



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Arquitectura

Matemáticas y Urbanismo. Teselaciones, mosaicos,
pavimentos y trazado urbano

Trabajo Fin de Grado

Grado en Fundamentos de la Arquitectura

AUTOR/A: Bataller Morro, Sergio

Tutor/a: Trujillo Guillen, Macarena

Cotutor/a externo: RIVERA HERRAEZ, RAFAEL

CURSO ACADÉMICO: 2021/2022



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



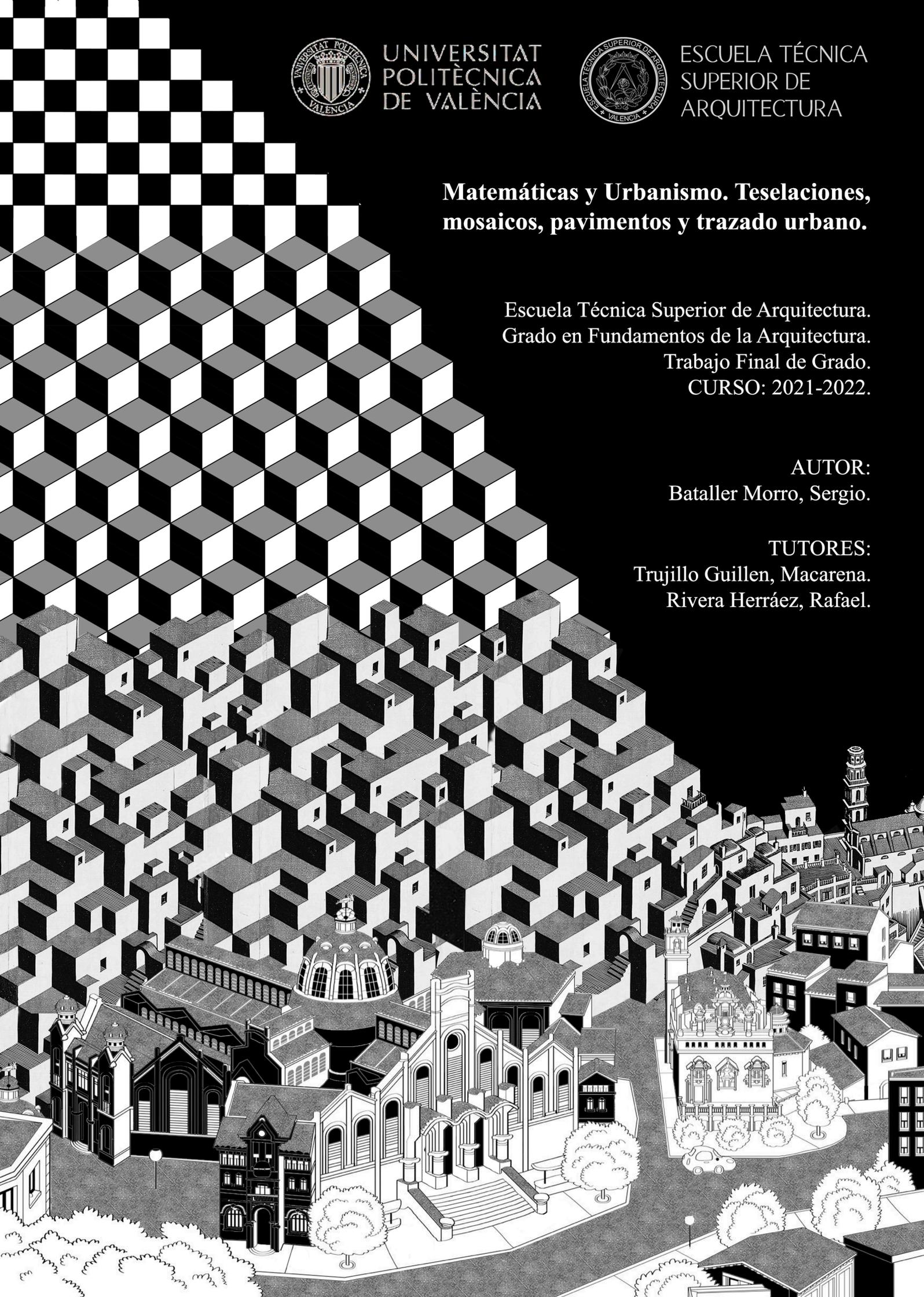
ESCUELA TÉCNICA
SUPERIOR DE
ARQUITECTURA

**Matemáticas y Urbanismo. Teselaciones,
mosaicos, pavimentos y trazado urbano.**

Escuela Técnica Superior de Arquitectura.
Grado en Fundamentos de la Arquitectura.
Trabajo Final de Grado.
CURSO: 2021-2022.

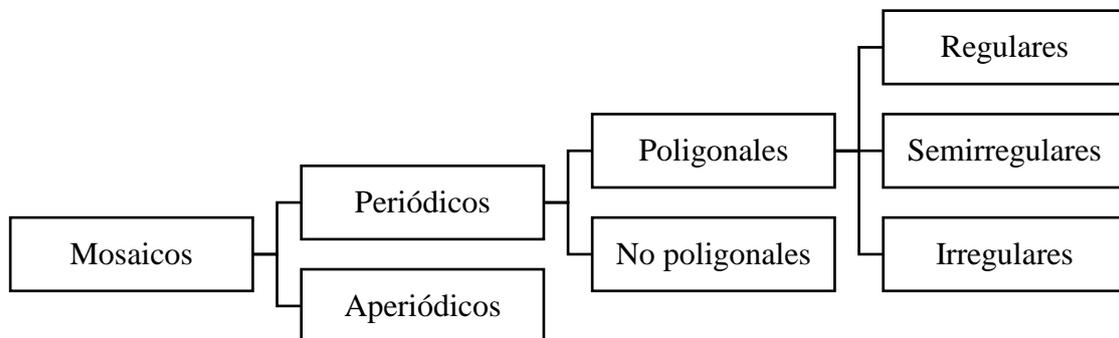
AUTOR:
Bataller Morro, Sergio.

TUTORES:
Trujillo Guillen, Macarena.
Rivera Herráez, Rafael.



Resumen castellano

Este trabajo final de grado versa acerca de las teselaciones, de cómo estas estructuran el plano y su relación forma-función. La primera parte introduce los conceptos matemáticos necesarios para entender cómo se produce la formación de cada tipo de mosaico clasificados a partir de sus propias definiciones en:



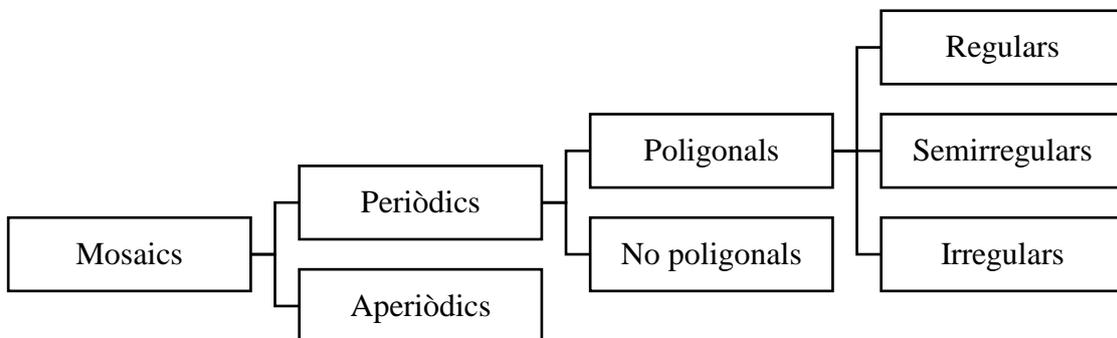
Para poder entender de forma más sencilla esta clasificación se representan gráficamente todos los casos estudiados. Además, también se estudian los movimientos del plano y las transformaciones geométricas, terminando este apartado más teórico recreando los 17 grupos cristalográficos planos.

En la segunda parte se trasladan estos conocimientos a la realidad física, donde se analizan algunos ejemplos a distintas escalas urbanas. En concreto, se estudia la relación forma/función del pavimento en el espacio público (la calle y la plaza), en el espacio semiprivado (obra maestra arquitectónica valenciana) y en el espacio privado (la vivienda). Esto bajo una mirada crítica y con la aportación de posibles soluciones, que mejorarían la comprensión el espacio y su función.

Palabras clave: Pavimento, teselación, espacio, función, estructurar.

Resum valencià

Aquest treball final de grau versa sobre les teselacions, de com aquestes estructuren el pla i la seua relació forma-funció. La primera part introdueix els conceptes matemàtics necessaris per a entendre com es produeix la formació de cada tipus de mosaic classificats a partir de les seues pròpies definicions en:



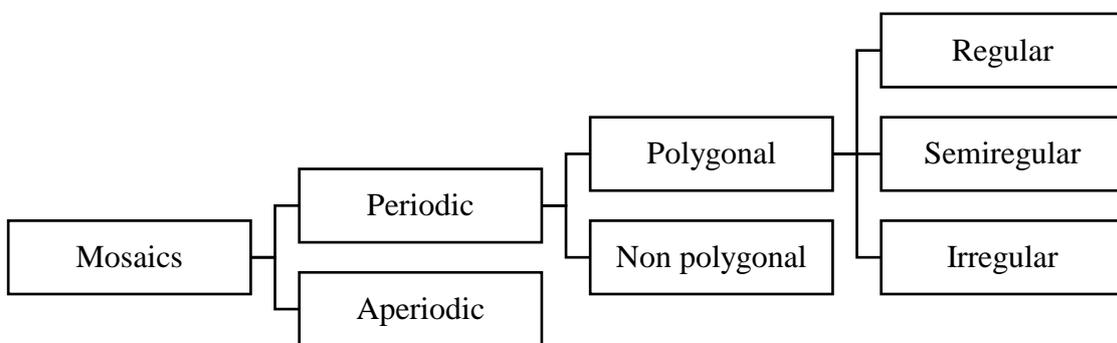
Per a poder entendre de forma més senzilla aquesta classificació es representen gràficament tots els casos estudiats. A més, també s'estudien els moviments del pla i les transformacions geomètriques, acabant aquest apartat més teòric recreant els 17 grups cristal·logràfics plans.

En la segona part es traslladen aquests coneixements a la realitat física, on s'analitzen alguns exemples a diferents escales urbanes. En concret, s'estudia la relació forma/funció del paviment en l'espai públic (el carrer i la plaça), en l'espai semiprivat (obra mestra arquitectònica valenciana) i en l'espai privat (l'habitatge). Això sota una mirada crítica i amb l'aportació de possibles solucions, que millorarien la comprensió l'espai i la seua funció.

Paraules clau: Paviment, teselacio, espai, funció, estructurar.

Abstract *inglés*

This final degree work deals with tessellations, how they structure the plane and their form-function relationship. The first part introduces the mathematical concepts necessary to understand how the formation of each type of mosaic is classified from their own definitions in:



In order to understand this classification more easily, all the cases studied are represented graphically. In addition, the movements of the plane and geometric transformations are also studied, ending this more theoretical section by recreating the 17 flat crystallographic groups.

In the second part, this knowledge is transferred to the physical reality, where some examples at different urban scales are analyzed. Specifically, the relationship form/function of the pavement in the public space (the street and the square), in the semi-private space (Valencian architectural masterpiece) and in the private space (the home) is studied. This under a critical look and with the contribution of possible solutions, which would improve the understanding of the space and its function.

Keywords: Pavement, tessellation, space, function, structure.

Índice

1. Introducción	7
2. Teselado del plano	8
2.1. Teselaciones planas periódicas	8
2.1.1. Teselaciones con polígonos regulares	8
2.1.2. Teselaciones con polígonos semirregulares	11
2.1.3. Teselaciones con polígonos irregulares	14
2.1.4. Teselaciones no poligonales	14
2.2. Teselaciones planas aperiódicas	20
3. Transformaciones geométricas	22
3.1. Movimientos del plano	24
4. Grupos cristalográficos	27
4.1. Clasificación de los grupos cristalográficos	28
5. Objeto de análisis	47
5.1. Espacio público. La calle y la plaza	52
5.1.1. Pavimento hidráulico común	52
5.1.2. Pavimentos singulares	55
5.1.2.1. Plaza del Ayuntamiento	55
5.1.2.2. Avenida del Puerto	57
5.1.2.3. Paseo Marítimo de València	58
5.1.2.4. Plaza del Doctor Collado	60
5.2. Espacio semi-público. Arquitectura singular	63
5.2.1. La Lonja de la Seda	64
5.3. Espacio privado. La Vivienda	76
5.3.1. Vivienda Burriana	76
5.3.2. Vivienda Sant Isidre	85
6. Objetivo de desarrollo sostenible	87
7. Conclusión	88
8. Bibliografía	90

1. Introducción.

El trabajo final de grado de “Teselaciones, mosaicos, pavimentos y trazado urbano” nace del interés por los pavimentos, por descubrir las matemáticas que hay detrás de ellos y la necesidad de analizar cómo estructuran el espacio urbano.

La primera clave para abordar este trabajo es saber observar el entorno que en mi caso se realiza a través del caminar. Cuando contemplamos la ciudad desde la calma y el análisis podemos apreciar factores que juegan un papel fundamental en el entramado urbano.

Vivimos en una sociedad con prisa, las nuevas tecnologías, las mejoras en los medios de transporte, la propia información que se recibe desde los medios de comunicación y redes sociales están confeccionadas para ser inmediatas y constantes.

Este cúmulo de información proveniente de distintas fuentes nos ha hecho que nos acostumbremos a vivir como autómatas, sin tiempo a pensar en aquello que vemos y escuchamos; la reflexión se disipa como herramienta para entender el mundo y apreciamos más la inmediatez y la cantidad que la pausa y la cualidad

Es por eso que me he parado a reflexionar; sustituyendo el mirar por el observar; y me he preguntado cómo se construyen los pavimentos en sus diversas variantes y cómo son capaces de estructurar el espacio desde el suelo, generando lugares de interés sin la necesidad de levantar ningún tabique. Y esto me ha llevado al tema de este trabajo, las teselaciones.

Para estudiar este tema se plantea una parte teórica, que trata de analizar de la mano de las matemáticas las diferentes formas de teselar. Especialmente interesantes son los mosaicos periódicos en los que se puede encontrar una pequeña región poligonal del mosaico que mediante traslaciones, giros y simetrías permite reproducir el todo.

Toda esta información extraída de revistas, libros y artículos, es comprobada y puesta en práctica a través del dibujo. Me he permitido crear mis propias teselaciones en base a la teoría detrás de cada una de ellas.

Finalmente, se trasladan estos conocimientos a la realidad física, donde se analizan un par de ejemplos a distintas escalas urbanas. En concreto, se estudia la relación forma/función del pavimento en el hogar, en la calle y también en alguna obra maestra arquitectónica valenciana. Todo esto bajo una mirada crítica y con la aportación de posibles soluciones, que mejorarían la comprensión del espacio y su función.

2. Teselado del plano.

Teselar un plano consiste en cubrirlo completamente utilizando unas formas planas de dimensión finitas llamadas teselas.

*Definición: Una **teselación** (mosaico) del plano es una colección de teselas tales que: 1) dos teselas no tienen ningún punto interior común, es decir, solo pueden compartir parte de su frontera; y 2) la unión de las teselas cubre totalmente el plano.*

El término tesela proviene del latín *tesellam*, pieza cuadrada de mármol piedra, o de cualquier otro material que se utilizaba en la composición de pavimentos romanos. Las famosas calzadas romanas por las que circulaban personas, pero también animales y carros, necesitaban cubrir el suelo sin que hubiese huecos ni se superpusiesen piezas para evitar accidentes. Así, estos pavimentos romanos se convierten en una de las primeras aplicaciones de la teselación, en la que se pone claramente de manifiesto la relación entre la función y la forma que analizaremos en el Capítulo 6. Y es que las teselas se utilizaban mucho tanto en la antigua Grecia como en la antigua Roma, sin embargo, ninguna de estas civilizaciones consiguió hacer con ellas una simetría tan elaborada como los árabes. Un estupendo ejemplo lo tenemos en la Alhambra, que se mencionará más adelante cuando se expongan los grupos cristalográficos. (Salguero, J. 1994).

En primer lugar, se va a realizar una clasificación de los tipos de teselaciones agrupadas en teselaciones planas periódicas y aperiódicas. A continuación, se tratará sobre las diferentes posibilidades que se conocen para cubrir un plano utilizando teselaciones periódicas.

2.1. Teselaciones planas periódicas.

*Definición: Se dice que un **teselado** es **periódico** cuando es generado por la traslación de una tesela o un grupo de ellas, esto es, desplazando la ubicación de la tesela o grupo de teselas sin someterla a giros ni simetrías.*

Las teselaciones planas periódicas se clasifican según el tipo de polígono que se utilice para cubrir el plano, estudiaremos los casos de teselaciones regulares, semirregulares e irregulares.

2.1.1. Teselaciones con polígonos regulares.

*Definición: La **teselación periódica** se dice **regular**, si está realizada con un solo tipo de polígono regular.*

Para encontrar qué polígonos regulares pueden formar una teselación periódica regular se ha de tener en cuenta que los ángulos de cada polígono reunidos alrededor de un punto, sumen 360° .

Atendiendo a esta condición, solo los triángulos equiláteros, los cuadrados y los hexágonos regulares la cumplen (Fig. 1).

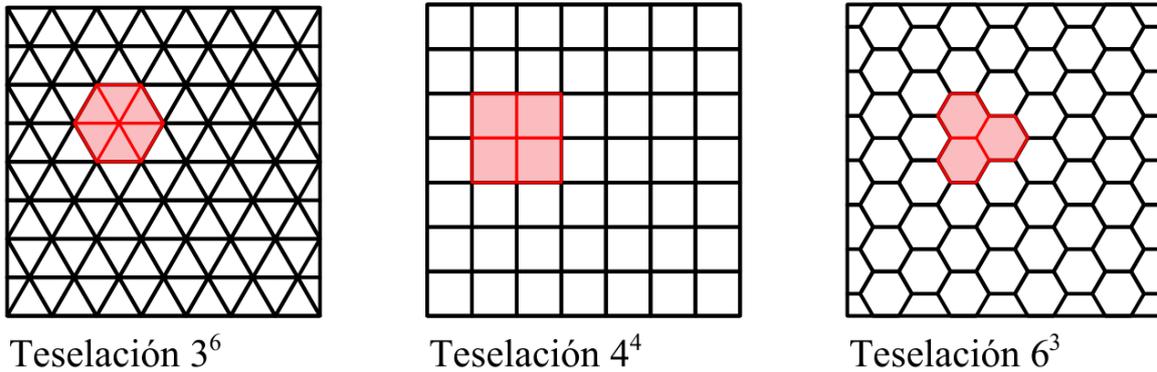


Figura 1: Teselaciones regulares del plano.

Para calcular el número de teselaciones regulares que puede haber se puede utilizar la siguiente fórmula (Salguero, J. 1994):

$$\sum_i^n m_i = 2 \left(1 + \sum_i^n \frac{m_i}{x_i} \right) \quad (1)$$

Siendo m_i el número de polígonos de x_i lados que concurren en un vértice. Si se trata de teselaciones regulares compuestas por un solo tipo de polígonos regulares, entonces $i = 1$, por lo que la fórmula (1) sería:

$$m_1 x_1 = 2x_1 + 2m_1 \quad (2)$$

Esta ecuación es una ecuación diofántica, es decir, en la que tanto x_1 como m_1 tienen que ser números enteros. Aunque el teorema de Matiyasevic proporciona un método general para resolverla, podemos hacer una serie de cambios sobre la ecuación (2) y resolverla de forma más sencilla:

$$m_1 + x_1 = \frac{m_1 x_1}{2},$$

$$\frac{m_1}{x_1 m_1} + \frac{x_1}{x_1 m_1} = \frac{x_1 m_1}{2x_1 m_1} \rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{m_1} = \frac{1}{2}$$

La solución trivial es x_1 y $m_1 = 4$. Y utilizando la expresión que permite separar cualquier fracción unitaria en la suma de otras dos, se tiene:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

cuyas soluciones son $x_1 = 3, m_1 = 6$, o $x_1 = 6, m_1 = 3$, en definitiva, las soluciones son:

- 4 polígonos de 4 lados
- 3 polígonos de 6 lados
- 6 polígonos de 3 lados.

La figura 2 esquematiza todas estas posibilidades.

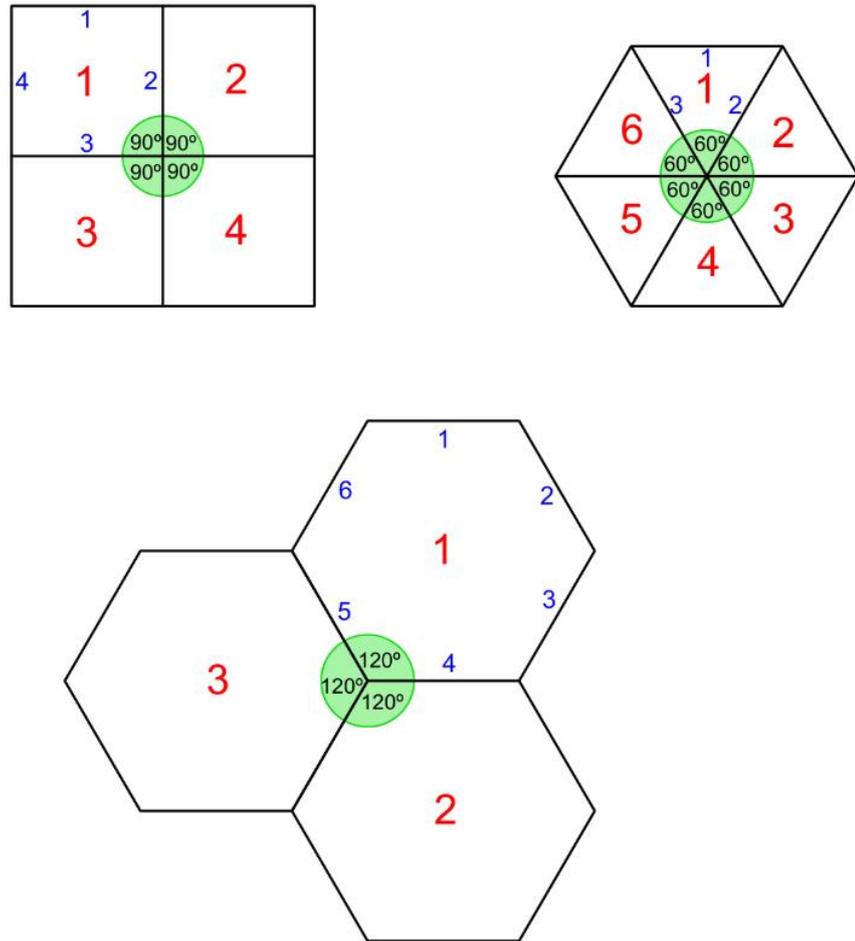


Figura 2: Polígonos regulares (múltiplos de 360°).

De entre todos estos polígonos, el hexágono regular es el más eficiente para cubrir un plano. Es decir, si tomamos figuras de la misma área, se puede comprobar que el hexágono es el que utiliza un perímetro menor. Esto lo apuntó ya Pappus de Alejandría en su Libro V y era conocido como la conjetura del panal. Sin embargo, no fue hasta 2001 cuando Thomas Hales hizo una demostración general en su trabajo *The Honeycomb*. (Hales, T. 2001).

2.1.2. Teselaciones con polígonos semirregulares.

Definición. Una teselación semirregular es una teselación periódica compuesta por dos o más polígonos regulares.

Al igual que en los regulares, la distribución de polígonos en una teselación semirregular es idéntica en cada vértice. Eso quiere decir que la colección de polígonos que concurren en un vértice no solo es la misma en todos, sino que además aparecen en el mismo orden cíclico (Gómez Tato, A. 2009).

Utilizando de nuevo la expresión (1) podemos obtener el número de teselaciones semirregulares utilizando dos polígonos.

$$m_1 + m_2 = 2 \left(1 + \frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} \right) \quad (3)$$

donde en este caso m_1 y m_2 son el número de polígonos de x_1 y x_2 lados que concurren en un vértice.

En este caso, hemos recurrido al software Mathematica para obtener las soluciones de esta ecuación diofántica.

```

diofanticas.nb * - Wolfram Mathematica 10.0
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

Reduce[{-x y + 2 y + 2 x == 0, x > 0, y > 0}, {x, y}, Integers]

(x == 3 && y == 6) || (x == 4 && y == 4) || (x == 6 && y == 3)

In[1]:= Reduce[{(m1 + m2) == 2 (1 + m1 / x1 + m2 / x2), x1 >= 3, x2 >= 3, m1 > 0, m2 > 0, x1 != x2},
{x1, x2}, Integers]

Out[1]:= (m1 == 1 && m2 == 2 && x1 == 3 && x2 == 12) || (m1 == 1 && m2 == 2 && x1 == 4 && x2 == 8) ||
(m1 == 1 && m2 == 2 && x1 == 10 && x2 == 5) || (m1 == 1 && m2 == 4 && x1 == 6 && x2 == 3) ||
(m1 == 2 && m2 == 1 && x1 == 5 && x2 == 10) || (m1 == 2 && m2 == 1 && x1 == 8 && x2 == 4) ||
(m1 == 2 && m2 == 1 && x1 == 12 && x2 == 3) || (m1 == 2 && m2 == 2 && x1 == 3 && x2 == 6) ||
(m1 == 2 && m2 == 2 && x1 == 6 && x2 == 3) || (m1 == 2 && m2 == 3 && x1 == 4 && x2 == 3) ||
(m1 == 3 && m2 == 2 && x1 == 3 && x2 == 4) || (m1 == 4 && m2 == 1 && x1 == 3 && x2 == 6)
    
```

A pesar de que Mathematica ofrece 12 soluciones, en realidad hay 6 soluciones distintas (permutando las parejas m_1, x_1 por m_2, x_2). Es decir que las soluciones serían las siguientes, tal y como se observa en la Figura 3:

- (1) $m_1=3; m_2=2; x_1=3; x_2=3$: 3 triángulos y 2 cuadrados.
- (2) $m_1=2; m_2=2; x_1=3; x_2=6$: 2 triángulos y 2 hexágonos.
- (3) $m_1=4; m_2=1; x_1=3; x_2=6$: 4 triángulos y 1 hexágono.
- (4) $m_1=1; m_2=2; x_1=3; x_2=12$: 1 triángulos y 2 dodecágonos.
- (5) $m_1=1; m_2=2; x_1=4; x_2=8$: 1 cuadrado y 2 octógonos.
- (6) $m_1=2; m_2=1; x_1=5; x_2=10$: 2 pentágonos y 1 decágono.

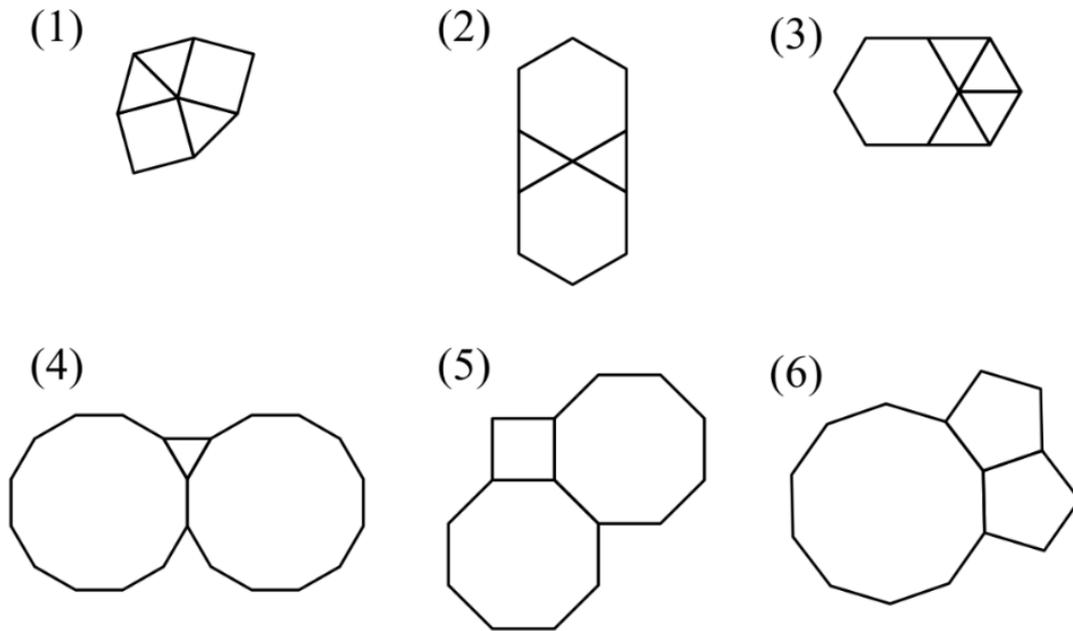
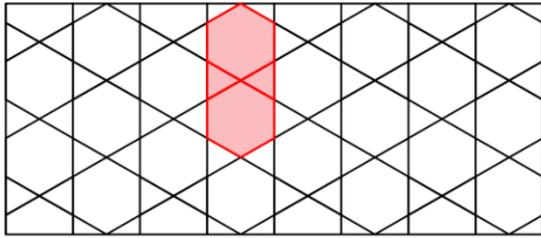
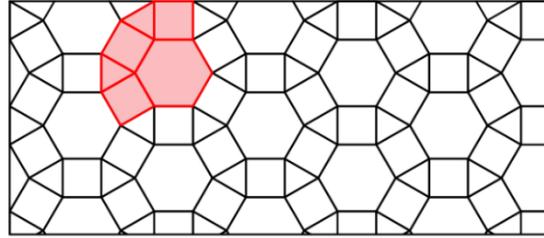


Figura 3: Polígonos semirregulares que cumplen la fórmula (1).

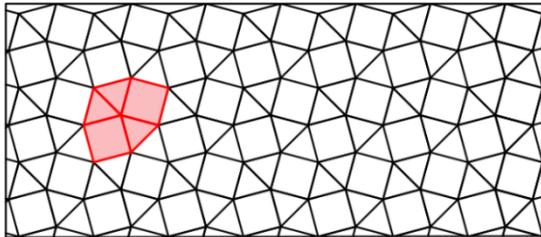
En el caso de la combinación (1) también existe otra posibilidad. Y en el caso de (6), aunque cumple la fórmula, no es posible teselar el plano con esta combinación. Así, el total serían 6 formas de teselados semirregulares con dos polígonos diferentes. Si añadimos la posibilidad de utilizar un polígono regular más, entonces obtendríamos dos formas más, que componen el total de las 8 teselaciones semirregulares que existen y que se muestran en la Figura 4.



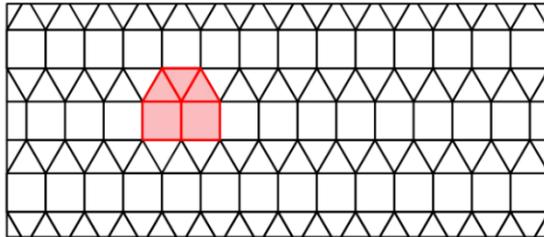
Teselación 3.6.3.6



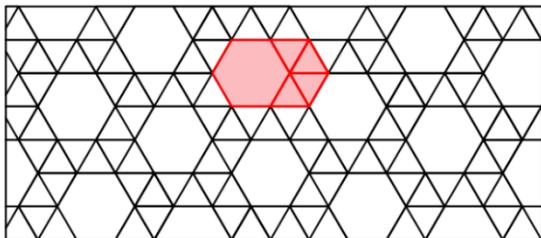
Teselación 3.4.3.4.6.4



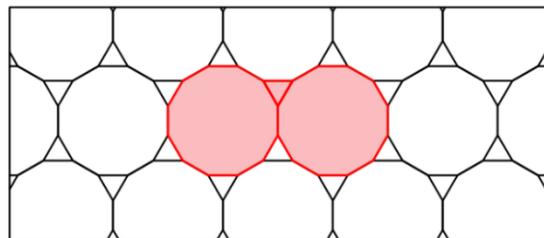
Teselación 3.3.4.3.4



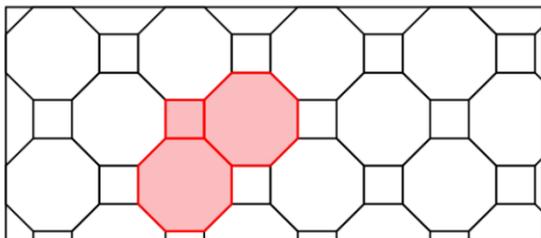
Teselación 3.3.3.4.4



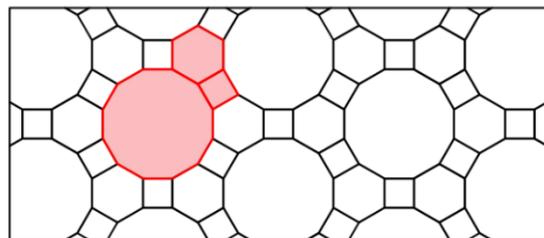
Teselación 3.3.3.3.6



Teselación 3.12.12



Teselación 4.8.8



Teselación 4.12.6

Figura 4: Teselaciones semirregulares.

La nomenclatura para este tipo de teselaciones, igual que para los regulares, hace referencia al número de lados de los polígonos que coinciden en cada vértice y que son nombrados en sentido de las agujas del reloj empezando por el de menor número de lados (ver la nomenclatura en la Figura 4). En el caso de una teselación regular con triángulos equiláteros sería 3 3 3 3 3, con cuadrados 4 4 4 4, y con hexágonos 6 6 6. Para los teselados regulares también se acepta la nomenclatura en la que un superíndice hace referencia al número de repeticiones, es decir, 3^6 , 4^4 , y 6^3 , respectivamente, que es la que hemos utilizado en la Figura 1.

2.1.3. Teselaciones con polígonos irregulares.

Definición: Las teselaciones irregulares son aquellas que están formadas por al menos un tipo de polígono irregular, o por polígonos regulares pero que no cumplen el criterio que un nodo es vértice de por lo menos tres polígonos.

En este sentido, el mosaico de la figura 5 está formado por un polígono regular, pero los nodos no son vértice de al menos tres polígonos.

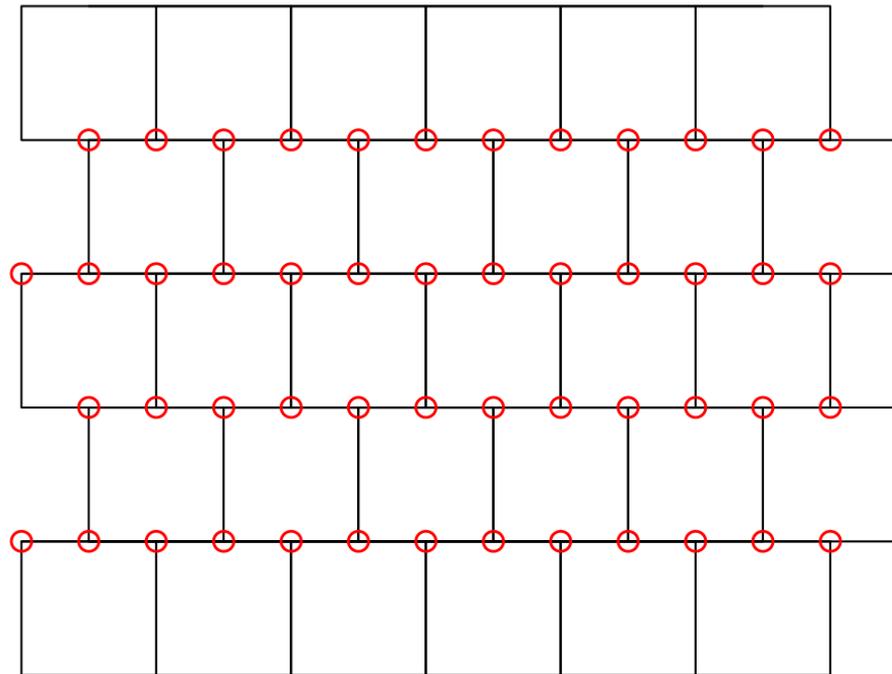


Figura 5: Teselación irregular.

En geometría plana, se le llama polígono irregular a cualquier polígono que no es regular. Esto significa que debe cumplirse al menos una de las dos condiciones: "no todos los lados son de igual longitud" o "no todos los ángulos interiores de igual tamaño". Por otro lado, nos vamos a centrar en las figuras convexas, aquellas en las que todos los segmentos de la figura están dentro de ella.

Si consideramos los mosaicos irregulares formados por un solo tipo de polígono irregular convexo podemos encontrar diferentes tipos (<http://www.acorral.es/mosairre.htm>):

a. Triángulos no equiláteros.

Cualquier plano se puede triangular, así que podemos encontrar diferentes propuestas en este sentido. Una de ellas es la que se muestra en la Figura 6.

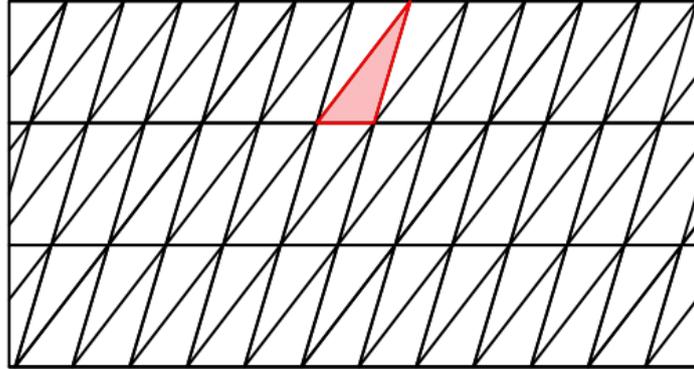
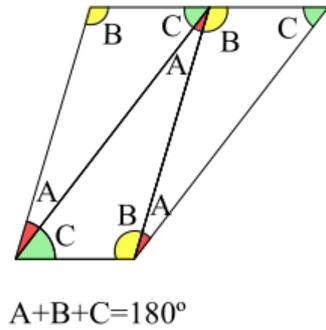


Figura 6: Teselación con triángulos no equiláteros.

b. Cuadriláteros.

Además de los cuadrados, cualquier otro cuadrilátero puede teselar el plano ya que sus ángulos interiores siempre suman 360° , (Fig. 7).

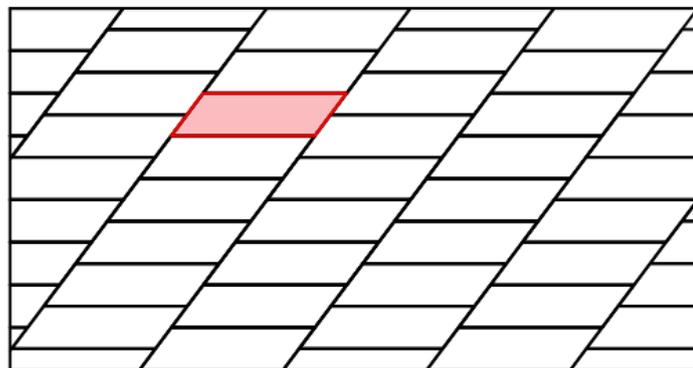
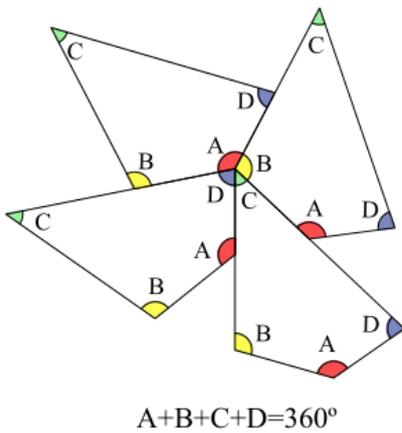


Figura 7: Teselación con cuadriláteros.

c. Pentágonos irregulares.

También se pueden encontrar pentágonos irregulares para formar teselaciones. En concreto, el de la Figura 8 se conoce como el del Cairo, ya que hay muchas aceras pavimentadas de esa forma en dicha ciudad.

Sin embargo, es curioso que a día de hoy todavía no se ha podido establecer el número de mosaicos diferentes que se pueden hacer con pentágonos.

Hasta 1968 se conocían 5 tipos. En ese año R. Kershner encontró 3 tipos más. En 1975, Martin Gardner publicó un artículo de divulgación en Scientific American basado en el trabajo de Keshner y dando el problema por zanjado. Pero uno de sus lectores, Richard James III encontró otro más. Una ama de casa, Marjorite Rice, otra lectora de la columna de Gardner empezó a investigar, y descubrió 4 más. En la actualidad se han encontrado 15 tipos, el más reciente en 2015 por un grupo de matemáticos (Fig. 9).

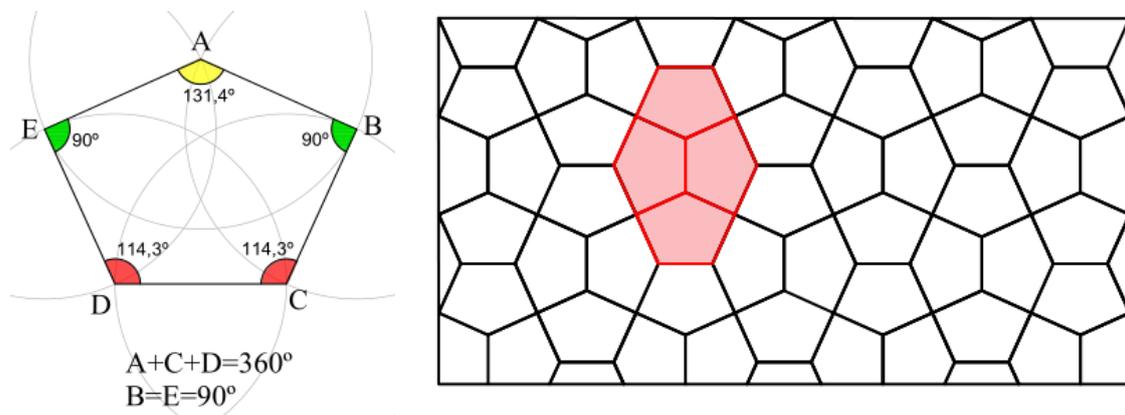
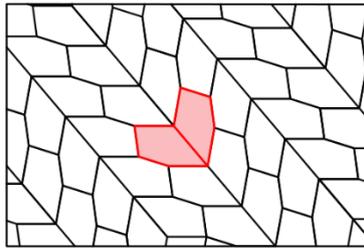
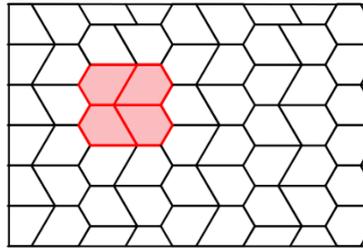


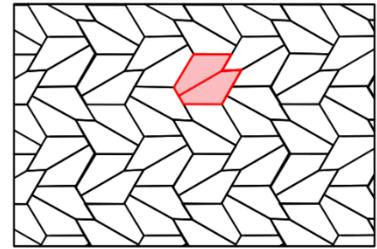
Figura 8: Teselación con pentágonos del Cairo.



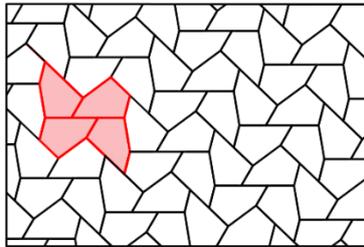
Tipo 1



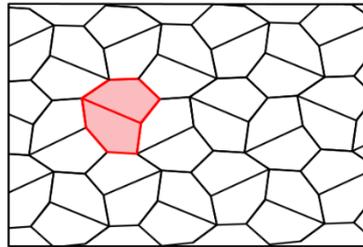
Tipo 6



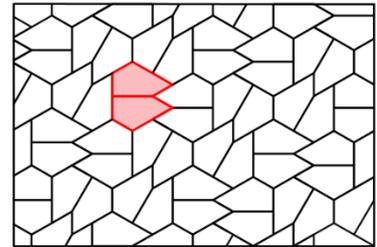
Tipo 11



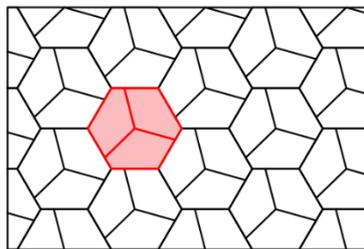
Tipo 2



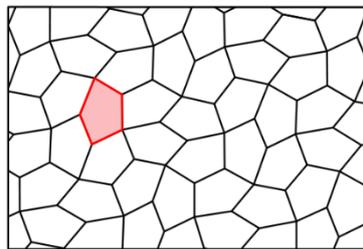
Tipo 7



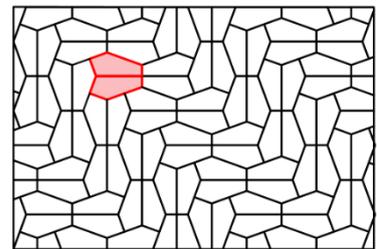
Tipo 12



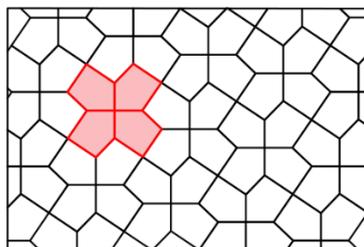
Tipo 3



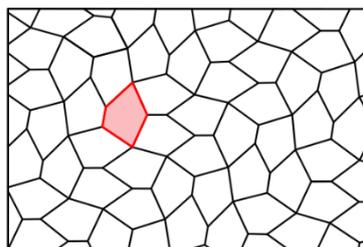
Tipo 8



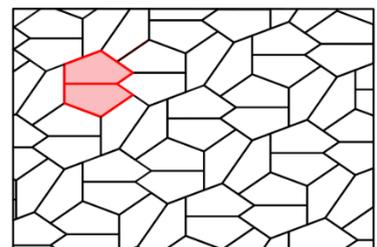
Tipo 13



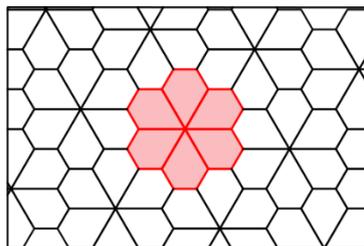
Tipo 4



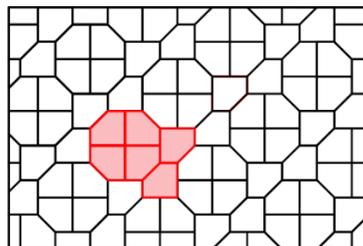
Tipo 9



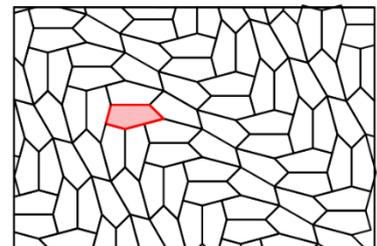
Tipo 14



Tipo 5



Tipo 10



Tipo 15

Figura 9: Teselaciones con pentágonos irregulares.

d. Hexágonos irregulares.

Se conocen tres tipos de hexágonos irregulares convexos que teselan el plano. A continuación, se muestra un caso (Fig. 10).

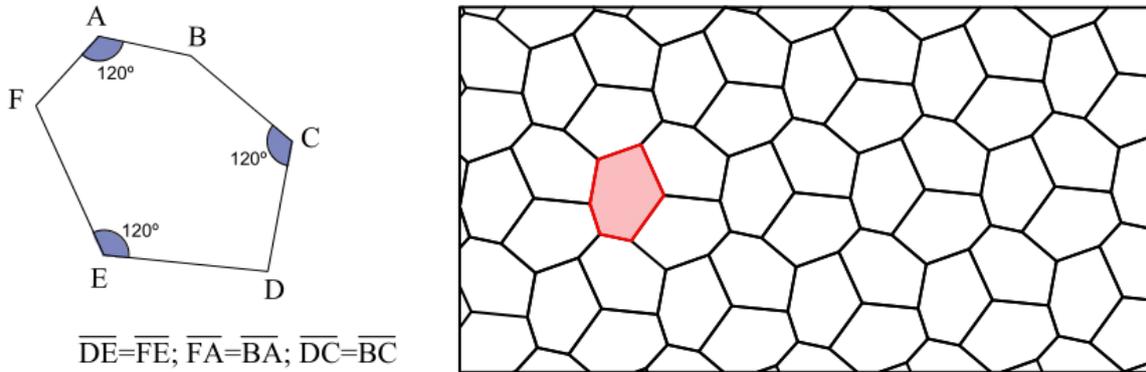


Figura 10: Teselación con hexágonos irregulares.

Hay una propiedad matemática que dice que ningún polígono convexo de 7 lados o más puede teselar el plano, de manera que a partir de los hexágonos ya no seguimos buscando más teselaciones irregulares con un único polígono irregular.

2.1.4. Teselaciones no poligonales.

Algunos se arriesgan a desdibujar los polígonos e introducir otro tipo de piezas que, junto a combinaciones de colores, dibujos en las piezas o giros y simetrías de las mismas, aportan más ingredientes para el ingenio y la originalidad (Fig. 11).

(Rivera Herráez, R & Trujillo Guillen, M. 2015).

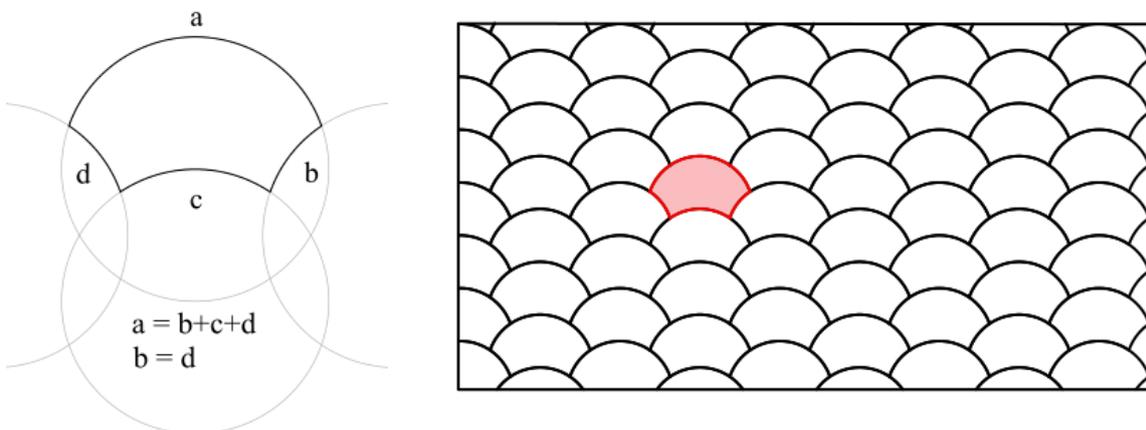


Figura 11: Teselación con deconstrucción de círculos.

Este es el caso de muchas de las teselaciones del pintor holandés M.C Escher (1898-1972), que se hizo famoso por sus numerosos grabados y litografías de mosaicos periódicos cuyas teselas adoptan formas orgánicas.

Esto puede conseguirse a partir de una serie de reglas que permiten infringir modificaciones en las teselas poligonales para convertirlas en formas caprichosas, animales, vegetales, etcétera, y que utilizó el propio Escher para la realización de sus dibujos.

Estas pueden resumirse en tres tipos de transformaciones (*Salguero, J. 1994*):

Traslación paralela: toda parte recortada de un lado de un paralelogramo o hexágono de lados opuestos paralelos, se traslada paralelamente añadiéndose al lado opuesto (Fig. 12).

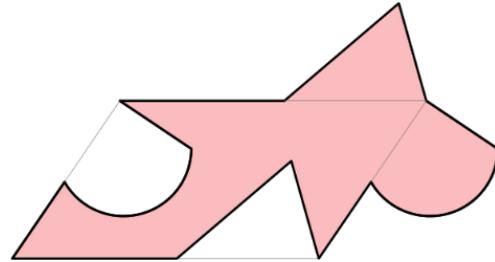


Figura 12: Traslación paralela.

Giro a partir de un lado: al recortar una forma de un lado de un triángulo o cuadrilátero, habrá que añadirla en el mismo lado mediante una rotación de 180° con centro en el punto medio de dicho lado (Fig. 13).

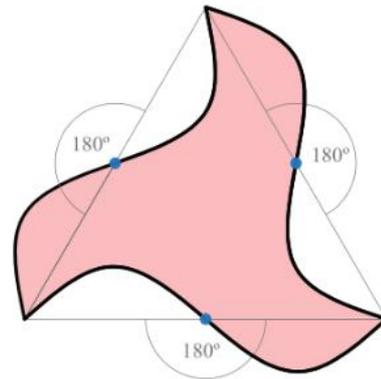


Figura 13: Giro a partir de un lado.

Giro a partir de un vértice: Al recortar una forma de un lado, habrá que añadirla a otro lado mediante giro de 60° ó 120° con centro en el vértice común de los dos lados. Los vértices que son centros de giro no pueden ser consecutivos. Los giros son de 90° cuando los centros pertenecen a un triángulo, cuadrilátero o pentágono (Fig. 14).

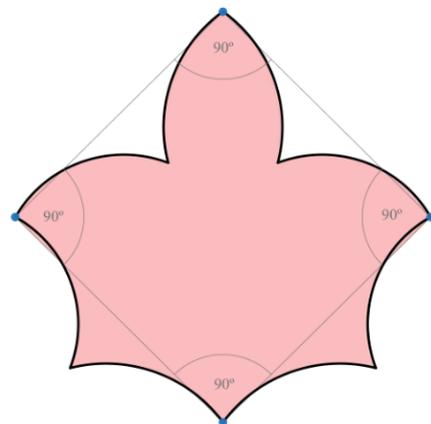


Figura 14: Giro a partir de un vértice

2.2. Teselaciones planas aperiódicas.

Definición: Las teselaciones aperiódicas están formadas por teselas que pavimentan el plano de forma no periódica, son aquellas en la que no hay una repetición regular del diseño mediante traslaciones.

La cuestión de si existen conjuntos de teselas que tan solo generen mosaicos no periódicos ha sido investigada por varios matemáticos a lo largo de la historia. El matemático chino Hao Wang en 1960 precisamente se preguntó si existía algún conjunto de teselas que cualquier mosaico generado con ellas fuese siempre aperiódico. Su conjetura es que no existían conjuntos de estas características. Algo que desmintió uno de sus alumnos, Robert Berger, demostrando que sí que existían y además dio con un conjunto de 20.426 teselas. Dado el número tan elevado de elementos del conjunto, se siguió investigando para encontrar conjuntos más pequeños. El propio Berger consiguió reducir la cifra a 104 teselas, y el matemático Donald Knuth en 1968 la redujo hasta 92. En 1971 el matemático Raphael M. Robinson encontró un conjunto con tan solo 6 teselas. Y todavía se redujo más, porque más tarde Roger Penrose redujo el conjunto a tan solo 2 teselas.

El primero de estos conjuntos que encontró Penrose es conocido como rombos de Penrose y se compone de un par de rombos cuyos ángulos interiores mayor y menor miden respectivamente 108° y 72° para el rombo de mayor área y 36° y 144° para el de menor área. (Fig. 15). Los lados de dicho rombo son iguales.

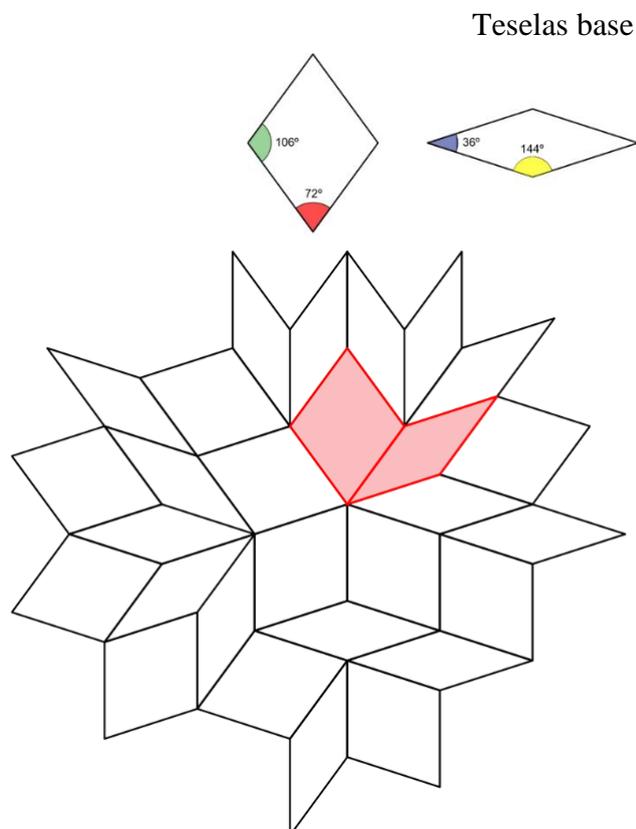


Figura 15: Rombos de Penrose.

El otro par de teselas descubiertas por Penrose son denominadas por John Horton Conway, «dardos» y «cometas» respectivamente, y pueden deducirse del rombo de Penrose de mayor área sin más que dividirlo en dos (Fig. 16), es decir, imponiendo que los ángulos interiores que forman los lados de las teselas sigan siendo múltiplos de $(360/10)=36^\circ$.

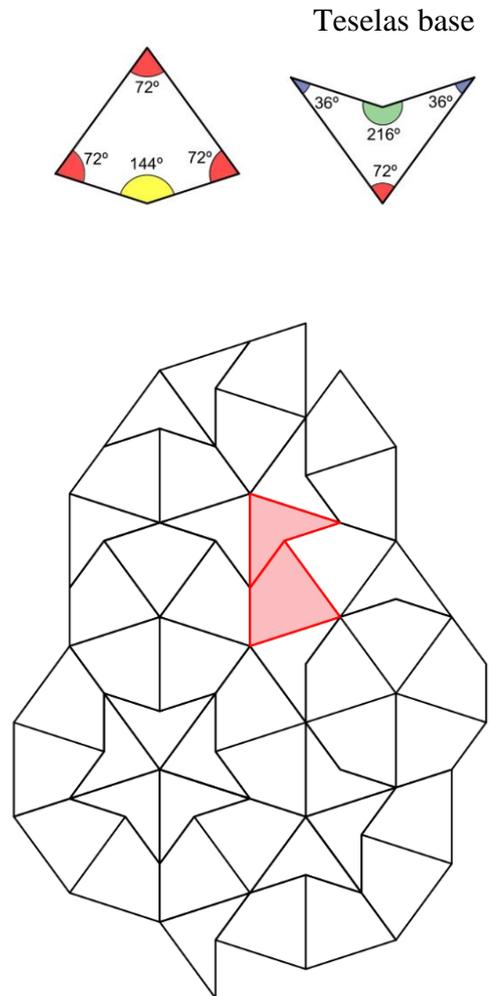


Figura 16: Dardos de Penrose.

Los teselados que forman dardos y cometas, así como los que generan los rombos de Penrose, están fuertemente relacionados entre sí y con el número Φ , sección áurea de un segmento. El número de dardos y cometas, así como los rombos de área grande y pequeña se encuentran en proporción áurea. Es decir, en un mosaico aperiódico infinito la proporción entre rombos de área grande y pequeña, o entre dardos y cometas es Φ , (1,618033...) (Salguero, J. 1994).

3. Transformaciones geométricas.

Definición: Es la operación o el conjunto de operaciones geométricas que permiten generar una nueva figura a partir de otra dada u original. Es decir, hacen corresponder a cada punto del plano otro punto del plano y como consecuencia las figuras se transforman en otras figuras. A la figura resultante se le denomina homóloga.

Las transformaciones pueden realizarse de forma encadenada, aplicando una de ellas al resultado de otra. Este encadenamiento de transformaciones se denomina *composición o producto*. En general el producto de transformaciones no posee la propiedad conmutativa.

Hay dos clasificaciones diferentes de las transformaciones geométricas dependiendo de si se tiene en cuenta el sentido o la forma de la figura homóloga con respecto a la figura original.

- Clasificación teniendo en cuenta el sentido:

Directa: cuando la figura homóloga conserva el sentido de la figura original en el plano cartesiano. (Fig. 17).

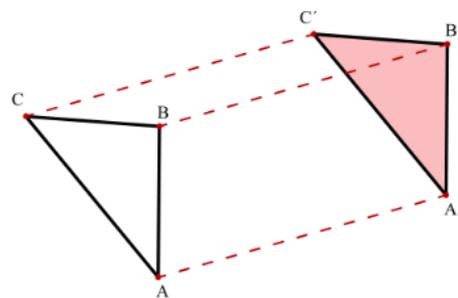


Figura 17: Transformación directa.

Inversa: el sentido de la figura homóloga y la del original son contrarios en el plano cartesiano (Fig. 18).

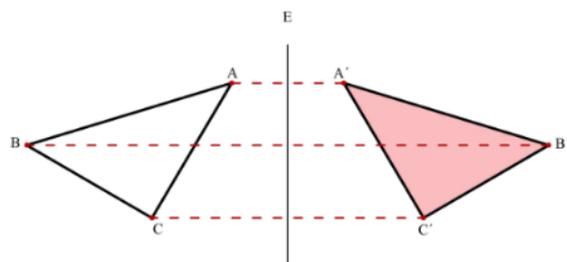


Figura 18: Transformación inversa.

- Clasificación teniendo en cuenta la forma:

Isométricas: La figura resultante conserva los ángulos y dimensiones. Estas transformaciones también se llaman *movimientos del plano* y en ellas nos vamos a centrar en el apartado 3.1.

Isomórficas: La figura homóloga conserva la forma de la figura original y los ángulos, pero no las dimensiones, aunque se mantiene una relación de proporcionalidad entre las dimensiones del homólogo con el original. Son de este tipo: la homotecia, la semejanza. (Fig. 19).

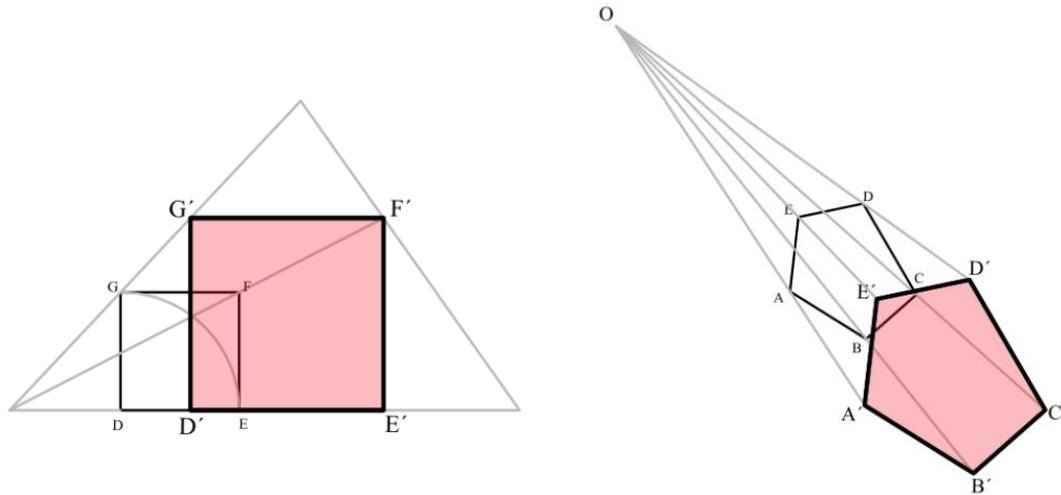


Figura 19: Homotecia (izquierda) y semejanza (derecha).

Anamórficas: Cambia la forma de la figura original. Transformaciones de este tipo son la homología, la afinidad y la inversión. (Fig. 20).

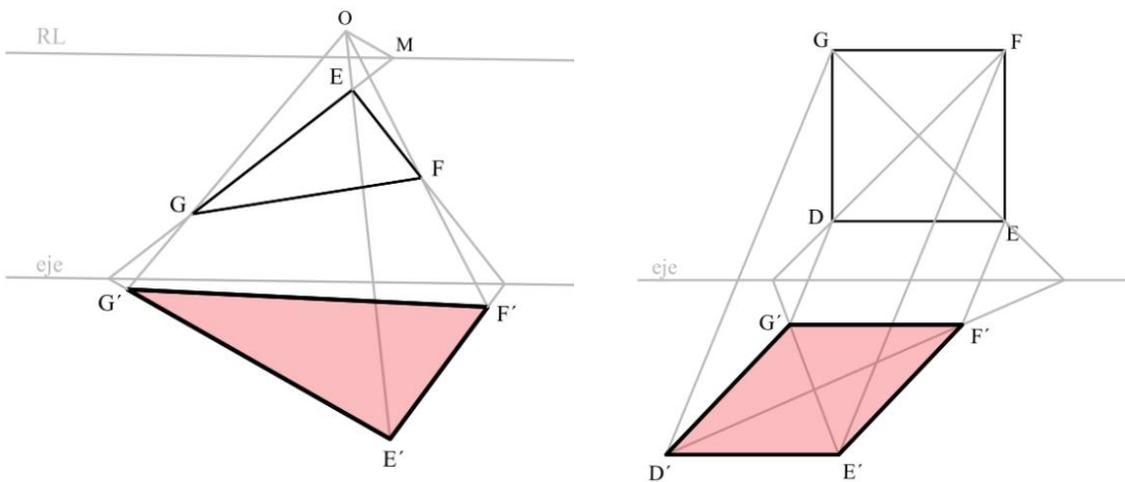


Figura 20: Homología (izquierda) y afinidad (derecha).

3.1. Movimientos del plano.

Definición: Las isometrías o movimientos del plano son transformaciones geométricas donde se conservan las distancias. No deforman la figura original, manteniendo ángulos y dimensiones.

Realmente podemos tomar la isometría como un cambio de posición de la figura original. Es decir, después de la transformación a la figura lo único que le ha pasado es que esta en otro lugar manteniendo la forma y las dimensiones.

En el plano hay cuatro tipos de movimientos, (cinco si contamos con la identidad): traslación, rotación, reflexión y reflexión con deslizamiento. La traslación y la rotación son movimientos directos en los que no se altera la orientación de la figura, por lo que la figura original y la figura transformada por el movimiento se pueden hacer coincidir sin salirse del plano.

La reflexión y la reflexión con deslizamiento son movimientos inversos en los que se conserva el sentido, por lo que la figura original y la transformada por el movimiento no pueden hacerse coincidir sobre si misma sin salirse del plano.

Rotación.

Para realizar una rotación o giro necesitamos conocer:

- Un punto denominado centro de rotación O .
- Un ángulo de giro, α
- Un sentido de rotación.

Matemáticamente podemos definir la rotación de centro O y ángulo α como la transformación que hace corresponder C en C' (Fig. 21) cumpliendo que:

La distancia del centro de giro O a C es igual a la distancia del centro O a C' , siendo α el ángulo orientado de COC' .

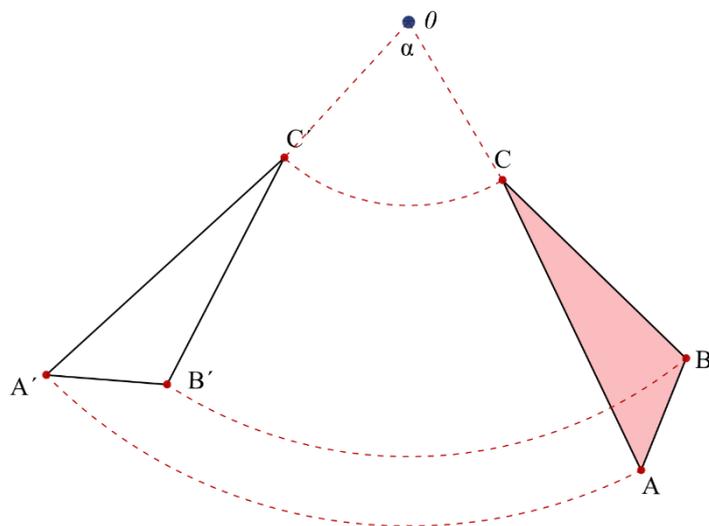


Figura 21: Figura de movimiento de rotación.

Traslación.

Para realizar una traslación necesitamos conocer:

- Una distancia, longitud.
- Una orientación, se puede representar con un vector v . Es decir, un segmento orientado que va desde un punto A (origen) a un punto A' (extremo).

Así para realizar la traslación de una figura aplicaremos a cada punto el vector trasladándolo hasta el extremo, moviendo cada punto de la figura en la misma dirección y la misma distancia sin rotar ni voltear, “deslizándolo”.

De esta forma el sentido de los vértices de la figura original y la de la homóloga es el mismo (Fig. 22).

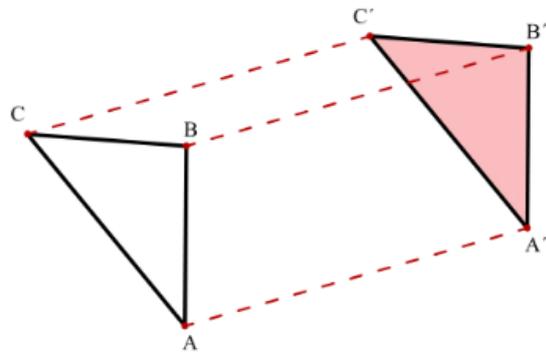


Figura 22: Figura de movimiento de traslación.

Reflexión.

También denominada simetría axial o espejular. La figura transformada es la figura vista en un espejo. Elementos característicos de una reflexión:

- Línea de reflexión o eje de simetría.
- Dirección de reflexión.

En una reflexión cada punto de la figura original A se transforma en un punto A' mediante un eje (eje de simetría o espejo), de tal manera que si unimos los puntos A y A' el segmento resultante es siempre perpendicular al eje de simetría y ambos puntos A y A' son equidistantes del eje (Fig. 23).

De manera más sencilla se puede decir que una reflexión es un volteo con respecto a una línea donde independientemente de en qué dirección vaya el reflejo, la imagen reflejada siempre tiene el mismo tamaño, pero en otra dirección. Los vértices de la figura original y de la transformada están en sentido contrario. La reflexión es una transformación involutiva puesto que la aplicación sucesiva de dos simetrías axiales con el mismo centro deja a cualquier figura invariante.

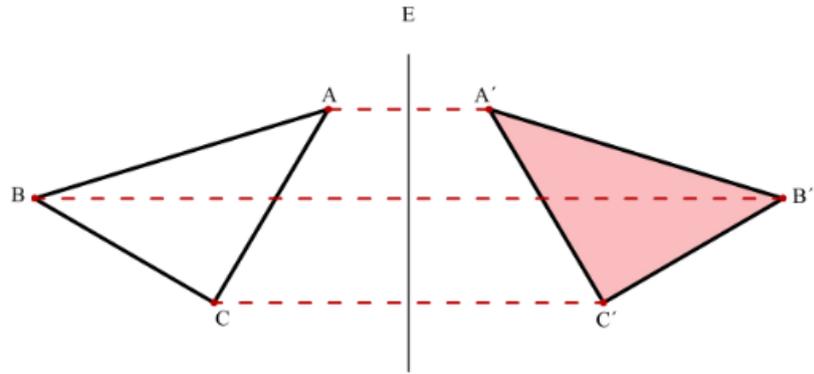


Figura 23: Figura de movimiento de reflexión.

Reflexión con desplazamiento.

Es una combinación de isometrías. Primero se realiza una reflexión y a continuación una traslación en la dirección del eje de reflexión (Fig. 24).

(Rodríguez Silvestre, M. 2010).

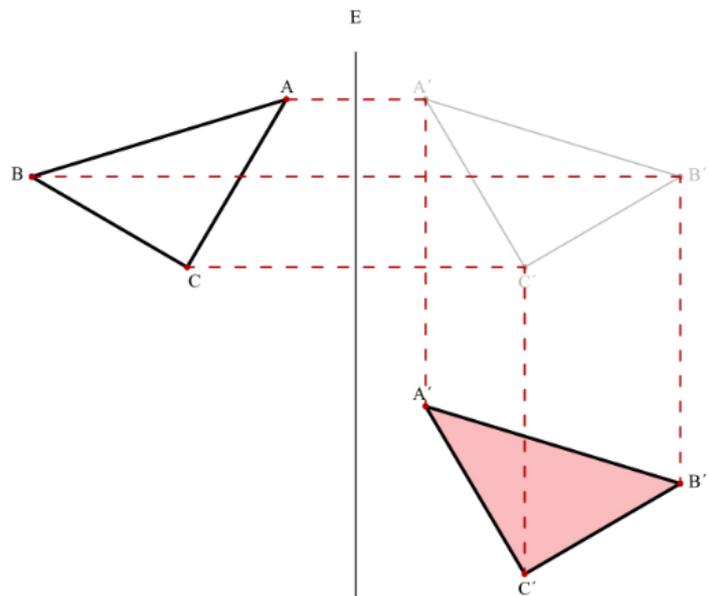


Figura 24: Figura de movimiento de reflexión.

4. Grupos cristalográficos.

Las transformaciones del plano se pueden utilizar para teselar un plano de forma periódica. Estas transformaciones se combinan entre ellas dando lugar a lo que se conoce como grupos de simetrías, en este caso grupos cristalográficos planos.

Dependiendo de las diferentes isometrías que constituyen cada grupo de simetría, Fedorov demostró en el año 1891 que solo existen 17 grupos cristalográficos planos. Llega a este resultado estudiando las formas de cristalizar los cristales naturales. Cada uno de ellos recibe una denominación que procede de la cristalografía, y se pueden clasificar según la naturaleza de sus giros.

Los 17 grupos de simetría del plano se pueden agrupar en cinco tipos, según el orden máximo de los giros:

- Grupos de simetría sin rotación: 4 grupos de simetrías.
- Grupos de simetría con rotación de 180° : 5 grupos de simetrías.
- Grupos de simetría con rotación de 120° : 3 grupos de simetrías.
- Grupos de simetría con rotación 90° : 3 grupos de simetrías.
- Grupos de simetría con rotación de 60° : 2 grupos de simetrías.

Así, para poder reproducir o crear un mosaico, basta con tener en cuenta cómo es la tesela base y cuáles son los movimientos que se aplican sobre ella.

En la Alhambra se pueden encontrar ejemplos de cada uno de los grupos cristalográficos planos. Lo más increíble es que los creadores de los mosaicos no podían conocer el teorema de clasificación de Fedorov, y por lo tanto no conocían cuántos grupos de simetrías podían usarse para rellenar el plano con baldosas (teselación del plano), por eso resulta impactante que conocieran todos y cada uno de los 17 existentes.

El arte morisco, desarrollado por los árabes en la península Ibérica, presenta un gran desarrollo del concepto de simetría, debido a su carácter abstracto. De acuerdo a los principios religiosos les estaba estrictamente prohibido a los artistas musulmanes representar seres vivientes en sus creaciones. Esta limitación, en lugar de empobrecer su creatividad, sirvió de aliciente para estimular sus mentes y lanzarse por caminos de gran belleza y originalidad. Su conocimiento de las simetrías alcanzó tal grado de magnitud que fueron los únicos en descubrir y utilizar sabiamente en sus decoraciones los 17 tipos de simetría plana.

La Alhambra es, actualmente el único monumento construido antes del descubrimiento de la teoría de grupos que cuenta con al menos un ejemplo de cada uno de los grupos cristalográficos planos (*Rodríguez Silvestre, M. 2010*).

4.1. Clasificación de los grupos cristalográficos.

• Grupos de simetría **sin giros**, orden de giro $n= 1$:

- **p1**: Dos traslaciones.
- **cm**: Una reflexión axial y una reflexión con deslizamiento perpendicular.
- **pg**: Dos reflexiones con deslizamiento paralelas.
- **pm**: Dos reflexiones axiales y una traslación.

• Grupos de simetría con **giros de 180°**, orden de giro $n= 2$:

- **p2**: Tres reflexiones centrales (o giros de 180°).
- **cmm**: Dos reflexiones axiales perpendiculares y una reflexión central.
- **pmm**: Cuatro reflexiones axiales en los lados de un rectángulo (p.e.2 horizontales y 2 verticales).
- **pmg**: Una reflexión axial y dos reflexiones centrales.
- **pgg**: Dos reflexiones con deslizamiento perpendiculares.

• Grupos de simetría con **giros de 120°**, orden de giro $n= 3$:

- **p3**: Dos giros de 120°.
- **p31m**: Una reflexión axial y un giro de 120°.
- **p3m1**: Tres reflexiones axiales en los lados de un triángulo equilátero (ángulos 60-60-60).

• Grupos de simetría con **giros 90°**, orden de giro $n= 4$ y 2 :

- **p4**: Una reflexión central (o giro de 180°) y un giro de 90°.
- **p4m**: Tres reflexiones axiales en los lados de un triángulo de ángulos 45-45-90.
- **p4g**: Una reflexión axial y un giro de 90°.

• Grupos de simetría con **giros de 60°**, orden de giro $n= 6, 3$ y 2 :

- **p6**: Una reflexión central y un giro de 120°.
- **p6m**: Tres reflexiones axiales en los lados de un triángulo de ángulos 30°-60-90.

A continuación, se analizan los grupos cristalográficos a través de unas propuestas propias en base a la teoría detrás de cada una de ellas, para entender la simbología utilizada en cada figura hay que consultar la Tabla 1, que se muestra a continuación, y donde aparecen relacionados cada movimiento del plano con su icono (*Rodríguez Silvestre, M. 2010*).

Tabla 1. Leyenda de los iconos empleados para representar los movimientos del plano en grupos cristalográficos.

Figura	Movimientos del plano
	Rotación de 60°
	Rotación de 90°
	Rotación de 120°
	Rotación de 180°
	Reflexión
	Reflexión con desplazamiento

Grupo cristalográfico p1.

La tesela base es un paralelogramo. Es el grupo más sencillo y el mosaico se genera a partir de traslaciones (Fig. 25).

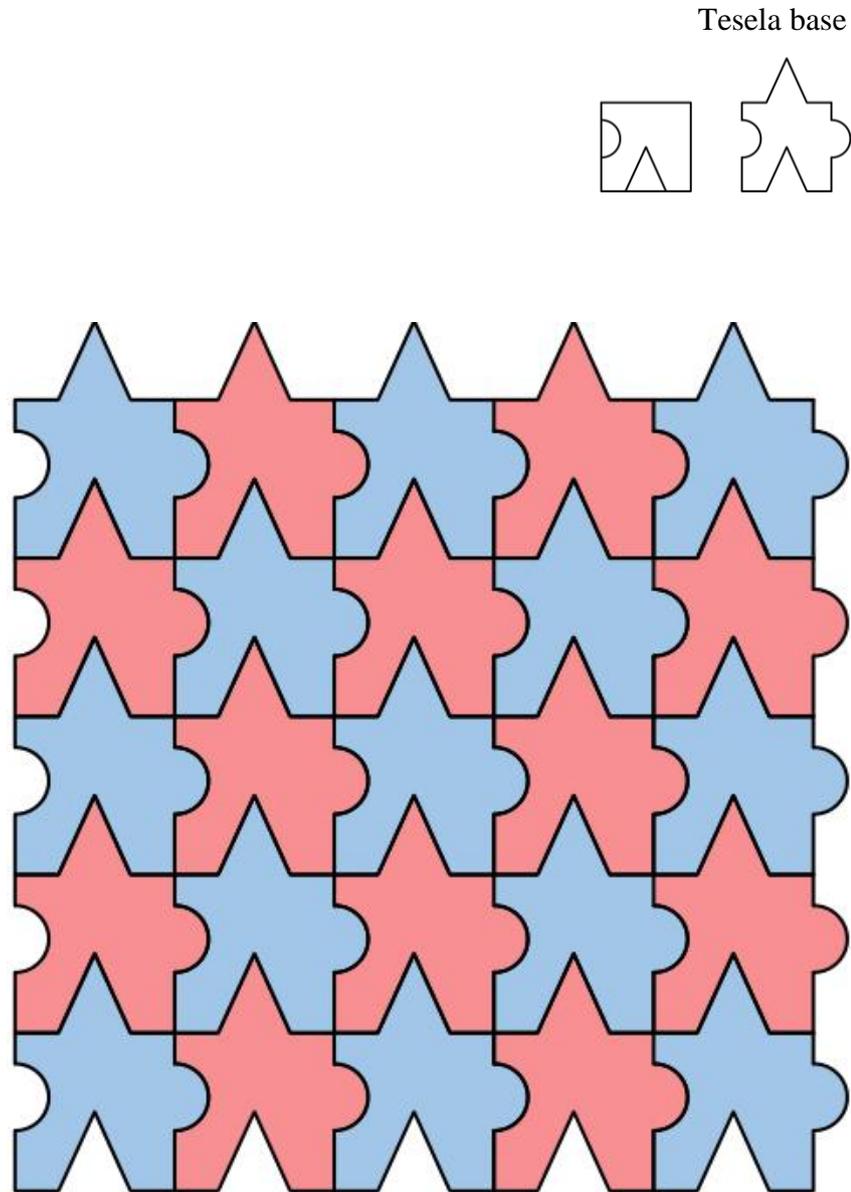


Figura 25: Grupo cristalográfico p1.

Grupo cristalográfico pm.

La tesela base es un rectángulo. El mosaico se genera a través de traslaciones y reflexiones. Los ejes de reflexión son necesariamente paralelos a uno de los lados del rectángulo (Fig. 26).

Tesela base

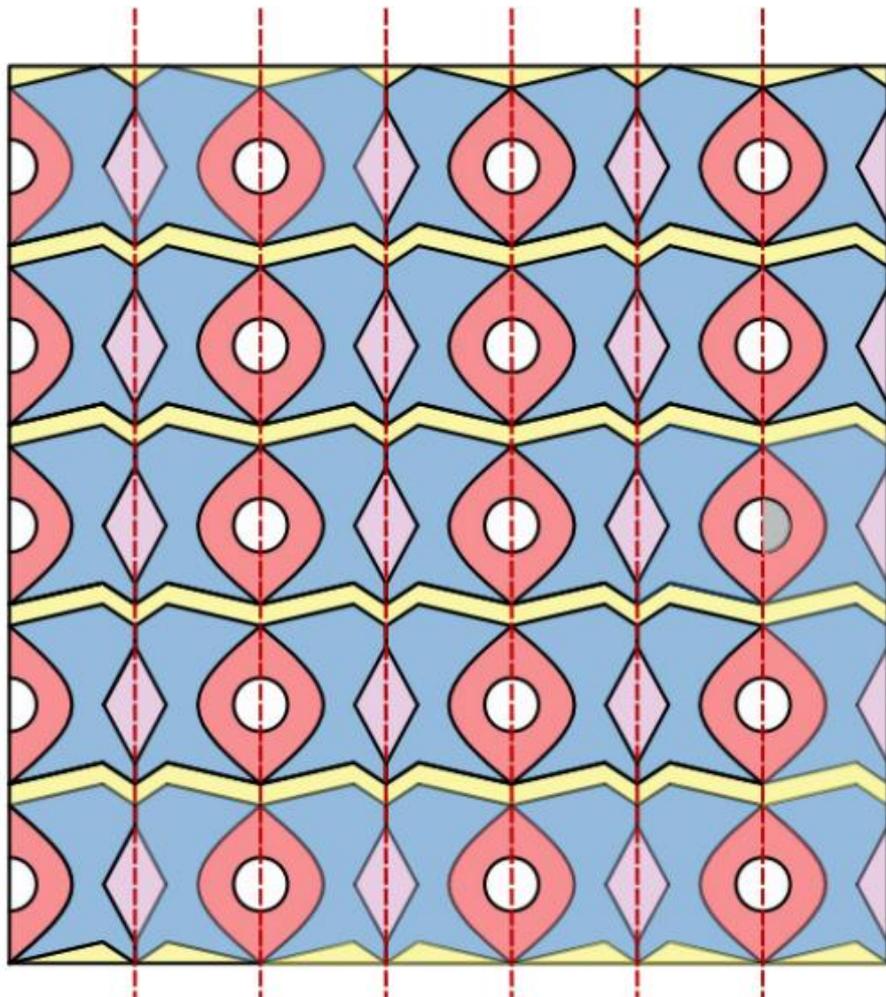


Figura 26: Grupo cristalográfico pm.

Grupo cristalográfico pg.

La tesela base es un rectángulo. El mosaico se genera a partir de traslaciones y reflexión con desplazamiento, los ejes de reflexión con desplazamiento son paralelos a uno de los lados del rectángulo (Fig. 27).

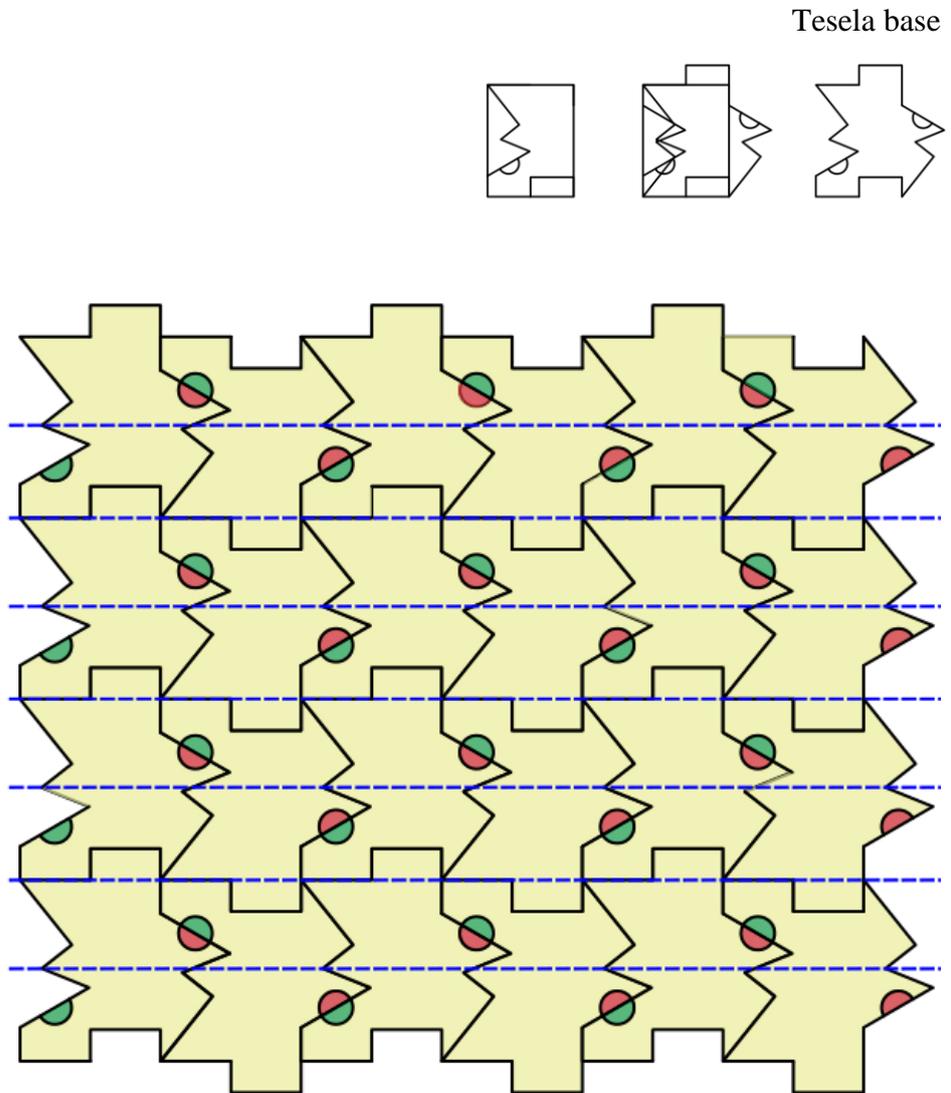


Figura 27: Grupo cristalográfico *pg*.

Grupo cristalográfico cm.

La tesela base es un rombo. El mosaico se genera a partir de traslaciones, reflexiones y reflexiones con desplazamiento, la dirección de desplazamiento puede formar cualquier ángulo, pero el eje de reflexión debe ser bisectriz de los de desplazamiento (Fig. 28).

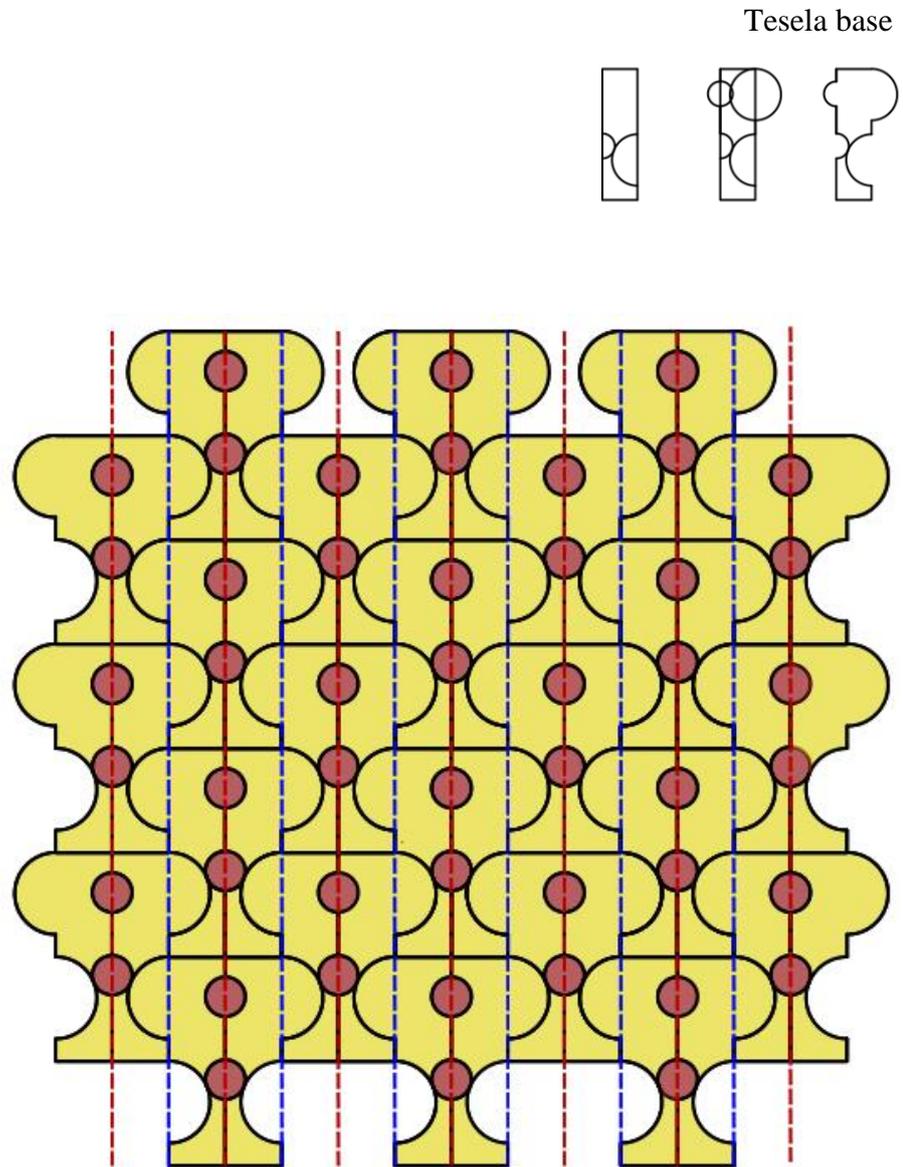


Figura 28: Grupo cristalográfico *cm*.

Grupo cristalográfico p2.

La tesela base de este grupo puede ser en principio lo más general posible y el mosaico está generado por dos traslaciones y el giro de orden 2 (180°). Los ejes de traslación pueden formar cualquier ángulo entre ellos (Fig. 29).

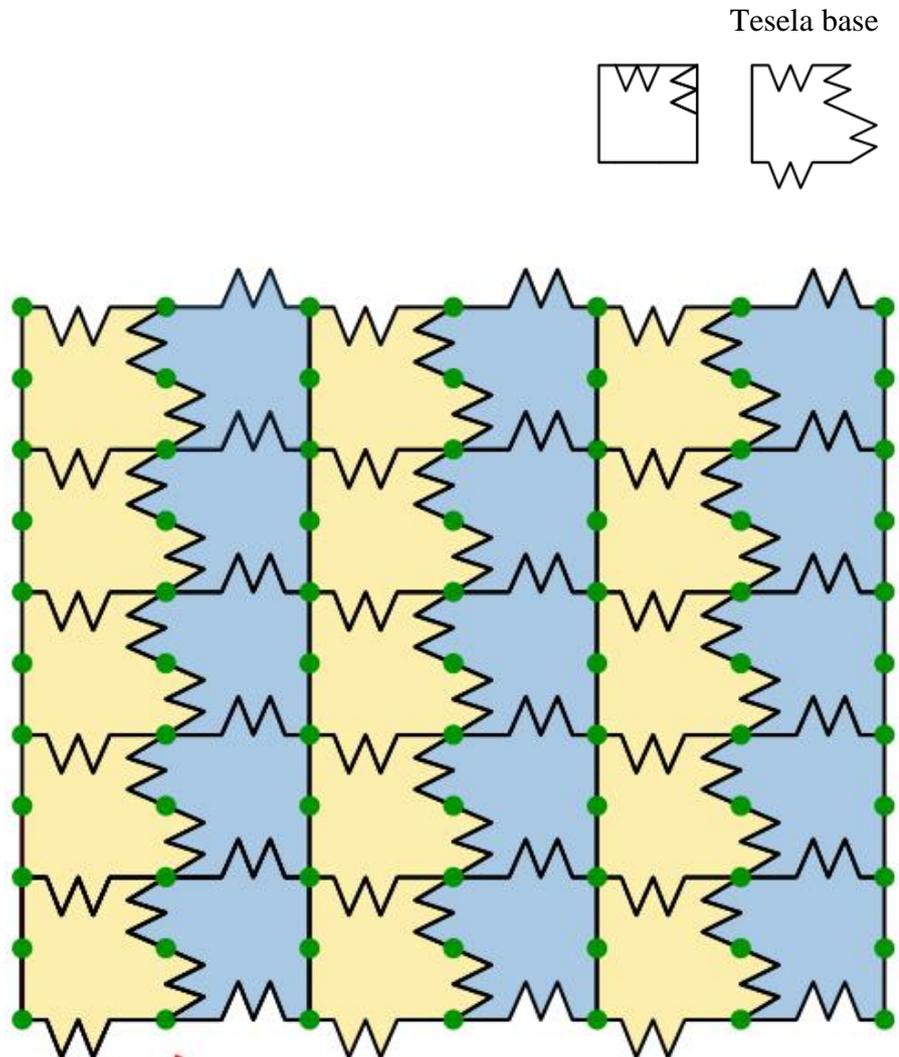


Figura 29: Grupo cristalográfico p2.

Grupo cristalográfico pgg.

La tesela base es un rectángulo. El mosaico se genera por dos traslaciones, dos reflexiones con desplazamiento y un giro de orden 2 (180°). Los dos ejes de reflexión son perpendiculares y el centro de giro es el punto medio del rectángulo que forma la rejilla (Fig. 30).

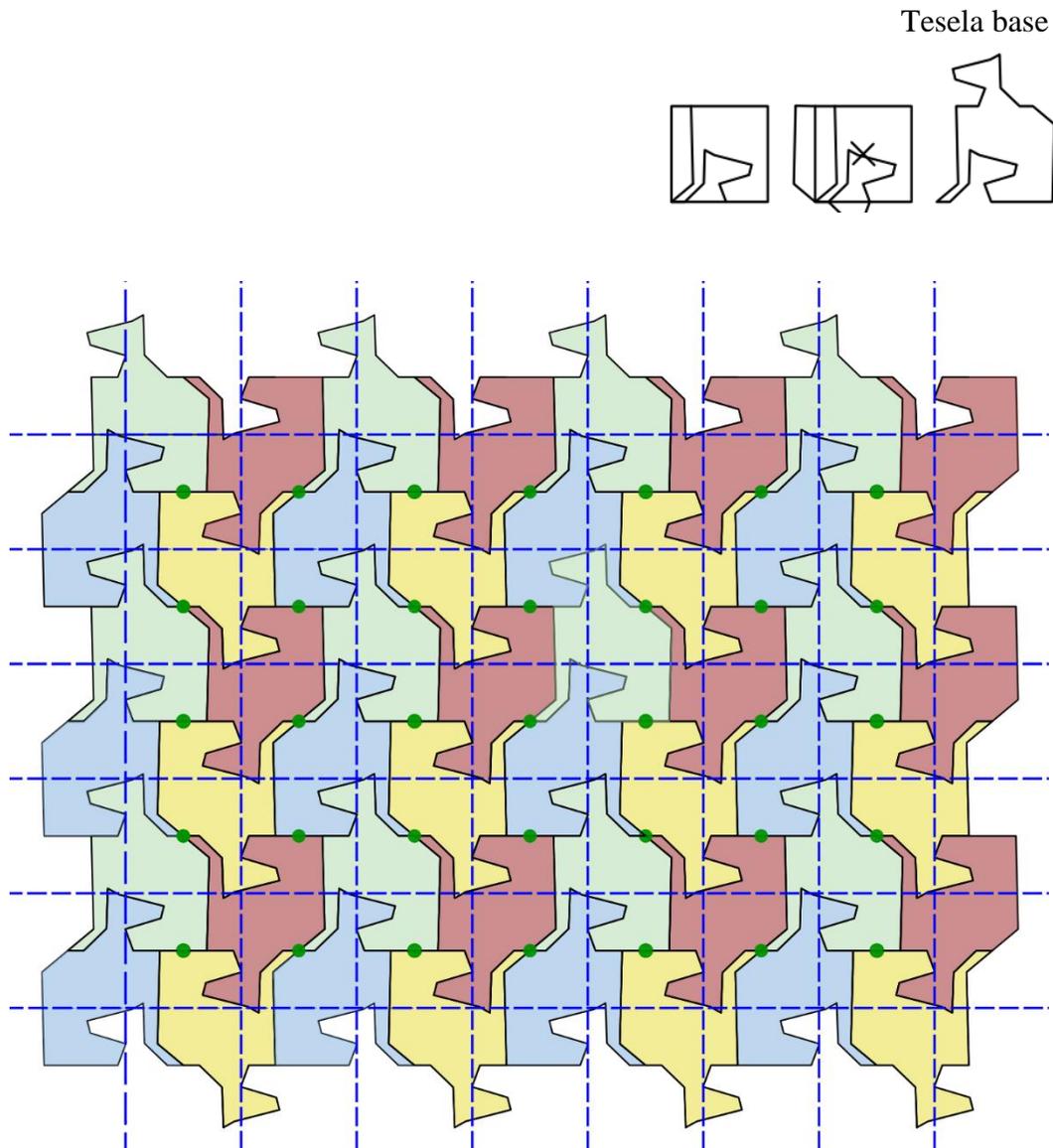


Figura 30: Grupo cristalográfico pgg.

Grupo cristalográfico pmg.

En este caso la tesela base ha de ser un rectángulo. El mosaico se genera a través de reflexiones y rotaciones de orden 2 (180°). El centro de rotación es el punto medio del lado que no es el eje de reflexión (Fig. 31).

Tesela base

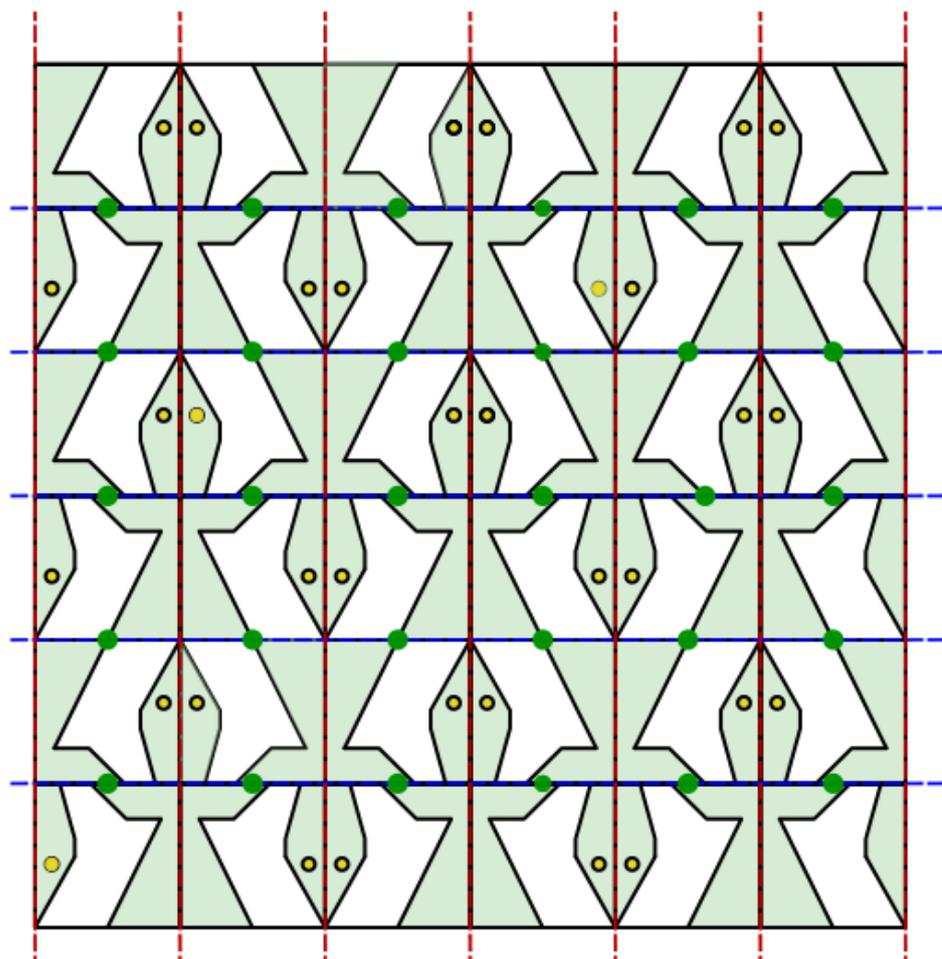


Figura 31: Grupo cristalográfico pmg.

Grupo cristalográfico pmm.

La tesela base en este caso es un rectángulo. El mosaico se genera a partir de dos ejes de reflexiones perpendiculares entre sí. Todos los centros de orden dos pertenecen a algún eje de reflexión. Estos centros de los giros de 180° están en las intersecciones de los ejes de reflexión. No se encuentran en este grupo ejes de reflexión con desplazamiento (Fig. 32).

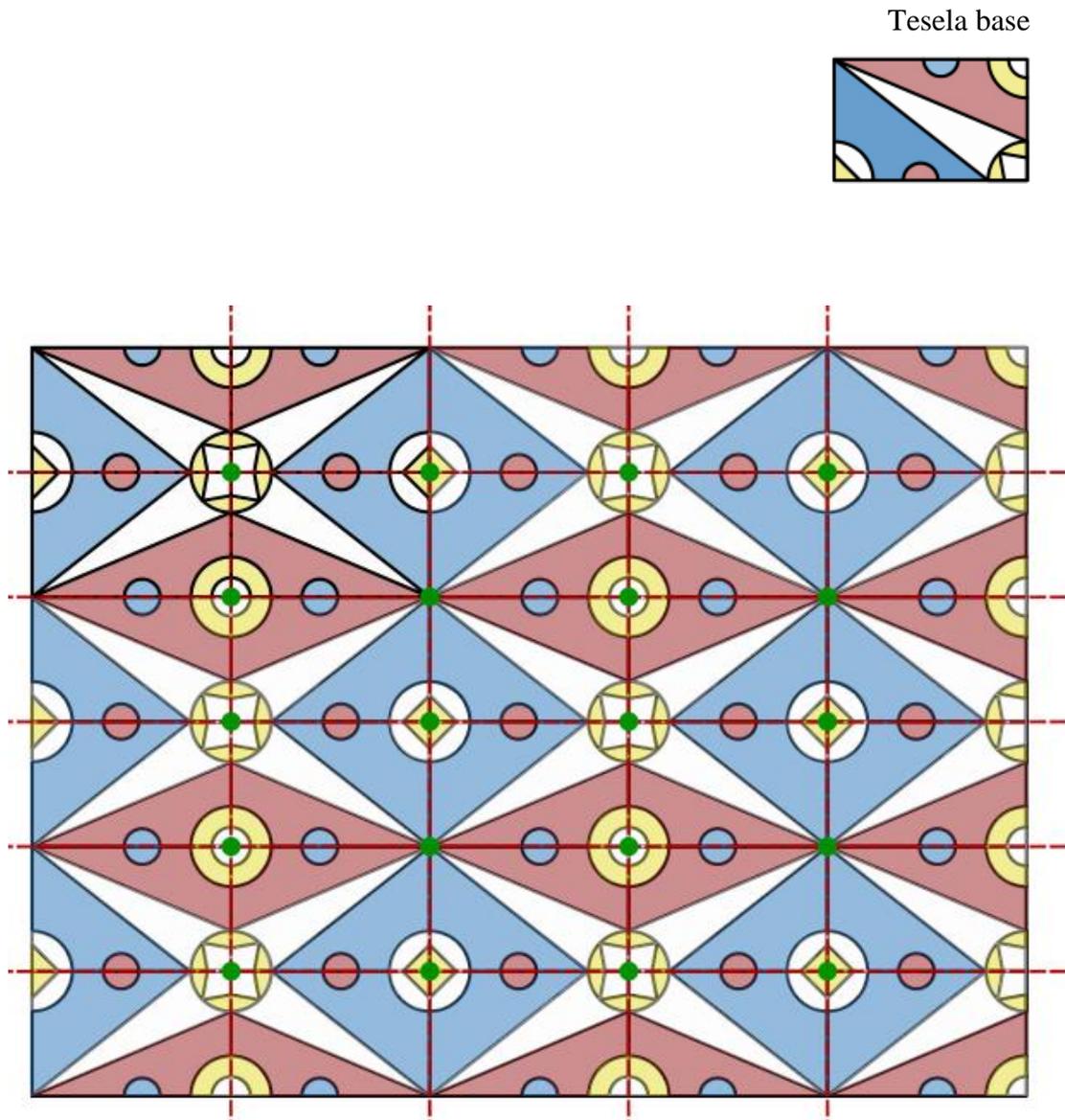


Figura 32: Grupo cristalográfico pmm.

Grupo cristalográfico cmm.

La tesela base en este caso es un rombo. Se observan que por los centros de orden dos que están en los vértices del rombo y el que está en el centro del rombo pasan ejes de reflexión. Pero por los centros de orden dos que están en los puntos medios de los lados del rombo no pasan ningún eje de reflexión. Por éstos últimos centros sí pasan ejes de reflexión con desplazamiento (Fig. 33).

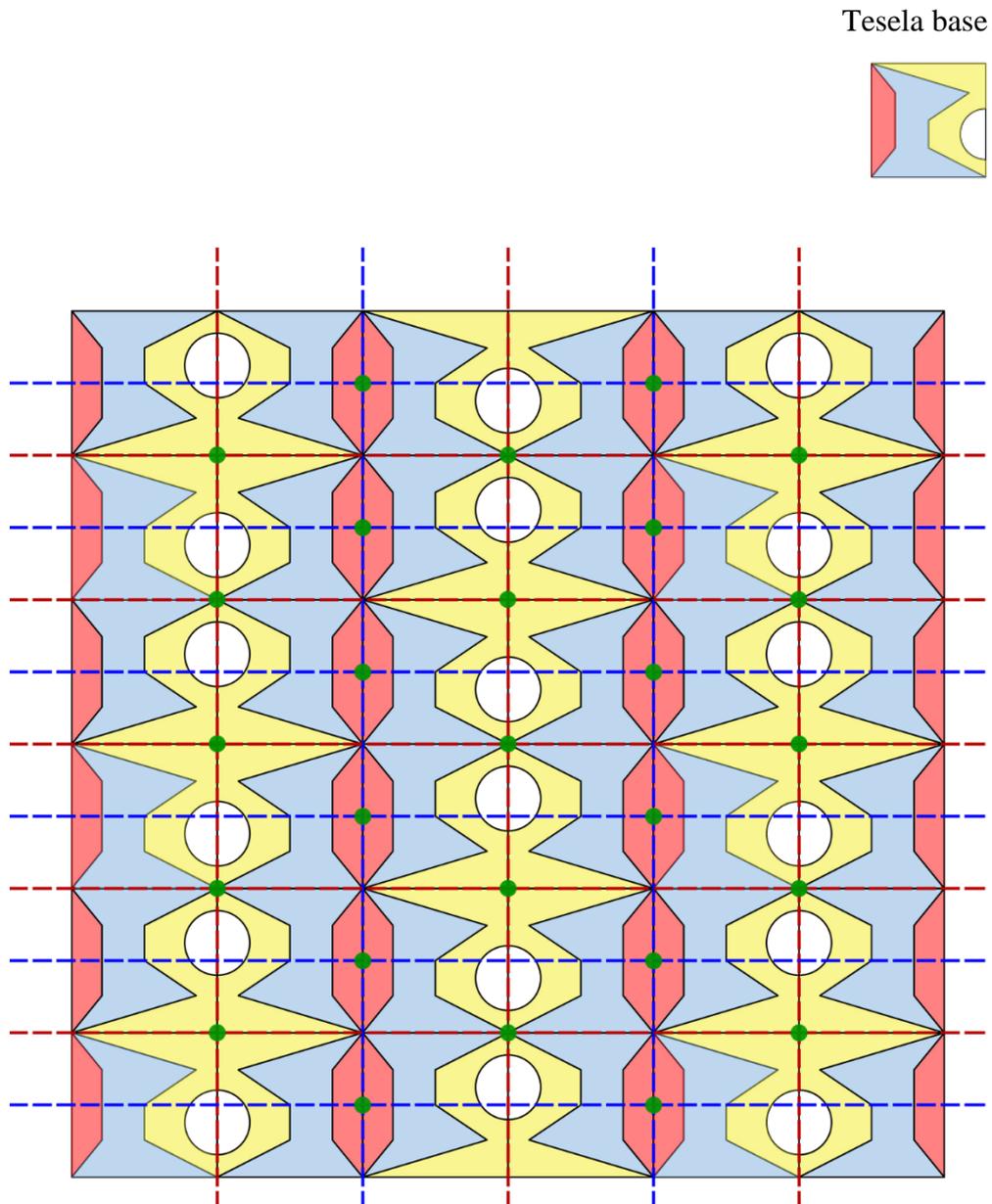


Figura 33: Grupo cristalográfico cmm.

Grupo cristalográfico p3.

La tesela base es un rombo. El mosaico está formado por dos triángulos equiláteros que lo generan a partir de dos traslaciones y una rotación de orden 3 (120°) (Fig. 34).

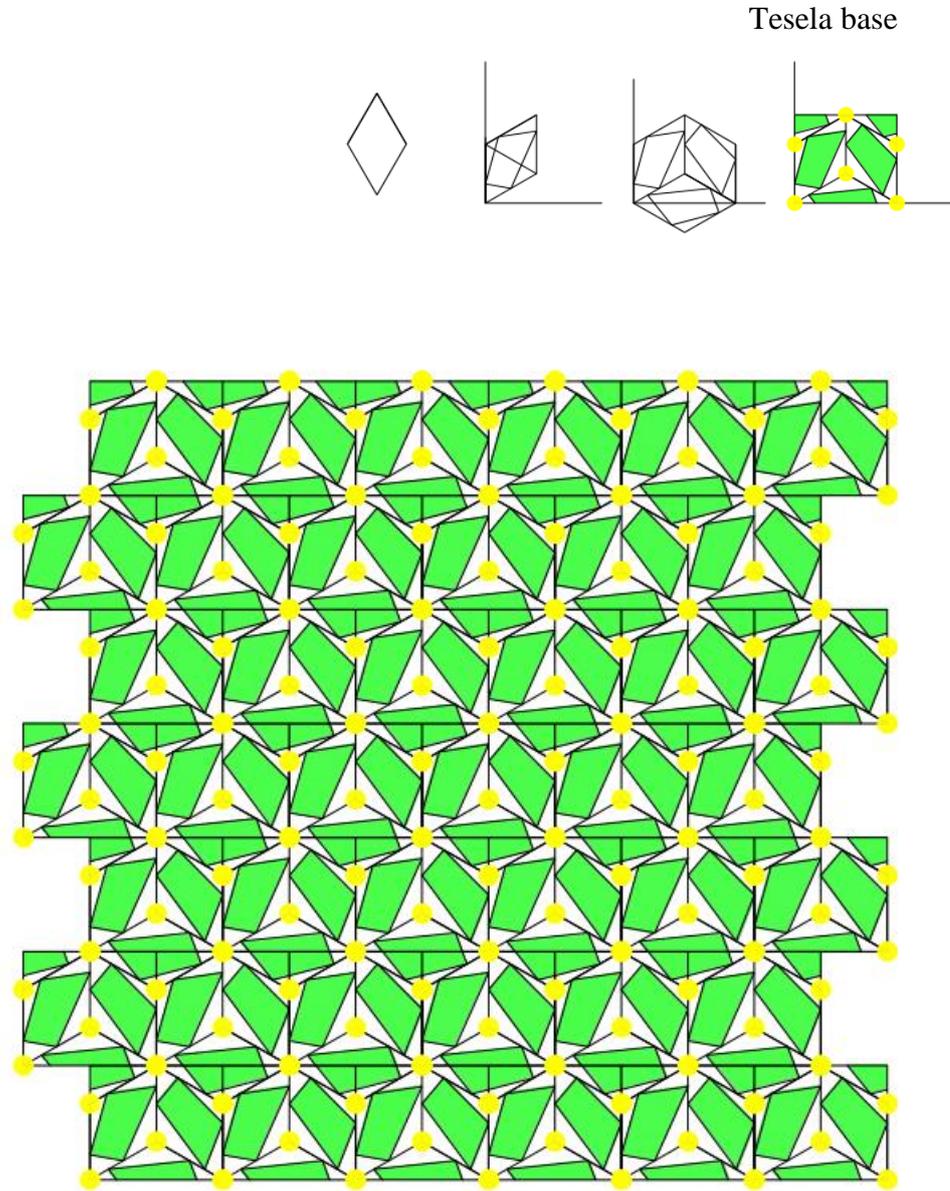


Figura 34: Grupo cristalográfico p3.

Grupo cristalográfico p3m1.

La tesela base en este caso es un rombo. Se puede observar que por cada centro de orden 3 pasan al menos un eje de reflexión. De hecho, por cada centro de orden tres pasan tres ejes de reflexión. Se observa también que la diagonal mayor del rombo es un eje de reflexión (Fig. 35).

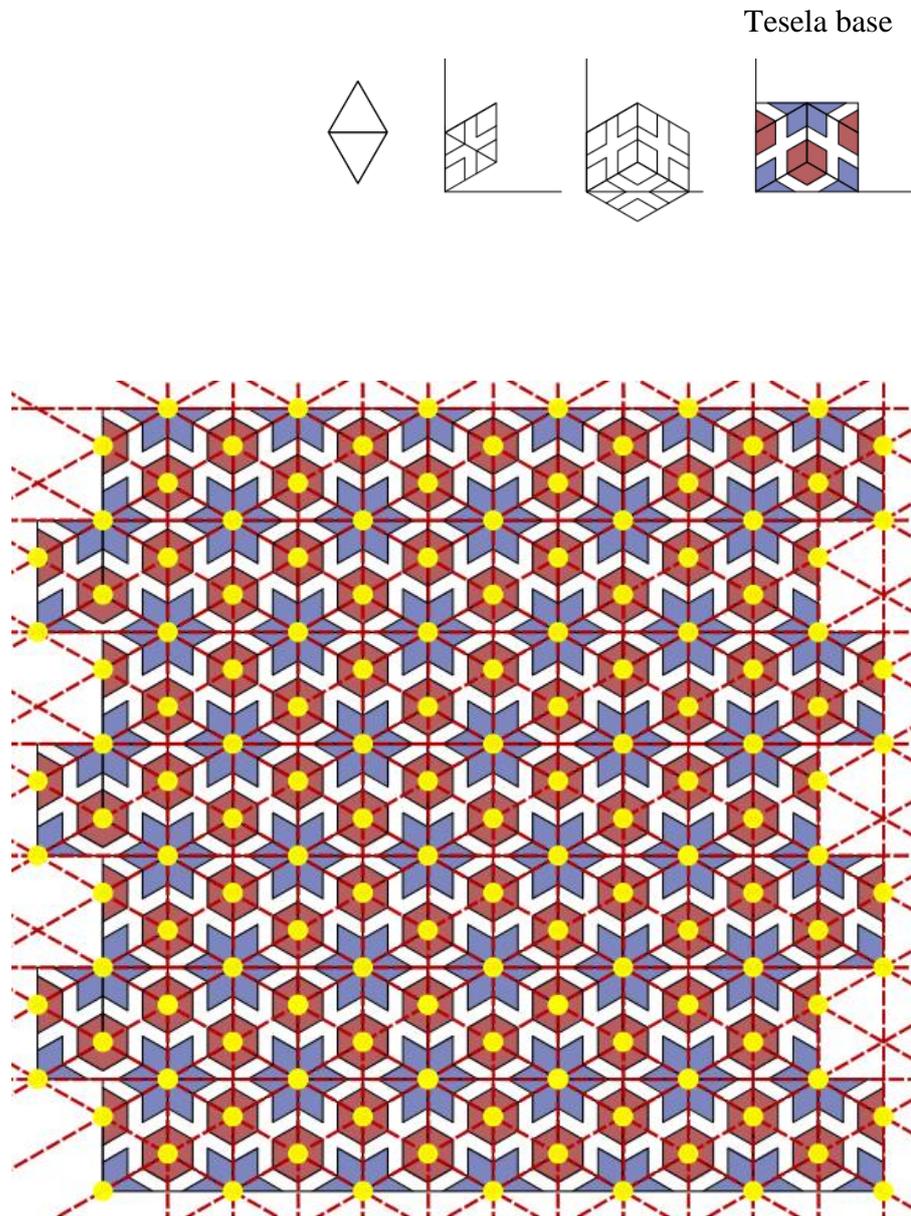


Figura 35: Grupo cristalográfico p3m1.

Grupo cristalográfico p31m.

La tesela base en este caso es un rombo. Algunos de los centros de rotación están sobre ejes de reflexión, y otros no. Contiene ejes de reflexión con desplazamiento y pasan por los puntos medios entre dos ejes de reflexión paralelos y tampoco pasan por los centros de rotación. Estos ejes de desplazamiento van en tres direcciones como lo hacen los ejes de reflexión (Fig. 36).

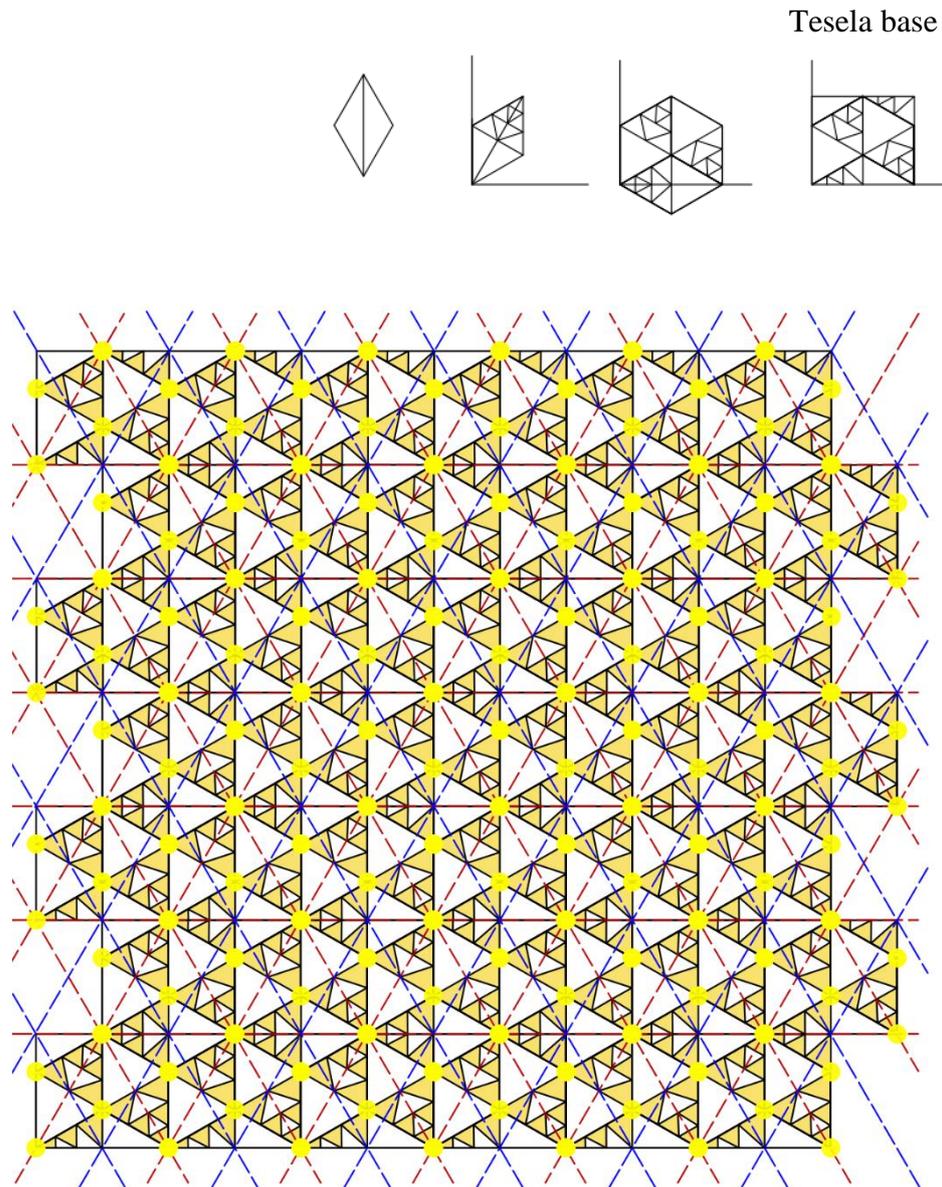


Figura 36: Grupo cristalográfico p31m.

Grupo cristalográfico p4.

La tesela base es un cuadrado. El mosaico se forma a partir de rotaciones de orden 2 y 4 (180° y 90°) (Fig. 37).

Tesela base

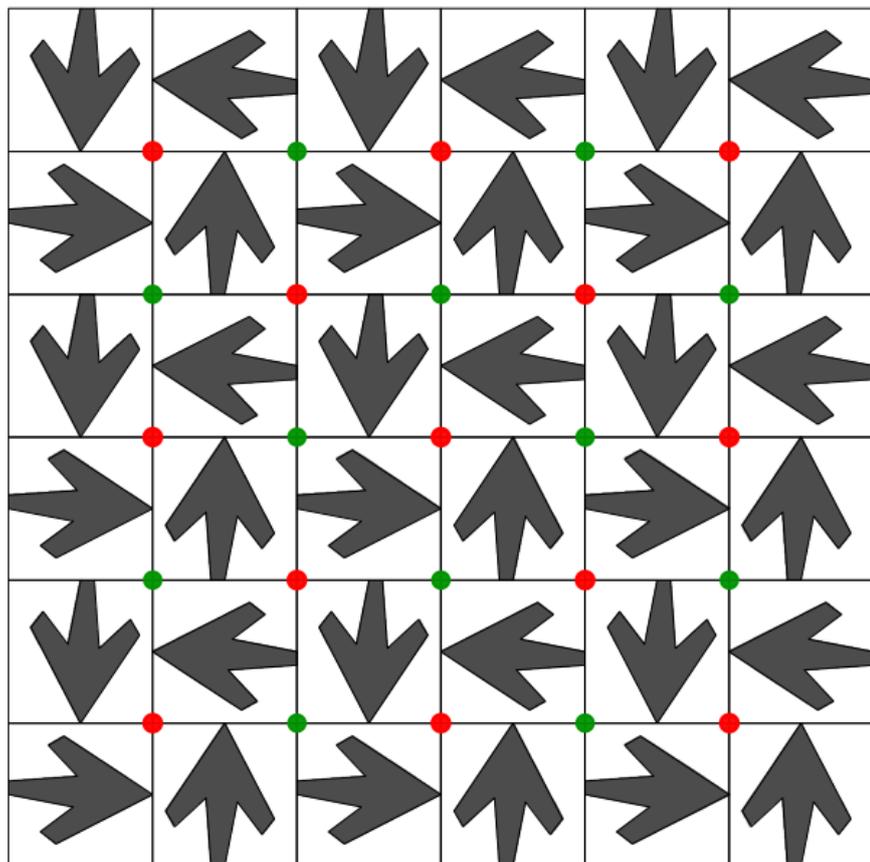


Figura 37: Grupo cristalográfico p4.

Grupo cristalográfico p4m.

La tesela base es el triángulo. El mosaico se genera a diferencia del anterior con reflexiones, además de rotaciones de orden 2 y 4 (180° y 90°). Los ejes de reflexión forman un ángulo de 45° entre sí. Así cuatro ejes de reflexión pasan por los centros de giro de orden 4. Todos los centros de rotación están sobre ejes de simetría (Fig. 38).

Tesela base

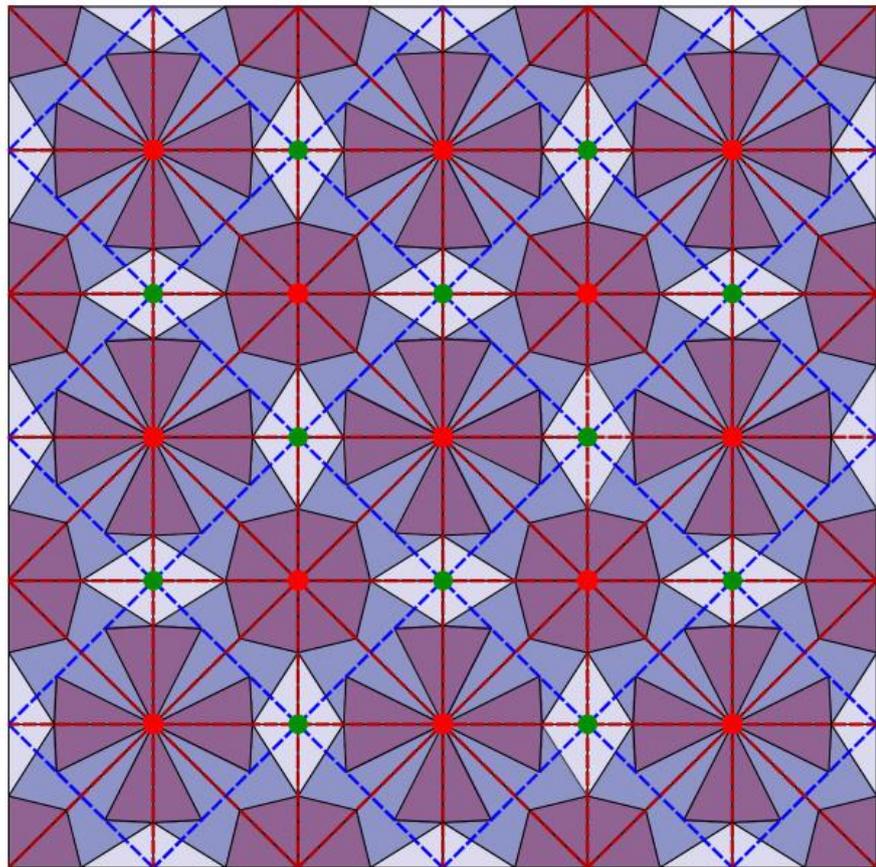
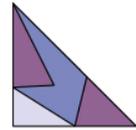


Figura 38: Grupo cristalográfico p4m.

Grupo cristalográfico p4g.

La tesela base es un triángulo. El mosaico se forma a partir de rotaciones de orden 2 y 4 (180° y 90°) y a diferencia del anterior los ejes de reflexión son perpendiculares entre sí, así como los de desplazamiento. Los centros de rotación de orden 4 están en la intersección de los ejes de desplazamiento y los centros de rotación de orden 2 están en la intersección de los ejes de reflexión (Fig. 39).

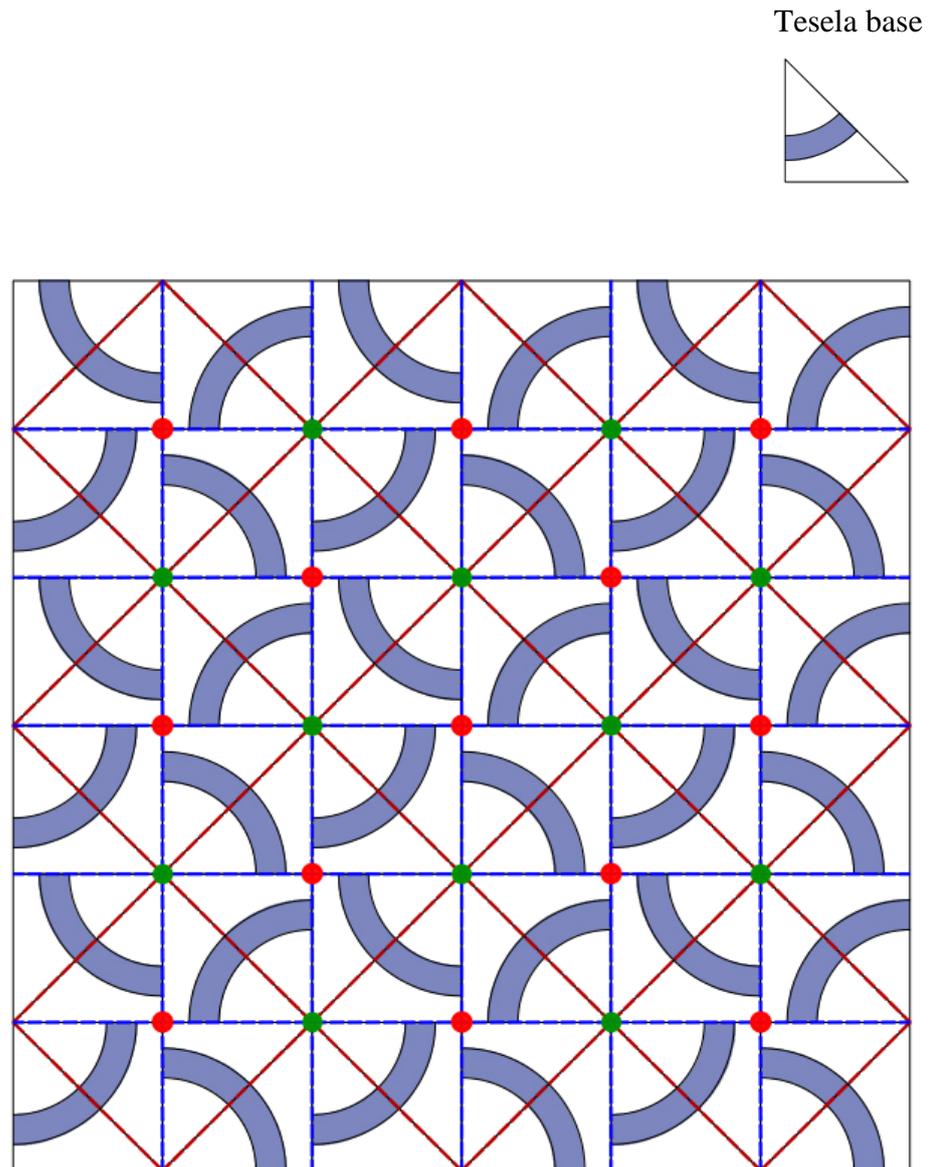


Figura 39: Grupo cristalográfico p4g.

Grupo cristalográfico p6.

La tesela base es un rombo formado por dos triángulos equiláteros. El mosaico se genera a partir de rotaciones de 60° (orden 6), también posee rotaciones de 120° (orden 3) y de 180° (orden 2), pero no contiene reflexiones, ni reflexiones con desplazamiento (Fig. 40).

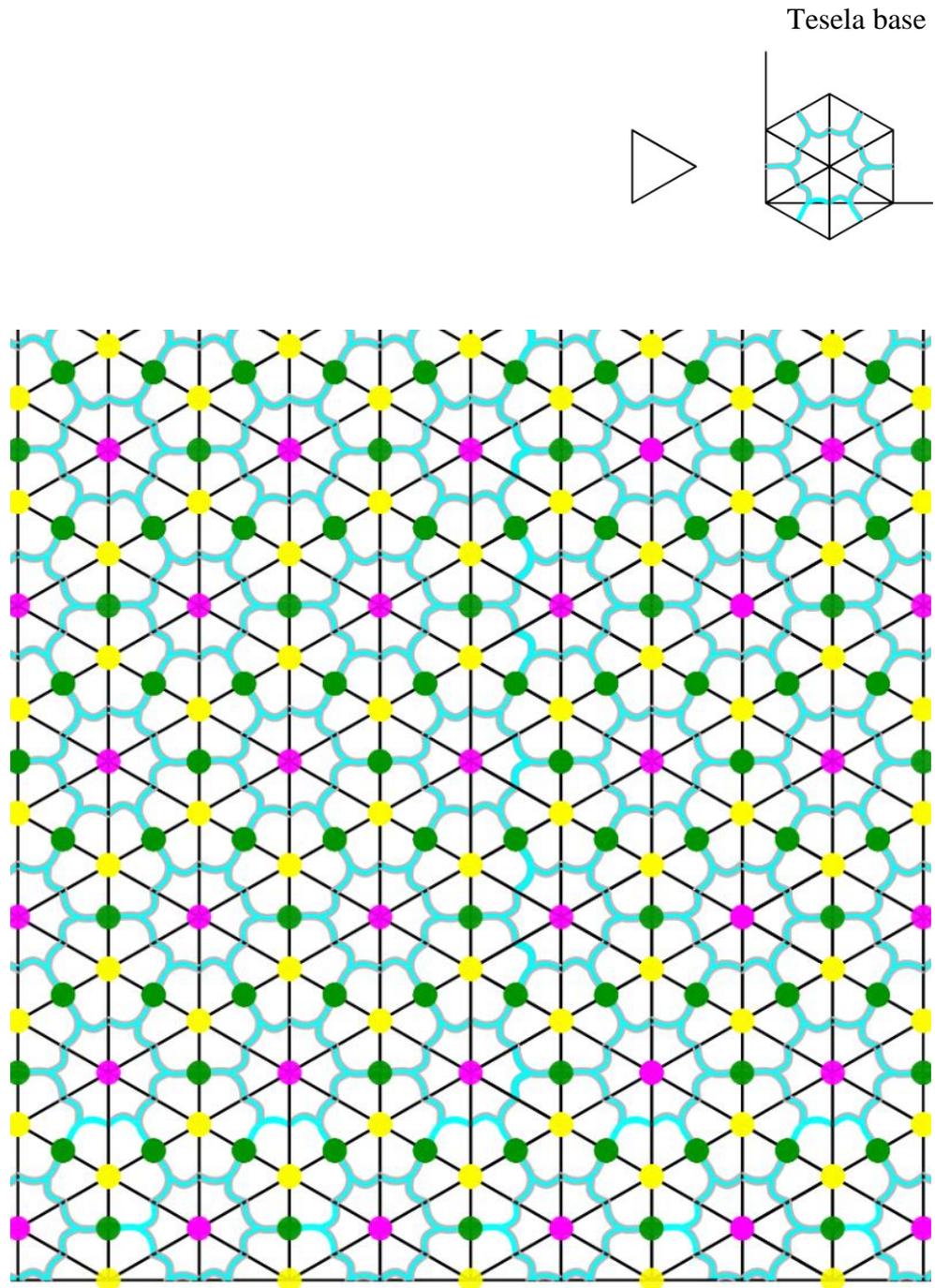


Figura 40: Grupo cristalográfico p6.

Grupo cristalográfico $p6m$.

La tesela base es medio triángulo equilátero. El mosaico se genera a partir de rotaciones de 180° , 120° y 60° además de reflexiones que pasan por todos los centros de rotación. En los centros de orden 6 se cortan seis ejes de simetría formando ángulos de 30° (Fig. 41).

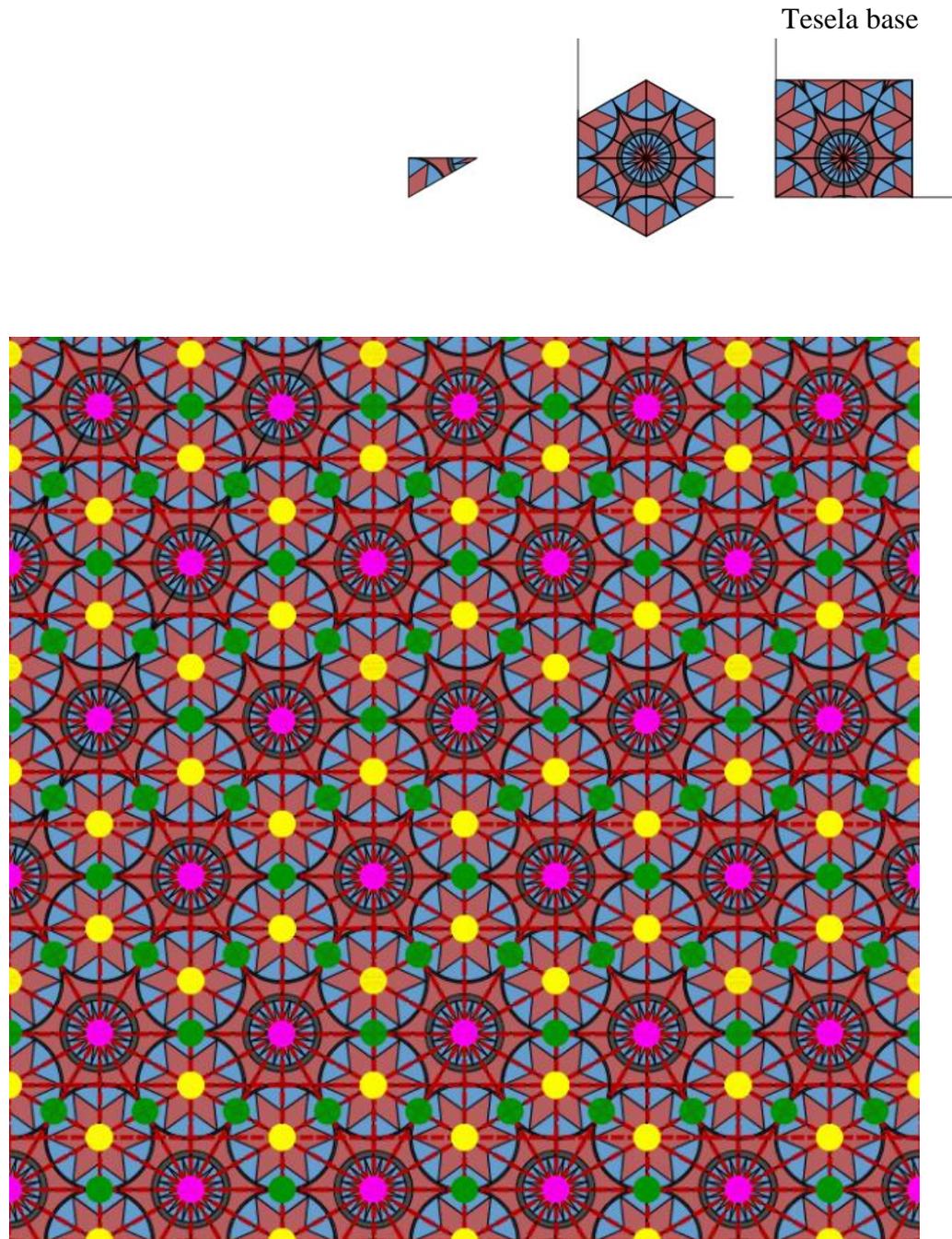


Figura 41: Grupo cristalográfico $p6m$.

5. Objeto de análisis.

La primera parte recoge toda la información teórica y fundamentalmente matemática sobre el teselado del plano. Esta información sirve como instrumento para abordar la siguiente parte, que trata de llevar a la práctica todos los conocimientos adquiridos. Siendo más concretos, esa parte teórica nos da las bases para poder identificar en la práctica las diferentes formas de teselar el plano, analizar cómo los espacios se transforman, organizarlos con la ayuda de la geometría y, lo que es más importante, nos aporta una visión crítica para tener conciencia de todas las posibilidades que se nos pueden presentar en la práctica.

Por lo tanto, ahora es oportuno observar la ciudad y percibir cómo influye el pavimento en la concepción del espacio y de qué manera este tiene una función organizadora, donde el binomio forma-función adquiere su máximo valor.

Pero si nos abstraemos por un momento de los pavimentos y los mosaicos, y adquirimos una visión más global del concepto, las teselaciones son parte responsable de cómo se estructura nuestra forma de vida. En este momento hablamos de “parcelación” que es casi sinónimo de “teselación”.

Dividimos el mundo en continentes, países, provincias, ciudades, barrios, manzanas, establecemos unos límites que no tienen ningún punto interior común, es decir, solo pueden compartir parte de su frontera; y que la unión de estas cubre totalmente el territorio. Por lo tanto, la teselación del plano trasciende del propio pavimento, siendo una herramienta fundamental para la organización a distintas escalas del territorio.

Un ejercicio muy interesante es el que propone la artista Armelle Caron con su obra *Las ciudades de fila*, en la que, a partir de unos planos de ciudades reordenados, desvincula cada uno de los pedruzcos de la ciudad, y los clasifica según su tamaño. De esta manera se hace más visible cómo estas parcelas parecen teselas independientes que al agruparse de una determinada manera generan el mosaico de la ciudad y su tejido urbano. Como se aprecia en la Figura 42 cada ciudad tiene su propia estructura y se refleja claramente en su pedruzco, hasta el punto de poder identificar a qué lugar corresponden esas geometrías.





Figura 42: Las ciudades de fila. Armelle Carón. Nueva York y Tamarac.

El desarrollo de los propios países y por consecuencia directa el de las ciudades que los conforman, intervienen de forma directa en su estructura. En este trabajo nos centraremos en la ciudad de Valencia, que como cualquier otra ciudad desarrollada ha evolucionado con el paso del tiempo.

La aparición de nuevas tecnologías y la posibilidad de realizar estudios más exhaustivos sobre la ciudad, el aumento de la población que conlleva la aparición de nuevas necesidades a solventar, nuevas teorías (ecología, participación, reivindicación de lo público) y un nuevo modelo de relacionarse con el entorno, han supuesto la ampliación de los límites territoriales y la implantación de nuevas formas de estructurar el espacio.

Se identifican en la ciudad de Valencia tres ámbitos:

1. El llamado centro histórico (o ciudad preindustrial), como modelo más orgánico apoyado en el territorio. Con una trama urbana cerrada y con una organización irregular, marcada por calles estrechas y casas unifamiliares de baja altura (Fig. 43). Ramblas, caminos, barrancos, se transforman en hilos conductores de la ordenación. El adoquín es el material principal que se utiliza para pavimentar estas calles.



Figura 43: Centro histórico de Valencia (El Carmen). Imagen del Instituto Cartográfico Valenciano.

2. El ensanche, como ordenación ortogonal (Fig. 44). La trama, la ortogonalidad reiterada hasta el infinito. Una ley geométrica sin límites y sin reconocer el territorio.



Figura 44: Ensanche de Valencia (Gran Vía). Imagen del Instituto Cartográfico Valenciano.

Se abandona esa irregularidad y estrechez de las antiguas calles, y se expande la ciudad a través de planes que implementan nuevos núcleos urbanos, que se apoyan en la geometría, mejorando la comunicación y el recorrido y generando una matriz que permite enlazar de una forma sencilla y consecutiva futuros nuevos barrios.

Toda esta transformación de la ciudad también se traslada al propio suelo, el pavimento empieza a tener un papel fundamental a la hora de organizar los recorridos y generar espacios. Hablamos mayoritariamente de la baldosa hidráulica. Carme Pinós escribe un texto que explica con claridad esa transición desde la ordenación urbana hasta el interior de la vivienda.

“La conjunción entre industria y diseño, determinante en el mercado de masas, tuvo sin duda su expresión más alta en la baldosa hidráulica. Combinando dos, cuatro, seis o más baldosas se conseguían sistemas decorativos que superaban el límite de la retícula a través del anudamiento de figuras circulares, poligonales, lobuladas, estrelladas, etc., o del uso de motivos florales, vegetales o animales más o menos fantásticos. En contra de la modesta cuadrícula, esas superficies creaban amplios entrelazamientos en los que se primaba la diagonal y las líneas quebradas y onduladas” (*Lahuerta, J. 2015*).

3. La periferia, como respuesta al aumento de la población de la ciudad, de la mano de la prefabricación. Se generan nuevos núcleos urbanos con una forma de estructurarse independiente a la establecida por la propia ciudad (Fig. 45).

La estandarización y la necesidad por construir cada vez más y de forma más económica provoca la aparición de viviendas mínimas, donde los espacios no se tratan con delicadeza y el pavimento es relegado como elemento organizador fundamental.

Las calles se cubren completamente con baldosas hidráulicas generando una retícula que se expande por todo el territorio y esto se traslada a la vivienda donde los suelos de terrazo y otros pavimentos cubren la vivienda completamente minimizando cualquier relación forma-función.

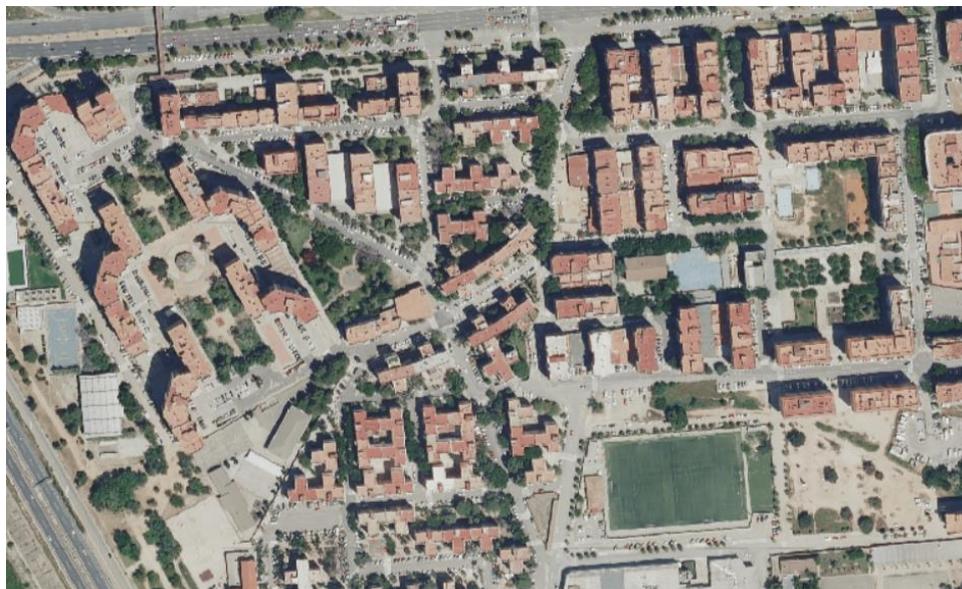


Figura 45: Periferia de Valencia (La Llum). Imagen del Instituto Cartográfico Valenciano.

La aparición del ensanche y de la periferia provocaron que el sistema ortogonal cubriera todo el plano con una malla que se extendía sin límites y que en muchas ocasiones no identificaba el valor de lo ya existente. La estructura urbana apoyada en la geometría, es una forma útil de expandir la ciudad, sin embargo, hay que identificar todos los casos que se dan, no podemos eliminar el pasado de nuestras calles, por la implantación de una nueva estructura.

El espacio público debería ser un juego de elementos del pasado y del presente que se enlazan dando lugar al mejor espacio posible y, para facilitar el ensamblaje de la nueva estructura, no debemos prescindir de las preexistencias. En la actualidad, la ciudad de Valencia está sufriendo una importante transformación en el espacio público (calles y plazas) y gracias al levantamiento de muchas de las calzadas podemos vislumbrar cómo se organizaba la ciudad a través del antiguo pavimento. Esto sucede actualmente en el cruce de las calles Isabel la Católica y Cirilo Amorós (Fig. 46).



Figura 46: Antiguo pavimento de la calle Cirilo Amorós.

Es obvio que este trabajo no se refiere al análisis del crecimiento y desarrollo de la ciudad, ni a las diferentes tipologías de su estructura urbana, solo hacemos un apunte que abre las líneas de trabajo del concepto de teselación recorriendo diferentes escalas, desde la territorial y la política (en realidad los diferentes estados que completan el planeta son teselaciones y motivo de guerras), hasta el detalle de un pavimento de cualquier vivienda o la maquetación que maximiza el espacio útil de una hoja.

Es geometría, es matemáticas, es política, es economía, es producción... al final es un sistema útil que abarca muchos aspectos de nuestra vida colectiva. Por otra parte, la convivencia, al contrario que la teselación, supone superposición, intersección, espacios compartidos, flexibilidad de las fronteras, mezcla y mestizaje.

5.1. Espacio público. La calle y la plaza.

Desde esta extrapolación de la teselación por el territorio ahora conviene analizar lo que realmente nos ocupa, cómo el pavimento organiza y estructura los espacios en distintas escalas, y comenzaremos por el espacio público. La calle, la plaza y el jardín como piezas al servicio de todos, que aglutinan la convivencia. Incluso podemos llegar a los equipamientos y las arquitecturas singulares.

El pavimento tiene miradas funcionales, formales, culturales, a veces puede convertirse en una escultura plana que colabora mejorando la eficiencia de los itinerarios, de los lugares de descanso, de los diferentes espacios. En esta tarea, son elementos muy relevantes las infraestructuras que necesariamente emergen en los pavimentos (arquetas, registros, trapas...) y la manera de compatibilizar lo que ocurre en el subsuelo con la superficie. Es la epidermis que da respuesta a esa superposición.

Pero antes de analizar casos particulares propios de la ciudad de Valencia, se hace mención sobre el pavimento común que encontramos en la gran mayoría de las calles; esta forma de teselar el plano es a partir de un pavimento hidráulico, formando una teselación regular con el cuadrado como tesela base.

5.1.1. Pavimento hidráulico común.

Lo interesante del siguiente caso es descubrir que una forma sencilla de teselar el plano, que es a través de cuadrado, también estructura el espacio y nos da una perspectiva diferente de la calle, o espacio público, dependiendo de las modificaciones de escala que se generen en sus teselas.

En las siguientes imágenes (Fig. 47), se muestran las diferentes maneras de teselar el plano/suelo en una misma calle con un mosaico periódico regular. Este ejemplo nos permite identificar como el cambio de escala cambia por completo la sensación espacial de la calle.

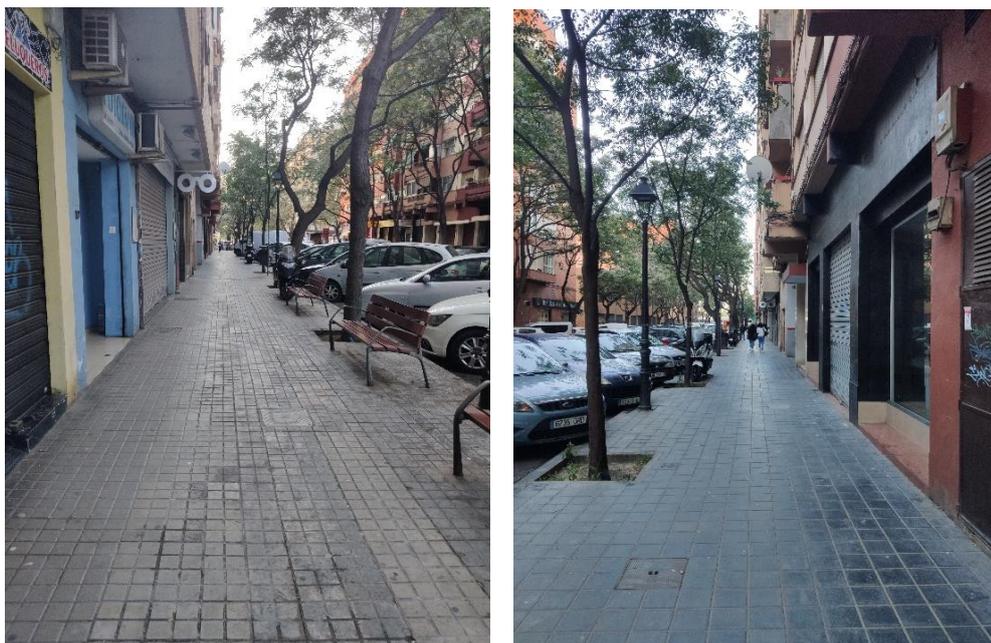


Figura 47: Pavimentos calle José Andreu Alabarta, Pavimento 1 (izquierda) y Pavimento 2 (derecha).

En una misma sección de calle, con las mismas distancias y tamaños de acera, se aprecia como en el caso del Pavimento 1 (Fig. 48), con una baldosa hidráulica común de 10 cm de lado, la sensación espacial es de estrechez, sin embargo, cuando observamos el Pavimento 2 (Fig. 49), donde la escala de la pieza aumenta a 20 cm de lado, se consigue una sensación de amplitud mucho mayor que en el caso anterior, teselando en ambos casos de la misma manera, pero generando una sensación espacial muy diferente.

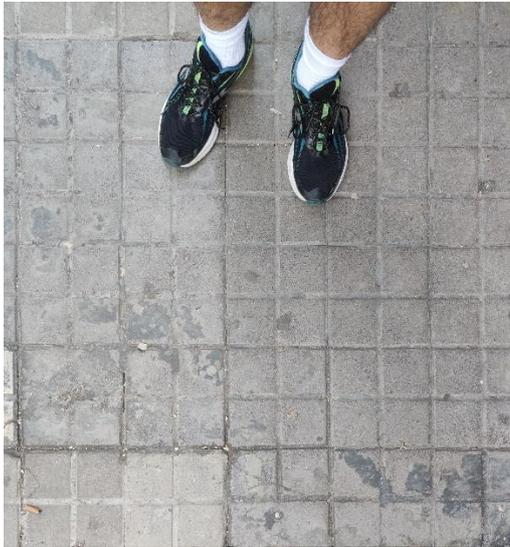


Figura 48: Pavimentos 1.

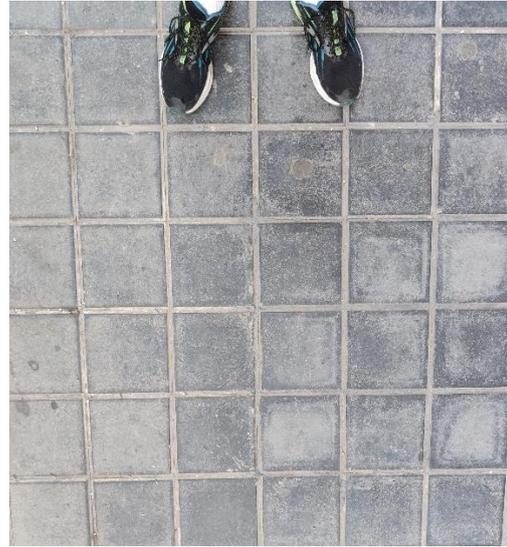


Figura 49: Pavimentos 2.

Esto evidencia un problema, el desequilibrio que se produce entre la realidad formal y funcional de cada calle, y la solución homogénea estandarizada que se ofrece. Así como cada edificio tiene su relevancia y se apoya en un proyecto para su construcción, muchas de las calles de esta ciudad parecen olvidadas, tratadas con soluciones idénticas y sin la reflexión necesaria para conseguir que el conjunto funcione correctamente.

Es evidente, que el tratamiento de las calles debe ser diferente en cuanto a su relevancia en la ciudad y eso se tratara en los siguientes puntos, pero no es el debate actual, ahora se habla de la necesidad de proyectar las nuevas vías con la mirada puesta en estructurar el espacio de la mejor forma. Así como de analizar y transformar todas estas calles que han sufrido el paso del tiempo.

Igual que en las vías más relevantes hay una sensibilidad a la hora de tratar el pavimento, hay que ser consciente que en las vías urbanas no pueden ser tratadas con una única solución, cada caso tiene una peculiaridad y hay muchos factores que determinan esta solución (vegetación, orientación, sección, escala). Hay que encontrar la solución particular a cada caso y, como hemos visto, un simple cambio de escala puede modificar por completo la experiencia al recorrer la calle.

A continuación, se presentan posibles soluciones de pavimentos de la calle mostrada anteriormente, y se puede apreciar cómo la percepción del espacio cambia por completo como consecuencia de las nuevas formas de teselación (Fig. 50).



Figura 50: Propuestas calle José Andreu Alabarta.

5.1.2. Pavimentos singulares.

En este punto se tratan algunos casos de interés, que permiten una reflexión sobre cómo se estructura el suelo en el espacio público de la ciudad de Valencia.

5.1.2.1. Plaza del ayuntamiento.

Aquí encontramos una de las piezas principales y centrales de la ciudad, el tratamiento de la plaza ha dado mucho que hablar y el proyecto nunca ha llegado a estructurar el espacio de forma clara. Sin embargo, se puede extraer cosas muy interesantes de las vías que rodean a esta (Fig. 51).



Figura 51: Pavimento Plaza del Ayuntamiento.

En la propia imagen se pueden distinguir tres zonas dentro del mismo pavimento, la forma de teselar se apoya claramente en la geometría para dividir los espacios según su función. En el siguiente esquema (Fig. 52), vemos en que forma recae cada función y a qué tipo de teselado pertenecen.

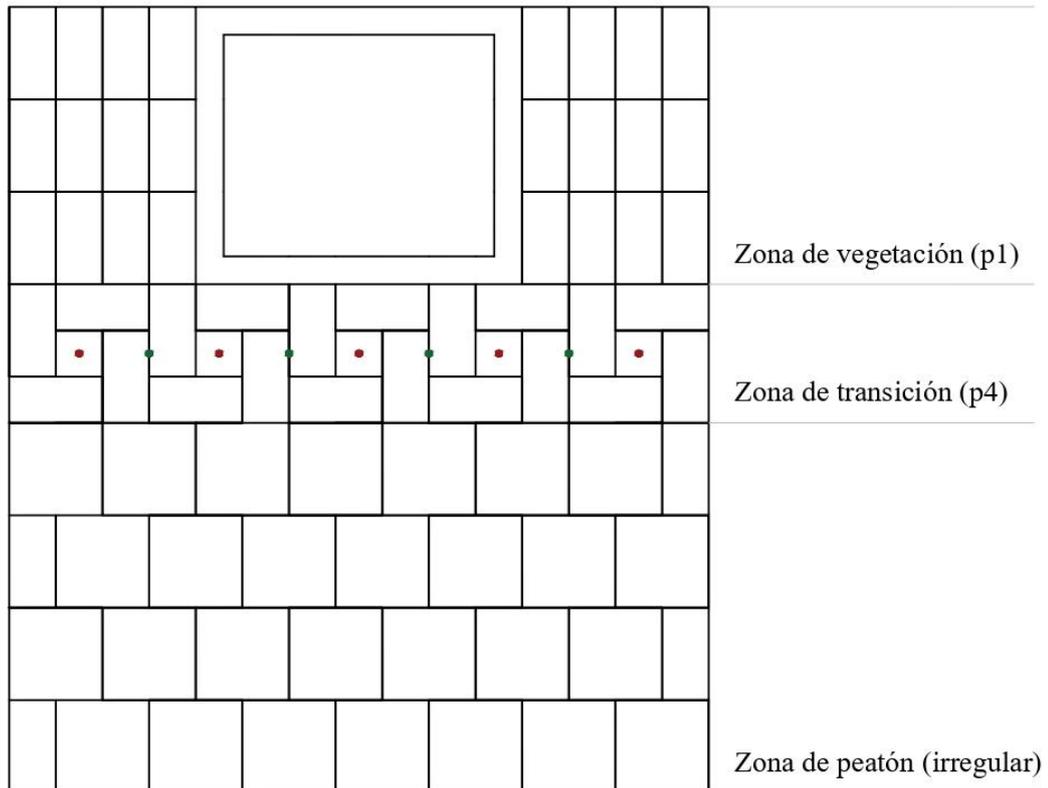


Figura 52: Análisis pavimento Plaza del Ayuntamiento.

1. Tenemos una primera zona más cercana a la calzada que utiliza el rectángulo como tesela primitiva, con unas dimensiones de 20 cm de ancho y 40 cm de largo, esta pieza forma un mosaico periódico irregular que forma parte del grupo cristalográfico p1, generado a partir de traslaciones. Este espacio tiene como función contener la vegetación de la calle, La geometría permite ensamblar de forma precisa todas las baldosas, dejando un cuadrado entre las piezas para la tierra vegetal.
2. La segunda zona funciona como una transición entre el espacio para la vegetación y la del peatón, en este caso su composición es más compleja, se utilizan rectángulos como los anteriores y cuadrados, reúne los polígonos que se utilizan en ambas partes. También es un mosaico periódico irregular que pertenece al grupo cristalográfico p4.
3. La última zona es el espacio reservado para el peatón, se aprecia como la escala aumenta y la tesela base se ha transformado en cuadrados de grandes dimensiones que estructuran el espacio generando sensación de amplitud. Se trata de una teselación periódica irregular (ver Figura 5), donde las piezas se colocan a tresbolillo, pero lo curioso es que se colocan de forma trasversal a la calle, y en la longitudinal las piezas marcan el eje de la vía formando rectas a través de sus juntas.

5.1.2.2. Avenida del Puerto.

Se ha seleccionado esta importante avenida por la forma particular en la que se pavimenta el suelo (Fig. 53). Es una de las avenidas más largas de la ciudad yendo desde los Jardines del Turia hasta el mar. En ocasiones sucede que, debido a su extensión, es más sostenible utilizar el formato tradicional que ya ha sido producido para otras calles de la ciudad y no tratar de teselar toda la superficie del suelo con estas piezas más singulares.

Es por ello que como medida alternativa se coloca un área de pavimento que tiene una escala y forma diferente al resto, en unos intervalos durante toda la vía. Esta solución es muy interesante ya que soluciona el problema que supone tantos kilómetros de superficie por pavimentar y no abandona la idea de organizar el espacio de una manera diferente.



Figura 53: Pavimento Avenida del puerto.

El pavimento tiene motivos que hacen referencia al mar. La tesela base es un cuadrado de 40 cm de lado, contiene unas líneas onduladas en su interior, que uniéndose con las siguientes piezas generan un dibujo que recuerda a las olas del mar (Fig. 54). En la imagen podemos observar la aparición de arquetas (el mundo inferior de las infraestructuras) que interfieren en el modelo. Esta forma de teselar pertenece al grupo cristalográfico p1.

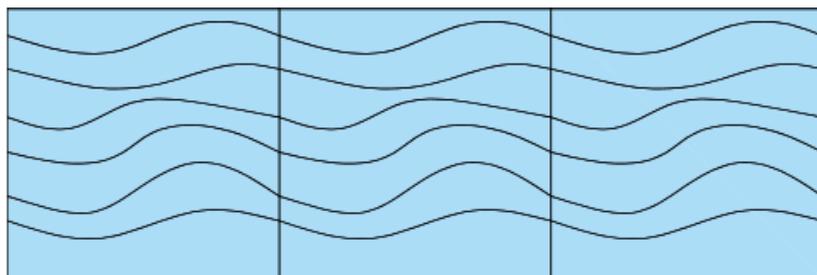


Figura 54: Análisis pavimento Avenida del Puerto.

5.1.2.3. Paseo Marítimo de Valencia.

A diferencia de lo comentado en el apartado anterior hay lugares puntuales donde el pavimento adquiere una gran relevancia debido a su situación y su uso. En este caso hablamos del pavimento del paseo marítimo de Valencia (Fig. 55).

Debido a la trascendencia del lugar y su importancia para la ciudad, la teselación del plano no escatima en metros cuadrados y se dispone un pavimento a lo largo de todo el paseo. Hay que tener en cuenta que no es un lugar de paso, es un paseo y como tal se utiliza para actividades recreativas o deportivas.

Es en verano cuando el espacio adquiere su verdadero valor, durante el resto del año es un lugar con menos uso, sobre todo en invierno y es por ello que el pavimento no trata de jerarquizar el espacio, sino que lo estructura a través de la forma de este.

El paseo se entiende como un trayecto continuo, donde es el entorno el que va cambiando respecto a tu propio movimiento. Entendiendo esto, es indispensable que el pavimento sea reconocible en todo el trayecto, como una guía que determina cuando empieza y cuando acaba el recorrido. Indica pertenencia e identidad: está usted en el paseo.

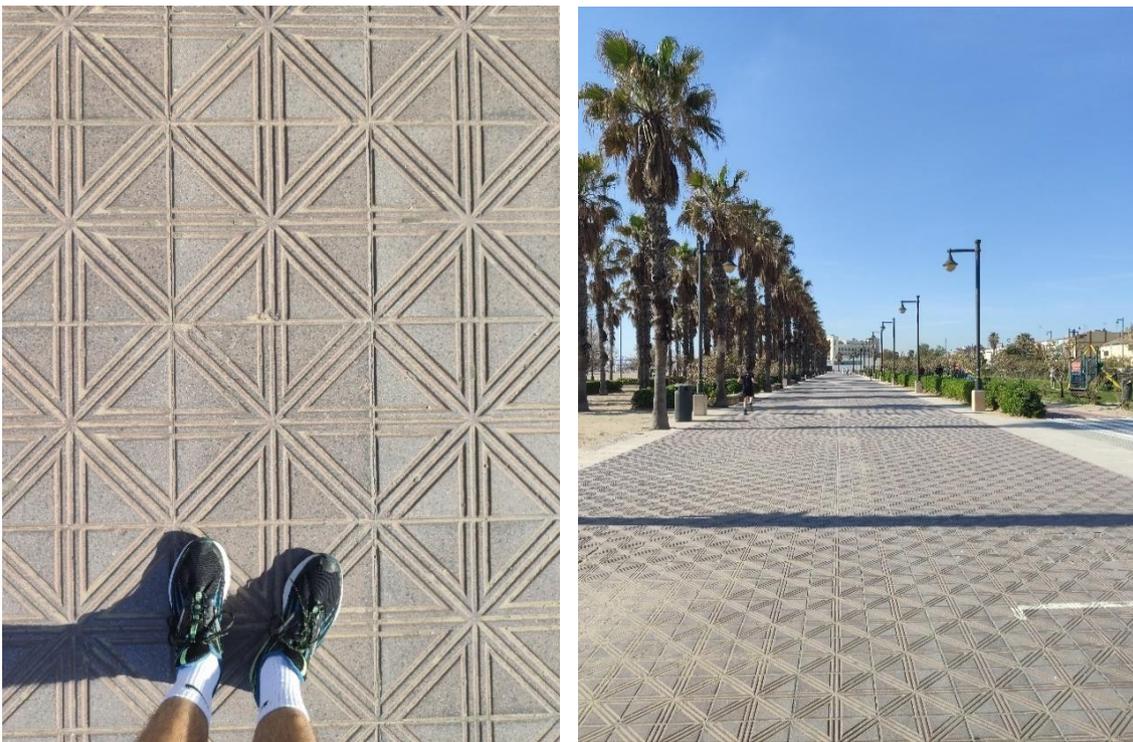


Figura 55: Pavimento Paseo Marítimo de Valencia.

Este caso cumple con las premisas anteriores, generando una mancha que estructura el espacio pero no lo delimita. La baldosa base es un cuadrado y en su interior tiene unas hendiduras que al generarse el mosaico marcan ejes en todas las direcciones. Si analizamos el pavimento desde la figura mínima que recoge el cuadrado podemos decir que la tesela base es el triángulo y por lo tanto pertenece al grupo cristalográfico $p4m$.

El resultado final permite que estos espacios al no estar delimitados puedan albergar en su interior diferentes funciones (Fig. 56).

Tesela base

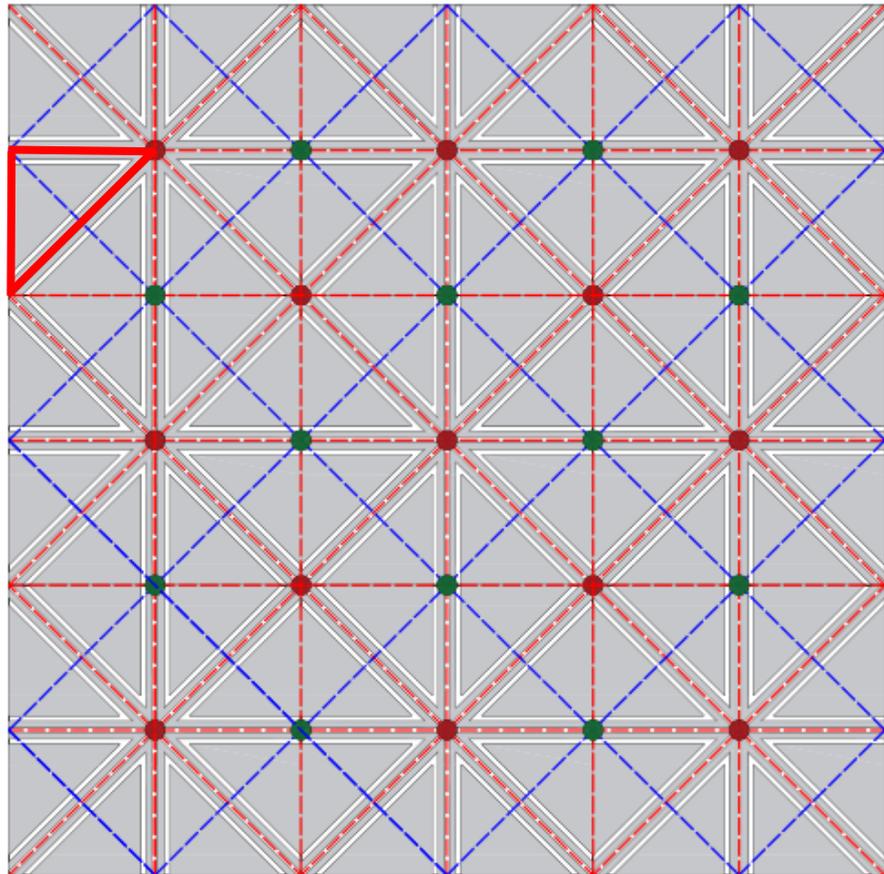
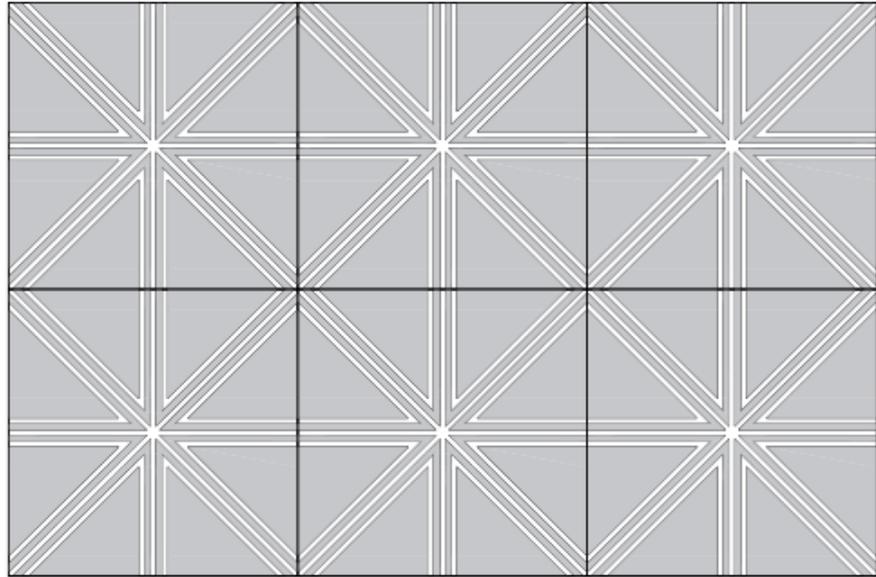


Figura 56: Análisis pavimento Paseo Marítimo de Valencia.

5.1.2.4. Plaza Doctor Collado.

Cuando hablamos de espacio público y teniendo en cuenta el análisis de los pavimentos, el espacio donde forma-función toma mayor relevancia e importancia es en las plazas. Muchas de estas están tratadas como un espacio polivalente, lo cual son, pero el pavimento no trata de reflejar nada más, no estructura el espacio, simplemente cubre el plano suelo de forma continua y uniforme.

Cada plaza guarda la historia de un barrio, de la propia ciudad. Su importancia en el recorrido y el aprendizaje de esta es fundamental para el transeúnte. Es por ello que la Plaza de Doctor Collado reúne todas las condiciones mencionadas anteriormente, el pavimento estructura el espacio a través de las matemáticas y dando información histórica del lugar (Fig. 57).

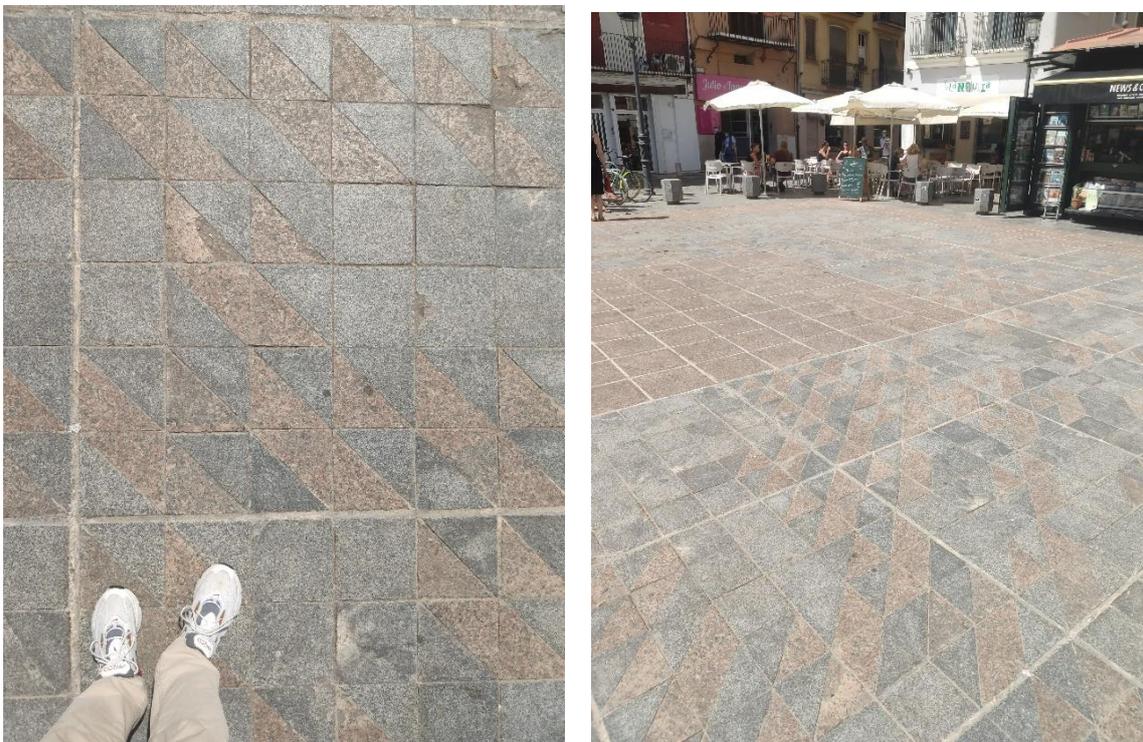


Figura 57: Pavimento Plaza de Doctor Collado.

La composición que se analiza es una regularización de la parte central de la plaza que está separada del resto por un escalón. La plaza como tal es mayor y de forma irregular.

Para el pavimento de la zona peatonal los arquitectos Román Jiménez Iranzo y Pedro Soler García se inspiraron en las idas y venidas de las gentes en los siglos anteriores derivadas de su actividad comercial. Utilizaron un mosaico regular con losetas cuadradas de granito en color rosa y gris. Algunas de estas losetas están divididas en triángulos rectángulos isósceles que, compuestos adecuadamente, simbolizan palomas con las alas extendidas que van hacia la Lonja o se alejan de ella (Fig. 58).

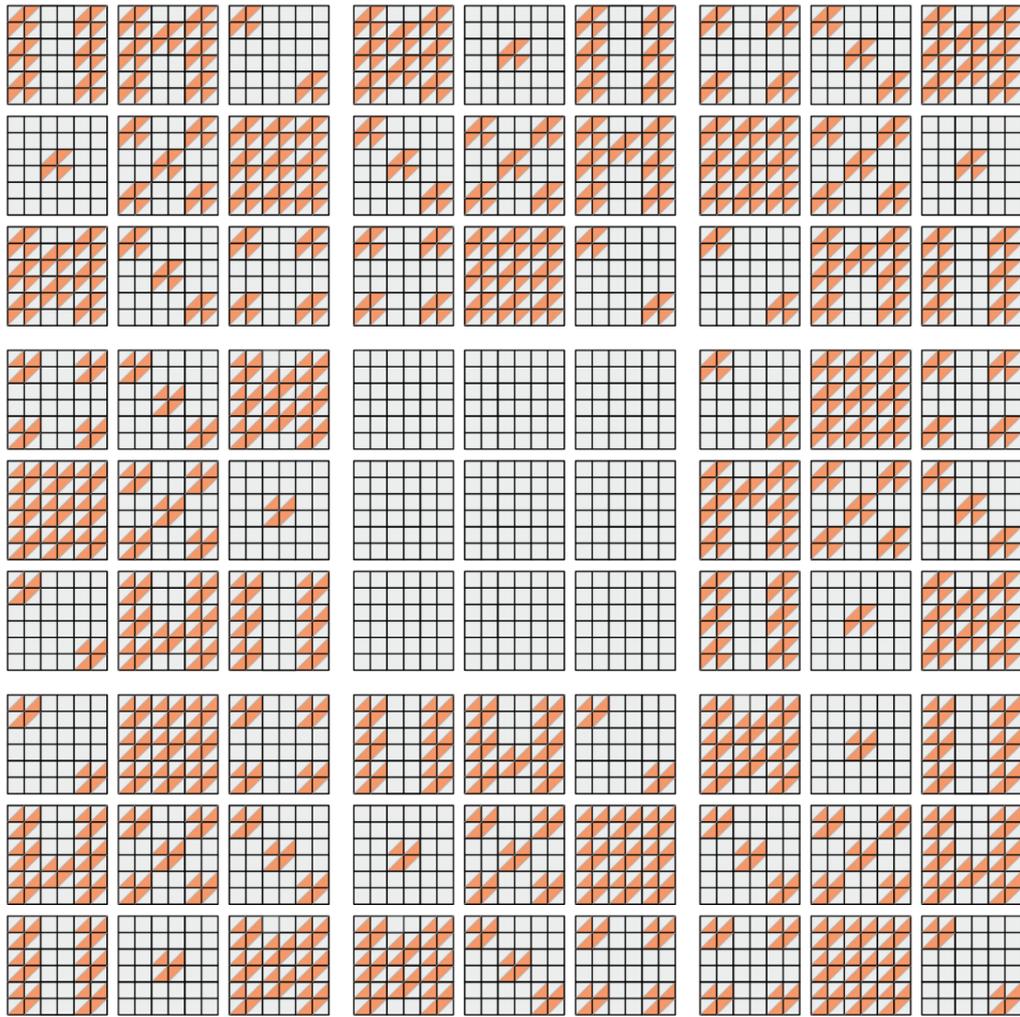


Figura 58: Esquema de las ocho disposiciones de los cuadrados mágicos en la plaza.

Estas figuras de las palomas no se colocan de forma arbitraria, sino que se utilizan para representar números dentro de cuadrados mágicos, las matemáticas al servicio del espacio público.

Los arquitectos representaron un cuadrado mágico de orden tres con constante mágica 15, otro elemento matemático. A partir de una serie de simetrías y rotaciones, se generan ocho disposiciones diferentes, sin embargo, en el pavimento de la plaza se muestran ocho cuadrados mágicos de orden tres, pero que corresponden solo a cuatro disposiciones diferentes repetidas dos veces cada una. La diferencia es que en cuatro de ellas las palomas que representan los números van con sus alas desplegadas hacia la Lonja, y en las otras cuatro, en las que se duplica la disposición, las palomas se alejan de la Lonja.

Las palomas dibujan un circuito imaginario de la antigua Lonja del Aceite, a la Lonja de la Seda. La configuración de los cuadrados en la plaza se esquematiza en la figura 59. En esta figura los cuadrados mágicos se disponen en una cuadrícula 3x3 en la que se deja libre el cuadrado central.

6	7	2	8	1	6	4	3	8
1	5	9	3	5	7	9	5	1
8	3	4	4	9	2	2	7	6
4	3	8				2	9	4
9	5	1				7	5	3
2	7	6				6	1	8
2	9	4	6	7	2	8	1	6
7	5	3	1	5	9	3	5	7
6	1	8	8	3	4	4	9	2

Figura 59: Cuadrados mágicos.

La parte central de la Plaza del Doctor Collado, como plano teselado, también representa un ejemplo de mosaico regular, ya que el recubrimiento del pavimento se realizó únicamente con piezas cuadradas. En este caso se recurrió a la división de baldosas cuadradas en dos triángulos isósceles iguales y a la combinación de colores para que el mosaico regular cuadrado tuviera otro significado. Las palomas de la plaza del Doctor Collado no son más que un ejemplo combinatorio del “mocador” tradicional.

A pesar de la degradación del pavimento debido a la crema de la falla, se puede distinguir con total claridad todas las figuras y sin duda es un gran ejemplo para trasladar en futuros espacios públicos. La plaza se transforma en un juego, en historia y en un espacio de reunión (Rivera Herráez, R. J., & Trujillo Guillen, M. 2016).

5.2. Espacio semi-público. Arquitectura singular.

Después de analizar cómo se organiza el espacio público de la ciudad, ahora descubrimos cómo esta idea de estructurar el espacio a través del pavimento se traslada a muchos de los edificios emblemáticos de esta ciudad y por desgracia en muy pocos contemporáneos.

Como hemos comentado anteriormente la teselación del plano funciona como una matrioska, desde la escala más grande, como la parcelación del territorio, llegando a como pavimentar el baño de una vivienda. Cuando se observa el plano de la ciudad y más concretamente el casco histórico vemos que dentro de la irregularidad típica de estos núcleos aparecen piezas de mayor dimensión, con un gran protagonismo en la estructuración de la ciudad (Fig. 60). Entorno a estas piezas nace la ciudad industrial, debido a la función principalmente comercial de estas.

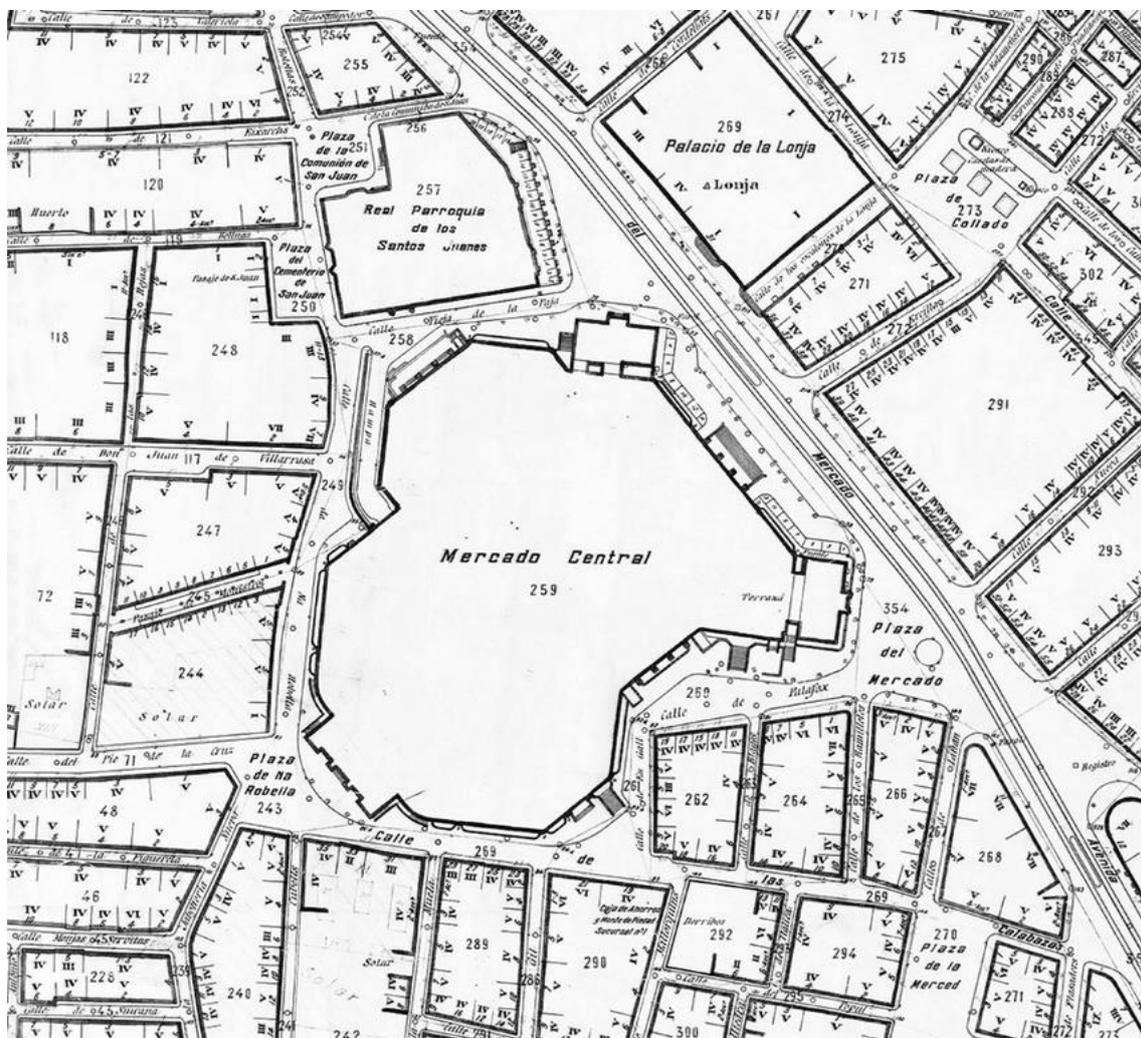


Figura 60: Detalle del Plano del Término Municipal de Valencia (1929-1944), hoja 45-IV, donde figura el Mercado Central. Imagen de María Asunción Martínez Pérez y Ferran Arasá.

Estos elementos son edificios emblemáticos, con una función específica y necesaria en el desarrollo de la sociedad en diferentes momentos. Nos referimos al Mercado Central, La Lonja de la Seda, La Parroquia de Los Santos Juanes, entre otros, que no solo se encargan de estructurar la ciudad pre-industrial sino que debido a la relevancia de lo que sucedía en el interior de estos lugares se transfiere esta necesidad de organizar el espacio, donde la relación forma-función con el pavimento como eje vertebrador otorga a cada espacio un valor significativo y diferencial, como pasara más adelante con las propias viviendas.

5.2.1. La Lonja de la Seda.

Debido a la extensión del trabajo me veo obligado a seleccionar solo una de estas arquitecturas para poder desarrollarla con mayor profundidad. En concreto, he seleccionado La Lonja de Seda como objeto de análisis.

Esta obra del gótico civil valenciano nace a raíz de la prosperidad comercial en la Valencia del siglo XV. Se construyó entre 1482 y 1497, por el arquitecto catalán Pere Compte, es una construcción de planta rectangular. Se percibe rápidamente en su interior como la geometría establece un orden que tanto ventanas, escaleras, columnas, etc... siguen para formar espacios únicos estructurados principalmente por los pavimentos.

Accedemos a través del patio, y lo primero que encontramos es la fuente (Fig. 61) como eje organizador del espacio exterior. Es el elemento central del patio y a partir de esta se dispone el resto. Cuando analizamos su geometría nos percatamos de que se trata de un polígono irregular estrellado de ocho puntas que se compone a partir de dos cuadrados que han rotado 45° respectivamente el uno de otro.



Figura 61: Fuente La Lonja de Seda.

Esta figura irregular solo puede inscribirse en un círculo y es por ello que el pavimento de esta zona se dispone a partir de unos círculos concéntricos cada 50 cm que tienen como centro la fuente (Fig. 62). El pavimento se segmenta a partir de los vértices de la propia figura, estos segmentos como es normal van aumentando su tamaño a medida que se alejan del centro, y en el último anillo de este círculo el pavimento se extruye del suelo transformándose en los bancos.

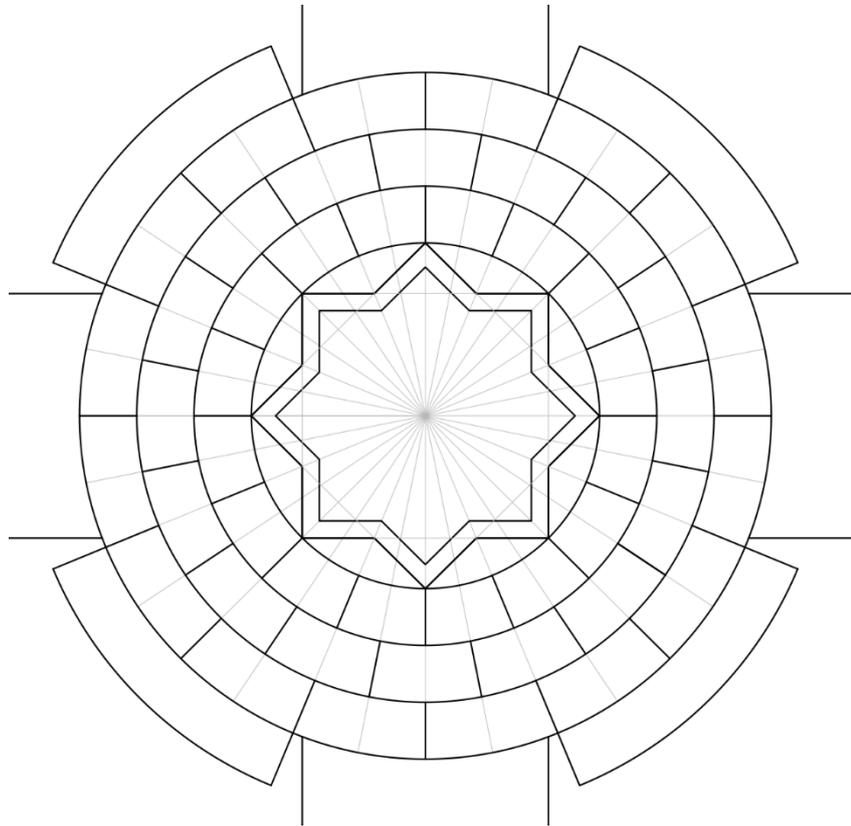


Figura 62: Plano de la fuente La Lonja de Seda.

Del centro de la fuente nacen dos ejes ortogonales que forman cuatro caminos a partir del último anillo del pavimento y que estructuran el resto de patio. Estos caminos se pavimentan con piezas de piedra como en el anterior caso, tratándose de una teselación irregular con piezas rectangulares colocadas a tresbolillo y de forma trasversal al eje longitudinal del camino. En el caso del camino que acompaña el perímetro de la Lonja también se coloca de esta manera, lo que provoca que el encuentro de los pavimentos sea en dos direcciones diferentes, algo inevitable debido a la irregularidad de la arquitectura (Fig. 63).

Esta colocación a tresbolillo es más sencilla de aplicar y no hay error visual, ya que las juntas no coinciden y no se genera una línea recta entre juntas donde pueda vislumbrarse alguna imperfección. El resto del espacio del patio está ocupado por la vegetación que homogeneiza el conjunto.

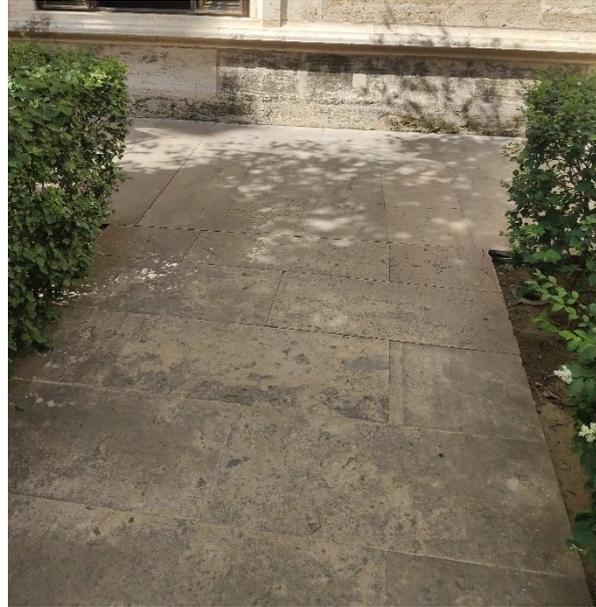


Figura 63: Pavimento exterior La Lonja de Seda.

Antes de acceder al interior de la Lonja y percibir el espacio del Pabellón del Consulado del Mar, se encuentra, una puerta teselada a partir de polígonos irregulares como son hexágonos, rombos y estrellas de seis puntas (Fig. 64). El detalle de la manija de apertura de la puerta está perfectamente integrado en la composición del conjunto.

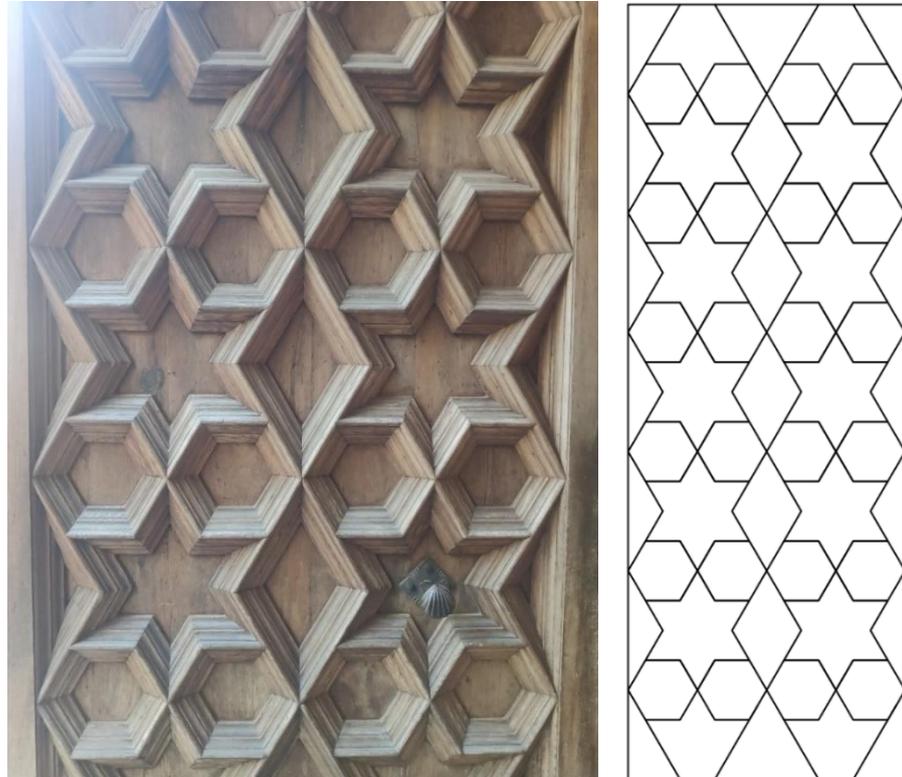


Figura 64: Puerta del Pabellón del Consulado del Mar la Lonja de Seda.

En el interior del Pabellón del Consulado del Mar el pavimento es una teselación regular, formada por cuadrados blancos y negros dispuestos de forma similar a un tablero de ajedrez. Lo interesante del pavimento es que no se coloca siguiendo la forma rectangular de la planta sino que los cuadrados se disponen de forma diagonal provocando un juego visual desconcertante entre la trama del suelo y el perímetro del lugar. En este caso no son las juntas las que marcan las direcciones de la planta sino las líneas imaginarias que pasan por los vértices de las figuras de un mismo color (Fig. 65). Pasamos de un exterior con una organización geométrica sin precedentes a un interior que intenta romper con las direcciones pero sin abandonar la geometría.

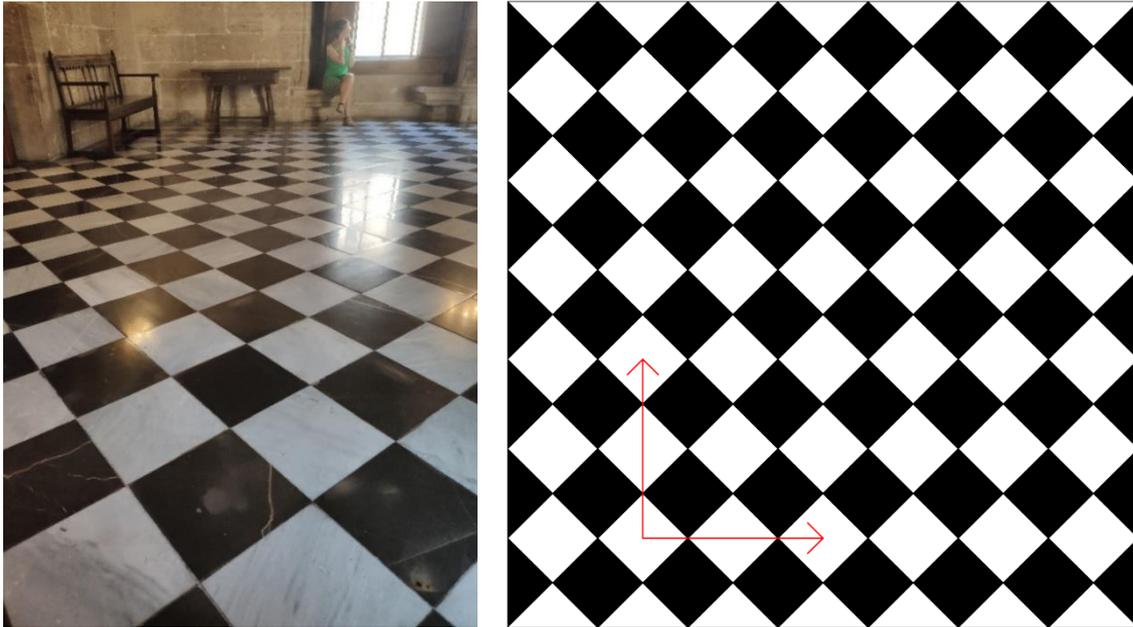


Figura 65: Pavimento del Pabellón del Consulado del Mar la Lonja de Seda.

En la planta baja del Torreón, en la capilla, el pavimento es un mosaico irregular formado por piezas de marmol negras, blancas y color ocre. La tesela base y única es el rombo que a través de giros, traslaciones y cambios de color generan un juego visual muy interesante (Fig. 66).

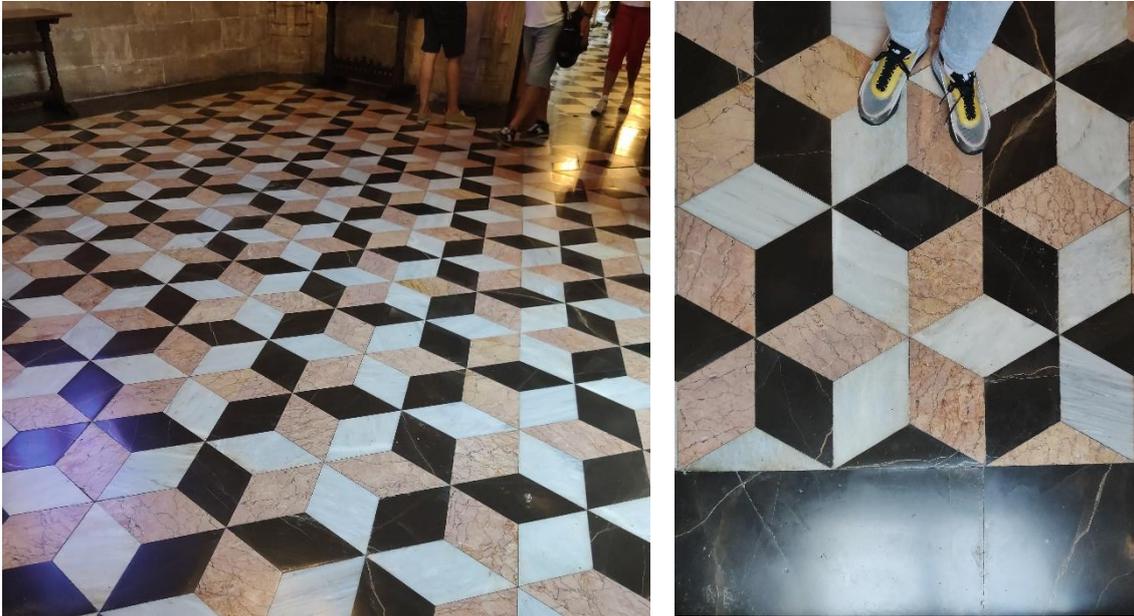


Figura 66: Pavimento de la capilla la Lonja de Seda.

Según nos concentremos en un punto o en otro podemos apreciar distintas figuras, el hexágono formado por tres rombos y la estrella de seis puntas mostrada anteriormente en la puerta pero con diferentes variaciones de colores (Fig. 67).

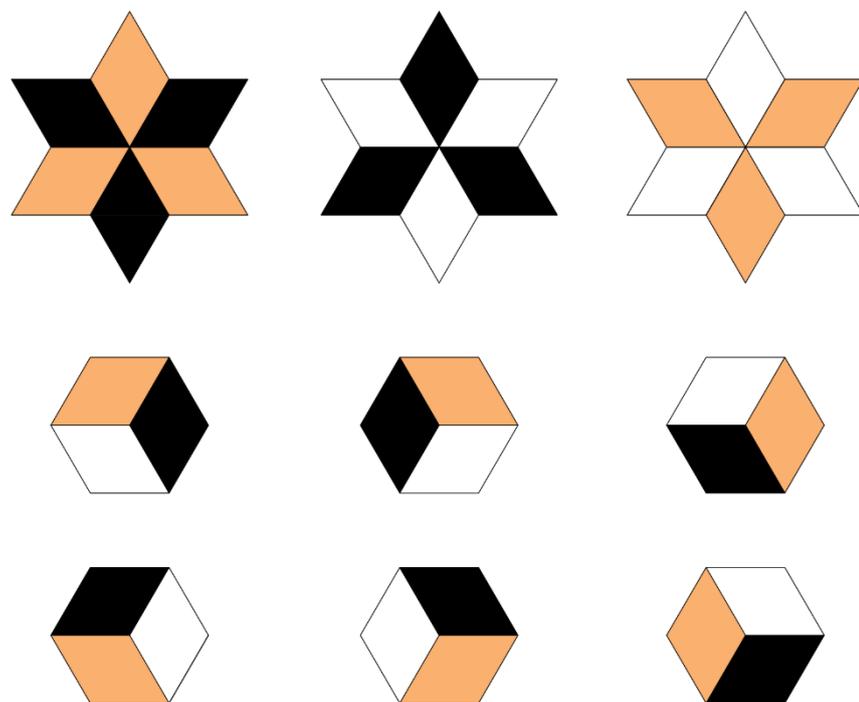


Figura 67: Figuras pavimento de la capilla la Lonja de Seda.

A diferencia de la sala anterior, el arquitecto utiliza el pavimento de color negro en un formato rectangular para generar un marco en el suelo que aisle el mosaico del encuentro con los muros y que geoméricamente se introduzca de forma exacta. Es interesante ver cómo los rombos negros que se encuentran en el perímetro del mosaico se enlazan con el marco haciendo así una transición más organica (Fig. 68).

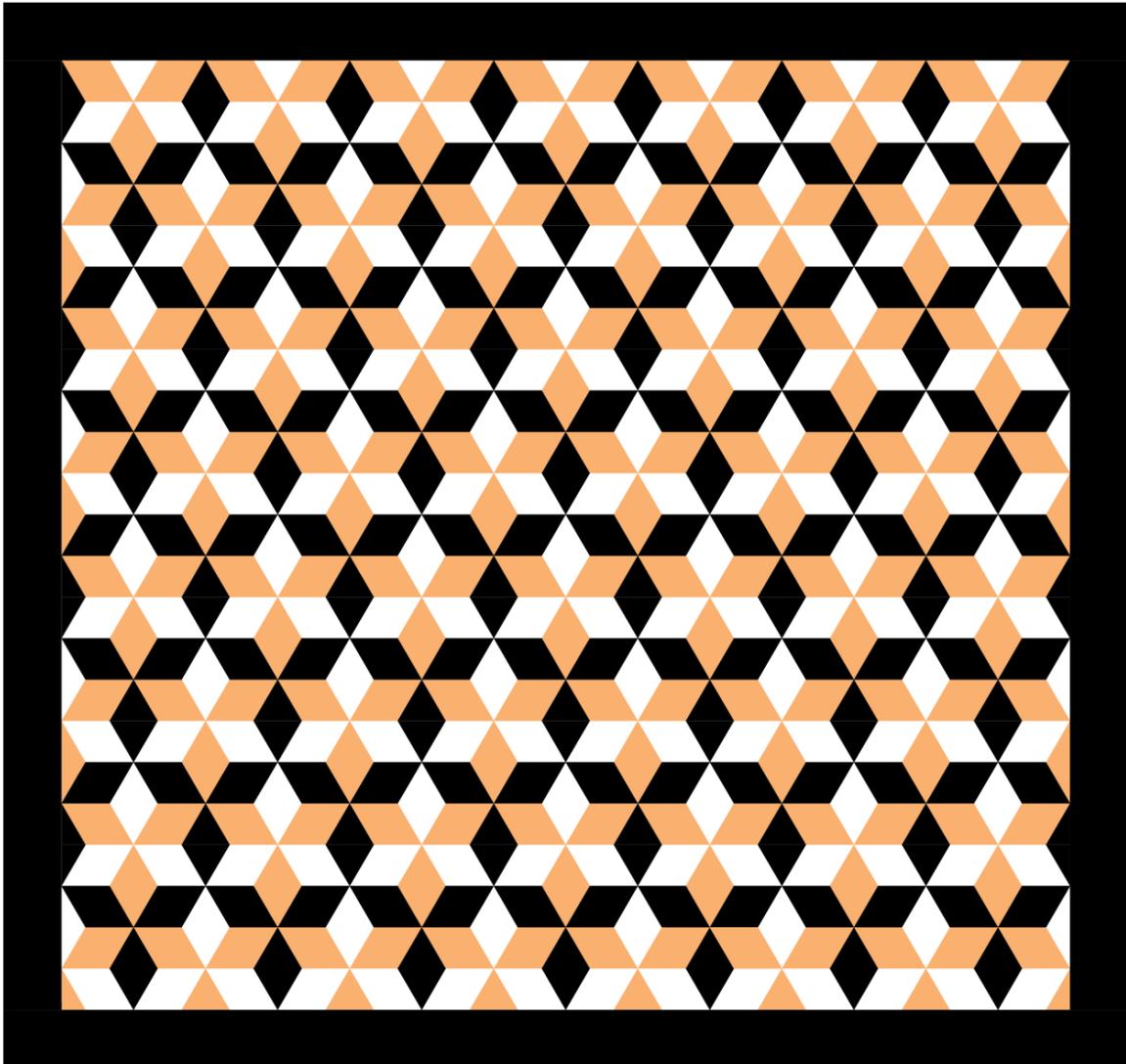


Figura 68: Esquema del pavimento de la capilla la Lonja de Seda.

Antes de continuar en planta baja, se hace una mención a la planta superior situada encima del Pabellón del Consulado del Mar, donde se utilizan las mismas piezas que en la capilla, pero con una disposición distinta. Esta organización de las piezas produce una sensación de tridimensionalidad y crea un efecto visual que hace del espacio un lugar muy especial. Las piezas negras tienen un mayor peso en la composición y nuestro cerebro acude visualmente al encuentro de estas piezas como si fueran sombras del cubo, esto permite que la estructura cambie la percepción dependiendo de nuestra perspectiva, pero el suelo, claro está, no se inmuta (Fig. 69).

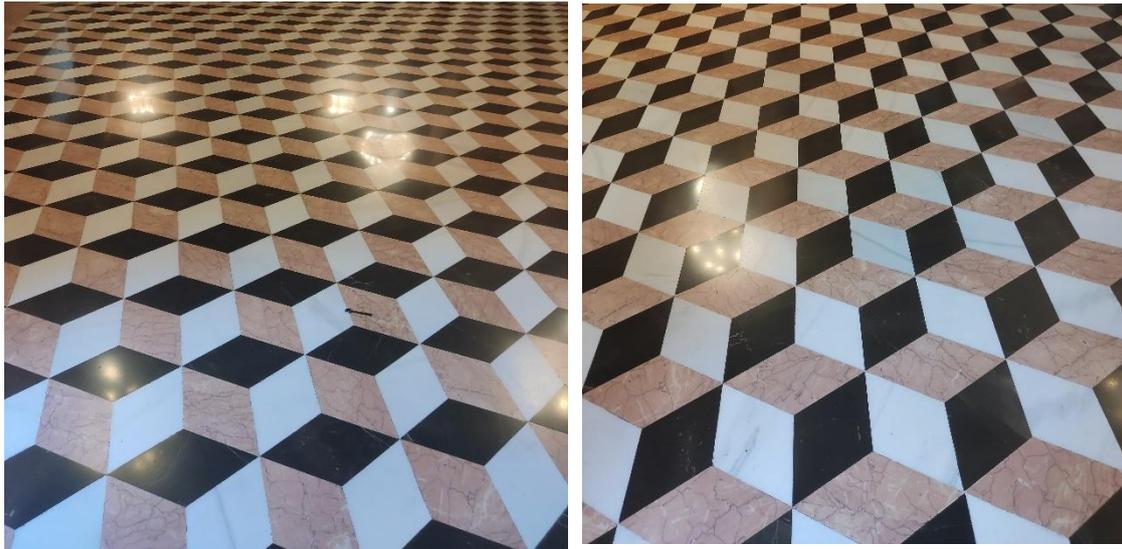


Figura 69: Pavimento planta superior del Pabellón del Consulado del Mar la Lonja de Seda.

El pavimento reivindica su existencia y se transforma en un juego visual que no solo estructura el espacio, sino que modifica la percepción de este y nos hace partícipes de él. Nosotros somos los generadores del pavimento a través de nuestra forma de visualizarlo. Como ocurría en la capilla también se establece un marco, esta vez de color ocre y que delimita el mosaico, controlando así todos los encuentros del perímetro (Fig. 70).

Este mosaico nos hace trasladarnos a Escher, del cual hemos hablado anteriormente. Una de las ideas que más le apasionó fue la teselación del plano utilizando una misma figura no poligonal. En su obra *Metamorphose* parte de un mosaico regular, y transforma los polígonos en nuevas figuras no poligonales que le sirven de patrón (Fig. 71).

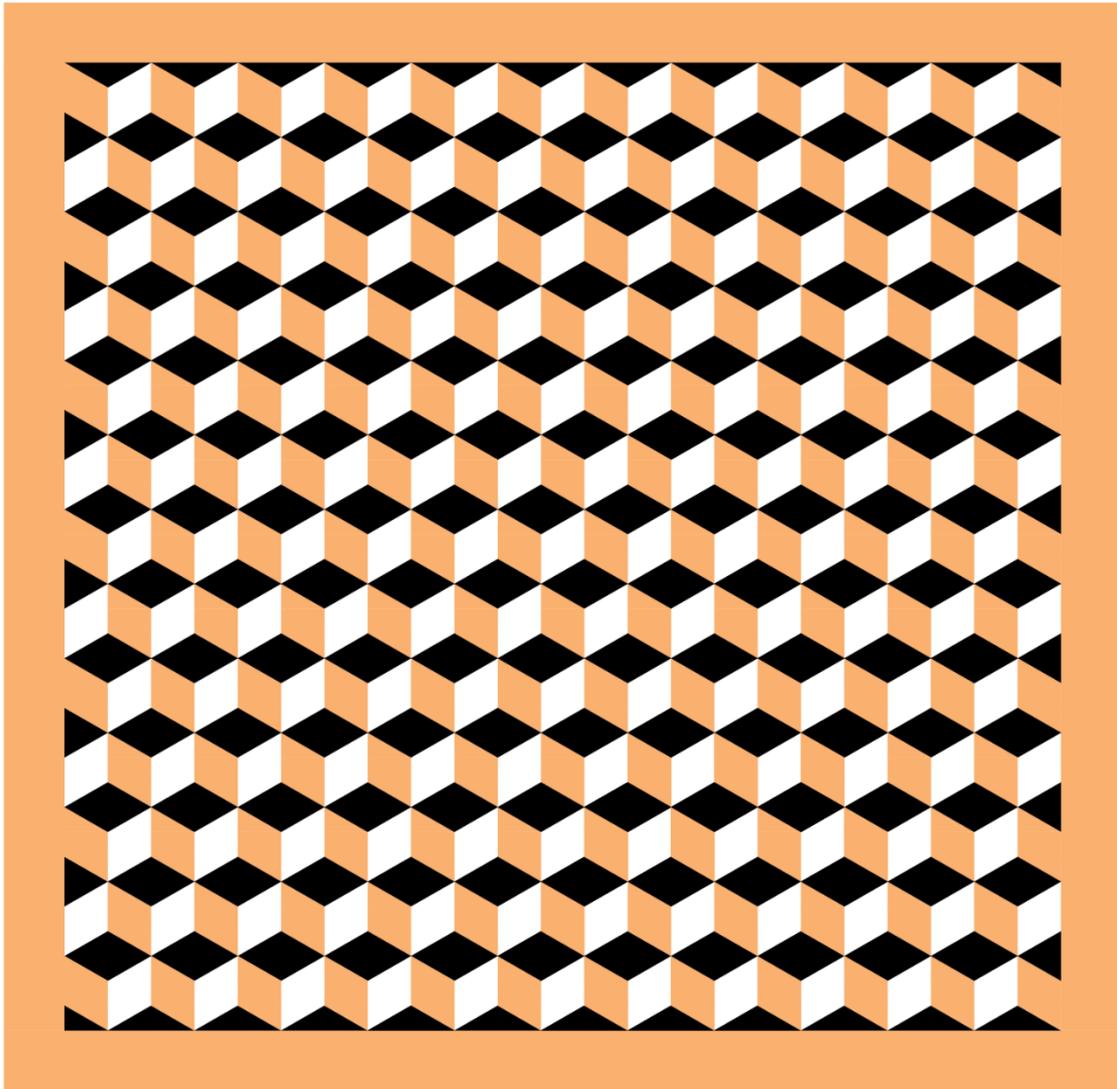


Figura 70: Esquema del pavimento planta superior del Pabellón del Consulado del Mar la Lonja de Seda.

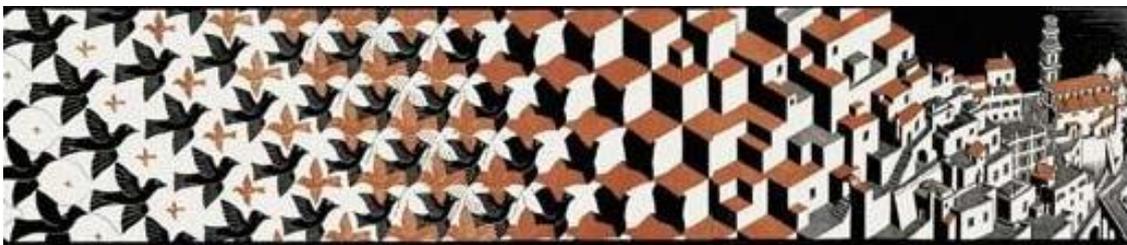


Figura 71: Metamorphose de Escher.

Sin duda el espacio más espectacular de la Lonja y donde el pavimento estructura el espacio a un nivel superior respecto al resto es la sala de mercaderías.

Esta vez la piedra negra que se utilizaba en capilla como marco es utilizada como un telón de fondo. Las piezas son rectángulos de distintos tamaños que no pretenden ser vistos, solo quieren servir de contraste para la figura que realmente importa. La figura se crea a partir de rectángulos de marmol ocres que funcionan como una línea sobre papel negro y dibujan polígonos en el pavimento (Fig. 72).

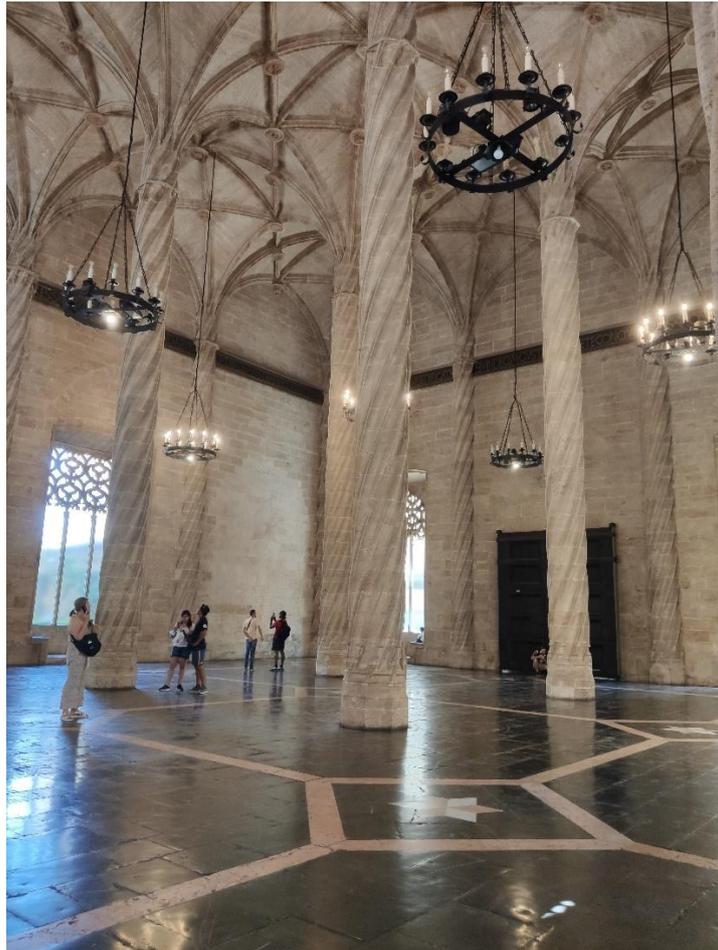


Figura 72: Pavimento de la sala de mercaderías de la Lonja.

Se consigue así un mosaico con polígonos semirregulares, formado por octógonos y cuadrados. Este mosaico determina todo el interior de la sala, la estructura que sustenta las bóvedas de crucería, hablamos más concretamente de los pilares que recaen en el centro de estos octógonos y repiten esa forma en la base (Fig. 73). Entre cuatro octógonos nace el cuadrado que en su interior tiene una estrella de seis puntas que hace referencia a la sala de la capilla ya que son las mismas piezas. Sobre estos cuadrados se alinean las lámparas que cuelgan de las bóvedas. El mobiliario y la estructura están a disposición de la geometría.



Figura 73: Pilares de la sala de mercaderías de la Lonja.

El perímetro ocre no solo dibuja figuras, sino que delimita espacios. Cada figura organiza un posible espacio para el comercio, todo entorno a los pilares que forman el eje central. Otro ejemplo del nivel de organización que proporciona el suelo es como esta línea de mármol ocre termina sus recorridos dando lugar a todas las aberturas de la sala, tanto ventanas como puertas (Fig. 74). Podríamos recorrer toda la sala y acceder a las salas colindantes siguiendo esta línea sin pisar en ningún momento el suelo de piedra negra (Fig. 75).

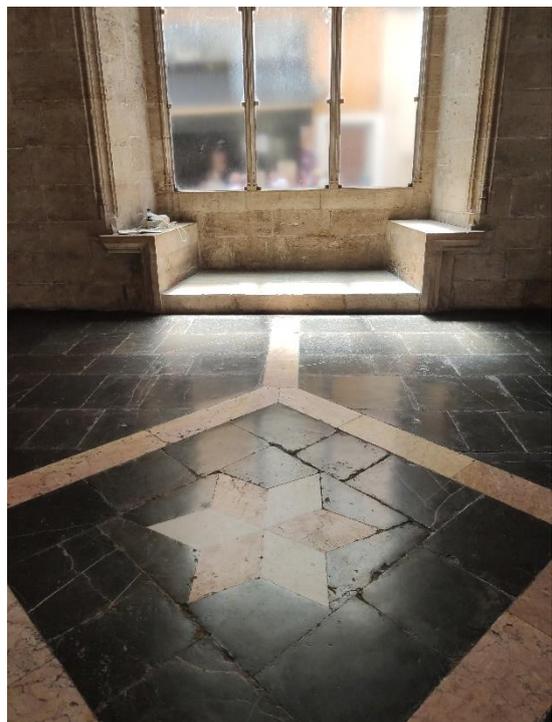


Figura 74: Encuentro del pavimento con las ventanas de la sala de mercaderías de la Lonja.

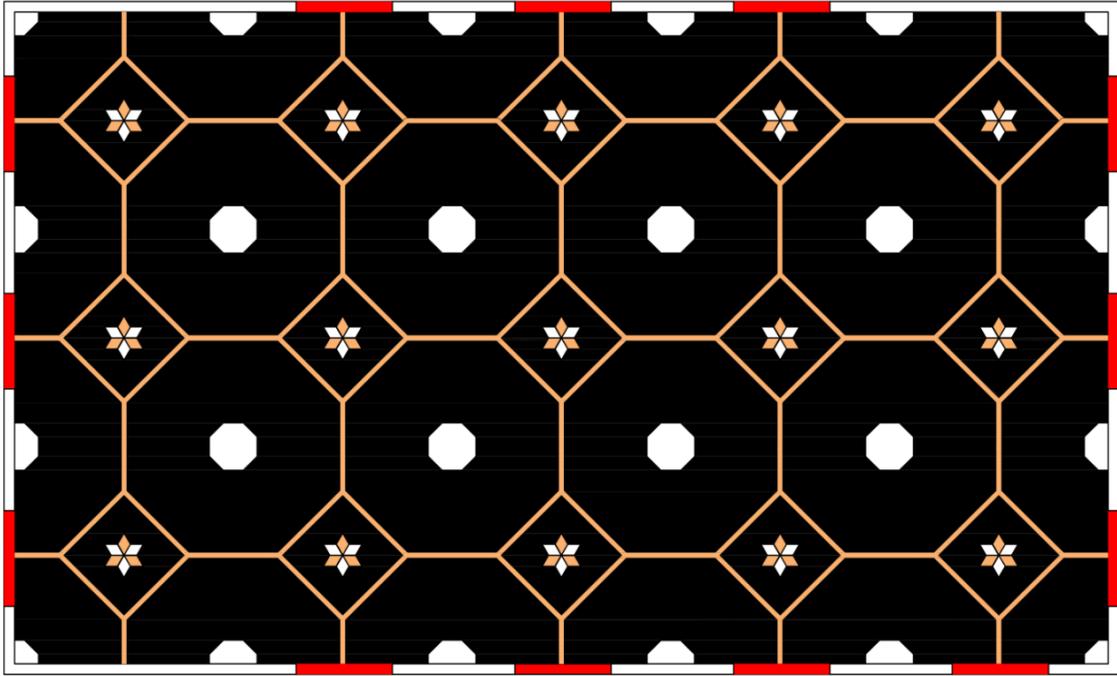


Figura 75: Esquema del pavimento la sala de comercio de La Lonja.

Es tal la relevancia del pavimento y las formas geométricas que lo componen que parte de estas figuras que hemos descubierto en el interior se trasladan al espacio público en forma de mobiliario urbano (Fig. 76).



Figura 76: Mobiliario urbano entorno de La Lonja.

Sin duda esta obra arquitectónica valenciana es uno de los mejores ejemplos de la ciudad para poder analizar cómo el pavimento puede adquirir un valor trascendental a la hora de potenciar y estructurar el espacio. La relación forma-función que representa el teselado es claramente visible en cada una de las salas, creando una concatenación de espacios únicos que se perciben de manera totalmente diferente incluso dentro del propio lugar, y que nos da pistas sobre como funcionaba el edificio en un pasado (*Rivera Herráez, R. J., & Trujillo Guillen, M. 2016*).

5.3. Espacio privado. La Vivienda.

Finalmente, y después de recorrer el espacio público, es el momento de hablar del espacio privado y sus pavimentos, que representa la escala más pequeña para teselar.

Es una distribución de las dependencias que, en realidad, es como “teselar” un programa funcional. No quedan espacios libres, no se superponen...

Para el estudio del teselado del suelo en la vivienda, de una manera general, podríamos hablar de tres tipos de pavimentos. El trencadís (detritus de loza y de cerámica), el pavimento hidráulico, y el terrazo continuo.

En ese sentido, se toman como referencia dos viviendas, anónimas en cuanto a la forma de teselar el plano, para así explicar de forma comparativa que impacto tiene estas diferencias a la hora de habitar el espacio.

He tomado como objeto de análisis, por una parte una vivienda que se sitúa en la calle Burriana construida en 1930, y como la mayor parte de edificios construidos en esta época tienen una sensibilidad y compromiso especial a la hora de embaldosar el suelo. Mientras que la otra referencia es de un edificio situado en el barrio de Sant Isidro, que ha sido construido en 1991, una época con nuevos sistemas para teselar de forma más práctica y económica como hemos comentado en apartados anteriores.

Estas dos viviendas representan dos modelos y dos resultados diferentes tanto desde el punto de vista formal como funcional. La primera da una identidad formal potente a cada dependencia, incluso jerarquizándolas, lo que otorga al mismo tiempo una mayor rigidez a la distribución. La segunda diluye formalmente el pavimento, se combaten incluso las juntas, pierde valor formal pero gana flexibilidad para posibles modificaciones de la distribución. Podríamos decir que es la batalla de las juntas, para un caso, muy relevantes, para el otro, invisibles.

5.3.1. Vivienda Burriana.

En la vivienda de la calle Burriana, el pavimento está cubierto de loseta hidráulica, que a través combinación de dos elementos geométricos (cuadrados y rectángulos) y el uso de color, consigue estructurar de manera visual el espacio. La disposición de las piezas facilita la comprensión de las diferentes estancias de la vivienda. Todos los pavimentos que encontramos en su interior son teselaciones regulares periódicas por ello no nos fijaremos en la tesela base que siempre será un cuadrado que cambia de color, sino que analizaremos el mosaico completo hasta extraer el motivo mínimo a partir del cual se genera todo el conjunto.

Este es el ejemplo de una vivienda que se pavimenta después de la compartimentación; otorgando singularidad a cada dependencia. Pero, como hemos dicho, esta singularidad tiene como contra la rigidez de las estancias y la imposibilidad de cambiar la organización de la vivienda.

Se accede a esta y el primer contacto con el pavimento es en el Hall (Fig. 77). Aquí se puede apreciar el sistema que se va a utilizar en el resto de la vivienda, la primera función del pavimento parece ser marcar el perímetro de los muros a través de unas piezas diferentes al resto de la composición, rectángulos, que permiten homogeneizar el mosaico formado por el pavimento con el muro y así evitar encuentros complicados. (recordamos el caso de la Lonja y de la plaza del doctor Collado).

Más tarde se dispone otro marco que repite la forma del anterior, pero esta vez con la tesela primitiva cuadrada que genera el mosaico. Tanto el marco perimetral como este que se resume en un desfase del anterior, lo que consiguen es dividir el espacio entre lo que he denominado zona de circulación y la zona umbral.

La zona de circulación como su nombre indica es un espacio de recorrido que enlaza las distintas estancias y permite el libre movimiento. Sin embargo, el espacio umbral hace referencia al espacio que se genera entre los muros y los marcos que rodean el dibujo del mosaico principal; su papel fundamental es comunicar con otras estancias y funciona como antesala de estas, pero a su vez también como espacio reservado para mobiliario y elementos fijos, mientras que la parte central del mosaico, donde se muestra su forma al completo, se destina a la circulación libre de la vivienda.

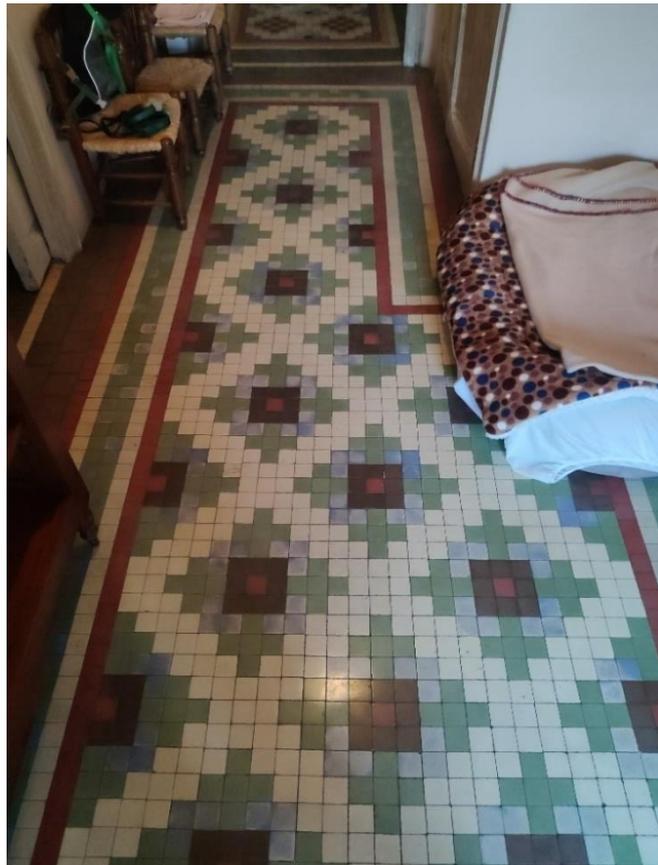


Figura 77: Hall vivienda calle Burriana.

El tipo de pieza que se utiliza en el hall es una loseta hidráulica cuadrada de 5 cm de lado, y se repite el mismo tipo de pieza y esquema en los siguientes espacios que se enlazan, tanto en el pasillo, como en el salón/comedor, aunque con una decoración distinta para establecer diferencias entre las estancias. Si analizamos el pavimento desde el mosaico que genera los cuadrados, y no desde el propio cuadrado, podemos decir que la tesela base es el triángulo y por lo tanto pertenece al grupo cristalográfico $p4m$ (Fig. 78).

Tesela base

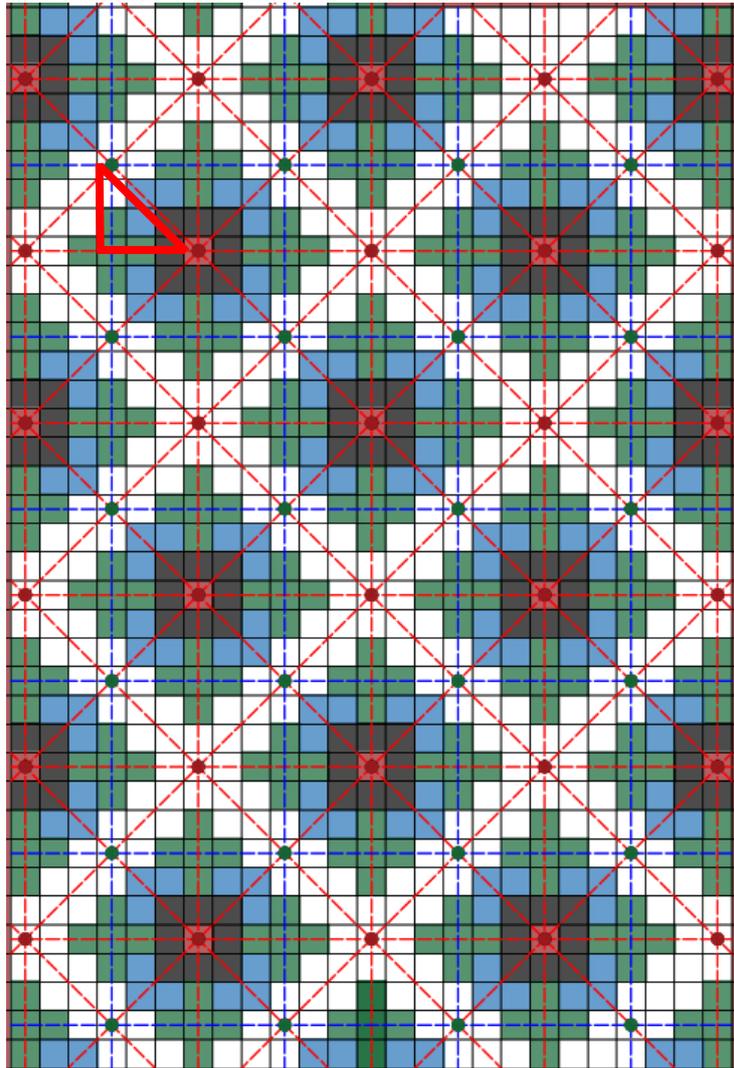
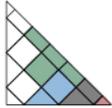


Figura 78: Análisis hall vivienda calle Burriana, grupo cristalográfico $p4m$.

Continuamos el recorrido a través del pasillo (Fig. 79) donde se utiliza el mismo sistema para teselar que el anterior. Analizando su estructura vemos que pertenece al grupo cristalográfico $p4m$ (Fig. 80).

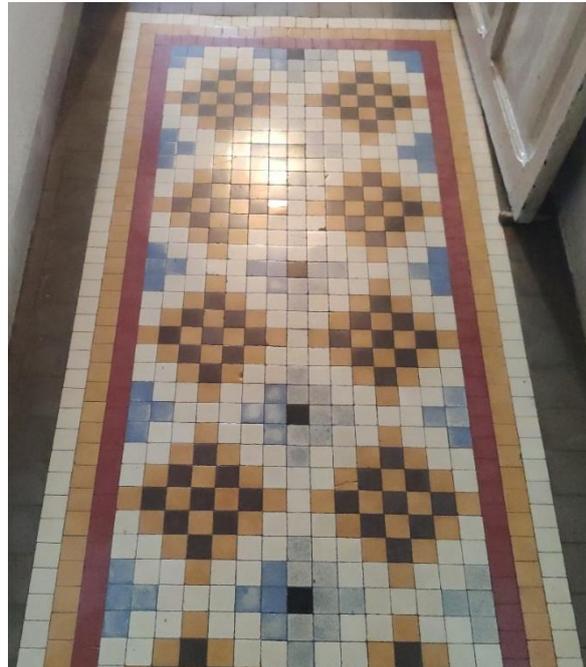


Figura 79: Pasillo vivienda calle Burriana

Tesela base

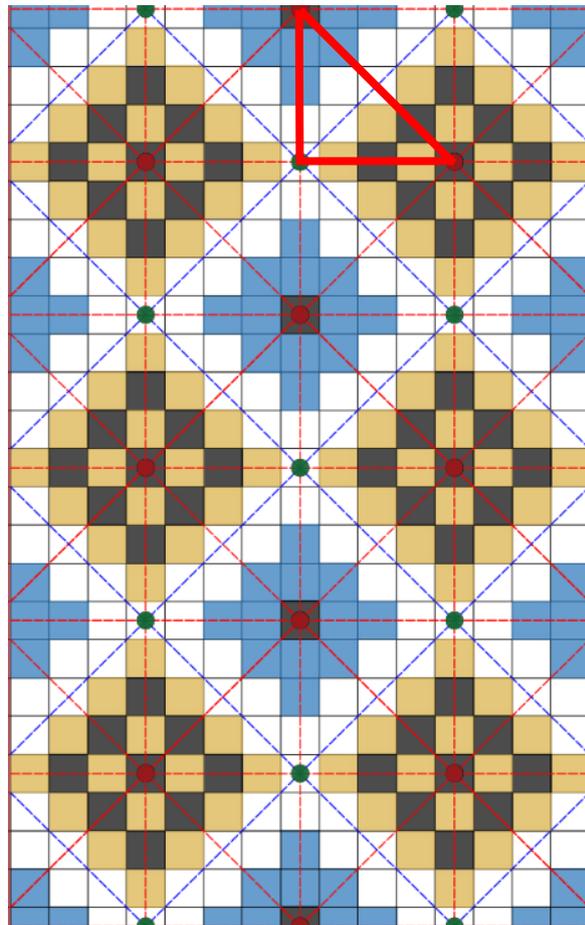


Figura 80: Análisis pasillo, grupo cristalográfico $p4m$.

Finalmente se desemboca en el Salón-comedor donde las piezas establecen dentro del propio espacio una zona central muy remarcada y con mucha presencia, que representa una de las partes más importantes de la vivienda como es la zona de estar, el lugar de reunión y centro neurálgico de la vivienda (Fig. 81).



Figura 81: Salón-comedor vivienda calle Burriana.

Siendo la parte central de la casa, la forma de teselar se encarga de resaltar esa importancia. Tenemos un entorno que es una teselación regular, y es en el mosaico interior donde se puede apreciar un grupo cristalográfico diferente a los anteriormente vistos, en este caso el p4 (Fig. 82).

Tesela base

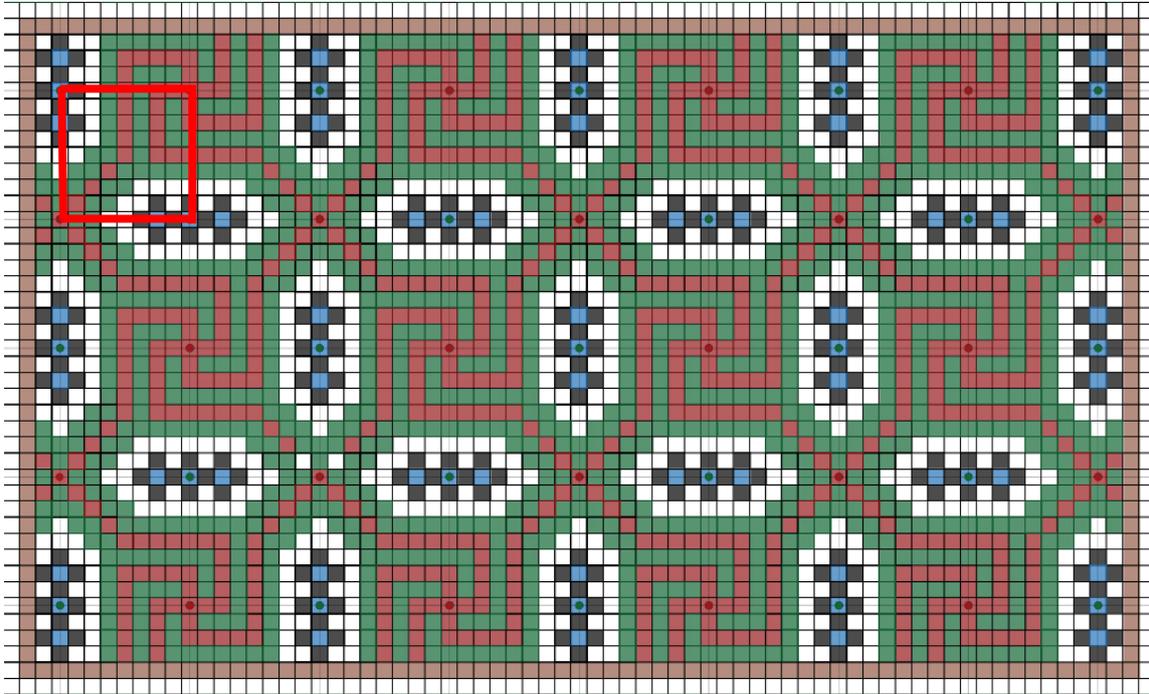
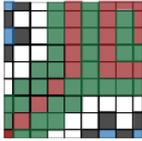


Figura 82: Análisis salón-comedor, grupo cristalográfico p4.

Continuando con la vivienda de la calle Burriana, hay que tener en cuenta el resto de estancias del hogar y si existe alguna particularidad respecto a las mencionadas anteriormente, ya que la función de estas es completamente diferente.

En el hall-pasillo-comedor la utilización de losetas cuadradas favorecen a remarcar las dos posibles direcciones que se pueden tomar en el hall y pasillo.

Sin embargo, cuando llegamos a las estancias más privadas, la forma de teselar el plano es diferente, continúa siendo una teselación regular periódica, pero en vez de cuadrados se utilizan piezas hexagonales. Esto ocurre en habitaciones y vestidor (Fig. 83), lugares donde el nivel de privacidad es diferente al del espacio común, es por eso que la forma de teselar distingue entre los espacios comunes y privados con dos pavimentos diferentes.

El lado del hexágono es dos veces la del cuadrado, esto genera mayor sensación de amplitud y a su vez eliminan las dos direcciones marcadas por los ejes del cuadrado, generando una sensación espacial de movimiento más exento.



Figura 83: Pavimentos hexagonales vivienda Burriana.

Pero sin duda una de las cosas más interesantes de cómo se pavimentan estos espacios es las diferentes formas que existen para teselar con el mismo tipo de pieza y a continuación se muestra su clasificación dentro de los grupos cristalográficos.

El dormitorio principal es la más espaciosa y el mosaico que se corresponde con esta es de grandes dimensiones. Se utilizan solo dos reflexiones para cubrir todo el espacio y pertenece al grupo cristalográfico pmm (Fig. 84), lo mismo ocurre en el dormitorio secundario (Fig. 85).

Es en la zona del vestidor donde encontramos otro grupo diferente que pertenece al grupo cristalográfico $p6m$ (Fig. 86).

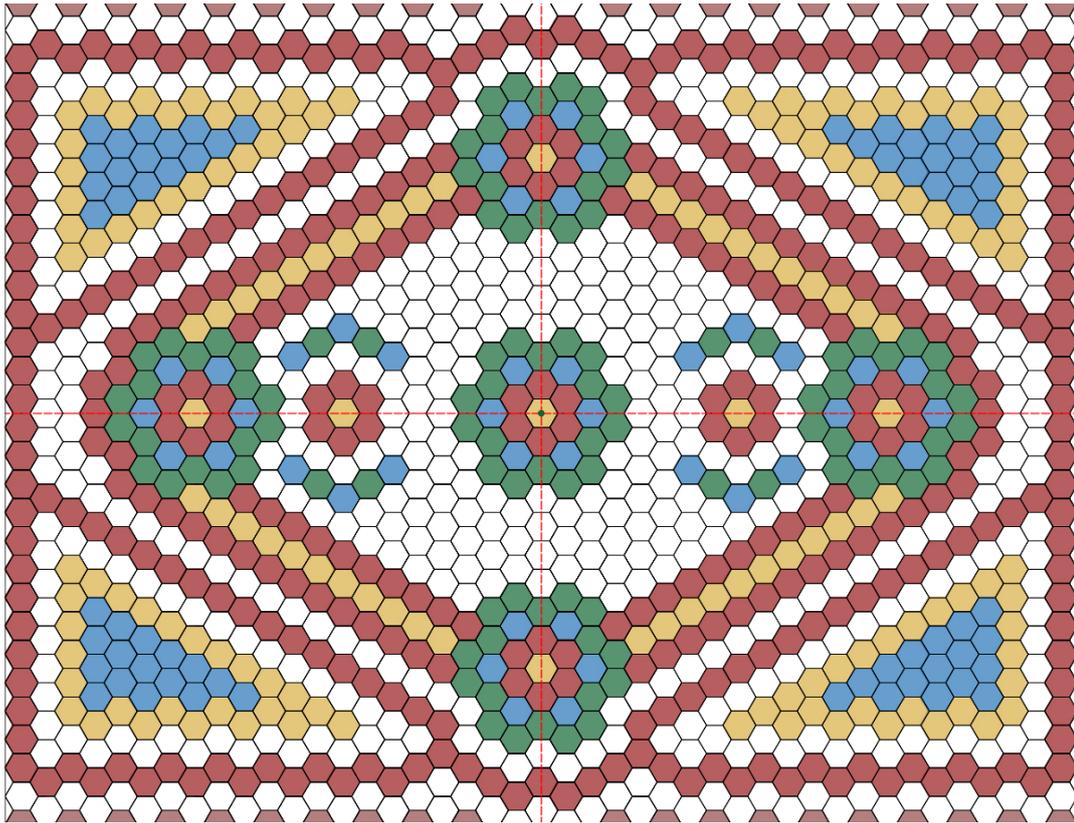


Figura 84: Análisis dormitorio principal, grupo cristalográfico pgg.

Tesela base

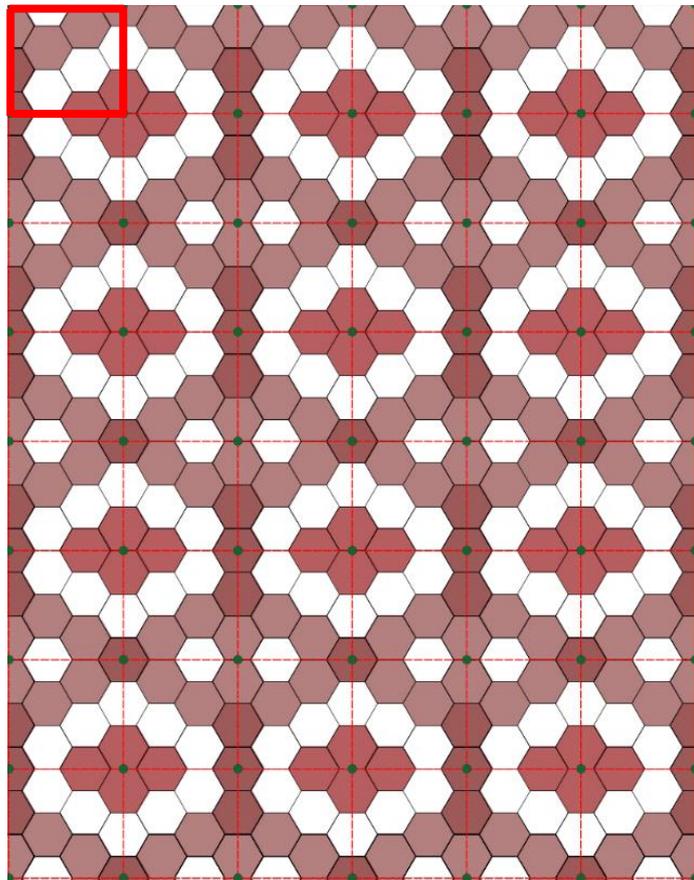
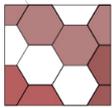


Figura 85: Análisis dormitorio secundario, grupo cristalográfico pgg.

Tesela base

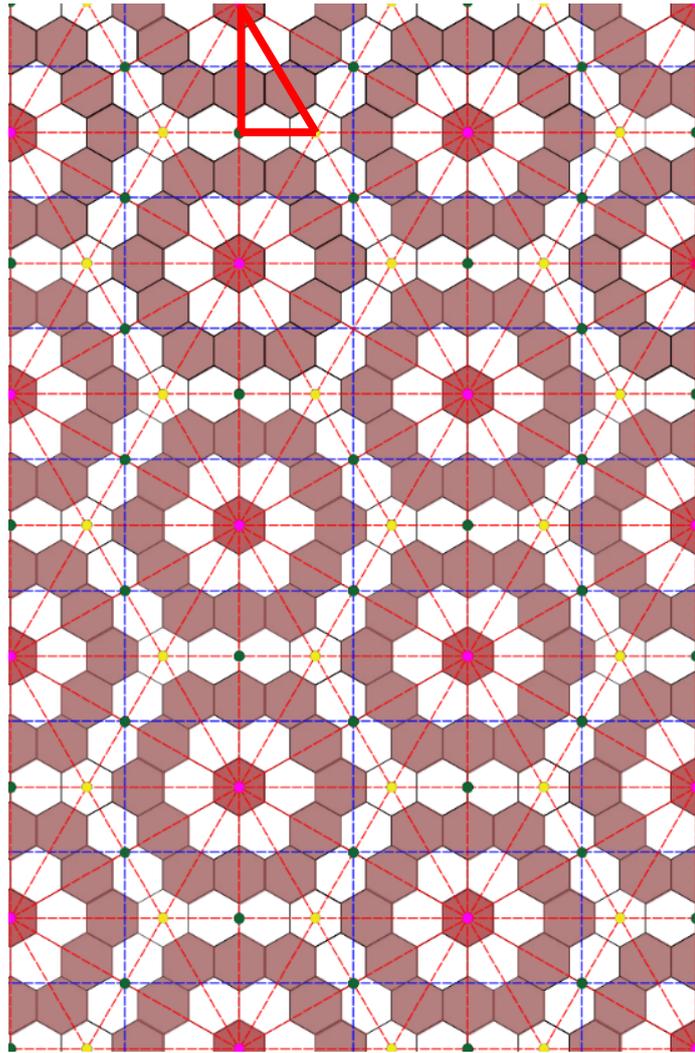
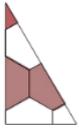


Figura 86: Análisis dormitorio secundario, grupo cristalográfico p6m.

5.3.2. Vivienda Sant Isidre.

Cuando se traslada este análisis a la vivienda contemporánea se puede apreciar cómo las nuevas formas de pavimentar relativizan la importancia que tiene el suelo a la hora de ordenar el espacio. A continuación, se muestra imágenes del Hall, Pasillo y Salón de la vivienda en San isidro (Fig. 87).

Este tipo de viviendas se compartimentan después de pavimentarlas; por ello se utilizan pavimentos corridos, iguales para toda la vivienda. El terrazo incluso hace desaparecer las juntas.



Figura 87: Estancias vivienda San Isidro.

En este caso el espacio que conforma cada estancia está estructurado y delimitado por los cerramientos, el suelo no juega ningún papel en la relación forma-función-espacio. El pavimento se percibe como una gran mancha que cubre toda la vivienda y que parece no involucrarse en la forma de habitar el espacio, simplemente decora.

Las diferencias entre la baldosa hidráulica y el terrazo radican en que se pavimenta toda la vivienda y luego se compartimenta. Se rejuntan las baldosas buscando una homogeneidad que incluso haga desaparecer las juntas.

La riqueza espacial que se consigue a través de las antiguas formas de pavimentar es asombrosa, la forma de tesar ayuda arquitectónicamente a organizar, estructurar y ordenar el espacio, sin embargo, con las nuevas tendencias a la hora de embaldosar el plano, el suelo ya no ayuda en la relación forma-función, se limita a ser recorrido.

Por un lado tenemos la flexibilidad, la industrialización y el precio, de los pavimentos actuales y por otro lado en el proceso antiguo de pavimentar aparecen conceptos como la identidad, el juego del color y la presencia del propio pavimento.

Con un ejercicio tan sencillo como el de dibujar la vivienda de la calle Burriana, se percibe rápidamente cómo el pavimento se coordina con la arquitectura para hacer del espacio algo único (Fig. 88). A través del dibujo se puede diferenciar cada estancia sin la necesidad de mobiliario, ni tabiques, incluso puedes llegar a hacerte una idea de cómo está organizada espacialmente la vivienda.



Figura 88: Mapa de pavimentos vivienda en la calle Burriana.

6. Objetivo de desarrollo sostenible.

El objetivo de desarrollo sostenible seleccionado es el número 12 que hace referencia a la producción y el consumo responsables. Como hemos comentado durante todo el trabajo, el trazado urbano de la ciudad evoluciona a medida que la sociedad cambia, aparecen nuevas formas de relacionarse con el entorno y en sociedad.

El crecimiento de la población ligada a la industrialización, supone un cambio importante en el territorio; pasamos de cubrir las necesidades mínimas de ciudad preindustrial a la explotación del territorio con la implantación de ensanches. Actualmente se construye por encima de las propias necesidades de la ciudad, se proyectan futuros barrios, se expande la ciudad sin límites, pero no hay una concienciación por rehabilitar el gran número de edificios que están obsoletos o abandonados. Esta rehabilitación de antiguos edificios y parcelas en desuso podría reactivar parte de la trama urbana olvidada de la ciudad, sin necesidad de la producción masiva de nuevos barrios.

Gran parte del trabajo también hace referencia a los materiales utilizados para pavimentar la ciudad, hay que avanzar en la búsqueda de nuevos materiales sostenibles que tengan un menor impacto sobre el planeta. El estudio del espacio público mejoraría la toma de decisiones a la hora de pavimentar las calles y plazas sin la necesidad de ir cambiando el pavimento cada cierto tiempo. Por otra parte, conviene reactivar la industria que permita la rehabilitación de pavimentos que mantengan la identidad de los tipos de asentamientos.

Hoy en día hay muchas maneras de estructurar los espacios, pero sin duda si utilizamos el pavimento como elemento organizador y catalizador de funciones, evitamos la producción de otros elementos verticales, (mobiliario, cerramientos) que pueden ser prescindibles si tratamos correctamente la teselación del plano horizontal (suelo). El suelo como elemento organizador es la forma más sostenible de estructurar el espacio.

7. Conclusión.

Una vez concluido el análisis de las teselaciones a distintas escalas urbanas se pueden sacar varias conclusiones al respecto.

En cuanto al **espacio público** queda patente la falta de análisis de la percepción espacial en muchas de las calles de Valencia. El suelo parece ser olvidado como un elemento organizador y se convierte en un plano horizontal con el único objetivo de ser recorrido. Con esto no se pretende que cada una de las vías públicas tengan algún tipo de caracterización o distinción frente al resto; como hemos visto en ejemplos anteriores solo se necesita un estudio del espacio que se genera entre los edificios, mobiliario, vegetación y el propio pavimento para poder desarrollar una solución adaptada a cada situación.

El simple hecho de colocar piezas a distintas escalas cambia por completo la forma en la que recorreremos la calle y las sensaciones que se nos transmite. Es cierto que cuando indagamos en las vías más concurridas de la ciudad, como puede ser la Plaza del Ayuntamiento vemos una preocupación por la manera en el que el pavimento estructura el espacio; el suelo adquiere una relevancia superior porque la teselación adquiere una serie de funciones.

Más tarde se habla de la arquitectura emblemática valenciana, en este caso La Lonja de Seda, en representación del **espacio semipúblico**. Este tipo de edificios nos ayudan a trasladarnos al pasado donde hay una mayor concienciación en cuanto a la importancia del suelo como elemento estructurador del espacio. Este ejemplo nos da una perspectiva y una visión crítica para poder concluir que la dirección en la que estamos llevando el tratamiento del suelo tiene déficits porque minimizamos cómo el pavimento en el pasado cumplía unas funciones organizativas más allá del propio embaldosado del suelo.

Esta cuestión del pasado tiene mucho que ver con la introducción de este trabajo, donde se habla de que vivimos en una sociedad con prisa, donde la impaciencia de la sociedad y la necesidad de inmediatez hacen olvidar aspectos importantes a tener en cuenta en muchos ámbitos y sobre todo en lo que nos atañe que es la arquitectura.

Esto se traslada finalmente a la escala más pequeña que es la vivienda, que es el último apartado a tratar, el **espacio privado**. Es clara la diferencia entre las viviendas “actuales” y las más antiguas en cuanto a los materiales utilizados para teselar y como el pavimento organiza el espacio. Sin duda los dos casos tienen pros y contras, por una parte, la rigidez que supone un suelo de loseta hidráulica, donde los espacios y las funciones están bien definidos y cada uno es diferente, pero esto supone la dificultad de transformar la distribución marcada por el pavimento. Por la otra parte tenemos pavimentos continuos que se colocan después de haberse distribuido la vivienda y que generan una mancha que se expande por toda la vivienda sin ningún tipo de objetivo organizativo o distribuidor.

Es difícil conseguir todas las ventajas que aportan los dos sistemas, pero hablando desde el punto de vista arquitectónico y la riqueza espacial, las viviendas que tratan el pavimento como un elemento que adquiere una función, que distribuye y organiza, son las que llevan la arquitectura a otro nivel sensorial respecto a la forma de habitar el lugar.

Pero sin duda una de las reflexiones más interesantes que se pueden extraer del trabajo radica en aprender a observar el entorno y tener la capacidad de analizarlo. Las matemáticas se transforman en una herramienta fundamental para saber cómo analizar y clasificar correctamente las teselaciones. Los conocimientos adquiridos nos permiten tener un punto de partida.

A partir del análisis de distintos casos, se va construyendo una visión crítica sobre cómo el pavimento estructura el espacio y su relación con el entorno. **El arquitecto** adquiere una nueva perspectiva sobre las posibilidades que tiene el teselado de disponer el espacio y cómo manejar todas las variantes que surgen en el proceso. La organización y el tipo de pavimento no es una elección más del proyecto, sino que tiene la capacidad de convertirse en el germen de este.

Se trata en definitiva de colocar sobre la mesa del arquitecto la variante del pavimento, que parece olvidado con el paso del tiempo debido a la poca reflexión, y la estandarización de las viviendas y el espacio público. Pero queda evidenciado que cuando el pavimento juega un papel relevante dentro del proyecto, adquiriendo una función, la arquitectura, o mejor dicho los espacios, mejoran la forma de ser percibidos, recorridos y habitados.

8. Bibliografía.

Gómez Tato, A. (2009). Mosaicos: de la Alhambra a la sartén antiadherente. (Tesis de grado).

Hales, T. (2001). The Honeycomb Conjecture. *Discrete Comput Geom* 25, 1–22.

<http://www.acorral.es/mosairre.htm>

Lahuerta, J. (2015). *Carme Pinós: arquitecturas*. Gustavo Gili.

Rivera Herráez, R. J., & Trujillo Guillen, M. (2015). El urbanismo de las matemáticas (I). *Levante. El mercantil valenciano*.

Rivera Herráez, R. J., & Trujillo Guillen, M. (2016). Matemáticas urbanas. *Suma*, 81, 21-31.

Rodríguez Silvestre, M. (2010). Generación de teselaciones periódicas: Grupos cristalográficos. (Tesis de grado).

Salguero, J. (1994). Teselaciones periódicas, aperiódicas y especiales. *Suma*, 14, 27-34.