



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Facultad de Administración y Dirección de Empresas

Estudio probabilístico de estrategias sintéticas basadas en un straddle. Modelización matemática y aplicación a activos cotizados

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Dirección Financiera y Fiscal

AUTOR/A: Calvo Latorre, Ana Isabel

Tutor/a: Cortés López, Juan Carlos

Cotutor/a externo: BURGOS SIMON, CLARA

CURSO ACADÉMICO: 2021/2022



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



## TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

MÁSTER EN DIRECCIÓN FINANCIERA Y FISCAL

# ESTUDIO PROBABILÍSTICO DE ESTRATEGIAS SINTÉTICAS BASADAS EN UN *STRADDLE*. MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y APLICACIÓN A ACTIVOS COTIZADOS

Autora: Ana Isabel Calvo Latorre

Tutor: Dr. Juan Carlos Cortés López

Cotutora: Dra. Clara Burgos Simón

Curso académico: 2021-2022

## Índice

Índice de tablas.....	6
Índice de gráficos y figuras .....	8
Resumen del trabajo .....	10
Objetivos del trabajo .....	12
Capítulo 1. Preliminares financieros.....	14
1.1. Los mercados financieros .....	14
1.2. Conexión entre la bolsa y la economía .....	14
1.3. Índices bursátiles y el IBEX-35 .....	15
1.4. Solaria, S.A. ....	17
Capítulo 2. Contratos de opciones sobre acciones .....	19
2.1. Los contratos de opciones .....	19
2.2. Opciones <i>long call</i> , <i>short call</i> , <i>long put</i> y <i>short put</i> .....	21
2.2.1. <i>Long call</i> .....	21
2.2.2. <i>Short call</i> .....	22
2.2.3. <i>Long put</i> .....	23
2.2.4. <i>Short put</i> .....	24
Capítulo 3. Estrategias especulativas con opciones financieras .....	25
3.1. <i>Bottom Straddle</i> o Cono.....	25
3.2. <i>Top Straddle</i> o Cono invertido .....	27

Capítulo 4. Preliminares estocásticos: Introducción del Movimiento Browniano .....	30
4.1. El Movimiento Browniano (o proceso de Wiener) .....	30
4.2. Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano .....	32
4.3. El Cálculo de Itô.....	33
4.3.1. La integral de Itô .....	35
4.3.2. Propiedades de la integral de Itô .....	39
Capítulo 5. Modelo estocástico Log-Normal .....	40
5.1. Motivación del modelo estocástico para subyacentes en condiciones de certidumbre.....	40
5.2. Motivación del modelo estocástico para activos cotizados: el modelo Log-Normal.....	41
5.3. Solución del modelo Log-Normal.....	42
5.4. Propiedades estadísticas de la solución del modelo Log-Normal .....	44
5.4.1. Función media .....	44
5.4.2. Función varianza.....	45
5.5. Calibración de los parámetros del modelo Log-Normal.....	45
5.5.1. Método de los momentos .....	46
5.5.2. Método de máxima verosimilitud .....	47
5.6. Validación del modelo Log-Normal .....	51
5.6.1. Medidas de Bondad de Ajuste.....	51
5.6.2. Validación por intervalos de confianza teóricos .....	52

5.6.3. Validación por gráficos comparativos .....	54
Capítulo 6. Valoración de opciones europeas: fórmulas de Black-Scholes.....	55
6.1. Aplicación de Black-Scholes para calcular el precio de la prima de una <i>call</i> u opción de compra ( <i>C</i> ) .....	55
6.2. Aplicación de Black-Scholes para calcular el precio de la prima de una <i>put</i> u opción de venta ( <i>P</i> ) .....	56
6.3. Aplicación de Black-Scholes para calcular el precio de la prima de una <i>put</i> u opción de venta ( <i>P</i> ) a partir de la paridad <i>put-call</i> .....	57
Capítulo 7. Aplicación del modelo Log-Normal .....	58
7.1. Estimación de los parámetros del modelo Log-Normal .....	59
7.1.1. Estimación de parámetros $\mu$ y $\sigma$ mediante el método de los momentos	59
7.1.2. Estimación de los parámetros mediante el método de máxima verosimilitud.....	61
7.2. Validación del modelo Log-Normal .....	62
7.2.1. Validación de los parámetros estimados mediante el método de los momentos.....	62
7.2.2. Validación de los parámetros estimados mediante el método de máxima verosimilitud.....	68
Capítulo 8. Cálculo de las probabilidades de beneficio mediante estrategias especulativas de tipo cono .....	73
8.1. Determinación de la probabilidad de obtener beneficios con una estrategia especulativa de tipo cono.....	73

8.2. Determinación de la probabilidad de obtener beneficios con una estrategia especulativa de tipo cono invertido .....	76
8.3. Presentación de escenarios y determinación de las probabilidades de beneficio, aplicadas al caso de Solaria, S.A. ....	77
8.3.1. Estrategia de tipo cono. Probabilidad de beneficios del 50%.....	79
8.3.2. Estrategia de tipo cono. Probabilidad de beneficios del 75%.....	80
8.3.3. Estrategia de tipo cono. Probabilidad de beneficios del 90%.....	81
8.3.4. Estrategia de tipo cono invertido. Probabilidad de beneficios del 50% ..	82
8.3.5. Estrategia de tipo cono invertido. Probabilidad de beneficios del 75% ..	82
8.3.6. Estrategia de tipo cono invertido. Probabilidad de beneficios del 90% ..	83
8.3.7. Comparación de los escenarios de cono y cono invertido.....	84
Conclusiones.....	87
Bibliografía.....	89
Anexos .....	92

## Índice de tablas

Tabla 1.3.1: Composición del IBEX-35. ....	16
Tabla 7.1.1: Log-retornos durante el horizonte temporal analizado. ....	60
Tabla 7.1.2: Media y quasi-varianza de los log-retornos. ....	61
Tabla 7.1.3: Estimación de $\mu$ y $\sigma$ mediante el método de los momentos. ....	61
Tabla 7.1.4: Estimación de $\mu$ y $\sigma$ para el método de máxima verosimilitud.....	61
Tabla 7.2.1: Media y desviación típica teóricas de Solaria, S.A. aplicando las estimaciones de $\mu$ y $\sigma$ calculadas mediante el método de los momentos. ....	63
Tabla 7.2.2: Medidas de bondad de ajuste a partir de las estimaciones de los parámetros calculadas con el método de los momentos. ....	65
Tabla 7.2.3: Medidas de bondad de ajuste calculadas a partir de las estimaciones de los parámetros $\mu$ y $\sigma$ obtenidas mediante el método de los momentos. ....	65
Tabla 7.2.4: Intervalos de confianza teóricos al 95% de confianza, aplicando las estimaciones de los parámetros obtenidas mediante el método de los momentos. ...	67
Tabla 7.2.5: Media y desviación típica teóricas de Solaria, S.A. aplicando las estimaciones de $\mu$ y $\sigma$ calculadas mediante el método de máxima verosimilitud. ....	70
Tabla 7.2.6: Medidas de bondad de ajuste calculadas con las estimaciones de los parámetros $\mu$ y $\sigma$ obtenidas mediante el método de máxima verosimilitud. ....	70
Tabla 7.2.7: Intervalos de confianza teóricos al 95% de confianza, aplicando las estimaciones de los parámetros obtenidas mediante el método de máxima verosimilitud.....	71
Tabla 8.3.1: Valores clave comunes a todos los escenarios.....	80

Tabla 8.3.2: Determinación del precio de ejercicio ( $E$ ) y de las primas ( $C$ ) y ( $P$ ) para una probabilidad de beneficios del 50% en la estrategia del cono.....	80
Tabla 8.3.3: Determinación del precio de ejercicio ( $E$ ) y de las primas ( $C$ ) y ( $P$ ) para una probabilidad de beneficios del 75% en la estrategia del cono.....	81
Tabla 8.3.4: Determinación del precio de ejercicio ( $E$ ) y de las primas ( $C$ ) y ( $P$ ) para una probabilidad de beneficios del 90% en la estrategia del cono.....	81
Tabla 8.3.5: Determinación del precio de ejercicio ( $E$ ) y de las primas ( $C$ ) y ( $P$ ) para una probabilidad de beneficios del 50% en la estrategia del cono invertido. ....	82
Tabla 8.3.6: Determinación del precio de ejercicio ( $E$ ) y de las primas ( $C$ ) y ( $P$ ) para una probabilidad de beneficios del 75% en la estrategia del cono invertido. ....	83
Tabla 8.3.7: Determinación del precio de ejercicio ( $E$ ) y de las primas ( $C$ ) y ( $P$ ) para una probabilidad de beneficios del 90% en la estrategia del cono invertido. ....	83
Tabla 8.3.8: Comparación de los precios de ejercicio y las primas de las opciones, así como de la inversión inicial y el desembolso final, en caso de ejercer, en los diferentes escenarios de inversión planteados. ....	84



## Índice de gráficos y figuras

Gráfico 1.4.1: Histórico de la evolución del precio por acción de Solaria, S.A. desde su admisión a cotización (medias mensuales), donde el eje X se corresponde con los años, el eje Y se corresponde con el precio de la acción y la línea azul muestra la evolución del precio de la acción. Las bandas rojas de la parte inferior representan los periodos en los que disminuye el volumen de negociación y las bandas verdes, los periodos en los que aumenta el volumen de negociación. El símbolo D muestra los momentos en los que repartieron dividendos. ....	18
Gráfico 2.2.1: Diagrama de <i>pay-off</i> para posición larga de una opción de compra, donde $E$ es el precio de ejercicio de la call, $C$ es la prima de la call y $S_T$ es el precio del subyacente a vencimiento $T$ . ....	22
Gráfico 2.2.2: Diagrama de <i>pay-off</i> para posición corta de una opción de compra, donde $E$ es el precio de ejercicio de la call, $C$ es la prima de la call y $S_T$ es el precio del subyacente a vencimiento $T$ . ....	22
Gráfico 2.2.3: Diagrama de <i>pay-off</i> para posición larga de una opción de venta, donde $E$ es el precio de ejercicio de la put, $P$ es la prima de la put y $S_T$ es el precio del subyacente a vencimiento $T$ . ....	24
Gráfico 2.2.4: Diagrama de <i>pay-off</i> para posición corta de una opción de venta, donde $E$ es el precio de ejercicio de la put, $P$ es la prima de la put y $S_T$ es el precio del subyacente a vencimiento $T$ . ....	24
Gráfico 3.1.1: Representación de las funciones de beneficios/pérdidas de la <i>long call</i> (véase expresión (2.2.1)), de la <i>long put</i> (véase expresión (2.2.3)) y de la función de beneficios/pérdidas totales de la estrategia del cono (véase expresión (3.1.1)), donde $E$ representa el precio de ejercicio, $C$ y $P$ son las primas de la call y de la put, respectivamente y $S_T$ representa el precio del subyacente a vencimiento $T$ . ....	26

Gráfico 3.2.1: Representación de las funciones de beneficios/pérdidas de la *short call* (véase expresión (2.2.2)), de la *short put* (véase expresión (2.2.4)) y la función de beneficios/pérdidas totales de la estrategia del cono invertido (véase expresión (3.2.1)), donde  $E$  representa el precio de ejercicio,  $C$  y  $P$  son las primas de la call y de la put, respectivamente y  $S_T$  representa el precio del subyacente a vencimiento  $T$ ..... 28

Gráfico 7.2.1: Intervalos de confianza (95%) para las acciones de Solaria, S.A. utilizando el método de los momentos. .... 68

Gráfico 7.2.2: Intervalos de confianza (95%) para las acciones de Solaria, S.A. utilizando el método de máxima verosimilitud..... 72

Figura 8.3.1: Cuadro de diálogo de la herramienta Solver para la obtención del precio de ejercicio ( $E$ ) en el escenario 1. .... 79

## Resumen del trabajo

Dada la incertidumbre existente en los mercados financieros, es realmente complicado predecir los precios de cotización futuros de las acciones. Como consecuencia de ello, el inversor se expone a potenciales pérdidas en caso de invertir en bolsa. En este trabajo, estudiamos estrategias sintéticas de tipo cono (*straddle*) y de tipo cono invertido (*top straddle*) combinando opciones financieras de compra y de venta con el fin de determinar una probabilidad de beneficios a vencimiento. Para alcanzar el objetivo propuesto, será necesario desarrollar conceptos tanto matemáticos como financieros.

En esta memoria se asumirá que la dinámica del subyacente cotizado puede modelizarse mediante el modelo estocástico Log-Normal cuya solución está dada por un proceso estocástico denominado Movimiento Browniano Geométrico, el cual depende de los parámetros  $\mu$  (tendencia) y  $\sigma$  (volatilidad), que deben ser estimados a partir de los datos de cotización históricos del subyacente. Los parámetros mencionados se calibran mediante el método de los momentos y mediante el método de máxima verosimilitud.

Las opciones son productos sintéticos que, combinados entre sí, permiten crear múltiples estrategias de inversión. En este trabajo, analizamos desde una perspectiva teórica las estrategias especulativas de tipo cono y de tipo cono invertido combinando opciones de compra y de venta simultáneamente. Asimismo, se explican las fórmulas de Black-Scholes, que serán de utilidad para calcular las primas de las opciones europeas de compra (*calls*) y de venta (*puts*).

A continuación, aplicamos dichas estrategias a las acciones del activo subyacente Solaria, S.A. para determinar el precio de ejercicio y el valor que deben tener las primas de las opciones. Para ello, se diseñan tres escenarios para cada estrategia con una probabilidad de beneficios del 50%, del 75% y del 90%, respectivamente. El propósito de crear los diferentes escenarios es llevar a cabo un análisis basado en el valor de la prima de las opciones y los correspondientes precios de ejercicio.

En la parte práctica del trabajo, calibramos los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  del modelo Log-Normal que asumimos para la dinámica del subyacente mediante el método de máxima verosimilitud (que es el que arroja una mejor medida de bondad del ajuste) y se aplican las fórmulas de Black-Scholes para determinar el precio de las primas. Todos los cálculos se realizan mediante la herramienta Solver de Microsoft Excel®. La aplicación práctica de las probabilidades de beneficio a un subyacente real nos ofrece una orientación sobre qué decisiones deberíamos tomar si deseáramos invertir en dicho título con una determinada probabilidad de beneficio al usar una estrategia sintética de inversión de tipo cono o cono invertido.

## Objetivos del trabajo

El presente trabajo trata sobre el estudio de estrategias de inversión de tipo cono y cono invertido con el activo subyacente Solaria, S.A., basándonos en opciones financieras de compra y de venta, para obtener beneficios con una probabilidad predeterminada, que en este trabajo se ha elegido como 50%, 75% y 90% para crear tres escenarios distintos, aunque la metodología desarrollada puede aplicarse a cualquier valor deseado.

Para alcanzar dichos objetivos, hemos considerado el modelo Log-Normal para describir el comportamiento del subyacente. También se han utilizado las fórmulas de Black-Scholes para establecer el precio de las opciones europeas *call* y *put*. Finalmente, se plantean diferentes escenarios en los que, variando el precio de ejercicio alcanzamos una probabilidad de beneficios predeterminada.

Los objetivos específicos planteados en este trabajo son:

- Analizar las características de las opciones financieras de compra (*call*) y de venta (*put*).
- Estudiar los fundamentos teóricos sobre las propiedades del Movimiento Browniano y la Teoría de Itô para obtener la solución del modelo Log-Normal.
- Profundizar en el desarrollo y las propiedades estadísticas del modelo Log-Normal.
- Estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  en el modelo Log-Normal utilizando el método de los momentos y el método de máxima verosimilitud a partir de una serie de cotizaciones históricas.
- Validar los parámetros estimados mediante las medidas de bondad de ajuste (MAPE y RSME), construir intervalos de confianza (al 95%) y gráficos para validar si las estimaciones realizadas son adecuadas.
- Definir las características de la estrategia de inversión para que genere beneficios con una probabilidad predeterminada.

- Aplicar los resultados teóricos obtenidos a distintos escenarios de inversión sobre el subyacente Solaria, S.A., cotizado en el IBEX-35.
- Llevar a cabo un análisis del precio de ejercicio y de las primas de las opciones de compra y de venta en las distintas estrategias para determinar la más adecuada dado el activo subyacente elegido.

## Capítulo 1. Preliminares financieros

En este capítulo, se introducen ciertas nociones financieras clave, como el concepto de mercados financieros o la interrelación entre el ciclo económico y el ciclo bursátil, así como los índices bursátiles y el índice de referencia de la bolsa española, el IBEX-35. Asimismo, se comentan los aspectos más relevantes de la empresa cotizada elegida, Solaria, S.A.

### 1.1. Los mercados financieros

Un mercado financiero constituye un lugar, ya sea físico o virtual, en el que se negocian activos financieros. Las funciones de los mercados incluyen, entre otras, conectar a los oferentes de ahorro con los demandantes de inversión, fijar adecuadamente el precio del activo en función de la oferta y la demanda, aportar liquidez a los activos y disminuir los costes y plazos de intermediación.

### 1.2. Conexión entre la bolsa y la economía

Existe una estrecha relación entre la bolsa y la economía de un país. La evolución de las cotizaciones de las acciones en bolsa pronostica lo que ocurrirá en la economía durante los meses siguientes. Para explicar con mayor detalle esta conexión, recurrimos a la Teoría de los Ciclos, desarrollada por los economistas Friedrich A. Hayek y Ludwig Von Mises, pertenecientes a la Escuela de Viena (Salerno, 1993).

Empezamos en la fase de recesión económica, en la que existe un elevado paro, inflación y tipos de interés altos, y menor demanda de productos. Mientras tanto, las cotizaciones de los activos en bolsa tocan suelo, por lo que las “manos fuertes” se lanzan al mercado a adquirir los mejores títulos a bajo precio. Empieza la fase de recuperación del ciclo bursátil.

Paulatinamente, la economía se adentra en la fase de recuperación, caracterizada por medidas para reducir la inflación, una bajada de los tipos de interés, un aumento la inversión productiva y mayor facilidad de acceso a los créditos. Las cotizaciones en bolsa siguen subiendo. Las grandes empresas son las primeras en mostrar la recuperación que, poco a poco, se va extendiendo al resto de títulos.

Después de la fase de recuperación, llegamos a la fase de expansión, que confirma la recuperación de la economía. En esta etapa, disminuye el ahorro por el aumento del consumo, cae el desempleo, suben los salarios y se incrementa el endeudamiento de las familias. En la bolsa, durante este periodo, las “manos fuertes” se deshacen de los títulos que habían adquirido, beneficiándose así de la subida de las cotizaciones, dado que a estos títulos no les queda mucho recorrido. Son los pequeños ahorradores quienes adquieren dichos valores, ya que ven la renta variable como una opción segura y sencilla de ganar dinero. Observamos, por tanto, un cambio de tendencia en el ciclo bursátil, donde se pasa de una tendencia alcista a una bajista. El aumento de la inflación durante esta fase indica que la economía está recalentándose.

Tras la etapa de expansión, la economía se adentra en la fase de declive, en la que suben los tipos de interés para contrarrestar la inflación, disminuye el consumo y la producción por la dificultad de acceso al crédito y aumenta el desempleo. En la bolsa, las “manos fuertes” ya se han retirado. Debido a la subida de tipos de interés, los valores bursátiles caen y los pequeños inversores soportan las pérdidas, dado que compraron los títulos cuando cotizaban en máximos y, en este momento, las cotizaciones caen hasta alcanzar mínimos históricos. De este modo, volvemos a la fase de recesión, reiniciando así el ciclo económico.

### 1.3. Índices bursátiles y el IBEX-35

Un índice bursátil es una cifra que refleja la evolución generalizada de los títulos cotizados en un determinado mercado, como una especie de barómetro de la bolsa. Sin embargo, no todos los títulos cotizados en bolsa forman parte del índice, sino que



únicamente los más representativos (las empresas más grandes o con mayor liquidez) son tenidos en cuenta para calcular este valor, que representa la tendencia bursátil general.

El objetivo de un índice es ejercer de referencia para analizar la evolución de un mercado, para comparar el comportamiento medio de distintos mercados y para evaluar la rentabilidad y riesgo del mercado. Asimismo, otros propósitos del índice son analizar la rentabilidad de un gestor de activos y diseñar carteras réplica que imiten el comportamiento del índice. Actualmente, existen multitud de índices, como el Dow-Jones, el Nasdaq, el S&P 500, el Eurostoxx 50, el DAX 30 o el Nikkei 225.

En España, el índice de referencia, elaborado por Bolsas y Mercados Españoles (BME), es el IBEX-35. Dicho índice está formado por las 35 empresas más líquidas de las bolsas españolas. Se trata de un índice ponderado según la capitalización bursátil, lo que implica que las empresas con mayor capitalización bursátil poseen un mayor peso en el índice. En la actualidad, el IBEX-35 está compuesto por las siguientes empresas:

Acciona	Bankinter	IAG	PharmaMar
Acciona energía	BBVA	Iberdrola	Red Eléctrica (R.E.C.)
Acerinox	Caixabank	Inditex	Repsol
ACS	Cellnex	Indra	Rovi
Aena	Enagas	Inmobiliaria Colonial	Sacyr
Amadeus	Endesa	Mapfre	Siemens Gamesa
Arcelormittal	Ferrovial	Meliá Hotels	Solaria
Banco Santander	Fluidra	Merlin Properties	Telefónica
Banco Sabadell	Grifols	Naturgy	

Tabla 1.3.1: Composición del IBEX-35.

Fuente: Bolsa de Madrid

#### 1.4. Solaria, S.A.

Solaria Energía y Medio Ambiente, S.A. (2022), que denominaremos de ahora en adelante, Solaria o Solaria, S.A., fue fundada en 2002 como una sociedad anónima conforme a la legislación española. Actualmente, su domicilio social se sitúa en la calle Princesa, 2, en Madrid.

Solaria, S.A. es una empresa líder en la generación y venta de energía renovable. Su actividad se centra principalmente en la producción de energía mediante plantas fotovoltaicas, así como en el diseño, la instalación y reparación de dichas plantas. Sin embargo, también presta servicios de mantenimiento y conservación y realiza instalaciones y reparaciones de fontanería, electricidad o gas, entre otros.

El objetivo de la empresa es convertir a los países mediterráneos (España, Portugal e Italia) en la principal fuente de energía solar fotovoltaica barata, ilimitada y sostenible para toda Europa, dado que las energías renovables son, actualmente, la única solución viable y sostenible para la producción de energía. Para alcanzar sus objetivos, la sociedad se rige por los principios de sostenibilidad, liderazgo, ética, innovación, excelencia y trabajo en el equipo. El grupo pretende aumentar su cartera de proyectos con el fin de convertirse, en 2030, en la empresa líder en producción de energía solar en el sur de Europa. Unos objetivos alineados con la Agenda 2030 y los Objetivos de Desarrollo Sostenible propuestos por Naciones Unidas (*Solaria – Energía y Medio Ambiente, s. f.*).

Solaria, S.A. constituye la sociedad matriz de un grupo consolidado que comprende 95 empresas a fecha de 31 de diciembre de 2021. En prácticamente todas ellas, Solaria, S.A. posee el 100% de la participación.

En cuanto a la participación en bolsa de la empresa, las acciones de Solaria, S.A. salieron al mercado continuo el 19 de junio de 2007 con un precio de 12,50€. En la actualidad, dichas acciones cotizan en las cuatro bolsas oficiales españolas (Madrid, Barcelona, Bilbao y Valencia) con un precio de 22,47€ por acción (a 29 de julio de 2022). El 19 de octubre de 2020, la sociedad entró a formar parte del IBEX-35.

Durante los más de 15 años de cotización de la empresa, esta tan solo ha repartido dividendos en tres ocasiones. El último dividendo repartido en España (0,02€) data del 3 de octubre de 2011 y, según los datos de Yahoo Finanzas, no existe previsión de dividendos futuros.



Gráfico 1.4.1: Histórico de la evolución del precio por acción de Solaria, S.A. desde su admisión a cotización (medias mensuales), donde el eje X se corresponde con los años, el eje Y se corresponde con el precio de la acción y la línea azul muestra la evolución del precio de la acción. Las bandas rojas de la parte inferior representan los periodos en los que disminuye el volumen de negociación y las bandas verdes, los periodos en los que aumenta el volumen de negociación. El símbolo D muestra los momentos en los que repartieron dividendos.

Fuente: Yahoo Finanzas

En el Gráfico 1.4.1, observamos que en diciembre de 2007 las acciones se desplomaron cuando cotizaban a 23,10€. Una tendencia descendente que continuó hasta marzo de 2009, cuando el precio de la acción alcanzó un mínimo de 1,51€. En mayo de 2012, el precio de la acción tocó suelo, cotizando a 0,32€ por acción. Esta dramática caída, que es la más pronunciada en todo el histórico de datos, se debió a los efectos de la crisis financiera. En 2017, la cotización de la acción empezó una tendencia alcista progresiva, que se disparó a partir de marzo de 2020, y alcanzó su máxima cotización (26,76€) a principios de enero de 2021. Como vemos en el gráfico, se trata de un subyacente con alta volatilidad, dado que las variaciones en el precio de la acción son frecuentes e intensas.

## Capítulo 2. Contratos de opciones sobre acciones

Este capítulo presenta, desde una perspectiva teórica, los conceptos clave sobre las opciones financieras de compra (*call*) y de venta (*put*), detallando las posiciones que pueden adoptarse en cada tipo de opción, así como sus correspondientes funciones de beneficios/pérdidas, junto con una representación gráfica de las mismas.

La información relativa al Capítulo 2 ha sido extraída de la guía informativa Qué debe saber de... Opciones y Futuros de la Comisión Nacional del Mercado de Valores (2016), del artículo académico de Cortés López & Navarro Quiles (2016) y del folleto 25 Estrategias comprobadas para operar opciones sobre futuros de CME Group (CME Group, 2008).

### 2.1. Los contratos de opciones

Una opción es un contrato que le concede al propietario el derecho de comprar o vender un activo subyacente a un precio definido (precio de ejercicio o *strike*) y en un momento determinado (vencimiento o *maturity*), fijados ambos antes de la firma del contrato. Para adquirir este derecho de compra o de venta, el tenedor o comprador de la opción deberá pagar una prima a su contraparte (el vendedor de la opción).

Mediante este tipo de contratos, el tenedor (*buyer* o *holder*) obtiene un derecho, puede decidir a vencimiento ( $T > 0$ ) si ejerce o no la opción; mientras que la contraparte (*seller* o *writer*) se obliga a entregar o a recibir el subyacente al precio acordado si el tenedor decide ejercer la opción a vencimiento. El vendedor de la opción se compromete, por tanto, a aceptar la decisión del tenedor y cumplir con las obligaciones derivadas del contrato.

En función del vencimiento, los tipos de opciones más comunes son las europeas y las americanas. Las primeras solo se pueden ejercer en el instante del vencimiento ( $T$ ), mientras que las segundas pueden ejercerse en cualquier momento de la vida del contrato. Por tanto, la prima de las opciones americanas será más elevada, dado que

hay más posibilidades de ejercer la opción y obtener beneficios. En el presente trabajo, estudiamos únicamente el caso europeo.

En función del derecho adquirido, existen dos tipos de contratos de opciones: la opción *call* u opción de compra y la opción *put* u opción de venta.

En una opción *call*, el tenedor de la opción obtiene el derecho (no la obligación) de comprar el subyacente a vencimiento ( $T$ ) a un precio de ejercicio definido ( $E$ ), a cambio de abonar una prima ( $C$ ) a su contraparte en el momento de la firma del contrato. Por su parte, el vendedor de la opción se compromete a entregar el subyacente a vencimiento ( $T$ ) al precio acordado ( $E$ ) si el comprador decide ejercer la opción. En las opciones *call*, el comprador paga tanto la prima ( $C$ ) como el precio de ejercicio ( $E$ ), por lo que estas se compensan entre sí. El propietario del subyacente es el vendedor de la opción.

En una opción *put*, el comprador adquiere el derecho (no la obligación) de vender el subyacente a vencimiento ( $T$ ) a un precio establecido ( $E$ ). Para obtener este derecho, paga una prima ( $P$ ) a su contraparte a la firma del contrato. El vendedor de la opción se obliga a comprar el subyacente a vencimiento al precio acordado si así lo decide el tenedor de la opción. En este caso, el poseedor de la opción es el propietario del subyacente y paga la prima ( $P$ ) a su contraparte, y este último es quien abona el precio de ejercicio ( $E$ ) a cambio de recibir el subyacente.

En función del rol adquirido por cada una de las partes en el contrato (comprador o vendedor), distinguimos posiciones largas (*long*) y posiciones cortas (*short*), ya se trate de opciones de compra o de venta. Las posiciones largas se asocian al tenedor de la opción, mientras que las posiciones cortas se asignan a la contraparte.

A continuación, analizaremos las diferentes posiciones que podemos adoptar en un contrato de opciones (*long call*, *short call*, *long put* y *short put*), así como las características e implicaciones de cada una de ellas.

## 2.2. Opciones *long call*, *short call*, *long put* y *short put*

### 2.2.1. *Long call*

El tenedor de una *long call* (o *call* comprada) tiene una visión alcista del subyacente; es decir, espera que en el futuro el precio del subyacente aumente. El coste inicial de esta posición para el comprador es la prima ( $C$ ). El tenedor no es el propietario del subyacente, sino que adquiere el derecho a comprarlo en el futuro si así lo desea. La función de beneficios/pérdidas al vencimiento ( $T$ ) de la *long call* ( $LC$ ) en función del precio del subyacente a vencimiento ( $S_T$ ) es la siguiente

$$(B/P)_{LC}(S_T) = \begin{cases} -C & \text{si } 0 \leq S_T \leq E, \\ S_T - (E + C) & \text{si } S_T \geq E. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

A partir de la función (2.2.1) y, tras observar la representación de la misma (Gráfico 2.2.1), determinamos que, en esta posición, las pérdidas están limitadas a la prima ( $C$ ), pero los beneficios son potencialmente ilimitados. El tenedor de la opción ejercerá la *call* siempre que el precio del subyacente a vencimiento sea superior al precio de ejercicio ( $S_T \geq E$ ), ya que en este caso comprará el subyacente a un precio inferior al de mercado. No obstante, si el precio del subyacente se halla entre el precio de ejercicio y el precio de ejercicio más la prima ( $E \leq S_T \leq E + C$ ), el tenedor ejercerá la opción para reducir sus pérdidas.

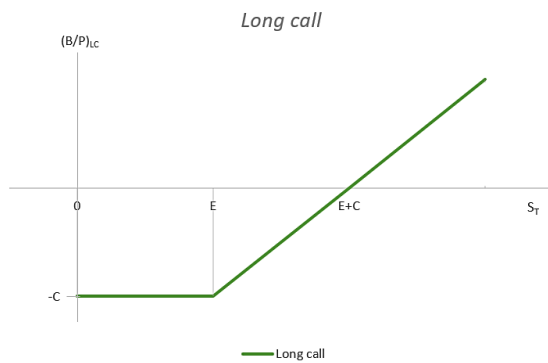


Gráfico 2.2.1: Diagrama de pay-off para posición larga de una opción de compra, donde  $E$  es el precio de ejercicio de la call,  $C$  es la prima de la call y  $S_T$  es el precio del subyacente a vencimiento  $T$ .

Fuente: Elaboración propia

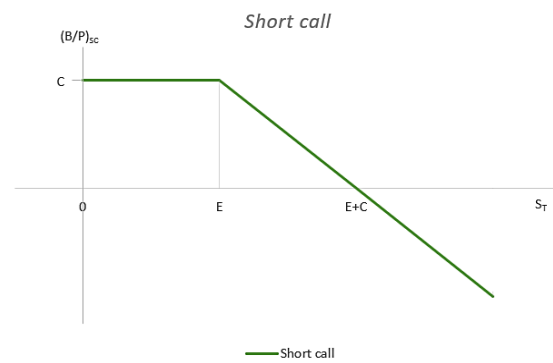


Gráfico 2.2.2: Diagrama de pay-off para posición corta de una opción de compra, donde  $E$  es el precio de ejercicio de la call,  $C$  es la prima de la call y  $S_T$  es el precio del subyacente a vencimiento  $T$ .

Fuente: Elaboración propia

### 2.2.2. Short call

La contraparte de la *long call* se denomina *short call* (o *call* vendida). El vendedor de la *call* tiene una visión bajista del subyacente, es decir, considera que el precio del activo caerá en el futuro. A cambio de recibir la prima ( $C$ ) a la firma del contrato, se obliga a vender el subyacente a vencimiento ( $T$ ) al precio de ejercicio ( $E$ ) si el comprador ejerce la opción. La fórmula matemática que determina los beneficios/pérdidas ( $B/P$ ) de la posición *short call* ( $SC$ ) en función del precio del subyacente a vencimiento ( $S_T$ ) es la siguiente

$$(B/P)_{sc}(S_T) = \begin{cases} C & \text{si } 0 \leq S_T \leq E, \\ -S_T + (E + C) & \text{si } S_T \geq E. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

El Gráfico 2.2.2 muestra la representación de la función (2.2.2). Se puede observar que los beneficios están limitados a la prima ( $C$ ), pero las pérdidas son potencialmente ilimitadas si el precio del subyacente se incrementa a vencimiento  $T$ . Al tratarse de la contraparte del tenedor de la opción de compra, el vendedor debe asumir la decisión tomada por el propietario de la opción y tiene la obligación de cumplir con los términos acordados en el contrato.

### 2.2.3. Long put

El tenedor de una opción *long put* (u opción de venta comprada) adquiere el derecho de vender a vencimiento un subyacente a un determinado precio de ejercicio ( $E$ ). El comprador de la opción tiene una visión bajista del subyacente, por lo que espera que el precio del subyacente haya disminuido al final del contrato. Para adquirir este derecho de venta, el tenedor de la opción paga en el momento de la firma del contrato una prima ( $P$ ) al vendedor. En este caso, el comprador de la opción también es el propietario del subyacente y paga la prima ( $P$ ). La función matemática de beneficios/pérdidas de la *long put* ( $LP$ ) en función de  $S_T$  es la siguiente

$$(B/P)_{LP}(S_T) = \begin{cases} -S_T + (E - P) & \text{si } 0 \leq S_T \leq E, \\ -P & \text{si } S_T \geq E. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

El Gráfico 2.2.3, que representa la función (2.2.3), evidencia que tanto los beneficios como las pérdidas están delimitadas para el tenedor de la opción. El beneficio máximo que puede obtener el comprador de la opción es el precio de ejercicio menos la prima ( $E - P$ ); en cambio, la pérdida está limitada a la prima ( $P$ ).

El tenedor de la *put* ejercerá la opción siempre que el precio del subyacente en el mercado a vencimiento  $T$  sea menor que el precio de ejercicio ( $S_T \leq E$ ), dado que obtiene un beneficio al vender el subyacente a un precio superior al de mercado. Sin embargo, si el precio de subyacente se encuentra entre el precio de ejercicio menos la prima y el precio de ejercicio ( $E - P \leq S_T \leq E$ ), el tenedor ejercerá la *put* para reducir las pérdidas.



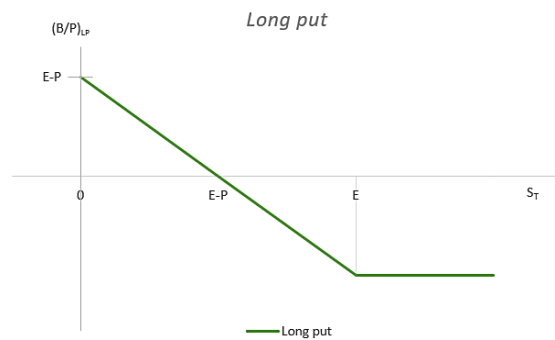


Gráfico 2.2.3: Diagrama de pay-off para posición larga de una opción de venta, donde  $E$  es el precio de ejercicio de la put,  $P$  es la prima de la put y  $S_T$  es el precio del subyacente a vencimiento  $T$ .

Fuente: Elaboración propia

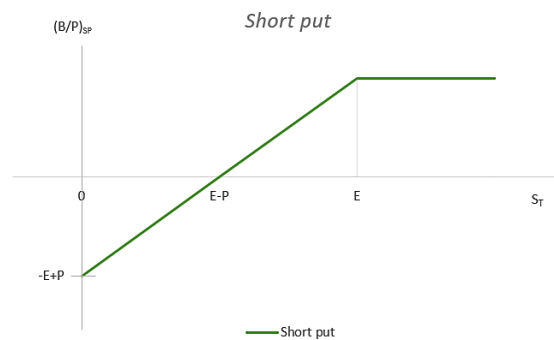


Gráfico 2.2.4: Diagrama de pay-off para posición corta de una opción de venta, donde  $E$  es el precio de ejercicio de la put,  $P$  es la prima de la put y  $S_T$  es el precio del subyacente a vencimiento  $T$ .

Fuente: Elaboración propia

#### 2.2.4. Short put

La *short put* (o *put* vendida) es la contrapartida de la *long put*. En este caso, el vendedor de la opción *put* tiene una visión alcista del subyacente y estima que el precio del subyacente en el mercado aumentará. El vendedor de la opción *put* no es el propietario del subyacente y, mediante la firma del contrato, se obliga a adquirirlo al precio de ejercicio si el comprador ejerce la opción a vencimiento  $T$ . Adoptar esta posición no supone ninguna inversión inicial, sino que el vendedor recibe la prima ( $P$ ); es decir, tiene un ingreso. La función matemática de los beneficios/pérdidas ( $B/P$ ) de la *short put* ( $SP$ ) en función de  $S_T$  es la siguiente

$$(B/P)_{SP}(S_T) = \begin{cases} S_T - (E - P) & \text{si } 0 \leq S_T \leq E, \\ P & \text{si } S_T \geq E. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Considerando la función (2.2.4) y la representación de la misma (ilustrada en el Gráfico 2.2.4), se determina que tanto los beneficios como las pérdidas derivadas de esta posición están acotados. La potencial pérdida para el vendedor está limitada a  $(-E + P)$ , mientras que el máximo beneficio que se puede lograr es la prima recibida ( $P$ ) si el comprador no ejerce la opción.

## Capítulo 3. Estrategias especulativas con opciones financieras

Las opciones financieras pueden combinarse con el fin de crear estrategias de inversión. En este capítulo, se abordan las ideas fundamentales para construir estrategias especulativas de tipo cono y cono invertido y se detalla para cada estrategia la función de beneficios/pérdidas total y sus características.

### 3.1. *Bottom Straddle* o Cono

Esta estrategia está formada por:

- Una opción *call* comprada (*long call*) sobre el subyacente ( $S$ ) con vencimiento ( $T$ ) y con precio de ejercicio  $E$ .
- Una opción *put* comprada (*long put*) sobre el subyacente ( $S$ ) con vencimiento ( $T$ ) y con precio de ejercicio  $E$  (CME Group, 2008).

Denotamos la prima de la opción *call* como ( $C$ ) y la prima de la opción *put* como ( $P$ ). El precio de ejercicio ( $E$ ) coincide en ambas opciones. Según las expresiones (2.2.1) y (2.2.3), obtenemos la función de beneficios/pérdidas del cono o *straddle* a vencimiento ( $T$ ), que viene dada por

$$(B/P)_{\text{TOTAL}}(S_T) = \begin{cases} -S_T + E - (C + P) & \text{si } 0 \leq S_T \leq E, \\ S_T - E - (C + P) & \text{si } S_T \geq E. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

El Gráfico 3.1.1 muestra la expresión de beneficios/pérdidas de la *long call* (véase función (2.2.1)) mediante la línea discontinua verde oscuro, la expresión de beneficios/pérdidas de la *long put* (véase función (2.2.3)) mediante la línea discontinua verde claro y la expresión de beneficios/pérdidas totales de la estrategia del cono (véase función (3.1.1)) con la línea continua verde. En dicho gráfico,  $C$  es la prima de la opción *call*,  $P$  es la prima de la opción *put*,  $E$  representa el precio de ejercicio de las opciones y  $S_T$  es el precio del subyacente a vencimiento ( $T$ ). Los puntos de corte de la posición

total (3.1.1) con el eje X son los puntos  $E - (C + P)$  y  $E + (C + P)$ . En dichos instantes, el beneficio para el tenedor de las opciones es nulo.

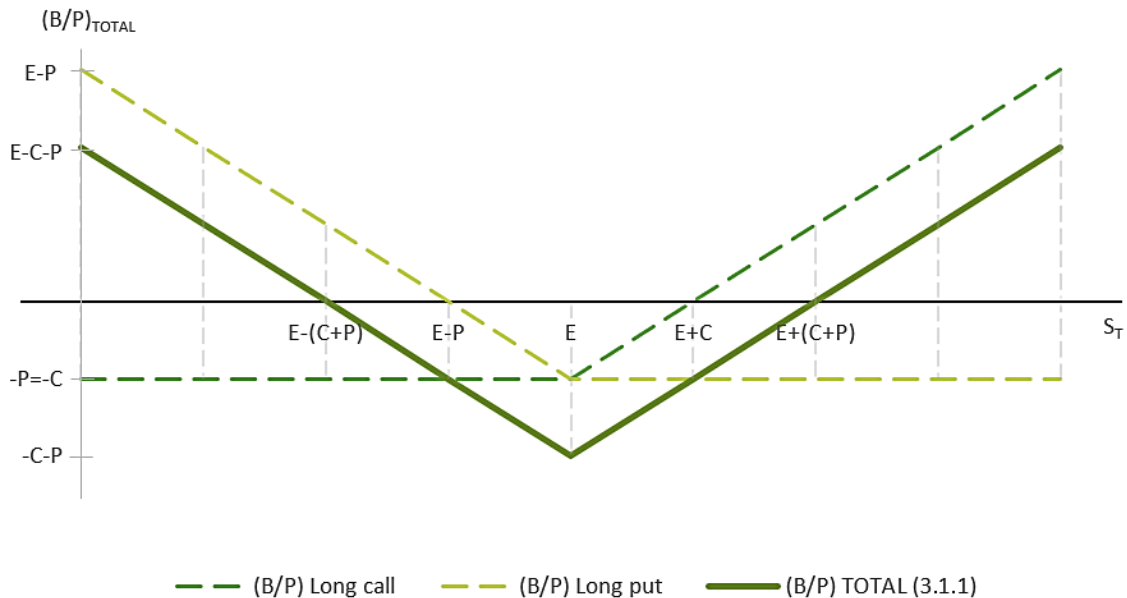


Gráfico 3.1.1: Representación de las funciones de beneficios/pérdidas de la long call (véase expresión (2.2.1)), de la long put (véase expresión (2.2.3)) y de la función de beneficios/pérdidas totales de la estrategia del cono (véase expresión (3.1.1)), donde  $E$  representa el precio de ejercicio,  $C$  y  $P$  son las primas de la call y de la put, respectivamente y  $S_T$  representa el precio del subyacente a vencimiento  $T^1$ .

Fuente: Elaboración propia

Analizando conjuntamente la función (3.1.1) y el Gráfico 3.1.1, podemos definir con facilidad las principales características de esta estrategia:

- La inversión inicial necesaria para adoptar esta posición es la suma de la prima de la *call* ( $C$ ) y de la *put* ( $P$ ), que el comprador debe abonar al principio del contrato. Por tanto, la inversión total inicial es  $C + P$ .
- Se trata de una estrategia de movimiento, dado que el comprador (o *holder*) de las opciones espera que el precio del subyacente varíe a vencimiento ( $T$ ), pero duda sobre si el valor del subyacente habrá aumentado o disminuido en el instante  $T$ . El cono permite obtener beneficios a vencimiento con una volatilidad cuyo radio depende de la suma de las primas.

<sup>1</sup> Obsérvese que se ha tomado  $C$  y  $P$  iguales en el Gráfico 3.1.1, si bien en general pueden ser distintas.

- La pérdida máxima está limitada a la inversión inicial, es decir, a la suma de las primas  $C + P$ . Cualquier precio del subyacente a vencimiento ( $S_T$ ) que se encuentre entre  $E - (C + P)$  y  $E + (C + P)$  supondrá pérdidas para el inversor, es decir,

$$E - (C + P) \leq S_T \leq E + (C + P) \leq 0.$$

Si el precio del subyacente a vencimiento ( $S_T$ ) se mantiene cerca del precio de ejercicio ( $E$ ), el tenedor de las opciones deberá afrontar pérdidas.

- En cambio, el beneficio para el inversor es potencialmente ilimitado. El precio del subyacente debe hallarse en el instante  $T$  en la unión de intervalos

$$0 \leq S_T \leq E - (C + P) \cup E + (C + P) \leq S_T \leq +\infty.$$

Cuanto más se aleje el precio del subyacente a vencimiento ( $S_T$ ) del precio de ejercicio ( $E$ ), mayor rentabilidad logrará el tenedor de las opciones.

### 3.2. Top Straddle o Cono invertido

La estrategia del cono invertido consiste en:

- Vender una opción *call* (*short call*) sobre el subyacente ( $S$ ) con vencimiento  $T$  y precio de ejercicio  $E$ .
- Vender una opción *put* (*short put*) sobre el subyacente ( $S$ ) con vencimiento  $T$  y precio de ejercicio  $E$  (CME Group, 2008).

En esta segunda estrategia, también se denota la prima de la opción *call* como  $C$ , la prima de la opción *put* como  $P$  y el precio de ejercicio (o *strike*) como  $E$ . El precio de ejercicio ( $E$ ) coincide en la opción de compra y en la opción de venta. Basándonos en las expresiones (2.2.2) y (2.2.4), obtenemos la función de beneficios/pérdidas de la estrategia del cono invertido o *top straddle* a vencimiento ( $T$ ), dada por

$$(B/P)_{\text{TOTAL}}(S_T) = \begin{cases} S_T - E + (C + P) & \text{si } 0 \leq S_T \leq E, \\ -S_T + E + (C + P) & \text{si } S_T \geq E. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

El Gráfico 3.2.1 representa la expresión de beneficios/pérdidas de la *short call* (véase función (2.2.2)) con la línea discontinua verde oscuro, la expresión de beneficios/pérdidas de la *short put* (véase función (2.2.4)) con la línea discontinua verde claro y la expresión de beneficios/pérdidas totales de la estrategia del cono invertido (véase función (3.2.1)) mediante la línea continua verde. En dicho gráfico,  $C$  es la prima de la opción *call*,  $P$  es la prima de la opción *put,  $E$  representa el precio de ejercicio de las opciones y  $S_T$  es el precio del subyacente a vencimiento ( $T$ ).*

Destacamos que los puntos de corte de la posición total  $[(B/P)_{\text{TOTAL}}(S_T)]$  con el eje horizontal son  $E - (C + P)$  y  $E + (C + P)$ . Estos puntos de corte son significativos porque reflejan los precios del subyacente en los que el beneficio para el inversor es nulo.

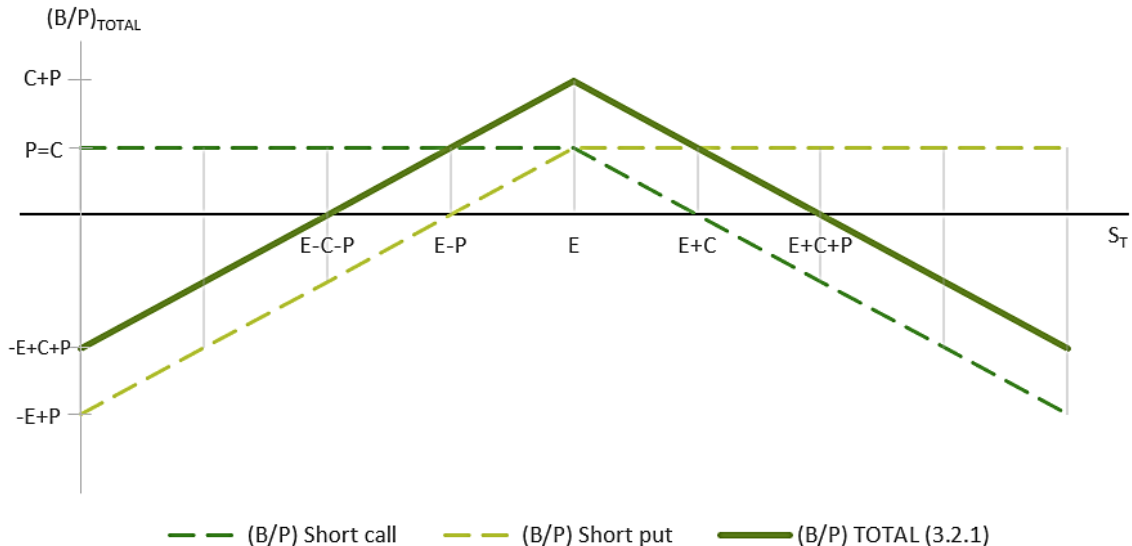


Gráfico 3.2.1: Representación de las funciones de beneficios/pérdidas de la *short call* (véase expresión (2.2.2)), de la *short put* (véase expresión (2.2.4)) y la función de beneficios/pérdidas totales de la estrategia del cono invertido (véase expresión (3.2.1)), donde  $E$  representa el precio de ejercicio,  $C$  y  $P$  son las primas de la *call* y de la *put*, respectivamente y  $S_T$  representa el precio del subyacente a vencimiento  $T^2$ .

Fuente: Elaboración propia

<sup>2</sup> Obsérvese que se ha tomado  $C$  y  $P$  iguales en el Gráfico 3.2.1, si bien en general pueden ser distintas.

Examinando conjuntamente la expresión (3.2.1) y el Gráfico 3.2.1, definimos las principales características de la estrategia del cono invertido o *top straddle*:

- Esta estrategia no requiere inversión inicial. Al adoptar esta posición, el vendedor de las opciones recibe las primas de la *call* ( $C$ ) y de la *put* ( $P$ ), por lo que tiene un beneficio inicial de la suma de las primas  $C + P$ .
- El inversor espera que el precio del subyacente se mantenga estable o con poca volatilidad a vencimiento ( $T$ ). La estrategia permite obtener beneficios si el subyacente a vencimiento no varía o lo hace en poca cuantía.
- El beneficio máximo está limitado a la suma de las primas ( $C + P$ ), que se lograría cuando el tenedor de las opciones no ejerciera a vencimiento. Cualquier precio del subyacente a vencimiento ( $S_T$ ) que se encuentre entre  $E - (C + P)$  y  $E + (C + P)$  reportará ganancias al inversor, es decir,

$$E - (C + P) \leq S_T \leq E + (C + P) \geq 0.$$

Por tanto, la posición supondrá un beneficio si el precio del subyacente a vencimiento ( $S_T$ ) permanece cercano al precio de ejercicio ( $E$ ).

- El riesgo de esta posición es que las pérdidas pueden llegar a ser ilimitadas. El vendedor de las opciones tendrá pérdidas siempre que el precio del subyacente a vencimiento ( $S_T$ ) se sitúe en la unión de intervalos

$$0 \leq S_T \leq E - (C + P) \cup E + (C + P) \leq S_T \leq +\infty.$$

Por tanto, cuánto más se aleje el precio del subyacente a vencimiento ( $S_T$ ) del precio de ejercicio ( $E$ ), más pérdidas deberá afrontar el inversor.

## Capítulo 4. Preliminares estocásticos: Introducción del Movimiento Browniano

En el presente capítulo, se introducen los conceptos clave para el cálculo de la solución del modelo Log-Normal y sus propiedades estadísticas. Para ello, se explica el Movimiento Browniano o proceso de Wiener estándar y sus propiedades estadísticas, así como la técnica para obtener simulaciones del mismo.

Dado que el modelo Log-Normal está basado en las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) de tipo Itô, el capítulo terminará presentando las integrales de tipo Itô y sus propiedades estadísticas.

### 4.1. El Movimiento Browniano (o proceso de Wiener)

Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias que evolucionan en función de un índice como puede ser el tiempo  $t$ . Entre muchas otras utilidades, se emplea para describir la evolución de variables económicas o financieras. El Movimiento Browniano, también llamado proceso de Wiener, es un proceso estocástico gaussiano descrito de manera intuitiva cuando Robert Brown, en 1827, detectó un movimiento errático al analizar el choque de las partículas de polen con el agua a causa de la interacción molecular. Ese movimiento se conocerá posteriormente como Movimiento Browniano.

En los inicios del siglo XX, el movimiento errático descrito por Brown se aplicó a otras áreas de conocimiento. En 1900, Louis Bachelier publicó una tesis doctoral en la que aplicó el Movimiento Browniano en el ámbito de las finanzas; concretamente en la modelización de determinados activos financieros. Dicha tesis no alcanzó una gran repercusión porque no fue comprendida en aquella época. No obstante, el trabajo de Bachelier contenía las ideas esenciales del Movimiento Browniano, que Norbert Wiener logró formalizar rigurosamente unos años más tarde. Por este motivo, también se le denomina proceso de Wiener (Klebaner, 2011).

En el presente trabajo, denotaremos el Movimiento Browniano o proceso de Wiener estándar como  $W = \{W(t): t \geq 0\}$ , que es la forma sintetizada de la notación  $W = \{W(t; \omega): t \geq 0, \omega \in \Omega\}$ . Asimismo, es habitual encontrar en otros trabajos el Movimiento Browniano denotado como  $B = \{B(t): t \geq 0\}$  (Burgos Simón et al., 2018).

El Movimiento Browniano  $W = \{W(t): t \geq 0\}$  es un proceso estocástico o función aleatoria definido mediante una serie de propiedades que lo caracterizan:

C1. Empieza en el origen con probabilidad 1:  $\mathbb{P} [W(0) = 0] = 1$ .

C2. Los incrementos sobre los intervalos de tiempo disjuntos, denotados como  $W(t) - W(s)$ , son variables aleatorias e independientes:

$$W(t_1) - W(t_0); W(t_2) - W(t_1); \dots; W(t_n) - W(t_{n-1}),$$

donde  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n \leq +\infty$ .

C3. Los incrementos son estacionarios:

$$W(t + \Delta t) - W(t) =^d W(s + \Delta t) - W(s), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty.$$

En la expresión anterior, el símbolo  $=^d$  indica que la igualdad presenta la misma distribución estadística.

C4. Los incrementos del Movimiento Browniano, dada una ventana temporal  $t - s$ , siguen una distribución normal de media 0 y varianza  $t - s$ :

$$W(t) - W(s) \sim N [0; t - s], \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty.$$

Si se combinan las propiedades C1. y C4., se concluye que, cuando  $s = 0$ ,  $W(t)$  sigue una distribución normal de media 0 y varianza  $t$  (desviación típica  $\sqrt{t}$ ).

$$W(t) = W(t) - W(0) \sim N [0; t].$$

C5. Las trayectorias de  $W(t)$  son continuas y no diferenciables, lo que significa que no contienen saltos y que no se diferencian en ningún punto.



## 4.2. Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano

En este apartado revisaremos las propiedades estadísticas del Movimiento Browniano o proceso de Wiener estándar. No obstante, debido a las limitaciones del trabajo, no se demostrarán matemáticamente. En caso de duda, puede consultarse la obra de Øksendal (1998), donde se encontrará información detallada sobre estas.

- P1. Función media: La función media del Movimiento Browniano es nula, dado que, siguiendo la propiedad C4 del apartado anterior, todos los incrementos del proceso de Wiener siguen una distribución normal de media 0 y varianza  $t - s$ ,

$$\mu_{s(t)} = E[W(t)] = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

- P2. Función covarianza: La función covarianza determina la relación lineal existente entre las variables aleatorias  $W(t)$  y  $W(s)$ , obtenidas al especificar los instantes  $t$  y  $s$ ,

$$\text{Cov}[W(t), W(s)] = \min(s, t) = s, \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty.$$

Si establecemos  $0 \leq s \leq t \leq +\infty$  y empleamos la propiedad C1, junto con las propiedades básicas del operador esperanza, obtenemos la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[W(t), W(s)] &= E[W(t)W(s)] - E[W(t)]E[W(s)] \\ &= E[W(t)W(s) - (W(s))^2 + (W(s))^2] \\ &= E[W(t) - W(s)W(s) + (W(s))^2] \\ &= E[W(t) - W(s)W(s)] + E[(W(s))^2] \\ &= E[(W(t) - W(s))(W(s) - W(0))] + E[(W(s))^2] \\ &= E[(W(t) - W(s))]E[(W(s) - W(0))] + E[(W(s))^2] \\ &= (E[W(t)] - E[W(s)])(E[W(s)] - E[W(0)]) + E[(W(s))^2] \\ &= E[(W(s))^2] = \text{Var}[W(s)] = s. \end{aligned}$$

- P3.  $W(t)$  es  $\frac{1}{2}$ -autosemejante: Una propiedad geométrica definida como

$$W(Tt) = {}^d \sqrt{T}W(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall T \geq 0.$$

Como consecuencia, tomando  $t = 1$ ,  $W(T) = {}^d \sqrt{T}W(1)$ , que según la propiedad C4, es una normal tipificada

$$W(1) = {}^d N [0; 1] = Z.$$

P4. Las trayectorias de  $W(t)$  son continuas y no diferenciables. Se trata, por tanto, de un proceso cuyas trayectorias no tienen variación acotada y, por lo tanto, no son derivables porque tienen picos en todo instante de  $t$ .

Según la propiedad P3  $W(t) = {}^d \sqrt{T}Z$ , siendo  $Z$  una variable aleatoria normal tipificada, es decir, con media 0 y varianza 1, podemos simular el proceso de Wiener, dado que los softwares informáticos tienen métodos para simular una gaussiana tipificada, haciendo uso de la igualdad en distribución anterior.

Cabe remarcar, no obstante, que la aleatoriedad introducida en el modelo Log-Normal procede del diferencial del proceso de Wiener  $\{dW(t), \forall t \geq 0\}$ . Este diferencial del Browniano es un proceso estocástico gaussiano denominado Ruido Blanco (*white noise*).

El diferencial del Movimiento Browniano se emplea para modelizar la aleatoriedad (o ruido) en el modelo. Aplicando el Teorema Central del Límite, si  $S_n$  está compuesto por una suma de  $n$  variables aleatorias independientes, la distribución estadística de  $S_n$  se acercará a la distribución normal o gaussiana, lo que aporta coherencia al modelo, ya que el valor de un activo cotizado en la bolsa depende de una gran cantidad de variables (económicas, políticas, sociales, etc.) cuya distribución se desconoce y que pueden ser estadísticamente independientes.

### 4.3. El Cálculo de Itô

El Cálculo de Itô, desarrollado por el matemático japonés Kiyosi Itô (1944), implicó un progreso en la diferenciación e integración de los procesos estocásticos. El concepto

principal de dicho cálculo es la integral de Itô y su resultado más destacado, el Lema de Itô.

A pesar de las múltiples aplicaciones de la teoría de Itô, en este trabajo nos centraremos únicamente en la búsqueda de la solución de una ecuación diferencial estocástica, definida del siguiente modo

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t).$$

Aplicando el Lema de Itô, que enunciaremos a continuación, podemos obtener la solución al problema anterior, que vendrá dado en términos de  $f(t, X(t))$  y  $g(t, X(t))$ . El Lema de Itô es una versión estocástica de la regla de la cadena para procesos estocásticos  $X(t)$ . En el desarrollo del modelo Log-Normal, se hallará una expresión explícita del proceso estocástico solución.

#### **Lema de Itô (versión integral)**

**Hipótesis:** Sea  $X(t)$  un proceso estocástico que satisface la siguiente ecuación diferencial tipo Itô con condición inicial determinista  $X_0$ :

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t), \quad t \geq 0, \\ X(0) &= X_0, \end{aligned}$$

y sea  $F(t, x)$  una función  $F: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que las siguientes derivadas parciales existen y son continuas:

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = F_1(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = F_2(t, x), \quad \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} = F_{22}(t, x).$$

**Tesis:** Entonces para  $t > 0$  se cumple

$$\begin{aligned}
 & F(t, x(t)) - F(s, x_0) \\
 &= \int_0^t \{F_1(r, x(r)) + f(r, x(r))F_2(r, x(r))\}dr \\
 &+ \int_0^t \frac{1}{2} (g(r, x(r)))^2 F_{22}(r, x(r))dr \\
 &+ \int_0^t g(r, x(r))F_2(r, x(r))dW(r).
 \end{aligned}$$

#### 4.3.1. La integral de Itô

En este apartado, estudiaremos la integral de Itô, un tipo de integral donde tanto la función a integrar como el diferencial son procesos estocásticos. Para simplificar, nos centraremos en la siguiente integral

$$\int_0^t X(s)dW(s), \tag{4.3.1}$$

donde  $X(s)$  es un proceso estocástico que satisface determinadas propiedades que a continuación expondremos. El libro de Allen (2007) constituye la obra de referencia para la presente explicación. Para deducir la integral (4.3.1) de manera intuitiva partimos de una integral tipo

$$\int_0^t g(s)df(s). \tag{4.3.2}$$

donde  $f(s)$  y  $g(s)$  son funciones deterministas. Si  $f(s)$  es diferenciable, podemos denotar su derivada como  $\frac{df(s)}{ds} = f'(s)$ , o su expresión análoga  $df(s) = f'(s)ds$ . Al sustituir esta igualdad en la integral anterior, obtenemos

$$\int_0^t g(s)df(s) = \int_0^t g(s)f'(s)ds,$$

Cuando  $f(s)$  es una función de variación acotada respecto a la variable tiempo ( $s$ ), podemos demostrar que la integral está correctamente definida mediante el siguiente límite

$$\int_0^t g(s)df(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(s_i)(f(s_{i+1}) - f(s_i)),$$

Al ser  $f(s)$  de variación acotada,  $f(s_{i+1}) - f(s_i)$  es finita. Por tanto, si  $g(s)$  no es demasiado irregular, se puede afirmar que el límite existe; en cambio, si dicha función es altamente variable, el límite podría llegar a ser divergente.

De manera análoga, se puede definir la integral estocástica (4.3.1) a través del límite del sumatorio

$$\int_0^t X(s, \omega)dW(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i, \omega) (W(s_{i+1}, \omega) - W(s_i, \omega)), \quad \omega \in \Omega, \quad (4.3.3)$$

donde se toma el límite para cada  $\omega$  en el espacio muestral  $\Omega$  de la variable aleatoria  $W(s)$ . El problema es que el Movimiento Browniano no es de variación acotada en lo que respecta a la variable tiempo ( $s$ ), tal como se impuso antes para  $f(s)$ .

Para contrarrestar dicha irregularidad, deben darse dos condiciones en el proceso integrador  $X(s)$  que permitirán que exista el límite a pesar de la irregularidad característica del Movimiento Browniano. La primera de estas condiciones asume que  $X(s)$  es independiente de los incrementos del proceso de Wiener. La segunda, por su parte, está relacionada con la variación del integrando (que no debe fluctuar demasiado).

La propiedad C2 del Movimiento Browniano establece que la variación de un incremento del mismo está definida por la expresión

$$E \left[ (W(s_{i+1}) - W(s_i))^2 \right] = s_{i+1} - s_i.$$

Considerando que  $X(s_i)$  sea independiente del incremento  $W(s_{i+1}) - W(s_i)$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} E \left[ \left( X(s_i) (W(s_{i+1}) - W(s_i)) \right)^2 \right] &= E[(X(s_i)^2)] E \left[ (W(s_{i+1}) - W(s_i))^2 \right] \\ &= E[(X(s_i)^2)] (s_{i+1} - s_i). \end{aligned}$$

Si aplicamos el segundo momento de la variable aleatoria y consideramos que  $X(s_i)$  es independiente de los incrementos del Movimiento Browniano para cada instante  $i = 1, \dots, n$ , obtenemos que

$$E \left[ \left( \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i) (W(s_{i+1}) - W(s_i)) \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^{n-1} E[(X(s_i)^2)] (s_{i+1} - s_i).$$

Dado que la suma del segundo elemento de la ecuación anterior es una aproximación de la integral  $\int_0^t E[(X(s))^2] ds$ , deducimos (siempre que exista la integral) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \left( \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i) (W(s_{i+1}) - W(s_i)) \right)^2 \right] = \int_0^t E[(X(s))^2] ds,$$

lo que nos lleva a la conclusión de que la varianza de la suma del segundo momento de la variable aleatoria converge a  $\int_0^t E[(X(s))^2] ds$ . Asumiendo que exista dicha integral, es posible probar lo siguiente

$$E \left[ \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i) (W(s_{i+1}) - W(s_i)) \right)^2 \right] = \int_0^t E[(X(s))^2] ds. \quad (4.3.4)$$

El hecho de que la variable  $X(s_i)$  sea independiente de los incrementos temporales de  $W(s_{i+1}) - W(s_i)$  para cada valor de  $i$ , nos permite introducir la idea de adaptabilidad del proceso integrador. A continuación, se explicarán una serie de definiciones para ampliar dicho concepto.

**Definición 1:** Una variable aleatoria  $X$  es denotada como  $F_s$ -adaptada si  $X$  puede escribirse como límite de un conjunto de funciones de  $W(\tau)$  para uno o varios  $\tau \leq s$ , pero no como función de  $W(u)$  cuando  $u > s$ . Un proceso estocástico de  $X(s)$  es adaptado si para cada tiempo  $s \in [0, t]$  y se dice, por tanto, que la variable  $X(s)$  es  $F_s$ -adaptada.

Cabe remarcar un conjunto de particularidades que surgen a raíz de la Definición 1. Ciertos procesos derivados de composiciones simples del proceso de Wiener, como, por ejemplo,  $X(s) = f(s, W(s))$  son adaptados; no obstante, otros procesos, como  $X(s) = W(s + 1)$ , no lo son.

Asimismo, la integral  $X(s) = \int_0^s W(r)dr$  también es un proceso estocástico adaptado, dado que la integral reside en el límite de sumas del Movimiento Browniano para diversos tiempos menores que  $s$ . Siempre y cuando  $X(s)$  sea adaptado, la integral  $\int_0^t X(s)dWs$  tendrá como valor el límite de la expresión (4.3.3). Dicho límite, además, converge en media cuadrática y para cada  $\omega \in \Omega$ .

**Definición 2:** Es posible integrar un proceso estocástico  $X(s)$  en el intervalo  $[0, t]$  en el sentido de Itô si

- $X(s)$  es adaptado cuando  $s \in [0, t]$ , y
- $\int_0^t E[(X(s))^2] ds < \infty$ .

En resumen, la Integral de Itô se expresa como la variable aleatoria

$$\int_0^t X(s, \omega)dW(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i, \omega) (W(s_{i+1}, \omega) - W(s_i, \omega)), \quad (4.3.5)$$

en la que el límite es considerado por cada  $\omega \in \Omega$ .

#### 4.3.2. Propiedades de la integral de Itô

Una vez explicada la integral de Itô, introducimos sus propiedades estadísticas principales. En la citación de estas, distinguimos si el integrando es un proceso estocástico  $X(t)$  o una función determinista  $h(t)$ .

Asumiendo que  $h(t)$  es una función determinista verificando que  $\int_0^t (h(s))^2 ds < \infty$ , se cumplen las siguientes propiedades:

P1. Media:  $E \left[ \int_0^t h(s) dW(s) \right] = 0.$

P2. Varianza:  $Var \left[ \int_0^t h(s) dW(s) \right] = \int_0^t (h(s))^2 ds.$

P3. Covarianza:  $Cov \left[ \int_0^t h_1(\tau) dW(\tau), \int_0^s h_2(\tau) dW(\tau) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(\tau) h_2(\tau) d\tau,$   
en la que  $t \wedge s = \min(t, s).$

En particular,  $E \left[ \left( \int_0^t h_1(\tau) dW(\tau) \right) \left( \int_0^s h_2(\tau) dW(\tau) \right) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(\tau) h_2(\tau) d\tau.$

P4. Normalidad:  $\int_0^t h(s) dW(s) \sim N \left[ 0; \int_0^t (h(s))^2 ds \right].$

En cambio, si el integrando es un proceso estocástico  $X(t)$  que satisface las condiciones de la Definición 2, se verifican las siguientes propiedades:

P5. Media:  $E \left[ \int_0^t X(s) dW(s) \right] = 0.$

P6. Varianza:  $V \left[ \int_0^t X(s) dW(s) \right] = \int_0^t E \left[ (X(s))^2 \right] ds.$

Finalmente, mediante la combinación de las propiedades P5 y P6, se determina la isometría de Itô

$$E \left[ \left( \int_0^t X(s) dW(s) \right)^2 \right] = \int_0^t E \left[ (X(s))^2 \right] ds.$$



## Capítulo 5. Modelo estocástico Log-Normal

El modelo estocástico Log-Normal nos permite describir la evolución del precio de una acción en un mercado con incertidumbre. Dada la incertidumbre presente en los mercados financieros y consecuentemente en el precio de un subyacente, este modelo viene descrito mediante el proceso estocástico de Wiener. Su objetivo es recoger la incertidumbre presente en la dinámica del precio del subyacente.

El modelo estocástico Log-Normal viene dado por

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \\ S(0) &= S_0, \end{aligned} \right\} \quad (5.0.1)$$

en la que

- $S(t)$  representa el valor del subyacente en el instante  $t$ .
- $S_0$  es el valor del subyacente en el momento inicial  $t = 0$ .
- $\mu$  es una constante que representa la tendencia (*drift*).
- $\sigma$  es una constante que representa la volatilidad (*volatility*). Se trata de una constante siempre positiva ( $\sigma > 0$ ).
- $W(t)$  es el Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener estándar.
- $dS(t)$  es la variación del precio del subyacente en el periodo  $[t, t + dt]$ .
- $dW(t)$  es la variación del Movimiento Browniano en el periodo  $[t, t + dt]$ .

### 5.1. Motivación del modelo estocástico para subyacentes en condiciones de certidumbre

Iniciaremos el capítulo explicando el modelo determinista clásico, que muestra la trayectoria temporal al invertir en un activo sin riesgo (condiciones de certidumbre). Este modelo de certidumbre constituirá la base para profundizar, posteriormente, en el

modelo estocástico para activos cotizados en un mercado donde sí existe la incertidumbre, la bolsa.

Sea  $S_0$  un principal invertido a un tipo de interés  $\mu$  durante un periodo de tiempo  $[0, T]$ , subdividido en  $K$  periodos de igual longitud ( $\Delta t > 0$ ). Considerando que  $\hat{S}(0) = S_0$  y denotando que  $\hat{S}(j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, K$ , es el capital durante  $j$  periodos, podemos definir que

$$\hat{S}(1) = S_0 e^{\mu \Delta t}, \quad \hat{S}(2) = S(1) e^{\mu \Delta t}.$$

Razonando de forma general y recursiva, obtenemos la expresión siguiente

$$\hat{S}(j) = \hat{S}(j-1) e^{\mu \Delta t} = \hat{S}(j-2) e^{2\mu \Delta t} = \dots = S_0 e^{\mu j \Delta t}, \quad j = 0, 1, \dots, K.$$

Siempre que  $j = K$ , se cumplirá que  $\hat{S}(T) = \hat{S}(K) = S_0 e^{\mu K \Delta t} = S_0 e^{\mu T}$ . En esta igualdad,  $K \Delta t = T$ , por lo que  $\hat{S}(T)$  equivale al capital durante  $K$  periodos. La capitalización compuesta, que es la utilizada en el presente modelo, se alcanza resolviendo el problema de valor inicial

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = \mu \hat{S}(t); \quad \hat{S}(0) = S_0. \quad (5.1.1)$$

Si resolvemos dicha ecuación diferencial ordinaria, obtenemos

$$\hat{S}(t) = S_0 e^{\mu t}, \quad (5.1.2)$$

Cabe remarcar que el modelo estocástico expuesto al inicio del Capítulo 5 (5.0.1) coincide con el modelo determinista (5.1.1) cuando  $\sigma = 0$ .

## 5.2. Motivación del modelo estocástico para activos cotizados: el modelo Log-Normal

Hasta ahora, hemos trabajado con un modelo que no contemplaba la aleatoriedad. No obstante, el precio de cotización de un subyacente está influido por factores aleatorios.

Por tanto, es necesario incorporar dicha aleatoriedad al modelo determinista abordado en el apartado anterior. Esto se hará mediante la introducción del diferencial del Movimiento Browniano o proceso de Wiener  $dW(t)$ , también llamado Ruido Blanco (o *white noise*).

Por tanto, el parámetro  $\mu$  del modelo determinista, que representa el rendimiento del subyacente, se convierte en  $\mu + \sigma W'(t)$ . Mediante la introducción del ruido blanco  $W'(t)$  y su intensidad  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ), incorporamos al parámetro  $\mu$  fluctuaciones aleatorias.

Incorporando la aleatoriedad al parámetro  $\mu$  tal y como hemos descrito antes, obtenemos la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS(t) = (\mu + \sigma W'(t))S(t)dt = \mu S(t)dt + \sigma S(t)W'(t)dt.$$

Si analizamos la ecuación anterior, podemos distinguir una parte determinista  $\mu S(t)dt$  y otra parte estocástica  $\sigma S(t)W'(t)dt$ . Además, considerando la igualdad  $dW(t) = W'(t)dt$ , es posible reformular el modelo como en la ecuación (5.0.1). Este modelo es conocido como modelo Log-Normal para activos subyacentes.

### 5.3. Solución del modelo Log-Normal

En el presente apartado, resolveremos la ecuación diferencial estocástica (5.0.1) de tipo Itô con condición inicial

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \\ S(0) &= S_0. \end{aligned} \right\}$$

Aplicando el Lema de Itô, introducido en el Capítulo 4.3, reescribimos la ecuación anterior según su forma integral

$$\int_0^t dS(r) = \int_0^t \mu S(r)dr + \int_0^t \sigma S(r)dW(r),$$

que es equivalente a la expresión

$$S(t) - S(0) = \int_0^t \mu S(r) dr + \int_0^t \sigma S(r) dW(r).$$

A continuación, aplicamos el Lema de Itô considerando las siguientes equivalencias en términos de notación

$$X(t) = S(t); \quad f(t, x(t)) = f(t, S(t)) = \mu S(t); \quad g(t, x(t)) = g(t, S(t)) = \sigma S(t),$$

y

$$F(t, x) = \ln(x).$$

Con el fin de aplicar el Lema de Itô, es necesario calcular las derivadas parciales siguientes

$$F_1(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = 0; \quad F_2(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{x}; \quad F_{22}(t, x) = \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} & \ln(S(t)) - \ln(S_0) \\ &= \int_0^t \left( \mu S(r) \frac{1}{S(r)} + \frac{1}{2} (\sigma S(r))^2 \left( \frac{-1}{(S(r))^2} \right) \right) dr + \int_0^t \sigma S(r) \frac{1}{S(r)} dW(r). \end{aligned}$$

Tras simplificar la expresión, obtenemos

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dr + \int_0^t \sigma dW(r),$$

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma(W(t) - W(0)).$$

Si aplicamos la condición C1 del Movimiento Browniano,  $W(0) = 0$  con probabilidad 1, llegamos a que

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t).$$

Tomando exponenciales y despejando  $S_0$ , tenemos

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}. \quad (5.3.1)$$

## 5.4. Propiedades estadísticas de la solución del modelo Log-Normal

La solución del modelo Log-Normal se emplea para realizar predicciones probabilísticas sobre el subyacente. Para ello, resultan de especial importancia las funciones media y varianza de la expresión (5.3.1) en  $t = T$ . Las predicciones se completan con los intervalos de confianza teóricos.

### 5.4.1. Función media

Para determinar la función de la media de la expresión (5.0.1), debemos aplicar la propiedad P3 del proceso de Wiener,  $W(Tt) = \sqrt{T}W(t)$ ;  $t \geq 0$ ,  $T \geq 0$ , (véase apartado 4.2), al caso específico  $t = 1$ :

$$W(T) = \sqrt{T}W(1),$$

en la que cabe recordar que, según la definición del proceso de Wiener,  $W(1) \sim N[0; 1]$ .

Tomando en consideración el operador esperanza en la fórmula (5.3.1), obtenemos

$$\begin{aligned} E[S(T)] &= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} E[e^{\sigma W(T)}] = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} E[e^{\sigma\sqrt{T}W(1)}] \\ &= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} E[e^{\sigma W(T)}] e^{\frac{(\sigma\sqrt{T})^2}{2}}, \end{aligned}$$

que, simplificando, se convierte en

$$E[S(T)] = S_0 e^{\mu T}. \quad (5.4.1)$$

La igualdad (5.4.1) demuestra que el precio de la acción en el modelo Log-Normal se comporta, en media, como en el mundo determinista. Esto puede verificarse en la expresión (5.1.2) cuando  $t = T$ .

#### 5.4.2. Función varianza

Para conocer el comportamiento de la volatilidad en el precio de la acción aplicando el modelo Log-Normal, debemos calcular la función varianza, que está determinada por

$$\begin{aligned} \text{Var}[S(T)] &= E \left[ (S(T))^2 \right] - (E[S(T)])^2 = E \left[ (S_0)^2 e^{2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{2\sigma W(T)} \right] - (S_0)^2 e^{2\mu T} \\ &= (S_0)^2 e^{2\mu T} (e^{-\sigma^2 T} E[e^{2\sigma W(T)}] - 1). \end{aligned}$$

Al desarrollar dicha expresión, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Var}[S(T)] &= (S_0)^2 e^{2\mu T} \left( e^{-\sigma^2 T} E \left[ e^{2\sigma \sqrt{T} W(1)} \right] - 1 \right) \\ &= (S_0)^2 e^{2\mu T} \left( e^{-\sigma^2 T} e^{\frac{4\sigma^2 T}{2}} - 1 \right) = (S_0)^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1), \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

lo que muestra que la varianza se incrementa a medida que ampliamos el horizonte temporal  $T$ .

#### 5.5. Calibración de los parámetros del modelo Log-Normal

En este subapartado, abordaremos los dos métodos estadísticos empleados para la estimación de los parámetros  $\mu$  (tendencia) y  $\sigma$  (volatilidad) en el modelo Log-Normal:

- Método de los momentos.
- Método de máxima verosimilitud.

Es de vital importancia aplicar los dos métodos en la estimación de los parámetros mencionados anteriormente ( $\mu$  y  $\sigma$ ) para comprobar si son similares en ambos casos, pudiendo verificar así la robustez de las estimaciones en el sentido de que las estimaciones no dependen del método estadístico utilizado para calcularlas.

### 5.5.1. Método de los momentos

En este primer método, trabajaremos con los logaritmos de las cotizaciones (log-cotizaciones). Por ello, aplicamos logaritmos a la solución del modelo, dada por la expresión (5.3.1), obteniendo que  $\ln(S(t)) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)$ , sabiendo que  $W(t) \stackrel{d}{=} N[0; t]$  y aplicando las propiedades de la variable aleatoria gaussiana, tenemos que

$$\ln(S(t)) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t; \sigma\sqrt{t}\right]. \quad (5.5.1)$$

Si descargamos  $K + 1$  cotizaciones equiespaciadas en el intervalo  $[0, t]$ , donde  $S(0) = S_0$ ,  $S_1 = S(\Delta t)$ , ...,  $S_K = S(K\Delta t)$ , obtenemos  $K$  incrementos temporales. A partir de estos datos, formamos las log-cotizaciones para el intervalo  $[(i-1)\Delta t, i\Delta t]$ ;  $i = 1, \dots, K$ ,

$$u_i = \ln(S_i) - \ln(S_{(i-1)}), \quad 1 \leq i \leq K. \quad (5.5.2)$$

Aplicando la expresión (5.1.1) a la ecuación (5.5.2), tenemos que

$$u_i = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \left(W(i\Delta t) - W((i-1)\Delta t)\right). \quad (5.5.3)$$

Considerando que los incrementos del proceso de Wiener son independientes y normales de media 0 y varianza  $\Delta t$ , las variables  $u_i$  serán gaussianas e independientes de media  $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$  y varianza  $\sigma^2\Delta t$ , es decir,

$$u_i \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t; \sigma\sqrt{\Delta t}\right]. \quad (5.5.4)$$

A partir de las  $K + 1$  cotizaciones y los  $K$  incrementos temporales, podemos realizar la estimación de  $\mu$  y  $\sigma$  mediante el método de los momentos estadísticos. Para ello, igualamos la media de las log-cotizaciones a la media muestral ( $\bar{U}$ ) y a la quasi-varianza muestral ( $s^2$ ), dadas por

$$\bar{U} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k u_i; \quad s^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^k (u_i - \bar{U})^2. \quad (5.5.5)$$

Lo que nos permite plantear un sistema de ecuaciones para estimar  $\mu$  y  $\sigma$

$$\bar{U} = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t; \quad s^2 = \sigma^2 \Delta t. \quad (5.5.6)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones anterior, obtenemos las fórmulas para estimar los parámetros deseados

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{U} + \frac{s^2}{2} \right) \cong \mu, \quad \hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}} \cong \sigma. \quad (5.5.7)$$

### 5.5.2. Método de máxima verosimilitud

Para explicar el método de máxima verosimilitud, se requiere introducir primero el concepto de función de verosimilitud de una muestra dada  $\{x_i: 1 \leq i \leq N\}$ , denotada por  $L$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^N p(x_i; \vec{\theta}), \quad (5.5.8)$$

donde  $p(x_i; \vec{\theta})$  es la probabilidad de  $x_i$  con los parámetros  $\vec{\theta}$ .

La expresión (5.5.8) depende únicamente de  $\vec{\theta}$  y no de la muestra. Dicha función siempre debe ser mayor que 0. El objetivo es buscar un juego de parámetros  $\vec{\theta}$  que haga más verosímil la muestra  $x_1, \dots, x_N$ , es decir, se busca  $\vec{\theta}$  tal que se maximice  $L$ . Desde un punto de vista numérico es más conveniente trabajar con el logaritmo de la función de verosimilitud

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}) = \sum_{i=1}^N \ln p(x_i, \vec{\theta}). \quad (5.5.9)$$



Para hallar el valor efectivo de  $\vec{\theta}$ , hay que resolver la siguiente ecuación

$$\frac{d \ln L}{d\theta} = 0,$$

considerando que la expresión depende de un único parámetro  $\theta$ .

Recapitulando, escogemos una muestra  $\{x_i: 0 \leq i \leq N\}$  correspondiente a los instantes  $t_0, \dots, t_N$ . Queremos determinar a partir de esta muestra del proceso estocástico  $X(t)$ , dependiente de un vector de parámetros  $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^n$ , el vector de parámetros  $\vec{\theta}$  tal que

$$\max L(\vec{\theta}) = f(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta}).$$

En dicha expresión,  $f(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta})$  constituye la función de densidad conjunta de la muestra. No obstante, es imprescindible obtener una función de densidad conjunta algebraica.

El modelo del subyacente, adaptando la notación de la expresión (5.0.1), se reescribe del siguiente modo

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t, X(t); \vec{\theta}) + g(t, X(t); \vec{\theta}), \\ X(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{5.5.10}$$

donde

$$\begin{aligned} X(t) &= S(t); \quad x_0 = s_0; \quad \vec{\theta} = (\mu, \sigma), \\ f(t, X(t); \vec{\theta}) &= \mu S(t); \quad g(t, X(t); \vec{\theta}) = \sigma S(t). \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la función de densidad probabilística conjunta  $p(x_0, t_0, x_1, t_1, \dots, x_N, t_N; \vec{\theta})$  se puede expresar

$$D(\vec{\theta}) = p_0(x_0; \vec{\theta}) \prod_{i=1}^N p(t_i, x_i | t_{i-1}, x_{i-1}; \vec{\theta}).$$

Con el fin de simplificar las operaciones, trabajaremos con la función de log-verosimilitud, que se define del siguiente modo

$$\ln(p(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta})) = \ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) + \sum_{i=1}^N \ln p(t_i, x_i | t_{i-1}, x_{i-1}; \vec{\theta}).$$

Dado que el valor de  $p(t_i, x_i | t_{i-1}, x_{i-1}; \vec{\theta})$ , se halla habitualmente entre 0 y 1, el ln es negativo y, por tanto, maximizar la función de log-verosimilitud es equivalente a minimizar la función opuesta

$$\text{Min } D(\vec{\theta}) = \ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) - \sum_{i=1}^N \ln p(t_i, x_i | t_{i-1}, x_{i-1}; \vec{\theta}). \quad (5.5.11)$$

Con el fin de expresar el valor de  $p(t_i, x_i | t_{i-1}, x_{i-1}; \vec{\theta})$ , partiremos de la ecuación diferencial estocástica de Itô, determinada en (5.5.10), y aplicaremos el método de Euler-Maruyama considerando un intervalo temporal  $[t_{i-1}, t_i]$ , obteniendo

$$\begin{aligned} x(t_i) - x(t_{i-1}) &= f(t_{i-1}, x(t_{i-1}); \vec{\theta}) \Delta t \\ &+ g(t_{i-1}, x(t_{i-1}); \vec{\theta}) \{W(t_i) - W(t_{i-1})\}. \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

Si denotamos el resultado obtenido en el momento  $t_i$  como  $x_i$   $\{x_i \approx x(t_i)\}$  y consideramos que la aproximación de la ecuación (5.5.12) sigue la distribución normal siguiente, obtenemos

$$x_i | x_{i-1} \sim N[\mu_i; \sigma_i], \quad \begin{cases} \mu_i &= x_{i-1} + f(t_{i-1}, x_{i-1}; \vec{\theta}) \Delta t; \\ \sigma_i &= g(t_{i-1}, x_{i-1}; \vec{\theta}) \Delta t. \end{cases} \quad (5.5.13)$$

Lo que implica que

$$p(t_i, x_i | t_{i-1}, x_{i-1}; \vec{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.5.14)$$

Por tanto, podemos reexpresar la función de log-verosimilitud (5.5.11) del siguiente modo

$$\begin{aligned}
 D(\vec{\theta}) &= -\ln\left(p(t_0, x_0; \vec{\theta})\right) - \sum_{i=1}^N \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2}\right) \\
 &= \ln\left(p(t_0, x_0; \vec{\theta})\right) - N \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\right) + \sum_{i=1}^N \ln\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right) \\
 &= -\ln\left(p(t_0, x_0; \vec{\theta})\right) + \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \sum_{i=1}^N \ln(\sigma_i) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2.
 \end{aligned} \tag{5.5.15}$$

En nuestro modelo, el subyacente en el momento  $t = 0$  es determinista [ $x_0 = s_0$ ]

$$p(t_0, x_0; \vec{\theta}) = p(0, s_0; \mu, \sigma) = 1, \tag{5.5.16}$$

y las funciones  $\mu_i$  y  $\sigma_i$ , determinadas en (5.5.13), adoptan la forma

$$u_i = S_{i-1} + \mu S_{i-1} \Delta t; \quad \sigma_i = \sigma S_{i-1} \sqrt{\Delta t}. \tag{5.5.17}$$

Por lo que, si sustituimos las expresiones (5.5.16) y (5.5.17) en (5.5.15), obtenemos la función

$$\begin{aligned}
 D(\mu, \sigma) &= \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \sum_{i=1}^N \ln(\sigma S_{i-1} \sqrt{\Delta t}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_i - S_{i-1} - \mu S_{i-1} \Delta t}{\sigma S_{i-1} \sqrt{\Delta t}}\right)^2 \\
 &= \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) + \sum_{i=1}^N \ln(S_{i-1}) + \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - 1 - \mu \Delta t\right)^2.
 \end{aligned}$$

El programa que minimiza la función de Log-verosimilitud es, por tanto,

$$\begin{aligned}
 \text{Min } D(\mu, \sigma) & \quad \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) + \sum_{k=1}^N \ln(S_{i-1}) \\
 \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0 & \quad + \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - 1 - \mu \Delta t\right)^2.
 \end{aligned} \tag{5.5.18}$$

Finalmente, debemos calcular el punto crítico, es decir, en el que el gradiente sea nulo

$$\begin{aligned}\frac{\partial D(\mu, \sigma)}{\partial \mu} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{S_i}{S_{i-1}} - 1 - \mu \Delta t \right) = 0, \\ \frac{\partial D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} &= \frac{N}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3 \Delta t} \sum_{i=1}^N \left( \frac{S_i}{S_{i-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2 = 0.\end{aligned}\quad (5.5.19)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (5.5.19), obtenemos que el punto crítico es

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{i=1}^N \left( \frac{S_i}{S_{i-1}} - 1 \right) \cong \mu; \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{i=1}^N \left( \frac{S_i}{S_{i-1}} - 1 - \hat{\mu} \Delta t \right)^2 \cong \sigma. \quad (5.5.20)$$

## 5.6. Validación del modelo Log-Normal

En este subapartado, presentaremos las medidas que permitirán validar el modelo Log-Normal, aplicado a los precios de cotización de la acción del subyacente:

- *Mean Absolute Percentage Error (MAPE)* o error porcentual absoluto medio.
- *Root Mean Squared Error (RMSE)* o error cuadrático medio.
- Elaboración de Intervalos de Confianza (IC) teóricos del 95%.
- Gráficos comparativos que ilustren los intervalos de confianza, junto con la evolución del subyacente y las estimaciones calculadas.

### 5.6.1. Medidas de Bondad de Ajuste

#### Error porcentual absoluto medio (MAPE)

El MAPE es el promedio de las diferencias absolutas entre la cotización real ( $S_i$ ) y el valor estimado ( $\hat{S}_i$ ), divididas entre el valor observado correspondiente ( $S_i$ ). El MAPE se expresa como porcentaje. Considerando que el modelo incluye  $N$  periodos, el MAPE se determina del siguiente modo

$$MAPE = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|S_i - \hat{S}_i|}{S_i}. \quad (5.6.1)$$

Las predicciones comprendidas en el cálculo se extraen aplicando el modelo teórico Log-Normal.

### Error cuadrático medio (RMSE)

El RMSE marca la distancia euclídea media entre los valores estimados ( $\hat{S}_i$ ) y los valores observados ( $S_i$ ). Cuanto menor sea el RMSE, más ajustado será el modelo, es decir, contendrá menos error. El valor del error cuadrático medio viene determinado por

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (S_i - \hat{S}_i)^2}{N}}. \quad (5.6.2)$$

### **5.6.2. Validación por intervalos de confianza teóricos**

Otra herramienta que emplearemos para validar las estimaciones es la construcción y el estudio de intervalos de confianza (IC). Existen dos elementos clave a tener en cuenta: la amplitud del intervalo y el nivel de confianza. El primero nos indica la precisión de la estimación, por lo que deberá ser lo menor posible. El segundo, en cambio, es la probabilidad de que el intervalo incluya el valor real del parámetro que estamos estimando; por tanto, dicha probabilidad deberá ser lo más elevada posible. Los intervalos de confianza contruidos en el presente trabajo abarcan un nivel de confianza del 95%.

Si escogemos una muestra aleatoria simple de una población definida por la función de densidad de probabilidad  $f(x, \theta)$ , esta depende del valor  $\theta$ , que debe ser estimado. El problema, por tanto, es el siguiente: prefijamos un nivel de confianza de  $1 - \alpha$ , donde  $0 < \alpha < 1$ , y determinamos dos valores  $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_N)$  y  $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_N)$  de tal modo que

$$P[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \leq \theta \leq \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_N)] = 1 - \alpha. \quad (5.6.3)$$

El intervalo  $[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_N)]$  se denota como intervalo de confianza del parámetro  $\theta$  al nivel de confianza  $(1 - \alpha)100\%$ . Por tanto, la expresión (5.6.3) designa la probabilidad de que el intervalo  $[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_N),$

$\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ] incluya la muestra. En términos de frecuencia, esto implica que, de cada 100 muestras aleatorias escogidas, el  $(1 - \alpha)100\%$  se encuentran dentro del intervalo  $[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_N)]$ .

Consideramos que  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  es una muestra aleatoria, definimos su media muestral  $(\bar{x})$ . La media  $\bar{x}$  sigue una distribución  $N\left[\mu; \frac{\sigma^2}{N}\right]$ . Por tanto, la variable tipificada  $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}$  sigue una  $N[0; 1]$ . En consecuencia, si fijamos un nivel de confianza  $1 - \alpha$ , se puede obtener el valor  $\lambda_{\alpha/2}$  tal que

$$P\left[\left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}\right| \leq \lambda_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha.$$

Si desarrollamos la expresión anterior, alcanzamos

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left[-\lambda_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} \leq \lambda_{\alpha/2}\right] = P\left[-\lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq \bar{x} - \mu \leq \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right] \\ &= P\left[-\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq -\mu \leq -\bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right] \\ &= P\left[\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right]. \end{aligned}$$

Por lo que las funciones que estamos buscando son

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \\ \theta_2 &= \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del  $(1 - \alpha)100\%$  se define del siguiente modo

$$\left[\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right].$$

Es posible aumentar la precisión de dos formas: perdiendo confianza, lo que no suele ser recomendable, o aumentando el tamaño de la muestra escogida.

### **5.6.3. Validación por gráficos comparativos**

Una vez obtenida la función media de las predicciones puntuales y los intervalos de confianza teóricos (con una confianza del 95%) mediante ambos métodos de estimación, reflejaremos toda esta información en gráficos, lo que nos permitirá llevar a cabo un estudio comparativo visual en el que analizaremos el ajuste entre los datos observados (las cotizaciones reales) y las predicciones puntuales calculadas con ambos métodos. Asimismo, la inclusión de los intervalos de confianza y de las medidas de bondad de ajuste (MAPE y RMSE) reforzará el análisis de los datos.

## Capítulo 6. Valoración de opciones europeas: fórmulas de Black-Scholes

Las fórmulas de Black-Scholes (Black & Scholes, 1973) determinan el precio teórico que debe tomar la prima de una opción europea *call* o *put* con el fin de establecer estrategias de cobertura frente al riesgo inherente de la opción. Para poder calcular la prima de dichas opciones, es necesario conocer el tiempo a vencimiento de la opción ( $T$ ), el precio de ejercicio ( $E$ ) y la volatilidad del subyacente ( $\sigma$ ).

### 6.1. Aplicación de Black-Scholes para calcular el precio de la prima de una *call* u opción de compra ( $C$ )

El *pay-off* de una opción de compra (*call*) de tipo europeo a vencimiento viene definido por la expresión

$$C(S_T, E) = \max(S_T - E; 0) = (S_T - E)^+, \quad (6.1.1)$$

donde

- $E$  es el precio de ejercicio a vencimiento,
- $T$  representa la fecha de vencimiento,
- $S_T$  denota el valor del subyacente en el instante  $T$ .

Considerando que el subyacente sigue el Movimiento Browniano Geométrico, sustituimos  $S_T$  por la solución del modelo Log-Normal, que ya había sido presentada con anterioridad en el Capítulo 5.3 (véase la función (5.3.1)), y alcanzamos la siguiente expresión para definir el precio de la prima de la *call*

$$C = S_0 N(d_1) - E e^{-rT} N(d_2), \quad (6.1.2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (6.1.3)$$



$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{E}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \quad (6.1.4)$$

$r$  denota el tipo de interés libre de riesgo y  $N(x)$  representa la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar (con media 0 y desviación típica 1). Dicha función se define mediante la integral siguiente

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

## 6.2. Aplicación de Black-Scholes para calcular el precio de la prima de una *put* u opción de venta (**P**)

Una vez presentada la fórmula de Black-Scholes para el cálculo de la prima de la opción *call*, introduciremos la expresión correspondiente para valorar la prima de una opción *put* europea con idéntico precio de ejercicio ( $E$ ) y vencimiento ( $T$ ).

El *pay-off* de la opción de venta (*put*) viene dado por la fórmula

$$p(S_T, E) = \max(E - S_T; 0) = (E - S_T)^+. \quad (6.2.1)$$

Suponiendo que el subyacente sigue el comportamiento del Movimiento Browniano Geométrico (véase ecuación (5.3.1)), sustituimos  $S_T$  en la función del *pay-off* de la *put* por  $S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W(T)}$ . Tras desarrollar la expresión resultante, obtenemos la fórmula para calcular la prima de una opción de venta

$$P = -S_0 N(-d_1) + E e^{-rT} N(-d_2). \quad (6.2.2)$$

Dado que  $N(-x) = 1 - N(x)$ , podemos reescribir (6.2.2) como

$$P = -S_0 (1 - N(d_1)) + E e^{-rT} (1 - N(d_2)). \quad (6.2.3)$$

### 6.3. Aplicación de Black-Scholes para calcular el precio de la prima de una *put* u opción de venta ( $P$ ) a partir de la paridad *put-call*

Otro método para calcular la prima de una opción es la paridad *put-call* (Hull, 2006), definida mediante la siguiente igualdad

$$P + S_0 = C + Ee^{-rT}. \quad (6.3.1)$$

Para determinar el precio de una opción mediante la fórmula de paridad, es necesario conocer de antemano el precio de la otra. Es indispensable para poder aplicar la fórmula de paridad que ambas opciones estén emitidas sobre el mismo subyacente, tengan el mismo precio de ejercicio ( $E$ ) y el mismo vencimiento ( $T$ ).

Despejando  $P$  de la igualdad (6.3.1), alcanzamos que la fórmula para obtener la prima de la *put* es

$$P = C + Ee^{-rT} - S_0.$$

Asimismo, despejando  $C$  de dicha igualdad, también es posible calcular la prima de la *call*

$$C = P + S_0 - Ee^{-rT}.$$

## Capítulo 7. Aplicación del modelo Log-Normal

En este capítulo, aplicaremos el modelo Log-Normal, que ha sido descrito previamente de manera teórica en el Capítulo 5, a la modelización del subyacente cotizado Solaria, S.A. Para llevar a cabo la calibración del modelo, se ha optado por un horizonte temporal de 40 periodos. El modelo ha sido implementado mediante la herramienta de cálculo Excel®, que permite la validación del mismo y la realización de predicciones.

La Tabla 7.0.1 muestra las cotizaciones diarias de Solaria durante el horizonte temporal seleccionado (del 09 de mayo de 2022 al 04 de julio de 2022), mientras que el Gráfico 7.0.1 representa la evolución del precio de cotización de la acción durante la franja temporal estudiada.

<b>Δt</b>	<b>Fecha</b>	<b>Cotización</b>	<b>Δt</b>	<b>Fecha</b>	<b>Cotización</b>
<b>0</b>	09/05/2022	19,64	<b>21</b>	07/06/2022	23,35
<b>1</b>	10/05/2022	19,49	<b>22</b>	08/06/2022	22,47
<b>2</b>	11/05/2022	20,94	<b>23</b>	09/06/2022	22,13
<b>3</b>	12/05/2022	19,77	<b>24</b>	10/06/2022	21,54
<b>4</b>	13/05/2022	20,67	<b>25</b>	13/06/2022	21,15
<b>5</b>	16/05/2022	20,83	<b>26</b>	14/06/2022	19,86
<b>6</b>	17/05/2022	21,21	<b>27</b>	15/06/2022	20,35
<b>7</b>	18/05/2022	21,65	<b>28</b>	16/06/2022	20,40
<b>8</b>	19/05/2022	22,70	<b>29</b>	17/06/2022	20,06
<b>9</b>	20/05/2022	21,86	<b>30</b>	20/06/2022	20,82
<b>10</b>	23/05/2022	22,42	<b>31</b>	21/06/2022	20,80
<b>11</b>	24/05/2022	22,75	<b>32</b>	22/06/2022	20,53
<b>12</b>	25/05/2022	22,95	<b>33</b>	23/06/2022	20,50
<b>13</b>	26/05/2022	23,20	<b>34</b>	24/06/2022	21,00
<b>14</b>	27/05/2022	23,09	<b>35</b>	27/06/2022	20,98
<b>15</b>	30/05/2022	21,96	<b>36</b>	28/06/2022	21,39
<b>16</b>	31/05/2022	21,68	<b>37</b>	29/06/2022	20,09
<b>17</b>	01/06/2022	21,55	<b>38</b>	30/06/2022	20,25
<b>18</b>	02/06/2022	22,16	<b>39</b>	01/07/2022	20,68
<b>19</b>	03/06/2022	21,79	<b>40</b>	04/07/2022	20,87
<b>20</b>	06/06/2022	22,17			

Tabla 7.0.1: Precios de cotización de las acciones de Solaria, S.A.

Fuente: Elaboración propia

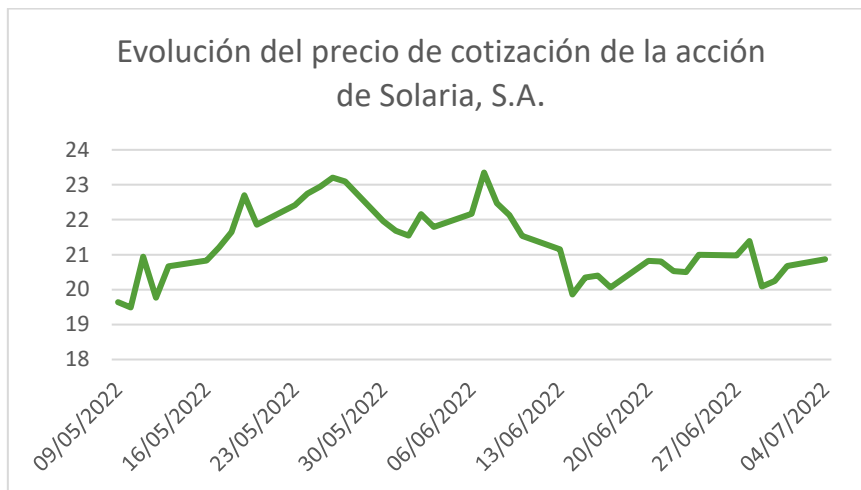


Gráfico 7.0.1: Evolución del precio de cotización de la acción de Solaria, S.A.

Fuente: Elaboración propia

## 7.1. Estimación de los parámetros del modelo Log-Normal

Anteriormente, se han abordado de modo teórico dos técnicas estadísticas para la estimación de los parámetros  $\mu$  (tendencia o *drift*) y  $\sigma$  (volatilidad o *volatility*) del modelo Log-Normal. En primer lugar, estimaremos los parámetros mediante el método de los momentos y, posteriormente, mediante el método de máxima verosimilitud.

El fin de emplear dos técnicas diferentes es verificar la robustez de las estimaciones, ya que, si son similares, estas no dependen del método aplicado.

### 7.1.1. Estimación de parámetros $\mu$ y $\sigma$ mediante el método de los momentos

El método de los momentos, que parte de la solución del modelo Log-Normal, permite igualar la información poblacional del modelo a la información muestral. En lugar de emplear las cotizaciones directamente, utilizamos log-retornos, dado que de este modo podemos aprovechar las propiedades estadísticas de estos.

La Tabla 7.1.1 presenta el precio ajustado de cotización al cierre, acompañado de los log-retornos.

$\Delta t$	Fecha	Cotización	Log-Retornos	$\Delta t$	Fecha	Cotización	Log-Retornos
0	09/05/2022	19,64	-0,00767	21	07/06/2022	23,35	-0,03842
1	10/05/2022	19,49	0,07176	22	08/06/2022	22,47	-0,01525
2	11/05/2022	20,94	-0,05750	23	09/06/2022	22,13	-0,02702
3	12/05/2022	19,77	0,04452	24	10/06/2022	21,54	-0,01827
4	13/05/2022	20,67	0,00771	25	13/06/2022	21,15	-0,06293
5	16/05/2022	20,83	0,01808	26	14/06/2022	19,86	0,02437
6	17/05/2022	21,21	0,02053	27	15/06/2022	20,35	0,00245
7	18/05/2022	21,65	0,04736	28	16/06/2022	20,40	-0,01681
8	19/05/2022	22,70	-0,03771	29	17/06/2022	20,06	0,03719
9	20/05/2022	21,86	0,02529	30	20/06/2022	20,82	-0,00096
10	23/05/2022	22,42	0,01461	31	21/06/2022	20,80	-0,01307
11	24/05/2022	22,75	0,00875	32	22/06/2022	20,53	-0,00146
12	25/05/2022	22,95	0,01083	33	23/06/2022	20,50	0,02410
13	26/05/2022	23,20	-0,00475	34	24/06/2022	21,00	-0,00095
14	27/05/2022	23,09	-0,05018	35	27/06/2022	20,98	0,01935
15	30/05/2022	21,96	-0,01283	36	28/06/2022	21,39	-0,06270
16	31/05/2022	21,68	-0,00601	37	29/06/2022	20,09	0,00793
17	01/06/2022	21,55	0,02791	38	30/06/2022	20,25	0,02101
18	02/06/2022	22,16	-0,01684	39	01/07/2022	20,68	0,00915
19	03/06/2022	21,79	0,01729	40	04/07/2022	20,87	-
20	06/06/2022	22,17	0,05186				

Tabla 7.1.1: Log-retornos durante el horizonte temporal analizado.

Fuente: Elaboración propia

Los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  se han estimado aplicando las fórmulas siguientes, previamente definidas en el Capítulo 5,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{U} + \frac{s^2}{2} \right) \cong \mu, \quad \hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}} \cong \sigma.$$

En dicha fórmula,  $\bar{U}$  corresponde a la media muestral y  $s^2$ , a la quasi-varianza de los log-retornos. El  $\Delta t$  utilizado en el modelo es  $\Delta t = 1/252$ , considerando que, en media, las acciones del IBEX-35 cotizan 252 días al año.

$\bar{U}$	$s^2$
0,00151861	0,000958025

Tabla 7.1.2: Media y quasi-varianza de los log-retornos.

Fuente: Elaboración propia

La Tabla 7.1.2 presenta la media muestral ( $\bar{U}$ ) y la quasi-varianza ( $s^2$ ) obtenidas mediante el método de los momentos estadísticos. Una vez determinados  $\bar{U}$  y  $s^2$ , se estiman los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  mediante el método de los momentos (véase Tabla 7.1.3).

$\mu$	$\sigma$
0,503401007	0,491347479

Tabla 7.1.3: Estimación de  $\mu$  y  $\sigma$  mediante el método de los momentos.

Fuente: Elaboración propia

El valor de  $\mu > 0$  justifica que la tendencia en la evolución del precio de cotización del subyacente sea creciente, tal como se puede observar en el Gráfico 7.0.1.

### 7.1.2. Estimación de los parámetros mediante el método de máxima verosimilitud

Una vez estimados los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  mediante el método de los momentos, los calibraremos mediante el método de máxima verosimilitud. Para llevar a cabo dicha tarea, retomamos las fórmulas definidas y justificadas en el Capítulo 5 (véase expresión (5.5.20))

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=1}^N \left( \frac{S_i}{S_{i-1}} - 1 \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=1}^N \left( \frac{S_i}{S_{i-1}} - 1 - \mu\Delta t \right)^2.$$

Aplicando dichas fórmulas a los datos de cotización expuestos en la Tabla 7.1.1 y considerando  $\Delta t = 1/252$ , obtenemos los resultados mostrados en la Tabla 7.1.4.

$\mu$	$\sigma$
0,500592943	0,484457992

Tabla 7.1.4: Estimación de  $\mu$  y  $\sigma$  para el método de máxima verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia

Nótese en la Tabla 7.1.4 que las estimaciones obtenidas mediante el método de máxima verosimilitud son muy similares a las extraídas a partir del método de los momentos

(véase Tabla 7.1.3), lo que nos permite afirmar que dichas estimaciones son robustas y no dependen del método de estimación empleado.

## 7.2. Validación del modelo Log-Normal

Los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , estimados a través de los dos métodos anteriores, se validan aplicando los criterios estadísticos expuestos en el Capítulo 5.6. En concreto, emplearemos las medidas de bondad de ajuste, los intervalos de confianza y los gráficos comparativos. El fin principal de la validación de las estimaciones es verificar que estas son fiables e independientes del método utilizado.

### 7.2.1. Validación de los parámetros estimados mediante el método de los momentos

Estimaciones puntuales obtenidas aplicando el modelo teórico Log-Normal. Media y desviación típica teóricas

<b>Método momentos. Valores teóricos</b>				
		Valor observado	Valor estimado (Media teórica)	Desviación típica
$\Delta t$	Fecha	S(t)	E(St)	$\sigma$ (St)
0	09/05/2022	19,64	19,6400	0,00000
1	10/05/2022	19,49	19,6793	0,60926
2	11/05/2022	20,94	19,7186	0,86355
3	12/05/2022	19,77	19,7581	1,06000
4	13/05/2022	20,67	19,7976	1,22672
5	16/05/2022	20,83	19,8371	1,37459
6	17/05/2022	21,21	19,8768	1,50916
7	18/05/2022	21,65	19,9166	1,63373
8	19/05/2022	22,70	19,9564	1,75044
9	20/05/2022	21,86	19,9963	1,86078
10	23/05/2022	22,42	20,0363	1,96583
11	24/05/2022	22,75	20,0763	2,06640
12	25/05/2022	22,95	20,1165	2,16312
13	26/05/2022	23,20	20,1567	2,25649
14	27/05/2022	23,09	20,1970	2,34692
15	30/05/2022	21,96	20,2374	2,43473
16	31/05/2022	21,68	20,2779	2,52021

17	01/06/2022	21,55	20,3184	2,60360
18	02/06/2022	22,16	20,3590	2,68508
19	03/06/2022	21,79	20,3998	2,76484
20	06/06/2022	22,17	20,4406	2,84302
21	07/06/2022	23,35	20,4814	2,91975
22	08/06/2022	22,47	20,5224	2,99516
23	09/06/2022	22,13	20,5634	3,06934
24	10/06/2022	21,54	20,6045	3,14238
25	13/06/2022	21,15	20,6457	3,21436
26	14/06/2022	19,86	20,6870	3,28536
27	15/06/2022	20,35	20,7284	3,35545
28	16/06/2022	20,40	20,7698	3,42468
29	17/06/2022	20,06	20,8114	3,49310
30	20/06/2022	20,82	20,8530	3,56078
31	21/06/2022	20,80	20,8947	3,62775
32	22/06/2022	20,53	20,9365	3,69406
33	23/06/2022	20,50	20,9783	3,75974
34	24/06/2022	21,00	21,0203	3,82483
35	27/06/2022	20,98	21,0623	3,88937
36	28/06/2022	21,39	21,1044	3,95338
37	29/06/2022	20,09	21,1466	4,01689
38	30/06/2022	20,25	21,1889	4,07994
39	01/07/2022	20,68	21,2313	4,14254
40	04/07/2022	20,87	21,2737	4,20471

Tabla 7.2.1: Media y desviación típica teóricas de Solaria, S.A. aplicando las estimaciones de  $\mu$  y  $\sigma$  calculadas mediante el método de los momentos.

Fuente: Elaboración propia

Para calcular los valores de la Tabla 7.2.1, hemos utilizado la expresión (5.4.1), de donde obtenemos la media teórica (valor estimado), y la expresión (5.4.2), de donde extraemos la desviación típica teórica, para cada instante  $t$  del periodo objeto de análisis. Se considera un incremento temporal de  $1/252$ .

#### Medidas de bondad de ajuste: MAPE y RSME

Una vez calculadas la media y la varianza teóricas de la acción, validamos el modelo mediante los criterios estadísticos mencionados.



<b>Método momentos. Validación de estimaciones</b>				
<b>Valor observado</b>	<b>Valor estimado</b>	<b>Error absoluto</b>	<b><math> Xi-Xesti /Xi</math></b>	<b>Error<sup>2</sup></b>
<b>S(t)/Xi</b>	<b>E(St)/Xesti</b>	<b> Xi-Xesti </b>		
19,64	19,6400	0	0	0
19,49	19,6793	0,189273	0,009618	0,035824
20,94	19,7186	1,221376	0,061940	1,491760
19,77	19,7581	0,011947	0,000605	0,000143
20,67	19,7976	0,872438	0,044068	0,761148
20,83	19,8371	0,992850	0,050050	0,985752
21,21	19,8768	1,333184	0,067072	1,777379
21,65	19,9166	1,733438	0,087035	3,004806
22,70	19,9564	2,743612	0,137480	7,527407
21,86	19,9963	1,863707	0,093203	3,473403
22,42	20,0363	2,383722	0,118970	5,682130
22,75	20,0763	2,673657	0,133175	7,148442
22,95	20,1165	2,833512	0,140855	8,028790
23,20	20,1567	3,043287	0,150981	9,261594
23,09	20,1970	2,892981	0,143238	8,369338
21,96	20,2374	1,722595	0,085119	2,967332
21,68	20,2779	1,402127	0,069146	1,965961
21,55	20,3184	1,231579	0,060614	1,516788
22,16	20,3590	1,800950	0,088459	3,243422
21,79	20,3998	1,390240	0,068150	1,932767
22,17	20,4406	1,729448	0,084609	2,990991
23,35	20,4814	2,868575	0,140057	8,228721
22,47	20,5224	1,947620	0,094902	3,793223
22,13	20,5634	1,566583	0,076183	2,454182
21,54	20,6045	0,935464	0,045401	0,875093
21,15	20,6457	0,504263	0,024425	0,254281
19,86	20,6870	0,827021	0,039978	0,683964
20,35	20,7284	0,378387	0,018255	0,143177
20,40	20,7698	0,369836	0,017806	0,136779
20,06	20,8114	0,751368	0,036104	0,564554
20,82	20,8530	0,032983	0,001582	0,001088
20,80	20,8947	0,094681	0,004531	0,008964
20,53	20,9365	0,406462	0,019414	0,165211
20,50	20,9783	0,478327	0,022801	0,228797
21,00	21,0203	0,020276	0,000965	0,000411
20,98	21,0623	0,082308	0,003908	0,006775
21,39	21,1044	0,285575	0,013532	0,081553
20,09	21,1466	1,056626	0,049967	1,116458
20,25	21,1889	0,938911	0,044311	0,881554

20,68	21,2313	0,551281	0,025965	0,303910
20,87	21,2737	0,403735	0,018978	0,163002

Tabla 7.2.2: Medidas de bondad de ajuste a partir de las estimaciones de los parámetros calculadas con el método de los momentos.

Fuente: Elaboración propia

Para calcular el MAPE (véase Capítulo 5.6.1), es necesario calcular el error absoluto, que es la diferencia, en términos absolutos, entre el valor estimado ( $X_{esti}$ ) y la cotización real ( $X_i$ ). Una vez tenemos el error absoluto para cada instante  $t$ , lo dividimos entre el valor observado correspondiente en cada instante  $t$  (columna  $|X_i - X_{esti}|/X_i$ ). Finalmente, aplicamos la función PROMEDIO a la columna  $|X_i - X_{esti}|/X_i$  para obtener el MAPE (véase expresión (5.6.1)).

Para calcular el RSME, elevamos al cuadrado el error absoluto para cada instante  $t$  (columna Error<sup>2</sup>). Una vez llevado a cabo este paso, se aplica la función RAÍZ al promedio de la columna Error<sup>2</sup> (véase expresión (5.6.2)).

MAPE	RSME
<b>5,838%</b>	<b>1,500</b>

Tabla 7.2.3: Medidas de bondad de ajuste calculadas a partir de las estimaciones de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  obtenidas mediante el método de los momentos.

Fuente: Elaboración propia

El valor obtenido para el MAPE (5,838%) se considera aceptable, dado que se encuentra en torno al 5%, y el RSME (1,50) también es razonable debido al rango de precios de cotización del subyacente.

### Validación por intervalos de confianza teóricos

Para verificar mediante otra técnica si las estimaciones obtenidas para las acciones de Solaria, S.A. son adecuadas, calculamos los intervalos de confianza teóricos al 95% (para más información, véase Capítulo 5.6.2).

Para calcular el intervalo de confianza al 95% para las estimaciones de  $S(t)$  utilizaremos la siguiente aproximación

$$E(S(t)) \pm 1,96 \times \sigma[S(t)]$$

Para construir los intervalos de confianza de la Tabla 7.2.4, partimos de la media y la varianza teóricas, expuestas anteriormente en la Tabla 7.2.1. Para calcular el límite superior del intervalo de confianza, tomamos la estimación puntual (media) y le sumamos 1,96 veces la desviación típica en cada instante  $t$ . Para obtener el límite inferior del intervalo de confianza, llevamos a cabo el mismo cálculo, pero en lugar de sumar 1,96 veces la desviación típica, la restamos.

Podemos observar que las estimaciones probabilísticas construidas con los intervalos de confianza son muy conservadoras, ya que los intervalos de confianza aumentan con el tiempo y acaban siendo poco informativos. Este hecho se hereda de la característica del proceso de Wiener cuya varianza en el instante  $t$  es precisamente  $t$ .

<b>E(S(t))</b>	<b><math>\sigma</math> (S(t))</b>	<b>Límite superior del IC al 95%</b>	<b>Límite inferior del IC al 95%</b>
19,6400	0,00000	19,64	19,64
19,6793	0,60926	20,8734	18,4851
19,7186	0,86355	21,4112	18,0261
19,7581	1,06000	21,8357	17,6805
19,7976	1,22672	22,2019	17,3932
19,8371	1,37459	22,5313	17,1430
19,8768	1,50916	22,8348	16,9189
19,9166	1,63373	23,1187	16,7145
19,9564	1,75044	23,3873	16,5255
19,9963	1,86078	23,6434	16,3492
20,0363	1,96583	23,8893	16,1832
20,0763	2,06640	24,1265	16,0262
20,1165	2,16312	24,3562	15,8768
20,1567	2,25649	24,5794	15,7340
20,1970	2,34692	24,7970	15,5971
20,2374	2,43473	25,0095	15,4653
20,2779	2,52021	25,2175	15,3383
20,3184	2,60360	25,4215	15,2154
20,3590	2,68508	25,6218	15,0963
20,3998	2,76484	25,8188	14,9807
20,4406	2,84302	26,0129	14,8682
20,4814	2,91975	26,2041	14,7587
20,5224	2,99516	26,3929	14,6519
20,5634	3,06934	26,5793	14,5475
20,6045	3,14238	26,7636	14,4455

20,6457	3,21436	26,9459	14,3456
20,6870	3,28536	27,1263	14,2477
20,7284	3,35545	27,3051	14,1517
20,7698	3,42468	27,4822	14,0575
20,8114	3,49310	27,6579	13,9649
20,8530	3,56078	27,8321	13,8739
20,8947	3,62775	28,0051	13,7843
20,9365	3,69406	28,1768	13,6961
20,9783	3,75974	28,3474	13,6092
21,0203	3,82483	28,5169	13,5236
21,0623	3,88937	28,6855	13,4391
21,1044	3,95338	28,8531	13,3558
21,1466	4,01689	29,0197	13,2735
21,1889	4,07994	29,1856	13,1922
21,2313	4,14254	29,3507	13,1119
21,2737	4,20471	29,5150	13,0325

Tabla 7.2.4: Intervalos de confianza teóricos al 95% de confianza, aplicando las estimaciones de los parámetros obtenidas mediante el método de los momentos.

Fuente: Elaboración propia

Los índices de confianza teóricos nos permiten establecer un rango de valores entre los que oscilará el precio del subyacente con un margen de error del 5%. El Gráfico 7.2.1 refleja los intervalos de confianza calculados al 95%, así como la media estimada mediante la aplicación del modelo Log-Normal y las cotizaciones reales de la acción.

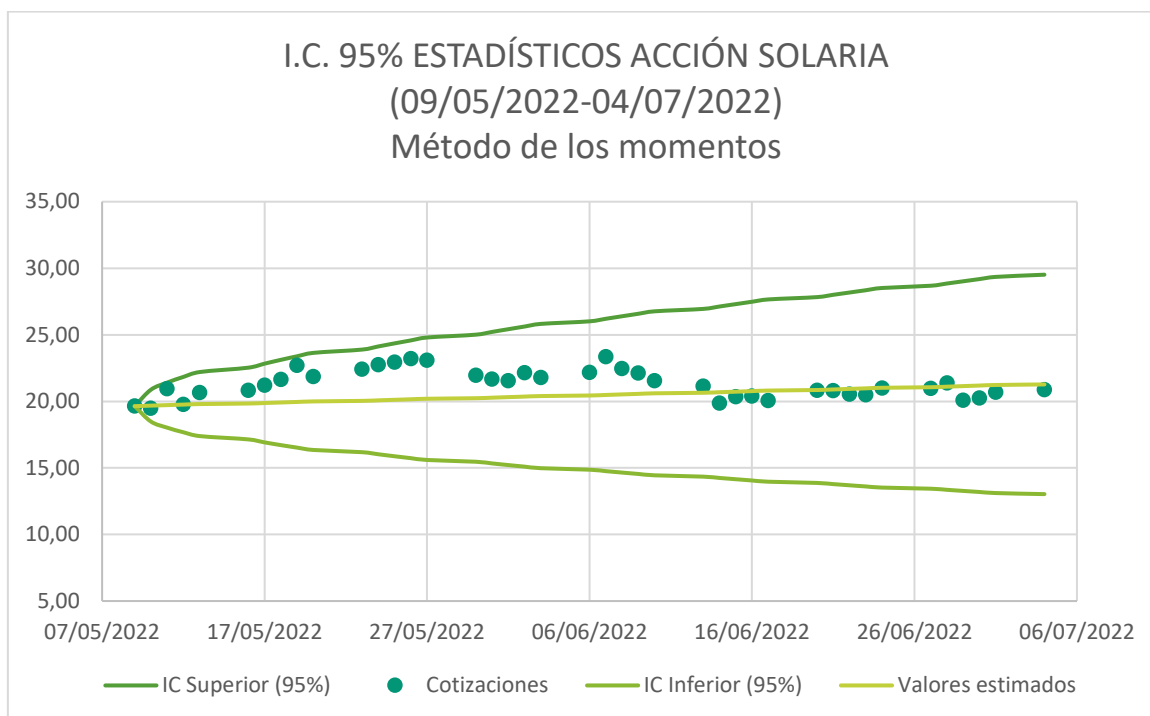


Gráfico 7.2.1: Intervalos de confianza (95%) para las acciones de Solaria, S.A. utilizando el método de los momentos.  
 Fuente: Elaboración propia

Considerando el conjunto de métodos de validación, determinamos que los parámetros estimados son correctos para el horizonte temporal analizado, dado que las oscilaciones en el precio del subyacente se hallan dentro del intervalo obtenido mediante el método de los momentos.

### 7.2.2. Validación de los parámetros estimados mediante el método de máxima verosimilitud

#### Estimaciones puntuales obtenidas mediante la aplicación del modelo teórico Log-Normal. Media y varianza teóricas

El desarrollo de este apartado es prácticamente idéntico al del método de los momentos, con la salvedad de que los datos se calculan con las estimaciones de  $\mu$  y de  $\sigma$  obtenidas mediante el método de máxima verosimilitud. Por ello, volvemos a utilizar las expresiones (5.4.1) y (5.4.2) para obtener la media y la desviación típica teóricas, respectivamente. La Tabla 7.2.5 contiene la media y la desviación típica para cada

instante  $t$  del periodo analizado. El incremento temporal establecido es de  $1/252$ , igual que en el método anterior.

<b>Modelo máxima verosimilitud. Valores teóricos</b>				
		<b>Valor observado</b>	<b>Valor estimado (Media teórica)</b>	<b>Desviación típica</b>
$\Delta t$	<b>Fecha</b>	<b>S(t)</b>	<b>E(St)</b>	<b><math>\sigma</math> (St)</b>
0	09/05/2022	19,64	19,640	0
1	10/05/2022	19,49	19,679	0,60070
2	11/05/2022	20,94	19,718	0,85141
3	12/05/2022	19,77	19,757	1,04508
4	13/05/2022	20,67	19,797	1,20944
5	16/05/2022	20,83	19,836	1,35519
6	17/05/2022	21,21	19,875	1,48784
7	18/05/2022	21,65	19,915	1,61062
8	19/05/2022	22,70	19,955	1,72565
9	20/05/2022	21,86	19,994	1,83440
10	23/05/2022	22,42	20,034	1,93792
11	24/05/2022	22,75	20,074	2,03703
12	25/05/2022	22,95	20,114	2,13233
13	26/05/2022	23,20	20,154	2,22434
14	27/05/2022	23,09	20,194	2,31343
15	30/05/2022	21,96	20,234	2,39995
16	31/05/2022	21,68	20,274	2,48417
17	01/06/2022	21,55	20,315	2,56631
18	02/06/2022	22,16	20,355	2,64658
19	03/06/2022	21,79	20,395	2,72515
20	06/06/2022	22,17	20,436	2,80216
21	07/06/2022	23,35	20,477	2,87774
22	08/06/2022	22,47	20,517	2,95200
23	09/06/2022	22,13	20,558	3,02506
24	10/06/2022	21,54	20,599	3,09699
25	13/06/2022	21,15	20,640	3,16788
26	14/06/2022	19,86	20,681	3,23779
27	15/06/2022	20,35	20,722	3,30680
28	16/06/2022	20,40	20,763	3,37497
29	17/06/2022	20,06	20,805	3,44234
30	20/06/2022	20,82	20,846	3,50897
31	21/06/2022	20,80	20,887	3,57491
32	22/06/2022	20,53	20,929	3,64018
33	23/06/2022	20,50	20,971	3,70484
34	24/06/2022	21,00	21,012	3,76891
35	27/06/2022	20,98	21,054	3,83244

<b>36</b>	28/06/2022	21,39	21,096	3,89544
<b>37</b>	29/06/2022	20,09	21,138	3,95796
<b>38</b>	30/06/2022	20,25	21,180	4,02000
<b>39</b>	01/07/2022	20,68	21,222	4,08161
<b>40</b>	04/07/2022	20,87	21,264	4,14279

Tabla 7.2.5: Media y desviación típica teóricas de Solaria, S.A. aplicando las estimaciones de  $\mu$  y  $\sigma$  calculadas mediante el método de máxima verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia

### Medidas de bondad de ajuste: MAPE y RSME

Tanto el MAPE como el RSME obtenidos se corresponden con valores aceptables (el modo de calcular dichos valores ha sido explicado previamente en el apartado 7.2.1). El MAPE está en torno al 5% y el RSME es razonable dado el intervalo en el que se mueven las cotizaciones del activo subyacente.

MAPE	RSME
<b>5,388%</b>	<b>1,5014</b>

Tabla 7.2.6: Medidas de bondad de ajuste calculadas con las estimaciones de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  obtenidas mediante el método de máxima verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia

### Validación por intervalos de confianza teóricos

E(St)	$\sigma$ (St)	Límite superior del IC al 95%	Límite inferior del IC al 95%
19,640	0	19,64	19,64
19,679	0,60070	20,85643	18,50167
19,718	0,85141	21,38695	18,04942
19,757	1,04508	21,80575	17,70904
19,797	1,20944	22,16717	17,42619
19,836	1,35519	22,49223	17,17986
19,875	1,48784	22,79165	16,95932
19,915	1,61062	23,07183	16,75819
19,955	1,72565	23,33689	16,57233
19,994	1,83440	23,58971	16,39887
20,034	1,93792	23,83237	16,23572
20,074	2,03703	24,06646	16,08131
20,114	2,13233	24,29317	15,93442
20,154	2,22434	24,51349	15,79410
20,194	2,31343	24,72819	15,65954
20,234	2,39995	24,93793	15,53012

20,274	2,48417	25,14322	15,40529
20,315	2,56631	25,34454	15,28460
20,355	2,64658	25,54227	15,16767
20,395	2,72515	25,73673	15,05415
20,436	2,80216	25,92822	14,94377
20,477	2,87774	26,11700	14,83627
20,517	2,95200	26,30328	14,73142
20,558	3,02506	26,48726	14,62903
20,599	3,09699	26,66912	14,52893
20,640	3,16788	26,84902	14,43095
20,681	3,23779	27,02710	14,33495
20,722	3,30680	27,20349	14,24081
20,763	3,37497	27,37830	14,14842
20,805	3,44234	27,55164	14,05765
20,846	3,50897	27,72360	13,96842
20,887	3,57491	27,89428	13,88065
20,929	3,64018	28,06376	13,79424
20,971	3,70484	28,23210	13,70913
21,012	3,76891	28,39939	13,62524
21,054	3,83244	28,56568	13,54251
21,096	3,89544	28,73103	13,46089
21,138	3,95796	28,89550	13,38032
21,180	4,02000	29,05914	13,30074
21,222	4,08161	29,22201	13,22211
21,264	4,14279	29,38413	13,14438

Tabla 7.2.7: Intervalos de confianza teóricos al 95% de confianza, aplicando las estimaciones de los parámetros obtenidas mediante el método de máxima verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia

Con el fin de validar las estimaciones de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  obtenidas mediante el método de máxima verosimilitud, calculamos los intervalos de confianza al 95%. Como hemos comentado en el apartado anterior (Capítulo 7.2.1), el cálculo de los límites superior e inferior de los intervalos de confianza se lleva a cabo considerando la media y la desviación típica teóricas calculadas a partir de las estimaciones de parámetros obtenidas mediante el método de máxima verosimilitud (para más información sobre el cálculo de cualquier dato de la tabla anterior, véase el Capítulo 7.2.1).

Finalmente, el tercer método que empleamos para validar las estimaciones alcanzadas mediante el método de máxima verosimilitud es la representación de los datos. El Gráfico 7.2.2 refleja los intervalos de confianza al 95% obtenidos con dicho método, así



como las medias estimadas y las cotizaciones reales (valor observado) para cada instante  $t$ .

Dicho gráfico nos permite verificar que las estimaciones obtenidas mediante el método de máxima verosimilitud son adecuadas, dado que las fluctuaciones en el precio de cotización se hallan en todo momento dentro de los intervalos de confianza definidos. Por tanto, alcanzamos la conclusión de que el modelo Log-Normal (con los parámetros estimados a través del presente método) refleja adecuadamente el comportamiento del subyacente, Solaria, S.A.

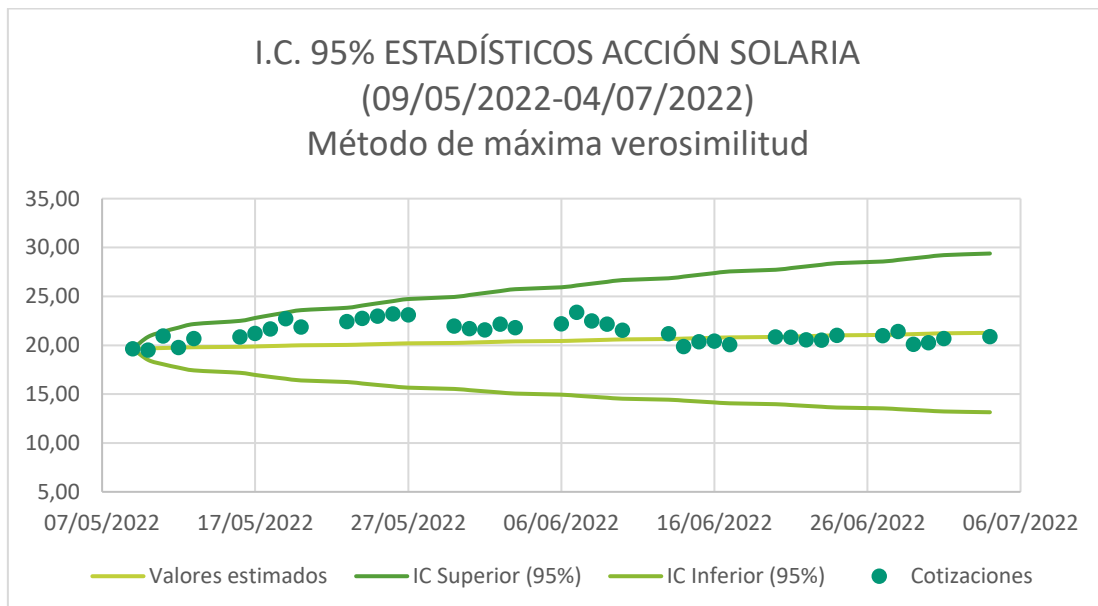


Gráfico 7.2.2: Intervalos de confianza (95%) para las acciones de Solaria, S.A. utilizando el método de máxima verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia

## Capítulo 8. Cálculo de las probabilidades de beneficio mediante estrategias especulativas de tipo cono

El presente capítulo está destinado a calcular la probabilidad de obtener un determinado beneficio aplicando las estrategias de inversión de tipo cono y cono invertido mediante el uso de opciones financieras sobre el activo subyacente Solaria, S.A. En el Capítulo 3, se han presentado dichas estrategias especulativas junto con sus funciones de beneficios/pérdidas (véase funciones (3.1.1) y (3.2.1), respectivamente). Asimismo, en el Capítulo 5, se ha justificado que el comportamiento del subyacente sigue el proceso estocástico de Wiener

$$S_T = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z}, \quad Z \sim N[0; 1].$$

### 8.1. Determinación de la probabilidad de obtener beneficios con una estrategia especulativa de tipo cono

Para calcular la probabilidad de beneficios, es necesario que el subyacente  $S_T$  se halle dentro de un determinado intervalo, de forma que la función  $(B/P)_{TOTAL}(S_T)$  dada en (3.1.1) sea positiva. Si nos fijamos en el Gráfico 3.1.1, determinamos que la unión de intervalos requerida es

$$S_T \in ]0, E - C - P] \cup [E + C + P, +\infty[. \quad (8.1.1)$$

Por lo tanto, hay que calcular la siguiente probabilidad

$\mathbb{P}$  [Beneficio Cono]

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{P} [S_T \leq E - (C + P)] + \mathbb{P} [S_T \geq E + (C + P)] \\
 &= \mathbb{P} \left[ S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} \leq E - (C + P) \right] \\
 &+ \mathbb{P} \left[ S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} \geq E + (C + P) \right] \\
 &= \mathbb{P} \left[ e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} \leq \frac{E - (C + P)}{S_0} \right] \\
 &+ \mathbb{P} \left[ e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} \geq \frac{E + (C + P)}{S_0} \right] \\
 &= \mathbb{P} \left[ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma\sqrt{T}Z \leq \ln \left( \frac{E - (C + P)}{S_0} \right) \right] \\
 &+ \mathbb{P} \left[ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma\sqrt{T}Z \geq \ln \left( \frac{E + (C + P)}{S_0} \right) \right] \\
 &= \mathbb{P} \left[ \sigma\sqrt{T}Z \leq \ln \left( \frac{E - (C + P)}{S_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right] \\
 &+ \mathbb{P} \left[ \sigma\sqrt{T}Z \geq \ln \left( \frac{E + (C + P)}{S_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right] \\
 &= \mathbb{P} \left[ Z \leq \frac{\ln \left( \frac{E - (C + P)}{S_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T}{\sigma\sqrt{T}} \right] \\
 &+ \mathbb{P} \left[ Z \geq \frac{\ln \left( \frac{E + (C + P)}{S_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T}{\sigma\sqrt{T}} \right] = \\
 &= \mathbb{P} \left[ Z \leq \frac{\ln \left( \frac{E - (C + P)}{S_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T}{\sigma\sqrt{T}} \right] + 1 \\
 &- \mathbb{P} \left[ Z \leq \frac{\ln \left( \frac{E + (C + P)}{S_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T}{\sigma\sqrt{T}} \right] \\
 &= N \left( \frac{\ln \left( \frac{E - (C + P)}{S_0} \right) - \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T}{\sigma\sqrt{T}} \right)
 \end{aligned}$$

$$-N\left(\frac{\ln\left(\frac{E + (C + P)}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + 1,$$

donde

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (8.1.2)$$

representa la función de distribución de la variable aleatoria normal tipificada,  $Z \sim N[0; 1]$ .

Recapitulando, la probabilidad de beneficios en una inversión de tipo cono con vencimiento  $T > 0$  sobre un subyacente que sigue el Movimiento Browniano Geométrico es

$\mathbb{P}$  [Beneficio Cono]

$$= N\left(\frac{\ln\left(\frac{E - (C + P)}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - N\left(\frac{\ln\left(\frac{E + (C + P)}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + 1, \quad (8.1.3)$$

en la que  $N$  representa la función (8.1.2),  $E$  es el precio de ejercicio y  $C$  y  $P$  denotan las primas de las opciones *call* y *put*, respectivamente.

En la tabla resumen de los escenarios de inversión para la estrategia de tipo cono incluida en los Anexos, se asigna la siguiente notación a los elementos de la función (8.1.3)

$$N(X1) = N\left(\frac{\ln\left(\frac{E - (C + P)}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

$$N(X2) = -N\left(\frac{\ln\left(\frac{E + (C + P)}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + 1.$$

## 8.2. Determinación de la probabilidad de obtener beneficios con una estrategia especulativa de tipo cono invertido

Con el fin de calcular la probabilidad de beneficios en la estrategia del cono invertido, partimos de la probabilidad  $P$  del cono o *straddle* (véase expresión (8.1.3)). Una vez determinada la probabilidad de beneficios del cono ( $P$ ), calculamos directamente la del cono invertido, dado que esta es  $1 - P$ .

Por tanto, la probabilidad de beneficios en una inversión de tipo cono invertido con fecha de vencimiento  $T > 0$  sobre un activo subyacente que sigue el Movimiento Browniano Geométrico es

$\mathbb{P}$  [Beneficio Cono Invertido]

$$\begin{aligned} &= N\left(\frac{\ln\left(\frac{E + (C + P)}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &- N\left(\frac{\ln\left(\frac{E - (C + P)}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right), \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

en la que  $N$  es equivalente a la función (8.1.2),  $E$  representa el precio de ejercicio y  $C$  y  $P$  son las primas de las opciones *call* y *put*, respectivamente.

En la tabla resumen de los escenarios de inversión en las estrategias de tipo cono invertido incluida en el Anexo, definimos la siguiente notación para los elementos de la expresión (8.2.1)

$$N(X1) = N\left(\frac{\ln\left(\frac{E + (C + P)}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$
$$N(X2) = -N\left(\frac{\ln\left(\frac{E - (C + P)}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

### 8.3. Presentación de escenarios y determinación de las probabilidades de beneficio, aplicadas al caso de Solaria, S.A.

Para alcanzar el objetivo del trabajo, hemos aplicado a un subyacente real las funciones definidas en los apartados 8.1 y 8.2, analizando las variaciones en el precio de ejercicio y en las primas. El objetivo es ver cómo afecta la probabilidad de beneficios exigida al precio de ejercicio ( $E$ ), a la prima de la *call* ( $C$ ) y a la prima de la *put* ( $P$ ).

Se determinan tres escenarios distintos para cada una de las estrategias especulativas (cono y cono invertido): en el primero se exigirá una probabilidad de beneficios del 50%; en el segundo se establece una probabilidad de beneficios del 75% y en el tercero se requiere una probabilidad de beneficios del 90%.

En este apartado, aplicaremos los conceptos teóricos desarrollados anteriormente con los datos de cotización de Solaria, S.A. Para llevar a cabo esta tarea, se toman como punto de partida los datos siguientes, que serán comunes a todos los escenarios:

- Vencimiento:  $T = 5$  días.
- Tendencia o *drift* del subyacente:  $\mu = 0,0125148235838023$  (diario).
- Volatilidad o *volatility*:  $\sigma = 0,0121114498034981$  (diario).
- Valor del subyacente en el instante inicial ( $t = 0$ ):  $S_0 = 19,64\text{€}$ .

- Rentabilidad libre de riesgo:  $r = -0,00551^3$  (diario).

Los valores de  $\mu$  y  $\sigma$  se toman de la estimación de parámetros obtenida mediante el método de máxima verosimilitud, dado que el error porcentual absoluto medio, o MAPE, es menor que en el método de los momentos (recordemos que el MAPE es una medida de bondad de ajuste para validar las estimaciones, véase el Capítulo 7.2 para más información). Asimismo, cabe remarcar que los valores de  $\mu$ ,  $\sigma$  y  $r$  están expresados en formato diario.

Las primas de las opciones ( $C$ ) y ( $P$ ), obtenidas a partir de las fórmulas de Black-Scholes, dependen del precio de ejercicio  $E$ , por lo que no se podrá determinar su valor hasta que no resolvamos el sistema mediante Solver.

Esta herramienta, donde se prefijará de antemano la probabilidad de beneficios exigida al modelo (50%, 75% y 90%, respectivamente), definirá el precio de ejercicio que obtiene dicha probabilidad de beneficios.

---

<sup>3</sup> Tipo de interés libre de riesgo tomado de la rentabilidad de los bonos del Estado a 3 meses:  $r = -0,347$ .

Fuente: Datos Históricos Del Bono Español a 3 Meses - Investing.Com, fecha de consulta: 04/07/2022.

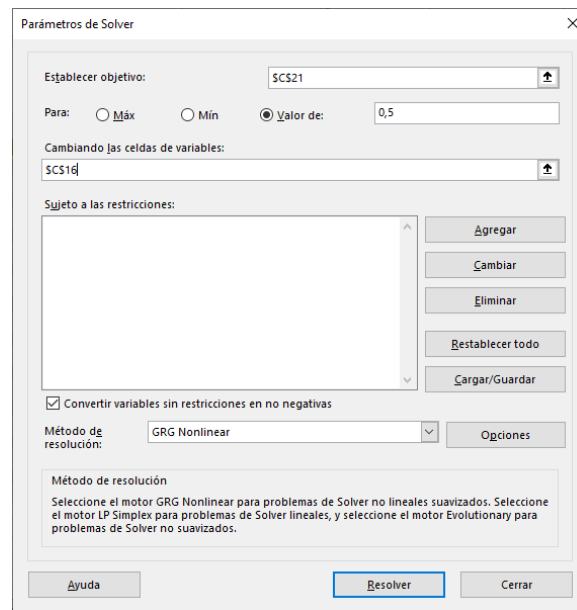


Figura 8.3.1: Cuadro de diálogo de la herramienta Solver para la obtención del precio de ejercicio ( $E$ ) en el escenario 1.

Fuente: Elaboración propia

La celda objetivo de la Figura 8.3.1 corresponde a la probabilidad de obtener beneficios. Como queremos que el programa nos entregue el precio de ejercicio ( $E$ ) para una probabilidad predeterminada, le asignamos el valor deseado (en este caso, le hemos asignado un 0,5 de probabilidad porque se trata de la resolución del escenario 1). Por último, las celdas variables corresponden al precio de ejercicio ( $E$ ). Este último dato es el único que el programa puede editar con el fin de ajustarse a la probabilidad exigida. No obstante, habrá otros datos, como las primas de las opciones, que se reajustarán en función del precio de ejercicio definido por la herramienta Solver.

### 8.3.1. Estrategia de tipo cono. Probabilidad de beneficios del 50%

En el primer escenario, establecemos una probabilidad de beneficios del 50%. A continuación, se muestran los datos comunes a todos los escenarios, que serán de utilidad en el cálculo de las primas y del precio de ejercicio. El precio de ejercicio contiene un interrogante (?) porque se determina en función del escenario e, inicialmente, lo desconocemos.



<b>S<sub>0</sub></b>	19,64
<b>E</b>	?
<b>μ (diaria)</b>	0,01259
<b>σ (diaria)</b>	0,01228
<b>r (diaria)</b>	-0,00551
<b>T (días)</b>	5

Tabla 8.3.1: Valores clave comunes a todos los escenarios.

Fuente: Elaboración propia

Calculamos las primas de las opciones mediante las fórmulas de Black-Scholes, que dependen asimismo del precio de ejercicio. Esta última variable es la que el programa puede modificar para alcanzar la probabilidad de beneficios exigida.

<b>Probabilidad beneficio</b>	<b>50,00%</b>
<b>Prima de la call (C)</b>	0,01119
<b>Prima de la put (P)</b>	0,90946
<b>Precio ejercicio (E)</b>	<b>19,980</b>

Tabla 8.3.2: Determinación del precio de ejercicio (E) y de las primas (C) y (P) para una probabilidad de beneficios del 50% en la estrategia del cono.

Fuente: Elaboración propia

Como se ha comentado, el sistema se resuelve mediante Solver, donde indicamos que la celda objetivo (es decir, la probabilidad de beneficios) debe tener el valor de 0,5. Tras ejecutar el programa, se resuelve que el precio de ejercicio (E) debe ser de 19,98€, la prima de la call (C) debe ser de 0,01119€ y la prima de la put (P), de 0,90946€ para lograr una probabilidad de beneficio del 50% mediante la estrategia de inversión de tipo cono, como se muestra en la Tabla 8.3.2. En la práctica, las opciones se negocian en paquetes de 100, por lo que se tendría que multiplicar el precio unitario de las primas obtenido por 100.

### 8.3.2. Estrategia de tipo cono. Probabilidad de beneficios del 75%

En este segundo escenario, la probabilidad de beneficio exigida al sistema asciende al 75%. Para evitar la repetición de información, hemos optado por incluir la tabla de datos comunes a todos los escenarios en una única ocasión (véase Tabla 8.3.1). Como las primas de las opciones calculadas mediante las fórmulas de Black-Scholes dependen del

precio de ejercicio, estas se ajustan automáticamente en función del precio de ejercicio aportado por Solver.

<b>Probabilidad beneficio</b>	<b>75,00%</b>
<b>Prima de la call (<i>C</i>)</b>	0,02581
<b>Prima de la put (<i>P</i>)</b>	0,71751
<b>Precio ejercicio (<i>E</i>)</b>	<b>19,779</b>

Tabla 8.3.3: Determinación del precio de ejercicio (*E*) y de las primas (*C*) y (*P*) para una probabilidad de beneficios del 75% en la estrategia del cono.

Fuente: Elaboración propia

Tras ejecutar la herramienta Solver, donde establecemos un valor de 0,75 en la celda objetivo (véase Figura 8.3.1), obtenemos que el precio de ejercicio debe ser 19,78€, que la *call* debe tener un precio de 0,02581€ y la *put*, una prima de 0,71751€, tal como se muestra en la Tabla 8.3.3.

### 8.3.3. Estrategia de tipo cono. Probabilidad de beneficios del 90%

En el tercer escenario planteado para la estrategia especulativa del cono, exigimos una probabilidad de beneficios del 90%. Para no repetir información, no se reincidirá sobre todos los pasos que coinciden en los distintos escenarios, como pueden ser las fórmulas de las primas. Para más información, véase Capítulo 8.3 y subapartados 8.3.1 y 8.3.2. A partir de ahora, nos centraremos únicamente en los resultados obtenidos mediante la herramienta Solver, que constituyen la base de nuestro estudio.

<b>Probabilidad beneficio</b>	<b>90,00%</b>
<b>Prima de la call (<i>C</i>)</b>	0,05214
<b>Prima de la put (<i>P</i>)</b>	0,54759
<b>Precio ejercicio (<i>E</i>)</b>	<b>19,588</b>

Tabla 8.3.4: Determinación del precio de ejercicio (*E*) y de las primas (*C*) y (*P*) para una probabilidad de beneficios del 90% en la estrategia del cono.

Fuente: Elaboración propia

Tras introducir en el sistema la probabilidad de beneficios exigida, es decir 0,9, ejecutamos el sistema, alcanzando los resultados mostrados en la Tabla 8.3.4. Para obtener una probabilidad de beneficios del 90% en la estrategia del cono con los datos

expuestos con anterioridad, el precio de ejercicio ( $E$ ) desciende hasta los 19,59€, la prima de la *call* ( $C$ ) sube a 0,05214€ y la prima de la *put* ( $P$ ) desciende hasta 0,54759€.

#### 8.3.4. Estrategia de tipo cono invertido. Probabilidad de beneficios del 50%

Pasando a la estrategia de inversión del cono invertido, definimos en el primer escenario una probabilidad de beneficios del 50%. Igual que en la estrategia del cono, nos serviremos de las fórmulas de Black-Scholes para definir la prima de las opciones, que varía en función del precio de ejercicio definido por Solver.

Una vez introducidas dichas fórmulas, aplicamos la función (8.2.1), que define la probabilidad de beneficios en la presente estrategia especulativa. Al igualar dicha función a la probabilidad de beneficios exigida (en este caso 0,5), obtenemos mediante la herramienta Solver el precio de ejercicio ( $E$ ) para el que la probabilidad de beneficio es de 0,5.

<b>Probabilidad beneficio</b>	<b>50,00%</b>
<b>Prima de la call (<math>C</math>)</b>	0,01119
<b>Prima de la put (<math>P</math>)</b>	0,90946
<b>Precio ejercicio (<math>E</math>)</b>	<b>19,980</b>

Tabla 8.3.5: Determinación del precio de ejercicio ( $E$ ) y de las primas ( $C$ ) y ( $P$ ) para una probabilidad de beneficios del 50% en la estrategia del cono invertido.

Fuente: Elaboración propia

Tras resolver el sistema, obtenemos que el precio de ejercicio debe ser de 19,98€, que la prima de la *call* debe tener un valor de 0,01119€ y que la prima de la *put* debe ser de 0,90946€ para lograr una probabilidad de beneficios del 50% empleando una estrategia de inversión de tipo cono invertido, véase Tabla 8.3.5.

#### 8.3.5. Estrategia de tipo cono invertido. Probabilidad de beneficios del 75%

En el segundo escenario de cono invertido, exigimos al modelo que nos ofrezca una probabilidad de beneficios del 75%. Ejecutamos el sistema mediante Solver, como se ha descrito en la Figura 8.3.1, definiendo un valor de 0,75 para la celda objetivo, que se corresponde con la probabilidad de beneficios deseada.

<b>Probabilidad beneficio</b>	<b>75,00%</b>
<b>Prima de la call (<i>C</i>)</b>	0,00448
<b>Prima de la put (<i>P</i>)</b>	1,10494
<b>Precio ejercicio (<i>E</i>)</b>	<b>20,177</b>

Tabla 8.3.6: Determinación del precio de ejercicio (*E*) y de las primas (*C*) y (*P*) para una probabilidad de beneficios del 75% en la estrategia del cono invertido.

Fuente: Elaboración propia

El programa resuelve que, para obtener una probabilidad de beneficios del 75% aplicando la estrategia del cono invertido, el precio de ejercicio (*E*) debe ser de 20,18€, la prima de la *call* (*C*), de 0,00448€ y la de la *put* (*P*) de 1,10494€, tal como se muestra en la Tabla 8.3.6.

### 8.3.6. Estrategia de tipo cono invertido. Probabilidad de beneficios del 90%

El último escenario planteado establece una probabilidad de beneficios predefinida del 90%. Resolvemos el sistema creado mediante Solver, estableciendo que la celda objetivo tenga un valor de 0,9.

<b>Probabilidad beneficio</b>	<b>90,00%</b>
<b>Prima de la call (<i>C</i>)</b>	0,00181
<b>Prima de la put (<i>P</i>)</b>	1,28410
<b>Precio ejercicio (<i>E</i>)</b>	<b>20,354</b>

Tabla 8.3.7: Determinación del precio de ejercicio (*E*) y de las primas (*C*) y (*P*) para una probabilidad de beneficios del 90% en la estrategia del cono invertido.

Fuente: Elaboración propia

Tras ejecutarlo, alcanzamos la solución de que el precio de ejercicio debe ser de 20,35€, la prima de la opción de compra (*C*) debe ser 0,00181€ y la prima de la opción de venta (*P*) debe ascender hasta los 1,28410€ para que la estrategia del cono invertido nos dé una probabilidad de beneficios del 90%, tal como se muestra en la Tabla 8.3.7.

### 8.3.7. Comparación de los escenarios de cono y cono invertido

Estrategia	Cono			Cono invertido		
	50,00%	75,00%	90,00%	50,00%	75,00%	90,00%
Probabilidad de beneficio	50,00%	75,00%	90,00%	50,00%	75,00%	90,00%
Prima de la <i>call</i> ( <i>C</i> )	0,01119	0,02581	0,05214	0,01119	0,00448	0,00181
Prima de la <i>put</i> ( <i>P</i> )	0,90946	0,71751	0,54759	0,90946	1,10494	1,28410
Precio ejercicio ( <i>E</i> )	19,980	19,779	19,588	19,980	20,177	20,354
Desembolso inicial	0,92065	0,74332	0,59973	0	0	0
Suma inicial recibida	0	0	0	0,92065	1,10942	1,28591
Desembolso final (en caso de ejercicio)	40,88140	40,30214	39,77671	39,04010	39,24471	39,42200
Probabilidad $S_T \leq E - C - P$	0,0332%	0,0280%	0,0198%	-	-	-
Probabilidad $S_T \geq E + C + P$	49,9668%	74,9720%	89,9802%	-	-	-

Tabla 8.3.8: Comparación de los precios de ejercicio y las primas de las opciones, así como de la inversión inicial y el desembolso final, en caso de ejercer, en los diferentes escenarios de inversión planteados.

Fuente: Elaboración propia

En primer lugar, podemos observar en la Tabla 8.3.8 que tanto el precio de ejercicio como las primas de las opciones coinciden en la estrategia de tipo cono y de tipo cono invertido cuando exigimos al modelo una probabilidad de beneficios del 50%. El motivo reside en el hecho de que, si igualamos la probabilidad de beneficios al 50% en ambas estrategias, obtenemos la misma fórmula en los dos casos (considerando que debemos multiplicar por -1 la función de la probabilidad de beneficios del cono invertido). En el resto de los escenarios, los datos no coinciden porque, aunque la fórmula sea la misma, el valor al que igualamos la probabilidad difiere.

Centrándonos en la estrategia inversora de tipo cono, destacamos que, a medida que aumenta la prima de la *call* (*C*), el precio de ejercicio (*E*) disminuye. Esto se explica porque se compensan entre ellas, dado que ambas las abona el propietario de la opción, lo que corrobora la información expuesta en el Capítulo 2 sobre la compensación de la prima de la *call* y del precio de ejercicio.

Asimismo, analizando con mayor detalle los datos estudiados, podemos determinar cuán probable es que el precio del subyacente a vencimiento se halle por debajo del precio de ejercicio menos las primas o por encima del precio de ejercicio más las primas. Basándonos en los datos expuestos en la Tabla 8.3.8, la probabilidad de obtener

beneficios cuando el subyacente se halla por debajo del precio de ejercicio menos las primas, es decir cuando  $S_T \leq E - C - P$ , es de 0,0332% en el primer escenario, de 0,0280% en el segundo y de 0,0198% en el tercero. En cambio, la probabilidad de obtener beneficios cuando el subyacente se halla por encima del precio de ejercicio más las primas, es decir cuando  $S_T \geq E + C + P$ , es de 49,9668% en el primer escenario, de 74,9720% en el segundo y de 89,9802% en el tercero (véase Tabla 8.3.8).

Considerando todos los datos, podemos afirmar que, a pesar de que el cono es una estrategia de movimiento, en este caso tiene una tendencia alcista, dado que la probabilidad de obtener beneficios cuando el subyacente es menor que el precio de ejercicio menos las primas ( $E - C - P$ ) es residual en los tres escenarios.

Si tuviéramos que entrar al mercado con una estrategia de tipo cono, la opción ideal sería el escenario con una probabilidad de beneficios del 90%, dado que tanto la suma de las primas como el precio de ejercicio son menores. No obstante, dadas las condiciones que requiere dicha estrategia (precio de ejercicio, prima de las opciones, etc.), es probable que no encontraríamos una contraparte en el mercado. Por ello, para poder entrar al mercado, deberíamos reducir la probabilidad de beneficio exigida o aumentar el precio de ejercicio.

Por otro lado, la estrategia del cono invertido no supone una inversión inicial, sino que el inversor recibe una cantidad de dinero a la firma del contrato. Esta suma, como se muestra en la Tabla 8.3.8, aumenta a medida que aumenta la probabilidad de obtener beneficios. La suma de las primas recibidas en el escenario con probabilidad de beneficios del 50% es de 0,92065€, esta asciende hasta 1,10942€ en el escenario con una probabilidad de beneficios del 75% y alcanza 1,28591€ cuando la probabilidad de beneficios es del 90%. El desembolso final en caso de que la contraparte decidiera ejercer las opciones también aumenta a medida que crece la probabilidad de beneficios, siendo este de 39,04010€ en el primer escenario, de 39,24471€ en el segundo y de 39,422€ en el tercero.

En resumen, tanto la suma de las primas recibidas como el desembolso final se incrementan a medida que sube la probabilidad de obtener beneficios. También se

cumple en estos supuestos que la prima de la *call* y el precio de ejercicio se compensan, dado que a medida que disminuye la prima de la opción *call*, aumenta el precio de ejercicio.

Si quisiéramos entrar al mercado con una estrategia de cono invertido, la opción más interesante para el inversor sería el escenario con una probabilidad del 90%, ya que, aunque el desembolso final es un poco más elevado, la cantidad recibida a la firma del contrato es superior a la de los otros escenarios. Sin embargo, como en el caso anterior, sería complicado hallar una contraparte para cerrar el contrato, dado que las posibilidades de obtener beneficios para la otra parte serían muy reducidas. Por tanto, sería más realista optar por el escenario con una probabilidad de beneficios del 75% para poder entrar al mercado.

## Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo ha consistido en analizar, desarrollar y aplicar estrategias sintéticas de tipo cono y cono invertido combinando opciones de compra (o *calls*) y opciones de venta (o *puts*) europeas para plantear distintos escenarios en los que se exige una determinada probabilidad de beneficios y analizar cómo afecta dicha probabilidad al precio de ejercicio ( $E$ ) y a las primas de las opciones de compra ( $C$ ) y de venta ( $P$ ). Cabe mencionar que hemos supuesto en todo momento que la dinámica del activo subyacente (es decir, las acciones de Solaria, S.A.) se describe mediante el Movimiento Browniano Geométrico, que es solución del modelo Log-Normal.

Con el fin de aplicar al activo cotizado dichas estrategias especulativas, hemos llevado a cabo una revisión de los aspectos teóricos esenciales: los conceptos de opciones financieras *call* y *put* y sus características, la creación de estrategias especulativas de tipo cono y de tipo cono invertido, la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) de tipo Itô mediante el Lema de Itô, los métodos para la estimación de parámetros a partir de cotizaciones históricas, las diferentes técnicas para validar dichas estimaciones y las fórmulas de Black-Scholes para determinar la prima de las opciones europeas. Una vez revisada la base teórica, se han aplicado todos estos conceptos a las cotizaciones de la acción de Solaria, S.A. con el propósito de crear distintos escenarios en los que se analiza cómo afecta la probabilidad de beneficio predefinida (50%, 75% o 90%) al precio de ejercicio, así como a las primas de las opciones.

La elección del activo subyacente Solaria, S.A. ha estado motivada por la volatilidad de sus cotizaciones, adecuándose así a la estrategia de movimiento del cono, así como también por su actividad empresarial: el desarrollo de las energías renovables, algo que cobra especial importancia debido a la crisis energética existente.

La conexión entre el presente trabajo y el Máster en Dirección Financiera y Fiscal se halla, principalmente, en la materia de Modelización y Valoración de Opciones Financieras. No obstante, también han sido de gran utilidad los conocimientos



adquiridos en las asignaturas de Mercados Financieros y Valoración de Empresas y Finanzas Cuantitativas.

En cuanto a las limitaciones del trabajo, destacamos que el modelo del subyacente solo permite realizar estimaciones a corto plazo por el incremento exponencial de la volatilidad a largo plazo. Esto limita la posibilidad de aplicación del modelo en el mercado, dado que los contratos de opciones suelen tener un horizonte temporal de tres meses. Si empleáramos un modelo más fino, que permitiera realizar estimaciones a más de tres meses, las posibilidades de utilizar el modelo en el mercado serían mayores.

No obstante, la metodología de este trabajo es fundamental como base para los modelos complejos empleados en el mundo real. Asimismo, las técnicas matemáticas de los modelos para realizar estimaciones a más de tres meses exceden las competencias adquiridas en el máster, que únicamente nos ofrece una introducción a la modelización matemática.

## Bibliografía

- Allen, E. (2007). *Modeling with Itô Stochastic Differential Equations* (1st ed. 2007.) [Book]. Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5953-7>
- Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 17, 21-86. <https://doi.org/10.24033/ASENS.476>
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654. [https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall09/cos323/papers/black\\_scholes73.pdf](https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall09/cos323/papers/black_scholes73.pdf)
- Bolsa de Madrid. (s. f.). *Precios Sesión IBEX-35*. Recuperado 5 de agosto de 2022, a partir de <https://www.bolsamadrid.es/esp/asp/Mercados/Precios.aspx?indice=ESI100000000&punto=indice>
- Burgos Simón, C., Calatayud Gregori, J., Cortés López, J. C., & Jornet Sanz, M. (2018). *El rol del Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener estándar en las Finanzas*. <https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/107085/Cort%c3%a9s%3bBurgos%3bJornet%20-%20El%20rol%20del%20Movimiento%20Browniano%20o%20proceso%20estoc%c3%a1stico%20de%20Wiener%20est%c3%a1ndar%20e...pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- CME Group. (2008). *25 Estrategias comprobadas para operar opciones sobre futuros de CME Group*. <https://www.cmegroup.com/trading/files/25-strategies-spn.pdf>
- Comisión Nacional del Mercado de Valores. (2016). *Qué debe saber de... Opciones y Futuros*. [https://www.cnmv.es/DocPortal/Publicaciones/Guias/GUIA\\_OPCYFUT.PDF](https://www.cnmv.es/DocPortal/Publicaciones/Guias/GUIA_OPCYFUT.PDF)

- Cortés López, J. C., & Navarro Quiles, A. (2016). *Fundamentos sobre opciones financieras: Una revisión desde una perspectiva matemática*.  
<https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/68275/Cort%c3%a9s%3bNavarro%20-%20Fundamentos%20sobre%20opciones%20financieras%3a%20Una%20revisi%c3%b3n%20desde%20una%20perspectiva%20matem....pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Hull, J. (2006). *Options, futures & other derivatives* (6th. ed.) [Book]. Pearson Prentice Hall.
- Investing.com. (s. f.). *Datos históricos del bono español a 3 meses*. Recuperado 5 de agosto de 2022, a partir de <https://es.investing.com/rates-bonds/spain-3-month-bond-yield-historical-data>
- Itô, K. (1944). Stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy Tokyo*, 20(8), 519-524.
- Klebaner, C. (2011). *Introduction to Stochastic Calculus with Applications To Finance*. Imperial College Press.
- Øksendal, B. (1998). *Stochastic Differential Equations: An introduction with Applications*. Springer.
- Salerno, J. T. (1993). Mises and Hayek Dehomogenized. *The Review of Austrian Economics*, 6(2), 113-146.
- Solaria – Energía y Medio Ambiente. (s. f.). Recuperado 5 de agosto de 2022, a partir de <https://solariaenergia.com/>
- Solaria Energía y Medioambiente, S. A. y S. D. (2022). *Cuentas anuales 2021 Consolidadas*. <https://solariaenergia.com/wp-content/uploads/IN21-986-Informe-CCAA-SEMA-Consolidado-31.12.2021-1.pdf>

Yahoo Finanzas. (s. f.). *Solaria Energía y Medio Ambiente, S.A. (SLR.MC) Precio de acción, noticias, cotización e historial* - Yahoo Finanzas. Recuperado 5 de agosto de 2022, a partir de <https://es.finance.yahoo.com/quote/SLR.MC?p=SLR.MC&.tsrc=fin-srch>

## Anexos

### Resumen de los escenarios en la estrategia de inversión de tipo cono

		Cono (50%)	Cono (75%)	Cono (90%)
Datos básicos	$S_0$	19,64	19,64	19,64
	$\mu$ (diaria)	0,012514824	0,012514824	0,012514824
	$\sigma$ (diaria)	0,012111145	0,012111145	0,012111145
	$r$ (diaria)	-0,00551	-0,00551	-0,00551
	$T$	5	5	5
Datos fórmulas Black-Scholes	d1	-1,63781	-1,26454	-0,90639
	d2	-1,66489	-1,29162	-0,93348
	N(d1)	0,05073	0,10302	0,18236
	N(d2)	0,04797	0,09824	0,17529
	Prima de la <i>call</i> ( $C$ )	<b>0,01119</b>	<b>0,02581</b>	<b>0,05214</b>
	Prima de la <i>put</i> ( $P$ )	<b>0,90946</b>	<b>0,71751</b>	<b>0,54759</b>
Determinación probabilidad de beneficios	N(X1)	0,000331538	0,00028	0,00020
	N(X2)	0,500331537	0,25028	0,10020
	Probabilidad beneficio	<b>50,00%</b>	<b>75,00%</b>	<b>90,00%</b>
<b>Precio ejercicio (<math>E</math>)</b>		<b>19,9804</b>	<b>19,7794</b>	<b>19,5885</b>
<b>Desembolso inicial</b>		0,92065	0,74332	0,59973
<b>Desembolso final (en caso de ejercicio)</b>		40,88140	40,30214	39,77671
<b>Probabilidad <math>S_T \leq E - C - P</math></b>		0,0332%	0,0280%	0,0198%
<b>Probabilidad <math>S_T \geq E + C + P</math></b>		49,9668%	74,9720%	89,9802%

### Resumen de los escenarios en la estrategia de inversión de tipo cono invertido

		Cono invertido (50%)	Cono invertido (75%)	Cono invertido (90%)
<b>Datos básicos</b>	$S_0$	19,64	19,64	19,64
	$\mu$ (diaria)	0,012514824	0,012514824	0,012514824
	$\sigma$ (diaria)	0,01211145	0,01211145	0,01211145
	$r$ (diaria)	-0,00551	-0,00551	-0,00551
	$T$	5	5	5
<b>Datos fórmulas Black-Scholes</b>	d1	-1,63781	-1,99952	-2,32183
	d2	-1,66489	-2,02661	-2,34891
	N(d1)	0,05073	0,02278	0,01012
	N(d2)	0,04797	0,02135	0,00941
	Prima de la <i>call</i> ( $C$ )	<b>0,01119</b>	<b>0,00448</b>	<b>0,00181</b>
	Prima de la <i>put</i> ( $P$ )	<b>0,90946</b>	<b>1,10494</b>	<b>1,28410</b>
<b>Determinación probabilidad de beneficios</b>	N(X1)	0,50033	0,75035067	0,90035
	N(X2)	0,00033	0,000350659	0,00035
	Probabilidad beneficio	<b>50,00%</b>	<b>75,00%</b>	<b>90,00%</b>
<b>Precio ejercicio (<math>E</math>)</b>		<b>19,9804</b>	<b>20,1771</b>	<b>20,3540</b>
<b>Suma inicial recibida</b>		0,92065	1,10942	1,28591
<b>Desembolso final (en caso de ejercicio)</b>		39,04010	39,24471	39,42200