacio de parámetros, el análisis de robustez, la obtención de estimados exponenciales de las soluciones y el cálculo la norma H_2 de sistemas lineales con retardos.

7.1. Estudio del espacio de parámetros

El estudio del espacio de parámetros de los sistemas con retardos se efectúa usualmente mediante el análisis de su ecuación característica

$$q(s) = \det(sI - A_0 - A_1 e^{-sh}),$$

un cuasipolinomio con número infinito de raíces, lo cual excluye el cálculo exhaustivo de las mismas. Los enfoques propuestos constan de dos etapas (Neimark, 1949): 1) la caracterización de las fronteras candidatas de estabilidad/inestabilidad ($s = 0$ o $s = j\omega$); 2) la determinación de las regiones de la partición del espacio de parámetros que no contienen raíces con parte real positiva.

A continuación, se explica cómo ambas etapas se pueden llevar a cabo de manera eficaz empleando las propiedades de la matriz de Lyapunov y el Teorema 2.

7.1.1. Determinación de parámetros y retardos críticos

Una propiedad notable del sistema (20) es que permite establecer, al igual que en el caso de sistemas libres de retardos, una relación entre el enfoque temporal y el frecuencial:

Proposición 1. *Sea s_0 un valor propio del sistema (1) tal que $-s_0$ es también un valor propio del sistema (1). Entonces s_0 pertenece al espectro del sistema libre de retardos (20). Además, las raíces del sistema libre de retardos (20) son simétricas con respecto al eje imaginario.*

En las fronteras de estabilidad/inestabilidad del espacio de parámetros, las raíces del cuasipolinomio son puramente imaginarias o cero, por lo que, de acuerdo a la proposición anterior, pertenecen al espectro del sistema libre de retardo, el cual tiene $2n^2$ raíces. En Ochoa-Ortega et al. (2013) se explica cómo esta propiedad permite determinar frecuencias, retardos o parámetros críticos para las distintas clases de sistemas con retardos presentados en la sección 6.

7.1.2. Escaneo del espacio de parámetros

Después de determinar las fronteras candidatas de estabilidad/inestabilidad, se realiza un escaneo del espacio de parámetros empleando las condiciones del Teorema 2. La matriz de Lyapunov es calculada de acuerdo a lo presentado en la sección 5.

Observación 3. *Además de la simplicidad del escaneo del espacio de parámetros, es importante mencionar que una gran ventaja del uso del enfoque temporal es que en cualquier punto estable, la matriz de Lyapunov U define, a través de la ecuación (3), una funcional que puede ser empleada ulteriormente.*

A continuación, un ejemplo muestra la validez de los resultados teóricos obtenidos. El lector encontrará algoritmos para un escaneo eficaz del plano de parámetros así como una colección de ejemplos representativos en Cuvas et al. (2019) y Gomez et al. (2016a).

Ejemplo 1. *Considere la planta con función de transferencia*

$$G(s) = \frac{0,038}{s^4 + 0,1276s^3 + 9,3364s^2 + 1,1484s + 3,0276}$$

y el control $C(s) = k_p + k_d e^{-sh_1}$ (Hernández-Díez et al., 2018). El sistema en lazo cerrado es un sistema de forma (1) con retardo $h_1 = 5$ y matrices

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3,0276 - 0,038k_p & -1,1484 & -9,3364 & -0,1276 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,038k_d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En las Figuras 2 y 3 se muestran los puntos del espacio de parámetros (k_p, k_d) donde las condiciones del Teorema 2 se satisfacen para $r = 2$ y $r = 4$, respectivamente. Las líneas continuas que describen las hipersuperficies de cruces de raíces por el eje imaginario validan los resultados, mostrando que para $r = 4$ se detecta la zona exacta de estabilidad.

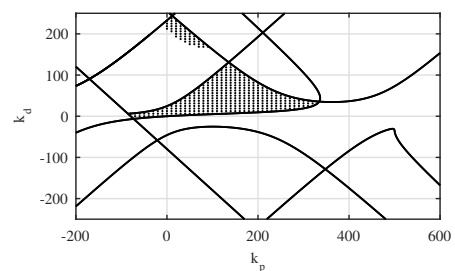


Figura 2: Ejemplo 1; los puntos aislados corresponden a valores de los parámetros para los cuales la condición $\mathcal{K}_2(0, h) > 0$ se satisface.

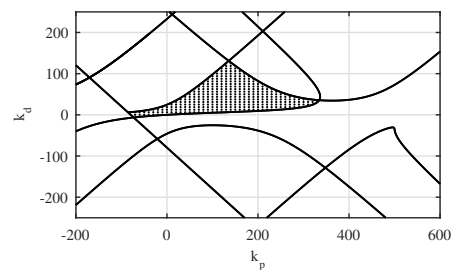


Figura 3: Ejemplo 1; los puntos aislados corresponden a valores de los parámetros para los cuales la condición $\widehat{\mathcal{K}}_4(0, h/3, h/2, h) > 0$ se satisface.

7.2. Robustez

Estudiar las propiedades de estabilidad robusta de los sistemas es relevante a fin de garantizar que mantendrán un comportamiento estable a pesar de incertidumbres inherentes a situaciones reales. Un elemento crucial de este tipo de análisis es contar con una funcional cualitativamente comparable con su derivada. Esto condujo en Kharitonov and Zhabko (2003) a completar la funcional $v_0(x_t)$ definida en (3), parametrizada en $U(\theta)$ asociada a $W = W_0 + W_1 + hW_2$, donde W_0, W_1 y W_2 son matrices positivas definidas, con el término adicional

$$v(x_t) = v_0(x_t) + \int_{-h}^0 x^T(t + \theta)[W_1 + (h + \theta)W_2]x(t + \theta)d\theta. \quad (26)$$

La derivada de esta funcional a lo largo de las trayectorias del sistema (1),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(x_t) = & -x^T(t)W_0x(t) - x^T(t-h)W_1x(t-h) \\ & - \int_{-h}^0 x^T(t + \theta)W_2x(t + \theta)d\theta, \end{aligned}$$

incluye ahora todo el estado del sistema con retardo, propiedad que motiva el nombre de funcional de tipo completo.

A continuación se presenta un marco unificado para estudiar diversas clases de incertidumbre considerando un sistema perturbado de forma general

$$\dot{z}(t) = A_0z(t) + A_1z(t-h) + f(t, z_t), \quad (27)$$

donde la función $f(t, z_t)$ satisface una condición tipo Lipschitz de forma

$$\|f(t, z_t)\| \leq \beta_0 \|z(t)\| + \beta_1 \|z(t-h)\|, \quad (28)$$

donde β_0 y β_1 son escalares positivos. Para analizar este sistema perturbado, se emplea la funcional (26) asociada al sistema nominal, la cual se deriva a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (27) para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(z_t) = & -z^T(t)W_0z(t) - z^T(t-h)W_1z(t-h) \\ & - \int_{-h}^0 z^T(t + \theta)W_2z(t + \theta)d\theta \\ & + 2f(t, z_t)^T \left\{ U(0)z(t) + \int_{-h}^0 U(-h - \theta)A_1z(t + \theta)d\theta \right\}. \end{aligned}$$

Extendiendo las ideas clásicas del enfoque de Lyapunov aplicado al estudio de la estabilidad robusta, los términos del tercer renglón se mayorizan mediante desigualdades ampliamente conocidas y empleando la propiedad $\|U(\theta)\| \leq \|U(0)\| = \nu$ de la matriz de Lyapunov de sistemas estables (Egorov and Mondié, 2015). El término mayorizado resultante se reduce a términos positivos dependientes de las cotas β_0 y β_1 de misma naturaleza que los términos en W_0, W_1 y W_2 . La preservación de la negatividad de la derivada conduce a la condición de existencia de matrices W_0, W_1 y W_2 , $W_0 + W_1 + hW_2 = W$, tales que se satisfacen las desigualdades (ver detalles en Kharitonov (2013)):

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(W_0) & \geq \nu(2\beta_0 + h\beta_0 \|A_1\| + \beta_1) \\ \lambda_{\min}(W_1) & \geq \nu\beta_1(1 + h \|A_1\|) \\ \lambda_{\min}(W_2) & \geq \nu(\beta_0 + \beta_1) \|A_1\| \end{aligned}$$

A continuación discutimos varios problemas que se pueden plantear de esta manera.

7.2.1. Incertidumbre en las matrices de parámetros.

Considere un sistema

$$\dot{z}(t) = (A_0 + \Delta_0)z(t) + (A_1 + \Delta_1)z(t-h)$$

donde Δ_0 y Δ_1 son matrices inciertas o variantes en el tiempo tales que $\|\Delta_0\| \leq \rho_0$ y $\|\Delta_1\| \leq \rho_1$. Este sistema se reescribe en la forma (27) con

$$f(t, z_t) = \Delta_0z(t) + \Delta_1z(t-h).$$

donde $f(t, z_t)$ satisface (28).

7.2.2. Estimados de la abscisa espectral

La determinación de la abscisa espectral del sistema (1), es decir el decaimiento exponencial de sus soluciones, puede formularse como un problema de robustez: claramente, $z(t) = e^{\sigma t}x(t)$ es estable si y solo si $x(t)$ tiene decaimiento exponencial σ . El sistema en $z(t)$ está gobernado por

$$\dot{z}(t) = (\sigma I + A_0)z(t) + A_1e^{\sigma h}z(t-h),$$

de forma (27) donde $f(t, z_t) = \sigma z(t) + (e^{\sigma h} - 1)z(t-h)$ satisface la condición (28).

Es posible obtener estimados exponenciales de las soluciones, es decir encontrar cotas no solo para el decaimiento σ , sino también la ganancia γ en la Definición 2.1, utilizando funcionales de tipo completo (Kharitonov, 2013) o funcionales de tipo prescrito (Mondié and Kharitonov, 2005).

7.2.3. No linealidades

La incertidumbre $f(t, z_t)$ puede corresponder a no linealidades no modeladas, variantes en el tiempo o no. La cota (28) corresponde a la aproximación lineal, válida en una región $\|z_t\| \leq \delta$, lo cual conduce, extendiendo la teoría clásica de sistemas no lineales, a resultados de estabilidad local.

7.2.4. Incertidumbre en el retardo

La incertidumbre en el retardo se modela como

$$\dot{z}(t) = A_0z(t) + A_1z(t-h-\eta), \quad \eta \geq -h. \quad (29)$$

El sistema (29) puede reescribirse en la forma

$$\dot{z}(t) = A_0z(t) + A_1z(t-h) - A_1[z(t-h-\eta) - z(t-h-\eta)].$$

Por la formula de Leibnitz Newton,

$$z(t-h-\eta) - z(t-h-\eta) = \int_{-h}^0 \dot{z}(t+\theta)d\theta, \quad (30)$$

y la sustitución en (29) conduce a

$$\begin{aligned} f(t, z_t) = & -A_1 \int_{-h-\eta}^{-h} \dot{z}(t+\theta)d\theta \\ = & -A_1A_0 \int_{-h-\eta}^{-h} z(t+\theta)d\theta + A_1^2 \int_{-2h-2\eta}^{-2h} z(t+\theta)d\theta. \end{aligned} \quad (31)$$

En este caso, la incertidumbre $f(t, z_t)$ no satisface cotas de forma (28). Para remediar este problema se agregan términos positivos adicionales a la funcional v . Estos términos incrementan el conservadurismo, pero sin ellos la derivada a lo largo del sistema perturbado carecería de términos cuadráticos negativos que puedan compensar los términos asociados a la perturbación (Egorov and Mondié, 2015).

7.2.5. Discusión

La ventaja del análisis de robustez a partir de funcionales con derivada prescrita es que asegura la existencia de una funcional positiva con derivada negativa siempre que el sistema nominal sea estable, lo cual no ocurre con funcionales de forma prescrita que conducen a condiciones suficientes en forma de desigualdades matriciales.

Cabe recalcar que Alexandrova and Zhabko (2018) introdujeron una metodología de análisis de robustez basada en la funcional $v_0(x_t)$ que permite reducir el conservadurismo. Este enfoque se extendió al caso de sistemas con retardos distribuidos (Juárez et al., 2020a).

7.3. Norma H_2

Jarlebring et al. (2011) mostraron que la norma H_2 para sistemas de tipo retardado y neutral se puede caracterizar en términos de la matriz de Lyapunov (vea también Sumacheva and Kharitonov (2014)). Específicamente, sea $G(s)$ la función de transferencia del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}$$

donde B y C son matrices de dimensiones compatibles, y la norma H_2 del sistema exponencialmente estable definida como

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(G(i\omega)G^*(i\omega)) d\omega}.$$

La norma H_2 satisface

$$\begin{aligned}\|G\|_{\mathcal{H}_2} &= \sqrt{\text{Tr}(B^T U(0)B)} \\ &= \sqrt{\text{Tr}(CU(0)C^T)}.\end{aligned}\quad (32)$$

Recientemente, Michiels and Gomez (2020) extendieron este tipo de caracterización a sistemas periódicos con retardos.

8. Aplicaciones: diseño

En esta sección se presentan tres métodos de diseño donde el enfoque de funcionales de tipo completo y la matriz de Lyapunov desempeñan un papel fundamental: el control basado en predictores exactos para sistemas con retardos en la entrada, el control óptimo de sistemas con retardos, y el diseño mediante esquemas numéricos en base a la sensibilidad de la matriz de Lyapunov.

8.1. Control de sistemas con retardos en el estado y la entrada

En la asignación del espectro finito para sistemas con retardos en la entrada (Manitius and Olbrot, 1979)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau),$$

se compensa el retardo utilizando una ley de control de tipo

$$u(t) = Kx(t + \tau),$$

donde la variable futura $x(t + \tau)$ se obtiene de la fórmula de solución a partir de $x(t)$ y $u(t + \theta)$ en $\theta \in [-h, 0]$:

$$x(t + \tau) = e^{A\tau}x(t) + \int_{-\tau}^0 e^{-A\theta}Bu(t + \theta)d\theta,$$

que es una expresión causal. En caso de cancelaciones exactas, el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t), \quad t \geq \tau, \quad (33)$$

tiene un espectro finito, de manera que la ganancia K puede sintonizarse empleando técnicas de diseño para sistemas lineales. Este esquema presenta problemas de robustez ya que la integral en la expresión del control debe aproximarse, problema que ha sido resuelto mediante la introducción de filtros (Mondié and Michiels, 2003).

Kharitonov (2014) extendió el uso de leyes predictivas al caso de sistemas con retardos en la entrada y el estado

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t - \tau) \quad (34)$$

con la propuesta de usar una ley de control de forma

$$u(t) = F_0 x(t + \tau) + F_1 x(t + \tau - h), \quad t \geq 0. \quad (35)$$

La sustitución de (35) en (34) conduce al sistema en lazo cerrado

$$\frac{d}{dt}x(t) = (A_0 + BF_0)x(t) + (A_1 + BF_1)x(t-h), \quad t \geq 0.$$

Para realizar el control (35) se obtienen, mediante la fórmula de Cauchy (2), expresiones integrales causales de $x(t + \tau)$ y $x(t + \tau - h)$ expresadas en términos de la matriz fundamental del sistema.

La versión filtrada de este esquema (Kharitonov, 2015) conduce a un sistema interconectado de tipo retardado. La robustez del sistema en lazo cerrado ante incertidumbre en el retardo y los parámetros del sistema ha sido estudiada en el dominio del tiempo (Juárez et al., 2020b,a) y en el de la frecuencia (Rodríguez-Guerrero et al., 2016).

Un enfoque alternativo para el control de sistemas con retardos en la entrada consiste en emplear predictores observadores del sistema (Najafi et al., 2013). Estos esquemas pierden la naturaleza exacta de los predictores basados en la expresión de la solución, pero tienen la ventaja de emplear una copia adelantada del sistema fácil de diseñar. Sin embargo, en contraste con los predictores exactos, aquí se debe garantizar la estabilidad en lazo cerrado agregando subpredictores, los cuales incrementan la dimensión del esquema y demandan una etapa de análisis y diseño adicional.

Estas técnicas de compensación de retardos se han aplicado al control de procesos de deshidratación de alimentos (Santos-Sánchez et al., 2016, 2019, 2021), al control de altura de quadrotros en base a medidas de visión y GPS (Ordaz et al., 2013), a la atenuación de vibraciones de edificios (Vite et al., 2020), a la predicción del número real de infectados en epidemias (Castaños and Mondié, 2021), al control de formaciones de robots no holonómicos (Velasco-Villa et al., 2021) y de flotas de vehículos (Vite et al., 2021b), a problemas de consenso (Fragoso-Rubio et al., 2019) y al control de procesos químicos (Hernández-Pérez et al., 2020).

8.2. Control óptimo

El regulador lineal cuadrático para sistemas con retardo puntual y distribuido se formula de la manera siguiente.

Considere un sistema de forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + \int_{-h}^0 D(\theta)x(t+\theta)d\theta + Bu(t) \quad (36)$$

donde $A, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $D(\theta)$ es una matriz $n \times n$ de funciones definidas en $[-h, 0]$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, y la condición inicial es

$$x(t) = \varphi(t), \text{ para } t \in [-h, 0] \quad (37)$$

donde φ es una función continua arbitraria.

Kuhsner and Barnea (1970) y Ross and Flügge-Lotz (1969) demostraron que los controles admisibles para el sistema (36) son de forma

$$u(t) = \Gamma_0x(t) + \int_{-h}^0 \Gamma_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \quad (38)$$

donde $\Gamma_0 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ y $\Gamma_1(\theta)$ es una función matricial continua de dimensión $n \times n$ definida en el intervalo $[-h, 0]$, y tales que el sistema en lazo cerrado (36,38) es estable.

El problema consiste en determinar la ley de control que minimiza el índice de desempeño

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt, \quad (39)$$

donde las matrices $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $R \in \mathbb{R}^{r \times r}$ son positivas definidas.

En Ross and Flügge-Lotz (1969) se mostró que el control óptimo es solución de la ecuación de tipo Bellman

$$\min_u \left(\frac{dv(x_t)}{dt} \Big|_{(36)} + x(t)^T Qx(t) + u^T Ru \right) = 0 \quad (40)$$

donde $v(x_t)$ es la función de Bellman. La solución de este problema no es evidente. Como en el caso de sistemas libres de retardos, es posible encontrar una solución subóptima mediante un proceso iterativo de construcción de la funcional de Bellman $v(x_t)$ basado en (40). La construcción, sumamente técnica, se encuentra en Santos et al. (2009). Este resultado se extendió a los sistemas de tipo neutral (Cuvas et al., 2021). La construcción explícita de la funcional de Bellman y la demostración de sus principales propiedades se presenta en Ortega-Martínez et al. (2021). Diversas aplicaciones de control óptimo a procesos con retardos fueron desarrolladas en Ortega-Martínez et al. (2018) y López-Labra et al. (2019).

8.3. Sensitividad de la matriz de Lyapunov y sus aplicaciones

En Gomez et al. (2019c) y Gomez and Michiels (2019) se muestra que las derivadas de la matriz de Lyapunov con respecto a los parámetros del sistema pueden ser calculadas de forma semianalítica. Específicamente, es posible formar un sistema libre de retardos similar a (20) y a partir de éste obtener, para cualquier $\tau \in [0, h]$, las derivadas parciales de los componentes de la matriz de Lyapunov con respecto a los parámetros del sistema: $\frac{\partial U(\tau, p)}{\partial p_i}$, donde $p = (p_1 \ \dots \ p_k)$ son parámetros del sistema.

En Gomez et al. (2019c,e), y Gomez and Michiels (2019) se ha tomado ventaja de estas expresiones para proponer algoritmos de sintonización de controladores que minimicen ciertos índices de desempeño mediante algoritmos de optimización numérica basados en gradiente. Específicamente, en Gomez et al. (2019c) se propone un esquema para la minimización de la norma H_2 ; en Gomez et al. (2019e) se minimiza un índice cuadrático empleando controladores basados en retardos; y en Gomez and Michiels (2019) se define y minimiza una medida nueva de estabilidad nombrada abscisa espectral suave. La extensión de esta medida de estabilidad para sistemas con retardos distribuidos se reporta en Vite et al. (2021a).

9. Conclusiones

En este trabajo, se presentaron condiciones necesarias y suficientes de estabilidad de sistemas con retardos en términos de la matriz de Lyapunov en el marco de la teoría de funcionales de Lyapunov Krasovskii de tipo completo. La reducción del número r que garantiza la suficiencia de las condiciones es sin duda un reto de actualidad. El contraste observado en los ejemplos presentados entre los valores de r para los cuales se alcanza la zona de estabilidad exacta con las cotas r_0 calculadas en el Teorema 4 permite ser optimista. El desarrollo de métodos de cálculo eficaz de la matriz de Lyapunov, en especial para sistemas de grandes dimensiones o con numerosos retardos, es una tarea pendiente. Otras direcciones de investigación de interés es, a nuestro juicio, la explotación de los resultados presentados en la solución de problemas de síntesis y en aplicaciones a problemas concretos.

Los resultados presentados en este artículo muestran el dinamismo del trabajo de investigación sobre funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo en México, temática impulsada por Vladimir Kharitonov durante su permanencia en el departamento de Control Automático del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados de 1995 a 2007.

Finalmente, cabe mencionar otras direcciones de estudio de sistemas con retardos cultivadas en el país, por ejemplo los enfoques algebraicos diferenciales y geométricos (Márquez-Martínez and Moog, 2007; Califano et al., 2013), los resultados teóricos fundamentales (Bejarano, 2021; Bejarano and Zheng, 2017), así como los temas mencionados en la introducción y a lo largo de este trabajo: las condiciones suficientes en forma de desigualdades matriciales lineales, los cuasipolinomios, los sistemas no lineales con retardos y las numerosas aplicaciones de control a problemas donde existen o se emplean retardos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado parcialmente gracias al apoyo del Conacyt, Mexico, Proyecto A1-S-24796.

Referencias

- Alexandrova, I. V., Zhabko, A. P., 2018. A new LKF approach to stability analysis of linear systems with uncertain delays. *Automatica* 91, 173–178.
- Arisfendi-Valle, H., Melchor-Aguilar, D., 2019. On the Lyapunov matrices for integral delay systems. *Int. J. of Systems Science* 50 (6), 1190–1201.
- Bejarano, F. J., 2021. Zero dynamics normal form and disturbance decoupling of commensurate and distributed time-delay systems. *Automatica* 129, 109634.
- Bejarano, F. J., Zheng, G., 2017. Unknown input functional observability of descriptor systems with neutral and distributed delay effects. *Automatica* 85, 186–192.
- Califano, C., Márquez-Martínez, L. A., Moog, C. H., 2013. Linearization of time-delay systems by input output injection and output transformation. *Automatica* 49 (6), 1932–1940.
- Castaños, F., Estrada, E., Mondié, S., Ramírez, A., 2018. Passivity-based PI control of first-order systems with I/O communication delays: a frequency domain analysis. *Int. J. of Control* 91 (11), 2549–2562.
- Castaños, F., Mondié, S., 2021. Observer-based predictor for a susceptible-infectious-recovered model with delays: an optimal-control case study. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* 31 (11), 5118–5133.
- Cuvas, C., Mondié, S., 2016. Necessary stability conditions for delay systems with multiple pointwise and distributed delays. *IEEE Trans. on Automatic Control* 61 (7), 1987–1994.
- Cuvas, C., Ramírez, A., Juárez, L., Mondié, S., 2019. Scanning the space of parameters for stability regions of a class of time-delay systems; a Lyapunov matrix approach. *Delays and Interconnections: Methodology, Algorithms and Applications*.
- Cuvas, C., Santos-Sánchez, O.-J., Ordaz, P., Rodríguez-Guerrero, L., 2021. Suboptimal control for systems with commensurate and distributed delays of neutral type. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* n/a (n/a).
- Egorov, A. V., 2014. A new necessary and sufficient stability condition for linear time-delay systems. In: *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*. Cape Town, South Africa, pp. 11018–11023.
- Egorov, A. V., 2016. A finite necessary and sufficient stability condition for linear retarded type systems. In: *Proceedings of the 55th IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, USA, pp. 3155–3160.
- Egorov, A. V., Cuvas, C., Mondié, S., 2017. Necessary and sufficient stability conditions for linear systems with pointwise and distributed delays. *Automatica* 80, 218–224.
- Egorov, A. V., Mondié, S., 2013. A stability criterion for the single delay equation in terms of the Lyapunov matrix. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Prikl. Mat., Inf., Prot. Upr.* 1, 106–115.
- Egorov, A. V., Mondié, S., 2014. Necessary stability conditions for linear delay systems. *Automatica* 50 (12), 3204–3208.
- Egorov, A. V., Mondié, S., 2015. The delay Lyapunov matrix in robust stability analysis of time-delay systems. In: *Proceedings of the 12th IFAC Workshop on Time Delay Systems*. pp. 245–250.
- Fragoso-Rubio, V., Velasco-Villa, M., Vallejo-Alarcon, J., Vásquez-Santacruz, M., Hernández-Pérez, M., 2019. Consensus problem for linear time-invariant systems with time-delay. *Mathematical Problems in Engineering*. DOI: <https://doi.org/10.1155/2019/1607474>
- Gomez, M. A., Cuvas, C., Mondié, S., Egorov, A. V., 2016a. Scanning the space of parameters for stability regions of neutral type delay systems: A Lyapunov matrix approach. In: *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*. pp. 3149–3154.
- Gomez, M. A., Egorov, A. V., Mondié, S., 2018. A new stability criterion for neutral-type systems with one delay. In: *Proceedings of the 14th IFAC Workshop on Time Delay Systems*. pp. 177–182.
- Gomez, M. A., Egorov, A. V., Mondié, S., 2019a. Lyapunov matrix based necessary and sufficient stability condition by finite number of mathematical operations for retarded type systems. *Automatica* 108, 108475.
- Gomez, M. A., Egorov, A. V., Mondié, S., 2019b. Necessary stability conditions for neutral-type systems with multiple commensurate delays. *Int. J. of Control* 92 (5), 1155–1166.
- Gomez, M. A., Egorov, A. V., Mondié, S., 2020. Necessary and sufficient stability condition by finite number of mathematical operations for time-delay systems of neutral type. *IEEE Trans. on Automatic Control* 66 (6), 2802–2808.
- Gomez, M. A., Egorov, A. V., Mondié, S., Michiels, W., 2019c. Optimization of the \mathcal{H}_2 norm for single delay systems, with application to control design and model approximation. *IEEE Trans. on Automatic Control* 64 (2), 804–811.
- Gomez, M. A., Egorov, A. V., Mondié, S., Zhabko, A. P., 2019d. Computation of the Lyapunov matrix for periodic time-delay systems and its application to robust stability analysis. *Systems & Control Letters* 132, 104501.
- Gomez, M. A., Michiels, W., 2019. Characterization and optimization of the smoothed spectral abscissa for time-delay systems. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* 29 (13), 4402–4418.
- Gomez, M. A., Michiels, W., Mondié, S., 2019e. Design of delay-based output-feedback controllers optimizing a quadratic cost function via the delay Lyapunov matrix. *Automatica* 107, 146–153.
- Gomez, M. A., Ochoa, G., Mondié, S., 2016b. Necessary exponential stability conditions for linear periodic time-delay systems. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* 26 (18), 3996–4007.
- González, A., Aragüés, R., López-Nicolás, G., Sagiúes, C., 2020. Predictor-feedback synthesis in coordinate-free formation control under time-varying delays. *Automatica* 113, 108811.
- Hernández-Díez, J.-E., Méndez-Barrios, C.-F., Mondié, S., Niculescu, S.-I., González-Galván, E., 2018. Proportional-delayed controllers design for LTI systems: a geometric approach. *Int. J. of Control* 91 (4), 907–925.
- Hernández-Díez, J.-E., Méndez-Barrios, C.-F., Niculescu, S.-I., 2019. Practical guidelines for tuning PD and PI delay-based controllers. In: *15th IFAC Workshop on Time Delay Systems*. pp. 61–66.
- Hernández-Pérez, M., Fragoso-Rubio, V., Velasco-Villa, M., del Muro-Cuéllar, B., Márquez-Rubio, J., Puebla, H., 2020. Prediction-based control for a class of unstable time-delayed processes by using a modified sequential predictor. *J. of Process Control* 92, 98–107.
- Jarlebring, E., Vanbiervliet, J., Michiels, W., 2011. Characterizing and computing the H_2 norm of time-delay systems by solving the delay Lyapunov equation. *IEEE Trans. on Automatic Control* 56 (4), 814–825.
- Juárez, L., Alexandrova, I. V., Mondié, S., 2020a. Robust stability analysis for linear systems with distributed delays: A time-domain approach. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* 30 (18), 8299–8312.
- Juárez, L., Mondié, S., Kharitonov, V. L., 2020b. Dynamic predictor for systems with state and input delay: A time-domain robust stability analysis. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* 30 (6), 2204–2218.
- Kharitonov, V. L., 2013. *Time-Delay Systems: Lyapunov functionals and matrices*. Birkhäuser, Basel.
- Kharitonov, V. L., 2014. An extension of the prediction scheme to the case of systems with both input and state delay. *Automatica* 50 (1), 211–217.
- Kharitonov, V. L., 2015. Predictor-based controls: the implementation problem. *Differential Equations* 51 (13), 1675–1682.
- Kharitonov, V. L., Zhabko, A. P., 2003. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica* 39 (1), 15–20.
- Krasovskii, N. N., 1963. *Stability of motion*. Stanford University Press.
- Kuhsner, H. J., Barnea, D., 1970. On the control of a linear functional differential equation with quadratic cost. *SIAM J. on Control and Optimization* 8 (2), 257–272.
- Letyagina, O. N., Zhabko, A. P., 2009. Robust stability analysis of linear periodic systems with time delay. *Int. J. of Modern Physics A* 24 (5), 893–907.
- López-Labra, H.-A., Santos-Sánchez, O.-J., Rodríguez-Guerrero, L., Ordaz-Oliver, J.-P., Cuvas-Castillo, C., 2019. Experimental results of optimal and robust control for uncertain linear time-delay systems. *J. of Optimization Theory and Applications* 181 (3), 1076–1089.
- Manitius, A., Olbrot, A., 1979. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Trans. on Automatic Control* 24 (4), 541–552.
- Márquez-Martínez, L., Moog, C., 2007. New insights on the analysis of nonlinear time-delay systems: Application to the triangular equivalence. *Systems & Control Letters* 56 (2), 133–140.
- Melchor-Aguilar, D., Kharitonov, V., Lozano, R., 2010. Stability conditions for integral delay systems. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* 20 (1), 1–15.
- Michiels, W., Gomez, M. A., 2020. On the dual linear periodic time-delay system: Spectrum and Lyapunov matrices, with application to analysis and balancing. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* 30 (10), 3906–3922.
- Mondié, S., 2012. Assessing the exact stability region of the single-delay scalar equation via its Lyapunov function. *IMA J. of Mathematical Control and Information* 29 (4), 459–470.
- Mondié, S., Cuvas, C., Ramírez, A., Egorov, A., 2012. Necessary conditions for the stability of one delay systems: a Lyapunov matrix approach. In: *Proceedings of the 10th IFAC Workshop on Time Delay Systems*. Boston, USA, pp. 13–18.
- Mondié, S., Kharitonov, V., 2005. Exponential estimates for retarded time-delay systems: an LMI approach. *IEEE Trans. on Automatic Control* 50 (2), 268–273.

- Mondié, S., Melchor-Aguilar, D., 2012. Exponential stability of integral delay systems with a class of analytic kernels. *IEEE Trans. on Automatic Control* 57 (2), 484–489.
- Mondié, S., Michiels, W., 2003. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation. *IEEE Trans. on Automatic Control* 48 (12), 2207–2212.
- Mondié, S., Ochoa-Ortega, G., Ochoa-Galván, B., 2011. Instability conditions for linear time delay systems: a Lyapunov matrix function approach. *Int. J. of Control* 84 (10), 1601–1611.
- Najafi, M., Hosseinnia, S., Sheikholeslam, F., Karimadini, M., 2013. Closed-loop control of dead time systems via sequential sub-predictors. *Int. J. of Control* 86 (4), 599–609.
- Neimark, J., 1949. D-subdivisions and spaces of quasi-polynomials. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika* 13 (5), 349–380.
- Nuño, E., Arteaga-Pérez, M., Espinosa-Pérez, G., 2018. Control of bilateral teleoperators with time delays using only position measurements. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* 28 (3), 808–824.
- Nuño, E., Ortega, R., 2018. Achieving consensus of Euler Lagrange agents with interconnecting delays and without velocity measurements via passivity-based control. *IEEE Trans. on Control Systems Technology* 26 (1), 222–232.
- Ochoa-Ortega, G., Kharitonov, V., Mondié, S., 2013. Critical frequencies and parameters for linear delay systems: A Lyapunov matrix approach. *Systems & Control Letters* 62 (9), 781–790.
- Ochoa-Ortega, G., Villafuerte-Segura, R., Ramírez-Neria, M., Vite-Hernández, L., 2019. σ -stabilization of a flexible joint robotic arm via delayed controllers. *Complexity*, 7289689.
- Ordaz, J., Salazar, S., Mondié, S., Romero, H., Lozano, R., 2013. Predictor-based position control of a quad-rotor with delays in GPS and vision measurements. *J. of Intelligent and Robotic Systems* 70 (4), 13–26.
- Ortega-Martínez, J., Santos-Sánchez, O., Rodríguez-Guerrero, L., Romero-Trejo, H., Ordaz-Oliver, J.-P., 2018. Adaptive nonlinear optimal control for a banana dehydration process. *Int. J. of Innovative Computing, Information and Control* 14 (6), 2055–2069.
- Ortega-Martínez, J.-M., Santos-Sánchez, O.-J., Mondié, S., 2021. Comments on the Bellman functional for linear time-delay systems. *Optimal Control Applications and Methods* 42 (5), 1531–1540.
- Ortiz, R., Del Valle, S., Egorov, A. V., Mondié, S., 2020. Necessary stability conditions for integral delay systems. *IEEE Trans. on Automatic Control* 65 (10), 4377–4384.
- Ortiz, R., Egorov, A. V., Mondié, S., 2021. Necessary and sufficient stability conditions for integral delay systems. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* 24 (12), 1760–1771.
- Ramírez, A., Mondié, S., Garrido, R., Sipahi, R., 2016. Design of proportional-integral-retarded (PIR) controllers for second-order LTI systems. *IEEE Trans. on Automatic Control* 61 (6), 1688–1693.
- Ramírez, A., Sipahi, R., 2019. Single-delay and multiple-delay Proportional-Retarded (PR) protocols for fast consensus in a large-scale network. *IEEE Trans. on Automatic Control* 64 (5), 2142–2149.
- Ramírez, A., Sipahi, R., Mendéz-Barrios, C.-F., Leyva-Ramos, J., 2021. Derivative-dependent control of a fuel cell system with a safe implementation: An artificial delay approach. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*. DOI: 10.1177/09596518211012784
- Ramírez, L. F., Saldivar, B., Ávila Vilchis, J. C., Montes de Oca, S., 2018. Lyapunov-Krasovskii approach to the stability analysis of the milling process. *IET Control Theory & Applications* 12 (9), 1332–1339.
- Ramírez, M., Villafuerte, R., González, T., Bernal, M., 2015. Exponential estimates of a class of time-delay nonlinear systems with convex representations. *Int. J. of Applied Mathematics and Computer Science* 25 (4), 815–826.
- Ramírez Jerónimo, L. F., Zenteno Torres, J., Saldivar, B., Dávila, J., Ávila Vilchis, J. C., 2020. Robust stabilisation of linear time-invariant time-delay systems via first order and super-twisting sliding mode controllers. *IET Control Theory & Applications* 14 (1), 175–186.
- Ramírez-Neria, M., Ochoa-Ortega, G., Luviano-Juárez, A., Lozada-Castillo, N., Trujano-Cabrera, M. A., Campos-López, J. P., 2019. Proportional Retarded control of robot manipulators. *IEEE Access* 7, 13989–13998.
- Rocha, E., Mondié, S., Di Loreto, M., 2018. Necessary stability conditions for linear difference equations in continuous time. *IEEE Transactions on Automatic Control* 63 (12), 4405–4412.
- Rodríguez-Guerrero, L., Kharitonov, V. L., Mondié, S., 2016. Robust stability of dynamic predictor based control laws for input and state delay systems. *Systems & Control Letters* 96, 95–102.
- Ross, D. W., Flügge-Lotz, I., 1969. An optimal control problem for systems with differential difference equation dynamics. *SIAM J. on Control and Optimization* 7 (4), 609–623.
- Santos, O., Mondié, S., Kharitonov, V. L., 2009. Linear quadratic suboptimal control for time-delays systems. *Int. J. of Control* 82 (1), 147–154.
- Santos-Sánchez, N.-F., Raúl, S.-C., Santos-Sánchez, O.-J., Romero-Trejo, H., Garrido-Aranda, E., 2016. On the effects of the temperature control at the performance of a dehydration process: energy optimization and nutrients retention. *The Int. J. of Advanced Manufacturing Technology* 9 (12), 3157–3171.
- Santos-Sánchez, O.-J., Mondié, S., Rodríguez-Guerrero, L., Carmona-Rosas, J.-C., 2019. Delays compensation for an atmospheric sliced tomatoes dehydration process via state predictors. *J. of the Franklin Institute* 356 (18), 11473–11491.
- Santos-Sánchez, O.-J., Velasco-Rebollo, R.-E., Rodríguez-Guerrero, L., Ordaz-Oliver, J.-P., Cuvas-Castillo, C., 2021. Lyapunov redesign for input and state delays systems by using optimal predictive control and ultimate bound approaches: theory and experiments. *IEEE Trans. on Industrial Electronics* 68 (12), 12575–12583.
- Sumacheva, V. A., Kharitonov, V. L., 2014. Computation of the \mathcal{H}_2 norm of the transfer matrix of a neutral type system. *Differential equations* 50 (13), 1752–1759.
- Velasco-Villa, M., Cruz-Morales, R., Rodríguez-Angeles, A., Domínguez-Ortega, C., 2021. Observer-based time-variant spacing policy for a platoon of non-holonomic mobile robots. *Sensors* 21 (11).
- Villafuerte, R., Mondié, S., Poznyak, A., 2011. Practical stability of time-delay systems: LMI's approach. *European Journal of Control* 17 (2), 127–138.
- Villafuerte, R., Saldivar, B., Mondié, S., 2013. Practical stability and stabilization of a class of nonlinear neutral type time delay systems with multiple delays: a BMI approach. *Int. J. of Control, Automation and Systems* 11 (5), 859–867.
- Vite, L., Gomez, M. A., Mondié, S., Michiels, W., 2021a. Stabilization of distributed time-delay systems: a smoothed spectral abscissa optimization approach. *Int. J. of Control*, 1–29. DOI: Accepted
- Vite, L., Gomez, M. A., Morales, J., Mondié, S., 2020. A new control scheme for time-delay compensation for structural vibration. In: 21st IFAC World Congress. pp. 4804–4809.
- Vite, L., Juárez, L., Gomez, M. A., Mondié, S., 2021b. Dynamic predictor-based adaptive cruise control. *J. of The Franklin Institute*, submitted.