

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



FUNCIÓN DE GREEN PARA
LA ECUACIÓN HIPERBÓLICA
DE TRANSMISIÓN DEL CALOR

TESIS DOCTORAL

Presentada por:

Macarena Trujillo Guillén

Dirigida por:

Dr.D. Juan Antonio López Molina

Valencia, febrero de 2005

A mis abuelos

Agradecimientos

Son muchas las personas que directa o indirectamente han colaborado en la realización de este trabajo y me gustaría dar las gracias a todas ellas.

Especialmente me gustaría agradecer a mi director, el profesor D. Juan Antonio López Molina, su gran ayuda y apoyo brindado, porque gracias a él he podido descubrir y empezar a dar los primeros pasos en el mundo de la investigación. Él me ha enseñado a ver las matemáticas desde otro punto de vista, motivándome y animándome en todo momento. Gracias por el esfuerzo y la entrega en la realización de este trabajo.

También me gustaría dar las gracias a mi familia. En particular a mis padres porque sin ellos no hubiera podido llegar hasta aquí, ellos me han dado los medios y el ánimo necesario para continuar estudiando. También a mis hermanos, por su confianza en todo momento. Y especialmente a Ismael porque ha vivido y sentido este trabajo muy de cerca, estando conmigo en los momentos buenos y en los no tan buenos, siendo un pilar clave en todo el proceso y siempre dándome todo su apoyo.

Gracias a los profesores D. Félix Martínez Giménez y Dña. M^a José Rivera Ortún por su colaboración que en muchas ocasiones he necesitado y que siempre han estado dispuestos a ofrecerme. Y también gracias a los demás miembros de mi grupo de investigación “Espacios de Fréchet”, especialmente al profesor D. José Bonet Solves.

Por último me gustaría dar las gracias a la profesora Dña. Beatriz Ricarte Benedito, mi compañera de despacho, tanto por su ayuda a nivel técnico como moral.

Resumen

En esta memoria se recoge fundamentalmente el estudio, bajo el punto de vista del modelo hiperbólico de transmisión del calor, de un problema de transmisión del calor basado en el procesado de materiales mediante pulsos de láser de alta intensidad y tiempos de aplicación muy cortos.

Este tipo de problemas lleva asociado el desarrollo de un riguroso estudio matemático para la ecuación hiperbólica de transmisión del calor que nos permita establecer los fundamentos teóricos para el cálculo de temperaturas desde el punto de vista del modelo hiperbólico en diversos problemas de transmisión del calor, incluyendo aquellos en los que las condiciones iniciales y de contorno o las fuentes internas de calor estén dadas por distribuciones irregulares. La base del tratamiento matemático que vamos a desarrollar se encuentra fundamentalmente en el estudio y determinación de la función de Green del problema de Neumann para la ecuación hiperbólica de transmisión del calor.

A continuación se recoge también en esta memoria el estudio de la respuesta térmica de dos cuerpos que inicialmente se encuentran a temperaturas diferentes y que a partir del instante inicial se ponen súbitamente en contacto, nuevamente bajo el punto de vista del modelo hiperbólico de transmisión del calor. El problema se resuelve suponiendo dos tipos de contacto entre los cuerpos: contacto directo y contacto con resistencia.

Resum

En aquesta memòria apleguem fonamentalment l'estudi, des del punt de vista del model hiperbòlic de transmissió del calor, d'un problema de transmissió del calor basat en el processament de materials mitjançant polsos de làser de forta intensitat i temps d'aplicació molt curts.

Aquest tipus de problemes porta associat el desenvolupament d'un rigorós estudi matemàtic per a l'equació hiperbòlica de transmissió del calor que ens permet establir els fonaments teòrics pel càlcul de temperatures des del punt de vista del model hiperbòlic en diversos problemes de transmissió de calor, incloent aquells en els quals les condicions inicials i de contorn o les fonts internes de calor esten donades per distribucions irregulars. La base del tractament matemàtic que anem a desenvolupar es troba fonamentalment en l'estudi i determinació de la funció de Green del problema de Neumann per a l'equació hiperbòlica de transmissió del calor.

A continuació s'aplega també en aquesta memòria l'estudi de la resposta tèrmica de dos cossos que inicialment es troben a diferent temperatura i de sobte es posen en contacte, de nou baix el punt de vista del model hiperbòlic de transmissió del calor. El problema es resolt suposant dos tipus de contacte entre els cossos: contacte directe i contacte amb resistència.

Abstract

In this work we mainly study, from the point of view of the hyperbolic heat conduction model, a heat conduction problem based on the processing of materials by irradiation with a laser beam of high intensity and very short application times.

This kind of problems carry the development of a rigorous mathematical study of the hyperbolic heat conduction equation in order to provide the theoretical foundations for temperatures computation, from the point of view of hyperbolic model, in different heat conduction problems, including those whose initial and boundary conditions or internal heat forces are given by non regular distributions. The base of the mathematical treatment that we are going to develop is mainly found in the study and computation of the Green's function of the Neumann problem for the heat conduction equation.

Below, we also include the study of a problem based on the heat conduction between two bodies that initially are at different temperatures and suddenly are placed together in contact, again from the point of view of the hyperbolic model. The problem is solved supposing perfect contact between bodies and contact with resistance.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	7
1.1. Ecuación hiperbólica de transmisión del calor	7
1.2. Notación	10
1.3. Espacios de Sobolev	11
1.4. Espacios $\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$ y $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$	17
1.5. Espacios $J^k(\partial\Omega \times]0, T[)$	22
1.6. Espacios funcionales con dominios temporales no acotados	23
1.7. Algunos resultados previos	24
2. Teoremas de existencia, unicidad y regularidad para el problema adjunto con datos regulares	33
2.1. Resultados auxiliares	34
2.2. Teoremas de existencia, unicidad y regularidad	47
3. Resultados complementarios sobre la regularidad de las soluciones del problema de Neumann con datos regulares	57
3.1. Un teorema de regularidad	58
4. Trazas de las soluciones de la ecuación hiperbólica de transmisión del calor	69
4.1. Trazas sobre la frontera de un cilindro finito $\Omega \times]0, T[$	70
4.2. Trazas sobre la frontera de un cilindro infinito $\Omega \times]0, \infty[$	80

5. Teoremas de existencia, unicidad y regularidad de las soluciones en el caso de datos irregulares	87
5.1. Generalizaciones de la fórmula de Green clásica	88
5.2. Teoremas de existencia y unicidad para las soluciones en el caso de datos irregulares	94
5.3. Propiedades de regularidad de las soluciones fundamentales del operador \mathcal{A}	99
6. Función de Green del problema de Neumann para la ecuación anisótropa hiperbólica de transmisión del calor	111
6.1. Definiciones	112
6.2. Existencia y unicidad de la función de Green	113
6.3. Fórmula de reciprocidad y aplicaciones	126
7. Función de Green en una banda tridimensional	139
7.1. Preliminares	140
7.2. Existencia y unicidad de la función de Green en una banda	142
7.3. Cálculo de la función de Green	150
8. Perfil hiperbólico de temperaturas en una banda irradiada por un láser	157
8.1. Planteamiento del problema	158
8.2. Aplicación de la función de Green	161
8.3. Representaciones gráficas	163
8.4. Comparación con el modelo parabólico	167
9. Perfil hiperbólico de temperatura de dos cuerpos en contacto perfecto	173
9.1. Planteamiento y solución del problema	174
9.2. Solución del problema suponiendo $\tau_1 = \tau_2$	181
9.3. Discusión de la solución	182
9.4. Comparación con el modelo parabólico	187
10. Temperatura hiperbólica de dos cuerpos en contacto con resistencia	191
10.1. Planteamiento y solución del problema	192
10.2. Discusión de la solución	198

10.3. Comparación con el caso de contacto perfecto	200
10.4. Comparación con el modelo parabólico	203

Introducción

El modelo parabólico de transmisión de calor está basado en la ley de Fourier

$$q(\mathbf{x}, t) = -k \nabla T(\mathbf{x}, t) , \quad (1)$$

donde q es el flujo de calor, k la conductividad térmica del material, T la temperatura, \mathbf{x} el vector de posición y t el tiempo. Esta ecuación da lugar a una ecuación diferencial de tipo parabólico que se conoce como ecuación clásica o parabólica de transmisión del calor (ver [26])

$$\frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \alpha \Delta T(\mathbf{x}, t) , \quad (2)$$

donde $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ es la difusividad del material y suponemos k , c (calor específico) y ρ (densidad) constantes.

Desde principios del siglo XX era conocido que el modelo parabólico conduce a dos conclusiones físicamente inaceptables como son la transmisión del calor con velocidad infinita y la existencia de flujos de valor infinito. Sin embargo, a pesar de estos inconvenientes el modelo parabólico se siguió utilizando dado que en las aplicaciones ordinarias a la Ingeniería los resultados previstos por la teoría concordaban muy bien con la experiencia, de modo que la necesidad de mejorar la formulación de la ecuación del calor sólo fue sentida por los físicos teóricos.

Sin embargo, a partir del desarrollo de nuevas tecnologías en las que a los materiales se les aplican grandes cantidades de calor en pequeños intervalos de tiempo (como por ejemplo el uso cada vez más frecuente de pulsos de láser en el procesado de materiales a partir de la década de los 60) se ha dado lugar a nuevas situaciones físicas en las que existen disparidades graves entre los resultados obtenidos teóricamente y

la experiencia. Este hecho ha promovido la necesidad de un nuevo modelo alternativo de transmisión del calor llamado modelo hiperbólico que predice una velocidad finita de transmisión del calor así como la existencia de flujos de valor finito.

Podemos poner el punto de partida del modelo hiperbólico en los antiguos trabajos de 1867 de Maxwell [22] sobre la teoría cinética de los gases. Estos trabajos tuvieron gran influencia en las ideas iniciales, ya que la transferencia del momento cinético a través de las colisiones entre moléculas sugería un posible mecanismo para la transmisión del calor con velocidad finita mediante ondas. Estas conjeturas recibieron un fuerte impulso tras los espectaculares trabajos experimentales de Peshkov [29] en 1944, que probó que el calor se transmitía en el helio líquido a $1.4 K$ con una velocidad de $19 \frac{m}{s}$.

A partir de este momento diferentes teóricos (Morse y Feshbach [24], Vernotte [35], [36] y Cattaneo [6]) *postularon* con más o menos fundamento intuitivo una ecuación del calor basada en una modificación de la ley de Fourier que eliminaba las paradojas del modelo clásico pero introducía un aspecto repelente a primera vista cual es el carácter ondulatorio de la propagación del calor. A pesar de todo, el fenómeno de la existencia de ondas térmicas *quedó fundamentado físicamente de manera firme* por primera vez con los estudios sobre el estado sólido de Chester [8] en 1963 y Weymann [39] en 1967, que demostraron la velocidad finita de transmisión del calor desde un punto de vista microscópico, y con otras aportaciones teóricas procedentes de la teoría de la relatividad (Kelley [15], 1968 y Van Kampen [34], 1970).

Llegados a este punto podemos decir que el modelo hiperbólico de transmisión del calor está basado en una ecuación en derivadas parciales de tipo hiperbólico (ver [27])

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = \alpha \Delta T(\mathbf{x}, t) , \quad (3)$$

donde a τ se le llama parámetro de relajación. τ es una característica del material, que suponemos constante, que expresa el tiempo que tarda el calor en transmitirse y producir el flujo (ver [27]). Esta nueva ecuación de transmisión del calor no parte de la ley de Fourier como ya hemos anticipado, sino de la ley de Forier modificada

$$q(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial q}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = -k \nabla T(\mathbf{x}, t) , \quad (4)$$

en la que se entiende que el flujo de calor no se produce en el instante t en el que se calcula el gradiente de temperaturas, sino en un instante posterior $t + \tau$.

Nuestra andadura en el estudio del modelo hiperbólico de transmisión del calor comenzó con el trabajo final de carrera titulado *Teoría hiperbólica de transmisión del calor* (realizado por Macarena Trujillo Guillén) dirigido por el Dr. D. Juan Antonio López Molina. Este trabajo tenía como objetivo recopilar cierta información sobre el nuevo modelo de transmisión del calor. Una vez finalizado este trabajo comenzamos a trabajar en el desarrollo de nuestra Tesis doctoral. Empezamos con el problema de la determinación del perfil hiperbólico de temperaturas de dos cuerpos que se encuentran a diferentes temperaturas y súbitamente se ponen en contacto. El estudio se realizó primero suponiendo que el contacto entre los dos cuerpos era perfecto y en segundo lugar calculamos el perfil de temperaturas de ambos cuerpos suponiendo que existía cierta resistencia al contacto. En los capítulos 9 y 10 de esta memoria se recoge el planteamiento, resolución y resultados de este estudio.

A continuación nos propusimos estudiar, desde el punto de vista del modelo hiperbólico de transmisión del calor, la respuesta térmica que se produce en los materiales a los que se aplican pulsos de láser de alta intensidad y tiempos de aplicación muy cortos. Normalmente la formulación de este tipo de problemas implica el estudio de un problema de Neumann con condiciones de contorno dadas por distribuciones irregulares como la función de Heaviside o la δ de Dirac. Sin embargo, a pesar de ser problemas tan “complejos” en la mayoría de los casos los cálculos de temperaturas se llevan a cabo de modo puramente formal sin realizar razonamientos teóricos ni justificar la validez de los pasos realizados en el cálculo. Completar rigurosamente estos detalles teóricos resultó ser mucho más largo y difícil de lo pensado inicialmente, ya que nos enfrentábamos a una nueva ecuación diferencial en derivadas parciales poco estudiada teóricamente y con datos irregulares. Cuanto más nos acercábamos a los aspectos esenciales del problema más recursos necesitábamos del Análisis Funcional.

De hecho, las dificultades surgidas fueron tan grandes que nos convencimos de que la Tesis había cambiado radicalmente su enfoque. Ha-

bíamos empezado pensando en hacer cálculos bien fundamentados con la ecuación hiperbólica del calor, pero el problema se había convertido en una cuestión de Análisis Funcional puro, aunque aplicado a teoremas de existencia, unicidad y regularidad de las soluciones de ciertas ecuaciones en derivadas parciales.

Globalmente, el primer objetivo que nos hemos propuesto en esta memoria es el desarrollo de un tratamiento matemático riguroso para la ecuación hiperbólica de transmisión del calor que nos permita establecer los fundamentos teóricos para la manipulación formal en el cálculo de temperaturas desde el punto de vista del modelo hiperbólico en diversos problemas de transmisión del calor, incluyendo aquellos en los que las condiciones de contorno estén dadas por distribuciones irregulares.

El segundo objetivo global se centra fundamentalmente en el estudio de la función de Green del problema de Neumann para la ecuación hiperbólica de transmisión del calor. Estos objetivos generales se concretarán a través de los siguientes objetivos particulares:

- Encontrar teoremas de existencia, unicidad y regularidad para las soluciones del problema adjunto de Neumann para la ecuación hiperbólica del calor no isótropa ni homogénea en el caso de coeficientes infinitamente diferenciables hasta la clausura $\bar{\Omega}$ del dominio espacial en (1.4) con datos regulares. (capítulo 2).
- Demostrar algunos resultados de regularidad de las soluciones complementarios a los probados en el capítulo 2 (capítulo 3).
- Estudiar las trazas de los elementos de $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$ sobre la frontera $\partial\Omega \times]0, T[$ y sobre las secciones transversales de $\Omega \times]0, T[$ y su comportamiento cuando $T \rightarrow \infty$ (capítulo 4).
- Encontrar teoremas de existencia, unicidad y regularidad para las soluciones del problema de Neumann de la ecuación hiperbólica de transmisión del calor en cuerpos anisótropos y con fuentes internas de calor o condiciones iniciales y de contorno irregulares (capítulo 5).

- Probar la existencia y unicidad de la función de Green para el problema de Neumann asociado a los operadores \mathcal{A} definidos en el capítulo 1 (capítulo 6).
- Mostrar la existencia y unicidad de la función de Green del problema de Neumann para la ecuación hiperbólica de transmisión del calor para cuerpos isotrópicos y homogéneos con simetría axial en el caso de una banda no acotada $\Omega_L := \mathbb{R}^2 \times]0, L[$ en \mathbb{R}^3 , $0 < L < \infty$, proporcionando además un completo cálculo analítico de la misma (capítulo 7).
- Resolver, desde el punto de vista del modelo hiperbólico, el problema de transmisión del calor en una banda irradiada por un haz de láser con un perfil espacial y temporal concreto (capítulo 8).

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos la motivación física que nos conduce a considerar el tipo general de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que estudiaremos en la memoria. A continuación establecemos la notación utilizada y definimos los espacios funcionales que usaremos, así como algunos resultados generales sobre los mismos.

1.1. Ecuación hiperbólica de transmisión del calor

La ecuación hiperbólica de transmisión del calor es cada vez más importante en algunas aplicaciones industriales que implican la aplicación de grandes cantidades de calor en pequeños intervalos de tiempo, como por ejemplo en el procesado de materiales por irradiación con láser de alta intensidad y tiempos de aplicación muy cortos.

Normalmente la formulación de este tipo de problemas es complicada. Por un lado, dicha formulación implica el estudio de un problema mixto de Neumann con condiciones de contorno dadas por distribuciones irregulares como pueden ser por ejemplo la función de Heaviside $H(u)$ o la delta de Dirac $\delta(u)$. Por otro lado, los materiales industriales reales frecuentemente no son ni homogéneos ni isótropos (ver por ejemplo [37] para algunos ejemplos concretos), lo que supone el manejo de una ecuación hiperbólica de transmisión del calor muy complicada tal

y como detallamos a continuación.

Si el material es homogéneo e isótropo y existen fuentes de calor internas $S(\mathbf{x}, t)$, la ecuación hiperbólica de transmisión del calor es

$$-\Delta T(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \right) = \frac{1}{\alpha c} \left(S(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right). \quad (1.1)$$

Por otra parte, en muchos problemas prácticos se sabe de antemano que las soluciones deben tener simetría axial. Si queremos que la solución del problema tenga simetría axial y existen fuentes internas de calor que también son simétricas, la ecuación que tenemos que resolver no es tan simple como (1.1) sino que sería la siguiente

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}, t)(T) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \right) - \frac{1}{\alpha c} \left(S(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (1.2)$$

donde \mathcal{S} es el operador diferencial

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \\ & + \frac{2xy}{x^2 + y^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

en la que aparte de la complejidad de la ecuación aparece el problema del punto singular $(0, 0)$ en los coeficientes de la ecuación y lo que es más grave, la pérdida de la elipticidad en todo plano $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, si el material es homogéneo pero no isótropo la ecuación (1.1) no es válida ya que en este caso hay que suponer que la conductividad del material k depende de la dirección considerada. Así, teniendo en cuenta la relación entre α y k (a la que hacemos referencia en la introducción) y suponiendo ρ y c constantes para evitar más complicaciones, la ecuación (1.1) tiene que reemplazarse por

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}, t) + \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \right) = \\ = \rho \left(S(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (1.3) \end{aligned}$$

siendo (k_{ij}) , $i, j = 1, 2, 3$, el tensor de la conductividad térmica del cuerpo. Físicamente no está muy claro si $(k_{ij}) = (k_{ji})$ (ver por ejemplo [25]). Sin embargo, desde el punto de vista matemático se puede suponer que los coeficientes k_{ij} que aparecen en la ecuación (1.3) siempre verifican la condición de simetría $k_{ij} = k_{ji}$ para cualquier subíndice $i, j = 1, 2, 3$. De hecho es suficiente con señalar que

$$\forall i, j = 1, 2, 3 \quad k_{ij} = \frac{k_{ij} + k_{ji}}{2} + \frac{k_{ij} - k_{ji}}{2},$$

y si sustituimos este valor de k_{ij} en la ecuación (1.3), los términos que contienen a los factores $\frac{k_{ij} - k_{ji}}{2}$ desaparecen. De manera que definiendo $k'_{ij} = \frac{k_{ij} + k_{ji}}{2}$ obtenemos una ecuación del tipo (1.3) pero en este caso en función de k'_{ij} , que obviamente verifica $k'_{ij} = k'_{ji}$.

Finalmente si el material no es ni homogéneo ni isótropo tenemos que reemplazar la ecuación (1.1) por una todavía mucho más complicada (ver [7])

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 k_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \right) + \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \right) = \\ = \rho \left(S(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

en la que como puede observarse la conductividad ya no depende sólo de la dirección considerada sino también de la posición. Al igual que en la ecuación (1.3) también supondremos que $k_{ij}(\mathbf{x}) = k_{ji}(\mathbf{x})$.

En el caso de las ecuaciones (1.3) y (1.4) la conservación de la segunda ley de la termodinámica implica que

$$\forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \quad \forall (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \neq 0 \quad \sum_{i,j=1}^3 k_{ij}(\mathbf{x}) \eta_i \eta_j > 0,$$

lo que significa que el operador diferencial “espacial” de cada una de estas ecuaciones sea fuertemente elíptico en el dominio Ω del material del cuerpo.

Después de las explicaciones dadas está claro que el marco natural para estudiar estas cuestiones es considerar un operador general que cubra simultáneamente las ecuaciones (1.1), (1.3) y (1.4) de manera

que los resultados se prueben una s3la vez y sean aplicables para todos los casos. As3 consideraremos en general, el operador \mathcal{A} (que incluye todos estos casos)

$$\mathcal{A} := \mathcal{X} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \quad (1.5)$$

donde

$$\mathcal{X} := \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \left(a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \mathbf{x}^\beta} \right)$$

es un operador fuertemente el3ptico en $\bar{\Omega}$ con coeficientes reales $a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ que cumplen la condici3n de simetr3a $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$. Debido a la verificaci3n de esta condici3n es f3cil comprobar que \mathcal{X} es autoadjunto. El operador adjunto formal de \mathcal{A} es

$$\mathcal{A}^* := \mathcal{X} + \frac{1}{\alpha} \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right).$$

El caso del operador (1.2) no est3 cubierto por el anterior operador \mathcal{A} y ser3 estudiado espec3ficamente en el cap3tulo 7.

1.2. Notaci3n

En general nuestra notaci3n es est3ndar. \mathbf{x} denota el vector posici3n de un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ o $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y \mathbf{e}_i ser3 el vector unitario can3nico del eje i . Trabajaremos con conjuntos cil3ndricos abiertos $\Omega \times]0, T[\subset \mathbb{R}^{n+1}$, donde $T > 0$ determina el intervalo temporal del problema. En ocasiones tambi3n trabajaremos con intervalos temporales del tipo $] -T, T[$, *teniendo en cuenta que los resultados obtenidos suponiendo uno de los dos intervalos temporales pueden aplicarse directamente al otro mediante un sencillo cambio de variable temporal*. En relaci3n a los dominios espaciales, a menos que se especifique lo contrario, *todos los dominios o conjuntos abiertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$ considerados ser3n acotados y su frontera $\partial\Omega$ ser3 una variedad de clase C^∞ de dimensi3n $n - 1$, de modo que los puntos interiores de Ω estar3n localmente en un s3lo lado de dicha frontera $\partial\Omega$* . Denotaremos por \mathbf{n} al vector unitario exterior normal a $\partial\Omega$ y por $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \nabla U(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$ a la

derivada direccional de $U(\mathbf{x})$ en la dirección de \mathbf{n} en el punto \mathbf{x} . Para las derivadas emplearemos la notación usual de multi-índices.

Sobre la frontera $\partial\Omega \times]0, T[$ consideraremos el operador

$$\mathfrak{A} := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i) \frac{\partial}{\partial x_i} : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega) \quad (1.6)$$

con coeficientes f, g_1, g_2, \dots, g_n en $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Como estamos interesados en las soluciones reales de los operadores diferenciales utilizados, la variable compleja sólo se utilizará como una herramienta técnica. Por ello, todas las funciones y espacios vectoriales se suponen reales excepto cuando el contexto determine explícitamente lo contrario.

Si tenemos un espacio de Hilbert Y y un espacio de Banach reflexivo X tal que verifican las inclusiones continuas $X \subset Y \subset X'$, siendo X denso en Y , se dice que (X, Y, X') es un triple de Guelfand. La consecuencia más importante de esta definición es que Y también es denso en X' (ver por ejemplo [41], sección §17.1). Los triples de Guelfand aparecen frecuentemente en el estudio teórico de las ecuaciones en derivadas parciales. A lo largo de este capítulo vamos a definir algunos triples de Guelfand adecuados para investigar las propiedades de las soluciones de la ecuación hiperbólica de transmisión del calor. Algunos de ellos son conocidos y otros son específicos para nuestros propósitos.

Respecto a los espacios ponderados usaremos las notaciones siguientes. Dada una función real medible $g : \Omega \longrightarrow]0, \infty[$ y un espacio de Banach E definimos

$$L^2(\Omega, g) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es medible y } \left\| f g \right\|_{L^2(\Omega)} < \infty \right\}$$

y su versión vectorial

$$L^2(\Omega, g, E) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow E \mid f \text{ es medible y } \left\| \|f\| g \right\|_{L^2(\Omega)} < \infty \right\}.$$

1.3. Espacios de Sobolev

Trabajaremos con espacios de Sobolev. Toda la información necesaria sobre los espacios de Sobolev $H^r(\Omega)$, $H_0^r(\Omega)$ y el espacio dual

de este último, denotado por $H^{-r}(\Omega)$, para cualquier índice $r \in]0, \infty[$ puede encontrarse en [19]. Creemos oportuno destacar que r es un parámetro positivo arbitrario, ya que **tendremos necesidad** de utilizar espacios de Sobolev de tales órdenes. Estos espacios se definen de forma usual mediante interpolación por el método complejo entre espacios de Sobolev de orden entero. Como es sabido, esta técnica de construcción es muy complicada. Queremos destacar que en nuestro trabajo **no podemos prescindir** de ellos por un motivo principal:

Como estamos interesados en problemas de contorno con distribuciones “irregulares” o “extrañas” (una forma de decir que no se reducen a funciones ordinarias), **necesitaremos controlar de algún modo los espacios que contienen las trazas de nuestras soluciones** para delimitar el conjunto de condiciones de contorno que es razonable utilizar en el planteamiento de nuestros problemas. De este modo caemos inevitablemente en el uso de espacios de interpolación.

Citamos la siguiente caracterización de $H_0^r(\Omega)$ (ver [19]) que nos será necesaria

Proposición 1.1. *Sea $r > \frac{1}{2}$. Si $u \in H^r(\Omega)$ entonces $u \in H_0^r(\Omega)$ si y sólo si $\frac{\partial^k u}{\partial \mathbf{n}^k}(\mathbf{x}) = 0$ en $\partial\Omega$ para cada $0 \leq k < r - \frac{1}{2}$.*

Para distinguir los papeles de la variable espacial $\mathbf{x} \in \Omega$ y de la variable temporal $t \in]0, T[$, $T > 0$ utilizamos el espacio de Sobolev anisótropo $H^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$ definido de la siguiente forma

$$\forall r, s \in \mathbb{N} \quad H^{r,s}(\Omega \times]0, T[) := H^s(]0, T[, L^2(\Omega)) \cap L^2(]0, T[, H^r(\Omega)), \quad (1.7)$$

dotado con la norma

$$\|f\|_{H^{r,s}(\Omega \times]0, T[)} = \left(\|f\|_{H^s(]0, T[, L^2(\Omega))}^2 + \|f\|_{L^2(]0, T[, H^r(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(que es equivalente a la norma estándar de la intersección de dos espacios de Banach). Necesitaremos también el subespacio $H_{0,0}^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$ de $H^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$ formado por la clausura de $\mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)$ en $H^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$ y los espacios

$$H_{0,0}^{r,s}(\Omega \times]0, T[) := H^s(]0, T[, L^2(\Omega)) \cap L^2(]0, T[, H_0^r(\Omega)),$$

$$H_{,0}^{r,s}(\Omega \times]0, T[) := H_0^s(]0, T[, L^2(\Omega)) \cap L^2(]0, T[, H^r(\Omega)).$$

El dual topológico de $H_{0,0}^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$ se denota por $H^{-r,-s}(\Omega \times]0, T[)$. Hay que darse cuenta que las definiciones anteriores también tienen sentido en el caso límite $T = \infty$.

Un hecho importante a resaltar aquí es que si $U \in H^{-r,-s}(\Omega \times]0, T[)$ donde $T \in]0, \infty]$, entonces, para cada $0 < T' < T$ tenemos $R_{T'}(U) \in H^{-r,-s}(\Omega \times]0, T'[)$ y

$$\left\| R_{T'}(U) \right\|_{H^{-r,-s}(\Omega \times]0, T'[)} \leq \left\| U \right\|_{H^{-r,-s}(\Omega \times]0, T[)}, \quad (1.8)$$

denotando por $R_{T'}(f)$ la restricción a $\Omega \times]0, T'[$ de una función f definida en un conjunto más grande.

Se verifica la siguiente caracterización de los elementos de $H_{0,0}^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$ (ver por ejemplo la nota del lema 10.1, del capítulo 4 de [19]):

Proposición 1.2. *Dados $r > 0, s > 0$ y $0 < T < \infty$, una función $U(\mathbf{x}, t) \in H^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$ pertenece a $H_{0,0}^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$ si y sólo si*

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall 0 \leq j < s - \frac{1}{2} \quad \frac{\partial^j U}{\partial t^j}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial^j U}{\partial t^j}(\mathbf{x}, T) = 0$$

y

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \forall 0 \leq k < r - \frac{1}{2} \quad \frac{\partial^k U}{\partial \mathbf{n}^k}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Es evidente que las inclusiones

$$H_0^r(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-r}(\Omega), \quad r > 0$$

forman un triple de Gelfand. En particular se verifica $H^r(\Omega) \subset H^{-r}(\Omega)$.

Lema 1.1. *Sea $U \in L^2(\Omega \times]-T, T[)$. Sean $\varphi_U \in H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]-T, T[)$ y $\Phi_U \in (H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]-T, T[))'$ las formas lineales y continuas definidas por*

$$\forall f_0 \in H_{0,0}^{2r-1, 2r}(\Omega \times]-T, T[) \quad \langle \varphi_U, f_0 \rangle = \int_{\Omega \times]-T, T[} U(\mathbf{x}, t) f_0(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt$$

y

$$\forall f \in H^{2r-1,2r}(\Omega \times]-T, T[) \quad \langle \Phi_U, f \rangle = \int_{\Omega \times]-T, T[} U(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt$$

respectivamente. Entonces $\|\varphi_U\| = \|\Phi_U\|$.

Demostración. Sea

$$Q : (H^{2r-1,2r}(\Omega \times]-T, T[))' \longrightarrow H^{-(2r-1),-2r}(\Omega \times]-T, T[)$$

la aplicación cociente canónica. Claramente $\varphi_U = Q(\Phi_U)$ y por tanto

$$\|\varphi_U\| \leq \|\Phi_U\|. \quad (1.9)$$

Dado $\varepsilon > 0$ y argumentando como en la demostración del teorema 2, sección 1.1.14 en [23], existe $\Psi \in (H^{2r-1,2r}(\Omega \times]-T, T[))'$ tal que $Q(\Psi) = \varphi_U$, dos familias finitas $\{g_{\alpha,0}(\mathbf{x}, t), 0 \leq |\alpha| \leq 2r-1\}$ y $\{g_{0,k}(\mathbf{x}, t), 0 \leq k \leq 2r\}$ en $L^2(\Omega \times]-T, T[)$ tales que

$$\|\Psi\| \leq \|\varphi_U\| + \varepsilon, \quad (1.10)$$

$$\sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2r-1} \|g_{\alpha,0}\|_{L^2(\Omega \times]-T, T[)}^2 + \sum_{k=0}^{2r} \|g_{0,k}\|_{L^2(\Omega \times]-T, T[)}^2 \leq (\|\Psi\| + \varepsilon)^2$$

y para cada $f \in H^{2r-1,2r}(\Omega \times]-T, T[)$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle \Phi_U, f \rangle &= \langle \Psi, f \rangle = \\ &= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2r-1} \int_{\Omega \times]-T, T[} g_{\alpha,0}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{2r} \int_{\Omega \times]-T, T[} g_{0,k}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt. \end{aligned} \quad (1.11)$$

De (1.11), obtenemos

$$\forall f \in H^{2r-1,2r}(\Omega \times]-T, T[) \quad \left| \int_{\Omega \times]-T, T[} U(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \langle \Phi_U, f \rangle \right| \leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2r-1} \|g_{\alpha,0}\|_{L^2(\Omega \times]-T, T])} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right\|_{L^2(\Omega \times]-T, T])} + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{2r} \|g_{0,k}\|_{L^2(\Omega \times]-T, T])} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \right\|_{L^2(\Omega \times]-T, T])} \leq
\end{aligned}$$

y por la desigualdad de Hölder y (1.10)

$$\leq \left(\|\Psi\| + \varepsilon \right) \|f\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]-T, T])} \leq \left(\|\varphi_U\| + 2\varepsilon \right) \|f\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]-T, T])}.$$

Entonces por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ obtenemos $\|\Phi_U\| \leq \|\varphi_U\|$ y por (1.9) obtenemos $\|\Phi_U\| = \|\varphi_U\|$. ■

Proposición 1.3. (*Fórmula de Green clásica para los operadores \mathcal{A} y \mathcal{A}^* en $\Omega \times]0, T[$.*) Sea $T \in [0, \infty]$. Existe un operador diferencial $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$ como en (1.6) y una función $f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) \in C^\infty(\partial\Omega)$, $f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) \neq 0$ si $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, tal que para cada $v(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^2([0, T], \mathcal{C}(\overline{\Omega}))$ y $u(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}(\overline{\Omega \times]0, T[})$ se verifica la fórmula de Green

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(\int_{\Omega} (v \mathcal{A}(u) - u \mathcal{A}^*(v)) \, d\mathbf{x} \right) dt = \frac{1}{\alpha} \left(\int_{\Omega} [v(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, t)]_{t=0}^{t=T} \, d\mathbf{x} \right) + \\
&\quad + \frac{\tau}{\alpha} \left(\int_{\Omega} \left[v(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - u(\mathbf{x}, t) \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right]_{t=0}^{t=T} \, d\mathbf{x} \right) + \\
&\quad + \int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} \left(u \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(v) - f_{\mathcal{A}} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma \right) dt \quad (1.12)
\end{aligned}$$

(los corchetes tienen el sentido usual de la regla de integración de Barrow).

Demostración. La prueba de esta demostración se obtiene fácilmente por el teorema de Fubini, la segunda fórmula de Green para el operador autoadjunto \mathcal{X} (ver observaciones 2.3 y 2.4 en el capítulo 2 de [19]) y dos integraciones consecutivas por partes respecto a t . ■

Nota 1. Por supuesto, por la densidad de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$ en $H^{s,s}(\Omega \times]0, T[)$, $s \geq 2$ (observación 2.2 en el capítulo 4 en [19]) y por los teoremas

de trazas en $H^{s,s}(\Omega \times]0, T[)$ (ver capítulo 1 de [19]) la fórmula de Green (1.12) también es cierta para $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$ y $u \in H^{s,s}(\Omega \times]0, T[)$, $s \geq 2$ y para $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$ y $v \in H^{s,s}(\Omega \times]0, T[)$, $s \geq 2$.

Nota 2. La condición $f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) \neq 0$ si $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, aparentemente irrelevante visto su papel en la fórmula de Green, **será decisiva** en los teoremas de trazas del capítulo 4.

En referencia a la fórmula de Green, la siguiente observación será de utilidad. Si $t = -t'$ y definimos $v'(\mathbf{x}, t') = v(\mathbf{x}, -t')$ y $u'(\mathbf{x}, t') = u(\mathbf{x}, -t')$, escribiendo $\mathcal{A}_{\mathbf{x},t}$ y $\mathcal{A}_{\mathbf{x},t}^*$ o similares para enfatizar las variables utilizadas en la derivación, obtenemos $\mathcal{A}_{\mathbf{x},t'}^*(v')(\mathbf{x}, t') = \mathcal{A}_{\mathbf{x},t}(v)(\mathbf{x}, t)$ y una fórmula similar para $u'(\mathbf{x}, t')$. Entonces haciendo el cambio de variable temporal $t = -t'$ en (1.12) obtenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{-T}^T \left(\int_{\Omega} (v'(\mathbf{x}, t') \mathcal{A}_{\mathbf{x},t'}^*(u'(\mathbf{x}, t')) - u'(\mathbf{x}, t') \mathcal{A}_{\mathbf{x},t'}(v'(\mathbf{x}, t'))) \, d\mathbf{x} \right) dt' = \\
& = \int_{-T}^T \left(\int_{\partial\Omega} (u'(\mathbf{x}, t') \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(v'(\mathbf{x}, t'))) \right. \\
& \quad \left. - f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) v'(\mathbf{x}, t') \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t') \, d\sigma \right) dt' + \\
& \quad + \frac{1}{\alpha} \left(\int_{\Omega} [v(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t)]_{t=-T}^{t=T} \, d\mathbf{x} \right) + \\
& \quad + \frac{\tau}{\alpha} \left(\int_{\Omega} \left[v(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - u(\mathbf{x}, t) \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right]_{t=-T}^{t=T} \right). \quad (1.13)
\end{aligned}$$

Sin embargo, la fórmula de Green previa también es cierta para

$$\begin{aligned}
& \int_{-T'}^{T'} \left(\int_{\Omega} (v'(\mathbf{x}, t') \mathcal{A}_{\mathbf{x},t'}^*(u'(\mathbf{x}, t')) - u'(\mathbf{x}, t') \mathcal{A}_{\mathbf{x},t'}(v'(\mathbf{x}, t'))) \, d\mathbf{x} \right) dt' = \\
& = - \int_{-T'}^{T'} \left(\int_{\partial\Omega} (v'(\mathbf{x}, t') \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(u'(\mathbf{x}, t'))) \right. \\
& \quad \left. - f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) u'(\mathbf{x}, t') \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t') \, d\sigma \right) dt' +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\alpha} \left(- \int_{\Omega} [u'(\mathbf{x}, t') v'(\mathbf{x}, t')]_{t'=-T}^{t'=T} d\mathbf{x} \right) + \\
 & + \frac{\tau}{\alpha} \left(- \int_{\Omega} \left[u'(\mathbf{x}, t') \frac{\partial v'}{\partial t'}(\mathbf{x}, t') - v'(\mathbf{x}, t') \frac{\partial u'}{\partial t'}(\mathbf{x}, t') \right]_{t'=-T}^{t'=T} d\mathbf{x} \right). \quad (1.14)
 \end{aligned}$$

Una comparación de la fórmula resultante con (1.14) nos da

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{A}} v(\mathbf{x}, -t) = \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(v'(\mathbf{x}, t')) = f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) \frac{\partial v'}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t') = f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, -t) \quad (1.15)$$

un resultado que será de gran utilidad en el capítulo 6.

1.4. Espacios $\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$ y $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$

Para precisar los espacios de las soluciones del problema de Neumann asociado a la ecuación (1.4) en el caso de fuentes internas de calor o condiciones iniciales y de contorno irregulares necesitamos introducir algunos nuevos espacios de definición larga y laboriosa. El motivo de usar estos espacios es **soslayar el principal problema de $H^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$** (que es la falta de densidad de $\mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)$ en él) aunque esto supondrá en capítulos posteriores tomar los datos del segundo miembro de la ecuación $\mathcal{A}(U) = F$ en un espacio más pequeño que $H^{-r,-s}(\Omega \times]0, T[)$. Sin embargo esto no supondrá pérdida de información en lo concerniente a los problemas físicos esenciales que consideraremos.

Comenzaremos por nuevos espacios respecto a la variable espacial \mathbf{x} . Sea $\rho : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ la función continua definida por $\rho(\mathbf{x}) := d(\mathbf{x}, \partial\Omega) := \inf_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ para cada $\mathbf{x} \in \Omega$. Dado $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos

$$\Phi^r(\Omega) := \left\{ f \in L^2(\Omega) \mid \rho^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} \in L^2(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq r \right\}$$

dotado con la norma

$$\|f\|_{\Phi^r(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq r} \left\| \rho^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$\Phi^r(\Omega)$ resulta un espacio de Banach.

Extendemos la definición anterior al caso $r \in]0, \infty[$ por interpolación compleja poniendo para $r = E[r] + \theta$ en $]0, \infty[$ y $0 < \theta < 1$ (siendo $E[r]$ la parte entera de r)

$$\Phi^r(\Omega) = [\Phi^{E[r]+1}(\Omega), \Phi^{E[r]}(\Omega)]_{1-\theta}$$

dotado con cualquier norma canónica del espacio de Banach interpolado. Claramente la inclusión continua $H^r(\Omega) \subset \Phi^r(\Omega)$, $r > 0$ es cierta. Finalmente definimos $\Phi^{-r}(\Omega)$ si $r \in [0, \infty[$ por dualidad:

$$\forall r \in [0, \infty[\quad \Phi^{-r}(\Omega) := (\Phi^r(\Omega))'. \quad (1.16)$$

Puede mostrarse que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $\Phi^r(\Omega)$ para $r \geq 0$ y que

$$\Phi^r(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \Phi^{-r}(\Omega)$$

(ver [19], capítulo 2 por ejemplo). $\Phi^r(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ y $\Phi^{-r}(\Omega)$ es un triple de Guelfand y en consecuencia $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $\Phi^{-r}(\Omega)$.

Señalemos que las definiciones anteriores tienen sentido incluso si Ω no es acotado, lo que nos será útil más adelante en los capítulos en los que manejamos un intervalo espacial no acotado.

Para distinguir el comportamiento de las variables temporal y espacial vamos a introducir un nuevo espacio. Dada $0 < T$ fijamos un número $T_0 < \frac{T}{2}$ y consideramos la función $\varphi_{T_0, T}(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ con soporte compacto en $[0, T]$ definida por

$$\varphi_{T_0, T}(t) := \begin{cases} e^{-\frac{T_0^2}{T_0^2 - (t-T_0)^2}} & \text{si } 0 < t \leq T_0 \\ \frac{1}{e} & \text{si } T_0 \leq t \leq T - T_0 \\ e^{-\frac{T_0^2}{T_0^2 - (t-T+T_0)^2}} & \text{si } T - T_0 \leq t < T \\ 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0] \cup [T, \infty[\end{cases}$$

Claramente $\|\varphi_{T_0, T}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{1}{e}$ es independiente de T . Para cada $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos $\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[, \varphi_{T_0, T})$ (o simplemente $\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$ si no hay riesgo de confusión) como

$$\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[) := \left\{ f \in L^2(]0, T[, \Phi^r(\Omega)) \mid \left| \varphi_{T_0, T}(t) \right|^j \frac{d^j f}{dt^j} \in L^2(]0, T[, \Phi^{r-j}(\Omega)), 0 \leq j \leq s \right\}$$

provisto con la norma

$$\|f\|_{\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[)} := \left(\sum_{j=0}^s \left\| \left| \varphi_{T_0, T}(t) \right|^j \frac{\partial^j f}{\partial t^j} \right\|_{L^2(]0, T[, \Phi^{r-j}(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$ resulta ser un espacio de Banach.

Como en el caso anterior, la definición se extiende a los números reales no negativos $r = E[r] + \theta$ y $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \leq E[r]$ por interpolación compleja

$$\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[) := [\Phi^{E[r]+1,s}(\Omega \times]0, T[), \Phi^{E[r],s}(\Omega \times]0, T[)]_{1-\theta}$$

y para $0 \leq r$ y $0 \leq s = E[s] + \theta'$

$$\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[) := [\Phi^{r,E[s]+1}(\Omega \times]0, T[), \Phi^{r,E[s]}(\Omega \times]0, T[)]_{1-\theta'}$$

dotado con cualquier norma estándar del espacio interpolado. Obtenemos fácilmente la inclusión continua

$$\forall r \geq s \geq 0 \quad I_{\Phi^{r,s}} : H^{r,s}(\Omega \times]0, T[) \subset \Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[) \quad (1.17)$$

y la desigualdad

$$\|I_{\Phi^{r,s}}\| \leq \left(1 + \frac{1}{e}\right)^r (1 + \text{diam}(\Omega))^r. \quad (1.18)$$

Para finalizar, definimos $\Phi^{-r,-s}(\Omega \times]0, T[)$ para $r, s \in [0, \infty[$ tomando duales topológicos:

$$\forall r, s \in [0, \infty[\quad \Phi^{-r,-s}(\Omega \times]0, T[) := (\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[))'.$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{T_0, T}(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow T} \frac{\varphi_{T_0, T}(t)}{T-t} = 0,$$

de la proposición 9.1, capítulo 4 de [19], obtenemos que $\mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)$ también es denso en $\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$ si $r, s \geq 0$. Además se verifican las inclusiones

$$\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[) \subset L^2(\Omega \times]0, T[) \subset \Phi^{-r,-s}(\Omega \times]0, T[) \subset \mathcal{D}'(\Omega \times]0, \infty[),$$

con lo que obtenemos el nuevo triple de Guelfand $\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$, $L^2(\Omega \times]0, T[)$ y $\Phi^{-r,-s}(\Omega \times]0, T[)$.

Si $R_T(U)$ denota la restricción a $\Omega \times]0, T[$, $0 < T < \infty$ de un elemento de $\Phi^{-r,-r}(\Omega \times]0, \infty[)$, fácilmente deducimos que para cada $U \in \Phi^{-r,-r}(\Omega \times]0, \infty[)$ y cada $0 < T$ tenemos $R_T(U) \in \Phi^{-r,-r}(\Omega \times]0, T[)$ y

$$\|R_T(U)\|_{\Phi^{-r,-r}(\Omega \times]0, T[)} \leq \|U\|_{\Phi^{-r,-r}(\Omega \times]0, \infty[)}. \quad (1.19)$$

Nota. Es importante destacar que dado el operador \mathcal{A} y una función $f \in \Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$, $r \geq s \geq 2$, en general **no se verifica** $\mathcal{A}(f) \in \Phi^{r-2,s-2}(\Omega \times]0, T[)$, porque **ni siquiera está garantizado** que $\mathcal{A}(f) \in L^2(\Omega \times]0, T[)$. Si $f \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega \times]0, T[})$, es evidente que

$$\mathcal{A}(f) \in \Phi^{0,0}(\Omega \times]0, T[) = L^2(\Omega \times]0, T[)$$

pero la aplicación

$$\mathcal{A} : \mathcal{C}^2(\overline{\Omega \times]0, T[}) \longrightarrow \Phi^{0,0}(\Omega \times]0, T[)$$

no es continua con la topología inducida por $\Phi^{0,0}(\Omega \times]0, T[)$ en $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega \times]0, T[})$. Basta pensar que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{\Phi^{0,0}(\Omega \times]0, T[)}^2 &= \int_{\Omega} \left(\int_0^T \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 dt \right) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_0^T \frac{1}{\psi_{T_0, T}^2(t)} \left(\psi_{T_0, T}(t) \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \right)^2 dt \right) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

no puede mayorarse por un múltiplo de $\|f\|_{\Phi^{1,1}(\Omega \times]0, T[)}$ debido a que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\psi_{T_0, T}^2(t)} = \infty$. Esta circunstancia es la causa de que ciertas demostraciones posteriores sean tan complicadas como aparecen. Por supuesto

lo anterior no es una demostración, daremos un contraejemplo al final del capítulo 3.

Es interesante destacar otra particularidad desagradable de los espacios $\Phi^r(\Omega)$ y $\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$, cual es que, en general, dada $f \in \Phi^r(\Omega)$ y dado $\Omega_0 \subset \Omega$, la función $\chi_{\Omega_0} f \notin \Phi^r(\Omega)$ porque en las derivadas $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ aparecen δ de Dirac, que no son funciones. Esta situación influirá por ejemplo, en la proposición 1.6, haciendo más complicada su demostración.

Nota. En algunas ocasiones necesitaremos espacios del tipo $\Phi^{r,s}$ pero definidos en conjuntos $\Omega \times]-T, T[$, $T > 0$. La definición en estos conjuntos es análoga a la anterior pero considerando una función auxiliar $\bar{\varphi}_{T_0, T}(t) = \varphi_{T_0, 2T}(t + T)$.

El siguiente espacio de distribuciones será importante en nuestro estudio porque, como se verá en el capítulo 5, contendrá las soluciones del problema mixto de contorno para el operador \mathcal{A} con datos irregulares. Comenzamos considerando el espacio definido para $r > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} & D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[) := \\ & = \left\{ u \in H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]0, T[) \mid \mathcal{A}(u) \in \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, T[) \right\} \end{aligned}$$

dotado con la norma

$$\begin{aligned} & \|u\|_{D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)} = \\ & = \|u\|_{H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]0, T[)} + \|\mathcal{A}(u)\|_{\Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, T[)} \end{aligned} \quad (1.20)$$

y a continuación su subespacio

$$\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[) := \overline{\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})}^{D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)}.$$

Puede demostrarse que $D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$ (y por tanto $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$) es un espacio de Banach.

Teniendo en cuenta la nota anterior los espacios $D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]-T, T[)$ y $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]-T, T[)$ también están definidos a partir de la función $\bar{\varphi}_{T_0, T}(t)$.

1.5. Espacios $J^k(\partial\Omega \times]0, T[)$

Respecto a los espacios sobre la frontera $\partial\Omega \times]0, T[$, si $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos el espacio de Banach

$$J^k(\partial\Omega \times]0, T[) := \left\{ v \mid \left| \varphi_{T_0, T}(t) \right|^j \frac{\partial^j v}{\partial t^j} \in L^2(]0, T[, H^{k-\frac{j}{k}}(\partial\Omega)), 0 \leq j \leq k \right\}$$

dotado con la norma

$$\|v\|_{J^k(\partial\Omega \times]0, T[)} = \left(\sum_{j=0}^k \left\| \left| \varphi_{T_0, T}(t) \right|^j \frac{\partial^j v}{\partial t^j} \right\|_{L^2(]0, T[, H^{k-\frac{j}{k}}(\partial\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Su espacio dual se denotará por $J^{-k}(\partial\Omega \times]0, T[)$. Estas definiciones se pueden extender por interpolación al caso de $r \in]0, \infty[\setminus \mathbb{N}$ poniendo

$$J^r(\partial\Omega \times]0, T[) := \left[H^{E[r]+1}(\partial\Omega \times]0, T[), L^2(\partial\Omega \times]0, T[) \right]_{1-\frac{r}{E[r]+1}}.$$

Se verifica (ver capítulo 5 en [19])

$$\forall r \geq 0 \quad H^{2r+\frac{1}{2}, 2r+\frac{1}{2}}(\partial\Omega \times]0, T[) \subset J^{2r+\frac{1}{2}}(\partial\Omega \times]0, T[). \quad (1.21)$$

Como en el caso anterior, su espacio dual se denotará por $J^{-r}(\partial\Omega \times]0, T[)$. Es conocido (ver la sección 10.3 en el capítulo 5 de [19]) que $\mathcal{D}(\partial\Omega \times]0, T[)$ es denso en $J^r(\partial\Omega \times]0, T[)$ para cada $r \geq 0$ y

$$J^r(\partial\Omega \times]0, T[) \subset L^2(\partial\Omega \times]0, T[) \subset J^{-r}(\partial\Omega \times]0, T[), \quad (1.22)$$

lo que da lugar a un nuevo triple de Gelfand $J^r(\partial\Omega \times]0, T[)$, $L^2(\partial\Omega \times]0, T[)$ y $J^{-r}(\partial\Omega \times]0, T[)$.

Como en la sección anterior los espacios del tipo J^r en un conjunto $\partial\Omega \times]-T, T[$ se definen de forma análoga pero teniendo en cuenta la función $\bar{\varphi}_{T_0, T}$.

1.6. Espacios funcionales con dominios temporales no acotados

En el capítulo 6, en el que se estudia la función de Green asociada a la ecuación (1.4) es necesario el manejo de un intervalo temporal no acotado $]0, \infty[$. De manera que hay que definir también los espacios adecuados $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$ ya que las definiciones anteriores no pueden aplicarse directamente a los espacios $\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, \infty[)$.

Para nuestras aplicaciones futuras será suficiente con utilizar el concepto de espacio de Banach definido como el límite monótono de una sucesión de espacios de Banach (ver por ejemplo [9]), eliminando de esta forma el uso de los límites inductivos de espacios de Banach que son mucho más complicados.

Consideramos una sucesión estrictamente creciente y no acotada $\{T_m\}_{m=0}^{\infty}$ tal que $0 < T_0 < \frac{T_1}{2}$. Fijamos $0 < r, s$. Entonces con la ayuda de las funciones φ_{T_0, T_m} definidas anteriormente, podemos definir los espacios

$$\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T_m[, \varphi_{T_0, T_m}),$$

(que se denotarán en lo sucesivo por $\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T_m[)$ para simplificar la notación) para cada $m \in \mathbb{N}$. Sea R_m la aplicación que envía cada función medible de $\Omega \times]0, \infty[$ a su restricción $\Omega \times]0, T_m[$. Definimos

$$\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, \infty[) := \left\{ f : \Omega \times]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} \mid \right.$$

$$\left. \|f\|_{\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, \infty[)} := \sup_{m \in \mathbb{N}} \|R_m(f)\|_{\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, T_m[)} < \infty \right\}.$$

Por supuesto, en este caso también definimos para $r, s > 0$

$$\Phi^{-r,-s}(\Omega \times]0, \infty[) := (\Phi^{r,s}(\Omega \times]0, \infty[))'.$$

Ahora podemos definir para $r > \frac{1}{2}$

$$D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[) :=$$

$$= \left\{ \Theta \in H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]0, \infty[) \mid \mathcal{A}(\Theta) \in \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, \infty[) \right\}$$

(1.23)

dotado con la topología derivada de la norma

$$\begin{aligned} & \|\Theta\|_{D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)} = \\ & = \|\Theta\|_{H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]0, \infty[)} + \|\mathcal{A}(\Theta)\|_{\Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, \infty[)} \end{aligned} \quad (1.24)$$

y su subespacio

$$D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[) := \overline{\mathcal{C}^\infty(\Omega \times]0, \infty[)}^{D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)}.$$

1.7. Algunos resultados previos

A continuación enunciamos una serie de resultados que nos serán de utilidad a lo largo de los siguientes capítulos.

Proposición 1.4. *Sea $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ y $-T < t_0 < T$. Si $r > \frac{n}{2}$ y $s > \frac{1}{2}$ tenemos*

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \in \Phi^{-r, -s}(\Omega \times]-T, T[).$$

Demostración. Definimos

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \Omega_k := \left\{ \mathbf{x} \in \Omega \mid d(\mathbf{x}, \partial\Omega) > \frac{1}{k} \right\}$$

y escogemos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_0 \in \Omega_{k_0}$ y $\min\{|t_0|, T - |t_0|\} > \frac{1}{k_0}$. Fijamos dos funciones $\rho_1(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\rho_2(t) \in \mathcal{D}(]-T, T[)$ tal que

$$\rho_1(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{si} \quad \mathbf{x} \in \Omega_{k_0},$$

$$\rho_1(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_{2k_0}$$

y

$$\rho_2(t) = 1 \quad \text{si} \quad t \in \left] -T + \frac{1}{k_0}, T - \frac{1}{k_0} \right[,$$

$$\rho_2(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \in \left] -T, -T + \frac{1}{2k_0} \right[\cup \left] T - \frac{1}{2k_0}, T \right[.$$

A partir de la definición de estas dos funciones podemos encontrar $M > 0$ tal que $\forall u \in \Phi^{r, s}(\Omega \times]-T, T[)$

$$\left\| \rho_1 \rho_2 u \right\|_{H^s(]-T, T[, H^r(\Omega))} \leq M \left\| u \right\|_{\Phi^{r, s}(\Omega \times]-T, T[)} . \quad (1.25)$$

Para llegar a (1.25) partimos de

$$\begin{aligned}
& \left\| \rho_1(\mathbf{x}) \rho_2(t) u(\mathbf{x}, t) \right\|_{H^s([-T, T], H^r(\Omega))}^2 = \\
&= \sum_{k=0}^s \int_{-T+\frac{1}{2k_0}}^{T-\frac{1}{2k_0}} \left\| \rho_1(\mathbf{x}) \frac{\partial^k \rho_2(t) u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^k} \right\|_{H^r(\Omega)}^2 dt = \\
&= \sum_{k=0}^s \int_{-T+\frac{1}{2k_0}}^{T-\frac{1}{2k_0}} \left\| \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \rho_1(\mathbf{x}) \frac{\partial^j \rho_2}{\partial t^j}(t) \frac{\partial^{k-j} u}{\partial t^{k-j}}(\mathbf{x}, t) \right\|_{H^r(\Omega)}^2 dt = \\
&= \sum_{k=0}^s \int_{-T+\frac{1}{2k_0}}^{T-\frac{1}{2k_0}} \left(\sum_{|\alpha| \leq r} \int_{\Omega_{2k_0}} \left| \sum_{j=0}^k \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \left(\binom{k}{j} \rho_1(\mathbf{x}) \times \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \times \frac{\partial^j \rho_2}{\partial t^j}(t) \frac{\partial^{k-j} u}{\partial t^{k-j}}(\mathbf{x}, t) \right) \right|^2 d\mathbf{x} \right) dt = \\
&= \sum_{k=0}^s \int_{-T+\frac{1}{2k_0}}^{T-\frac{1}{2k_0}} \left(\sum_{|\alpha| \leq r} \int_{\Omega_{2k_0}} \left| \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^j \rho_2}{\partial t^j}(t) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{\partial^{|\beta|} \rho_1}{\partial \mathbf{x}^\beta}(\mathbf{x}) \frac{\partial^{|\alpha-\beta|+k-j} u}{\partial \mathbf{x}^\beta \partial t^{k-j}}(\mathbf{x}, t) \right|^2 d\mathbf{x} \right) dt \leq
\end{aligned}$$

y por la desigualdad de Minkowski

$$\begin{aligned}
& \leq \sum_{k=0}^s \int_{-T+\frac{1}{2k_0}}^{T-\frac{1}{2k_0}} \left(\sum_{|\alpha| \leq r} \left(\sum_{j=0}^k \sum_{\beta \leq \alpha} \int_{\Omega_{2k_0}} \left| \binom{k}{j} \binom{\alpha}{\beta} \frac{\partial^j \rho_2}{\partial t^j}(t) \times \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \times \frac{\partial^{|\beta|} \rho_1}{\partial \mathbf{x}^\beta}(\mathbf{x}) \frac{\partial^{|\alpha-\beta|+k-j} u}{\partial \mathbf{x}^\beta \partial t^{k-j}}(\mathbf{x}, t) \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 dt \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^s e^k \int_{-T+\frac{1}{2k_0}}^{T-\frac{1}{2k_0}} \bar{\varphi}_{T_0, T}^k \left(\sum_{|\alpha| \leq r} \left(\sum_{j=0}^k \sum_{\beta \leq \alpha} (2k_0)^{|\beta|} \int_{\Omega_{2k_0}} \left| \binom{k}{j} \binom{\alpha}{\beta} \frac{\partial^j \rho_2}{\partial t^j}(t) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \times d(\mathbf{x}, \partial\Omega)^{|\beta|} \frac{\partial^{|\beta|} \rho_1}{\partial \mathbf{x}^\beta}(\mathbf{x}) \frac{\partial^{|\alpha-\beta|+k-j} u}{\partial \mathbf{x}^\beta \partial t^{k-j}}(\mathbf{x}, t) \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 dt \leq \\
&\leq \binom{\gamma}{\beta} \int_{-T+\frac{1}{2k_0}}^{T-\frac{1}{2k_0}} |\rho_2(t)|^2 \left(\int_{\Omega_{2k_0}} \left| \frac{\partial^{|\gamma-\beta|} \rho_1}{\partial \mathbf{x}^{\gamma-\beta}}(\mathbf{x}) \right| \left| \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial \mathbf{x}^\beta}(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} \right) dt \leq \\
&\leq 2^{2|\beta|} T_0^2 k_0^{2|\beta|} K_{\gamma\beta} \int_{\frac{1}{2k_0}}^{T-\frac{1}{2k_0}} |\rho_2(t)|^2 |\varphi_0(t)|^2 \times \\
&\quad \times \left(\int_{\Omega_{2k_0}} d(\mathbf{x}, \partial\Omega)^{2|\beta|} \left| \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial \mathbf{x}^\beta}(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} \right) dt \leq M_{\alpha\beta} \|u\|_{\Phi^{r,s}(\Omega \times]-T, T[)}^2,
\end{aligned}$$

donde $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ verifican $\beta \leq \gamma$, $|\gamma| \leq r$ y $K_{\gamma\beta}$ es cierta constante independiente de u . Análogamente $\|\rho_1 \rho_2 u\|_{r,0}^2$ es una suma finita de términos del tipo

$$\begin{aligned}
&\binom{s}{j} \int_{-T+\frac{1}{2k_0}}^{T-\frac{1}{2k_0}} \left(\int_{\Omega_{2k_0}} |\rho_1(\mathbf{x})|^2 \left| \frac{\partial^{s-j} \rho_2}{\partial t^{s-j}}(t) \right|^2 \left| \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(\mathbf{x}, t) \right|^2 d\mathbf{x} \right) dt \leq \\
&\leq 4 T_0^{2j} k_0^{2j} K_{sj} \int_{-T+\frac{1}{2k_0}}^{T-\frac{1}{2k_0}} \left(\int_{\Omega_{2k_0}} d(\mathbf{x}, \partial\Omega)^{2j} |\varphi_0(t)|^{2j} |\rho_1(\mathbf{x})|^2 \times \right. \\
&\quad \left. \times \left| \frac{\partial^{s-j} \rho_2}{\partial t^{s-j}}(t) \right|^2 \left| \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(\mathbf{x}, t) \right|^2 d\mathbf{x} \right) dt \leq N_{sj} \|u\|_{\Phi^{r,s}(\Omega \times]-T, T[)}^2,
\end{aligned}$$

donde $0 \leq j \leq s \leq r$ y N_{sj} es cierta constante independiente de u . Ahora, por definición de la norma en $H^{r,s}(\Omega \times]-T, T[)$, se obtiene la desigualdad (1.25).

Finalmente, utilizando (1.25), como $r > \frac{n}{2}$, por el teorema 9.8, capítulo 1 en [19] tenemos

$$H^r(\Omega) \subset \mathcal{C}(\bar{\Omega})$$

y existe $K_1 > 0$ tal que

$$\forall -T < t < T \quad \left\| \rho_1(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, t) \right\|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} \leq K_1 \left\| \rho_1(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, t) \right\|_{H^r(\Omega)}. \quad (1.26)$$

Análogamente, como $s > \frac{1}{2}$, por la versión vectorial del teorema 9.8, capítulo 1 en [19] (la demostración es exactamente la misma que en el caso escalar) tenemos

$$H^s(\cdot - T, T[, H^r(\Omega)) \subset \mathcal{C}(\cdot - T, T[, H^r(\Omega))$$

y existe $K_2 > 0$ tal que para cada $f \in H^s(\cdot - T, T[, H^r(\Omega))$

$$\left\| f(\mathbf{x}, t) \right\|_{\mathcal{C}(\cdot - T, T[, H^r(\Omega))} \leq K_2 \left\| f(\mathbf{x}, t) \right\|_{H^s(\cdot - T, T[, H^r(\Omega))}. \quad (1.27)$$

Por tanto, por (1.26), (1.27) y (1.25)

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{D}(\Omega \times \cdot - T, T[) \quad & |\langle u, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \rangle| = |u(\mathbf{x}_0, t_0)| \leq \\ & \leq \frac{1}{\rho_1(\mathbf{x}_0)} \left\| \rho_1(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, t_0) \right\|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} \leq \frac{K_1}{\rho_1(\mathbf{x}_0)} \left\| \rho_1(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, t_0) \right\|_{H^r(\Omega)} \leq \\ & \leq K_1 \frac{1}{\rho_1(\mathbf{x}_0) \rho_2(t_0)} \left\| \rho_1 \rho_2 u \right\|_{\mathcal{C}(\cdot - T, T[, H^r(\Omega))} \leq \\ & \leq \frac{K_1 K_2}{\rho_1(\mathbf{x}_0) \rho_2(t_0)} \left\| \rho_1 \rho_2 u \right\|_{H^s(\cdot - T, T[, H^r(\Omega))} \leq \\ & \leq M \frac{K_1 K_2}{\rho_1(\mathbf{x}_0) \rho_2(t_0)} \left\| u \right\|_{\Phi^{r,s}(\Omega \times \cdot - T, T[)}, \end{aligned}$$

de manera que observando el principio y el final de la desigualdad

$$\left\| \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \right\|_{\Phi^{-r,-s}(\Omega \times \cdot - T, T[)} \leq K(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega) \quad (1.28)$$

donde $K(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega)$ es independiente de T y creciente con el diámetro de Ω . ■

Proposición 1.5. *Sea $s < r$. La inclusión*

$$\Phi^{r,r}(\Omega \times]-T, T[) \subset \Phi^{s,s}(\Omega \times]-T, T[)$$

es compacta.

Demostración. Suponemos primero que $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \in \mathbb{N}$ y $s < r$. Dada una sucesión acotada $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ en $\Phi^r(\Omega)$, para cada multi-índice α tal que $|\alpha| = r - 1$ se tiene que

$$\left\{ d(\mathbf{x}, \partial\Omega)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|} f_m}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right\}_{m=1}^\infty \subset L^2(\Omega)$$

y para cada $i = 1, 2, \dots, n$ se verifica la inclusión

$$\left\{ d(\mathbf{x}, \partial\Omega)^{|\alpha|+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f_m}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right) \right\}_{m=1}^\infty \subset L^2(\Omega).$$

Entonces, por el teorema 2.7 en [12] hay una subsucesión

$$\left\{ \frac{\partial^{|\alpha|} f_{k_m}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right\}_{m=1}^\infty$$

convergente en el espacio ponderado $L^2(\Omega, d(\mathbf{x}, \partial\Omega)^{|\alpha|})$. Después de un proceso inductivo finito análogo para $|\alpha| = r - k, 1 \leq k \leq r - 1$ concluimos que la inclusión $\Phi^r(\Omega) \subset \Phi^{r-1}(\Omega)$ es compacta.

Consideremos ahora para cada $0 \leq j < r$ el espacio de Banach

$$W_j^r := \left\{ f \in L^2(]-T, T[, \bar{\varphi}_{T_0, T}^j, \Phi^{r-j}(\Omega)) \mid \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(]-T, T[, \bar{\varphi}_{T_0, T}^j, \Phi^{r-j-1}(\Omega)) \right\}$$

provisto con la norma

$$\|f\|_{W_j^r} := \left(\|\bar{\varphi}_{T_0, T}^j f\|_{L^2(]-T, T[, \Phi^{r-j}(\Omega))}^2 + \left\| |\bar{\varphi}_{T_0, T}^j|^{j-1} \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{L^2(]-T, T[, \Phi^{r-j-1}(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como la aplicación $f \longrightarrow \bar{\varphi}_{T_0, T}^j f$ es una isometría de $L^2(]-T, T[, \bar{\varphi}_{T_0, T}^j, \Phi^{r-j}(\Omega))$ en $L^2(]-T, T[, \Phi^{r-j}(\Omega))$, por el teorema 5.1, del capítulo 1

en [18] la inclusión $W_j^r \subset L^2(\cdot - T, T[, \overline{\varphi}_{T_0, T}^j, \Phi^{r-j}(\Omega))$ es compacta para cada $0 \leq j \leq s$. Como $\Phi^{r,r}(\Omega \times] - T, T[) \subset W_j^r$ para cada j , la demostración se termina después de un proceso inductivo finito controlado por $j = 0, 1, \dots, s$, seleccionando en cada paso j una subsucesión adecuada de las previas que converja en $L^2(\cdot - T, T[, \overline{\varphi}_{T_0, T}^j, \Phi^{r-j}(\Omega))$.

La demostración para números reales arbitrarios $0 < s < r$ se obtiene por los teoremas de compacidad clásicos de operadores interpolados debidos a Calderón (ver [4]). ■

Proposición 1.6. *Si $s < r$ la inclusión*

$$\Phi^{r,r}(\Omega \times \mathbb{R}) \subset \Phi^{s,s}(\Omega \times \mathbb{R})$$

es compacta.

Demostración. Como en la proposición anterior es suficiente hacer la prueba para s y $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y entonces proceder por interpolación. Por tanto, suponemos $0 \leq s < r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sea

$$\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \Phi^{r,r}(\Omega \times \mathbb{R})$$

una sucesión acotada. Sea $R_{\Omega \times A}(f)$ la restricción a $\Omega \times A$, $A \subset \mathbb{R}$ de una función f definida en $\Omega \times \mathbb{R}$. Por la proposición 1.5 hay una subsucesión $\{f_{1,s}\}_{s=1}^\infty$ de $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ tal que existe

$$g_1 := \lim_{s \rightarrow \infty} R_{\Omega \times]-T_1, T_1[}(f_{1,s}) \quad \text{en} \quad \Phi^{s,s}(\Omega \times]-T_1, T_1[).$$

Nuevamente, por la proposición 1.5, podemos elegir inductivamente una subsucesión $\{f_{k,h}\}_{h=1}^\infty$ de $\{f_{k-1,s}\}_{s=1}^\infty$ tal que existe

$$g_k := \lim_{h \rightarrow \infty} R_{\Omega \times]-T_k, T_k[}(f_{k,h}) \quad \text{en} \quad \Phi^{s,s}(\Omega \times]-T_k, T_k[). \quad (1.29)$$

Está claro que $R_{\Omega \times]-T_{k-1}, T_{k-1}[}(g_k) = g_{k-1}$ para cada $k \geq 2$ y por tanto la función g tal que $g(\mathbf{x}, t) = g_k(\mathbf{x}, t)$ si $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times]-T_k, T_k[$ está bien definida.

Vamos a ver que

$$g = \lim_{h \rightarrow \infty} f_{h,h} \quad \text{en} \quad \Phi^{s,s}(\Omega \times \mathbb{R}),$$

ya que si lo probamos terminaremos la demostración por la propia definición de inclusión compacta. Para hacer esto, señalar que, como $\{f_{h,h}\}_{h=k}^\infty$ es una subsucesión de $\{f_{k,m}\}_{m=1}^\infty$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad g_k = \lim_{h \rightarrow \infty} R_{\Omega \times]-T_k, T_k[} (f_{h,h}) \quad \text{en} \quad \Phi^{s,s}(\Omega \times]-T_k, T_k[). \quad (1.30)$$

Definimos para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_m &= \sup_{h \in \mathbb{N}} \left\| R_{\Omega \times]-T_m, T_m[} (f_{h,h}) \right\|_{\Phi^{s,s}(\Omega \times]-T_m, T_m[)} \leq \\ &\leq S_{m+1} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| f_k \right\|_{\Phi^{s,s}(\Omega \times \mathbb{R})} < \infty. \end{aligned}$$

Como consecuencia existe $S := \lim_{m \rightarrow \infty} S_m$ en \mathbb{R} . Nuevamente por un procedimiento diagonal podemos seleccionar una subsucesión todavía denotada por $\{f_{h,h}\}_{h=1}^\infty$ de forma que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall h \geq k \quad S_k^2 - \left\| R_{\Omega \times]-T_k, T_k[} (f_{h,h}) \right\|_{\Phi^{s,s}(\Omega \times]-T_k, T_k[)}^2 \leq \frac{1}{k}. \quad (1.31)$$

Dado $1 > \varepsilon > 0$, escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \geq n_0 \quad S^2 - S_m^2 \leq \frac{\varepsilon}{12} \quad \text{y} \quad \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{12}. \quad (1.32)$$

Como $\{f_{h,h}\}_{h=n_0}^\infty$ es una subsucesión de $\{f_{n_0,m}\}_{m=1}^\infty$ y la restricción a $\Omega \times]-T_{n_0}, T_{n_0}[$ de g coincide con g_{n_0} , por (1.29) hay $h_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall h \geq h_0 \quad \left\| R_{\Omega \times]-T_{n_0+1}, T_{n_0+1}[} (g - f_{h,h}) \right\|_{\Phi^{s,s}(\Omega \times]-T_{n_0+1}, T_{n_0+1}[)} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.33)$$

De la misma forma, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $h_k \geq h_0 + k_0$ tal que

$$\left\| R_{\Omega \times]-T_k, T_k[} (g_k - f_{h_k, h_k}) \right\|_{\Phi^{s,s}(\Omega \times]-T_k, T_k[)} \leq \frac{\varepsilon}{6}. \quad (1.34)$$

Para simplificar la notación, escribimos $J_k :=]-T_k, -T_{n_0}[\cup]T_{n_0}, T_k[$ para cada $k > n_0$ y

$$\left\| \left\| v \right\| \right\|_{\Omega \times J_k} := \left(\int_{\Omega \times J_k} \sum_{|\alpha| \leq s} \rho(\mathbf{x})^{|\alpha|} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{x}, t) \right|^2 d\mathbf{x} dt + \right.$$

$$+ \int_{\Omega \times J_k} \sum_{j=0}^s \varphi_{T_0, T_k}(t)^j \left| \frac{\partial^j v}{\partial t^j}(\mathbf{x}, t) \right|^2 dx dt \Big)^{\frac{1}{2}}$$

para cada $v \in \Phi^{s,s}(\Omega \times]-T_k, T_k[$. Observamos que por la desigualdad de Minkowski tenemos

$$\forall v, w \in \Phi^{s,s}(\Omega \times]-T_k, T_k[) \quad \left\| \|v\| \right\|_{\Omega \times J_k} \leq \left\| \|v-w\| \right\|_{\Omega \times J_k} + \left\| \|w\| \right\|_{\Omega \times J_k}. \quad (1.35)$$

A partir de (1.32) y (1.31) obtenemos

$$\begin{aligned} \forall k > n_0, \forall h \geq n_0 \quad & \frac{\varepsilon}{12} > S_k^2 - S_{n_0}^2 \geq \\ & \geq \left\| R_{\Omega \times]-T_k, T_k[} [f_{h,h}] \right\|_{\Phi^{s,s}(\Omega \times]-T_k, T_k[)}^2 - \\ & \left\| R_{\Omega \times]-T_{n_0}, T_{n_0}[} [f_{h,h}] \right\|_{\Phi^{s,s}(\Omega \times]-T_{n_0}, T_{n_0}[)}^2 - \frac{1}{n_0} \geq \end{aligned}$$

y por definición de las normas involucradas y las funciones φ_{T_0, T_j} , $j \in \mathbb{N}$,

$$\geq \left\| \|f_{h,h}\| \right\|_{\Omega \times J_k}^2 - \frac{\varepsilon}{12}. \quad (1.36)$$

Análogamente, por (1.35)

$$\left\| \|g\| \right\|_{\Omega \times J_k} = \left\| \|g_k\| \right\|_{\Omega \times J_k} \leq \left\| \|g_k - f_{h_k, h_k}\| \right\|_{\Omega \times J_k} + \left\| \|f_{h_k, h_k}\| \right\|_{\Omega \times J_k} \leq$$

y como $h_k \geq k_0$, por (1.34) y (1.36)

$$\leq \left\| R_{\Omega \times]-T_k, T_k[} (g_k - f_{h_k, h_k}) \right\|_{\Phi^{s,s}(\Omega \times]-T_k, T_k[)} + \left\| \|f_{h_k, h_k}\| \right\|_{\Omega \times J_k} \leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.37)$$

Finalmente tenemos

$$\begin{aligned} \forall h \geq n_0 + k_0 \quad & \left\| \|g - f_{h,h}\| \right\|_{\Phi^{s,s}(\Omega \times \mathbb{R})}^2 = \\ & = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| R_{\Omega \times]-T_k, T_k[} (g - f_{h,h}) \right\|_{\Phi^{s,s}(\Omega \times]-T_k, T_k[)}^2 = \\ & = \sup_{k > n_0} \left\| R_{\Omega \times]-T_k, T_k[} (g - f_{h,h}) \right\|_{\Phi^{s,s}(\Omega \times]-T_k, T_k[)}^2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left\| R_{\Omega \times]-T_{n_0+1}, T_{n_0+1}[} (g - f_{h,h}) \right\|_{\mathfrak{F}^{s,s}(\Omega \times]-T_{n_0+1}, T_{n_0+1}[)}^2 + \\ + \sup_{k > n_0} \left\| g - f_{h,h} \right\|_{\Omega \times J_k} \leq$$

y por (1.33), (1.35), (1.36) y (1.37)

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \sup_{k > n_0} \left(\left\| g \right\|_{\Omega \times J_k} + \left\| f_{h,h} \right\|_{\Omega \times J_k} \right) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6}$$

con lo que se termina la demostración. ■

Con un argumento completamente análogo se puede también probar la siguiente proposición:

Proposición 1.7. *Si $0 \leq s < r$ la inclusión*

$$H^{r,r}(\Omega \times \mathbb{R}) \subset H^{s,s}(\Omega \times \mathbb{R})$$

es compacta.

Capítulo 2

Teoremas de existencia, unicidad y regularidad para el problema adjunto con datos regulares

Como punto de partida para conseguir la meta que nos hemos propuesto en esta memoria, este capítulo tiene como **objeto encontrar teoremas de existencia, unicidad y regularidad** para las soluciones del problema adjunto de Neumann para la ecuación hiperbólica del calor no isótropa ni homogénea en el caso de coeficientes infinitamente diferenciables hasta la clausura $\bar{\Omega}$ del dominio espacial en (1.4) con datos regulares. Ésta es la primera fase de una aproximación tradicional al estudio de problemas de contorno mixtos para (1.4) cuando los datos sean irregulares.

Para ello dividiremos el capítulo en dos apartados. El apartado 2.1 es una sección de carácter técnico realizada para encontrar información cuantitativa sobre la norma de algunos operadores importantes para nuestro estudio. En el apartado 2.2 se presentan los principales resultados obtenidos de existencia, unicidad y regularidad sobre la solución del problema adjunto de la ecuación hiperbólica del calor con datos regulares.

2.1. Resultados auxiliares

La transformada de Schwartz-Laplace será una herramienta esencial a tener en cuenta en las siguientes discusiones. Si tomamos *formalmente* la transformada de Schwartz-Laplace \mathfrak{L} con respecto a t de una distribución $\mathcal{A}^*(U)$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{X} + \frac{1}{\alpha} (-p + \tau p^2) \right) \mathfrak{L}[U](p) = \\ & = \frac{\tau}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\tau} \mathcal{X} - \frac{1}{4 \tau^2} + \left(p - \frac{1}{2 \tau} \right)^2 \right) \mathfrak{L}[U](p), \end{aligned}$$

que da lugar de forma natural a la introducción de los siguientes operadores

$$A := \frac{\alpha}{\tau} \mathcal{X} - \frac{1}{4 \tau^2} \quad \text{y} \quad \mathcal{X}_p := A + \left(p - \frac{1}{2 \tau} \right)^2 \quad p \in \mathbb{C}.$$

Consideremos la familia auxiliar de operadores

$$\left\{ \Lambda_\theta := A + e^{i\theta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \mid \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}.$$

Sea $r > 0$ tal que $2r \in \mathbb{N}$. Dado \mathfrak{A} un operador frontera del tipo considerado en la fórmula clásica de Green, definimos también el *subespacio topológico* de $H^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)$

$$\begin{aligned} & Y_\theta^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[) := \\ & = \left\{ f \in H^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[) \cap H_0^{2r}(\Omega \times]0, 1[) \mid \Lambda_\theta(f) \in H_0^{2r-1}(\Omega \times]0, 1[) \right\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Lema 2.1. *Para cada $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ existe una $C > 0$ tal que para cada $f \in Y_\theta^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)$ tenemos*

$$\|f\|_{Y_\theta^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)} \leq C \left(\|\Lambda_\theta(f)\|_{H_0^{2r-1}(\Omega \times]0, 1[)} + \|f\|_{H^{2r}(\Omega \times]0, 1[)} \right). \tag{2.2}$$

Demostración. Como $\Lambda_\theta : H^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[) \longrightarrow H^{2r-1}(\Omega \times]0, 1[)$ es continua y

$$H^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[) \subset H^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, 1[)$$

continuamente, por la continuidad de las aplicaciones traza sobre el contorno lateral $\partial\Omega \times]0, 1[$ (teorema 2.1, capítulo 4 en [19]), $Y_\theta^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)$ es un subespacio cerrado de $H^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)$. Sea $Y_{\theta,0}^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)$ la clausura de $\mathcal{D}(\Omega \times]0, 1[)$ en $Y_\theta^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)$. Por la densidad de $\mathcal{D}(\Omega \times]0, 1[)$ se verifica la inclusión continua

$$H_0^{2r-1}(\Omega \times]0, 1[) \subset L^2(\Omega \times]0, 1[) \subset \left(Y_{\theta,0}^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[) \right)'$$

Además, por la hipótesis hecha sobre \mathcal{X} , Λ_θ es fuertemente elíptico sobre $\Omega \times]0, 1[$ y por tanto $H_0^1(\Omega \times]0, 1[)$ -coercivo (ver ejemplo 19.1 en [41]). Entonces existe $K \in \mathbb{R}$ tal que para cada $f \in H_0^{2r-1}(\Omega \times]0, 1[)$, por el teorema 9.1, capítulo 2 en [19], hay una $U_f \in H_0^{2r-1}(\Omega \times]0, 1[)$ que verifica

$$(\Lambda_\theta + K)(U_f) = f.$$

Por el lema global de Weyl (corolario 13.1 en [41]) tenemos que de hecho

$$U_f \in H^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[) \subset H^{2r-1}(\Omega \times]0, 1[).$$

Ahora, por el teorema 5.4, capítulo 2 en [19] hay una $V_f \in Y_\theta^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)$ tal que $\Lambda_\theta(V_f) = K U_f$. En consecuencia

$$U_f + V_f \in Y_\theta^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)$$

y

$$\Lambda_\theta : Y_\theta^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[) \longrightarrow H_0^{2r-1}(\Omega \times]0, 1[)$$

es exhaustiva.

Por otro lado, por el teorema 13.1 en [41], el núcleo de Λ_θ es de dimensión finita. Por el teorema de compacidad de Rellich-Kondrašov la inclusión

$$I_r : Y_\theta^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[) \subset H^{2r}(\Omega \times]0, 1[)$$

es compacta. Entonces el lema se demuestra por un conocido resultado de Peetre (ver por ejemplo el capítulo 2, lema 5.1 en [19]). ■

La función real $C : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ obtenida definiendo $C(\theta)$ para cada $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ como el máximo de las cotas inferiores de aquellos números $C > 0$ tales que verifican (2.2) está bien definida. Por supuesto $C(\theta)$ también verifica la desigualdad (2.2).

Lema 2.2. $C(\theta)$ es continua en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Demostración. Fijamos $\theta_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Para cada $f \in Y_{\theta}^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)$ tenemos

$$\begin{aligned} \left\| (\Lambda_{\theta_0} - \Lambda_{\theta})(f) \right\| &= |e^{i\theta_0} - e^{i\theta}| \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right\|_{H^{2r-1}(\Omega \times]0, 1[)} \leq \\ &\leq |e^{i\theta_0} - e^{i\theta}| \|f\|_{Y_{\theta}^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)}. \end{aligned}$$

Dada $\frac{1}{2C(\theta_0)} > \varepsilon > 0$ escogemos $\delta > 0$ tal que

$$|\theta_0 - \theta| \leq \delta \implies \|\Lambda_{\theta_0} - \Lambda_{\theta}\| \leq \varepsilon. \quad (2.3)$$

Si $|\theta - \theta_0| \leq \delta$ basándonos en la desigualdad triangular obtenemos para cada $f \in Y_{\theta}^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)$

$$\begin{aligned} \|f\|_{Y_{\theta}^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)} &\leq C(\theta_0) \left(\|(\Lambda_{\theta_0} - \Lambda_{\theta})(f)\| + \|\Lambda_{\theta}(f)\| + \|I_r(f)\| \right) \leq \\ &\leq C(\theta_0) \left(\varepsilon \|f\|_{Y_{\theta}^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)} + \|\Lambda_{\theta}(f)\| + \|I_r(f)\| \right), \end{aligned}$$

por tanto

$$\|f\|_{Y_{\theta}^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)} \leq \frac{C(\theta_0)}{1 - \varepsilon C(\theta_0)} \left(\|\Lambda_{\theta}(f)\| + \|I_r(f)\| \right)$$

y como consecuencia de la definición

$$C(\theta) \leq \frac{C(\theta_0)}{1 - \varepsilon C(\theta_0)} < 2 C(\theta_0). \quad (2.4)$$

Un cálculo similar nos da

$$|\theta - \theta_0| \leq \delta \implies C(\theta) \leq \frac{C(\theta)}{1 - \varepsilon C(\theta)}$$

y por (2.4) obtenemos

$$|\theta_0 - \theta| \leq \delta \implies |C(\theta_0) - C(\theta)| \leq \varepsilon C(\theta_0) C(\theta) \leq 2 \varepsilon C(\theta_0)^2,$$

con lo que finaliza la prueba ya que $\varepsilon > 0$ es arbitrario. ■

Por el lema 2.2 y el teorema de Weierstrass obtenemos que el número real

$$C_1(\Omega) := \sup_{\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} C(\theta)$$

está bien definido.

Dándonos cuenta que la norma canónica $\|f\|_{H^k(\Omega \times]0,1])}$ en los espacios $H^k(\Omega \times]0,1])$, $k \in \mathbb{N}$ es equivalente a la norma

$$\|f\|_{H^k(]0,1[,L^2(\Omega))} + \|f\|_{L^2(]0,1[,H^k(\Omega))}, \quad (2.5)$$

obtenemos una constante $K_1(\Omega) \geq 1$ tal que para cada $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y cada $f \in Y_\theta^{2r+1}(\Omega \times]0,1])$

$$\begin{aligned} \|f\|_{Y_\theta^{2r+1}(\Omega \times]0,1])} &\leq C_1(\Omega) \left(\|\Lambda_\theta(f)\|_{H^{2r-1}(\Omega \times]0,1])} + \|f\|_{H^{2r}(\Omega \times]0,1])} \right) \leq \\ &\leq K_1(\Omega) \left(\|\Lambda_\theta(f)\|_{H^{2r-1}(]0,1[,L^2(\Omega))} + \|\Lambda_\theta(f)\|_{L^2(]0,1[,H^{2r-1}(\Omega))} + \right. \\ &\quad \left. + \|f\|_{H^{2r}(]0,1[,L^2(\Omega))} + \|f\|_{L^2(]0,1[,H^{2r}(\Omega))} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

El siguiente lema es el principal resultado de este apartado porque sus estimaciones cuantitativas serán fundamentales en nuestro estudio.

Lema 2.3. *Sea $r > 0$ tal que $2r \in \mathbb{N}$. Existen los números reales $K_0(\Omega) > 0$ y $\mu_0 > 0$ tal que para cada $\mu > \mu_0$ en \mathbb{R} , cada $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y cada $v \in H_0^{2r}(\Omega) \cap H^{2r+1}(\Omega)$ se tiene*

$$\begin{aligned} \left\| \left(A + e^{i\theta} \mu^2 \right) v \right\|_{H^{2r-1}(\Omega)} + (1 + \mu^{2r-1}) \left\| \left(A + e^{i\theta} \mu^2 \right) v \right\|_{L^2(\Omega)} &\geq \\ &\geq K_0(\Omega) \left(\|v\|_{H^{2r}(\Omega)} + \mu^{2r+1} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Demostración. Para la demostración de este lema seguimos el método de Agmon y Nirenberg. En primer lugar fijamos $\mu \geq 1$ en \mathbb{R} y una función $z(t) \in \mathcal{D}(]0, 1[)$ tal que $\|z\|_{L^2(]0,1])} = K_1(\Omega)$. Entonces para cada $v \in H_0^{2r}(\Omega) \cap H^{2r+1}(\Omega)$ consideramos

$$w(\mathbf{x}, t) := z(t) e^{-\mu t} v(\mathbf{x}) \in Y_\theta^{2r+1}(\Omega \times]0, 1]).$$

De la definición de Λ_θ y el carácter auxiliar fijado de z obtenemos directamente haciendo cálculos

$$\begin{aligned} \left\| \Lambda_\theta(w) \right\|_{L^2(]0,1[, H^{2r-1}(\Omega))} &\leq \left\| z \right\|_{L^2(]0,1])} \left\| (A + e^{i\theta} \mu^2) v \right\|_{H^{2r-1}(\Omega)} + \\ &+ \left\| \left(\frac{d^2 z}{d t^2} - 2 \mu \frac{d z}{d t} \right) \right\|_{L^2(]0,1])} \left\| v \right\|_{H^{2r-1}(\Omega)} \leq \\ &\leq K_1(\Omega) \left\| (A + e^{i\theta} \mu^2) v \right\|_{H^{2r-1}(\Omega)} + K_2 (1 + |\mu|) \left\| v \right\|_{H^{2r-1}(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

para algunos $K_2 > 0$. Análogamente, por la regla de derivación de Leibnitz de un producto de funciones obtenemos fácilmente

$$\begin{aligned} \left\| \Lambda_\theta(w) \right\|_{H^{2r-1}(]0,1[, L^2(\Omega))} &\leq \left\| z e^{-\mu t} \right\|_{H^{2r-1}(]0,1])} \left\| (A + e^{i\theta} \mu^2) v \right\|_{L^2(\Omega)} + \\ &+ \left\| \left(\frac{d^2 z}{d t^2} - 2 \mu \frac{d z}{d t} \right) e^{-\mu t} \right\|_{H^{2r-1}(]0,1])} \left\| v \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq K_3 (1 + |\mu|^{2r-1}) \left\| (A + e^{i\theta} \mu^2) v \right\|_{L^2(\Omega)} + K_4 (1 + |\mu|^{2r}) \left\| v \right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

para dos constantes adecuadas $K_3 > 0$ y $K_4 > 0$. Por otro lado

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \left\| w \right\|_{L^2(]0,1[, H^k(\Omega))} = \left\| z \right\|_{L^2(]0,1])} \left\| v \right\|_{H^k(\Omega)} = K_1(\Omega) \left\| v \right\|_{H^k(\Omega)} \quad (2.10)$$

y para cada $k \in \mathbb{N}$, $2r+1 \geq k \geq 1$ nuevamente por la regla de Leibnitz tenemos

$$\begin{aligned} \left\| w \right\|_{H^k(]0,1[, L^2(\Omega))} &\geq |\mu|^k \left\| v \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &- \left(\left\| \frac{d^k z}{d t^k} \right\|_{L^2(]0,1])} + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} \left\| \frac{d^{k-j} z}{d t^{k-j}} \right\|_{L^2(]0,1])} |\mu|^{k-j} \right) \left\| v \right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

y como $\mu \geq 1$ escogiendo además μ suficientemente grande obtenemos de hecho que para una constante adecuada $K_5 > 0$

$$\left\| w \right\|_{H^k(\]0,1[,L^2(\Omega))} \geq \left(|\mu|^k - K_5 (1 + |\mu|^{k-1}) \right) \left\| v \right\|_{L^2(\Omega)} > 0. \quad (2.11)$$

De la misma forma obtenemos

$$\left\| w \right\|_{H^k(\]0,1[,L^2(\Omega))} \leq K_6 (1 + |\mu|^k) \left\| v \right\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.12)$$

Utilizando (2.5) y (2.6) obtenemos para cada $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K_1(\Omega)} \left(\left\| w \right\|_{L^2(\]0,1[,H^{2r+1}(\Omega))} + \left\| w \right\|_{H^{2r+1}(\]0,1[,L^2(\Omega))} \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{K_1(\Omega)} \left\| w \right\|_{Y_\theta^{2r+1}(\Omega \times \]0,1])} \leq \left\| \Lambda_\theta(w) \right\|_{H^{2r-1}(\]0,1[,L^2(\Omega))} + \\ & + \left\| \Lambda_\theta(w) \right\|_{L^2(\]0,1[,H^{2r-1}(\Omega))} + \left\| w \right\|_{H^{2r}(\]0,1[,L^2(\Omega))} + \left\| w \right\|_{L^2(\]0,1[,H^{2r}(\Omega))}. \end{aligned}$$

De este modo utilizando (2.11) en el caso $k = 2r+1$, (2.12) tomando $k = 2r$, y (2.8), (2.9) y (2.10) tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K_1(\Omega)} \left(\left(|\mu|^{2r+1} - K_5 (1 + |\mu|^{2r}) \right) \left\| v \right\|_{L^2(\Omega)} \right) + \left\| v \right\|_{H^{2r+1}(\Omega)} \leq \\ & \leq K_1(\Omega) \left\| \left(A + e^{i\theta} \mu^2 \right) v \right\|_{H^{2r-1}(\Omega)} + \\ & + K_3 (1 + |\mu|^{2r-1}) \left\| \left(A + e^{i\theta} \mu^2 \right) v \right\|_{L^2(\Omega)} + \\ & + \left(K_4 + K_6 \right) (1 + |\mu|^{2r}) \left\| v \right\|_{L^2(\Omega)} + \left(K_1(\Omega) + K_2 \right) (1 + |\mu|) \left\| v \right\|_{H^{2r}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} & K_1(\Omega) \left\| \left(A + e^{i\theta} \mu^2 \right) v \right\|_{H^{2r-1}(\Omega)} + \\ & + K_3 (1 + |\mu|^{2r-1}) \left\| \left(A + e^{i\theta} \mu^2 \right) v \right\|_{L^2(\Omega)} \geq \\ & \geq \frac{1}{K_1(\Omega)} |\mu|^{2r+1} \left\| v \right\|_{L^2(\Omega)} - K_7(\Omega) (1 + |\mu|^{2r}) \left\| v \right\|_{L^2(\Omega)} + \end{aligned}$$

$$+ \|v\|_{H^{2r+1}(\Omega)} - \left(K_1(\Omega) + K_2 \right) (1 + |\mu|) \|v\|_{H^{2r}(\Omega)} \quad (2.13)$$

donde

$$K_7(\Omega) := K_4 + K_6 + \frac{K_5}{K_1(\Omega)}.$$

Ahora aplicamos una propiedad de interpolación de los espacios de Sobolev. Si $r = \frac{1}{2}$ tomamos $C_0 := 1$. Si $r = \frac{k+1}{2}$ con $k \in \mathbb{N}$ por las propiedades de interpolación de los espacios de Sobolev existe una constante $C_0 > 0$ tal que

$$\forall f \in H^{2r+1}(\Omega) \quad \|f\|_{H^{2r}(\Omega)} \leq C_0 \|f\|_{H^{2r+1}(\Omega)}^{\frac{2r}{2r+1}} \|f\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2r+1}}. \quad (2.14)$$

Además, utilizando la conocida desigualdad elemental

$$\forall 0 \leq u, \quad 0 \leq v, \quad 0 < \eta < 1 \quad uv \leq (1 - \eta) u^{\frac{1}{1-\eta}} + \eta v^{\frac{1}{\eta}}$$

y definiendo

$$K_9(\Omega) := C_0 (K_1(\Omega) + K_2) (1 + |\mu|) \quad K_{10}(\Omega) := \frac{1}{K_1(\Omega)}$$

podemos continuar la estimación (2.13) de la forma

$$\begin{aligned} &\geq \left(\frac{1}{K_1(\Omega)} |\mu|^{2r+1} - K_7(\Omega) (1 + |\mu|^{2r}) - \frac{1}{2r+1} K_9(\Omega)^{2r+1} \right) \times \\ &\quad \times \|v\|_{L^2(\Omega)} + \left(1 - \left(\frac{2r}{2r+1} \right) \right) \|v\|_{H^{2r+1}(\Omega)} = \\ &= K_{10}(\Omega) |\mu|^{2r+1} \left(1 - \frac{K_7(\Omega) (1 + |\mu|^{2r})}{K_{10}(\Omega) |\mu|^{2r+1}} - \frac{1}{2r+1} \frac{K_9(\Omega)^{2r+1}}{K_{10}(\Omega) |\mu|^{2r+1}} \right) \times \\ &\quad \times \left(\|v\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2r+1} \|v\|_{H^{2r+1}(\Omega)} \right) \geq \end{aligned}$$

y por tanto existe $\mu_0 \geq 1$ tal que si $|\mu| \geq \mu_0$ podemos continuar de la siguiente forma

$$\geq \frac{K_{10}(\Omega)}{2} |\mu|^{2r+1} \left(\|v\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2r+1} \|v\|_{H^{2r}(\Omega)} \right) \geq$$

$$\geq K_{11}(\Omega) \left(|\mu|^{2r+1} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{H^{2r}(\Omega)} \right),$$

donde $K_{11}(\Omega) := \min\left\{\frac{K_{10}(\Omega)}{2}, \frac{1}{2r+1}\right\}$. De modo que obtenemos (2.7) escogiendo por ejemplo

$$K_0(\Omega) := \frac{K_{11}(\Omega)}{(K_1(\Omega) + K_3)}. \quad \blacksquare$$

Ahora podemos estimar la norma del operador $(\mathcal{X}_p)^{-1}$.

Lema 2.4. *Sea $r > \frac{1}{2}$ en \mathbb{R} . Sea $\mathfrak{X}^{2r+1}(\Omega)$ el subespacio topológico de $H^{2r+1}(\Omega)$ definido por*

$$\mathfrak{X}^{2r+1}(\Omega) = \left\{ f \in H_0^{2r}(\Omega) \cap H^{2r+1}(\Omega) \mid A(f) \in H_0^{2r-1}(\Omega) \right\}.$$

Entonces $\mathfrak{X}^{2r+1}(\Omega)$ es un espacio de Banach y existe $\mu_1(\Omega) \geq 1$ y $C(r) > 0$ tales que, si $p := \psi + i\nu \in \mathbb{C}$ y $\psi - \frac{1}{2\tau} > \mu_1(\Omega)$ el operador \mathcal{X}_p es un isomorfismo de $\mathfrak{X}^{2r+1}(\Omega)$ sobre $H_0^{2r-1}(\Omega)$ que verifica

$$\left| \text{Arg} \left(p - \frac{1}{2\tau} \right) \right| \leq \frac{\pi}{4} \implies \|(\mathcal{X}_p)^{-1}\| \leq \frac{C(r)}{K_0(\Omega)} \frac{1}{\left| p - \frac{1}{2\tau} \right|^2} \quad (2.15)$$

y

$$\left| \text{Arg} \left(p - \frac{1}{2\tau} \right) \right| > \frac{\pi}{4} \implies \|(\mathcal{X}_p)^{-1}\| \leq \frac{1}{\left| p - \frac{1}{2\tau} \right|^2 - \|A\|}. \quad (2.16)$$

Demostración. Por las propiedades elementales de los espacios de interpolación es suficiente con hacer (y así haremos) la demostración sólo en los casos $2r \in \mathbb{N}$.

Como $H_0^{2r}(\Omega) \cap H^{2r+1}(\Omega) \subset H_0^{2r-1}(\Omega)$ es sencillo ver que para cada $p \in \mathbb{C}$ el espacio $\mathfrak{X}^{2r+1}(\Omega)$ coincide con el conjunto de aquellas funciones $f \in H_0^{2r}(\Omega) \cap H^{2r+1}(\Omega)$ tales que

$$\mathcal{X}_p(f) = \left(A + \left(p - \frac{1}{2\tau} \right)^2 \right) (f) \in H_0^{2r-1}(\Omega).$$

Como A es un operador elíptico autoadjunto, por el teorema 19.5 en [41] el espectro de A está formado por infinitos autovalores discretos y reales con límite $+\infty$. Como la inclusión $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ es compacta (por el teorema de Rellich-Kondrašov) y A es $H_0^1(\Omega)$ -coercivo (ver el ejemplo 19.1 en [41]), teniendo en cuenta el teorema 17.11 de [41] el operador

$$\mathcal{X}_p = A + \left(p - \frac{1}{2\tau} \right)^2$$

es un *isomorfismo* de $H_0^{2r}(\Omega)$ en $H^{-2r}(\Omega)$ para cada número complejo p tal que $-\left(p - \frac{1}{2\tau}\right)^2$ no es un autovalor de A . Entonces, para tales números p , dada $f \in H_0^{2r-1}(\Omega) \subset H^{-2r}(\Omega)$ hay una *única* $U_f \in H_0^{2r}(\Omega)$ tal que $\mathcal{X}_p(U_f) = f$. Por el lema global de Weyl para operadores elípticos (ver el corolario 13.1 en [41] por ejemplo) tenemos de hecho que $U_f \in H^{2r+1}(\Omega)$, es decir, $U_f \in \mathfrak{R}^{2r+1}(\Omega)$. Por tanto, la aplicación

$$\Psi_p^{2r+1} : H_0^{2r-1}(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{R}^{2r+1}(\Omega)$$

tal que $\Psi_p^{2r+1}(f) = U_f$ está bien definida y es la inversa de la aplicación exhaustiva

$$\mathcal{X}_p : \mathfrak{R}^{2r+1}(\Omega) \longrightarrow H_0^{2r-1}(\Omega).$$

Por el teorema del homomorfismo, \mathcal{X}_p es un isomorfismo de $\mathfrak{R}^{2r+1}(\Omega)$ sobre $H_0^{2r-1}(\Omega)$.

Ahora vamos a estimar $\|(\mathcal{X}_p)^{-1}\|$.

Sean $\mu_0 \geq 1$ y $K_0(\Omega) > 0$ los números reales definidos en el lema 2.3. Definimos $\mu_1(\Omega) := \max\{\mu_0, \|A\|\}$ y consideramos $p = \psi + i\nu$ tal que $\psi - \frac{1}{2\tau} > \mu_1(\Omega)$. Vamos a comenzar probando el caso $|\text{Arg}(p - \frac{1}{2\tau})| > \frac{\pi}{4}$. Como

$$\begin{aligned} \forall f \in H_0^{2r-1}(\Omega) \quad f &= \mathcal{X}_p(\Psi_p^{2r+1}(f)) = \\ &= \left(A + \left(p - \frac{1}{2\tau} \right)^2 \right) ((\mathcal{X}_p)^{-1}(f)), \end{aligned}$$

tenemos

$$\|f\|_{H_0^{2r-1}(\Omega)} \geq \left(\left| p - \frac{1}{2\tau} \right|^2 - \|A\| \right) \|(\mathcal{X}_p)^{-1}(f)\|_{H^{2r+1}(\Omega)}$$

y por tanto, si p verifica además $|\text{Arg}(p - \frac{1}{2\tau})| > \frac{\pi}{4}$ tendremos

$$\left| p - \frac{1}{2\tau} \right| \geq \sqrt{2} \left(\psi - \frac{1}{2\tau} \right) > \sqrt{2} \mu_1(\Omega),$$

con lo que

$$\left\| \left(\mathcal{X}_p \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\left| p - \frac{1}{2\tau} \right|^2 - \|A\|} \leq \frac{1}{2 \mu_1(\Omega)^2 - \|A\|}. \quad (2.17)$$

Por otro lado, para cada multi-índice α tal que $|\alpha| \leq 2r + 1$ y cada $f \in H_0^{2r-1}(\Omega)$, tenemos

$$\mathcal{X}_p \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \Psi_p^{2r+1}(f) \right) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \left(\mathcal{X}_p(\Psi_p^{2r+1}(f)) \right) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha}$$

y por tanto, por la propiedad del isomorfismo

$$\Psi_p^{2r-|\alpha|+1} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \left(\Psi_p^{2r+1}(f) \right) \in H_0^{2r-|\alpha|+1}(\Omega). \quad (2.18)$$

Entonces si p verifica $\text{Arg}(p - \frac{1}{2\tau}) \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, escogiendo $\theta = \text{Arg}(p - \frac{1}{2\tau}) \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ y $\mu = |p - \frac{1}{2\tau}|$ en el lema 2.3, como $\mathcal{X}_p = A + \left(p - \frac{1}{2\tau}\right)^2$ obtenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} & \left(2 + \left| p - \frac{1}{2\tau} \right|^{2r-|\alpha|} \right) \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right\|_{H^{2r-|\alpha|-1}(\Omega)} \geq \\ & \geq \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right\|_{H^{2r-|\alpha|-1}(\Omega)} + \left(1 + \left| p - \frac{1}{2\tau} \right|^{2r-|\alpha|} \right) \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right\|_{L^2(\Omega)} = \\ & = \left\| \left(\mathcal{X}_p \left(\Psi_p^{2r+1} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right) \right) \right) \right\|_{H^{2r-|\alpha|-1}(\Omega)} + \\ & + \left(1 + \left| p - \frac{1}{2\tau} \right|^{2r-|\alpha|} \right) \left\| \left(\mathcal{X}_p \left(\Psi_p^{2r+1} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right) \right) \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \geq \end{aligned}$$

según el lema 2.3 directamente

$$\geq K_0(\Omega) \left(\left\| \Psi_p^{2r+1} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right) \right\|_{H^{2r-|\alpha|+1}(\Omega)} + \right.$$

$$+ \left| p - \frac{1}{2\tau} \right|^{2r-|\alpha|+2} \left\| \Psi_p^{2r+1} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \geq \quad (2.19)$$

$$\geq K_0(\Omega) \max \left\{ \left| p - \frac{1}{2\tau} \right|^{2r-|\alpha|+2} \left\| \Psi_p^{2r+1} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}, \right. \\ \left. \left\| \Psi_p^{2r+1} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right) \right\|_{H^{2r-|\alpha|+1}(\Omega)} \right\}. \quad (2.20)$$

Entonces despejando

$$\left\| (\mathcal{X}_p)^{-1} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1 + \frac{2}{\left| p - \frac{1}{2\tau} \right|^{2r-|\alpha|}}}{K_0(\Omega) \left| p - \frac{1}{2\tau} \right|^2} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right\|_{H_0^{2r-|\alpha|-1}(\Omega)} \leq \\ \leq \frac{3}{K_0(\Omega) \left| p - \frac{1}{2\tau} \right|^2} \|f\|_{H_0^{2r-1}(\Omega)}$$

y suponiendo todos los multi-índices $|\alpha| \leq 2r + 1$ obtenemos otra constante $C(r)$ tal que

$$\left\| (\mathcal{X}_p)^{-1}(f) \right\|_{H^{2r+1}(\Omega)} \leq \frac{C(r)}{K_0(\Omega)} \frac{1}{\left| p - \frac{1}{2\tau} \right|^2} \|f\|_{H_0^{2r-1}(\Omega)}$$

con lo que el lema se demuestra fácilmente. \blacksquare

Lema 2.5. *Sea S_{μ_1} el semiespacio $\operatorname{Re}(p) > \mu_1$ en \mathbb{C} . La aplicación $p \rightarrow (\mathcal{X}_p)^{-1}$ de S_{μ_1} en $\mathcal{L}(H_0^{2r-1}(\Omega), H^{2r+1}(\Omega))$ es holomorfa.*

Demostración. Sea $p_1 \in S_{\mu_1}$ y $\delta > 0$ tales que si $|p - p_1| < \delta$ entonces $p \in S_{\mu_1}$. Como

$$\|\mathcal{X}_p - \mathcal{X}_{p_1}\| = \left| \left(p - \frac{1}{2\tau} \right)^2 - \left(p_1 - \frac{1}{2\tau} \right)^2 \right|$$

y por (2.15) y (2.17)

$$\left\| (\mathcal{X}_{p_1})^{-1} - (\mathcal{X}_p)^{-1} \right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| (\mathcal{X}_p)^{-1} (\mathcal{X}_p - \mathcal{X}_{p_1}) (\mathcal{X}_{p_1})^{-1} \right\| \leq \left\| \mathcal{X}_p - \mathcal{X}_{p_1} \right\| \left\| (\mathcal{X}_{p_1})^{-1} \right\| \times \\
&\times \max \left\{ \frac{1}{2 \mu_1(\Omega)^2 - \|A\|}, \sup_{|p-p_1| \leq \delta} \left(\frac{C(r)}{K_0(\Omega)} \frac{1}{|p - \frac{1}{2\tau}|^2} \right) \right\}, \quad (2.21)
\end{aligned}$$

lo que muestra que la aplicación $p \longrightarrow (\mathcal{X}_p)^{-1}$ es continua en $p_1 \in S_{\mu_1}$. Ahora, como consecuencia de la identidad del resolvente y la regla de la cadena (ver teorema 3.1, capítulo 4 en [19] para los detalles) obtenemos la holomorfía de la aplicación estudiada. ■

Como consecuencia de los lemas 2.4 y 2.5, la aplicación dual

$$(\mathcal{X}_p)' : H^{-(2r-1)}(\Omega) \longrightarrow (\mathfrak{A}^{2r+1}(\Omega))'$$

también es un isomorfismo. Además, el espacio dual $(\mathfrak{A}^{2r+1}(\Omega))'$ es un cociente del dual $(H^{2r+1}(\Omega))'$. Como \mathcal{X} es autoadjunto es fácil ver que \mathcal{X}_p es formalmente autoadjunto. Por tanto

$$\mathcal{X}'_p : H^{-(2r-1)}(\Omega) \longrightarrow (\mathfrak{A}^{2r+1}(\Omega))'$$

es una extensión de la aplicación

$$\mathcal{X}_p : H_0^{2r+1}(\Omega) \longrightarrow H_0^{2r-1}(\Omega)$$

y además,

$$\left\| ((\mathcal{X}_p)')^{-1} \right\|_{\mathcal{L}((\mathfrak{A}^{2r+1}(\Omega))', H^{-(2r-1)}(\Omega))} = \left\| (\mathcal{X}_p)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(H_0^{2r-1}(\Omega), \mathfrak{A}^{2r+1}(\Omega))}. \quad (2.22)$$

Lema 2.6. *Sea $\mathcal{J}_p(\Omega)$ el subespacio de $H^{-(2r-1)}(\Omega)$ definido por*

$$\mathcal{J}_p(\Omega) = \left\{ U \in H^{2r-1}(\Omega) \mid \mathcal{X}'_p(U) \in (\mathfrak{A}^{2r+1}(\Omega))' \cap H^{-(2r-1)}(\Omega) \right\}.$$

Sea \mathcal{H}_p la restricción a $\mathcal{J}_p(\Omega)$ de \mathcal{X}'_p . Entonces \mathcal{H}_p es un isomorfismo de $\mathcal{J}(\Omega)$ sobre $(\mathfrak{A}^{2r+1}(\Omega))' \cap H^{-(2r-1)}(\Omega)$ y existe $K(\Omega) > 0$ tal que

$$\|(\mathcal{H}_p)^{-1}\| \leq K(\Omega) \|(\mathcal{X}'_p)^{-1}\|.$$

Demostración. Por los lemas 2.4 y 2.5, \mathcal{H}_p es continuo de $\mathcal{J}_p(\Omega)$ en su imagen

$$(\mathcal{H}_p(\mathcal{J}_p(\Omega))) \subset (\mathfrak{X}^{2r+1}(\Omega))' \cap H^{-(2r-1)}(\Omega).$$

Como \mathcal{X}_p es $H_0^1(\Omega)$ -coercivo (ver el ejemplo 19.1 en [41]), existe $K \in \mathbb{R}$ tal que el operador $\mathcal{X}_p + K$ es un isomorfismo de $H_0^{2r-1}(\Omega)$ sobre $H^{-(2r-1)}(\Omega)$. Por tanto, dada

$$f \in (\mathfrak{X}^{2r+1}(\Omega))' \cap H^{-(2r-1)}(\Omega) \subset H^{-(2r+1)}(\Omega)$$

existe $U_1 \in H_0^{2r-1}(\Omega)$ tal que $(\mathcal{X}_p + K)(U_1) = f$. Ahora, por el teorema 5.4 del capítulo 2 de [19] existe $U_2 \in H^{2r+1}(\Omega)$ tal que $\mathcal{X}_p(U_2) = K U_1$. Entonces

$$\mathcal{X}_p(U_1 + U_2) = f$$

y claramente

$$U_1 + U_2 \in H^{2r-1}(\Omega) \subset H^{-(2r-1)}(\Omega)$$

con lo que $U_1 + U_2 \in \mathcal{J}_p(\Omega)$. Entonces

$$\mathcal{X}_p : \mathcal{J}_p(\Omega) \longrightarrow (\mathfrak{X}^{2r+1}(\Omega))' \cap H^{2r-1}(\Omega)$$

es biyectiva y claramente continua. Sabemos también que

$$(\mathcal{H}_p)^{-1} : (\mathfrak{X}^{2r+1}(\Omega))' \cap H^{-(2r-1)}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{J}_p(\Omega)$$

tiene gráfica cerrada, lo que puede verse claramente a partir de los lemas 2.4 y 2.5 y la continuidad de la inclusión

$$(\mathfrak{X}^{2r+1}(\Omega))' \cap H^{-(2r-1)}(\Omega) \subset (\mathfrak{X}^{2r+1}(\Omega))'.$$

Como $(\mathfrak{X}^{2r+1}(\Omega))' \cap H^{-(2r-1)}(\Omega)$ es un espacio de Banach cuando está provisto con la norma de la intersección, \mathcal{H}_p es un isomorfismo (teorema del homomorfismo). Con lo que se obtiene que $\mathcal{J}_p(\Omega)$ es un subespacio de Banach de $H^{-(2r-1)}(\Omega)$.

Una vez tenemos demostrada la primera parte del lema pasamos a la segunda. Para estimar la norma de \mathcal{H}_p^{-1} tenemos que observar la cadena de inclusiones continuas

$$H_0^{2r-1}(\Omega) \subset H^{-2r}(\Omega) \subset (\mathfrak{X}^{2r+1}(\Omega))' \cap H^{-(2r-1)}(\Omega) \subset (\mathfrak{X}^{2r+1}(\Omega))'$$

y como consecuencia

$$H_0^{2r+1}(\Omega) \subset \mathcal{J}_p(\Omega) \subset H^{-(2r-1)}(\Omega)$$

de forma continua. Como \mathcal{X}_p es formalmente autoadjunto tenemos

$$\mathcal{X}'_p(H_0^{2r+1}(\Omega)) \subset H_0^{2r-1}(\Omega)$$

y la conclusión de la demostración del lema se obtiene fácilmente a partir de (2.22). ■

2.2. Teoremas de existencia, unicidad y regularidad

Los resultados de la sección anterior se utilizarán de forma esencial en el capítulo 5 para estudiar la existencia y regularidad de las soluciones fundamentales del operador \mathcal{A} (y en particular de su función de Green que se estudia en el capítulo 6). Tal y como se ha mencionado en la introducción vamos a ver la aplicación de los resultados anteriores para obtener teoremas de existencia, unicidad y regularidad de las soluciones para el problema adjunto y suponiendo que los datos son regulares. Destacamos que los resultados del resto de este capítulo se podrían haber suprimido porque de hecho, en *el capítulo siguiente se mejorarán notablemente* mediante otros métodos. Sin embargo los hemos mantenido como muestra de la aplicación de los resultados de la sección 2.1.

Teorema 2.1. *Sea r tal que $2r \in \mathbb{N}$, \mathfrak{R} un operador frontera como en (1.6) y $F \in H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$. Entonces existe una única $U \in H^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[)$ tal que*

$$\mathcal{A}^*(U) = F \quad \text{en } \Omega \times]0, T[, \quad (2.23)$$

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \mathfrak{R}(U) = 0,$$

$$U(\mathbf{x}, T) = \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Demostración. Para denotar la composición de dos operadores A y B utilizaremos la notación $A \circ B$ ó AB indistintamente según ofrezcan en cada caso mayor claridad. Denotamos por \mathfrak{L} la transformada de Schwartz-Laplace con respecto a t . Consideramos el número $\mu_1(\Omega)$ del lema 2.4. Por este lema $\|(\mathcal{X}_p)^{-1}\|$ es una función de crecimiento lento de $|p - \frac{1}{2\tau}|$ cuando $Re(p - \frac{1}{2\tau}) > \mu_1(\Omega)$. Además, la aplicación

$$p \longrightarrow \frac{\alpha}{\tau} (\mathcal{X}_p)^{-1} \in \mathcal{L}(H_0^{2r-1}(\Omega), H_0^{2r+1}(\Omega)), \quad Re\left(p - \frac{1}{2\tau}\right) > \mu_1(\Omega)$$

es holomorfa (lema 2.5). Por ello, por un conocido resultado sobre soportes de transformadas de Laplace debido a Lions (ver [17] ó §3, proposición 22 en [32]), existe la inversa de la transformada de Laplace

$$\mathcal{G} := \frac{\alpha}{\tau} \mathfrak{L}^{-1} [(\mathcal{X}_p)^{-1}] \in \mathcal{D}'([\mu_1(\Omega), \infty[, \mathcal{L}(H_0^{2r-1}(\Omega), H_0^{2r+1}(\Omega))). \quad (2.24)$$

Por otro lado, dada $F \in H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$, consideramos la extensión canónica $\bar{F} \in H^{2r-1,2r}(\Omega \times \mathbb{R})$ de F definida por el método de reflexión como

$$\bar{F}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} F(\mathbf{x}, t) & \text{si } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T[\\ 0 & \text{si } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [T, \infty[\\ \sum_{k=1}^{2r} \lambda_k F(\mathbf{x}, -k t) & \text{si } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times] -\infty, 0] \end{cases}$$

donde los números λ_k , $1 \leq k \leq 2r$ se eligen de forma tal que

$$\sum_{j=1}^{2r} (-1)^j k^j \lambda_k = 1 \quad \forall 1 \leq k \leq 2r,$$

asegurando de esta forma las igualdades

$$\forall 0 \leq j \leq 2r \quad \frac{\partial^j \bar{F}}{\partial t^j}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial^j F}{\partial t^j}(\mathbf{x}, 0) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Claramente \bar{F} tiene soporte compacto con respecto a la variable t contenido en $[-T, T]$. Por la desigualdad de Hölder, la función \bar{F} define canónicamente una distribución vectorial (denotada nuevamente con el mismo símbolo) $\bar{F} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, H^{2r-1}(\Omega))$ mediante la regla

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \langle \bar{F}(\mathbf{x}, t), \phi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \bar{F}(\mathbf{x}, t) \phi(t) dt \in H^{2r-1}(\Omega).$$

Entonces existe la transformada de Laplace $\mathfrak{L}[\bar{F}](p) \in H^{2r-1}(\Omega)$ y podemos hallar $p_0 \geq \mu_1(\Omega) > 0$ tal que para cada $p \in \mathbb{C}$ que verifica $\operatorname{Re}(p) > p_0$, usando el operador diferencial \mathcal{X}_p , obtenemos

$$\mathfrak{L}[\mathcal{A}^*(\bar{F})](\mathbf{x}, p) = \frac{\tau}{\alpha} \mathcal{X}_p \left(\mathfrak{L}[\bar{F}(\mathbf{x}, t)](p) \right) (\mathbf{x}) \in H^{2r-1}(\Omega). \quad (2.25)$$

Ahora, denotando la convolución con respecto a la variable t con el símbolo $*$, por (2.25) la convolución de las distribuciones vectoriales $\mathcal{G} * \bar{F}$ está bien definida y por el teorema de convolución (ver teorema 43, §7, capítulo II en [32]) tenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[\mathcal{A}^*(\mathcal{G} * \bar{F})](p) &= \frac{\tau}{\alpha} \mathcal{X}_p \left(\mathfrak{L}[(\mathcal{G} * \bar{F})] \right) (p) = \\ &= \frac{\tau}{\alpha} \mathcal{X}_p \left(\mathfrak{L}[\mathcal{G}](p) \circ \mathfrak{L}[\bar{F}](p) \right) = \frac{\tau}{\alpha} \mathcal{X}_p \left(\mathfrak{L}[\mathcal{G}](p) \right) \circ \mathfrak{L}[\bar{F}](p) = \mathfrak{L}[\bar{F}](p) \end{aligned}$$

y por la unicidad de la inversa de la transformada de Laplace

$$\mathcal{A}^*(\mathcal{G} * \bar{F}) = \bar{F}, \quad (2.26)$$

lo que significa que la *distribución vectorial* $\bar{U} := \mathcal{G} * \bar{F}$ verifica $\mathcal{A}^*(U) = \bar{F}$ y tiene su soporte contenido en $[-T, T]$.

Vamos a denotar por \mathcal{F} la transformada de Fourier con respecto a t . Claramente, como $\bar{F} \in H^{2r-1, 2r}(\Omega \times \mathbb{R})$, para cada $\eta > \mu_0(T)$ tenemos

$$e^{-\eta t} \bar{F} \in H^{2r-1, 2r}(\Omega \times \mathbb{R}) \quad (2.27)$$

también y, como consecuencia, $\mathcal{F}[e^{-\eta t} \bar{F}](\nu) \in H^{2r-1}(\Omega)$ para cada $\nu \in \mathbb{R}$. De nuevo por el teorema de convolución obtenemos

$$\begin{aligned} \forall \eta > \mu_0(T), \quad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F} \left[e^{-\eta t} (\mathcal{G} * \bar{F}) \right] (\nu) &= \mathfrak{L}[\mathcal{G} * \bar{F}](\eta + i\nu) = \\ &= \mathfrak{L}[\mathcal{G}](\eta + i\nu) \left(\mathfrak{L}[\bar{F}](\eta + i\nu) \right) = \frac{\alpha}{\tau} (\mathcal{X}_{\eta+i\nu})^{-1} \left(\mathcal{F}[e^{-\eta t} \bar{F}](\nu) \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

y escribiendo $p := \eta + i\nu$

$$\left\| \mathcal{F} \left[e^{-\eta t} \bar{U} \right] (\nu) \right\|_{H^{2r+1}(\Omega)} = \frac{\alpha}{\tau} \left\| (\mathcal{X}_p)^{-1} \left(\mathcal{F}[e^{-\eta t} \bar{F}](\nu) \right) \right\|_{H^{2r+1}(\Omega)} \leq$$

y por (2.20)

$$\leq \frac{1}{K_0(\Omega)} \frac{\alpha}{\tau} \left(\left\| \mathcal{F}[e^{-\eta t} \bar{F}](\nu) \right\|_{H^{2r-1}(\Omega)} + \right.$$

$$+ \left(1 + \left| p - \frac{1}{2\tau} \right|^{2r} \right) \left\| \mathcal{F}[e^{-\eta t} \bar{F}](\nu) \right\|_{L^2(\Omega)},$$

lo que significa que $\mathcal{F}(e^{-\eta t} \bar{U})(\nu) \in H^{2r+1}(\Omega)$. Por el teorema de Plancherel sobre las transformadas de Fourier vectoriales (ver página 73, capítulo I en [32]), a partir de (2.27) obtenemos $e^{-\eta t} \bar{U} \in L^2(\mathbb{R}, H^{2r+1}(\Omega))$ y por la compacidad del soporte de \bar{U}

$$\bar{U} = e^{\eta t} \left(e^{-\eta t} \bar{U} \right) \in L^2(\mathbb{R}, H^{2r+1}(\Omega)). \quad (2.29)$$

Un argumento similar pero estimando $\left\| \mathcal{F} \left[e^{-\eta t} \bar{U} \right] (\nu) \right\|_{L^2(\Omega)}$ a partir de (2.20), lleva a

$$\bar{U} \in H^{2r+1}(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \quad (2.30)$$

y por tanto $\bar{U} \in H^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times \mathbb{R})$. En particular $\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}, H^{2r+1}(\Omega))$ y $\mathcal{X}(\bar{U}) \in L^2(\mathbb{R}, H^{2r-1}(\Omega))$. De la igualdad $\mathcal{A}^*(\bar{U}) = \bar{F} \in L^2(\mathbb{R}, H^{2r-1}(\Omega))$ deducimos

$$\frac{\tau}{\alpha} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = \bar{F} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} - \mathcal{X}(\bar{U}) \in L^2(\mathbb{R}, H^{2r-1}(\Omega))$$

y por integración sobre intervalos temporales finitos y aplicación de la desigualdad de Hölder vemos que $\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^{2r-1}(\Omega))$. De la misma forma $\bar{U} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^{2r-1}(\Omega))$ y por tanto $\bar{U}(\mathbf{x}, T) = \frac{\partial \bar{U}}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0$ para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, ya que \bar{U} tiene soporte con respecto a t contenido en $[-T, T]$.

Finalmente, si $U \in H^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, T[)$ denota la restricción de \bar{U} a $\Omega \times]0, T[$ es obvio que U es una solución de nuestro problema.

En lo concerniente a la unicidad de la solución, supongamos que existe otra solución U_1 con extensión estándar \bar{U}_1 a $\Omega \times \mathbb{R}$ como en el caso de U . Entonces $\mathfrak{L}((\mathcal{G} * \mathcal{A}^*)(\bar{U} - \bar{U}_1)) = 0$ y por el teorema de convolución

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{L} \left[(\mathcal{G} * \mathcal{A}^*)(\bar{U} - \bar{U}_1) \right] = \mathfrak{L}[\mathcal{G}] \left(\mathfrak{L}[\mathcal{A}^*](\bar{U} - \bar{U}_1) \right) = \\ &= \frac{\alpha}{\tau} \left(\mathcal{X}_p \right)^{-1} \left(\left(\mathcal{X}_p \right) (\bar{U} - \bar{U}_1) \right) = \frac{\alpha}{\tau} (\bar{U} - \bar{U}_1) \end{aligned}$$

obteniendo $U = U_1$. ■

Corolario 2.1. *Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)$. Entonces existe una única función $U \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$ tal que*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*(U) &= \varphi \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\\ U(\mathbf{x}, T) &= \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0 \quad \text{en } \Omega \\ \text{y } \mathfrak{R}(U)(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times]0, T[. \end{aligned}$$

Demostración. Por el teorema 2.1 para cada r que verifica $2r \in \mathbb{N}$ existe una única función $U_r \in H^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, T[)$ verificando las condiciones

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*(U_r) &= \varphi \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\\ U_r(\mathbf{x}, T) &= \frac{\partial U_r}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \mathfrak{R}(U_r) &= 0. \end{aligned}$$

La unicidad implica que $U := U_r = U_{r'}$ cualesquiera que sean $2r \in \mathbb{N}$, $2r' \in \mathbb{N}$. Entonces

$$U \in \bigcap_{2r \in \mathbb{N}} H^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, T[).$$

Escojamos ahora una bola abierta B_R en \mathbb{R}^{n+1} , un conjunto abierto Ω_1 en \mathbb{R}^n y $T_1 > 0$ tal que

$$\overline{\Omega \times]0, T[} \subset B_R \subset \Omega_1 \times]-T_1, T_1[.$$

Por la observación 2.2 en el capítulo 4 de [19] existe $V(\mathbf{x}, t) \in H^{2r+1, 2r+1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ tal que $U(\mathbf{x}, t)$ coincide con la restricción de $V(\mathbf{x}, t)$ a $(\Omega \times]0, T[)$. Como

$$V(\mathbf{x}, t) \in H^{2r+1, 2r+1}(\Omega_1 \times]-T_1, T_1[),$$

por la proposición 2.3, capítulo 4 en [19] existen las derivadas parciales mixtas y verifican

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{|\alpha|+j}}{\partial \mathbf{x}^\alpha \partial t^j} \left(V(\mathbf{x}, t) \right) &\in H^{2r+1-|\alpha|-j, 2r+1-|\alpha|-j}(\Omega_1 \times]-T_1, T_1[) \subset \\ &\subset L^2(\Omega_1 \times]-T_1, T_1[) \end{aligned}$$

para cada multi-índice espacial α y cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $|\alpha| + j \leq 2r + 1$. Esto quiere decir que $V(\mathbf{x}, t) \in H^h(\Omega_1 \times] - T_1, T_1[)$ para cada $h \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq h \leq 2r + 1$. Como consecuencia, $\chi_{B_R}(\mathbf{x}, t) V(\mathbf{x}, t) \in H^h(B_R)$ y, como la frontera ∂B_R es de clase \mathcal{C}^∞ y los puntos interiores de B_R están en un sólo lado de dicha frontera ∂B_R , por el corolario 9.1, capítulo 1 en [19] tenemos que de hecho $V(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{B_R})$. Por tanto $U(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times]0, T[)$. ■

Nota. El corolario 9.1 del capítulo 1 de [19] no se puede aplicar directamente porque $(\partial\Omega \times]0, T[)$ no es de clase \mathcal{C}^∞ en $(\partial\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times \{T\})$.

Corolario 2.2. Sean r tal que $2r \in \mathbb{N}$ y $F \in H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$. Entonces existe una única $U \in H^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(U) &= F \quad \text{en } \Omega \times]0, T[, & (2.31) \\ \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} &= 0, \\ U(\mathbf{x}, 0) &= \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Demostración. Para demostrar este corolario es suficiente con hacer el cambio de variable $t = T - t'$ y aplicar el teorema 2.1 al problema resultante para el operador \mathcal{A}^* . ■

Corolario 2.3. Suponemos $F_0 \in \mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)$, $F_1 \in \mathcal{D}(\partial\Omega \times]0, T[)$, $F_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $F_3 \in \mathcal{D}(\Omega)$. Entonces existe una única función $U(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$ tal que

$$\mathcal{A}(U) = F_0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[, \quad \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = F_1 \quad \text{en } \partial\Omega \times]0, T[, \quad (2.32)$$

$$U(\mathbf{x}, 0) = F_2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = F_3 \quad \text{en } \Omega. \quad (2.33)$$

Demostración. Sea $2r \in \mathbb{N}$. Por el teorema 2.3 del capítulo 4 de [19] existe una función $W_r \in H^{2r+1,2r+2}(\Omega \times]0, T[)$ tal que

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \frac{\partial W_r}{\partial \mathbf{n}} = F_1(\mathbf{x}, t),$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \quad W_r(\mathbf{x}, 0) = F_2(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial W_r}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = F_3(\mathbf{x}).$$

Consideremos ahora el problema

$$\mathcal{A}(\Phi_r)(\mathbf{x}, t) = F_0 - \mathcal{A}(W_r)(\mathbf{x}, t) \in H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$$

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \frac{\partial \Phi_r}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \Phi_r(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi_r}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0.$$

Por el corolario 2.2 el problema anterior tiene una solución única $\Phi_r(\mathbf{x}, t) \in H^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[)$. Entonces

$$U(\mathbf{x}, t) = \Phi_r(\mathbf{x}, t) + W_r(\mathbf{x}, t) \in H^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[)$$

es la *única* solución de (2.32) y (2.33). Como $2r$ era arbitrario en \mathbb{N}

$$U \in \bigcap_{2r=1}^{\infty} H^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[)$$

con lo que se llega a la conclusión procediendo de la misma forma que en el corolario 2.1. ■

La siguiente definición tiene sentido por el teorema 2.1.

Definición 2.1. *Sea r tal que $2r \in \mathbb{N}$. Definimos $X^r(\Omega \times]0, T[)$ como el subespacio formado por las funciones $v \in H^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[)$ tales que*

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(v) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[,$$

$$v(\mathbf{x}, T) = \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \text{y} \quad \mathcal{A}^*(v) \in H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[).$$

Además, denotamos por

$$\Psi_T^r : H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[) \longrightarrow X^r(\Omega \times]0, T[)$$

la aplicación tal que $\mathcal{A}^*(\Psi_T^r(f)) = f$ para cada $f \in H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$.

Obsérvese que por definición, $X^r(\Omega \times]0, T[)$ está dotado con la norma inducida por $H^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[)$.

Teorema 2.2. *Sea $2r \in \mathbb{N}$. Entonces Ψ_T^r es un isomorfismo de $H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$ sobre $X^r(\Omega \times]0, T[)$.*

Demostración. En este caso está claro que la inversa de la aplicación Ψ_T^r es continua, es decir, \mathcal{A}^* es continuo de $X^r(\Omega \times]0, T[)$ en $H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$. De manera que lo que hay que probar es que la aplicación Ψ_T^r también es continua.

Sea $\{v_m\}_{m=1}^\infty \subset X^r(\Omega \times]0, T[)$ una sucesión tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} v_m = v \quad \text{en } H^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[)$$

y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}^*(v_m) = \bar{v} \quad \text{en } H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[).$$

Entonces,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}^*(v_m) = \mathcal{A}^*(v) \quad \text{en } H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$$

y por tanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}^*(v_m) = \mathcal{A}^*(v) \quad \text{en } H^{2r-1,2r-1}(\Omega \times]0, T[).$$

Por otro lado está claro que también se verifica

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}^*(v_m) = \bar{v} \quad \text{en } H^{2r-1,2r-1}(\Omega \times]0, T[).$$

Por tanto $\mathcal{A}^*(v) = \bar{v} \in H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$. Entonces Ψ_T^r tiene gráfica cerrada y por el teorema de la gráfica cerrada es continuo y por tanto un isomorfismo. ■

Corolario 2.4. *El teorema 2.1 y el corolario 2.1 también son ciertos para cada $r \in [\frac{1}{2}, \infty[$.*

Demostración. Por el teorema 2.2 y para cada r tal que $2r \in \mathbb{N}$ la aplicación

$$\Psi_T^r : H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[) \longrightarrow H^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[),$$

que resuelve el problema de contorno mixto dado, es continua. Entonces el resultado para un $r > \frac{1}{2}$ arbitrario se obtiene fácilmente por interpolación compleja. ■

Nota. Hemos realizado todos los cálculos anteriores con el operador \mathcal{A}^* no por su estructura particular sino pensando en las aplicaciones posteriores al operador \mathcal{A} que se estudiarán en el capítulo 5. Pero en realidad, **todos los desarrollos de este capítulo se podrían haber efectuado también y con las mismas técnicas sobre el operador \mathcal{A} .** En este sentido, destacamos los siguientes resultados que utilizaremos más adelante.

Teorema 2.3. *Dado un operador frontera \mathfrak{R} , para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)$ existe una única función $U \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$ tal que*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(U) &= \varphi \quad \text{en } \Omega \times]0, T[, \\ U(\mathbf{x}, T) &= \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0 \quad \text{en } \Omega \\ \mathfrak{R}(U)(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times]0, T[.\end{aligned}$$

A partir del teorema 2.3 y mediante el cambio de variable $t = T - t'$ se obtiene

Teorema 2.4. *Dado un operador frontera \mathfrak{R} , para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)$ existe una única función $U \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$ tal que*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^*(U) &= \varphi \quad \text{en } \Omega \times]0, T[, \\ U(\mathbf{x}, 0) &= \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{en } \Omega \\ \mathfrak{R}(U)(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times]0, T[.\end{aligned}$$

Capítulo 3

Resultados complementarios sobre la regularidad de las soluciones del problema de Neumann con datos regulares

Este capítulo tiene como **objeto** demostrar algunos resultados de regularidad de las soluciones complementarios a los probados en el capítulo 2. De hecho vamos a considerar una situación no comprendida en los resultados anteriores.

En este capítulo utilizaremos el siguiente resultado clásico

Proposición 3.1. *(Segunda fórmula de Green para el operador \mathcal{X}). Dado el operador \mathcal{X} definido en el capítulo 1 y un operador frontera \mathfrak{R} definido como en (1.6), existe un operador frontera $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$ tal que si u y v son funciones en $H^2(\Omega)$ tenemos*

$$\langle u, \mathcal{X}(v) \rangle_{\Omega} = A(u, v) + \int_{\partial\Omega} \mathfrak{R}_{\mathcal{X}}(u) \mathfrak{R}(v) d\sigma$$

donde

$$A(u, v) := \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} \frac{\partial^{|\beta|} v}{\partial \mathbf{x}^{\beta}} dx$$

es la forma canónica bilineal asociada con \mathcal{X} y $d\sigma$ es la superficie diferencial sobre $\partial\Omega$.

3.1. Un teorema de regularidad

A continuación vamos a estudiar el grado de regularidad de la solución del problema mixto $\mathcal{A}(u) = g$ en el conjunto abierto $\Omega \times]0, T[$ con $0 < T < \infty$ fijado cuando las condiciones iniciales y de contorno son del tipo $\mathfrak{R}(u)$. Definimos $H^{-1,0}(\Omega \times]0, T[) := L^2(\Omega \times]0, T[)$.

Para cada conjunto $]a, b[\subset]0, T[$ denotamos por $R_{]a,b[}(f)$ la restricción a $\Omega \times]a, b[$ de una función definida en $\Omega \times]0, T[$.

Lema 3.1. (*Una estimación a priori*). Sea $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y tomemos $g \in H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, T[)$. Supongamos que existe $U(\mathbf{x}, t) \in H^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, T[)$ que verifica el siguiente problema mixto de contorno

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{2r}(U) &:= \\ &= \mathcal{X} \left(\frac{\partial^{2r} U}{\partial t^{2r}} \right) + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial^{2r+1} U}{\partial t^{2r+1}} + \tau \frac{\partial^{2r+2} U}{\partial t^{2r+2}} \right) = \frac{\partial^{2r} g}{\partial t^{2r}} \quad \text{en } \Omega \times]0, T[, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\forall 0 \leq j \leq 2r+1 \quad \frac{\partial^j U}{\partial t^j}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.2)$$

y

$$\forall 1 \leq j \leq 2r+1 \quad \mathfrak{R} \left(\frac{\partial^j U}{\partial t^j} \right) (\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times]0, T[. \quad (3.3)$$

Entonces existe $C := C(\Omega, \beta, \eta) > 0$ (independiente de t !) tal que para cada $t \in]0, T[$ y cada $]a, b[\subset]0, T[$

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial^{2r} U}{\partial t^{2r}}(\mathbf{x}, t) \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^{2r+1} U}{\partial t^{2r+1}}(\mathbf{x}, t) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq C e^{Ct} \int_0^t \left\| \frac{\partial^{2r} g}{\partial t^{2r}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\gamma \leq C e^{Ct} \left\| g \right\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, T[)}^2 \end{aligned}$$

y

$$\left\| R_{]a,b[} \left(\frac{\partial^{2r} U}{\partial t^{2r}} \right) \right\|_{H^{1,1}(\Omega \times]a,b[)}^2 \leq 2(b-a) C e^{Cb} \left\| g \right\|_{H^{2r-1,2r}(\Omega \times]0,T[)}^2.$$

Demostración. Comenzamos la demostración dándonos cuenta que \mathcal{X} es $H^1(\Omega)$ -coercivo ya que es fuertemente elíptico (ver por ejemplo el ejemplo 19.1 en [41]) y de este modo existen $C_1 > 0, C_2 > 0$ tales que

$$\forall u \in H^1(\Omega) \quad A(u, u) + C_1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C_2 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (3.4)$$

Realizando el cambio de variables $u = e^{-C_1 t}$ se puede suponer que \mathcal{X} es $H^1(\Omega)$ -elíptico, es decir, que existe $C_3 > 0$ tal que

$$\forall u \in H^1(\Omega) \quad A(u, u) \geq C_3 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (3.5)$$

(ver capítulo 2 en [19] si se necesitan más detalles sobre este hecho).

A partir de la proposición 3.1 y la condición (3.3) obtenemos

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial^{2r+1} U}{\partial \gamma^{2r+1}}, \mathcal{X} \left(\frac{\partial^{2r} U}{\partial \gamma^{2r}} \right) \right\rangle_{\Omega} d\gamma = \int_0^t A \left(\frac{\partial^{2r+1} U}{\partial \gamma^{2r+1}}, \frac{\partial^{2r} U}{\partial \gamma^{2r}} \right) d\gamma = \quad (3.6)$$

por el teorema de Fubini e integrando por partes con respecto a γ utilizando la condición (3.2)

$$\begin{aligned} &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} \left(\int_{\Omega} a_{\alpha\beta} \int_0^t \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} \left(\frac{\partial^{2r+1} U}{\partial \gamma^{2r+1}} \right) \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \mathbf{x}^{\beta}} \left(\frac{\partial^{2r} U}{\partial \gamma^{2r}} \right) d\gamma d\mathbf{x} \right) = \\ &= A \left(\frac{\partial^{2r} U}{\partial t^{2r}}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial^{2r} U}{\partial t^{2r}}(\mathbf{x}, t) \right) - \\ &\quad \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} \left(\int_{\Omega} a_{\alpha\beta} \int_0^t \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} \left(\frac{\partial^{2r} U}{\partial \gamma^{2r}} \right) \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \mathbf{x}^{\beta}} \left(\frac{\partial^{2r+1} U}{\partial \gamma^{2r+1}} \right) d\gamma d\mathbf{x} \right) \end{aligned}$$

y a partir de la simetría $a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = a_{\beta\alpha}(\mathbf{x})$ deducimos

$$\int_0^t A \left(\frac{\partial^{2r+1} U}{\partial \gamma^{2r+1}}, \frac{\partial^{2r} U}{\partial \gamma^{2r}} \right) d\gamma = \frac{1}{2} A \left(\frac{\partial^{2r} U}{\partial t^{2r}}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial^{2r} U}{\partial t^{2r}}(\mathbf{x}, t) \right). \quad (3.7)$$

Análogamente obtenemos

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial \gamma^{2r+1}}, \frac{\partial^{2r+2}U}{\partial \gamma^{2r+2}} \right\rangle d\gamma = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial t^{2r+1}}(\mathbf{x}, t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.8)$$

Entonces, tenemos para cada $t \in]0, T[$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left\langle \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial \gamma^{2r+1}}(\mathbf{x}, \gamma), \left(\mathcal{A}^{2r}(U) \right)(\mathbf{x}, \gamma) \right\rangle_{\Omega} d\gamma = \\ & = \int_0^t \left\langle \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial \gamma^{2r+1}}(\mathbf{x}, \gamma), \left(\mathcal{X} \left(\frac{\partial^{2r}U}{\partial t^{2r}} \right) \right)(\mathbf{x}, \gamma) \right\rangle_{\Omega} d\gamma + \\ & + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \left\| \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial \gamma^{2r+1}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\gamma + \frac{\tau}{2\alpha} \left\| \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial t^{2r+1}}(\mathbf{x}, t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ & = \int_0^t \left\langle \frac{\partial^{2r}g}{\partial \gamma^{2r}}(\mathbf{x}, \gamma), \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial \gamma^{2r+1}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\rangle d\gamma \leq \\ & \leq \int_0^t \left\| \frac{\partial^{2r}g}{\partial \gamma^{2r}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial \gamma^{2r+1}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\|_{L^2(\Omega)} d\gamma. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Ahora, reuniendo los resultados previos, a partir de (3.5), (3.7) y (3.6) existe $C_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} C_0 \left\| \frac{\partial^{2r}U}{\partial t^{2r}} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 & \leq A \left(\frac{\partial^{2r}U}{\partial t^{2r}}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial^{2r}U}{\partial t^{2r}}(\mathbf{x}, t) \right) = \\ & = 2 \int_0^t A \left(\frac{\partial^{2r+1}U}{\partial \gamma^{2r+1}}(\mathbf{x}, \gamma), \frac{\partial^{2r}U}{\partial \gamma^{2r}}(\mathbf{x}, \gamma) \right) d\gamma = \\ & = \int_0^t \left\langle \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial \gamma^{2r+1}}(\mathbf{x}, \gamma), \left(\mathcal{X} \left(\frac{\partial^{2r}U}{\partial \gamma^{2r}} \right) \right)(\mathbf{x}, \gamma) \right\rangle_{\Omega} d\gamma \leq \quad (3.10) \end{aligned}$$

y por (3.9) y la desigualdad elemental

$$\int_0^t |f_1(\gamma)|^2 d\gamma + \int_0^t |f_2(\gamma)|^2 d\gamma \geq 2 \int_0^t |f_1(\gamma)| |f_2(\gamma)| d\gamma$$

(3.10) puede continuarse de la forma

$$\leq \int_0^t \left(\left\| \frac{\partial^{2r}g}{\partial \gamma^{2r}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(1 - \frac{2}{\alpha} \right) \left\| \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial \gamma^{2r+1}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) d\gamma -$$

$$\frac{\tau}{\alpha} \left\| \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial t^{2r+1}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} & C_0 \left\| \frac{\partial^{2r}U}{\partial t^{2r}} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{\alpha} \left\| \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial t^{2r+1}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq \int_0^t \left(\left\| \frac{\partial^{2r}g}{\partial \gamma^{2r}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) \left\| \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial \gamma^{2r+1}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) d\gamma \end{aligned}$$

y por ello existe una constante $C_1 > 0$ independiente de T tal que

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^{2r}U}{\partial t^{2r}}(\mathbf{x}, t) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial t^{2r+1}}(\mathbf{x}, t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq C_1 \int_0^t \left(\left\| \frac{\partial^{2r}g}{\partial \gamma^{2r}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial \gamma^{2r+1}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) d\gamma \leq \end{aligned}$$

y trivialmente

$$\begin{aligned} & \leq C_1 \int_0^t \left(\left\| \frac{\partial^{2r}g}{\partial \gamma^{2r}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial \gamma^{2r+1}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left\| \frac{\partial^{2r}U}{\partial \gamma^{2r}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) d\gamma. \end{aligned}$$

Ahora, a partir del lema de Gronwall

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^{2r}U}{\partial t^{2r}}(\mathbf{x}, t) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial t^{2r+1}}(\mathbf{x}, t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq C_1 e^{C_1 T} \int_0^T \left\| \frac{\partial^{2r}g}{\partial \gamma^{2r}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\gamma \end{aligned} \quad (3.11)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^{2r}U}{\partial t^{2r}} \right\|_{H^{1,1}(\Omega \times]0, T])}^2 \leq \\ & \leq 2 \int_0^T \left\| \frac{\partial^{2r}U}{\partial t^{2r}}(\mathbf{x}, t) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \left\| \frac{\partial^{2r+1}U}{\partial t^{2r+1}}(\mathbf{x}, t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2 C_1 e^{C_1 T} \int_0^T \left(\int_0^T \left\| \frac{\partial^{2r} g}{\partial \gamma^{2r}}(\mathbf{x}, \gamma) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\gamma \right) dt \leq \\
 &\leq 2 C_1 e^{C_1 T} \int_0^T \|g\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, T])}^2 dt \leq \\
 &\leq 2 C_1 e^{C_1 T} T \|g\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, T])}^2
 \end{aligned}$$

lo que da el resultado deseado. Obsérvese que la constante final sólo depende de la $H^1(\Omega)$ -elipticidad constante de \mathcal{X} , los parámetros físicos α, τ y la longitud del intervalo temporal $]0, T[$. ■

Teorema 3.1. *Sea $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $g \in H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, T])$ tal que*

$$\forall 0 \leq k \leq 2r-1 \quad \frac{\partial^k g}{\partial t^k}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Dado un operador frontera \mathfrak{R} consideremos el siguiente problema

$$\mathcal{A}(U) = g \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (3.12)$$

$$\mathfrak{R}(U) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times]0, T[\quad (3.13)$$

$$U(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (3.14)$$

Entonces existe una única solución $U(\mathbf{x}, t)$ de este problema en

$$H^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, T]).$$

Demostración. En lo concerniente a la unicidad de la solución señalar que si $U(\mathbf{x}, t) \in H^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, T])$ verifica $\mathcal{A}(U) = 0$ en $\Omega \times]0, T[$, $\mathfrak{R}(U) = 0$ en $\partial\Omega \times]0, T[$, y $U(\mathbf{x}, 0) = \frac{dU}{dt}(\mathbf{x}, 0) = 0$ en Ω podemos aplicar el corolario 2.3 obteniendo que $U(\mathbf{x}, t) = 0$ en $\Omega \times]0, T[$.

Para mostrar la existencia de la solución utilizaremos el método de Galerkin. Como $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$, también lo es por tanto el subespacio normado \mathcal{V} de $L^2(\Omega)$ de aquellas $v \in L^2(\Omega)$ tales que $(\mathfrak{B}(v))(\mathbf{x}) = 0$ para cada $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Por la separabilidad de \mathcal{V} escogemos una sucesión total $\{W_m(\mathbf{x})\}_{m=1}^\infty$ en \mathcal{V} . Por el procedimiento de Gram-Schmidt suponemos de hecho que $\{W_i\}_{i=1}^\infty$ es un sistema ortonormal en $L^2(\Omega)$. Como $g \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega)) = L^2(]0, T[) \hat{\otimes}_\Delta L^2(\Omega)$, es el producto tensorial natural completado de Levin-Chaney de $L^2(]0, T[)$ y $L^2(\Omega)$,

para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $k_m \in \mathbb{N}$ y una sucesión finita de funciones $\{\beta_{im}(t)\}_{i=1}^{k_m}$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^{k_m} \beta_{im}(t) W_i - g \right\|_{L^2([0, T[, L^2(\Omega))} = 0. \quad (3.15)$$

Fijamos $m \in \mathbb{N}$. Buscamos ahora funciones

$$\{g_{im}(t)\}_{i=1}^{k_m} \subset \mathcal{C}^{2r+1}([0, T])$$

para que

$$U_m(t) := \sum_{i=1}^{k_m} g_{im}(t) W_i(\mathbf{x}) \in H^{0, 2r}(\Omega \times]0, T])$$

verifique el problema mixto de contorno

$$\frac{\partial^{2r} \mathcal{A}(U_m)}{\partial t^{2r}} = \sum_{i=1}^{k_m} \beta_{im}(t) W_i(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \times]0, T[, \quad (3.16)$$

$$(\mathfrak{R}(U_m))(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times]0, T[, \quad (3.17)$$

$$\forall 0 \leq s \leq 2r+1 \quad \frac{\partial^s U_m}{\partial t^s}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (3.18)$$

Para alcanzar este propósito, por la linealidad y el hecho que cada $W_n \in \mathcal{V}$, $n \in \mathbb{N}$ es suficiente con encontrar $\{g_{im}(t)\}_{i=1}^{k_m}$ tal que

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i \leq k_m \quad \frac{d^{2r} g_{im}}{d t^{2r}} (\mathcal{X}(W_i)) + W_i \frac{1}{\alpha} \left(\frac{d^{2r+1} g_{im}}{d t^{2r+1}} + \tau \frac{d^{2r+2} g_{im}}{d t^{2r+2}} \right) = \\ = \beta_{im}(t) W_i \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\forall 1 \leq i \leq k_m \quad \forall 0 \leq s \leq 2r+1 \quad \frac{d^s g_{im}}{d t^s}(0) = 0. \quad (3.20)$$

Por la densidad de \mathcal{V} en $L(\Omega)$ y la ortonormalidad del conjunto total $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ en \mathcal{V} , las condiciones (3.19) y (3.20) son equivalentes a que $\{g_{im}(t)\}_{i=1}^{k_m}$ sea la solución del sistema

$$\left\langle \mathcal{X}(W_i), W_j \right\rangle \frac{d^{2r} g_{im}}{d t^{2m}}(t) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\alpha} \left(\langle W_i, W_j \rangle \frac{d^{2r+1} g_{im}}{d t^{2m+1}}(t) + \tau \langle W_i, W_j \rangle \frac{d^{2r+2} g_{im}}{d t^{2m+2}}(t) \right) = \\
 & = \langle \beta_{im}(t) W_i, W_j \rangle, \quad 1 \leq j \leq k_m \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

y verifique las condiciones (3.20).

Como (3.21) y (3.20) es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes respecto a la variable t . Entonces existe un único conjunto de soluciones $\{g_{im}(t)\}_{i=1}^{k_m} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que U_m se encuentra en $L^2([0, T], L^2(\Omega))$ e incluso en $H^{2r+1}([0, T], L^2(\Omega))$.

Por el lema 3.1, obtenemos que

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \left\| \frac{\partial^{2r} U_m}{\partial t^{2r}} \right\|_{H^{1,1}(\Omega \times]0, T[)} \leq K \|g\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, T[)}$$

y por la reflexividad de $H^{1,1}(\Omega \times]0, T[)$ hay funciones

$$U \in L^2([0, T[, H^1(\Omega)) \quad \text{y} \quad V \in L^2([0, T[, L^2(\Omega))$$

tales que $U = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial^{2r} U_m}{\partial t^{2r}}$ en la topología débil de $L^2([0, T[, H^1(\Omega))$ y $V = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial^{2r+1} U_m}{\partial t^{2r+1}}$ en la topología débil de $L^2([0, T[, L^2(\Omega))$. Una aplicación directa de la definición de derivada de una distribución muestra que realmente $V = \frac{\partial U}{\partial t}$.

Por tanto hemos encontrado una función $U(\mathbf{x}, t) \in H^{1,1}(\Omega \times]0, T[)$ que resuelve (3.12), (3.13) y (3.14). En el caso $r = 0$ esta solución $U(\mathbf{x}, t)$ tiene ya las propiedades de regularidad anunciadas. Para mostrar las propiedades de regularidad mayores de $U(\mathbf{x}, t)$ en los casos $r \geq 1$ aplicamos el mismo método inductivo que se aplica en el teorema 7.1 en [19]. ■

Dado $2r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $\mathcal{N}^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, T[)$ el subespacio de las funciones $g \in H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, T[)$ tales que

$$\forall 0 \leq k \leq 2r - 1 \quad \frac{\partial^k g}{\partial t^k}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{si } r > 0.$$

(Por tanto si $r = 0$ no exigimos ninguna condición sobre g , que en ese caso es una función de $L^2(\Omega \times]0, T[)$ cualquiera, es decir $\mathcal{N}^{-1, 0}(\Omega \times]0, T[) = L^2(\Omega \times]0, T[)$). Dado el operador \mathcal{A} y un operador frontera \mathfrak{R} denotamos

por $H_{\mathcal{A}\mathfrak{R}}^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[)$ al conjunto de funciones $f \in H^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[)$ tales que

$$\mathcal{A}(f) \in \mathcal{N}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[) \quad \text{en } \Omega \times]0, T[,$$

$$f(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{en } \Omega$$

y

$$\mathfrak{R}(f)(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times]0, T[.$$

Si $\mathfrak{R} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ escribiremos simplemente $H_{\mathcal{A}}^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[)$.

Teorema 3.2. *Sea $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea \mathcal{A}_N la restricción a $H_{\mathcal{A}\mathfrak{R}}^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[)$ del operador \mathcal{A} . Entonces*

$$\mathcal{A}_N : H_{\mathcal{A}\mathfrak{R}}^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[) \longrightarrow \mathcal{N}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$$

es un isomorfismo. Además si $]a, b[\subset]0, T[$ y $R_{]a,b[}(f)$ denota la restricción a $\Omega \times]a, b[$ de una función definida en $\Omega \times]0, T[$, tenemos

$$\forall g \in \mathcal{N}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[) \quad \left\| R_{]a,b[}((\mathcal{A}_N)^{-1}(g)) \right\|_{H^{1,1}(\Omega \times]a,b[)} \leq \sqrt{2} C_1 (b-a) e^{C_1 b} \|g\|_{L^2(\Omega \times]a,b[)}$$

donde C_1 es independiente de $t \in]0, T[$.

Demostración. Por la continuidad de las aplicaciones traza $\mathcal{N}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$ es un subespacio cerrado de $H^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$. Por el teorema 3.1 deducimos que la aplicación continua

$$\mathcal{A} : H_{\mathcal{A}\mathfrak{R}}^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[) \rightarrow \mathcal{N}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$$

es exhaustiva. Entonces la aplicación inversa de $\mathcal{N}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$ en $H_{\mathcal{A}\mathfrak{R}}^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[)$ tiene gráfica cerrada por lo que es continua.

Para obtener la estimación sobre la norma de la restricción de la antiimagen de $g \in \mathcal{N}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$, obsérvese que $U := (\mathcal{A}_N)^{-1}(g)$ verifica las condiciones del lema 3.1 (con $r = 0$) y por tanto se pueden aplicar *todos los razonamientos de ese lema*. En particular, usando la fórmula (3.11) se tiene

$$\forall t \in]0, T[\quad \|U(\mathbf{x}, t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq$$

$$\leq C_1 e^{C_1 T} \int_0^T \|g(\mathbf{x}, \gamma)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\gamma.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|U(\mathbf{x}, t)\|_{H^{1,1}(\Omega \times]a, b])} &\leq 2 \int_a^b \|U(\mathbf{x}, t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \int_a^b \left\| \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \\ &\leq 2 C_1 e^{C_1 b} \int_a^b \left(\int_0^T \|g(\mathbf{x}, \gamma)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\gamma \right)^2 dt \leq \\ &\leq 2 C_1 e^{C_1 b} (b - a) \|g\|_{L^2(\Omega \times]0, T])}^2, \end{aligned}$$

lo que demuestra nuestra afirmación. ■

Corolario 3.1. *Bajo la misma hipótesis del teorema 3.1, si $2r+1 > h + \frac{n+1}{2}$, $h \in \mathbb{N}$, entonces tenemos $U(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^h(\overline{\Omega \times]0, T])}$. En particular, si $g \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T])}$ y*

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \frac{\partial^k g}{\partial t^k}(\mathbf{x}, T) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

entonces $U(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T])}$.

Demostración. Por la proposición 2.3, capítulo 4 en [19], para cada multi-índice α y cada $k \geq 0$ tal que $|\alpha| + k \leq 2r + 1$, existe la derivada parcial mixta $\frac{\partial^{|\alpha|+k} U}{\partial \mathbf{x}^\alpha \partial t^k}$ y además,

$$\frac{\partial^{|\alpha|+k} U}{\partial \mathbf{x}^\alpha \partial t^k} \in H^{2r+1-|\alpha|-k, 2r+1-|\alpha|-k}(\Omega \times]0, T]). \quad (3.22)$$

Por tanto $U(\mathbf{x}, t) \in H^{2r+1}(\Omega \times]0, T])$ y razonando como en el corolario 2.1 concluimos que $U(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^h(\overline{\Omega \times]0, T])}$. La otra afirmación se obtiene directamente. ■

Observación. En lo referente a la función g en la hipótesis del teorema 3.1 tenemos en general que $g \notin H_{0,0}^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, T])$. Entonces el resultado de existencia y regularidad que hemos probado para las soluciones es más fuerte que los que se pueden obtener aplicando el cambio de variable $t = T - t'$ en los resultados del capítulo 2.

Nota. Es fácil comprobar que **todos los resultados de este capítulo son válidos también para el operador \mathcal{A}^*** ya que pueden duplicarse para éste todos los razonamientos efectuados.

Contraejemplo. Presentamos ahora el contraejemplo anunciado en la sección 1.4. Supongamos que

$$\mathcal{A} : \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$$

fuera continua con la topología inducida por $\Phi^r(\Omega \times]0, T[)$, $r \geq 2$ en el espacio de salida y la inducida por $\Phi^{r-2}(\Omega \times]0, T[)$ en el de llegada.

Sea $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times]0, T[$. Tomemos una bola de radio $r > 0$ $B_r(\mathbf{x}_0, t_0) \subset \Omega \times]0, T[$ y una función regularizante $\rho(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ con soporte compacto contenido en $B_r(\mathbf{x}_0, t_0)$. Por el teorema 3.1 existe $V \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$ tal que $\mathcal{A}(V) = \rho(\mathbf{x}, t)$. Sea $g(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$ la función constante $g(\mathbf{x}, t) = 1$ para todo $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times]0, T[$. Entonces

$$\langle V, \mathcal{A}^*(g(\mathbf{x}, t)) \rangle = 0$$

y

$$\langle \mathcal{A}(V), g(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \rho(\mathbf{x}, t), g(\mathbf{x}, t) \rangle \neq 0.$$

Pero como evidentemente se tiene $V \in \Phi^r(\Omega \times]0, T[)$, por densidad existe una sucesión $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)$ tal que $V = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m$ en la topología de $\Phi^r(\Omega \times]0, T[)$ y entonces $\rho = \mathcal{A}(V) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}(\varphi_m)$ en $\Phi^{r-2}(\Omega \times]0, T[)$. Entonces por continuidad

$$0 = \langle V, \mathcal{A}^*(g(\mathbf{x}, t)) \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \varphi_m, \mathcal{A}^*(g(\mathbf{x}, t)) \rangle =$$

y por definición de densidad de una distribución

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}(\varphi_m), g(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \rho(\mathbf{x}, t), g(\mathbf{x}, t) \rangle \neq 0,$$

lo cual nos lleva a una contradicción.

Capítulo 4

Trazas de las soluciones de la ecuación hiperbólica de transmisión del calor

En el capítulo 2 hemos visto que

$$\mathcal{A}^* : X^r(\Omega \times]0, T[) \rightarrow H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$$

es un isomorfismo. Por tanto su adjunto

$$\mathcal{A} : H^{-(2r-1),-2r}(\Omega \times]0, T[) \rightarrow (X^r(\Omega \times]0, T[))'$$

sería el candidato natural para resolver el problema

$$\mathcal{A}(U) = F \tag{4.1}$$

tomando datos “irregulares” F en el espacio $(X^r(\Omega \times]0, T[))'$ y buscando sus soluciones (en principio también “irregulares”) en el espacio $H^{-(2r-1),-2r}(\Omega \times]0, T[)$. Esto sería suficiente si sólo pretendiéramos resolver la ecuación (4.1), pero en realidad para el estudio de la función de Green necesitamos soluciones con más propiedades, porque se tratará de resolver un problema de contorno determinado. Esto nos obligará a tomar los “datos” en espacios más pequeños que $(X^r(\Omega \times]0, T[))'$ y a precisar en qué espacios se toman las condiciones de contorno. La consecuencia será que las soluciones estarán en espacios más pequeños

que $H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]0, T[)$ y que habrá que estudiar las trazas sobre la frontera de los elementos de esos espacios.

La aplicación de los métodos que utilizaremos nos llevará a probar en el capítulo 5 que, bajo ciertas condiciones, las soluciones deseadas estarán en el espacio $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$, definido en el capítulo 1.

Ya que la definición de $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$ es independiente de las condiciones de contorno, este capítulo tiene únicamente como **objetivo** estudiar las trazas de sus elementos sobre la frontera $\partial\Omega \times]0, T[$ y sobre las secciones transversales de $\Omega \times]0, T[$ y su comportamiento cuando $T \rightarrow \infty$.

Con este propósito vamos a dividir el capítulo en dos apartados. En el apartado 4.1 estudiaremos las trazas transversales y laterales sobre el contorno de un cilindro finito $\Omega \times]0, T[$. Y en el apartado 4.2 estudiaremos las trazas transversales y laterales pero en este caso sobre el contorno de un cilindro infinito $\Omega \times]0, \infty[$.

En todos los teoremas de este capítulo (y como consecuencia en todos los resultados posteriores que utilicen éstos) aparecen unas “extrañas” hipótesis numéricas sobre los parámetros de los índices de los espacios de Sobolev ((4.2) y (4.24)). La justificación de adoptar tales hipótesis es de carácter técnico y **en aras de una mayor simplicidad** (¡ aunque esto parezca contradictorio a simple vista!). En efecto, en caso contrario, los teoremas de ascensión que usaremos posteriormente no serán válidos con la generalidad con la que los expresamos nosotros, ya que el dominio de la definición de tales ascensiones debería estar sometido a *nuevas condiciones restrictivas*, de expresión complicada, y por otra parte innecesarias a efectos de nuestras principales aplicaciones físicas.

4.1. Trazas sobre la frontera de un cilindro finito $\Omega \times]0, T[$

Antes de comenzar a estudiar las trazas necesitamos algunos resultados previos. Hay que recordar que es bien conocido (ver por ejemplo la proposición 2.2, del capítulo 4 en [19]) que las trazas de los elementos en $H^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$, $0 < T < \infty$ verifican las siguientes relaciones de compatibilidad:

Proposición 4.1. Sean $r > 0, s > 0$ tal que $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) > 0$. Entonces para cada $U(\mathbf{x}, t) \in H^{r,s}(\Omega \times]0, T[)$, cada $j \geq 0$ y cada $k \geq 0$ tal que $\frac{j}{r} + \frac{k}{s} < 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right)$ se verifican las igualdades

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times [0, T[\quad \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\frac{\partial^j U}{\partial \mathbf{n}^j}(\mathbf{x}, t) \right) = \frac{\partial^j}{\partial \mathbf{n}^j} \left(\frac{\partial^k U}{\partial t^k}(\mathbf{x}, t) \right) .$$

Para a empezar a estudiar las trazas sobre secciones transversales de $\Omega \times]0, T[$ necesitamos un lema previo de ascensión:

Lema 4.1. Sea $r > \frac{1}{2}$ tal que

$$2r + \frac{1}{2} - \left(\frac{i+1}{2} \right) \left(\frac{2r+1}{2r+2} \right) \notin \mathbb{Z}, \quad i = 0, 1. \quad (4.2)$$

y sean j_0, k_0 los elementos más grandes de $\mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que

$$0 \leq j_0 < 2r + \frac{1}{2}, \quad 0 \leq k_0 < 2r + \frac{3}{2}$$

respectivamente. Dada

$$\mathbf{g} = (g_0(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x})) \in H_0^{2r+1-\frac{1}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \times H_0^{2r+1-\frac{3}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \quad (4.3)$$

definimos

$$\mathbf{G}(\mathbf{g}) := (g_0(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}), \dots, g_{k_0}(\mathbf{x})) \in \prod_{k=0}^{k_0} H_0^{2r+1-(k+\frac{1}{2})\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \quad (4.4)$$

siendo

$$g_k(\mathbf{x}) := -\frac{\alpha}{\tau} \left(\mathcal{X}(g_{k-2}(\mathbf{x})) - \frac{1}{\alpha} g_{k-1}(\mathbf{x}) \right) \quad k = 2, \dots, k_0. \quad (4.5)$$

Entonces existe una ascensión

$$R : H_0^{2r+1-\frac{1}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \times H_0^{2r+1-\frac{3}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \longrightarrow H_{0,0}^{2r+1,2r+2}(\Omega \times]0, T[)$$

tal que para cada $\mathbf{G}(\mathbf{g})$ como en (4.3), (4.4) y (4.5) tenemos

$$\mathcal{A}^*(R(\mathbf{g})) \in H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[), \quad (4.6)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall 0 \leq k < 2r + \frac{3}{2} \quad \frac{\partial^k R(\mathbf{g})}{\partial t^k}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial^k R(\mathbf{g})}{\partial t^k}(\mathbf{x}, T) = g_k(\mathbf{x}) \quad (4.7)$$

y

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \forall 0 \leq |\alpha| < 2r + \frac{1}{2} \quad \frac{\partial^{|\alpha|} R(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.8)$$

Demostración. Empezaremos comprobando que

$$\forall 0 \leq k \leq k_0 \quad g_k(\mathbf{x}) \in H^{2r+1-(k+\frac{1}{2})\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \quad (4.9)$$

procediendo por inducción. (4.9) es cierta para $k = 0, 1$ por (4.3). Suponemos que (4.9) se verifica para algunos $0 \leq k \leq k_0 - 1$. Obviamente, si $2 \leq k \leq k_0 - 1$ tenemos

$$\mathcal{X}(g_{k-2}) \in H_0^{2r-1-(k-2+\frac{1}{2})\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \quad \text{y} \quad g_{k-1} \in H_0^{2r+1-(k-1+\frac{1}{2})\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega)$$

y como $r > \frac{1}{2}$ obtenemos

$$2r - 1 - \left(k - 1 + \frac{1}{2}\right) \frac{2r+1}{2r+2} > 2r + 1 - \left(k + 1 + \frac{1}{2}\right) \frac{2r+1}{2r+2}$$

de manera que (4.9) también se verifica para $k + 1$. Por (4.3) se comprueba fácilmente que de hecho

$$\forall 0 \leq k \leq k_0 \quad g_k(\mathbf{x}) \in H_0^{2r+1-(k+\frac{1}{2})\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega). \quad (4.10)$$

Como consecuencia de (4.9), por el teorema 2.3 del capítulo 4 y el teorema de las trazas 3.2 del capítulo 1 de [19], existe una ascensión continua

$$L : \prod_{k=0}^{k_0} H_0^{2r+1-(k+\frac{1}{2})\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \longrightarrow H^{2r+1, 2r+2}(\Omega \times]0, T[) \quad (4.11)$$

tal que la ascensión

$$R : H_0^{2r+1-\frac{1}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \times H_0^{2r+1-\frac{3}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \longrightarrow H^{2r+1, 2r+2}(\Omega \times]0, T[)$$

definida por $R(\mathbf{g})(\mathbf{x}, t) := (R_T L(\mathbf{G}(\mathbf{g}))) (\mathbf{x}, T - t)$ verifica

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall 0 \leq k \leq k_0 \quad \frac{\partial^k R(\mathbf{g})}{\partial t^k}(\mathbf{x}, T) = g_k(\mathbf{x}), \quad (4.12)$$

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \forall 1 \leq |\alpha| < j_0 \quad R(\mathbf{g})(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^{|\alpha|} R(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.13)$$

Señalamos que la norma $\|R\|$ verifica

$$\forall T > 0 \quad \|R\| \leq \|L\| \quad (4.14)$$

y no depende de T .

Escogiendo una función $\varphi(t) \in \mathcal{C}^\infty([0, T])$ tal que $\varphi(t) = 1$ en algunos entornos de $t = T$ y $\varphi(t) = 0$ en algunos entornos de $t = 0$ y cambiando a una nueva ascensión $\varphi(t) R(\mathbf{g})(\mathbf{x}, t)$, se puede suponer que la ascensión R inicial verifica además

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall 0 \leq k \leq k_0 \quad \frac{\partial^k R(\mathbf{g})}{\partial t^k}(\mathbf{x}, 0) = 0. \quad (4.15)$$

Por otro lado, por (4.13) tenemos que $R(\mathbf{g})(\mathbf{x}, t) = 0$ si $(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[$ y por tanto

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \frac{\partial R(\mathbf{g})}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 R(\mathbf{g})}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.16)$$

Este hecho junto con la proposición 1.1 y (4.13) implican que $\mathcal{A}^*(R(\mathbf{g})) \in H_0^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, T[)$. Además utilizando el teorema 2.1 del capítulo 4 en [19] y las propiedades de las trazas en el espacio $H^{2r-1, 2r+2}(\Omega \times]0, T[)$ obtenemos inductivamente para cada $0 \leq k \leq k_0 - 2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^k \mathcal{X}(R(\mathbf{g}))}{\partial t^k} \right) (\mathbf{x}, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^k \mathcal{X}(R(\mathbf{g}))}{\partial t^k} \right) (\mathbf{x}, t) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{X} \left(\frac{\partial^k R(\mathbf{g})}{\partial t^k} \right) (\mathbf{x}, t) = \mathcal{X} \left(\frac{\partial^k R(\mathbf{g})}{\partial t^k}(\mathbf{x}, 0) \right) = \mathcal{X}(g_k)(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

en el espacio

$$H_0^{2r-1-(k+\frac{1}{2}), \frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \supset H_0^{2r-1-(k+\frac{1}{2}), \frac{2r-1}{2r+2}}(\Omega).$$

Por tanto por (4.5) y (4.12) obtenemos

$$\frac{\partial^k \mathcal{A}^*(R(\mathbf{g}))}{\partial t^k}(\mathbf{x}, T) = \mathcal{X} \left(\frac{\partial^k R(\mathbf{g})}{\partial t^k}(\mathbf{x}, T) \right) -$$

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial^{k+1} R(\mathbf{g})}{\partial t^{k+1}}(\mathbf{x}, T) - \tau \frac{\partial^{k+2} R(\mathbf{g})}{\partial t^{k+2}}(\mathbf{x}, T) \right) = 0.$$

De (4.13) también tenemos para cada $0 \leq j \leq j_0 - 2$

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \mathcal{X} \left(\frac{\partial^j R(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{n}^j} \right) (\mathbf{x}, t) = 0$$

y de la proposición 4.1 y (4.16) obtenemos $\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^k R(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{n}^k}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^k R(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{n}^k}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Por tanto

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \forall 0 \leq j \leq j_0 - 2 \quad \frac{\partial^j \mathcal{A}^*(R(\mathbf{g}))}{\partial \mathbf{n}^j}(\mathbf{x}, t) = 0$$

y ahora, por la proposición 1.2

$$\mathcal{A}^*(R(\mathbf{g})) \in H_{0,0}^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, T[).$$

Entonces, a partir de (4.12) se demuestra el lema. ■

Teorema 4.1. Trazas sobre secciones transversales.

Sean $T > 0$ y $r > \frac{1}{2}$ tales que verifican (4.2). La aplicación

$$Z : \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[}) \longrightarrow H^{-(2r+1) + \frac{1}{2} \frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \times H^{-(2r+1) + \frac{3}{2} \frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega)$$

definida por

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[}) \quad Z(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, T), f(\mathbf{x}, T) \right)$$

puede extenderse a una aplicación lineal y continua

$$\mathfrak{S}_{\Omega, T} : \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[) \rightarrow H^{-(2r+1) + \frac{1}{2} \frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \times H^{-(2r+1) + \frac{3}{2} \frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega).$$

Demostración. Dada $\mathbf{h} = (h_0(\mathbf{x}), h_1(\mathbf{x})) \in H_0^{2r+1 - \frac{1}{2} \frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \times H_0^{2r+1 - \frac{3}{2} \frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega)$, definimos

$$g_0(\mathbf{x}) := -\frac{\alpha}{\tau} h_0(\mathbf{x}), \quad g_1(\mathbf{x}) := \frac{\alpha}{\tau} \left(-h_1(\mathbf{x}) + \frac{1}{\tau} h_0(\mathbf{x}) \right) \quad (4.17)$$

y $\{g_k(\mathbf{x})\}_{k=2}^{k_0}$ por (4.5). Escribiendo $\mathbf{g} := \mathbf{g}(\mathbf{h}) = (g_0(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}))$ como en el lema previo, por los argumentos dados en el lema 4.1 y utilizando los mismos números j_0, k_0 existen ascensiones

$$R : H_0^{2r+1-\frac{1}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \times H_0^{2r+1-\frac{3}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \longrightarrow H_{0,0}^{2r+1,2r+2}(\Omega \times]0, T[)$$

tal que se verifican las igualdades (4.7) y (4.8).

Definimos una aplicación

$$Z : \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[}) \longrightarrow H^{-(2r+1)+\frac{1}{2}(\frac{2r+1}{2r+2})}(\Omega) \times H^{-(2r+1)+\frac{3}{2}(\frac{2r+1}{2r+2})}(\Omega) \quad (4.18)$$

estableciendo por definición para cada $U \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$ y cada

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &:= (h_0(\mathbf{x}), h_1(\mathbf{x})) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \subset \\ &\subset H^{2r+1-\frac{1}{2}(\frac{2r+1}{2r+2})}(\Omega) \times H^{2r+1-\frac{3}{2}(\frac{2r+1}{2r+2})}(\Omega) \end{aligned} \quad (4.19)$$

que

$$\langle Z(U), \mathbf{h} \rangle = -\langle U, \mathcal{A}^*(R(\mathbf{g})) \rangle + \langle \mathcal{A}(U), R(\mathbf{g}) \rangle.$$

Veamos que Z es independiente de la ascensión elegida R . Si utilizamos otra ascensión R_1 que verifique (4.12), (4.13) y (4.15) tendríamos para $\Psi(\mathbf{g}) := R(\mathbf{g}) - R_1(\mathbf{g})$

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \Psi(\mathbf{g})(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Psi(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall 0 \leq k < k_0 \quad \Psi(\mathbf{g})(\mathbf{x}, 0) &= \frac{\partial^k \Psi(\mathbf{g})}{\partial t^k}(\mathbf{x}, 0) = \\ &= \Psi(\mathbf{g})(\mathbf{x}, T) = \frac{\partial^k \Psi(\mathbf{g})}{\partial t^k}(\mathbf{x}, T) = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

y

$$\mathcal{A}^*(\Psi(\mathbf{g})) \in H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[).$$

Por la nota del lema 10.1, capítulo 4 en [19] tenemos para cada $(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[$ y $\forall 0 \leq |\boldsymbol{\alpha}| < j_0$

$$\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}} \left(\mathcal{X}(\Psi(\mathbf{g})) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Psi(\mathbf{g})}{\partial t} + \frac{\tau}{\alpha} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{g})}{\partial t^2} \right) (\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.22)$$

Y de (4.20) tenemos

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \frac{\partial \Psi(\mathbf{g})}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{g})}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = 0$$

por tanto, utilizando (4.22) en el caso $|\alpha| = 0$ llegamos a

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \mathcal{X}(\Psi(\mathbf{g}))(\mathbf{x}, t) = 0.$$

De (4.20), como \mathcal{X} es elíptico en $\bar{\Omega}$, deducimos necesariamente

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{g})}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}, t) = 0$$

y procediendo por inducción de la misma forma obtenemos $\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \forall 0 \leq j < j_0 \quad \frac{\partial^j \Psi(\mathbf{g})}{\partial x_i^j}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Nuevamente por la citada nota en [19], de (4.21) obtenemos

$$\Psi(\mathbf{g}) \in H_{0,0}^{2r,r}(\Omega \times]0, T[).$$

Entonces la fórmula de Green clásica da

$$\langle U, \mathcal{A}^*(\Psi(\mathbf{g})) \rangle - \langle \mathcal{A}(U), \Psi(\mathbf{g}) \rangle = 0$$

lo que muestra la anunciada independencia de R .

Por otro lado, cuando $U \in \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$ tenemos

$$\begin{aligned} \left| \langle Z(U), \mathbf{h} \rangle \right| &\leq \left\| U \right\|_{H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]0, T[)} \left\| \mathcal{A}^*(R(\mathbf{g})) \right\|_{H_{0,0}^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, T[)} + \\ &+ \left\| \mathcal{A}(U) \right\|_{\Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, T[)} \left\| I_T \right\| \left\| R(\mathbf{g}) \right\|_{H_{0,0}^{2r+1, 2r+2}(\Omega \times]0, T[)} \leq \\ &\leq \left(\left\| \mathcal{A} \right\| + \left\| I_T \right\| \right) \left\| R \right\| \left\| U \right\|_{\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)} \times \\ &\times \left\| \mathbf{g} \right\|_{H^{2r+1-\frac{1}{2}}(\frac{2r+1}{2r+2})_{(\Omega)} \times H^{2r+1-\frac{3}{2}}(\frac{2r+1}{2r+2})_{(\Omega)}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Lo que significa que $Z(U)$ está bien definida y por densidad Z puede extenderse de forma continua a una aplicación lineal y continua (nuevamente denotada por Z) de $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[$ en

$$H^{-(2r+1)+\frac{1}{2}(\frac{2r+1}{2r+2})}(\Omega) \times H^{-(2r+1)+\frac{3}{2}(\frac{2r+1}{2r+2})}(\Omega).$$

Finalmente, dada $U \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$, podemos escribir

$$Z(U) = (\varphi_0(\mathbf{x}), \varphi_1(\mathbf{x})) \in H^{-(2r+1)+\frac{3}{2}(\frac{2r+1}{2r+2})}(\Omega) \times H^{-(2r+1)+\frac{1}{2}(\frac{2r+1}{2r+2})}(\Omega)$$

para ciertos $\varphi_0(\mathbf{x})$ y $\varphi_1(\mathbf{x})$. Escogiendo $\mathbf{h} := (h_0(\mathbf{x}), h_1(\mathbf{x})) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ por dualidad tenemos

$$\langle Z(U), \mathbf{h} \rangle = \langle \varphi_0, h_0 \rangle + \langle \varphi_1, h_1 \rangle$$

y por la fórmula de Green clásica y la definición de Z

$$\begin{aligned} \langle Z(U), \mathbf{h} \rangle &= \frac{1}{\alpha} \langle U(\mathbf{x}, T), R(\mathbf{g})(\mathbf{x}, T) \rangle_{\Omega} + \\ &+ \frac{\tau}{\alpha} \left(\left\langle \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, T), R(\mathbf{g})(\mathbf{x}, T) \right\rangle_{\Omega} - \left\langle U(\mathbf{x}, T), \frac{\partial R(\mathbf{g})}{\partial t}(\mathbf{x}, T) \right\rangle_{\Omega} \right) = \\ &= \left\langle U(\mathbf{x}, T), h_1(\mathbf{x}) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, T), h_0(\mathbf{x}) \right\rangle \end{aligned}$$

y por tanto $Z(U) = \left(\frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, T), U(\mathbf{x}, T) \right)$, siendo \mathbf{h} arbitrario en $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, con lo que finaliza la demostración. ■

Observación. Con un argumento similar utilizando la ascensión $R_0(\mathbf{g})(\mathbf{x}, t) := L(\mathbf{G}(\mathbf{g}))(\mathbf{x}, t)$ en el lema 4.1 en lugar de $R(\mathbf{g})$ y escogiendo una función $\eta(t) \in C^\infty([0, T])$ tal que $\eta(t) = 1$ en un entorno de $t = 0$ y $\eta(t) = 0$ en un entorno de $t = T$ en lugar de $\varphi(\mathbf{x}, t)$, se muestra que también existe la aplicación traza $\mathfrak{S}_{\Omega,0}$ de $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[$ sobre la sección $t = 0$.

Para estudiar las trazas sobre el contorno lateral $\partial\Omega \times]0, T[$ necesitamos otro teorema de ascensión, para el cual a su vez necesitamos el siguiente lema previo:

Lema 4.2. *Sea $T \in]0, \infty[$. Sea $r > \frac{1}{2}$ tal que*

$$\forall 0 \leq k \leq 2r \quad 2r + \frac{3}{2} - \left(\frac{2r+2}{2r+1} \right) \left(k + \frac{1}{2} \right) \notin \mathbb{Z}. \quad (4.24)$$

Entonces existe una ascensión R de

$$H_{,0}^{2r-\frac{1}{2}, 2r+2-\left(\frac{3r+3}{2r+1}\right)}(\partial\Omega \times]0, T[) \times H_{,0}^{2r+\frac{1}{2}, 2r+2-\left(\frac{r+1}{2r+1}\right)}(\partial\Omega \times]0, T[)$$

en $H_{,0}^{2r+1, 2r+2}(\Omega \times]0, T[)$ tal que para cada $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) := (g_0(\mathbf{x}, t), g_1(\mathbf{x}, t))$ en

$$H_{,0}^{2r-\frac{1}{2}, 2r+2-\left(\frac{3r+3}{2r+1}\right)}(\partial\Omega \times]0, T[) \times H_{,0}^{2r+\frac{1}{2}, 2r+2-\left(\frac{r+1}{2r+1}\right)}(\partial\Omega \times]0, T[)$$

se verifica

$$\mathcal{A}^*(R(\mathbf{g})) \in H_{0,0}^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, T[), \quad (4.25)$$

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad R(\mathbf{g})(\mathbf{x}, t) = g_0(\mathbf{x}, t) \quad \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(R(\mathbf{g}))(\mathbf{x}, t) = g_1(\mathbf{x}, t) \quad (4.26)$$

y

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall 0 \leq k < 2r + \frac{3}{2} \quad \frac{\partial^k R(\mathbf{g})}{\partial t^k}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial^k R(\mathbf{g})}{\partial t^k}(\mathbf{x}, T) = 0. \quad (4.27)$$

Demostración. Sean j_0, k_0 como en el lema 4.1. Dada $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) := (g_0(\mathbf{x}, t), g_1(\mathbf{x}, t))$ en

$$H_{,0}^{2r-\frac{1}{2}, 2r+2-\left(\frac{3r+3}{2r+1}\right)}(\partial\Omega \times]0, T[) \times H_{,0}^{2r+\frac{1}{2}, 2r+2-\left(\frac{r+1}{2r+1}\right)}(\partial\Omega \times]0, T[)$$

definimos para $(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[$

$$g_j(\mathbf{x}, t) := -\frac{\alpha}{\tau} \left(\mathcal{X}(g_{j-2}(\mathbf{x}, t)) - \frac{1}{\alpha} g_{j-1}(\mathbf{x}, t) \right) \quad j = 2, \dots, j_0. \quad (4.28)$$

Ahora, por el teorema 3.2 y la observación 3.3 del capítulo 1 y por el teorema 2.3 del capítulo 4 de [19], existe una aplicación lineal y continua R_1 del producto cartesiano

$$H_{,0}^{2r-\frac{1}{2}, 2r+2-\left(\frac{3r+3}{2r+1}\right)}(\partial\Omega \times]0, T[) \times H_{,0}^{2r+\frac{1}{2}, 2r+2-\left(\frac{r+1}{2r+1}\right)}(\partial\Omega \times]0, T[) \quad (4.29)$$

en $H^{2r+1, 2r+2}(\Omega \times]0, T[)$ tal que para cada $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ se verifican las igualdades

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall 0 \leq k \leq k_0 \quad \frac{\partial^k R_1(\mathbf{g})}{\partial t^k}(\mathbf{x}, 0) &= 0, \\ \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \forall 0 \leq j \leq j_0 \quad \mathfrak{R}_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial^j R_1(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{n}^j} \right) (\mathbf{x}, t) &= g_j(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Análogamente, después de hacer el cambio de variable temporal $t' = T - t$ existe otra aplicación lineal y continua R_2 de

$$H_{,0}^{2r-\frac{1}{2}, 2r+2-\left(\frac{3r+3}{2r+1}\right)}(\partial\Omega \times]0, T[) \times H_{,0}^{2r+\frac{1}{2}, 2r+2-\left(\frac{r+1}{2r+1}\right)}(\partial\Omega \times]0, T[)$$

en $H^{2r+1, 2r+2}(\Omega \times]0, T[)$ tal que para cada $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ tenemos

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall 0 \leq k \leq k_0 \quad \frac{\partial^k R_2(\mathbf{g})}{\partial t^k}(\mathbf{x}, T) &= \frac{\partial^k R_1(\mathbf{g})}{\partial t^k}(\mathbf{x}, T), \\ \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \forall 0 \leq j \leq j_0 \quad \mathfrak{R}_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial^j R_2(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{n}^j} \right) (\mathbf{x}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

A continuación escogemos una función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$ tal que $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ en un entorno de la sección $\{(\mathbf{x}, 0), \mathbf{x} \in \Omega\}$ y $\varphi(\mathbf{x}, t) = 1$ en un entorno de la sección $\{(\mathbf{x}, T), \mathbf{x} \in \Omega\}$. Entonces $R(\mathbf{x}, t) := R_1(\mathbf{x}, t) - \varphi(\mathbf{x}, t) R_2(\mathbf{x}, t)$ verifica

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall 0 \leq k \leq k_0 \quad \frac{\partial^k R(\mathbf{g})}{\partial t^k}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial^k R(\mathbf{g})}{\partial t^k}(\mathbf{x}, T) = 0, \quad (4.32)$$

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \forall 0 \leq j \leq j_0 \quad \mathfrak{R}_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial^j R(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{n}^j} \right) (\mathbf{x}, t) = g_j(\mathbf{x}, t). \quad (4.33)$$

Las demás propiedades de R se comprueban de la misma forma que se hizo en el lema 4.1, finalizando de este modo la prueba. ■

Teorema 4.2. *Trazas sobre la frontera lateral $\partial\Omega \times]0, T[$.*

Sea $r > \frac{1}{2}$ como en (4.24). La aplicación

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} : U \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[}) \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \in \mathcal{D}(\partial\Omega \times]0, T[)$$

puede extenderse de forma continua a una aplicación (que de nuevo denotamos por $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$) de $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$ en $H^{-(2r+\frac{1}{2}), -(2r+2)+\frac{r+1}{2r+1}}(\partial\Omega \times]0, T[)$.

Demostración. La demostración es análoga a la del teorema 4.1 empezando en este caso a partir de una

$$\mathbf{h} := (0, h_1(\mathbf{x}, t)) \in \mathcal{D}(\partial\Omega \times]0, T[) \times \mathcal{D}(\partial\Omega \times]0, T[)$$

dada, utilizando los resultados del lema 4.2 y definiendo en $\partial\Omega \times]0, T[$

$$g_0(\mathbf{x}, t) = 0, \quad g_1(\mathbf{x}, t) = -\frac{h_1(\mathbf{x}, t)}{f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})}$$

y $\{g_k(\mathbf{x}, t)\}_{k=2}^{j_0}$ según (4.28). Obsérvese que se está utilizando la condición $f_{\mathcal{A}} \neq 0$ si $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ contenida en la fórmula de Green. ■

4.2. Trazas sobre la frontera de un cilindro infinito $\Omega \times]0, \infty[$

Nuestro objetivo en este apartado es obtener las versiones correspondientes de los teoremas 4.1 y 4.2 pero en este caso para un dominio temporal no acotado $\Omega \times]0, \infty[$, que como ya hemos citado se manejará en el estudio de la función de Green de la ecuación (1.4).

Para obtener tales teoremas necesitamos algunos resultados previos.

Como consecuencia de los teoremas 4.1 y 4.2 podemos definir

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[) := \left\{ v \in \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[) \mid \right. \\ \left. v(\mathbf{x}, T) = \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0 \text{ en } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ en } \partial\Omega \times]0, T[\right\}.$$

Lema 4.3. Si $\phi \in \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$ y $f \in \mathcal{D}(\Omega \times]0, \infty[)$ entonces

$$\langle \phi, \mathcal{A}^*(R_T(f)) \rangle = \langle \mathcal{A}(\phi), R_T(f) \rangle.$$

Demostración. La demostración es una consecuencia directa de la densidad de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$ en $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$, los teoremas de continuidad de las trazas en $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$ y la fórmula de Green clásica. ■

Lema 4.4. *La aplicación*

$$Y : \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[) \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$$

definida por

$$\begin{aligned} \forall \phi \in \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega \times]0, \infty[) \\ \langle Y(\phi), f \rangle = \langle \phi, R_T(f) \rangle \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. La definición anterior tiene sentido. De hecho, como $R_T(f) \in \mathcal{N}^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, T[)$, si Ψ_T denota la aplicación inversa del isomorfismo del lema 3.2, por el lema 4.3 tenemos

$$\begin{aligned} \left| \langle Y(\phi), f \rangle \right| &= \left| \langle \phi, \mathcal{A}^*(\Psi_T(R_T(f))) \rangle \right| = \left| \langle \mathcal{A}(\phi), (\Psi_T(R_T(f))) \rangle \right| \leq \\ &\leq \left\| \Psi_T(R_T(f)) \right\|_{\Phi^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, T[)} \left\| \mathcal{A}(\phi) \right\|_{\Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, T[)} \leq \\ &\leq \left\| I_T \right\| \left\| \Psi_T \right\| \left\| f \right\|_{H_{0,0}^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, \infty[)} \left\| \phi \right\|_{\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)} \leq \end{aligned}$$

y por la densidad de $\mathcal{D}(\Omega \times]0, \infty[)$ en $H_{0,0}^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, \infty[)$ obtenemos $Y(\phi) \in H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]0, \infty[)$ y

$$\left\| Y(\phi) \right\|_{H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]0, \infty[)} \leq \left\| I_T \right\| \left\| \Psi_T \right\| \left\| \phi \right\|_{\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)}. \quad (4.34)$$

Por otro lado, por el lema 4.3, para cada $f \in \mathcal{D}(\Omega \times]0, \infty[)$ tenemos

$$\begin{aligned} \left| \langle \mathcal{A}(Y(\phi)), f \rangle \right| &= \left| \langle Y(\phi), \mathcal{A}^*(f) \rangle \right| = \\ &= \left| \langle \phi, R_T(\mathcal{A}^*(f)) \rangle \right| = \left| \langle \phi, \mathcal{A}^*(R_T(f)) \rangle \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \langle \mathcal{A}(\phi), R_T(f) \rangle \right| \leq \\
 &\leq \left\| \mathcal{A}(\phi) \right\|_{\Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, T])} \left\| R_T(f) \right\|_{\Phi^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, T])} \leq \\
 &\leq \left\| \phi \right\|_{\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T])} \left\| f \right\|_{\Phi^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, \infty])}
 \end{aligned}$$

y por tanto, por la densidad de $\mathcal{D}(\Omega \times]0, \infty])$ en $\Phi^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, \infty])$ obtenemos $Y(\phi) \in \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, \infty])$ y

$$\left\| \mathcal{A}(Y(\phi)) \right\|_{\Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, \infty])} \leq \left\| \phi \right\|_{\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T])}. \quad (4.35)$$

A partir de (4.34) y (4.35) existe una $C_T > 0$ tal que

$$\left\| Y(\phi) \right\|_{\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty])} \leq C_T \left\| \phi \right\|_{\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T])}. \quad \blacksquare$$

Para obtener un teorema sobre las trazas transversales “en ∞ ” necesitamos un subespacio de $D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty])$ adecuado que nos permita la aplicación de la fórmula de Green clásica cuando $t \rightarrow \infty$. Para ello, dado $0 \leq \eta < T$, sean $Q_{] \eta, T[}(f)$ y $Q_{] T, \infty[}(f)$ las restricciones a $\Omega \times] \eta, T[$ y a $\Omega \times] T, \infty[$ respectivamente, de una función f definida en $\Omega \times]0, \infty[$, entonces definimos $\mathcal{W}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty])$ como el subespacio de $D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty])$ de aquellas funciones $U \in L^2(\Omega \times]0, \infty]) \cap \mathcal{C}^1(\Omega \times]0, \infty])$ tales que $Q_{] \eta_U, T_U[}(U) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega \times] \eta_U, T_U[})$ y $Q_{] T_U, \infty[}(U) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega \times] T_U, \infty[})$ para un $0 < \eta_U < T_U$ y además existe

$$Z(U)(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, T), U(\mathbf{x}, T) \right) \quad (4.36)$$

en el espacio

$$H^{-(2r+1) + \frac{1}{2} \frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \times H^{-(2r+1) + \frac{3}{2} \frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega).$$

Claramente $\mathcal{D}(\Omega \times]0, \infty]) \subset \mathcal{W}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty])$ y por tanto $\mathcal{W}(\Omega \times]0, \infty]) \neq \emptyset$. Ahora, definimos $\mathbf{W}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty])$ como la clausura de $\mathcal{W}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty])$ en el espacio $D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty])$.

Teorema 4.3. Dada $r > \frac{1}{2}$ como en (4.2), la aplicación

$$Z : \mathcal{W}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[) \longrightarrow H^{-(2r+1)+\frac{1}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \times H^{-(2r+1)+\frac{3}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega)$$

definida por (4.36) puede extenderse a una aplicación lineal y continua de $\mathbf{W}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$ en $H^{-(2r+1)+\frac{1}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \times H^{-(2r+1)+\frac{3}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega)$.

Demostración. Por el teorema 2.3, capítulo 4 en [19] existe una ascensión continua

$$L : H_0^{2r+1-\frac{1}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \times H_0^{2r+1-\frac{3}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \longrightarrow H_0^{2r+1, 2r+2}(\Omega \times]0, \infty[)$$

que verifica la propiedad (4.7) y además

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, \infty[\quad \forall 0 \leq |\alpha| < 2r + \frac{1}{2} \quad \frac{\partial^{|\alpha|} R(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.37)$$

Consideramos la siguiente familia de aplicaciones lineales

$$\begin{aligned} Z_T : \mathcal{W}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[) &\longrightarrow \\ H^{-(2r+1)+\frac{1}{2}\left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)}(\Omega) \times H^{-(2r+1)+\frac{3}{2}\left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)}(\Omega) &\end{aligned} \quad (4.38)$$

definida por

$$\begin{aligned} \left\langle Z_T(U), \mathbf{g} \right\rangle_{\Omega \times \Omega} &= - \left\langle R_T(U)(\mathbf{x}, t), R_T(\mathcal{A}^*(L(\mathbf{g}))) (\mathbf{x}, t) \right\rangle_{\Omega \times]0, T[} + \\ + \left\langle R_T(\mathcal{A}(U))(\mathbf{x}, t), R_T(L(\mathbf{g}))(\mathbf{x}, t) \right\rangle_{\Omega \times]0, T[} &- \left\langle (\mathfrak{F}_{\Omega, 0}(R_{T_0}(U))) (\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right\rangle \end{aligned}$$

para cada $U \in \mathcal{W}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$ y cada \mathbf{g} como en (4.3). Por (1.23), (1.8), (1.19) y el lema 1.1 la definición anterior tiene sentido. Como

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \mathfrak{F}_{\Omega, 0}(R_{T_0}(U))(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right\rangle \right| &\leq \\ \leq \left\| \mathfrak{F}_{\Omega, 0} \right\| \left\| U \right\|_{\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)} &\left\| \mathbf{g} \right\|_{H_0^{2r+1-\frac{1}{2}\left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)}(\Omega) \times H_0^{2r+1-\frac{3}{2}\left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)}(\Omega)}, \end{aligned}$$

de (1.24) argumentamos como en (4.23) y obtenemos que $Z_T(U)$ está bien definida y que Z_T es continua de $\mathcal{W}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$ en

$$H^{-(2r+1)+\frac{1}{2}\left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)}(\Omega) \times H^{-(2r+1)+\frac{3}{2}\left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)}(\Omega).$$

De modo que Z_T puede extenderse de forma continua a una aplicación lineal (nuevamente denotada por Z_T) de $\mathbf{W}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$ en

$$H^{-(2r+1)+\frac{1}{2}\left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)}(\Omega) \times H^{-(2r+1)+\frac{3}{2}\left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)}(\Omega).$$

Como $L(\mathbf{g}) \in H_0^{2r+1, 2r+2}(\Omega \times]0, T[)$ tenemos

$$\lim_{T \rightarrow \infty, T' \rightarrow \infty} \left\| (R_T - R_{T'})L(\mathbf{g}) \right\|_{H_0^{2r+1, 2r+2}(\Omega \times]T, T'[)} = 0,$$

lo que nos lleva a

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle Z_T(U) - Z_{T'}(U), \mathbf{g} \right\rangle \right| = \\ & = \left| \left\langle U, \mathcal{A}^* \left((R_{T'} - R_T)L(\mathbf{g}) \right) \right\rangle_{\Omega \times]T, T'[} + \right. \\ & \quad \left. + \left\langle \mathcal{A}(U), (R_{T'} - R_T)L(\mathbf{g}) \right\rangle_{\Omega \times]T, T'[} \right| \leq \\ & \leq \left(1 + \|\mathcal{A}\| \right) \left\| (R_T - R_{T'})L(\mathbf{g}) \right\|_{H_0^{2r+1, 2r+2}(\Omega \times]T, T'[)} \left\| U \right\|_{\mathbf{W}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T)} \end{aligned}$$

puede ser tan pequeño como queramos cuando T y T' aumentan, lo que muestra que existe $\langle Z(U), \mathbf{g} \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \langle Z_T(U), \mathbf{g} \rangle$. Del teorema de Banach-Steinhaus obtenemos que existe $Z(U) = \lim_{T \rightarrow \infty} Z_T(U)$ en $H^{-(2r+1)+\frac{1}{2}\left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)}(\Omega) \times H^{-(2r+1)+\frac{3}{2}\left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)}(\Omega)$. El teorema se puede terminar de demostrar dándonos cuenta que si $U \in \mathcal{W}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$ y $Z(U) = (\varphi_0(\mathbf{x}), \varphi_1(\mathbf{x})) \in H^{-(2r+1)+\frac{3}{2}\left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)}(\Omega) \times H^{-(2r+1)+\frac{1}{2}\left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)}(\Omega)$, dada $\mathbf{h} = (h_0(\mathbf{x}), h_1(\mathbf{x})) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, con los mismos argumentos del teorema 4.1 y la misma definición para \mathbf{g} y $\{g_k\}_{k=0}^{k_0}$, por dualidad y por la fórmula de Green, utilizando (4.36) y la observación (4.14) tenemos

$$\begin{aligned} & \left\langle Z(U), \mathbf{h} \right\rangle_{\Omega \times \Omega} = \\ & = \left\langle \varphi_0, h_0 \right\rangle + \left\langle \varphi_1, h_1 \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \left\langle U(\mathbf{x}, T), L(\mathbf{g})(\mathbf{x}, T) \right\rangle_{\Omega} + \\ & + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\alpha} \left(\left\langle \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, T), L(\mathbf{g})(\mathbf{x}, T) \right\rangle_{\Omega} - \left\langle U(\mathbf{x}, T), \frac{\partial L(\mathbf{g})}{\partial t}(\mathbf{x}, T) \right\rangle_{\Omega} \right) = \\ & = \left\langle \lim_{T \rightarrow \infty} U(\mathbf{x}, T), h_1(\mathbf{x}) \right\rangle + \left\langle \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, T), h_0(\mathbf{x}) \right\rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Para terminar vamos a considerar las trazas sobre un contorno del tipo $\partial\Omega \times]0, \infty[$. Como en el caso anterior necesitamos un subespacio adecuado de $D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$. Ahora, escogemos el subespacio $\mathcal{V}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$ de $D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$ de aquellas funciones $U \in L^2(\Omega \times]0, \infty[) \cap \mathcal{C}^1(\Omega \times]0, \infty[)$ tales que para algún $T_U > 0$ se verifican las relaciones $Q_{]0, T_U[}(U) \in \mathcal{C}^2(\Omega \times]0, T_U[)$ y $Q_{]T_U, \infty[}(U) \in \mathcal{C}^2(\Omega \times]T_U, \infty[)$. A continuación definimos también $\mathbf{V}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$ como la clausura de $\mathcal{V}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$ en $D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$. A partir de estas definiciones obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.4. Trazas sobre $\partial\Omega \times]0, \infty[$. Sea $r > \frac{1}{2}$ como en (4.24).
La aplicación

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} : U \in \mathcal{V}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[) \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \in \mathcal{D}(\partial\Omega \times]0, \infty[)$$

puede extenderse de forma continua (nuevamente denotada por $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$) de $\mathbf{V}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$ en $H^{-(2r+\frac{1}{2}), -(2r+2)+\frac{r+1}{2r+1}}(\partial\Omega \times]0, \infty[)$.

Demostración. La demostración de este teorema es similar a la del teorema 4.2. Nuevamente por el teorema 2.3 en el capítulo 4 de [19] existe una ascensión L de

$$H_{,0}^{2r-\frac{1}{2}, 2r+2-\frac{3r+3}{2r+1}}(\partial\Omega \times]0, \infty[) \times H_{,0}^{2r+\frac{1}{2}, 2r+2-\frac{r+1}{2r+1}}(\partial\Omega \times]0, \infty[)$$

en $H_{,0}^{2r+1, 2r+2}(\Omega \times]0, \infty[)$ tal que

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, \infty[\quad L(\mathbf{g})(\mathbf{x}, t) = g_0(\mathbf{x}, t) \quad \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(R(\mathbf{g}))(\mathbf{x}, t) = g_1(\mathbf{x}, t) \quad (4.39)$$

para cada

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = (g_0(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x})) \in & H_{,0}^{2r-\frac{1}{2}, 2r+2-\frac{3r+3}{2r+1}}(\partial\Omega \times]0, \infty[) \times \\ & \times H_{,0}^{2r+\frac{1}{2}, 2r+2-\frac{r+1}{2r+1}}(\partial\Omega \times]0, \infty[). \end{aligned}$$

Si comenzamos con una función

$$\mathbf{h} := (0, h_1(\mathbf{x}, t)) \in \mathcal{D}(\partial\Omega \times]0, \infty[) \times \mathcal{D}(\partial\Omega \times]0, \infty[)$$

y definimos $\mathbf{g} := \mathbf{g}(\mathbf{h}) = (g_0(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}))$

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, \infty[\quad g_0(\mathbf{x}, t) = 0, \quad g_1(\mathbf{x}, t) = -\frac{h_1(\mathbf{x}, t)}{f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})} \quad (4.40)$$

y $\{g_k(\mathbf{x}, t)\}_{k=2}^{j_0}$ según (4.28) y la aplicación Z de $\mathcal{V}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$ en $H^{-2r+\frac{1}{2}, -(2r+2)+\frac{3r+3}{2r+1}}(\partial\Omega \times]0, \infty[) \times H^{-2r+\frac{1}{2}, -(2r+2)+\frac{r+1}{2r+1}}(\partial\Omega \times]0, \infty[)$

como

$$\begin{aligned} & \left\langle Z(U), \mathbf{h} \right\rangle_{\Omega \times]0, \infty[} = \\ & = -\left\langle U(\mathbf{x}, t), \mathcal{A}^*(L(\mathbf{g}))(\mathbf{x}, t) \right\rangle + \left\langle \mathcal{A}(U)(\mathbf{x}, t), L(\mathbf{g})(\mathbf{x}, t) \right\rangle \end{aligned}$$

para cada $U(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{W}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$ y cada \mathbf{g} como en el teorema 4.2, después de utilizar argumentos análogos a los utilizados en dicho teorema, comprobamos que está bien definida y es continua como consecuencia de la definición del espacio $D_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$. Como antes, Z puede extenderse de forma continua a $\mathbf{W}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$. La demostración termina de forma análoga a la del teorema 4.2 ya que dada $U(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{W}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$, por la fórmula de Green clásica y utilizando (4.40) y (4.39) tenemos

$$\begin{aligned} & \left\langle Z(U), \mathbf{h} \right\rangle_{\Omega \times]0, \infty[} = \left\langle Z(U), \mathbf{h} \right\rangle_{\Omega \times]0, T_U[} + \\ & + \left\langle Z(U), \mathbf{h} \right\rangle_{\Omega \times]T_U, \infty[} = \left\langle h_1(\mathbf{x}, t), \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \right\rangle_{\partial\Omega \times]0, \infty[}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Capítulo 5

Teoremas de existencia, unicidad y regularidad de las soluciones en el caso de datos irregulares

Este capítulo tiene como **objeto** encontrar teoremas de existencia, unicidad y regularidad para las soluciones del problema de Neumann de la ecuación hiperbólica de transmisión del calor en cuerpos anisótropos y **con fuentes internas de calor o condiciones iniciales y de contorno irregulares.**

Vamos a dividir el capítulo en tres apartados. En el apartado 2.1 encontramos ciertas generalizaciones de la fórmula de Green clásica que nos serán útiles en el apartado 5.2 para encontrar resultados acerca de la existencia y unicidad para las soluciones en el caso de datos irregulares. Finalmente en el apartado 5.3 encontramos propiedades de regularidad de las soluciones fundamentales del operador \mathcal{A} .

5.1. Generalizaciones de la fórmula de Green clásica

Lema 5.1. *Sea $r > \frac{1}{2}$ verificando las condiciones (4.2) y (4.24). Sea $u \in \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$.*

1. *Las trazas $u(\mathbf{x}, 0)$ y $u(\mathbf{x}, T)$ pueden ser extendidas canónicamente a una forma lineal continua en $(H^s(\Omega))'$ para cada $s \geq 2r + 1 - \frac{1}{2} \frac{2r+1}{2r+2}$.*
2. *Las trazas $\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0)$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, T)$ pueden ser extendidas canónicamente a una forma lineal continua en $(H^s(\Omega))'$ para cada $s \geq 2r + 1 - \frac{3}{2} \frac{2r+1}{2r+2}$.*
3. *La traza $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$ en $\partial\Omega \times]0, T[$ puede ser extendida canónicamente a una forma lineal continua en $(H^{s,w}(\Omega \times]0, T[))'$ para cada $s \geq 2r + \frac{1}{2}$ y $w \geq 2r + 2 - \frac{r+1}{2r+1}$.*

Demostración. Sólo vamos a mostrar la prueba para el apartado 1. en el caso de $u(\mathbf{x}, 0)$, ya que los otros casos se demuestran de forma completamente análoga utilizando los teoremas de trazas correspondientes en $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$.

Por el teorema 4.1 existe la traza $u(\mathbf{x}, 0) \in H^{-(2r+1)+\frac{1}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega)$. Por la definición de $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$ podemos elegir una sucesión

$$\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega \times]0, T[}) \quad \text{tal que} \quad u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k \quad \text{en} \quad \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[). \quad (5.1)$$

Como $u_k(\mathbf{x}, 0) \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$, por el lema 1.1 tenemos

$$\forall k, m \in \mathbb{N} \quad \Phi_{u_k(\mathbf{x}, 0) - u_m(\mathbf{x}, 0)} = \Phi_{u_k(\mathbf{x}, 0)} - \Phi_{u_m(\mathbf{x}, 0)} \in \left(H^{2r+1-\frac{1}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \right)'$$

y

$$\|\Phi_{u_k(\mathbf{x}, 0)} - \Phi_{u_m(\mathbf{x}, 0)}\| = \|u_k(\mathbf{x}, 0) - u_m(\mathbf{x}, 0)\|.$$

Por tanto $\{\Phi_{u_k(\mathbf{x}, 0)}\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\left(H^{2r+1-\frac{1}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \right)'$ y existe

$$\varphi_u^0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{u_k(\mathbf{x}, 0)} \quad \text{en} \quad (H^s(\Omega))'.$$

Como $H^{-s}(\Omega)$ es un cociente de $(H^s(\Omega))'$, sea Q la aplicación cociente canónica continua, entonces

$$Q(\varphi_u^0) = \lim_{k \rightarrow \infty} Q(\varphi_{u_k}^0) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\mathbf{x}, 0) \text{ en } H^{-s}(\Omega) \quad (5.2)$$

y por el teorema 4.1

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\mathbf{x}, 0) = u(\mathbf{x}, 0) \text{ en } H^{-(2r+1)+\frac{1}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega).$$

De modo que, a partir de (5.2) deducimos que $Q(\varphi_u^0) = u(\mathbf{x}, 0)$. Como cada $u_k(\mathbf{x}, 0) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, por la definición de $\varphi_{u_k}^0$ tenemos

$$\forall v \in H^s(\Omega) \quad \langle v, \varphi_u^0 \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle v, \varphi_{u_k}^0 \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle v, u_k(\mathbf{x}, 0) \rangle.$$

Por supuesto, si $v \in H_0^s(\Omega)$ tenemos también

$$\langle v, \varphi_u^0 \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle v, u_k(\mathbf{x}, 0) \rangle = \langle v, u(\mathbf{x}, 0) \rangle$$

y por tanto $\varphi_u^0 \in (H^s(\Omega))'$ es una extensión de $u(\mathbf{x}, 0)$. Está claro que φ_u^0 es independiente de la sucesión elegida $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ en (5.1) convergente en $(H^s(\Omega))'$ (porque una repetición del argumento aplicado a la diferencia $\{u_k - v_k\}_{k=1}^\infty$ de dos sucesiones implicaría que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_k - v_k) = 0$$

en $(H^s(\Omega))'$. ■

A partir de ahora denotaremos la extensión φ_u^0 con el mismo símbolo $u(\mathbf{x}, 0)$ de su restricción (y lo mismo con $\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0)$ y $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$ sobre $\partial\Omega \times]0, T[$).

El lema 5.1 nos permite dar significado a dos extensiones substanciales de la fórmula de Green clásica.

Proposición 5.1. *Primera generalización de la fórmula de Green.* Sea $r > \frac{1}{2}$ verificando las condiciones (4.2) y (4.24). Sea $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$ tal que $\mathcal{A}^*(v) \in H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$. Sea $u \in \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$. Existe un operador en la frontera $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$ y una función $f_{\mathcal{A}}$ tales que

$$\langle v(\mathbf{x}, t), (\mathcal{A}u)(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega \times]0, T[} - \langle u(\mathbf{x}, t), (\mathcal{A}^*v)(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega \times]0, T[} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle u(\mathbf{x}, t), (\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(v))(\mathbf{x}, t) \rangle_{\partial\Omega \times]0, T[} - \langle f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})v(\mathbf{x}, t), \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \rangle_{\partial\Omega \times]0, T[} + \\
 &\quad + \frac{1}{\alpha} [\langle v(\mathbf{x}, t), u(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega}]_{t=0}^{t=T} + \\
 &\quad + \frac{\tau}{\alpha} \left[\langle v(\mathbf{x}, t), \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega} - \langle u(\mathbf{x}, t), \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega} \right]_{t=0}^{t=T} \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

(los corchetes tienen el sentido usual de la regla de integración de Barrow).

Observación. Démonos cuenta que en la fórmula anterior $u(\mathbf{x}, 0)$, $u(\mathbf{x}, T)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, T)$ y $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$ son las correspondientes extensiones canónicas definidas en el lema 5.1 y por tanto, las correspondientes formas bilineales de dualidad se toman en los diferentes pares duales

$$\langle H^s(\Omega), (H^s(\Omega))' \rangle \quad s \geq 2r + 1 - \frac{1}{2} \frac{2r + 1}{2r + 2} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
 &\langle H^{s,w}(\partial\Omega \times]0, T[), (H^{s,w}(\partial\Omega \times]0, T[))' \rangle \quad s \geq 2r + \frac{1}{2}, \\
 &\quad w \geq 2r + 2 - \frac{1}{2} \frac{2r + 1}{2r + 2}. \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

Demostración. Como en el lema 5.1, escogemos

$$\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega \times]0, T[}) \quad \text{tal que} \quad u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k \quad \text{en} \quad \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[). \quad (5.6)$$

Como $\mathcal{A}^*(v) \in H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$,

$$H^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[) \subset \Phi^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[)$$

y

$$\mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega \times]0, T[}) \subset L^2(\Omega \times]0, T[) \subset \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, T[),$$

las formas bilineales de dualidad

$$\langle v(\mathbf{x}, t), (\mathcal{A}(u_k))(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega \times]0, T[} \quad \text{y} \quad \langle u_k(\mathbf{x}, t), (\mathcal{A}^*(v))(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega \times]0, T[}, \quad k \in \mathbb{N}$$

están bien definidas. Entonces por la fórmula de Green clásica (proposición 1.3) tenemos

$$\begin{aligned}
& \forall k \in \mathbb{N} \quad \langle v(\mathbf{x}, t), (\mathcal{A}u_k)(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega \times]0, T[} - \langle u_k(\mathbf{x}, t), (\mathcal{A}^*v)(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega \times]0, T[} = \\
& = \langle u_k(\mathbf{x}, t), (\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(v))(\mathbf{x}, t) \rangle_{\partial\Omega \times]0, T[} - \langle \mathfrak{f}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})v(\mathbf{x}, t), \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \rangle_{\partial\Omega \times]0, T[} + \\
& \quad + \frac{1}{\alpha} [\langle v(\mathbf{x}, t)u_k(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega}]_{t=0}^{t=T} + \\
& \quad + \frac{\tau}{\alpha} \left[\langle v(\mathbf{x}, t), \frac{\partial u_k}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega} - \langle u_k(\mathbf{x}, t), \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega} \right]_{t=0}^{t=T}. \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Como $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$, a partir de los teoremas de las trazas 4.1 y 4.2, el lema 5.1 y utilizando los pares duales (5.4) y (5.5) las formas bilineales duales

$$\langle v(\mathbf{x}, 0), u(\mathbf{x}, 0) \rangle_{\Omega}, \langle v(\mathbf{x}, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \rangle_{\Omega}, \langle \mathfrak{f}_{\mathcal{A}} v(\mathbf{x}, 0), \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \rangle_{\partial\Omega \times]0, T[}$$

están bien definidas. A partir de (5.6), la definición de la topología en $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$ y la continuidad de las aplicaciones traza (teoremas 4.1 y 4.2) la demostración termina tomando límites cuando $k \rightarrow \infty$ en (5.7). ■

Proposición 5.2. Segunda generalización de la fórmula de Green

Sea $r > \frac{1}{2}$ verificando las condiciones (4.2) y (4.24).

1) Existe una función real $\mathfrak{f}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tal que si $v \in X^r(\Omega \times]0, T[)$ y $u \in \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$ se verifica la igualdad

$$\begin{aligned}
& \langle v(\mathbf{x}, t), (\mathcal{A}u)(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega \times]0, T[} - \langle u(\mathbf{x}, t), (\mathcal{A}^*v)(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega \times]0, T[} = \\
& = - \langle \mathfrak{f}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})v(\mathbf{x}, t), \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \rangle_{\partial\Omega \times]0, T[} - \frac{1}{\alpha} \langle v(\mathbf{x}, 0), u(\mathbf{x}, 0) \rangle_{\Omega} - \\
& \quad \frac{\tau}{\alpha} \left(\langle v(\mathbf{x}, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \rangle_{\Omega} - \langle u(\mathbf{x}, 0), \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \rangle_{\Omega} \right). \quad (5.8)
\end{aligned}$$

2) Existe una función real $f_{\mathcal{A}} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tal que si $v \in H_{\mathcal{A}\partial\mathfrak{X}}^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, T[)$ y $u \in \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$ se verifica la igualdad

$$\begin{aligned} & \langle v(\mathbf{x}, t), (\mathcal{A}u)(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega \times]0, T[} - \langle u(\mathbf{x}, t), (\mathcal{A}^*v) \rangle_{\Omega \times]0, T[} = \\ & = - \langle f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})v(\mathbf{x}, t), \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \rangle_{\partial\Omega \times]0, T[} + \frac{1}{\alpha} \langle v(\mathbf{x}, T), u(\mathbf{x}, T) \rangle_{\Omega} + \\ & + \frac{\tau}{\alpha} \left(\langle v(\mathbf{x}, T), \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, T) \rangle_{\Omega} - \langle u(\mathbf{x}, T), \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, T) \rangle_{\Omega} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Nota. La misma observación que hemos hecho en la proposición anterior es válida ahora para los pares duales involucrados.

Demostración. Sólomente haremos la prueba de 1) porque el apartado 2) se demuestra exactamente igual pero utilizando el teorema 3.2.

Por la definición de $X^r(\Omega \times]0, T[)$ y (1.17) tenemos las inclusiones continuas

$$X^r(\Omega \times]0, T[) \subset H^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, T[) \subset \Phi^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, T[). \quad (5.10)$$

Por el teorema 2.1 del capítulo 4 de [19] y utilizando el cambio de variable temporal $\bar{t} = T - t$ existen las trazas

$$v(\mathbf{x}, t) \Big|_{\partial\Omega \times]0, T[} \in H^{2r+\frac{1}{2}, 2r+\frac{1}{2}}(\Omega \times]0, T[),$$

$$f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})v(\mathbf{x}, t) \Big|_{\partial\Omega \times]0, T[} \in H^{2r+\frac{1}{2}, 2r+\frac{1}{2}}(\Omega \times]0, T[)$$

$$\{v(\mathbf{x}, 0), v(\mathbf{x}, T)\} \subset H^{2r+\frac{1}{2}}(\Omega) \quad \text{y} \quad \left\{ \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, 0), \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, T) \right\} \subset H^{2r-\frac{1}{2}}(\Omega).$$

Démomos cuenta que $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(v)(\mathbf{x}, t) = 0$ en $\partial\Omega \times]0, T[$ y $v(\mathbf{x}, T) = \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0$ ya que $v(\mathbf{x}, t) \in X^r(\Omega \times]0, T[)$. Por las definiciones de $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$ y $X^r(\Omega \times]0, T[)$ existen sucesiones

$$\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[}) \quad (5.11)$$

y

$$\{v_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[}) \cap X^r(\Omega \times]0, T[)$$

tales que

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k \text{ en } \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[) \quad (5.12)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}^*(v_m) = \mathcal{A}^*(v) \text{ en } H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[). \quad (5.13)$$

Por el teorema 2.2 $v = \lim_{m \rightarrow \infty} v_m$ en $X^r(\Omega \times]0, T[)$ y por tanto en $H^{2r+1,2r+1}(\Omega \times]0, T[)$ por (5.10).

Entonces por la primera generalización de la fórmula de Green

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N} \quad & \langle v_m(\mathbf{x}, t), (\mathcal{A}u)(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega \times]0, T[} - \langle u(\mathbf{x}, t), (\mathcal{A}^*v_m)(\mathbf{x}, t) \rangle_{\Omega \times]0, T[} = \\ & = - \langle \mathbf{f}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})v_m(\mathbf{x}, t), \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \rangle_{\partial \Omega \times]0, T[} - \frac{1}{\alpha} \langle v_m(\mathbf{x}, 0), u(\mathbf{x}, 0) \rangle_{\Omega} - \\ & \quad \frac{\tau}{\alpha} \left(\langle v_m(\mathbf{x}, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \rangle_{\Omega} - \langle u(\mathbf{x}, 0), \frac{\partial v_m}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \rangle_{\Omega} \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

entendiendo las formas bilineales de dualidad como en la observación de la proposición 5.3. Como a partir del teorema de la traza en $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$ deducimos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} v_m(\mathbf{x}, 0) = v(\mathbf{x}, 0) \text{ en } H^{-s}(\Omega) \text{ si } s > 2r+1 - \frac{1}{2} \frac{2r+1}{2r+2} > 2r + \frac{1}{2},$$

por lo que tenemos por el lema 5.1 y la definición de $\varphi_{v_m}^0$

$$\langle u(\mathbf{x}, 0), v(\mathbf{x}, 0) \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle u(\mathbf{x}, 0), \varphi_{v_m}^0 \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle u(\mathbf{x}, 0), v_m(\mathbf{x}, 0) \rangle. \quad (5.15)$$

Con una argumentación análoga utilizando los correspondientes teoremas de trazas en $\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$ y los pares duales del lema 5.1 se prueban las igualdades

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \mathbf{f}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})v_m(\mathbf{x}, t), \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \rangle_{\partial \Omega \times]0, T[} = \langle \mathbf{f}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})v(\mathbf{x}, t), \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \rangle_{\partial \Omega \times]0, T[}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle v_m(\mathbf{x}, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \rangle_{\Omega} = \langle v(\mathbf{x}, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \rangle_{\Omega}$$

y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle u(\mathbf{x}, 0), \frac{\partial v_m}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \rangle_{\Omega} = \langle u(\mathbf{x}, 0), \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \rangle_{\Omega}.$$

Para finalizar la demostración es suficiente con tomar límites en (5.14) cuando $m \rightarrow \infty$. ■

Podemos aplicar el lema 5.1 y la segunda generalización de la fórmula de Green para obtener una mejora de los teoremas de las trazas del capítulo 4. En este capítulo usamos la forma clásica de Green para probar que las trazas sobre la frontera de $\Omega \times]0, T[$ de las funciones de clase $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$ coinciden con las restricciones habituales como funciones continuas. Ahora podemos extender el rango de validez de esta conclusión a ciertas *funciones continuas* solamente.

Corolario 5.1. *Sea $r > \frac{1}{2}$ verificando las condiciones (4.2) y (4.24). Sea $U(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega \times]0, T[}) \cap \mathbf{D}_A^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$. Entonces las trazas sobre las secciones transversales $t = 0$ y $t = T$ y las trazas sobre la frontera lateral coinciden con las restricciones ordinarias $U(\mathbf{x}, 0)$, $U(\mathbf{x}, T)$ y $U(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[$, respectivamente. La misma conclusión sirve para todos los teoremas de las trazas vistos en el capítulo 4.*

Demostración. Basta observar que por el lema 5.1, por la fórmula de Green clásica y por la segunda generalización de la fórmula de Green, caso 2) podemos repetir los razonamientos efectuados en el teorema 4.1 así como en los demás teoremas de trazas de aquél capítulo. ■

5.2. Teoremas de existencia y unicidad para las soluciones en el caso de datos irregulares

Teorema 5.1. Existencia y unicidad de las soluciones en el caso de datos irregulares *Sea $r \in \mathbb{N}$, $r \geq \frac{1}{2}$ verificando las condiciones (4.2) y (4.24). Suponemos que*

$$F_0 \in \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, T[), \quad F_1 \in J^{-(2r+\frac{1}{2})}(\partial\Omega \times]0, T[),$$

$$F_2 \in \Phi^{-(2r-\frac{1}{2})}(\Omega) \quad \text{y} \quad F_3 \in \Phi^{-(2r+\frac{1}{2})}(\Omega).$$

Entonces existe una única distribución $U(\mathbf{x}, t)$ tal que

$$\mathcal{A}(U) = F_0 \quad \text{en} \quad \Omega \times]0, T[, \quad \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = F_1 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \times]0, T[,$$

(5.16)

$$U(\mathbf{x}, 0) = F_2, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = F_3 \quad \text{en } \Omega \quad (5.17)$$

y además, $U(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$.

Observación. Es importante recalcar que las trazas utilizadas en este teorema se sobreentienden como extensiones de las trazas naturales de las funciones de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$ en el sentido de los teoremas 4.1 y 4.2, por lo que al utilizar estas trazas se está utilizando la convergencia en los espacios

$$H^{-(2r+1)+\frac{1}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega) \times H^{-(2r+1)+\frac{3}{2}\frac{2r+1}{2r+2}}(\Omega)$$

en el caso de (5.17) y en el espacio

$$H^{-(2r+\frac{1}{2}), -(2r+2)+\frac{r+1}{2r+1}}(\Omega \times]0, T[)$$

en el caso de (5.16), que es una convergencia más débil que la de los espacios

$$\Phi^{-(2r-\frac{1}{2})}(\Omega) \times \Phi^{-(2r+\frac{1}{2})}(\Omega)$$

y $J^{-(2r+\frac{1}{2})}(\partial\Omega \times]0, T[)$, respectivamente.

Demostración. Por el teorema de las trazas en $H^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, T[)$ (ver teorema 2.1 en el capítulo 4 de [19], por ejemplo) las relaciones

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \quad v(\mathbf{x}, 0) \in H^{2r+\frac{1}{2}}(\Omega), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \in H^{2r-\frac{1}{2}}(\Omega)$$

y

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad v(\mathbf{x}, t) \in H^{2r+\frac{1}{2}, 2r+\frac{1}{2}}(\partial\Omega \times]0, T[) \subset J^{2r+\frac{1}{2}}(\Omega \times]0, T[)$$

son ciertas para cada $v \in X^r(\Omega \times]0, T[)$ y las aplicaciones

$$v \longrightarrow v(\mathbf{x}, 0), \quad v \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \quad \text{y} \quad v \longrightarrow (f_{\mathcal{A}}u) \Big|_{\partial\Omega \times]0, T[}(\mathbf{x}, t)$$

de $X^r(\Omega \times]0, T[)$ en $H^{2r+\frac{1}{2}}(\Omega)$, $H^{2r-\frac{1}{2}}(\Omega)$ y $H^{2r+\frac{1}{2}, 2r+\frac{1}{2}}(\partial\Omega \times]0, T[)$ respectivamente, son continuas. Entonces, por (1.21) y (1.17), la forma lineal L definida para $v \in X^r(\Omega \times]0, T[)$ por

$$L(v) = \langle F_0, v \rangle - \langle F_1, f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})v(\mathbf{x}, t) \rangle -$$

$$\left\langle F_2, \frac{1}{\alpha} \left(v(\mathbf{x}, 0) + \tau \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \right) \right\rangle - \frac{\tau}{\alpha} \langle F_3, v(\mathbf{x}, 0) \rangle$$

es continua.

Como \mathcal{A}^* es un isomorfismo de $X^r(\Omega \times]0, T[)$ en $H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times]0, T[)$, existe $U := ((\mathcal{A}^*)')^{-1}(L) \in H^{-(2r-1),-2r}(\Omega \times]0, T[)$ tal que es cierta la igualdad

$$\forall v \in X^r(\Omega \times]0, T[) \quad \langle U, \mathcal{A}^*(v) \rangle = \langle L, v \rangle. \quad (5.18)$$

Obsérvese que como $\mathcal{D}(\Omega \times]0, T[) \subset X^r(\Omega \times]0, T[)$ y las trazas sobre la frontera $\partial(\Omega \times]0, T[)$ de las funciones en $\mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)$ y sus derivadas son 0 tenemos

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega \times]0, T[) \quad \langle L, v \rangle = \langle U, \mathcal{A}^*(v) \rangle = \langle \mathcal{A}(U), v \rangle = \langle F_0, v \rangle \quad (5.19)$$

es decir

$$\mathcal{A}(U) = F_0 \quad (5.20)$$

y U es solución de la ecuación dada.

A continuación vamos a ver que $U \in \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$. Por las propiedades de los triples de Guelfand se obtiene la densidad de $\mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)$, $\mathcal{D}(\partial\Omega \times]0, T[)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$ en los espacios correspondientes por lo que podemos encontrar sucesiones $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)$, $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\partial\Omega \times]0, T[)$, $\{U_{2k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ y $\{U_{3k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = F_0 \quad \text{en } \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, T[), \quad (5.21)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = F_1 \quad \text{en } J^{-(2r+\frac{1}{2})}(\partial\Omega \times]0, T[), \quad (5.22)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U_{2k} = F_2 \quad \text{en } \Phi^{-(2r-\frac{1}{2})}(\Omega) \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} U_{3k} = F_3 \quad \text{en } \Phi^{-(2r+\frac{1}{2})}(\Omega). \quad (5.23)$$

Ahora definimos para cada $k \in \mathbb{N}$ la forma lineal L_k que envía cada $v \in X^r(\Omega \times]0, T[)$ a

$$L_k(v) = \left\langle f_k, v \right\rangle - \left\langle g_k, v(\mathbf{x}, t) \right\rangle - \left\langle U_{2k}, \frac{1}{\alpha} \left(v(\mathbf{x}, 0) + \tau \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \right) \right\rangle - \frac{\tau}{\alpha} \langle U_{3k}, v(\mathbf{x}, 0) \rangle.$$

Argumentando como antes $L_k \in (X^r(\Omega \times]0, T[))'$, y existe una *única* $U_k := ((\mathcal{A}^*))^{-1}(L_k) \in H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]0, T[)$ tal que

$$\forall v \in X^r(\Omega \times]0, T[) \quad L_k(v) = \langle U_k, \mathcal{A}^*(v) \rangle. \quad (5.24)$$

Por otro lado, por el corolario 2.3, el problema de contorno mixto, $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A}(\bar{U}_k) = f_k \quad \text{en} \quad \Omega \times]0, T[, \quad \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = g_k \quad \text{en} \quad \partial\Omega \times]0, T[, \quad (5.25)$$

$$\bar{U}_k(\mathbf{x}, 0) = U_{2k}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = U_{3k}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

tiene una solución $\bar{U}_k \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$.

Por la continuidad de las aplicaciones traza involucradas y por (5.21), (5.22), (5.23) y (5.24) vemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = U \quad \text{en} \quad (X^r(\Omega \times]0, T[))',$$

y siendo $((\mathcal{A}^*))^{-1}$ un isomorfismo obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U_k = U \quad \text{en} \quad H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]0, T[). \quad (5.26)$$

Por la fórmula de Green clásica (1.12) obtenemos $\forall v \in \mathcal{D}(\Omega \times]0, T[) \subset X^r(\Omega \times]0, T[)$

$$\langle \bar{U}_k, \mathcal{A}^*(v) \rangle = \langle \mathcal{A}(\bar{U}_k), v \rangle = L_k(v),$$

lo que, por la unicidad en (5.24) implica

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad U_k = \bar{U}_k \quad (5.27)$$

y por tanto, de (5.25) obtenemos $\mathcal{A}(U_k) = \mathcal{A}^*(\bar{U}_k) = f_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por (5.21) tenemos

$$\mathcal{A}(U) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(U_k) \quad \text{en} \quad \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, T[)$$

lo que junto con (5.26) da lugar a que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U_k = U \quad \text{en} \quad \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[),$$

es decir, a que $U \in \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$.

A continuación vamos a ver la unicidad de U . Supongamos que hubiesen dos soluciones U_1 y U_2 y tomemos $P = U_1 - U_2$. Entonces P verificaría

$$\mathcal{A}(P) = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[, \quad \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times]0, T[,$$

$$P(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Argumentando de la misma forma que antes

$$L(v) = \langle P, \mathcal{A}^*(v) \rangle = 0$$

y dado que

$$P = ((\mathcal{A}^*)')^{-1}(L) \in H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]0, T[)$$

entonces $P = 0$, por lo que la solución es única. ■

Corolario 5.2. *Sea $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times]0, T[$. Existe $G \in \cap_{\varepsilon > 0} \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-\left(\frac{n}{2} + \varepsilon\right)}(\Omega \times]0, T[)$ tal que*

$$\mathcal{A}(G) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times]0, T[,$$

$$G(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

y

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[.$$

Además, para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión

$$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega \times]0, T[})$$

tal que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \varphi_k(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad (5.28)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (5.29)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = G \quad \text{en } \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-\left(\frac{n}{2}-2+\varepsilon\right)}(\Omega \times]0, T[)$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(\varphi_k) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \quad \text{en } \Phi^{-\left(\frac{n+4}{2}+\varepsilon\right), -\left(\frac{n+4}{2}+\varepsilon\right)}(\Omega \times]0, T[).$$

Demostración. Por la proposición 1.4

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) &\in \Phi^{-\left(\frac{n}{2}+\varepsilon\right), -\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\Omega \times]0, T[) \subset \\ &\subset \Phi^{-\left(\frac{n}{2}+2+\varepsilon\right), -\left(\frac{n}{2}+2+\varepsilon\right)}(\Omega \times]0, T[). \end{aligned}$$

La demostración del corolario se obtiene directamente a partir del teorema 5.1 y la observación que, en este caso, las sucesiones $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{U_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{U_{3k}\}_{k=1}^{\infty}$ utilizadas en la demostración del teorema 5.1 se pueden tomar igual a 0 para todos los $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, cada función \bar{U}_k verifica

$$\frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times]0, T[$$

y

$$\bar{U}_k(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad \blacksquare$$

5.3. Propiedades de regularidad de las soluciones fundamentales del operador \mathcal{A}

En el apartado 5.2 hemos probado la existencia y unicidad de las soluciones del problema de Neumann asociado a (1.5) cuando los datos son irregulares (hasta cierto punto). En esta sección estudiamos las propiedades de regularidad de tales soluciones. Los resultados obtenidos en el apartado 2.1 para el operador \mathcal{A}^* se obtienen fácilmente también para \mathcal{A} realizando tan sólo algún pequeño cambio. De manera que, como a continuación trabajaremos con el operador \mathcal{A} se hará referencia a los resultados obtenidos en el apartado 2.1 para \mathcal{A}^* teniendo en cuenta que también son válidos para \mathcal{A} .

Si tomamos *formalmente* transformada de Schwartz-Laplace \mathfrak{L} con respecto a t de una distribución $\mathcal{A}(U)$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{X} + \frac{1}{\alpha} (p + \tau p^2) \right) \mathfrak{L}[U](p) = \\ & = \frac{\tau}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\tau} \mathcal{X} - \frac{1}{4\tau^2} + \left(p + \frac{1}{2\tau} \right)^2 \right) \mathfrak{L}[U](p) \end{aligned}$$

lo que da lugar de forma natural a la introducción de los operadores

$$A := \frac{\alpha}{\tau} \mathcal{X} - \frac{1}{4\tau^2} \quad \text{y} \quad \mathcal{X}_p := \frac{\tau}{\alpha} \left(A + \left(p + \frac{1}{2\tau} \right)^2 \right), \quad p \in \mathbb{C}. \quad (5.30)$$

Como podemos observar el operador A es el mismo que definimos a comienzos del apartado 2.1, sin embargo el operador \mathcal{X}_p no es exactamente el mismo que el definido en el apartado 2.1 para el operador \mathcal{A}^* . A partir de ahora cuando utlicemos \mathcal{X}_p lo haremos refiriéndonos al operador definido en (5.30).

Para estudiar las propiedades de regularidad de las soluciones obtenidas suponemos que Z es una distribución que verifica en $\Omega \times \mathbb{R}$ la ecuación

$$\mathcal{A}(Z) = \Psi. \quad (5.31)$$

Respecto a Ψ necesitaremos hacer ciertas hipótesis. Comenzamos con una observación. Dado un multi-índice α , como para cada

$$g \in \mathfrak{R}^{2r+1+|\alpha|}(\Omega) \subset \mathfrak{R}^{2r+1}(\Omega)$$

tenemos

$$\mathcal{X}_p \left(\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \mathcal{X}_p(g),$$

por una conocida propiedad de los elementos en los espacios de tipo $H_0^s(\Omega)$ (ver por ejemplo el teorema 11.5, capítulo 1 en [19]) obtenemos $\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \in \mathfrak{R}^{2r+1}(\Omega)$. Supongamos que $\Psi \in \mathcal{D}'(\Omega \times]0, \infty[)$ es una distribución tal que existen $r > \frac{1}{2}$ y $p_0 \in \mathbb{R}$ de modo que la transformada de Schwartz-Laplace $\mathfrak{L}[\Psi](\mathbf{x}, p)$, considerada como una distribución vectorial de variable compleja p verifica

$$\forall p \in \mathbb{C}, \quad \text{Re}(p) > p_0 \quad \mathfrak{L}[\Psi](\mathbf{x}, p) \in (\mathfrak{R}^{2r+1}(\Omega))' \cap H^{-(2r-1)}(\Omega). \quad (5.32)$$

Como consecuencia de la observación anterior también tendremos

$$\mathfrak{L} \left[\frac{\partial^{|\alpha|} \Psi}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right] (\mathbf{x}, p) = \frac{\partial^{|\alpha|} \mathfrak{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha} (\mathbf{x}, p) \in (\mathfrak{R}^{2r+1+|\alpha|}(\Omega))' \cap H^{-(2r-1+|\alpha|)}(\Omega). \quad (5.33)$$

Ahora estamos en condiciones de establecer la hipótesis principal sobre Ψ . Supondremos que Ψ verifica además que para todo $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, se cumple

$$\frac{\partial^{|\alpha|} \mathfrak{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha} (\mathbf{x}, p) \in L^\infty(S_{p_0}, (\mathfrak{R}^{2r+1+|\alpha|}(\Omega))' \cap H^{-(2r-1+|\alpha|)}(\Omega)).$$

Por supuesto, la adopción de tan extraña propiedad es una mera necesidad técnica. Sin embargo, hay muchas distribuciones importantes y concretas que cumplen dicha condición. Por ejemplo, (5.32) es cierta para todas las medidas de Radon de tipo $(\mathcal{C}(\mathbb{R}))' \otimes ((\mathfrak{R}^{2r+1}(\Omega))' \cap H^{-(2r-1)}(\Omega))$ de soporte compacto y para otras importantes distribuciones como veremos al final de este apartado. Para simplificar notaciones definimos

$$\left\| \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} \mathfrak{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right\| \right\|_{\alpha, 2r-1} = \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} \mathfrak{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right\|_{L^\infty(S_{p_0}, (\mathfrak{R}^{2r+1+|\alpha|}(\Omega))' \cap H^{-(2r-1+|\alpha|)}(\Omega))}.$$

De ahora en adelante, dado $\varepsilon > 0$, consideraremos el número $\mu_1(\Omega)$ establecido en el lema 2.4 correspondiente a $2r-1 = \frac{n}{2} + \varepsilon$ y el semiespacio S_{μ_1} definido en el lema 2.5.

Teorema 5.2. *Sea $\Psi \in \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R})$ tal que su transformada de Schwartz-Laplace $\mathfrak{L}[\Psi]$ con respecto a t verifica (5.32). Sea Z una distribución que verifica en $\Omega \times \mathbb{R}$ la ecuación*

$$\mathcal{A}(Z)(\mathbf{x}, t) = \Psi. \quad (5.34)$$

Entonces

$$Z \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{T > 0} \bigcap_{k=0}^{\infty} H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}([-T, T], H^k(\Omega)) \subset \mathcal{C}([-T, T], \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})).$$

Demostración. La prueba de este teorema es larga y vamos a necesitar algunos resultados intermedios a lo largo del cuerpo de la

misma. Comenzamos dándonos cuenta que dado un multi-índice α y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, derivando en (5.31), obtenemos que la distribución $Z_{\alpha k} := \frac{\partial^{|\alpha|+k} Z}{\partial \mathbf{x}^\alpha \partial t^k}$ verifica la ecuación

$$\mathcal{X}(Z_{\alpha k}) + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial Z_{\alpha k}}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 Z_{\alpha k}}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial^{|\alpha|+k} \Psi}{\partial \mathbf{x}^\alpha \partial t^k} \quad (5.35)$$

en $\Omega \times \mathbb{R}$. Tomando transformada de Schwartz-Laplace \mathfrak{L} respecto a t en (5.35) y poniendo

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, p) := \mathfrak{L}[Z](\mathbf{x}, p) \quad \mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}, p) := \mathfrak{L}[Z_{\alpha k}](\mathbf{x}, p), \quad (5.36)$$

existe $p_0 \in \mathbb{R}$ tal que para cada $p \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(p) > p_0$ se verifica la igualdad

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}_p)'(\mathcal{G}_{\alpha k})(\mathbf{x}, p) &= \left(\left(\mathcal{X} + \frac{1}{\alpha} (p + \tau p^2) \right) \mathcal{G}_{\alpha k} \right) (\mathbf{x}, p) = \\ &= p^k \frac{\partial^{|\alpha|} \mathfrak{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha} (\mathbf{x}, p). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Entonces, por (5.33), (2.18) y el lema 2.6 tenemos necesariamente

$$\mathfrak{L}[Z_{\alpha k}] = \mathcal{G}_{\alpha k} = ((\mathcal{X}_p)')^{-1} \left(p^k \frac{\partial^{|\alpha|} \mathfrak{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right) \in H^{2r-1+|\alpha|}(\Omega). \quad (5.38)$$

Lema 5.2. *Dado $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ y $k \in \mathbb{N}$, la función $\mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}, p)$ es continua en $\Omega \times S_{\mu_1}$ y para cada $p \in S_{\mu_1}$ tenemos $\mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}, p) \in H^{\frac{n}{2}+|\alpha|+\varepsilon}(\Omega)$.*

Demostración. Por (5.38) y por las propiedades de regularidad de los elementos de los espacios de Sobolev (teorema 9.8, capítulo 1 in [19]) se verifica la inclusión continua $J : H^{2r+1+|\alpha|}(\Omega) \subset \mathcal{C}^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$. En particular, para cada $p \in S_{\mu_1}$ la distribución $\mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}, p)$ es una función continua de \mathbf{x} en Ω . Por otro lado, según el lema 2.5 la aplicación $p \rightarrow (\mathcal{X}_p)^{-1}$ de S_{μ_1} en $\mathcal{L}((\mathfrak{X}^{2r+1}(\Omega))', H^{-(2r-1)}(\Omega))$ es continua en $p_1 \in S_{\mu_1}$.

Ahora, fijamos $(\mathbf{x}_1, p_1) \in \Omega \times S_{\mu_1}$. Escogemos $\rho > 0$ tal que la bola $B_\rho(\mathbf{x}_1)$ de radio ρ y centro en \mathbf{x}_1 verifica $\overline{B_\rho(\mathbf{x}_1)} \subset \Omega$. Entonces, para cada $(\mathbf{x}, p) \in B_\rho(\mathbf{x}_1) \times S_{\mu_1}$ tenemos

$$|\mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}, p) - \mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}_1, p_1)| \leq |\mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}, p) - \mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}, p_1)| +$$

$$\begin{aligned}
& + |\mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}, p_1) - \mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}_1, p_1)| \leq \\
\leq & \left\| \mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}, p) - \mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}, p_1) \right\|_{L^\infty(B_\rho(\mathbf{x}_1))} + \left| \mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}, p_1) - \mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}_1, p_1) \right| \leq \\
& \leq \left\| \left(((\mathcal{X}_p)')^{-1} - ((\mathcal{X}_{p_1})')^{-1} \right) \times \right. \\
& \quad \times \left. \left(p^k \left(\frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{x}, p) - \frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{x}, p_1) \right) \right) \right\|_{L^\infty(B_\rho(\mathbf{x}_1))} + \\
& + \left\| \left((\mathcal{X}_{p_1})' \right)^{-1} \left(\left(p^k - p_1^k \right) \frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{x}, p_1) \right) \right\|_{L^\infty(B_\rho(\mathbf{x}_1))} + \\
& + \left| \mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}, p_1) - \mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}_1, p_1) \right| \leq \\
\leq & \|J\| \left\| \left(\left((\mathcal{X}_p)')^{-1} - ((\mathcal{X}_{p_1})')^{-1} \right) \left(p^k \left(\frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{x}, p) - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{x}, p_1) \right) \right) \right\|_{H^{2r+1+|\alpha|}(B_\rho(\mathbf{x}_1))} + \\
& + \left\| \left((\mathcal{X}_{p_1})' \right)^{-1} \left(\left(p^k - p_1^k \right) \frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{x}, p_1) \right) \right\|_{H^{2r+1+|\alpha|}(B_\rho(\mathbf{x}_1))} + \\
& + \left| \mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}, p_1) - \mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}_1, p_1) \right|
\end{aligned}$$

lo que es arbitrariamente pequeño escogiendo p y \mathbf{x} suficientemente cerca de p_1 y \mathbf{x}_1 como consecuencia de la citada continuidad de $p \rightarrow ((\mathcal{X}_p)')^{-1}$, la acotación en $H^{\frac{n}{2}+|\alpha|+\varepsilon}$ del conjunto de funciones $p^k \frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha}$ cuando la variable p pertenece a la bola $B_\eta(p_1) \subset S_{\mu_1}$ con centro en p_1 y radio $\eta > 0$ y la continuidad local con respecto a \mathbf{x} de $\mathcal{G}_{\alpha k}(\mathbf{x}, p_1)$. ■

Lema 5.3. Para cada $\psi > \mu_1(\Omega)$, cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $\mathbf{x} \in \Omega$ el límite

$$z(\mathbf{x}, t) := \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-h}^h e^{(\psi+i\nu)t} \mathcal{G}_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \psi+i\nu) d\nu \quad (5.39)$$

existe en \mathbb{C} y define una función continua en Ω .

Demostración. Ponemos $p = \psi + i\nu$. Dado $\mathbf{x}_1 \in \Omega$, escogemos $\rho > 0$ tal que la bola $B_\rho(\mathbf{x}_1)$ de radio ρ y centro en \mathbf{x}_1 verifica $\overline{B_\rho(\mathbf{x}_1)} \subset \Omega$. Denotamos por $R_\rho(f)$ la restricción a $B_\rho(\mathbf{x}_1)$ de una función f definida en un conjunto más grande. Por la continuidad de $\mathcal{G}_{\alpha 0}$ en Ω (lema 5.2) y por el corolario 9.1, capítulo 1 en [19], existe $M_1 > 0$ tal que si $L > 0$ es suficientemente grande tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{|h| \geq L} e^{(\psi+i\nu)t} \mathcal{G}_{\alpha 0}(\mathbf{x}_1, \psi + i\nu) d\nu \right| &\leq \int_{|h| \geq L} e^{\psi t} \left| \mathcal{G}_{\alpha 0}(\mathbf{x}_1, \psi + i\nu) \right| d\nu \leq \\ &\leq \int_{|h| \geq L} e^{\psi t} \left\| R_\rho \left(\mathcal{G}_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \psi + i\nu) \right) \right\|_{C(\overline{B_\rho(\mathbf{x}_1)})} d\nu \leq \\ &\leq M_1 \int_{|h| \geq L} e^{\psi t} \left\| R_\rho \left(\mathcal{G}_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \psi + i\nu) \right) \right\|_{H^{2r+1+|\alpha|}(B_\rho(\mathbf{x}_1))} d\nu \leq \end{aligned}$$

y de (5.38) y (5.33)

$$\leq M_1 e^{\psi t} \left\| \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right\| \right\|_{\alpha, 2r-1} \int_{|h| \geq L} \left\| (\mathcal{X}'_{\psi+i\nu})^{-1} \right\| d\nu$$

y por (2.17)

$$\leq M_1 e^{\psi t} \left\| \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right\| \right\|_{\alpha, 2r-1} \int_{|h| \geq L} \frac{1}{\left| \psi + i\nu + \frac{1}{2\tau} \right|^2 - \|A\|} d\nu$$

que es arbitrariamente pequeño cuando L tiende a ∞ . Esto muestra la existencia del límite (5.39) para cada $\mathbf{x}_1 \in \Omega$. La última desigualdad también muestra la convergencia uniforme en $B_\rho(\mathbf{x}_1)$ del límite (5.39) y por tanto $z(\mathbf{x}_1, t)$ es continua en \mathbf{x}_1 . ■

Proposición 5.3. *La distribución $Z_{\alpha 0}$ es una función real y para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ y $t \in \mathbb{R}$ tenemos*

$$Z_{\alpha 0}(\mathbf{x}, t) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-h}^h e^{(\psi+i\nu)t} \mathcal{G}_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \psi + i\nu) d\nu \quad (5.40)$$

y

$$\frac{\partial Z_{\alpha 0}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-h}^h (\psi + i\nu) e^{(\psi+i\nu)t} \mathcal{G}_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \psi + i\nu) d\nu.$$

Demostración Por el lema 5.2 la función $\mathcal{G}_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \psi + i \nu)$ no tiene ningún polo en el semiespacio $\psi > \mu_1(\Omega)$. Por (5.36) y la fórmula de inversión de la transformada de Schwartz-Laplace (ver por ejemplo el teorema 4.4.1 en [28]) tenemos que para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ y cada $t \in \mathbb{R}$

$$\forall \psi > \mu_1(\Omega) \quad Z_{\alpha 0}(\mathbf{x}, t) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-h}^h e^{(\psi + i\nu)t} \mathcal{G}_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \psi + i\nu) d\nu \quad (5.41)$$

en la topología de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. El lema 5.3 asegura que el lado derecho de la igualdad de (5.41) es una función numérica bien definida $z(\mathbf{x}, t)$. Entonces, (5.41) implica que $Z_{\alpha 0}(\mathbf{x}, t)$ es una distribución definida por una función real $z(\mathbf{x}, t)$. ■

Fin de la demostración del teorema 5.2. Sea $0 \leq s < \frac{3}{2}$ y $\mathcal{F}(p)$ denota la transformada de Fourier respecto a t . De (5.38) obtenemos para $\psi > \mu_1(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(1 + |\psi + i\nu|^2\right)^s \left\| \mathcal{F}\left[e^{-\psi t} Z_{\alpha 0}(\mathbf{x}, t)\right](\nu) \right\|^2 d\nu = \\ & = \int_0^\infty \left(1 + |\psi + i\nu|^2\right)^s \left\| \mathcal{L}\left[Z_{\alpha 0}(\mathbf{x}, t)\right](\psi + i\nu) \right\|^2 d\nu = \\ & = \int_0^\infty \left(1 + |\psi + i\nu|^2\right)^s \left\| (\mathcal{X}'_{\psi + i\nu})^{-1} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\psi + i\nu) \right) \right\|^2 d\nu \leq \end{aligned}$$

y por el lema 2.4

$$\begin{aligned} & \leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \frac{1}{2\tau})} \left(1 + |\psi + i\nu|^2\right)^s \left\| (\mathcal{X}'_{\psi + i\nu})^{-1} \right\|^2 \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\psi + i\nu) \right\|^2 d\nu + \\ & \quad + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \frac{1}{2\tau})}^\infty \left(1 + |\psi + i\nu|^2\right)^s \frac{1}{\left(|\psi + i\nu + \frac{1}{2\tau}|^2 - \|A\|\right)^2} \times \\ & \quad \times \left\| \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{L}[\Psi]}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \right\| \right\|_{\alpha, 2r-1}^2 d\nu < \infty \quad (5.42) \end{aligned}$$

ya que $2s < 3$. Por la versión vectorial del teorema de Plancherel obtenemos $e^{-\psi t} Z_{\alpha 0} \in L^s(]0, \infty[, \mathcal{C}^{|\alpha|}(\overline{\Omega}))$. Por tanto, para $T > 0$

$$Z_{\alpha 0} = e^{\psi T} \left(e^{-\psi T} Z_{\alpha 0} \right) \in H^s(]-T, T[, \mathcal{C}^{|\alpha|}(\overline{\Omega})) \subset H^s(]-T, T[, H^{|\alpha|}(\Omega))$$

de donde se deduce el enunciado en virtud del teorema de inmersión de Sobolev. ■

Proposición 5.4. *Sea $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Cada solución G en $\Omega \times \mathbb{R}$ de la ecuación*

$$\mathcal{A}(G) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \quad (5.43)$$

es una función real que verifica

$$G(\mathbf{x}, t) \in \bigcap_{T > |t_0|} \bigcap_{\varepsilon > 0} H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\cdot - T, T[, \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})).$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por el teorema de inmersión de Sobolev tenemos $H^{\frac{n}{2}+\varepsilon}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Por tanto, $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \in H^{-(\frac{n}{2}+\varepsilon)}(\Omega)$ y la restricción a $\mathfrak{R}^{\frac{n}{2}+2+\varepsilon}(\Omega) \subset H^{\frac{n}{2}+2+\varepsilon}(\Omega)$ es continua. Como

$$\forall p \in \mathbb{C} \quad \mathfrak{L}[\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0)](p) = e^{-p t_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (5.44)$$

el resultado se obtiene directamente del teorema 5.2. ■

Corolario 5.3. *Para cada $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times]-T, T[$, $T > 0$ cada distribución G que verifica la ecuación*

$$\mathcal{A}(G) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \quad \text{en } \Omega \times]-T, T[$$

es una función real tal que

$$G \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{k=0}^{\infty} H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\cdot - T, T[, H^k(\Omega)) \subset \mathcal{C}(\cdot - T, T[, \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})).$$

Demostración. Fijamos $h \in \mathbb{N}$ y r tal que $2r + 1 > \frac{n}{2}$. Después de aplicar el teorema 2.3 y el corolario 5.2 en el intervalo $]0, 2T[$ y realizar el cambio de variable temporal $t' = t - T$ obtenemos una sucesión $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega \times]-T, T[)$ y una sucesión $\{U_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]-T, T[})$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad U_k(\mathbf{x}, T) = \frac{\partial U_k}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0, \quad (5.45)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]-T, T[\quad \frac{\partial U_k}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (5.46)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}(U_k) = \varphi_k \quad \text{en } \Omega \times]-T, T[\quad (5.47)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \quad \text{en } H^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]-T, T[)$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U_k = G \quad \text{en } H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]-T, T[). \quad (5.48)$$

Extendemos cada $U_k(\mathbf{x}, t)$, $k \in \mathbb{N}$ a una función $E(U_k)(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, H^h(\Omega))$ definida por

$$E(U_k)(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} U_k(\mathbf{x}, t) & \text{si } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [-T, T[\\ 0 & \text{si } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [T, \infty[\\ 3 E(U_k)(\mathbf{x}, -t - 2T) - \\ 2E(U_k)(\mathbf{x}, -2t - 3T) & \text{si } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times]-\infty, -T] \end{cases}$$

(el método de reflexión sobre $t = -T$). Observemos que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall j = 0, 1 \quad \frac{\partial^j E(U_k)}{\partial t^j}(\mathbf{x}, -T) = \frac{\partial^j U_k}{\partial t^j}(\mathbf{x}, -T) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Claramente $E(U_k) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, H^h(\Omega))$ y $E(\varphi_k)$ tiene soporte compacto contenido en $[-3T, T]$ para cada $k \in \mathbb{N}$. De (5.48) obtenemos $K > 0$ tal que

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|U_k\|_{H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]-T, T[)} \leq K. \quad (5.49)$$

Denotando por $R_T(f)$ la restricción a $\Omega \times]-T, T[$ de una función f definida en un conjunto más grande y después de los cambios naturales de variable tenemos

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R}) \quad & \left| \langle g, E(U_k) \rangle \right| \leq \left| \int_{\Omega} \int_{-T}^T g(\mathbf{x}, t) U_k(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \, dt \right| + \\ & + 3 \left| \int_{\Omega} \left(\int_{-3T}^{-T} g(\mathbf{x}, t) U_k(\mathbf{x}, -t - 2T) \, dt \right) \, d\mathbf{x} \right| + \\ & + 2 \left| \int_{\Omega} \int_{-3T}^{-T} g(\mathbf{x}, t) U_k(\mathbf{x}, -2t - 3T) \, d\mathbf{x} \, dt \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\Omega} \int_{-T}^T g(\mathbf{x}, t) U_k(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \, dt \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +3 \left| \int_{\Omega} \left(\int_{-T}^T g(\mathbf{x}, -2T-t) U_k(\mathbf{x}, t) dt \right) d\mathbf{x} \right| + \\
 & + \left| \int_{\Omega} \int_{-T}^{3T} g \left(\mathbf{x}, \frac{-3T-t}{2} \right) U_k(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt \right|
 \end{aligned}$$

y como $R_T(g) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]-T, T[}) \subset H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]-T, T[)$, por el lema 1.1

$$\begin{aligned}
 & \leq \|U_k\|_{H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]-T, T[)} \left(\|g(\mathbf{x}, t)\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]-T, T[)} + \right. \\
 & \quad + 3 \|g(\mathbf{x}, -2T-t)\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]-T, T[)} + \\
 & \quad \left. + \left\| g \left(\mathbf{x}, \frac{-3T-t}{2} \right) \right\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]-T, T[)} \right) \leq \\
 & \leq K \left(\|g(\mathbf{x}, t)\|_{H_{0,0}^{2r-1, 2r}(\Omega \times \mathbb{R})} + 3 \|g(\mathbf{x}, -2T-t)\|_{H_{0,0}^{2r-1, 2r}(\Omega \times \mathbb{R})} + \right. \\
 & \quad \left. + \left\| g \left(\mathbf{x}, \frac{-3T-t}{2} \right) \right\|_{H_{0,0}^{2r-1, 2r}(\Omega \times \mathbb{R})} \right) = \\
 & = \left| \left\langle g(\mathbf{x}, -2T-t), U_k(\mathbf{x}, t) \right\rangle \right| \leq \|g\|_{H_{0,0}^{h,1}(\Omega \times \mathbb{R})} \|U_k\|_{H^{-h,-1}(\Omega \times \mathbb{R})}
 \end{aligned}$$

y por tanto

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|E(U_k)\|_{H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times \mathbb{R})} \leq 5K.$$

Entonces $\{E(U_k)\}_{k=1}^\infty$ está acotada en $H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times \mathbb{R})$. Por reflexividad hay una subsucesión (nuevamente denotada por $\{E(U_k)\}_{k=1}^\infty$) débilmente convergente a alguna distribución $Z \in H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times \mathbb{R})$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 & \forall g \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R}) \quad \left\langle E(\mathcal{A}(U_k)), g \right\rangle = \\
 & = \int_{\Omega} \left(\int_{-T}^T U_k(\mathbf{x}, t) \mathcal{A}^*(g(\mathbf{x}, t)) dt \right) d\mathbf{x} + \\
 & + 3 \int_{\Omega} \left(\int_{-3T}^{-T} U_k(\mathbf{x}, -t-2T) \mathcal{A}^*(g(\mathbf{x}, t)) dt \right) d\mathbf{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2 \int_{\Omega} \left(\int_{-2T}^{-T} U_k(\mathbf{x}, -2t - 3T) \mathcal{A}^*(g(\mathbf{x}, t)) dt \right) d\mathbf{x} = \\ = \langle E(U_k), \mathcal{A}^*(g) \rangle = \langle \mathcal{A}(E(U_k)), g \rangle, \end{aligned}$$

es decir, $E(\mathcal{A}(U_k)) = \mathcal{A}(E(U_k))$. Entonces

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R}) \quad \langle \mathcal{A}(Z), g \rangle &= \langle Z, \mathcal{A}^*(g) \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle E(U_k), \mathcal{A}^*(g) \rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}(E(U_k)), g \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle E(\mathcal{A}(U_k)), g \rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle E(\varphi_k), g \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \varphi_k, g \rangle = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0), g \rangle, \end{aligned}$$

o de forma equivalente $\mathcal{A}(Z) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0)$. Por la proposición 5.4 tenemos que $Z \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}, H^h(\Omega)) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{C}^h(\Omega))$. Como

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathcal{D}(\Omega \times]-T, T[) \quad \langle Z, g \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle E(U_k), g \rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle U_k, g \rangle = \langle G, g \rangle \end{aligned}$$

y $G(\mathbf{x}, t)$ es la restricción a $\Omega \times]-T, T[$ de Z , obtenemos el resultado, siendo $h \in \mathbb{N}$ arbitrario. ■

Capítulo 6

Función de Green del problema de Neumann para la ecuación anisótropa hiperbólica de transmisión del calor

El conocimiento de la función de Green asociada a una ecuación en derivadas parciales es una herramienta teórica de fundamental importancia ya que proporciona fórmulas explícitas para la solución de problemas de contorno mixtos. Además, su carácter de solución fundamental de las ecuaciones diferenciales hace que la función de Green sea también útil bajo el punto de vista práctico del cálculo numérico en la aplicación del método de los elementos finitos de frontera (ver por ejemplo [33] y [3]). En el excelente libro [10] podemos encontrar muchas aplicaciones actualizadas de estas ideas a diversos problemas físicos. Sin embargo, en él no se estudia ninguna aplicación a la ecuación hiperbólica de transmisión del calor en dominios espaciales cuya dimensión sea mayor o igual a 2.

El objetivo de este capítulo es probar la existencia y unicidad de la función de Green para el problema de Neumann asociado a los operadores \mathcal{A} definidos en el capítulo 1.

El contenido de este capítulo se organiza como sigue. El apartado 6.1 contiene la formulación matemática de los problemas que se van a

considerar (los problemas llamados $\mathbf{P}(\Omega)$ y $\mathbf{P}_T(\Omega)$). En el apartado 6.2 se obtienen resultados de existencia y unicidad de la función de Green. Y Finalmente, en el apartado 6.3 obtenemos la fórmula de reciprocidad de la función de Green y después aplicamos dicha función de Green para obtener una fórmula explícita para las soluciones del problema de Neumann para el operador \mathcal{A} .

6.1. Definiciones

El objetivo principal de este capítulo es resolver el problema mixto siguiente:

Problema $\mathbf{P}(\Omega)$.

Encontrar una distribución $U(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}'(\Omega \times]0, \infty[)$ con las trazas $U(\mathbf{x}, 0)$ y $\frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, 0)$ tal que

$$\mathcal{A}(U)(\mathbf{x}, t) = F_0(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \Omega \times]0, \infty[\quad (6.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = F_1(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \partial\Omega \times]0, \infty[\quad (6.2)$$

$$U(\mathbf{x}, 0) = F_2(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = F_3(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega, \quad (6.4)$$

donde $F_0(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}'(\Omega \times]0, \infty[)$, $F_1(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}'(\partial\Omega \times]0, \infty[)$ y $F_j(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $j = 2, 3$ son distribuciones dadas en espacios lo suficientemente generales para cubrir las situaciones físicas que tienen lugar en la práctica.

Por razones técnicas necesitamos considerar también el problema análogo sobre un intervalo temporal finito $]0, T[$, $T > 0$:

Problema $\mathbf{P}_T(\Omega)$.

Dada $T > 0$, encontrar una distribución $U(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}'(\Omega \times]0, T[)$ con trazas $U(\mathbf{x}, 0)$, $\frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, 0)$ tal que

$$\mathcal{A}(U)(\mathbf{x}, t) = F_0(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (6.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = F_1(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \partial\Omega \times]0, T[\quad (6.6)$$

$$U(\mathbf{x}, 0) = F_2(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = F_3(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega, \quad (6.8)$$

donde $F_0(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}'(\Omega \times]0, T[)$, $F_1(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}'(\partial\Omega \times]0, T[)$ y $F_j(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $j = 2, 3$ son distribuciones dadas en los espacios adecuados como en el problema anterior.

6.2. Existencia y unicidad de la función de Green

En este apartado se demuestra la existencia y unicidad de la función de Green para los problemas $\mathbf{P}_T(\Omega)$ y $\mathbf{P}(\Omega)$.

Definición 6.1. *La función de Green para el problema $\mathbf{P}_T(\Omega)$ es la función con valores distribucionales $G_T := G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \in \mathcal{D}'(\Omega \times] - T, T[)$ definida para cada variable paramétrica $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times] - T, T[$ con trazas $G_T(\mathbf{x}, T)$, $\frac{\partial G_T}{\partial t}(\mathbf{x}, T)$ y tal que*

$$\mathcal{A}(G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \quad \text{en } \Omega \times] - T, T[, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial G_T}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times] - T, T[, \quad (6.10)$$

$$G_T(\mathbf{x}, T | \mathbf{x}_0, t_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial G_T}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (6.11)$$

Proposición 6.1. *Existe una única función de Green $G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ para el problema $\mathbf{P}_T(\Omega)$ que verifica*

$$G_T \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbf{D}_A^{-(\frac{n}{2} + \varepsilon)}(\Omega \times] - T, T[) \quad (6.12)$$

y

$$G_T \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{k=0}^{\infty} H^{\frac{3}{2} - \varepsilon}(\cdot] - T, T[, H^k(\Omega)) \subset \mathcal{C}(\cdot] - T, T[, \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})). \quad (6.13)$$

Demostración. Dado $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times]-T, T[$ tenemos $0 < t_0 + T < 2T$ y por la proposición 1.4

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0 - T) \in \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, 2T[)$$

para cada r tal que $2r - 1 > \frac{n}{2}$. Por el teorema 5.1 hay una única $U \in \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, 2T[)$ tal que

$$\mathcal{A}(U) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0 - T) \quad \text{en } \Omega \times]0, 2T[,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times]0, 2T[$$

y

$$U(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Después del cambio de variable temporal $t' = t - T$ (y posterior *cambio de nombre* de la variable t' por t) obtenemos para cada r que verifica $2r - 1 > \frac{n}{2}$ la existencia de una única distribución $G_T(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]-T, T[)$ que verifica

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times]-T, T[\quad \mathcal{A}(G_T)(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0), \quad (6.14)$$

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times]-T, T[\quad \frac{\partial G_T}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0$$

y

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \quad G_T(\mathbf{x}, T) = \frac{\partial G_T}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0,$$

es decir, G_T es la función de Green para el problema $\mathbf{P}_T(\Omega)$. Como

$$\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]-T, T[) \subset \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r'-1)}(\Omega \times]-T, T[)$$

si $r < r'$, por la unicidad de G_T para cada r , obtenemos (6.12). La última relación (6.13) es una aplicación del corolario 5.3. ■

Pasemos a estudiar ahora el problema $\mathbf{P}(\Omega)$.

Definición 6.2. *La función de Green para el problema $\mathbf{P}(\Omega)$ es la función con valores distribucionales $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \in \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R})$ definida para $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times \mathbb{R}$ que satisface el problema de contorno*

$$\mathcal{A}(G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0) \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R}. \quad (6.16)$$

Hay que darse cuenta que en contraste con la ecuación del calor clásica, debido a la forma (1.4) de la ecuación hiperbólica de transmisión del calor con fuentes de calor interna, la *función de Green no representa ahora el campo de temperaturas en Ω debido a una fuente unitaria e instantánea de calor en el punto \mathbf{x}_0 e instante t_0* . Sin embargo, vamos a ver que $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ juega para la ecuación (1.4) el mismo papel que su análoga para la ecuación parabólica de transmisión del calor.

Probar la existencia de la función de Green para el problema $\mathbf{P}(\Omega)$ es mucho más complicado.

Teorema 6.1. *Existe una única función de Green G para el problema $\mathbf{P}(\Omega)$ tal que*

$$G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbf{D}_A^{-(\frac{n}{2} + \varepsilon)}(\Omega \times \mathbb{R})$$

y

$$G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{T > |t_0|} \bigcap_{k=0}^{\infty} H^{\frac{3}{2} - \varepsilon}(\cdot - T, T], H^k(\Omega)) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})). \quad (6.17)$$

Demostración. Fijemos $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times \mathbb{R}$ y una bola abierta $\Omega_0 := B_{R_0}(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$. Definamos $\rho_0 := \rho(\mathbf{x}_0, \Omega) := d(\overline{B_{R_0}(\mathbf{x}_0)}, \partial\Omega) > 0$. Sea $\{T_m\}_{m=0}^{\infty}$ una sucesión creciente no acotada tal que $|t_0| < T_0$ y $2T_0 < T_1$. Escogemos un $m_0 \in \mathbb{N}$ fijo tal que $t_0 \in]-T_{m_0}, T_{m_0}[$. Consideremos la sucesión $\{G_{T_m}\}_{m=m_0}^{\infty}$ de las funciones de Green correspondientes a los problemas $\mathbf{P}_{T_m}(\Omega)$, $m \geq m_0$ de la proposición 6.1.

Para finalizar la prueba de este teorema se necesitará algunos resultados intermedios.

Lema 6.1. *Sea $R_{\Omega_0, m_0}(f)$ la restricción a $\Omega_0 \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[$ de una función f definida en un conjunto que contenga a éste. Existe una constante $R(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega_0, r)$ tal que para cada $V \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_0 \times]-T_m, T_m[})$, $m \in$*

\mathbb{N}

$$\begin{aligned} & \left\| R_{\Omega_0, m_0}(V) \right\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega_0 \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)} \leq \\ & \leq R(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega_0, r) \left\| R_{\Omega_0, m_0}(V) \right\|_{\Phi^{2r-1, 2r}(\Omega_0 \times]-T_m, T_m[)}. \end{aligned}$$

Demostración. Claramente

$$\begin{aligned} & \left\| R_{\Omega_0, m_0}(V) \right\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega_0 \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)} \leq \\ & \leq \int_{-T_{m_0}}^{T_{m_0}} \left(\sum_{|\alpha| \leq 2r-1} \frac{1}{\rho_0^{|\alpha|}} \int_{\Omega_0} \rho(\mathbf{x})^{|\alpha|} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} V}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{x}, t) \right|^2 d\mathbf{x} \right) dt + \\ & + \int_{-T_{m_0}}^{T_{m_0}} \left(\sum_{j=0}^{2r} \frac{1}{\varphi_{T_0 T_{m_0}}(T_{m_0})^j} \int_{\Omega_0} \varphi_{T_0 T_{m_0}}(t)^j \left| \frac{\partial^j V}{\partial t^j}(\mathbf{x}, t) \right|^2 d\mathbf{x} \right) dt \leq \end{aligned}$$

y por la definición de las normas involucradas y mayoraciones directas

$$\leq 2 \sup \left\{ \sup_{|\alpha| \leq 2r-1} \frac{1}{\rho_0^{|\alpha|}}, \sup_{j \leq 2r} \frac{1}{\varphi_{T_0 T_{m_0}}(T_{m_0})^j} \right\} \left\| V \right\|_{\Phi^{2r-1, 2r}(\Omega_0 \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)}.$$

■

Proposición 6.2. *Sea $2r-1 > \frac{n}{2}$. Existe $M(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega, r) > 0$ tal que*

$$\sup_{m \geq m_0} \left\| G_{T_m} \right\|_{H^{-(2r-1), -(2r)}(\Omega \times]-T_m, T_m[)} \leq M(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega, r).$$

Demostración. Por la proposición 1.4 y (1.17) tenemos

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) & \in \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[) \subset \\ & \subset H^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[). \end{aligned}$$

Para simplificar escribimos

$$K(\mathbf{x}_0, t_0) := \left\| \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \right\|_{\Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)}.$$

Dado $m \geq m_0$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times]-T_m, T_m[)$, por el teorema 2.4 existe $V \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]-T_m, T_m[}) \subset H^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]-T_m, T_m[) \subset \Phi^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]-T_m, T_m[)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*(V) &= \varphi \quad \text{en } \Omega \times]-T_m, T_m[, \\ \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(V)(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times]-T_m, T_m[\end{aligned}$$

y

$$V(\mathbf{x}, -T_m) = \frac{\partial V}{\partial t}(\mathbf{x}, -T_m) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Entonces por la primera generalización de la fórmula de Green

$$\begin{aligned} \left| \langle G_{T_m}, \varphi \rangle \right| &= \left| \langle G_{T_m}, \mathcal{A}^*(V) \rangle \right| = \left| \langle \mathcal{A}(G_{T_m}), V \rangle \right| = \\ &= \left| \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0), V \rangle \right| = \\ &= \left| V(\mathbf{x}_0, t_0) \right| = \left| \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0), R_{m_0}(V) \rangle \right| \leq \\ &\leq K(\mathbf{x}_0, t_0) \left\| R_{m_0}(V) \right\|_{\Phi^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)} \leq \\ &\leq K(\mathbf{x}_0, t_0) C(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega, r) \left\| R_{m_0}(V) \right\|_{H^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)} \end{aligned}$$

y por la desigualdad del teorema 3.2

$$\begin{aligned} &\leq C(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega, r) K(\mathbf{x}_0, t_0) \times \\ &\times \sqrt{2 T_{m_0} C_1 e^{C_1 T_{m_0}}} \left\| \varphi \right\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)} \end{aligned}$$

para una constante $C_1 > 0$ independiente de T_m . Por la densidad de $\mathcal{D}(\Omega \times]-T_m, T_m[)$ en $H^{2r-1, 2r}(\Omega \times]-T_m, T_m[)$ obtenemos

$$\left\| G_{T_m} \right\|_{H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times]-T_m, T_m[)} \leq M K(\mathbf{x}_0, t_0)$$

para una constante $M := M(\Omega, \mathbf{x}_0, t_0, r)$ independiente de T_m . ■

Sea $2r - 1 > \frac{n}{2}$. Para cada $m \geq m_0$ definimos

$$Y(G_{T_m}) \in H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times \mathbb{R})$$

por

$$\forall f \in H_{0,0}^{2r-1, 2r}(\Omega \times \mathbb{R}) \quad \langle Y(G_{T_m}), f \rangle = \langle G_{T_m}, R_m(f) \rangle.$$

Lema 6.2. *Cada $Y(G_{T_m})$, $m \geq m_0$ está bien definida y la sucesión $\{Y(G_{T_m})\}_{m=m_0}^\infty$ está acotada en $H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times \mathbb{R})$ para cada r tal que $2r - 1 > \frac{n}{2}$.*

Demostración. Sean $f \in H_{0,0}^{2r-1, 2r}(\Omega \times \mathbb{R})$ y $M := M(\Omega, \mathbf{x}_0, t_0, r)$ la constante de la proposición 6.2. Dado $m \geq m_0$ tenemos $R_m(f) \in H^{2r-1, 2r}(\Omega \times] - T_m, T_m[)$ y

$$\left| \langle Y(G_{T_m}), f \rangle \right| = \left| \langle G_{T_m}, R_m(f) \rangle \right| \leq$$

y aplicando el lema 1.1

$$\leq \left\| G_{T_m} \right\|_{H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times] - T_m, T_m[)} \left\| R_m(f) \right\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega \times] - T_m, T_m[)}$$

y por la proposición 6.2

$$\leq M \left\| f \right\|_{H_{0,0}^{2r-1, 2r}(\Omega \times \mathbb{R})}$$

y la demostración del lema se obtiene directamente. ■

Lema 6.3. *Sea $2r - 1 > \frac{n}{2}$. La sucesión*

$$\{\mathcal{A}(Y(G_{T_m}))\}_{m=m_0}^\infty \subset \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times \mathbb{R})$$

está acotada en $\Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times \mathbb{R})$.

Demostración. Sean $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R})$ y $m \geq m_0$. Como $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R})$ tenemos $R_m(\mathcal{A}^*(\varphi)) \in \Phi^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times] - T_m, T_m[)$. Como $\mathcal{D}(\Omega \times] - T_m, T_m[)$ es denso en $\Phi^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times] - T_m, T_m[)$ existe una sucesión $\{\varphi_{mh}\}_{h=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega \times] - T_m, T_m[)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \varphi_{mh} = R_m(\mathcal{A}^*(\varphi)) \quad \text{en} \quad \Phi^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times] - T_m, T_m[). \quad (6.18)$$

Por el teorema 2.4 existe $V_{mh} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times] - T_m, T_m[})$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*(V_{mh}) &= \varphi_{mh} \quad \text{en} \quad \Omega \times] - T_m, T_m[, \\ V_{mh}(\mathbf{x}, -T_m) &= \frac{\partial V_{mh}}{\partial t}(\mathbf{x}, -T_m) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \end{aligned}$$

y

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(V_{mh})(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \times]-T_m, T_m[.$$

A partir de ahora para simplificar $C_i(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega_0, r)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ denotará constantes adecuadas independientes de t y escribiremos

$$K_{\Omega_0, m_0}(\mathbf{x}_0, t_0) := \left\| \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \right\|_{\Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega_0 \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)}.$$

Por la proposición 6.1

$$G_{T_m} \in L^2(\Omega \times]-T_m, T_m[) \subset \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]-T_m, T_m[).$$

Por tanto por la definición de derivada de una distribución, por el lema 1.1 y por la proposición 6.2 tenemos

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \mathcal{A}(Y(G_{T_m})), \varphi \right\rangle \right| &= \left| \left\langle G_{T_m}, R_m(\mathcal{A}^*(\varphi)) \right\rangle \right| = \left| \left\langle G_{T_m}, \mathcal{A}^*(R_m(\varphi)) \right\rangle \right| \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left| \left\langle G_{T_m}, \varphi_{mh} \right\rangle \right| = \lim_{h \rightarrow \infty} \left| \left\langle G_{T_m}, \mathcal{A}^*(V_{mh}) \right\rangle \right| = \end{aligned}$$

y por la primera generalización de la fórmula de Green

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left| \left\langle \mathcal{A}(G_{T_m}), V_{mh} \right\rangle \right| = \lim_{h \rightarrow \infty} \left| \left\langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0), V_{mh}(\mathbf{x}, t) \right\rangle \right| = \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left| V_{mh}(\mathbf{x}_0, t_0) \right| = \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left| \left\langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0), R_{\Omega_0, m_0}(V_{mh}(\mathbf{x}, t)) \right\rangle \right| \leq \\ &\leq \lim_{h \rightarrow \infty} K_{\Omega_0, m_0}(\mathbf{x}_0, t_0) \left\| R_{\Omega_0, m_0}(V_{mh}) \right\|_{\Phi^{2r+1, 2r+1}(\Omega_0 \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)} \leq \end{aligned}$$

por (1.18)

$$\leq \lim_{h \rightarrow \infty} C_1(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega_0, r) \left\| R_{\Omega_0, m_0}(V_{mh}) \right\|_{H^{2r+1, 2r+1}(\Omega_0 \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)} \leq$$

y, como $\mathcal{A}^*(R_{\Omega_0, m_0}(V_{mh})) = R_{\Omega_0, m_0}(\varphi_{mh})$, por el teorema 3.2

$$\leq \lim_{h \rightarrow \infty} C_2(\mathbf{x}_0, \Omega_0, r) \left\| R_{\Omega_0, m_0}(\varphi_{mh}) \right\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega_0 \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)} \leq$$

and by lemma 6.1

$$\leq \lim_{h \rightarrow \infty} C_3(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega_0, r) \left\| R_{\Omega_0, m_0}(\varphi_{mh}) \right\|_{\Phi^{2r-1, 2r}(\Omega_0 \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)} \leq \quad (6.19)$$

a partir de (6.18) podemos obtener fácilmente

$$\lim_{h \rightarrow \infty} R_{\Omega_0, m_0}(\varphi_{mh}) = R_{\Omega_0, m_0}(\mathcal{A}^*(\varphi)) \quad \text{en } \Phi^{2r-1, 2r}(\Omega_0 \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)$$

Entonces podemos continuar (6.19) como

$$\begin{aligned} &\leq C_4(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega_0, r) \left\| R_{\Omega_0, m_0}(\mathcal{A}^*(\varphi)) \right\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega_0 \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)} \leq \\ &\leq C_4(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega_0, r) \left\| \mathcal{A}^* \right\| \left\| R_{\Omega_0, m_0}(\varphi) \right\|_{H^{2r-1, 2r}(\Omega_0 \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)} \leq \end{aligned}$$

y nuevamente por el lema 6.1

$$\begin{aligned} &\leq C_5(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega_0, r) \left\| \mathcal{A}^* \right\| \left\| R_{\Omega_0, m_0}(\varphi) \right\|_{\Phi^{2r-1, 2r}(\Omega_0 \times]-T_{m_0}, T_{m_0}[)} \leq \\ &\leq C_5(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega_0, r) \left\| \mathcal{A}^* \right\| \left\| R_{\Omega_0, m_0}(\varphi) \right\|_{\Phi^{2r-1, 2r}(\Omega_0 \times \mathbb{R})} \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\| \mathcal{A}(Y(G_{T_m})) \right\|_{\Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times \mathbb{R})} &\leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\| \mathcal{A}(Y(G_{T_m})) \right\|_{\Phi^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times \mathbb{R})} \leq \\ &\leq C_5(\mathbf{x}_0, t_0, \Omega_0, r) \left\| \mathcal{A}^* \right\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Escojamos $r > r'$, tal que $2r' - 1 > \frac{n}{2}$. Por aplicación de los resultados previos obtenidos para $H^{-(2r'+1), -2r'}(\Omega \times \mathbb{R})$ y $\Phi^{-(2r'+1), -(2r'+1)}(\Omega \times \mathbb{R})$, por el teorema de Schauder y las proposiciones (1.6) y (1.7), tomando una sucesión adecuada si fuera preciso, se puede suponer que existe

$$G \in H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times \mathbb{R})$$

tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Y(G_{T_m}) = G \quad \text{en } H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times \mathbb{R})$$

y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}(Y(G_{T_m})) = \mathcal{A}(G) \quad \text{en } \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times \mathbb{R}),$$

o de forma equivalente

$$G = \lim_{m \rightarrow \infty} Y(G_{T_m}) \quad \text{en} \quad \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times \mathbb{R}). \quad (6.20)$$

Como el soporte de cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R})$ está contenido en cada $\Omega \times]-T_m, T_m[$ excepto para un conjunto finito de índices m , por definición de la derivada de una distribución, por la definición de la aplicación Y y por (6.14) tenemos

$$\begin{aligned} \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R}) \quad \langle \mathcal{A}(G), \phi \rangle &= \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}(Y(G_{T_m})), \phi \rangle = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \langle Y(G_{T_m}), \mathcal{A}^*(\phi) \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle G_{T_m}, R_m(\mathcal{A}^*(\phi)) \rangle = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}(G_{T_m}), R_m(\phi) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0), \phi \rangle, \end{aligned}$$

es decir

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad \mathcal{A}(G)(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \quad (6.21)$$

y G es solución de (6.14) y

$$G \in \bigcap_{\epsilon > 0} \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(\frac{n}{2} + \epsilon)}(\Omega \times \mathbb{R}). \quad (6.22)$$

A continuación vamos a estudiar las propiedades de contorno de G .

Lema 6.4. *Dado $m \leq k$ en \mathbb{N} denotamos por $G_{T_m}^k$ la restricción a $\Omega \times]-T_m, T_m[$ de G_{T_k} . Si $r < r'$ y G_m^* es la restricción a $\Omega \times]-T_m, T_m[$ de G , para cada $m \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times]-T_m, T_m[$, hay una sucesión $\{k_h\}_{h=1}^{\infty}$ tal que*

$$G_m^* = \lim_{h \rightarrow \infty, k_h \geq m} G_{T_m}^{k_h} \quad \text{en} \quad \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r'-1)}(\Omega \times]-T_m, T_m[).$$

Demostración. Sea $r < r'$. Denotemos por $R_k(f)$ la restricción a $\Omega \times]-T_k, T_k[$ de una función f definida sobre un conjunto más grande y sea \bar{f} la extensión canónica a $\Omega \times \mathbb{R}$ de cada función f definida en

$\Omega \times] - T_m, T_m[$, $m \in \mathbb{N}$, de modo que $f(\mathbf{x}, t) = 0$ si $(\mathbf{x}, t) \notin \Omega \times] - T_m, T_m[$.

Sea $f \in H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times] - T_m, T_m[)$. Como $\bar{f} \in H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times \mathbb{R})$ obtenemos

$$\begin{aligned} \langle f, G_m^* \rangle &= \langle G, \bar{f} \rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle G_{T_k}, R_k(\bar{f}) \rangle_{\Omega \times] - T_k, T_k[} = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle G_{T_m}^k, f \rangle_{\Omega \times] - T_m, T_m[} \end{aligned}$$

y por tanto

$$G_m^* = \lim_{k \rightarrow \infty, k \geq m} G_{T_m}^k \quad (6.23)$$

en $\sigma\left(H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times] - T_m, T_m[), H_{0,0}^{2r-1,2r}(\Omega \times] - T_m, T_m[)\right)$. Por el teorema de Rellich-Kondrašov y por el teorema de Schauder hay una subsucesión (de nuevo denotada por $\{G_{T_m}^k\}_{k=1}^\infty$) tal que el límite de (6.23) se verifica también en la topología de $H^{-(2r'-1), -2r'}(\Omega \times] - T_m, T_m[)$.

Entonces, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times] - T_m, T_m[)$ por la definición de derivada de una distribución, como $\mathcal{A}^*(\varphi) \in \mathcal{D}(\Omega \times] - T_m, T_m[)$, denotando por $Y_k(\mathcal{A}^*(\varphi))$ y $Y_k(\varphi)$ las extensiones canónicas a $\Omega \times] - T_k, T_k[$ de $\mathcal{A}^*(\varphi)$ y φ respectivamente, de (6.23) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(G_m^*), \varphi \rangle &= \langle G_m^*, \mathcal{A}^*(\varphi) \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty, k \geq m} \langle G_{T_m}^k, \mathcal{A}^*(\varphi) \rangle_{\Omega \times] - T_m, T_m[} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty, k \geq m} \langle G_{T_k}, Y_k(\mathcal{A}^*(\varphi)) \rangle_{\Omega \times] - T_k, T_k[} = \lim_{k \rightarrow \infty, k \geq m} \langle G_{T_k}, \mathcal{A}^*(Y_k(\varphi)) \rangle = \\ &\text{y como } Y_k(\varphi) \in \mathcal{D}(\Omega \times] - T_k, T_k[) \text{ y } (\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times] - T_m, T_m[\\ &= \lim_{k \rightarrow \infty, k \geq m} \langle \mathcal{A}(G_{T_k}), Y_k(\varphi) \rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty, k \geq m} \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0), Y_k(\varphi) \rangle_{\Omega \times] - T_k, T_k[} = \varphi(\mathbf{x}_0, t_0). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \left| \langle \mathcal{A}(G_m^*), \varphi \rangle \right| &= \left| \varphi(\mathbf{x}_0, t_0) \right| = \\ &= \left| \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0), \varphi \rangle_{\Omega \times] - T_m, T_m[} \right| \leq \\ &\leq \left\| \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \right\|_{\Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times] - T_m, T_m[)} \times \end{aligned}$$

$$\times \left\| \varphi \right\|_{\Phi^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times] - T_m, T_m])}. \quad (6.24)$$

Como $\mathcal{D}(\Omega \times] - T_m, T_m])$ es denso en $\Phi^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times] - T_m, T_m])$, la expresión (6.24) quiere decir que $\mathcal{A}(G_m^*)$ puede extenderse de forma continua a una forma lineal sobre $\Phi^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times] - T_m, T_m])$ (nuevamente denotada por el mismo símbolo) y que la sucesión

$$\{\mathcal{A}(G_{T_m}^k)\}_{k=m}^\infty \subset \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times] - T_m, T_m])$$

es equicontinua. Por el teorema de Eberlein hay una subsucesión (nuevamente denotada por el mismo símbolo) débilmente convergente a algún $\Psi \in \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times] - T_m, T_m])$.

Sin embargo, por construcción de G tenemos

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{D}(\Omega \times] - T_m, T_m]) \quad \langle \mathcal{A}(G_m^*), f \rangle &= \langle G_m^*, \mathcal{A}^*(f) \rangle = \\ &= \langle G, \overline{\mathcal{A}^*(f)} \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty, k \geq m} \langle Y(G_{T_k}), \overline{\mathcal{A}^*(f)} \rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty, k \geq m} \langle G_{T_k}, Y_k(\overline{\mathcal{A}^*(f)}) \rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty, k \geq m} \langle G_{T_m}^k, \mathcal{A}^*(f) \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty, k \geq m} \langle \mathcal{A}(G_{T_m}^k), f \rangle \end{aligned}$$

y por tanto

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega \times] - T_m, T_m]) \quad \langle \mathcal{A}(G_m^*), f \rangle = \langle \Psi, f \rangle,$$

es decir, la distribución $\mathcal{A}(G_m^*)$ coincide con la distribución Ψ y por tanto

$$\mathcal{A}(G_m^*) = \lim_{k \rightarrow \infty, k \geq m} \mathcal{A}(G_{T_m}^k)$$

débilmente en $\Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times] - T_m, T_m])$.

Finalmente, por la proposición 1.5 y por el teorema de Schauder obtenemos otra subsucesión convergente en $\Phi^{-(2r'+1), -(2r'+1)}(\Omega \times] - T_m, T_m])$, lo que junto con el resultado previo en $H^{-(2r'-1), -2r'}(\Omega \times] - T_m, T_m])$ prueba nuestro lema. ■

Lema 6.5. Para cada $m \geq h$ tenemos $\frac{\partial G_{T_h}^m}{\partial \mathbf{n}} = 0$ en $\partial\Omega \times] - T_h, T_h]$.

Demostración. Tomemos $r > \frac{1}{2}$ verificando (4.24) tal que $2r - 1 > \frac{n}{2}$. Sea $\{\phi_{mk}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\overline{\Omega \times] - T_m, T_m[})$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{mk} = G_{T_m} \quad \text{en} \quad \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\overline{\Omega \times] - T_m, T_m[}). \quad (6.25)$$

Sea $\phi_{T_h}^{mk}$ la restricción a $\Omega \times] - T_h, T_h[$ de ϕ_k para cada $k \in \mathbb{N}$. Por definición de $G_{T_h}^m$ tenemos

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathcal{D}(\Omega \times] - T_h, T_h[) \quad & \left| \left\langle G_{T_h}^m - \phi_{T_h}^{mk}, g \right\rangle_{\Omega \times] - T_h, T_h[} \right| = \\ & = \left| \left\langle G_{T_m} - \phi_{mk}, Y_m(g) \right\rangle_{\Omega \times] - T_m, T_m[} \right| \leq \\ \leq & \left\| G_{T_m} - \phi_{mk} \right\|_{H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times] - T_m, T_m[)} \left\| Y_m(g) \right\|_{H_{0,0}^{2r-1, 2r}(\Omega \times] - T_m, T_m[)} \leq \\ \leq & \left\| G_{T_m} - \phi_{mk} \right\|_{H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times] - T_m, T_m[)} \left\| g \right\|_{H_{0,0}^{2r-1, 2r}(\Omega \times] - T_h, T_h[)} \end{aligned}$$

lo que por (6.25) junto con la densidad implican la igualdad

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{T_h}^{mk} = G_{T_h}^m \quad \text{en} \quad H^{-(2r-1), -2r}(\Omega \times] - T_h, T_h[).$$

Análogamente, como $\mathcal{A}(\phi_{T_h}^{mk})$ es la restricción a $\Omega \times] - T_h, T_h[$ de la función $\mathcal{A}(\phi_{mk}) \in \mathcal{D}(\overline{\Omega \times] - T_m, T_m[})$ y $Y_m(\mathcal{A}^*(g)) = \mathcal{A}^*(Y_m(g))$ para cada $g \in \mathcal{D}(\Omega \times] - T_h, T_h[)$, por continuidad de la aplicación

$$\mathcal{A}^* : \Phi^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times] - T_h, T_h[) \longrightarrow \Phi^{2r-1, 2r-1}(\Omega \times] - T_h, T_h[),$$

utilizando (6.25) obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(\phi_{T_h}^{mk}) = \mathcal{A}(G_{T_h}^m) \quad \text{en} \quad \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times] - T_h, T_h[)$$

si $r' > r$. Por tanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{T_h}^{mk} = G_{T_h}^m \quad \text{en} \quad \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r'-1)}(\Omega \times] - T_h, T_h[) \quad (6.26)$$

y por el teorema de la traza 4.2 tenemos

$$\frac{\partial G_{T_h}^m}{\partial \mathbf{n}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial \phi_{T_h}^{mk}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{en} \quad \partial \Omega \times] - T_h, T_h[. \quad \blacksquare \quad (6.27)$$

En virtud de (6.22), tomando r que cumpla (4.24) y $2r - 1 > \frac{n}{2}$, por los teoremas de las trazas 4.2 y 4.4 las trazas $\frac{\partial G_{T_m}}{\partial \mathbf{n}}$ y $\frac{\partial Y(G_{T_m})}{\partial \mathbf{n}}$ sobre $\partial\Omega \times] - T_m, T_m[$ y $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ respectivamente, existen en los espacios determinados en esos teoremas.

Lema 6.6. *Sea $m > h$ en \mathbb{N} . Entonces*

$$\frac{\partial Y(G_{T_m})}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

Demostración. Sea $\psi \in \mathcal{D}(\partial\Omega \times \mathbb{R})$. Hay $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\psi \in \mathcal{D}(\partial\Omega \times] - T_{m_1}, T_{m_1}[$ y $m_1 \geq m_0$. Fijamos $m \geq m_1$ y sea $S_m(\psi)$ la restricción a $\partial\Omega \times] - T_m, T_m[$ de ψ . Sea $\Psi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times] - T_m, T_m[)$ tal que

$$\Psi_0(\mathbf{x}, t) = 1 \quad \text{si } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times] - T_h, T_h[$$

y

$$\Psi_0(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{si } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times]T_m - \frac{T_m - T_{m-1}}{2}, T_m[$$

(existen tales funciones porque $\bar{\Omega} \times [-T_h, T_h] \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ es compacto). Sea $\{\phi_{mk}\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega \times] - T_h, T_h[)$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{mk} = G_{T_m} \quad \text{en } \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times] - T_m, T_m[).$$

Claramente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_0 \phi_{mk} = \Psi_0 G_{T_m} \quad \text{en } \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times] - T_m, T_m[)$$

y por el lema 4.4

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Y(\Psi_0 \phi_{mk}) = Y(\Psi_0 G_{T_m}) \quad \text{en } \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times \mathbb{R}),$$

ya que $\Psi_0 \phi_{mk} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}$.

Como $Y(\Psi_0 \phi_k) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ por el teorema de la traza 4.4 tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial Y(G_{T_m})}{\partial \mathbf{n}}, \psi \right\rangle_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\partial Y(\Psi_0 \phi_{mk})}{\partial \mathbf{n}}, \psi \right\rangle_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\partial(\Psi_0 \phi_{mk})}{\partial \mathbf{n}}, S_{m_1}(\psi) \right\rangle_{\partial\Omega \times] - T_{m_1}, T_{m_1}[} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\partial \phi_{mk}}{\partial \mathbf{n}}, S_{m_1}(\psi) \right\rangle_{\partial \Omega \times]-T_{m_1}, T_{m_1}[} = \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\partial \phi_{mk}}{\partial \mathbf{n}}, S_m(\psi) \right\rangle_{\partial \Omega \times]-T_m, T_m[} = \left\langle \frac{\partial G_{T_m}}{\partial \mathbf{n}}, S_m(\psi) \right\rangle_{\partial \Omega \times]-T_m, T_m[} = 0.
 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{\partial Y(G_{T_m})}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad \blacksquare$$

Final de la demostración del teorema 6.1

Claramente $Y(\varphi_{mk}) \in \mathcal{W}^{-(2r-1)}(\Omega \times \mathbb{R})$ y por tanto, por el lema 4.4 y (6.25) obtenemos $Y(G_{T_m}) \in \mathbf{W}_{\mathcal{A}}^{-(2r'-1)}(\Omega \times \mathbb{R})$. Finalmente de (6.20) obtenemos $G \in \mathbf{W}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times \mathbb{R})$. Entonces por el teorema 4.3 tenemos

$$\lim_{T \rightarrow \infty} G(\mathbf{x}, T) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} (Y(G_{T_m}))(\mathbf{x}, T_m) = 0$$

y análogamente

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0.$$

De esta forma, G verifica las condiciones de contorno (6.16) y de hecho $G \in \mathbf{V}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times \mathbb{R})$.

Entonces por el teorema 4.4 y por (6.20)

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial Y(G_{T_m})}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{en} \quad H^{-(2r+\frac{1}{2}), -(2r+2)+\frac{r+1}{2}}(\partial \Omega \times \mathbb{R}) = 0. \quad (6.28)$$

De modo que G es la función de Green del problema \mathbf{P}_{Ω} . La propiedad de regularidad (6.17) se obtiene a partir del teorema 5.2. En particular G es una función real definida sobre \mathbb{R} . ■

6.3. Fórmula de reciprocidad y aplicaciones

En este apartado para enfatizar sobre las variables respecto a las que se deriva escribiremos algunas veces $\mathcal{A}_{\mathbf{x},t}$ o algún símbolo similar en lugar de \mathcal{A} . De esta forma, por ejemplo

$$\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0, t_0} G(\mathbf{x}_0, t_0 | \mathbf{x}, -t) = \delta(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \delta(t_0 + t) \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R}. \quad (6.29)$$

Por otra parte, se puede comprobar fácilmente que, para cada conjunto abierto D tal que $(\mathbf{x}_0, t_0) \in D \subset \Omega \times \mathbb{R}$ tenemos

$$\mathcal{A}^*(R_D(G(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, t_0))) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t + t_0). \quad (6.30)$$

Realizando el cambio de variable $t_0 = -t'_0$ en (6.29) y volviendo a llamar t_0 a la nueva variable t'_0 , teniendo en cuenta que $\delta(u) = \delta(-u)$, obtenemos la siguiente relación de gran utilidad

$$\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0, t_0}^* G(\mathbf{x}_0, -t_0 | \mathbf{x}, -t) = \delta(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \delta(t_0 - t) \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}. \quad (6.31)$$

El siguiente lema es la clave para la demostración de la relación de reciprocidad:

Lema 6.7. *Para cada (\mathbf{x}_0, t_0) y (\mathbf{x}'_0, t'_0) en $\Omega \times]-T, T[$ y cada $m \in \mathbb{N}$ tal que $(t_0, t'_0) \in]-T_m, T_m[$ son ciertas las igualdades*

$$\begin{aligned} & \left\langle G_T(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0), \mathcal{A}(G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}'_0, t'_0)) \right\rangle = \\ & = \left\langle \mathcal{A}^*(G_T(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0), G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}'_0, t'_0)) \right\rangle \\ & \left\langle R_m(G(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0), \mathcal{A}(R_m(G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}'_0, t'_0))) \right\rangle = \\ & = \left\langle \mathcal{A}^*(R_m(G(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0))), R_m(G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}'_0, t'_0)) \right\rangle. \end{aligned}$$

Demostración. Sólo vamos a mostrar la primera desigualdad, la segunda es completamente análoga pero utilizando el teorema 6.1 y (6.30).

Por la proposición 6.1, para cada $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ tenemos

$$G_T(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0) \in H^{\frac{n}{2} + \varepsilon, \frac{3}{2} - \varepsilon}(\Omega \times]-T, T[)$$

y por tanto existe una sucesión $\{V_s\} \subset C^\infty(\overline{\Omega \times]-T, T[})$ tal que

$$G_T(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0) = \lim_{s \rightarrow \infty} V_s \quad \text{en } H^{\frac{n}{2} + \varepsilon, \frac{3}{2} - \varepsilon}(\Omega \times]-T, T[).$$

La inclusión continua $H^{\frac{n}{2} + \varepsilon, \frac{3}{2} - \varepsilon}(\Omega \times]-T, T[) \subset H^{-(2 + \frac{n}{2} + \varepsilon), -(\frac{3}{2} - \varepsilon)}(\Omega \times]-T, T[)$ implica

$$G_T(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0) = \lim_{s \rightarrow \infty} V_s \quad \text{en } H^{-(2 + \frac{n}{2} + \varepsilon), -(\frac{3}{2} + \varepsilon)}(\Omega \times]-T, T[).$$

Denotando de nuevo por f la extensión canónica $\Phi_f \in \left(H^{2+\frac{n}{2}+\varepsilon, \frac{3}{2}+\varepsilon}(\Omega \times]-T, T[) \right)'$ de cada $f \in L^2(\Omega \times]-T, T[) \subset H^{-(2+\frac{n}{2}+\varepsilon), -\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega \times]-T, T[)$, por el lema 1.1 obtenemos de hecho la igualdad

$$G_T(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0) = \lim_{s \rightarrow \infty} V_s \quad \text{en} \quad \left(H^{2+\frac{n}{2}+\varepsilon, \frac{3}{2}+\varepsilon}(\Omega \times]-T, T[) \right)'$$

y por tanto

$$\mathcal{A}^*(G_T(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0)) = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{A}^*(V_s) \quad \text{en} \quad \left(H^{\frac{n}{2}+\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega \times]-T, T[) \right)'. \quad (6.32)$$

Por otro lado, como

$$G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}'_0, t'_0) \in H^{2, \frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega \times]-T, T[) \subset H^{-(2+\frac{n}{2}+\varepsilon), -\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega \times]-T, T[),$$

existe una sucesión $\{W_m\} \subset \mathcal{D}(\Omega \times]-T, T[)$ tal que

$$G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}'_0, t'_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} W_m \quad \text{en} \quad H^{-(2+\frac{n}{2}+\varepsilon), -\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega \times]-T, T[)$$

Nuevamente por el lema 1.1, tenemos de hecho que

$$G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}'_0, t'_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} W_m \quad \text{en} \quad \left(H^{2+\frac{n}{2}+\varepsilon, \frac{3}{2}+\varepsilon}(\Omega \times]-T, T[) \right)' \quad (6.33)$$

y por tanto

$$\mathcal{A}(G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}'_0, t'_0)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}(W_m) \quad \text{en} \quad \left(H^{\frac{n}{2}+\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega \times]-T, T[) \right)'. \quad (6.34)$$

Entonces por (6.31)

$$\begin{aligned} G_T(\mathbf{x}'_0, -t'_0 | \mathbf{x}_0, -t_0) &= \left\langle G_T(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0), \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0) \otimes \delta(t - t'_0) \right\rangle = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\langle V_s, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0) \otimes \delta(t - t'_0) \right\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\langle V_s, \mathcal{A}(G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}'_0, t'_0)) \right\rangle = \\ &\text{y por (6.34), cada } W_m, m \in \mathbb{N} \text{ con soporte compacto en } \Omega \times]-T, T[, \end{aligned}$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle V_s, \mathcal{A}(W_m) \right\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle \mathcal{A}^*(V_s), W_m \right\rangle$$

y de (6.33) y (6.32)

$$\begin{aligned} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\langle \mathcal{A}^*(V_s), G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}'_0, t'_0) \right\rangle = \\ &= \left\langle \mathcal{A}^*(G_T(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0)), G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}'_0, t'_0) \right\rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 6.3. (*Fórmula de reciprocidad*). Sean $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ y $G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ las funciones de Green para los problemas $\mathbf{P}(\Omega)$ y $\mathbf{P}_T(\Omega)$, respectivamente. Entonces

a) Para cada $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \in \Omega \times \Omega$ y cada $(t, t_0) \in]-T, T[\times]-T, T[$ tenemos

$$G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = G_T(\mathbf{x}_0, -t_0 | \mathbf{x}, -t).$$

b) Análogamente

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \in \Omega \times \Omega, \quad \forall (t, t_0) \in \mathbb{R}^2 \quad G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = G(\mathbf{x}_0, -t_0 | \mathbf{x}, -t).$$

Demostración. a) Fijamos un punto auxiliar $(\mathbf{x}'_0, t'_0) \in \Omega \times]-T, T[$ y los números $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}, 0 < r$ tales que r verifica (4.2) y (4.24) y $2r - 1 = \frac{n}{2} + \varepsilon$. Por la proposición 1.4 y las propiedades de los triples de Guelfand, hay una sucesión $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega \times]-T, T[)$ tal que $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0) \otimes \delta(t - t'_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k$ en $\Phi^{-(\frac{n}{2} + \varepsilon), -(\frac{1}{2} + \varepsilon)}(\Omega \times]-T, T[)$. Por el lema 3.2 y el corolario 3.1, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $V_k \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega \times]-T, T[})$ tal que

$$V_k(\mathbf{x}, T) = \frac{\partial V_k}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (6.35)$$

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(V_k) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times]-T, T[\quad (6.36)$$

y

$$v_k = \mathcal{A}(V_k) \quad \text{en } \Omega \times]-T, T[. \quad (6.37)$$

Ahora, consideremos las funciones

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times]-T, T[\quad v'_k(\mathbf{x}, t) = v_k(\mathbf{x}, -t)$$

$$V'_k(\mathbf{x}, t) = V_k(\mathbf{x}, -t).$$

Claramente, si $t = -t'$ tenemos

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}_{\mathbf{x}, t'}^*(V'_k)(\mathbf{x}, t') = \mathcal{A}_{\mathbf{x}, t}(V_k)(\mathbf{x}, t) = v_k(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}(\Omega \times]-T, T[). \quad (6.38)$$

A partir del teorema 6.1 obtenemos

$$G_T(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0) \in H^{\frac{n}{2} + \varepsilon, \frac{3}{2} - \varepsilon}(\Omega \times]-T, T[) \subset \Phi^{\frac{n}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon}(\Omega \times]-T, T[)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} G_T(\mathbf{x}'_0, -t'_0 \mid \mathbf{x}_0, -t_0) &= \left\langle G_T(\mathbf{x}, -t \mid \mathbf{x}_0, -t_0), \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0) \otimes \delta(t - t'_0) \right\rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle G_T(\mathbf{x}, -t \mid \mathbf{x}_0, -t_0), v_k \right\rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle G_T(\mathbf{x}, -t \mid \mathbf{x}_0, -t_0), \mathcal{A}(V_k) \right\rangle, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable temporal $t = -t'$ y aplicando (6.38)

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle G_T(\mathbf{x}, t' \mid \mathbf{x}_0, -t_0), \mathcal{A}_{\mathbf{x}, t'}^*(V'_k)(\mathbf{x}, t') \right\rangle =$$

por la primera generalización de la fórmula de Green y (6.35), (6.36)

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \mathcal{A}_{\mathbf{x}, t'}(G_T(\mathbf{x}, t' \mid \mathbf{x}_0, -t_0)), V'_k(\mathbf{x}, t') \right\rangle =$$

y nuevamente haciendo el cambio $t = -t'$, por (6.38)

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \mathcal{A}^*(G_T(\mathbf{x}, -t \mid \mathbf{x}_0, -t_0)), V_k \right\rangle =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0), V_k \right\rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k(\mathbf{x}_0, t_0). \quad (6.39)$$

De la misma forma, de (6.30) obtenemos

$$\begin{aligned} G_T(\mathbf{x}_0, t_0 \mid \mathbf{x}'_0, t'_0) &= \left\langle G_T(\mathbf{x}, t \mid \mathbf{x}'_0, t'_0), \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \right\rangle = \\ &= \left\langle G_T(\mathbf{x}, t \mid \mathbf{x}'_0, t'_0), \mathcal{A}^*(G_T(\mathbf{x}, -t \mid \mathbf{x}_0, -t_0)) \right\rangle = \end{aligned}$$

por el lema 6.7

$$\begin{aligned} &= \left\langle \mathcal{A}(G_T(\mathbf{x}, t \mid \mathbf{x}'_0, t'_0)), G_T(\mathbf{x}, -t \mid \mathbf{x}_0, -t_0) \right\rangle = \\ &= \left\langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0) \otimes \delta(t - t'_0), G_T(\mathbf{x}, -t \mid \mathbf{x}_0, -t_0) \right\rangle = \end{aligned}$$

y por (6.37)

$$\begin{aligned} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle v_k, G_T(\mathbf{x}, -t \mid \mathbf{x}_0, -t_0) \right\rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \mathcal{A}_{\mathbf{x}, t}(V_k(\mathbf{x}, t)), G_T(\mathbf{x}, -t \mid \mathbf{x}_0, -t_0) \right\rangle = \end{aligned}$$

y con el cambio de variable temporal $t = -t'$, por la primera generalización de la fórmula de Green

$$\begin{aligned} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \mathcal{A}_{\mathbf{x}, t'}^*(V'_k(\mathbf{x}, t')), G_T(\mathbf{x}, t' | \mathbf{x}_0, -t_0) \right\rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle V'_k(\mathbf{x}, t'), \mathcal{A}_{\mathbf{x}, t'}(G_T(\mathbf{x}, t' | \mathbf{x}_0, -t_0)) \right\rangle = \end{aligned}$$

nuevamente con el cambio $t' = -t$ y utilizando (6.39)

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle V_k(\mathbf{x}, t), \mathcal{A}_{\mathbf{x}, t}^*(G_T(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0)) \right\rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k(\mathbf{x}_0, t_0)$$

y por la arbitrariedad de (\mathbf{x}'_0, t'_0) se completa la demostración. ■

b) La prueba es similar a la anterior después de la aplicación del lema 6.4. Ahora escogemos $h_0 \in \mathbb{N}$ de forma tal que $(t_0, t'_0) \in]-T_{h_0}, T_{h_0}[\times]-T_{h_0}, T_{h_0}[$ y una sucesión $\{v_k\} \subset \mathcal{D}(\Omega \times]-T_{h_0}, T_{h_0}[$ tal que $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0) \otimes \delta(t - t'_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k$ en $\Phi^{-\left(\frac{n}{2} + \varepsilon\right), -\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}(\Omega \times]-T_{h_0}, T_{h_0}[)$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $m \geq h_0$, por el lema 3.2 y el corolario 3.1, encontramos $V_{km} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]-T, T[})$ tal que

$$V_{km}(\mathbf{x}, T_m) = \frac{\partial V_{km}}{\partial t}(\mathbf{x}, T_m) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (6.40)$$

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(V_{km}) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times]-T_m, T_m[\quad (6.41)$$

y

$$Y_m(v_k) = \mathcal{A}(V_{km}) \quad \text{en } \Omega \times]-T_m, T_m[. \quad (6.42)$$

Entonces, como en la parte a)

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}'_0, -t'_0 | \mathbf{x}_0, -t_0) &= \left\langle R_{h_0}(G(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0)), \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0) \otimes \delta(t - t'_0) \right\rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle R_{h_0}(G(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0)), v_k \right\rangle = \end{aligned}$$

y por el lema 6.4 (obsérvese que, si $2r - 1 = \frac{n}{2} + \varepsilon$, entonces $2r - \frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$ ya que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle G_{T_h}^m(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0), v_k \right\rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle G_{T_m}(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0), Y_m(v_k) \right\rangle_{\Omega \times]-T_m, T_m[} = \end{aligned}$$

y por una repetición de los argumentos empleados en la parte a)

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} V_{km}(\mathbf{x}_0, t_0). \quad (6.43)$$

Análogamente

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}_0, t_0 | \mathbf{x}'_0, t'_0) &= \left\langle R_{h_0}(G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}'_0, t'_0)), \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \right\rangle = \\ &= \left\langle R_{h_0}(G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}'_0, t'_0)), \mathcal{A}^*(R_{h_0}(G(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0))) \right\rangle = \end{aligned}$$

por el lema 6.7 y (6.30)

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathcal{A}(R_{h_0}(G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}'_0, t'_0))), R_{h_0}(G(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0)) \right\rangle = \\ &= \left\langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0) \otimes \delta(t - t'_0), R_{h_0}(G(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0)) \right\rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle v_k, R_{h_0}(G(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0)) \right\rangle \end{aligned}$$

y por el lema 6.4 y (6.43)

$$\begin{aligned} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle G_{T_{h_0}}^m(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0), v_k \right\rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle G_{T_m}(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0), Y_m(v_k) \right\rangle_{\Omega \times]-T_m, T_m[} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} V_{km}(\mathbf{x}_0, t_0) \end{aligned}$$

con lo que termina la demostración. ■

Como una aplicación de la función de Green, y más concretamente, como una aplicación de la relación de reciprocidad, vamos a mostrar cómo calcular la solución del problema $\mathbf{P}_T(\Omega)$ mediante su función de Green. Las limitadas propiedades de regularidad de la función de Green con respecto a la variable temporal, hace que su uso para resolver el problema $\mathbf{P}_T(\Omega)$ no sea tan amplio como afirman los teoremas de existencia de las soluciones de $\mathbf{P}_T(\Omega)$. En los siguientes teoremas, en cada corchete de dualidad, la dualidad se entiende con respecto a las repetidas variables que aparecen.

Teorema 6.2. *Solución del problema $\mathbf{P}_T(\Omega)$ para la ecuación hiperbólica de transmisión del calor mediante la función de Green.*

Suponemos que los datos del problema $\mathbf{P}_T(\Omega)$ son tales que

$$F_0 \in \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, T[), \quad F_1 \in J^{-(2r+\frac{1}{2})}(\partial\Omega \times]0, T[),$$

$$F_2 \in \Phi^{-(2r-\frac{1}{2})}(\Omega), \quad F_3 \in \Phi^{-(2r+\frac{1}{2})}(\Omega)$$

siendo $0 < 2r + 1 < \frac{3}{2}$ verificando las condiciones (4.2) y (4.24). Entonces la solución de $\mathbf{P}_T(\Omega)$ es la distribución

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}, t) = & \left\langle G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), F_0(\mathbf{x}_0, t_0) \right\rangle_{\Omega \times]0, T[}^+ + \\ & + \left\langle G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), \mathfrak{f}_A(\mathbf{x}_0) F_1(\mathbf{x}_0, t_0) \right\rangle_{\partial\Omega \times]0, T[}^+ + \\ & - \frac{1}{\alpha} \left\langle G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0) + \tau \frac{\partial G_T}{\partial t_0}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0), F_2(\mathbf{x}_0) \right\rangle_{\Omega} + \\ & + \frac{\tau}{\alpha} \left\langle G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0), F_3(\mathbf{x}_0) \right\rangle_{\Omega} \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{f}_A(\mathbf{x})$ es la función que aparece en la fórmula de Green clásica para A y A^* .

Observación Obsérvese que el teorema no dice nada acerca de la regularidad de la solución $U(\mathbf{x}, t)$, la cual depende de las propiedades específicas de los datos $F_i, i = 0, \dots, 3$. La igualdad afirmada debe ser entendida como una igualdad en el sentido de las distribuciones.

Demostración. Por la proposición 6.1 existe una única solución $U(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$ para el problema $P_T(\Omega)$

Por la densidad de $\mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)$, $\mathcal{D}(\partial\Omega \times]0, T[)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$ en los espacios correspondientes, encontramos sucesiones $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)$, $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\partial\Omega \times]0, T[)$, $\{U_{2k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ y $\{U_{3k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tales que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = F_0 \quad \text{en } \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, T[) \quad (6.44)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_m = F_1 \quad \text{en } J^{-(2r+\frac{1}{2})}(\partial\Omega \times]0, T[) \quad (6.45)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} U_{2m} = F_2 \text{ en } \Phi^{-(2r-\frac{1}{2})}(\Omega) \text{ y } \lim_{m \rightarrow \infty} U_{3m} = F_3 \text{ en } \Phi^{-(2r+\frac{1}{2})}(\Omega). \quad (6.46)$$

Por otro lado, por el corolario 2.3, el problema de contorno mixto, $m \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A}(U_m) = f_m \text{ en } \Omega \times]0, T[, \quad \frac{\partial U_m}{\partial \mathbf{n}} = g_m \text{ en } \partial\Omega \times]0, T[, \quad (6.47)$$

$$U_m(\mathbf{x}, 0) = U_{2m}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial U_m}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = U_{3m}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (6.48)$$

tiene una solución $U_m \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$. Además de la demostración del teorema 5.1 se obtiene que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} U_m = U \text{ en } \mathbf{D}_A^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[). \quad (6.49)$$

De (6.31) y la relación de reciprocidad, para cada $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times]-T, T[$ obtenemos las igualdades

$$\forall (\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad \mathcal{A}_{\mathbf{x}_0, t_0}^* G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \delta(t_0 - t). \quad (6.50)$$

La relación de reciprocidad y la proposición 6.1 implican que

$$G_T(\mathbf{x}, -t | \mathbf{x}_0, -t_0) \in \mathcal{C}(\Omega \times]-T, T[)$$

y

$$G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, -t'_0) = G_T(\mathbf{x}_0, t'_0 | \mathbf{x}, -t) \in \mathbf{D}_A^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[) \quad (6.51)$$

cuando se consideran como funciones de $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times]-T, T[$. Por otro lado, como $U_m(\mathbf{x}_0, t_0) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times]0, T[})$, por (6.50) tenemos

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times]0, T[\quad \left\langle U_m(\mathbf{x}_0, t_0), \mathcal{A}_{\mathbf{x}_0, t_0}^* G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \right\rangle = U_m(\mathbf{x}, t) \quad (6.52)$$

y por (6.59)

$$\left\langle G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), \mathcal{A}_{\mathbf{x}_0, t_0}(U_m(\mathbf{x}_0, t_0)) \right\rangle = \left\langle G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), f_m(\mathbf{x}_0, t_0) \right\rangle. \quad (6.53)$$

Por tanto, de (6.53), (6.52) y (6.51) obtenemos

$$\begin{aligned} U_m(\mathbf{x}, t) - \left\langle G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), f_m(\mathbf{x}_0, t_0) \right\rangle_{\Omega \times]0, T[} &= \\ &= \left\langle U_m(\mathbf{x}_0, t_0), \mathcal{A}_{\mathbf{x}_0, t_0}^* G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \right\rangle_{\Omega \times]0, T[} \\ &\quad - \left\langle G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), \mathcal{A}_{\mathbf{x}_0, t_0} U_m(\mathbf{x}_0, t_0) \right\rangle_{\Omega \times]0, T[}, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable temporal $t'_0 = -t_0$

$$\begin{aligned} &= \left\langle U_m(\mathbf{x}_0, -t'_0), \mathcal{A}_{\mathbf{x}_0, t'_0} G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, -t'_0) \right\rangle_{\Omega \times]0, T[} \\ &\quad - \left\langle G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, -t'_0), \mathcal{A}_{\mathbf{x}_0, t'_0}^* U_m(\mathbf{x}_0, -t'_0) \right\rangle_{\Omega \times]0, T[} = \end{aligned}$$

y aplicando la primera generalización de la fórmula de Green y deshaciendo el cambio $t'_0 = -t_0$, de la fórmula (1.15), las condiciones (6.47) y (6.48)

$$\begin{aligned} &= \left\langle G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), \mathfrak{f}_A(\mathbf{x}_0) g_m(\mathbf{x}_0, t_0) \right\rangle_{\partial \Omega \times]0, T[} \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \left\langle G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0) + \tau \frac{\partial G_T}{\partial t_0}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0), U_{2m}(\mathbf{x}_0) \right\rangle_{\Omega} + \\ &\quad \quad + \frac{\tau}{\alpha} \langle G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0), U_{3m}(\mathbf{x}_0) \rangle_{\Omega}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Sea $\varphi(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}(\Omega \times]-T, T[)$. Es fácil comprobar, (por el teorema de Fubini, la acotación de Ω y las propiedades de regularidad de G_T , proposición 6.1) que

$$v_\varphi(\mathbf{x}_0, t_0) := \left\langle G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), \varphi(\mathbf{x}, t) \right\rangle \in H^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]-T, T[) \quad (6.55)$$

y de hecho

$$\left\{ G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), v_\varphi(\mathbf{x}_0, t_0) \right\} \subset \mathcal{C}([-T, T], \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})). \quad (6.56)$$

Por tanto si $\varphi(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)$ (y denotamos nuevamente por φ y f_m , $m \in \mathbb{N}$ sus extensiones canónicas a las funciones en $\mathcal{D}(\Omega \times]-T, T[)$) obtenemos de (6.44) y (6.55)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle \left\langle G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), f_m(\mathbf{x}_0, t_0) \right\rangle_{\Omega \times]0, T[}, \varphi(\mathbf{x}, t) \right\rangle_{\Omega \times]0, T[} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle v_\varphi(\mathbf{x}_0, t_0), f_m(\mathbf{x}_0, t_0) \right\rangle_{\Omega \times]0, T[} = \left\langle v_\varphi(\mathbf{x}_0, t_0), F_0(\mathbf{x}_0, t_0) \right\rangle_{\Omega \times]0, T[} = \\
 &= \left\langle \left\langle G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), F_0(\mathbf{x}, t) \right\rangle_{\Omega \times]0, T[}, \varphi(\mathbf{x}, t) \right\rangle_{\Omega \times]0, T[}. \quad (6.57)
 \end{aligned}$$

Como consecuencia de (6.56), tenemos

$$\left\{ G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0), v_\varphi(\mathbf{x}_0, 0) \right\} \subset \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \subset \Phi^{2r - \frac{1}{2}}(\Omega)$$

y

$$\left\{ \frac{\partial G_T}{\partial t_0}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0), \frac{\partial v_\varphi}{\partial t}(\mathbf{x}_0, 0) \right\} \subset \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \subset \Phi^{2r + \frac{1}{2}}(\Omega)$$

y por el teorema 2.1, capítulo 4 en [19] y (6.55), las restricciones $\partial\Omega \times] - T, T[$ de $G_T(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ y $v_\varphi(\mathbf{x}_0, t_0)$ pertenecen a $H^{2r + \frac{1}{2}, 2r + \frac{1}{2}}(\partial\Omega \times] - T, T[) \subset J^{2r + \frac{1}{2}}(\partial\Omega \times] - T, T[)$. Entonces podemos argumentar con los términos restantes en (6.54) de la misma forma que en (6.57). Por la definición de una distribución, obtenemos nuestro resultado de (6.49), tomando límites en (6.54). ■

Teorema 6.3. *Solución del problema $\mathbf{P}(\Omega)$ para la ecuación hiperbólica de transmisión del calor mediante la función de Green.*

Supongamos que los datos del problema $\mathbf{P}(\Omega)$ son tales que

$$\begin{aligned}
 F_0 &\in \Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(\Omega \times]0, \infty[), & F_1 &\in J^{-(2r + \frac{1}{2})}(\partial\Omega \times]0, \infty[), \\
 F_2 &\in \Phi^{-(2r - \frac{1}{2})}(\Omega), & F_3 &\in \Phi^{-(2r + \frac{1}{2})}(\Omega)
 \end{aligned}$$

donde $0 < 2r + 1 < \frac{3}{2}$ verificando las condiciones (4.2) y (4.24). Entonces la solución de $\mathbf{P}(\Omega)$ es la distribución

$$\begin{aligned}
 U(\mathbf{x}, t) &= \left\langle G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), F_0(\mathbf{x}_0, t_0) \right\rangle_{\Omega \times]0, \infty[} + \\
 &+ \left\langle G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), f_A(\mathbf{x}_0) F_1(\mathbf{x}_0, t_0) \right\rangle_{\partial\Omega \times]0, \infty[} \\
 &- \frac{1}{\alpha} \left\langle G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0) + \tau \frac{\partial G}{\partial t_0}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0), F_2(\mathbf{x}_0) \right\rangle_{\Omega} + \\
 &+ \frac{\tau}{\alpha} \left\langle G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0), F_3(\mathbf{x}_0) \right\rangle_{\Omega}
 \end{aligned}$$

siendo f_A la función que aparece en la proposición 1.3.

Demostración. Según el teorema 6.1 y (6.20), escogemos una sucesión no acotada estrictamente creciente $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ en $]0, \infty[$ tal que la función de Green $G(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0)$ del problema $P(\Omega)$ verifique

$$G(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} Y(G_{T_m}(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0)) \quad \text{en} \quad \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times \mathbb{R}), \quad (6.58)$$

donde cada $G_{T_m}(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0)$, $m \in \mathbb{N}$ es la función de Green para el problema $P_{T_m}(\Omega)$.

Sea $R_m(g)$ la restricción a $\Omega \times]0, T_m[$ (resp. a $\partial\Omega \times]0, T_m[$) de una distribución g definida en $\Omega \times]0, \infty[$ (resp. $\partial\Omega \times]0, \infty[$). Por el teorema 4.2 existe una única distribución $U_m(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T_m[$) tal que

$$\mathcal{A}(U_m(\mathbf{x}, t)) = R_m(F_0(\mathbf{x}, t)) \quad \text{en} \quad \Omega \times]0, T_m[, \quad (6.59)$$

$$\frac{\partial U_m}{\partial \mathbf{n}} = R_m(F_1) \quad \text{en} \quad \partial\Omega \times]0, T[, \quad (6.60)$$

$$U_m(\mathbf{x}, 0) = F_2(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial U_m}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = F_3(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6.61)$$

De la unicidad para cada U_m , $m \in \mathbb{N}$ y los argumentos dados en el lema 6.6, obtenemos que cada distribución U_m es la restricción a $\Omega \times]0, T_m[$ de la distribución $U_{m+1} \in \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T_{m+1}[$). Entonces la distribución $U(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}(\Omega \times]0, \infty[)$ cuya restricción a cada conjunto $\Omega \times]0, T_m[$, $m \in \mathbb{N}$ es $U_m(\mathbf{x}, t)$, está bien definida y es fácil comprobar que es la única solución del problema $P(\Omega)$.

Dada $\varphi(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}(\Omega \times]0, \infty[)$ existe $m_{\varphi} \in \mathbb{N}$ tal que $R_{m_{\varphi}}(\varphi) \in \mathcal{D}(\Omega \times]0, T_{m_{\varphi}}[)$. Por el teorema 6.2 y el teorema de Fubini para distribuciones tenemos

$$\begin{aligned} \forall m \geq m_{\varphi} \quad & \left\langle U(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}, t) \right\rangle_{\Omega \times]0, \infty[} = \\ & = \left\langle U_m(\mathbf{x}, t), R_m(\varphi(\mathbf{x}, t)) \right\rangle_{\Omega \times]0, T_m[} = \\ & = \left\langle \left\langle Y(G_{T_m}(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0)), \varphi(\mathbf{x}, t) \right\rangle_{\Omega \times]0, \infty[}, F_0(\mathbf{x}_0, t_0) \right\rangle_{\Omega \times]0, \infty[} + \\ & + \left\langle \left\langle Y(G_{T_m}(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0)), \varphi(\mathbf{x}, t) \right\rangle_{\partial\Omega \times]0, \infty[}, \mathbf{f}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_0) F_1(\mathbf{x}_0, t_0) \right\rangle_{\Omega \times]0, \infty[} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\alpha} \left\langle \left\langle Y(G_{T_m}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0)) + \tau \frac{\partial Y(G_{T_m})}{\partial t_0}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0), \varphi(\mathbf{x}, t) \right\rangle_{\Omega \times]0, \infty[}, \right. \\
 & \left. F_2(\mathbf{x}_0) \right\rangle_{\Omega} + \frac{\tau}{\alpha} \left\langle \left\langle Y(G_{T_m})(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0), \varphi(\mathbf{x}, t) \right\rangle_{\Omega \times]0, \infty[}, F_3(\mathbf{x}_0) \right\rangle_{\Omega} \quad (6.62)
 \end{aligned}$$

y, como $\varphi(\mathbf{x}, t) \in H_{0,0}^{2r-1, 2r} \subset \left(\mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega \times \mathbb{R}) \right)'$, el resultado se obtiene de (6.58) y el teorema de Fubini para distribuciones tomando límites en (6.62) para $m \rightarrow \infty$. ■

Capítulo 7

Función de Green en una banda tridimensional

El problema de irradiación de una fina película mediante una fuente de láser es cada vez más importante en muchas aplicaciones tecnológicas (ver por ejemplo [13] y [31] para explicaciones más detalladas). Actualmente, es bien conocido que el estudio exacto de este tipo de problemas necesita del uso de la ecuación hiperbólica de transmisión del calor y que debido al entorno físico del problema las soluciones más interesantes son las que presentan simetría axial con respecto al eje vertical z .

Una poderosa herramienta para poder obtener la solución de dicho problema es la función de Green asociada al problema homogéneo. De manera que este capítulo tiene como **objeto mostrar la existencia y unicidad de la función de Green del problema de Neumann para la ecuación hiperbólica de transmisión del calor para cuerpos isótropos y homogéneos con simetría axial en el caso de una banda no acotada $\Omega_L := \mathbb{R}^2 \times]0, L[$ en \mathbb{R}^3 , $0 < L < \infty$, proporcionando además un completo cálculo analítico de la misma**, así como también un riguroso fundamento de los procedimientos formales utilizados. Posteriormente, en el capítulo 8, utilizaremos esta función de Green para obtener el perfil de temperaturas de una fina película irradiada mediante láser. Obsérvese que la demostración de existencia y unicidad no está contenida en capítulos anteriores porque ahora estamos tratando con dominios espaciales no acotados y porque además,

la ecuación resultante tiene una parte espacial que **no es elíptica** en su dominio natural de definición.

Una vez fijado el objetivo de este capítulo dividiremos el mismo en tres apartados. En el apartado 7.1 se recogen ciertos preliminares necesarios para los dos siguientes apartados. En el apartado 7.2 aplicamos los resultados obtenidos en el capítulo 6 para mostrar la existencia y unicidad de la función de Green del problema planteado. Finalmente en el apartado 7.3 calculamos exactamente dicha función. Normalmente, en trabajos aplicados de ingeniería este tipo de cálculos se desarrollan de una forma puramente formal. Sin embargo, nosotros presentamos un riguroso tratamiento de nuestro problema basado en los resultados teóricos del apartado 7.2.

7.1. Preliminares

Dada una banda $\Omega_L := \mathbb{R}^2 \times]0, L[$ en \mathbb{R}^3 , $0 < L < \infty$, tomamos $\Omega_L^0 := \Omega_L \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in]0, L[\}$ y en referencia a la frontera $\partial\Omega_L$ definimos

$$\partial_0\Omega_L := \{(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}, \quad \partial_1\Omega_L := \{(x, y, L) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Entonces $\partial\Omega_L = \partial_0\Omega_L \cup \partial_1\Omega_L$.

La ecuación hiperbólica de transmisión del calor para la distribución de temperaturas en un medio homogéneo e isótropo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vendría dada por la ecuación (1.1). En el caso de una banda Ω_L y ausencia de fuentes internas de calor las soluciones de (1.1) con simetría axial respecto al eje vertical $x = 0$, $y = 0$ verifican en coordenadas cilíndricas en \mathbb{R}^3

$$\mathcal{F}(T) := -\mathcal{P}(T) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\tau}{\alpha} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0 \quad (r, z, t) \in]0, \infty[\times]0, L[\times]0, \infty[\quad (7.1)$$

donde \mathcal{P} es el operador diferencial

$$\mathcal{P} := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Por tanto, en coordenadas cartesianas, son las soluciones de

$$\mathcal{A}(T) := -\mathcal{S}(\mathbf{x}, t)(T) + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \right) = 0 \quad (7.2)$$

donde \mathcal{S} es el operador diferencial que aparece en la ecuación (1.2). La falta de elipticidad de \mathcal{S} tanto en el segmento

$$Z_L := \left\{ (0, 0, z) \mid z \in]0, L[\right\}$$

como en cada plano $y = a x$, $a \in \mathbb{R}$ y la no diferenciabilidad de sus coeficientes en Z_L tendrá una influencia decisiva en los resultados globales que encontraremos. Es fácil ver que \mathcal{S} es formalmente autoadjunto.

Sea \mathcal{O} un conjunto abierto *no acotado* en \mathbb{R}^n y sea $\{\mathcal{O}_m\}_{m=1}^\infty$ una *sucesión expansiva de conjuntos acotados* en \mathbb{R}^n tal que $\mathcal{O} = \bigcup_{m=1}^\infty \mathcal{O}_m$. Tomamos $2r \neq k + \frac{1}{2}$ cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces la aplicación natural

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad I_m : H_{0,0}^{2r-1,2r}(\mathcal{O}_m \times \mathbb{R}) \longrightarrow H_{0,0}^{2r-1,2r}(\mathcal{O} \times \mathbb{R})$$

que envía cada $f \in H_{0,0}^{2r-1,2r}(\mathcal{O}_m \times \mathbb{R})$ a su extensión $I_m(f) \in H_{0,0}^{2r-1,2r}(\mathcal{O} \times \mathbb{R})$ tal que $I_m(f)(\mathbf{x}, t) = 0$ si $\mathbf{x} \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_m$ es continua (ver [19], teorema 11.4 en el capítulo 1). Claramente

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad I_m \left(H_{0,0}^{2r-1,2r}(\mathcal{O}_m \times \mathbb{R}) \right) \subset I_{m+1} \left(H_{0,0}^{2r-1,2r}(\mathcal{O}_{m+1} \times \mathbb{R}) \right).$$

Sea $R_m(f)$ la restricción a $\mathcal{O}_m \times]-T_m, T_m[$ de una función f definida en un conjunto más grande que \mathcal{O}_m , $m \in \mathbb{N}$. Está claro que la función definida para

$$f \in \bigcup_{m=1}^\infty I_m \left(H_{0,0}^{2r-1,2r}(\mathcal{O}_m \times \mathbb{R}) \right) \subset H_{0,0}^{2r-1,2r}(\mathcal{O} \times \mathbb{R})$$

mediante

$$\|f\| := \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| R_m(f) \right\|_{H_{0,0}^{2r-1,2r}(\mathcal{O}_m \times \mathbb{R})}$$

es una norma en el primer espacio y la inclusión anterior es una isometría. Entonces definimos $\mathcal{H}^{2r-1,2r}(\mathcal{O} \times \mathbb{R})$ como la compleción de

$$\bigcup_{m=1}^\infty I_m \left(H_{0,0}^{2r-1,2r}(\mathcal{O}_m \times \mathbb{R}) \right)$$

bajo la norma anterior. Realmente, $\mathcal{H}^{2r-1,2r}(\mathcal{O} \times \mathbb{R})$ es la clausura de $\cup_{m=1}^{\infty} I_m \left(H_{0,0}^{2r-1,2r}(\mathcal{O}_m \times \mathbb{R}) \right)$ en $H_{0,0}^{2r-1,2r}(\mathcal{O} \times \mathbb{R})$. El espacio dual $\left(\mathcal{H}^{2r-1,2r}(\mathcal{O} \times \mathbb{R}) \right)'$ se denota por $\mathcal{H}^{-(2r-1),-2r}(\mathcal{O} \times \mathbb{R})$.

7.2. Existencia y unicidad de la función de Green en una banda

Introducimos la siguiente definición:

Definición 7.1. *La función de Green para el problema de Neumann de la ecuación hiperbólica de transmisión del calor isótropa y con simetría axial (7.2) en Ω_L correspondiente al punto $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega_L^0 \times \mathbb{R}$ es la distribución $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \in \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R})$ (o simplemente $G(\mathbf{x}, t)$ si no hay riesgo de confusión) tal que*

$$\mathcal{A}(G) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes \delta(t - t_0) \quad \text{en } \Omega_L^0 \times \mathbb{R} \quad (7.3)$$

$$\forall (x, y) \neq (0, 0) \quad \frac{\partial G}{\partial z}(x, y, 0, t) = \frac{\partial G}{\partial z}(x, y, L, t) = 0 \quad (7.4)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_L^0 \quad \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \nabla G(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (7.5)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_L^0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G(\mathbf{x}, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (7.6)$$

Observación. Puede ser un poco sorprendente trabajar con Ω_L^0 en lugar de con Ω_L en la definición anterior. La razón para hacer esto radica en el hecho que, como veremos en el apartado 7.3, no existe ninguna función que verifique todas las condiciones previas en la banda entera Ω_L . Por supuesto, este comportamiento es consecuencia de la falta de diferenciabilidad de los coeficientes de \mathcal{S} en el eje vertical de la banda. Por otro lado, el segmento $Z_L \subset \partial\Omega_L^0$ es una subvariedad de dimensión 1 de \mathbb{R}^3 mientras que las porciones de la frontera $z = 0$ y $z = L$ son variedades de dimensión 2 en \mathbb{R}^3 . Por tanto el comportamiento en Ω_L^0 de una distribución que verifica (7.3), (7.4), (7.5) y (7.6) determina su comportamiento en Z_L .

Para aplicar algunos resultados previos obtenidos en el capítulo 6 necesitaremos algunos subconjuntos especiales abiertos y acotados de Ω_L^0 . Fijamos una sucesión no acotada estrictamente creciente $\{T_m\}_{m=0}^\infty$ en $]0, \infty[$ tal que $2T_0 < T_1$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq 2$ y $L > \frac{1}{\sqrt{2}m}$ tomamos Γ_n como la *curva regular cerrada* en \mathbb{R}^2 obtenida por unión de los segmentos

$$\begin{aligned} L_{1m} &:= \left\{ (y, 0) \mid y \in \left[\frac{2}{\sqrt{2}m}, m \right] \right\}, & L_{2m} &:= \left\{ (y, L) \mid y \in \left[\frac{2}{\sqrt{2}m}, m \right] \right\} \\ L_{3m} &:= \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}m}, z \right) \mid z \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}m}, L - \frac{1}{\sqrt{2}m} \right] \right\}, \\ L_{4m} &:= \left\{ \left(m + \frac{1}{\sqrt{2}m}, z \right) \mid z \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}m}, L - \frac{1}{\sqrt{2}m} \right] \right\} \end{aligned}$$

y los arcos de circunferencia $\gamma_{1m}, \gamma_{2m}, \gamma_{3m}, \gamma_{4m}$ con amplitud $\frac{\pi}{2}$, con centros en $\left(\frac{2}{\sqrt{2}m}, \frac{1}{\sqrt{2}m} \right), \left(m, \frac{1}{\sqrt{2}m} \right), \left(m, L - \frac{1}{\sqrt{2}m} \right)$ y $\left(\frac{2}{\sqrt{2}m}, L - \frac{1}{\sqrt{2}m} \right)$, respectivamente, y radio $\frac{1}{\sqrt{2}m}$.

En lo sucesivo tomaremos $D :=]0, \infty[\times]0, L[\subset \mathbb{R}^2$ y para cada m como antes, D_m es el conjunto abierto en \mathbb{R}^2 tal que $\partial\Omega_m = \Gamma_m$. Entonces $\{D_m\}_{m > \frac{1}{\sqrt{2}L}}$ se convierte en una sucesión expansiva de dominios acotados que están situados en el mismo lado que su frontera de clase C^∞ y tal que $D = \bigcup_{m > \frac{1}{\sqrt{2}L}} D_m$ y \mathcal{P} es fuertemente elíptico en cada uno de ellos. Finalmente, tomamos Ω_m como el conjunto abierto en Ω_L obtenido por rotación del conjunto D_m sobre el eje vertical z . Comenzamos con un resultado auxiliar:

Proposición 7.1. *Dado $(r_0, z_0, t_0) \in D \times \mathbb{R}$ existe una distribución $G(r, z, t | r_0, z_0, t_0) = G(r, z, t) \in \mathbf{D}_{\mathcal{F}}^{-(2r-1)}(D \times \mathbb{R})$ para cada $2r - 1 > 0$ verificando las condiciones (4.2) y (4.24), que verifica el problema mixto de contorno*

$$\mathcal{F}(G) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \otimes \delta(z - z_0) \otimes \delta(t - t_0) \quad \text{si } (r, z, t) \in D \times \mathbb{R} \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}(r, 0, t) = \frac{\partial G}{\partial z}(r, L, t) = 0 \quad \text{si } (r, t) \in]0, \infty[\times \mathbb{R} \quad (7.8)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial G}{\partial r}(r, z, t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial G}{\partial z}(r, z, t) = 0 \quad \forall (z, t) \in]0, L[\times \mathbb{R} \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial G}{\partial r}(0, z, t) = 0 \quad \forall (z, t) \in]0, L[\times \mathbb{R} \quad (7.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(r, z, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial G}{\partial t}(r, z, t) = 0 \quad \forall (r, z) \in]0, \infty[\times]0, L[\quad (7.11)$$

$$\frac{\partial G}{\partial r}(0, z, t) = 0, \quad 0 < z < L, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (7.12)$$

Además, $G(r, z, t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{C}^\infty(]0, \infty[\times]0, L])$.

Demostración. Dado r' tal que $2r' - 1 > 0$, escojamos $r < r'$ tal que $2r - 1 > 0$. Es fácil ver que, para cada $m \in \mathbb{N}$, la restricción a $D_m \times]-T_m, T_m[$ de la distribución $\frac{1}{r} \delta(r - r_0) \otimes \delta(z - z_0) \otimes \delta(t - t_0)$ pertenece al espacio $\Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(D_m \times]-T_m, T_m[)$ y además verifica las hipótesis del teorema 5.2. Como \mathcal{P} es fuertemente elíptico en D_m por los teoremas 5.1 y 5.2 existe una función $G_m := G_m(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \in \mathcal{C}(]-T_m, T_m[, \mathcal{C}^\infty(\overline{D_m}))$ tal que

$$\mathcal{F}(G_m) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \otimes \delta(z - z_0) \otimes \delta(t - t_0) \quad \text{en } D_m \times \mathbb{R}, \quad (7.13)$$

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial D_m \times \mathbb{R} \quad \mathfrak{R}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (7.14)$$

y

$$\forall \mathbf{x} \in D_m \quad \lim_{T \rightarrow \infty} G_m(\mathbf{x}, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial G_m}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0. \quad (7.15)$$

Por el lema 4.4 se verifica incluso que $Y(G_m) \in \mathbf{D}_{\mathcal{F}}^{-(2r-1)}(D \times \mathbb{R})$, donde $Y(G_m)$ denota la extensión a $D \times \mathbb{R}$ de G_m obtenida definiendo $(Y(G_m))(\mathbf{x}, t) = 0$ si $(\mathbf{x}, t) \notin D_m \times \mathbb{R}$.

Fijamos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathbf{x}_0, t_0) \in D_{k_0} \times]-T_{k_0}, T_{k_0}[$ y, para simplificar, definimos

$$K(r_0, z_0, t_0) := \left\| \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \otimes \delta(z - z_0) \otimes \delta(t - t_0) \right\|_{\Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(D_{k_0} \times]-T_{k_0}, T_{k_0}[)} < \infty.$$

Sea R_m la aplicación restricción a $D_m \times]-T_m, T_m[$ de una función definida en un conjunto más grande. Dada $\varphi \in \mathcal{D}(D \times \mathbb{R})$, existe $m_\varphi \geq k_0$ tal que $R_m(\varphi) \in \mathcal{D}(D_m \times]-T_m, T_m[)$ para cada $m \geq m_\varphi$. Claramente, (7.13) se verifica también en $D_m \times]-T_m, T_m[$. Ahora, para cada $m \geq m_\varphi$ haciendo el cambio de variable temporal $t' = 2t - T_m$ en el corolario

2.4 obtenemos una única función $U_m(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{D_m \times] - T_m, T_m[})$ tal que

$$\mathcal{F}^*(U_m) = R_m(\varphi) \quad \text{en } D_m \times] - T_m, T_m[\quad (7.16)$$

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \partial D_m \times] - T_m, T_m[\quad \mathfrak{R}_{\mathcal{F}}(U_m)(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (7.17)$$

$$\forall \mathbf{x} \in D_m \quad U_m(\mathbf{x}, -T_m) = \frac{\partial U_m}{\partial t}(\mathbf{x}, -T_m) = 0 \quad (7.18)$$

Entonces por la primera generalización de la fórmula de Green y (7.16), (7.17) y (7.18)

$$\begin{aligned} & \sup_{m \geq m_\varphi} \left| \left\langle Y(G_m), \varphi \right\rangle_{D \times \mathbb{R}} \right| = \sup_{m \geq m_\varphi} \left| \left\langle G_m, R_m(\varphi) \right\rangle_{D_m \times] - T_m, T_m[} \right| = \\ & = \sup_{m \geq m_\varphi} \left| \left\langle G_m, \mathcal{F}^*(U_m) \right\rangle_{D_m \times] - T_m, T_m[} \right| = \\ & = \sup_{m \geq m_\varphi} \left| \left\langle \mathcal{F}(G_m), U_m \right\rangle_{D_m \times] - T_m, T_m[} \right| = \\ & = \sup_{m \geq m_\varphi} \left| \left\langle \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \otimes \delta(z - z_0) \otimes \delta(t - t_0), U_m \right\rangle_{D_m \times] - T_m, T_m[} \right| = \\ & = \sup_{m \geq m_\varphi} \left| \left\langle \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \otimes \delta(z - z_0) \otimes \delta(t - t_0), R_{k_0}(U_m) \right\rangle_{D_{k_0} \times] - T_{k_0}, T_{k_0}[} \right| \leq \\ & \leq K(\mathbf{x}_0, t_0) \sup_{m \geq m_\varphi} \left\| R_{k_0}(U_m) \right\|_{\Phi^{2r+1, 2r+1}(D_{k_0} \times] - T_{k_0}, T_{k_0}[)} \leq \end{aligned}$$

y por la continuidad de la inclusión $H^{2r+1, 2r+1}(D_{k_0} \times] - T_{k_0}, T_{k_0}[) \subset \Phi^{2r+1, 2r+1}(D_{k_0} \times] - T_{k_0}, T_{k_0}[)$ existe $K_1(\Omega_{k_0}) > 0$ tal que continuamos de la siguiente forma

$$\leq K(r_0, z_0, t_0) K_1(D_{k_0}) \sup_{m \geq m_\varphi} \left\| R_{k_0}(U_m) \right\|_{H^{2r+1, 2r+1}(D_{k_0} \times] - T_{k_0}, T_{k_0}[)} \leq$$

y por el lema 3.2 existe otra constante $K_2(D_{k_0}) > 0$ que verifica

$$\begin{aligned} & \leq K(r_0, z_0, t_0) K_1(D_{k_0}) K_2(D_{k_0}) \times \\ & \times \sup_{m \geq m_\varphi} \left\| \mathcal{F}^*(R_{k_0}(U_m)) \right\|_{H^{2r-1, 2r}(D_{k_0} \times] - T_{k_0}, T_{k_0}[)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= K(r_0, z_0, t_0) K_1(D_{k_0}) K_2(D_{k_0}) \sup_{m \geq m_\varphi} \left\| R_{k_0}(\varphi) \right\|_{H^{2r-1, 2r}(D_{k_0} \times]-T_{k_0}, T_{k_0}[)} \leq \\
&\leq K(r_0, z_0, t_0) K_1(D_{k_0}) K_2(D_{k_0}) \sup_{m \geq m_\varphi} \left\| R_m(\varphi) \right\|_{H^{2r-1, 2r}(D_m \times]-T_m, T_m[)} \leq \\
&\leq K(r_0, z_0, t_0) K_1(D_{k_0}) K_2(D_{k_0}) \left\| \varphi \right\|_{\mathcal{H}^{2r-1, 2r}(D \times \mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, por las propiedades de regularidad de G_m

$$\begin{aligned}
\sup_{m \leq m_\varphi} \left| \left\langle Y(G_m), \varphi \right\rangle_{D \times \mathbb{R}} \right| &= \sup_{m \leq m_\varphi} \left| \left\langle G_m, R_m(\varphi) \right\rangle_{D_m \times]-T_m, T_m[} \right| = \\
&= \sup_{m \leq m_\varphi} \left| \left\langle G_m, R_m(\mathcal{F}^*(U_{m_\varphi})) \right\rangle_{D_m \times]-T_m, T_m[} \right| = \\
&= \sup_{m \leq m_\varphi} \left| \left\langle G_m, \mathcal{F}^*(R_m(U_{m_\varphi})) \right\rangle_{D_m \times]-T_m, T_m[} \right| =
\end{aligned}$$

y aplicando la primera generalización de la fórmula de Green, utilizando (7.14), (7.15) y (7.18) y la definición de $Y(G_m)$, como $R_m(U_m) \in \mathcal{C}^\infty(D_m \times]-T_m, T_m[)$ por (7.13)

$$\begin{aligned}
&= \sup_{m \leq m_\varphi} \left| \left\langle \mathcal{F}(G_m), R_m(U_{m_\varphi}) \right\rangle_{D_m \times]-T_m, T_m[} \right| \leq \frac{1}{r_0} \left| U_{m_\varphi}(r_0, z_0, t_0) \right| = \\
&= \left| \left\langle \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \otimes \delta(z - z_0) \otimes \delta(t - t_0), R_{k_0}(U_{m_\varphi}) \right\rangle_{D_{k_0} \times]-T_{k_0}, T_{k_0}[} \right|
\end{aligned}$$

y podemos argumentar como antes.

Por la densidad de $\mathcal{D}(D \times \mathbb{R})$ en $\mathcal{H}_{0,0}^{2r+1, 2r+1}(D \times \mathbb{R})$ obtenemos que la sucesión $\{Y(G_m)\}_{m=1}^\infty$ es débilmente acotada en $\mathcal{H}^{-(2r+1), -(2r+1)}(D \times \mathbb{R})$. De forma similar se puede mostrar que $\{Y(G_m)\}_{m=1}^\infty$ es débilmente acotada en $\mathbf{D}_{\mathcal{P}}^{-(2r-1)}(D \times \mathbb{R})$. Como $\mathcal{H}^{-(2r+1), -(2r+1)}(D \times \mathbb{R})$ y $\Phi^{-(2r+1), -(2r+1)}(D \times \mathbb{R})$ son claramente reflexivos, por el teorema de Eberlein se puede suponer que hay $G \in \mathcal{H}^{-(2r+1), -(2r+1)}(D \times \mathbb{R})$ tal que $\{Y(G_m)\}_{m=1}^\infty$ es débilmente convergente a G en $D_{\mathcal{F}}^{-(2r-1)}(D \times \mathbb{R})$. Sea $Q_m(f)$ la restricción a $D_m \times \mathbb{R}$ de una función f definida en un conjunto más grande. Como $r' > r$, después de la aplicación de los teoremas de Rellich-Kondrašov y Schauder y eligiendo una subsucesión diagonal adecuada si fuese necesario, se puede suponer además

que $\lim_{m \rightarrow \infty} Q_k(Y(G_m))$ existe en $D_{\mathcal{F}}^{-(2r'-1)}(D_k \times \mathbb{R})$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como cada $Y(G_m)$ es realmente una *función medible* en $D \times \mathbb{R}$, después de un argumento análogo al utilizado en las proposiciones 1.6 y 1.7, se puede suponer de hecho que $\lim_{m \rightarrow \infty} Y(G_m) = G$ en $D_{\mathcal{F}}^{-(2r'-1)}(D \times \mathbb{R})$. Tenemos además que $G \in \mathbf{D}_{\mathcal{F}}^{-(2r'-1)}(D \times \mathbb{R})$ ya que cada $Y(G_m) \in \mathbf{D}_{\mathcal{F}}^{-(2r'-1)}(D \times \mathbb{R})$.

Como para cada $\varphi \in \mathcal{D}(D \times \mathbb{R})$ tenemos $\text{sop}(\varphi) \subset D_{m_\varphi} \times \mathbb{R}$ para cada $m \geq m_\varphi$, por (7.13) obtenemos que

$$\mathcal{F}(G)(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \otimes \delta(z - z_0) \otimes \delta(t - t_0) \quad \text{en } D \times \mathbb{R}. \quad (7.19)$$

A *posteriori* la restricción $S_m(G)$ a $D_n \times \mathbb{R}$ de la distribución G verifica

$$\mathcal{F}(S_m(G))(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \otimes \delta(z - z_0) \otimes \delta(t - t_0) \quad \text{en } D_m \times \mathbb{R}$$

y por tanto, por la proposición 5.4 $S_m(G) \in \mathcal{C}(| - T_k, T_k[, \mathcal{C}^\infty(\overline{D_m}))$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, tenemos $S_m(G) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{C}^\infty(\overline{D_n}))$ y por los teoremas de las trazas del capítulo 4

$$\frac{\partial S_m(G)}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{en } \partial D_n \times \mathbb{R} \quad (7.20)$$

y

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_m(G)(\mathbf{x}, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial S_m(G)}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0 \quad \text{en } D_n. \quad (7.21)$$

Como m es arbitrario, obtenemos que (7.20) y (7.21) son ciertas en $\partial D \times \mathbb{R}$ y en D , respectivamente. Entonces G es la función de Green para el conjunto abierto D y $G \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{C}^\infty(D))$. Como el número r' verificando $2r' - 1 > 0$ es arbitrario, con esto finaliza la demostración. ■

Teorema 7.1. *Suponemos $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega_L^0$. Existe una única función de Green $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ para el problema de Neumann de la ecuación hiperbólica de transmisión del calor isótropa y con simetría axial en cada banda Ω_L . Además, $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \in \mathbf{D}_A^{-(2r-1)}(\Omega_L^0 \times \mathbb{R})$ para cada r tal que $2r - 1 > 0$ verificando las condiciones (4.2) y (4.24).*

Demostración. Existencia. Necesitamos una prueba específica dado que no podemos aplicar los teoremas de existencia y unicidad del capítulo 4 debido a que Ω_L^0 es no acotado, los coeficientes del operador \mathcal{S} no son de clase \mathcal{C}^∞ en los puntos $(0, 0, z)$, $z \in]0, L[$ y \mathcal{S} no es elíptico en ningún plano $y = a x$ para cada $a \in \mathbb{R}$.

Cambiando a coordenadas cilíndricas en \mathbb{R} la ecuación (7.3) se convierte en la ecuación

$$\mathcal{F}(T) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\omega - \omega_0) \delta(z - z_0) \delta(t - t_0) \quad \text{en } E \times \mathbb{R} \quad (7.22)$$

donde $E :=]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, L[$ y $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ y $\omega_0 = \text{Arg}(x_0 + i y_0)$. Como la parte derecha de (7.22) no depende de ω , es fácil comprobar que la existencia de nuestra función de Green se obtendrá a partir de la existencia de la solución del problema mixto de contorno considerado en la proposición 7.1 tomando

$$T = G(r, z, t | r_0, z_0, t_0) \otimes \delta(\omega - \omega_0), \quad (7.23)$$

donde la distribución $G(r, z, t | r_0, z_0, t_0)$ es una solución de aquel problema, y deshaciendo el cambio a coordenadas cilíndricas. Entonces la demostración se obtiene a partir de la proposición 7.1. Es fácil comprobar que $T \in \mathbf{D}_{\mathcal{A}}^{-(2r-1)}(\Omega_L^0 \times \mathbb{R})$ como consecuencia del cambio a coordenadas cilíndricas y del hecho que $G \in \mathbf{D}_{\mathcal{F}}^{-(2r-1)}(D \times \mathbb{R})$. Es importante señalar que **T no está definida globalmente en $\Omega_L^0 \times \mathbb{R}$ por una función medible.**

Unicidad. Supongamos que hubiera dos funciones de Green G_1 y G_2 para nuestro problema. Entonces la distribución $G_0 := G_1 - G_2$ verificaría

$$\mathcal{A}(G_0) = 0 \quad \text{en } \Omega_L^0 \times \mathbb{R} \quad (7.24)$$

$$\frac{\partial G_0}{\partial z}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{en } (\partial_0 \Omega_L \cup \partial_1 \Omega_L) \times \mathbb{R} \quad (7.25)$$

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \nabla G_0(x, y, z, t) = 0 \quad \forall z \in]0, L[\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (7.26)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_0(\mathbf{x}, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial G_0}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (7.27)$$

Cambiando a coordenadas cilíndricas, para cada $r' > 0$, G_0 sería solución del problema

$$-\frac{\partial^2 G_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial G_0}{\partial r} - \frac{\partial^2 G_0}{\partial z^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G_0}{\partial t} + \frac{\tau}{\alpha} \frac{\partial^2 G_0}{\partial t^2} = 0 \quad \text{en }]r', \infty[\times]0, L[\times \mathbb{R} \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial G_0}{\partial z}(r, 0, t) = \frac{\partial G_0}{\partial z}(r, L, t) = 0 \quad \forall (r, t) \in]r', \infty[\times \mathbb{R} \quad (7.29)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial G_0}{\partial r}(r, z, t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial G_0}{\partial z}(r, z, t) = 0 \quad \forall (z, t) \in]0, L[\times \mathbb{R}. \quad (7.30)$$

Tomando transformada de Schwartz-Laplace $\mathfrak{L}(p) := \mathcal{L}[G_0](p)$ habrá $p_0 \in \mathbb{C}$ tal que para cada $p \in \mathbb{C}$, $Re(p) > Re(p_0)$ y cada $k \in \mathbb{N}$ tendremos

$$-\frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{\alpha} p + \frac{\tau}{\alpha} p^2 \right) \mathfrak{L} = 0 \quad \text{en }]r', r' + k[\times]0, L[\quad (7.31)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z}(r, 0, p) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z}(r, L, p) = 0 \quad \forall r \in]r', r' + k[. \quad (7.32)$$

Como el operador

$$-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

es $W_{r',k}$ -coercivo, donde $W_{r',k}$ es el conjunto de todas las funciones $v \in H_0^1(]r', r' + k[\times]0, L[)$ tal que

$$\frac{\partial v}{\partial z}(r, 0) = \frac{\partial v}{\partial z}(r, L) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial v}{\partial r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \forall r > r', \forall z \in]0, L[$$

(ver por ejemplo [41], ejemplo 19.1), para cada $p \in \mathbb{C}$ tal que $Re(p) > Re(p_0)$ el problema (7.31)-(7.32) tiene una única solución en $]r', r' + k[\times]0, L[$. Por tanto $\mathfrak{L} = 0$ en $]r', r' + k[\times]0, L[$ para cada $p \in \mathbb{C}$, $Re(p) > Re(p_0)$. Entonces $G_0 = 0$ en $]r', r' + k[\times]0, L[$ y por la arbitrariedad de $r' > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ obtenemos $G_0 = 0$ en $]0, \infty[\times]0, L[$. ■

Por una argumento análogo al dado en el teorema 7.1 obtenemos también:

Teorema 7.2. *El problema mixto*

$$-\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} + A \Theta + 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\xi - \xi_0), \quad (7.33)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \rho}(0, \xi) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\partial \Theta}{\partial \rho}(\rho, \xi) = 0, \quad (7.34)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Theta(\rho, \xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}(\rho, \xi) = 0, \quad (7.35)$$

donde A es una constante real, tiene una única solución Θ tal que $\Theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{C}^\infty(\bar{\mathcal{I}}))$ para cada conjunto abierto y acotado $\mathcal{I} \subset]0, \infty[$.

7.3. Cálculo de la función de Green

En el apartado 7.2 hemos alcanzado la primera parte del objetivo de este capítulo: probar la existencia y unicidad de la función de Green para el problema de Neumann de la ecuación hiperbólica de transmisión del calor en una banda. A continuación en este apartado completaremos el objetivo del capítulo determinando dicha función de Green.

Si $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega_L^0$ teniendo en cuenta la existencia y unicidad de las soluciones dadas en el teorema 7.1 para el problema (7.3), (7.4), (7.5) y (7.6) cambiando a coordenadas cilíndricas resulta que *existe una única distribución* U tal que, escribiendo $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ y $\omega_0 = \text{Arg}(x_0 + i y_0)$, se verifica

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\tau}{\alpha} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \\ & = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\omega - \omega_0) \delta(z - z_0) \delta(t - t_0) \end{aligned} \quad (7.36)$$

para cada $(r, \omega, z, t) \in]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, L[\times \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial U}{\partial z}(r, \omega, 0, t) = \frac{\partial U}{\partial z}(r, \omega, L, t) = 0 \quad \text{si } (r, \omega, t) \in]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}, \quad (7.37)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial U}{\partial r}(r, \omega, z, t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial U}{\partial \omega}(r, \omega, z, t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial U}{\partial z}(r, \omega, z, t) = 0 \quad (7.38)$$

si $(\omega, z, t) \in]0, 2\pi[\times]0, L[\times \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(r, \omega, z, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial U}{\partial t}(r, \omega, z, t) = 0 \quad (7.39)$$

si $(r, \omega, z) \in]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, L[$.

Queda establecer una condición de contorno en $r = 0$ del nuevo dominio. Como consecuencia de la unicidad mostrada en el teorema 7.1 y la construcción de la existencia dada en el mismo teorema y en la proposición 7.1 tenemos necesariamente

$$\frac{\partial U}{\partial r}(0, z, t) = 0, \quad \forall (z, t) \in]0, L[\times \mathbb{R}. \quad (7.40)$$

Después de los argumentos dados en el teorema 7.1, existe una única función $G(r, z, t | r_0, z_0, t_0)$ que verifica el problema de contorno mixto considerado en la proposición 7.1 y tal que la deseada función de Green es

$$U = G(r, z, t | r_0, z_0, t_0) \otimes \delta(\omega - \omega_0).$$

Por conveniencia trabajaremos con las siguientes variables adimensionales:

$$\begin{aligned} \rho &:= \frac{r}{2\sqrt{\alpha\tau}}; & \eta &:= \frac{z}{2\sqrt{\alpha\tau}}; \\ \xi &:= \frac{t}{2\tau}; & \Theta(\rho, \eta, \xi) &:= 4\tau\sqrt{\alpha\tau}G(r, z, t); \end{aligned} \quad (7.41)$$

Teniendo en cuenta estas nuevas variables y definiendo

$$L_0 := \frac{L}{2\sqrt{\alpha\tau}}, \quad \rho_0 := \frac{r_0}{2\sqrt{\alpha\tau}}, \quad \eta_0 := \frac{z_0}{2\sqrt{\alpha\tau}} \quad \text{y} \quad \xi_0 := \frac{t_0}{2\tau}$$

existe una única solución del nuevo problema adimensional

$$-\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\eta - \eta_0) \delta(\xi - \xi_0) \quad (7.42)$$

para $(\rho, \eta, \xi) \in]0, \infty[\times]0, L_0[\times \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(\rho, 0, \xi) = \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(\rho, L_0, \xi) = 0 \quad \text{si} \quad (\rho, \xi) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}, \quad (7.43)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\partial \Theta}{\partial \rho}(\rho, \eta, \xi) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(\rho, \eta, \xi) = 0 \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (7.44)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Theta(\rho, \eta, \xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}(\rho, \eta, \xi) = 0 \quad \text{si} \quad (\rho, \eta) \in]0, \infty[\times]0, L_0[, \quad (7.45)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho}(0, \eta, \xi) = 0 \quad \text{si } (\eta, \xi) \in]0, L_0[\times \mathbb{R}. \quad (7.46)$$

Además, como consecuencia del teorema 7.1 y los cambios de variables realizados, necesariamente

$$\Theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{C}^\infty(]0, \infty[\setminus \{\rho_0\} \times]0, L_0[)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{C}(]0, \infty[\times]0, L_0[)).$$

En tal caso $\Theta(\rho, \eta, \xi)$ y $\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}(\rho, \eta, \xi)$ verifican las condiciones de Dirichlet en $]0, L_0[$ para cada $(\rho, \xi) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}$. Para asegurar la verificación de la condición (7.43) expandimos $\Theta(\rho, \eta, \xi)$ en $]0, L_0[$ como una serie de Fourier en cosenos respecto a η . Esto nos lleva (ver por ejemplo [30]) a que $\Theta(\rho, \eta, \xi)$ sea la suma de las *series convergentes*

$$\Theta(\rho, \eta, \xi) = \frac{1}{L_0} \mathfrak{F}_0(\rho, \xi) + \frac{2}{L_0} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_n(\rho, \xi) \cos\left(\frac{n \pi \eta}{L_0}\right) \quad (7.47)$$

donde

$$\forall n \geq 0 \quad \mathfrak{F}_n(\rho, \xi) = \int_0^{L_0} \Theta(\rho, \eta, \xi) \cos\left(\frac{n \pi \eta}{L_0}\right) d\eta. \quad (7.48)$$

Por (7.48) y la unicidad de la solución de nuestro problema (7.42), (7.43), (7.44), (7.45) y (7.46), las condiciones (7.42) y (7.45) se satisfarán si cada $\mathfrak{F}_n(\rho, \xi)$, $n \geq 0$ verifica la ecuación

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \mathfrak{F}_n}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial \rho} + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} \mathfrak{F}_n + 2 \frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_n}{\partial \xi^2} = \\ = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\xi - \xi_0) \cos\left(\frac{n \pi \eta_0}{L_0}\right), \end{aligned} \quad (7.49)$$

las condiciones de contorno

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial \rho}(0, \xi) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial \rho}(\rho, \xi) = 0 \quad (7.50)$$

y las condiciones finales

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathfrak{F}_n(\rho, \xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial \xi}(\rho, \xi) = 0. \quad (7.51)$$

Por el teorema 7.2, el problema (7.49), (7.50), (7.51) tiene una única solución

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_n(\rho, \xi) &\in \mathbf{D}_{\mathcal{F}}^{-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(]0, \infty[\times \mathbb{R}) \subset H^{-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right), -\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(]0, \infty[\times \mathbb{R}) \subset \\ &\subset \mathcal{S}'_t(\mathbb{R}, \mathcal{C}(]0, \infty[)) \end{aligned}$$

cualquiera que sea $\varepsilon > 0$. Por tanto para cada $\rho > 0$ la transformada de Schwartz-Laplace $\mathfrak{L}_n(p) := \mathfrak{L}[\mathfrak{F}_n](p)$ respecto a ξ existe y verifica

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \mathfrak{L}_n}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{L}_n}{\partial \rho} + \left(\frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} + 2p + p^2 \right) \mathfrak{L}_n &= \\ = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) e^{-p \xi_0} \cos\left(\frac{n \pi \eta_0}{L_0}\right) &\quad (7.52) \end{aligned}$$

y la condición de contorno deducida a partir de (7.50)

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_n}{\partial \rho}(0, p) = 0 \quad (7.53)$$

para cada $Re(p) > p_0$, para algunos $p_0 > 0$. Como la ecuación (7.52) es elíptica, por el lema de Weyl y la condición (7.50) vemos que

$$\mathfrak{L}_n(\rho, p) \in H^{-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right), -\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(]0, \infty[) \subset \mathcal{S}'_p(]0, \infty[) \quad (7.54)$$

debe ser extensible a una función continua de ρ en en el punto $\rho = 0$. Entonces

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \mathfrak{L}_n(\rho, p) = 0 \quad (7.55)$$

para cada p y la transformada de Laplace ordinaria $\mathfrak{L}_\rho[\mathfrak{L}_n](s)$ respecto a ρ existe y debe verificar

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \sqrt{s} \mathfrak{L}_\rho[\mathfrak{L}_n](s) = 0$$

y por el teorema final de las transformadas de Laplace (ver por ejemplo el teorema 4.12.2 en [28])

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \mathfrak{L}_n(\rho, p) = 0. \quad (7.56)$$

A partir de (7.55) y (7.56) vemos que la transformada de Hankel de orden 0 respecto a ρ existe y, poniendo $\mathfrak{H}_n(k) := \mathcal{H}[\mathfrak{L}_n](k)$ de $\mathfrak{L}_n(\rho, p)$, la ecuación

$$\left(2p + p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} + k^2\right) \mathfrak{H}_n = \cos\left(\frac{n \pi \eta_0}{L_0}\right) J_0(k \rho_0) e^{-p \xi_0}, \quad (7.57)$$

se verifica. Por tanto

$$\mathfrak{H}_n = \frac{J_0(k \rho_0) \cos\left(\frac{n \pi \eta_0}{L_0}\right) e^{-p \xi_0}}{2p + p^2 + k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2}}. \quad (7.58)$$

Ahora invertiremos las transformadas utilizadas. El teorema de inversión de las transformadas de Hankel da

$$\mathfrak{L}_n(\rho, p) = \int_0^\infty k J_0(k \rho) \frac{J_0(k \rho_0) \cos\left(\frac{n \pi \eta_0}{L_0}\right) e^{-p \xi_0}}{2p + p^2 + k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2}} dk. \quad (7.59)$$

Para encontrar la inversa de Laplace de (7.59) es suficiente con conocer la inversa de Laplace de

$$W_n(\xi, k) := \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{e^{-p \xi_0}}{2p + p^2 + k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2}} \right] (\xi, k) \quad (7.60)$$

y aplicar el teorema de Fubini. Por la propiedad de traslación de las transformadas de Laplace

$$\begin{aligned} W_n(\xi, k) &:= H(\xi - \xi_0) \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{2p + p^2 + k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2}} \right] (\xi - \xi_0, k) = \\ &= H(\xi - \xi_0) G_n(\xi - \xi_0, k) \end{aligned}$$

donde $H(u)$ es la función de Heaviside y $\forall n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$$G_n(\xi, k) = \begin{cases} e^{-\xi} \frac{\text{Sh}\left(\xi \sqrt{1 - \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2}\right)}\right)}{\sqrt{1 - \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2}\right)}} & \text{si } k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} < 1 \\ e^{-\xi} \frac{\text{sen}\left(\xi \sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} - 1}\right)}{\sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} - 1}} & \text{si } k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} > 1 \end{cases}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_n(\rho, \eta, \xi) &= \mathfrak{L}^{-1}[\mathfrak{L}_n] = \\
&= \int_0^\infty k J_0(k\rho) J_0(k\rho_0) \cos\left(\frac{n\pi\eta_0}{L_0}\right) W_n(\xi, k) dk = \\
&= H(\xi - \xi_0) \cos\left(\frac{n\pi\eta_0}{L_0}\right) e^{-(\xi - \xi_0)} \left[H\left(1 - \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}\right) \times \right. \\
&\times \left[\int_0^{\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}}} k J_0(k\rho) J_0(k\rho_0) \frac{\text{Sh}\left((\xi - \xi_0)\sqrt{1 - \left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}\right)}\right)}{\sqrt{1 - \left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}\right)}} dk + \right. \\
&+ \left. \int_{\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}}}^\infty k J_0(k\rho) J_0(k\rho_0) \frac{\text{sen}\left((\xi - \xi_0)\sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L_0^2} - 1}\right)}{\sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L_0^2} - 1}} dk \right] + \\
&+ H\left(\frac{n^2\pi^2}{L_0^2} - 1\right) \int_0^\infty k J_0(k\rho) J_0(k\rho_0) \times \\
&\times \frac{\text{sen}\left((\xi - \xi_0)\sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L_0^2} - 1}\right)}{\sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L_0^2} - 1}} dk \left. \right].
\end{aligned}$$

Finalmente, haciendo la inversa de Fourier obtenemos

$$\begin{aligned}
\Theta(\rho, \eta, \xi | \rho_0, \eta_0, \xi_0) &= \\
\frac{1}{L_0} H(\xi - \xi_0) e^{-(\xi - \xi_0)} &\left[\int_0^1 k J_0(k\rho) J_0(k\rho_0) \frac{\text{Sh}\left((\xi - \xi_0)\sqrt{1 - k^2}\right)}{\sqrt{1 - k^2}} dk + \right. \\
&+ \int_1^\infty k J_0(k\rho) J_0(k\rho_0) \frac{\text{sen}\left((\xi - \xi_0)\sqrt{k^2 - 1}\right)}{\sqrt{k^2 - 1}} dk + \\
&+ \sum_{n=1}^\infty \cos\frac{n\pi\eta}{L_0} \cos\frac{n\pi\eta_0}{L_0} \left(H\left(1 - \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}\right) \times \right. \\
&\times \left[\int_0^{\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}}} 2 k J_0(k\rho) J_0(k\rho_0) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\operatorname{Sh} \left((\xi - \xi_0) \sqrt{1 - \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} \right)} \right)}{\sqrt{1 - \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} \right)}} dk + \\
& + \int_{\sqrt{1 - \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2}}}^{\infty} 2 k J_0(k\rho) J_0(k\rho_0) \frac{\operatorname{sen} \left((\xi - \xi_0) \sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} - 1} \right)}{\sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} - 1}} dk \Bigg] + \\
& + H \left(\frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} - 1 \right) \int_0^{\infty} 2 k J_0(k\rho) J_0(k\rho_0) \times \\
& \times \frac{\operatorname{sen} \left((\xi - \xi_0) \sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} - 1} \right)}{\sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} - 1}} dk \Bigg] . \quad (7.61)
\end{aligned}$$

Observación. La ecuación (7.61) implica que G no se pueda extender a $\Omega_L \times \mathbb{R}$ como una función continua, ni incluso como una función acotada. De hecho las integrales impropias de (7.61) en puntos de Z (es decir $\rho = 0$) tienen el mismo tipo de convergencia de

$$W(\rho_0, \xi - \xi_0) = \int_0^{\infty} J_0(k\rho_0) \operatorname{sen}((\xi - \xi_0) k) dk,$$

los llamados factores discontinuos de Weber, con valores

$$W(\rho_0, \xi - \xi_0) = 0 \quad \text{si } \xi - \xi_0 < \rho_0,$$

$$W(\rho_0, \rho_0) = \infty$$

y

$$W(\rho_0, \xi - \xi_0) = \frac{1}{\sqrt{(\xi - \xi_0)^2 - \rho_0^2}} \quad \text{si } \xi - \xi_0 > \rho_0$$

(ver [38], página 405).

Capítulo 8

Perfil hiperbólico de temperaturas en una banda irradiada por un láser

Una de las principales ventajas que tiene el conocimiento de la función de Green para un tipo específico de problema de contorno mixto es la reducción en el cálculo del perfil de temperaturas a más o menos operaciones mecánicas. Para ilustrar este hecho este capítulo tiene como **objeto el resolver, desde el punto de vista del modelo hiperbólico, el problema de transmisión del calor en una banda irradiada por un haz de láser con un perfil espacial y temporal concreto**. Además una vez obtenida la solución de dicho problema la compararemos con la que se obtiene si el problema se resuelve desde el punto de vista del modelo parabólico de transmisión del calor.

De este modo dividimos el capítulo en cuatro apartados. En el apartado 8.1 planteamos el problema. En el apartado 8.2 aplicamos la función de Green obtenida en el capítulo 6 para calcular el perfil de temperaturas del problema planteado. En el apartado 8.3 realizamos una serie de representaciones gráficas del perfil de temperaturas obtenido. Y finalmente en el apartado 8.4 comparamos la solución hiperbólica obtenida con la solución que se obtiene si el problema se resuelve desde el punto de vista del modelo parabólico.

8.1. Planteamiento del problema

Queremos obtener el perfil de temperaturas de una banda que es irradiada en $z = 0$ por un haz de láser con un concreto perfil temporal y espacial, desde el punto de vista del modelo hiperbólico. La ecuación de gobierno del problema en coordenadas cilíndricas es

$$-\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\alpha}{\tau} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0 \quad (8.1)$$

para $(r, z, t) \in]0, \infty[\times]0, L[\times]0, \infty[$, y las condiciones iniciales y de contorno son

$$T(r, z, 0) = \frac{\partial T}{\partial t}(r, z, 0) = 0 \quad \text{en }]0, \infty[\times]0, L[, \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(r, L, t) = 0 \quad \text{en }]0, \infty[\times]0, \infty[, \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, z, t) = 0 \quad \text{en }]0, L[\times]0, \infty[, \quad (8.4)$$

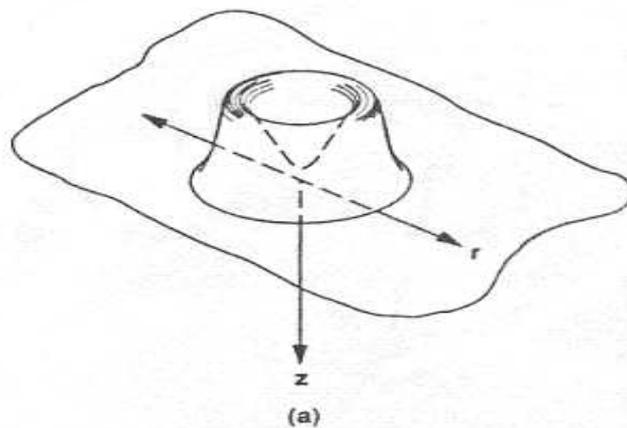
$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(r, z, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial T}{\partial t}(r, z, t) = 0 \quad \text{en }]0, \infty[\times]0, L[\quad (8.5)$$

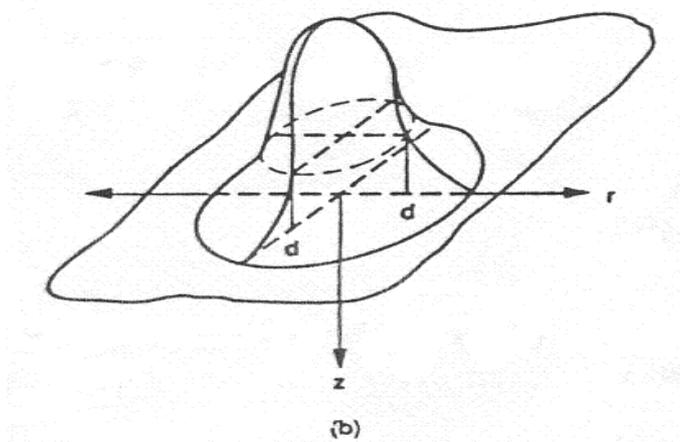
$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial z}(r, 0, t) &= \frac{Q_0}{k} \left(f(t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t}(t) \right) \times \\ &\times \left(A_0 + (1 - A_0) \frac{r^2}{d^2} \right) e^{-\frac{r^2}{d^2}} \quad \text{en }]0, \infty[\times]0, \infty[, \end{aligned} \quad (8.6)$$

donde k es la conductividad, Q_0 es un factor correspondiente al máximo flujo incidente por una fuente Gaussiana y contiene importante información sobre las características físicas de la superficie como puede ser por ejemplo la reflectividad, el parámetro d es una característica del radio del haz de láser que representa el contorno dentro del cual está contenido un 63 % de la energía total del láser de una fuente Gaussiana que incide sobre una superficie, la función $f(t)$ es el perfil temporal del láser y el parámetro A_0 es la fracción del flujo total que contiene el modo Gaussiano y que puede ser representada por

$$A_0 = \frac{TEM_{00}}{TEM_{00} + TEM_{01}}$$

donde A_0 varía entre 0 y 1. La figura (a) muestra el perfil espacial dado por la ecuación (8.6) para $0 < A_0 < 1$. La figura (b) muestra la fuente de tipo Gaussiano que corresponde al caso $A_0 = 1$. La máxima irradiación en el caso de una fuente Gaussiana se produce en el centro y esta es generalmente la razón por la cual se emplea en la mayoría de las aplicaciones de procesamiento de materiales que implican superficies metálicas con un alto grado de reflectividad. La fuente tipo donut corresponde al caso $A_0 = 0$ y representa una situación donde la máxima irradiación no se concentra en el centro, ya que aquí vale cero, sino en un anillo alrededor de éste. La fuente tipo donut se utiliza generalmente en varios procesos de corte de materiales.





La resolución del problema sigue el mismo esquema sea cual sea el valor de A_0 y $f(t)$. Para nuestro problema vamos a suponer el ejemplo más representativo que es un flujo de láser de tipo Gaussiano y continuo con lo que $A_0 = 1$ y $f(t) = H(t)$. Introduciendo estos valores en (8.6) la condición queda como

$$\frac{\partial T}{\partial z}(r, 0, t) = \frac{Q_0}{k} (H(t) + \tau\delta(t)) e^{-\frac{r^2}{d^2}} = \frac{Q_0}{k} H(t) e^{-\frac{r^2}{d^2}} \text{ en }]0, \infty[\times]0, \infty[. \quad (8.7)$$

Por comodidad el problema lo resolvemos en función de variables adimensionales. Teniendo en cuenta las ya definidas en (7.41) y estas nuevas

$$V(\rho, \eta, \xi) := \frac{T(r, z, t) k}{Q_0 \sqrt{\alpha \tau}} \quad \mu := \frac{2\sqrt{\alpha \tau}}{d} \quad (8.8)$$

el problema que queremos resolver es

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = 0 \quad (8.9)$$

para $(\rho, \eta, \xi) \in]0, \infty[\times]0, L_0[\times]0, \infty[$, verificando las condiciones iniciales y de contorno

$$V(\rho, \eta, 0) = \frac{\partial V}{\partial \xi}(\rho, \eta, 0) = 0 \text{ en }]0, \infty[\times]0, L_0[, \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta}(\rho, 0, \xi) = (2H(\xi) + \delta(\xi)) e^{-\rho^2 \mu^2} = 2H(\xi) e^{-\rho^2 \mu^2} \text{ en }]0, \infty[\times]0, \infty[, \quad (8.11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho}(0, \eta, \rho) = 0 \quad \text{en }]0, L_0[\times]0, \infty[, \quad (8.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta}(\rho, L_0, \xi) = 0 \quad \text{en }]0, \infty[\times]0, \infty[, \quad (8.13)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} V(\rho, \eta, \xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\partial V}{\partial \xi}(\rho, \eta, \xi) = 0 \quad \text{en }]0, \infty[\times]0, L_0[. \quad (8.14)$$

Este problema ya ha sido estudiado previamente en [26] por un método diferente. En nuestro caso el problema lo resolveremos aplicando la función de Green obtenida en el capítulo 6.

8.2. Aplicación de la función de Green

Aunque disponemos de la función de Green dada por (7.23) para el operador \mathcal{A} en la banda Ω_L , la distribución de temperatura no puede calcularse por aplicación directa del teorema 6.3 por dos motivos, el primero por no ser Ω_L acotado y el segundo y más decisivo, porque el teorema 6.3 se apoya *en la existencia previa de solución*, la cual a su vez depende de la elipticidad del operador \mathcal{A} , que como ya hemos comentado no existe en nuestro caso.

Hay que dar un rodeo. En primer lugar, la existencia de soluciones con simetría axial en la banda es equivalente (mediante cambio a coordenadas cilíndricas y posterior trabajo en variables adimensionales) a la existencia de soluciones para el problema (8.9)-(8.14). Por otra parte, tampoco se puede aplicar directamente al nuevo operador diferencial la teoría general desarrollada en capítulos anteriores porque el dominio espacial ni es acotado ni tiene frontera de clase \mathcal{C}^∞ .

Sin embargo, apoyándonos en los dominios $D_m \times \mathbb{R}$ del capítulo 7 y **razonando de forma análoga a la utilizada en (6.59)-(6.61), se demuestra que nuestro problema actual tiene solución única.** A partir de este dato y de la función de Green (7.61) **se pueden repetir los razonamientos efectuados en el teorema 6.3** (porque éstos no dependen de la geometría del dominio), llegándose en definitiva, aunque por un camino diferente al mismo resultado formal de dicho teorema 6.3.

Entonces, teniendo cuenta que, como es fácil de comprobar, $F_1 := H(\xi) e^{-\rho^2 \mu^2} \in J^{-(2r+\frac{1}{2})}(\partial\Omega \times]0, \infty[\times]0, \infty[)$ para cada r tal que $0 < 2r + 1 < \frac{3}{2}$ y las condiciones (8.10)-(8.14) obtendremos

$$\begin{aligned} V(\rho, \eta, \xi) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \rho_0 \Theta(\rho, \eta, \xi | \rho_0, 0, \xi_0) 2 H(\xi_0) e^{-\mu^2 \rho_0^2} d\rho_0 d\xi_0 = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty 2 \rho_0 \Theta(\rho, \eta, \xi | \rho_0, 0, \xi_0) e^{-\mu^2 \rho_0^2} d\rho_0 d\xi_0 \end{aligned}$$

e introduciendo el valor de la función de Green adimensional, $\Theta(\rho, \eta, \xi | \rho_0, \eta_0, \xi_0)$, obtenida en el capítulo 7

$$\begin{aligned} V(\rho, \eta, \xi) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{2}{L_0} \rho_0 e^{-\mu^2 \rho_0^2} H(\xi - \xi_0) e^{-(\xi - \xi_0)} \times \\ &\times \left[\int_0^1 k J_0(k\rho) J_0(k\rho_0) \frac{\text{Sh}((\xi - \xi_0)\sqrt{1 - k^2})}{\sqrt{1 - k^2}} dk + \right. \\ &+ \int_1^\infty k J_0(k\rho) J_0(k\rho_0) \frac{\text{sen}((\xi - \xi_0)\sqrt{k^2 - 1})}{\sqrt{k^2 - 1}} dk + \sum_{n=1}^\infty \cos \frac{n\pi\eta}{L_0} \times \\ &\times \left(H\left(\frac{n^2\pi^2}{L_0^2} - 1\right) \int_0^\infty 2 k J_0(k\rho) J_0(k\rho_0) \times \right. \\ &\times \frac{\text{sen}\left((\xi - \xi_0)\sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L_0^2} - 1}\right)}{\sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L_0^2} - 1}} dk + \\ &+ H\left(1 - \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}\right) \left(\int_0^{\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}}} 2 k J_0(k\rho) J_0(k\rho_0) \times \right. \\ &\times \frac{\text{Sh}\left((\xi - \xi_0)\sqrt{1 - k^2 - \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}}\right)}{\sqrt{1 - k^2 - \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}}} dk + \\ &\left. \left. + \int_{\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}}}^\infty 2 k J_0(k\rho) J_0(k\rho_0) \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\times \frac{\operatorname{sen}\left(\left(\xi - \xi_0\right) \sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} - 1}\right)}{\sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L_0^2} - 1}} dk \Bigg) \Bigg] d\rho_0 d\xi_0.$$

Simplificando la función de Heaviside y teniendo en cuenta la fórmula 4 sección 6.631 de [11] obtenemos el perfil de temperaturas adimensional

$$V(\rho, \eta, \xi) = \frac{1}{L_0 \mu^2} \left[\int_0^\xi e^{-(\xi - \xi_0)} F_5(\rho, \eta, \xi - \xi_0) d\xi_0 \right] \quad (8.15)$$

donde

$$\begin{aligned} F_5(\rho, \eta, \xi) = & \int_0^1 k J_0(k\rho) \frac{\operatorname{Sh}(\xi \sqrt{1 - k^2})}{\sqrt{1 - k^2}} e^{-\frac{k^2}{4\mu^2}} dk + \\ & + \int_1^\infty k J_0(k\rho) \frac{\operatorname{sen}(\xi \sqrt{k^2 - 1})}{\sqrt{k^2 - 1}} e^{-\frac{k^2}{4\mu^2}} dk + \\ & + \sum_{n=1}^\infty \cos \frac{n\pi\eta}{L_0} \left(H\left(\frac{n^2\pi^2}{L_0^2} - 1\right) \int_0^\infty 2k J_0(k\rho) e^{-\frac{k^2}{4\mu^2}} \times \right. \\ & \times \frac{\operatorname{sen}\left(\xi \sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L_0^2} - 1}\right)}{\sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L_0^2} - 1}} dk + H\left(1 - \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}\right) \times \\ & \times \left(\int_0^{\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}}} 2k J_0(k\rho) e^{-\frac{k^2}{4\mu^2}} \frac{\operatorname{Sh}\left(\xi \sqrt{1 - k^2 - \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}}\right)}{\sqrt{1 - k^2 - \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}}} dk + \right. \\ & \left. \left. + \int_{\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2}{L_0^2}}}^\infty 2k J_0(k\rho) e^{-\frac{k^2}{4\mu^2}} \frac{\operatorname{sen}\left(\xi \sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L_0^2} - 1}\right)}{\sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{L_0^2} - 1}} dk \right) \right). \quad (8.16) \end{aligned}$$

8.3. Representaciones gráficas

Para poder visualizar claramente cuál es el comportamiento del perfil de temperaturas obtenido hemos utilizado el software *Mathematica*

versión 5.0 mediante el cual hemos realizado representaciones gráficas de dicho perfil.

La primera cuestión que se nos plantea a la hora de obtener las gráficas de temperaturas es el valor de las variables que debemos tomar. Hay que tener en cuenta que las variables que aparecen en el perfil de temperaturas obtenido son adimensionales, de modo que hay que transformar los valores de las variables con dimensiones entre los que queremos representar la temperatura a valores adimensionales mediante las relaciones (7.41) y (8.8).

La banda está realizada con un material refractario cuyas propiedades térmicas son $\alpha = 8.1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ y $\tau = 2.9 \cdot 10^{-11} \text{ s}$ (ver [21]). Además suponemos $d = 2.45 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ (ver [1]) y $L = 3 \cdot 10^{-8} \text{ m}$, con lo que según estos valores $\mu = 0.0125$ y $L_0 = 1$. El número de términos utilizados en el sumatorio depende de los valores de ξ y η .

En primer lugar vamos a estudiar la distribución de la temperatura en función de ρ . La Figura 8.1 está realizada en la superficie $\eta = 0$ a diferentes tiempos $\xi = 0.3$ (azul), $\xi = 0.7$ (rojo) y $\xi = 1.4$ (verde), equivalentes a $t = 1.75 \cdot 10^{-11}$, $4 \cdot 10^{-11}$ y $8.12 \cdot 10^{-11} \text{ s}$, respectivamente, cuando ρ varía en el intervalo $[0, 120]$ (equivalente a $r \in [0, 3.7 \cdot 10^{-6}]$).

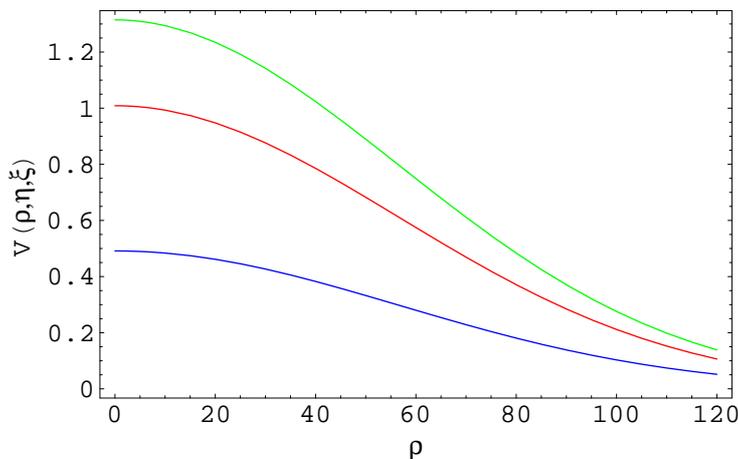


Figura 8.1: Distribución de la temperatura hiperbólica en función de ρ para $\eta = 0$ a diferentes tiempos.

Como puede observarse en la figura 8.1 la distribución de temperaturas sigue un perfil Gaussiano ya que la máxima temperatura se

encuentra en el centro $\rho = 0$ y gradualmente va decreciendo a medida que se aleja del mismo. Por otro lado también podemos apreciar que cuanto mayor es el tiempo, mayor es la temperatura que se alcanza en cada punto, de manera que en $\xi = 0.3$ se aprecia para cada valor de ρ una temperatura menor que para los otros tiempos.

En segundo lugar vamos a estudiar la distribución de la temperatura en función de ξ . La Figura 8.2 muestra la variación de la temperatura en el centro de la banda $\rho = 0$ en tres puntos diferentes a lo largo del eje η como son $\eta = 0$ (azul), $\eta = 0.5$ (rojo) y $\eta = 1$ (verde), equivalentes a $z = 0$, $1.53 \cdot 10^{-8}$ y $3 \cdot 10^{-8}$ m, respectivamente, cuando ξ varía en el intervalo temporal $[0, 4]$ (equivalente a $t \in [0, 2.32 \cdot 10^{-10}]$).

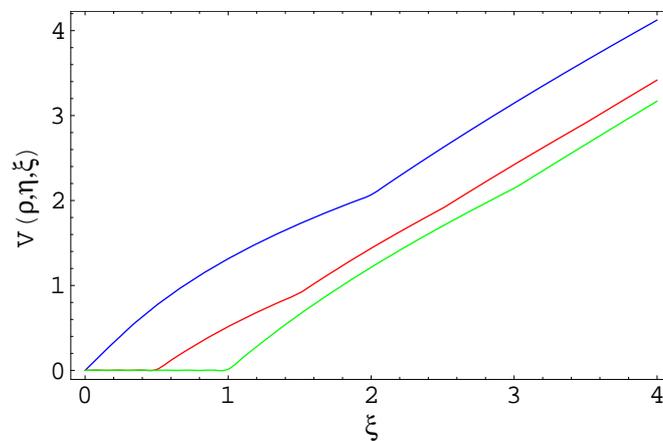


Figura 8.2: Distribución de la temperatura hiperbólica en función de ξ para $\rho = 0$ en diferentes puntos a lo largo del eje η .

En la figura 8.2 se pueden observar dos fenómenos. Para $\eta = 0.5$ y $\eta = 1$ existe un intervalo temporal en el que la temperatura es cero porque no ha llegado calor, además en el caso de $\eta = 1$ es necesario más tiempo para que en este punto se alcance una temperatura superior a cero. Esto es debido a que el modelo hiperbólico de transmisión del calor predice una velocidad finita de transmisión del calor, según este modelo es necesario que transcurra cierto tiempo para que el calor llegue a cada punto del cuerpo, de modo que cuanto más alejado se encuentre el punto del lugar donde se aplica la fuente de calor, más tiempo es necesario para que llegue al mismo la perturbación provocada por el aumento de temperaturas. Por otro lado, también se puede observar para $\eta = 0$ que

la temperatura en la superficie va aumentando gradualmente hasta que aproximadamente en $\xi = 2$ se observa una discontinuidad. Este fenómeno es debido a la superposición de la onda térmica que viaja hacia la superficie aislada y que es reflejada. En $\eta = 0.5$ también se observa este fenómeno pero con menor intensidad y en $\eta = 1$ prácticamente no se observa.

Finalmente vamos a estudiar la distribución de la temperatura en función de η . La figura 8.3 muestra la evolución de la temperatura en el centro de la banda $\rho = 0$ para dos tiempos diferentes $\xi = 0.4$ (azul) y $\xi = 0.6$ (rojo), equivalentes a $t = 2.32 \cdot 10^{-11}$ y $3.48 \cdot 10^{-11}$ s, respectivamente, cuando η varía en el intervalo temporal $[0, 1]$ (equivalente a $z \in [0, 3 \cdot 10^{-8}]$).

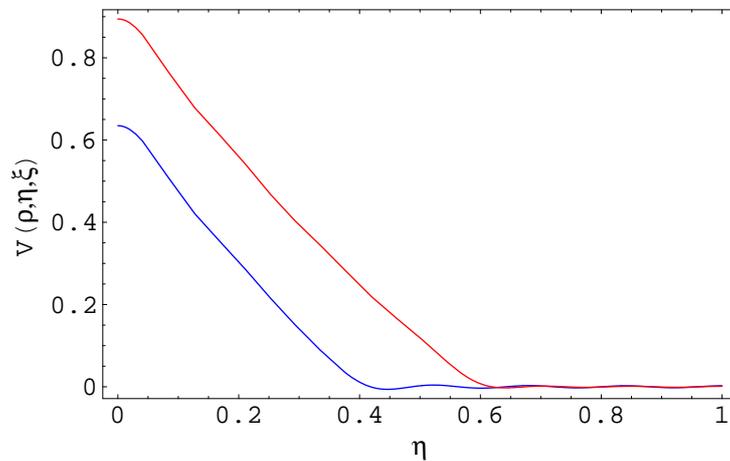


Figura 8.3: Distribución de la temperatura hiperbólica en función de η para $\rho = 0$ en diferentes tiempos.

En la figura 8.3 se puede observar nuevamente que el modelo hiperbólico predice una velocidad finita de transmisión del calor ya que en cada una de las curvas realizadas existen dos zonas una en la que no ha llegado el calor y su temperatura es cero y otra a la que ha llegado ya la perturbación provocada por el aumento de temperaturas. Como puede observarse las zonas donde la temperatura es cero corresponden a las más alejadas del lugar donde se aplica la fuente de calor y en el caso de $\xi = 0.6$, como el tiempo es mayor, se puede ver como ha aumentado la temperatura de puntos que en la curva correspondiente a $\xi = 0.4$

tenían temperatura cero.

8.4. Comparación con el modelo parabólico

Para concluir este capítulo vamos a realizar una comparación entre la solución del problema obtenida desde el punto de vista del modelo hiperbólico de transmisión del calor y la solución que se obtiene si el problema se resuelve siguiendo el modelo parabólico.

El perfil de temperaturas que se obtiene cuando se resuelve el problema desde el punto de vista del modelo parabólico se puede encontrar por ejemplo en [13] y es

$$V(\rho, \eta, \xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\xi} (R(\rho, f_1(\eta, m), \xi') + R(\rho, f_2(\eta, m), \xi')) \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{\xi'(1 + 2\mu^2\xi')}} d\xi'$$

siendo

$$R(\rho, f_i(\eta, m), \xi) = e^{-\left(\frac{f_i^2(\eta, m)}{2\xi} + \frac{\mu^2\rho^2}{1+2\mu^2\xi}\right)}$$

y

$$f_1(\eta, m) = 2mL_0 + \eta \quad f_2(\eta, m) = 2L_0(m+1) - \eta.$$

De manera análoga a como hemos hecho con la solución hiperbólica vamos a realizar representaciones gráficas con el perfil parabólico de temperaturas.

La figura 8.4 obtenida a partir de la solución parabólica es análoga a la figura 8.1. Como puede observarse en esta figura realizada con el perfil parabólico la distribución de temperaturas también sigue un perfil Gaussiano alcanzando la mayor temperatura para cada tiempo en el centro de la banda ($\rho = 0$). Las mayores diferencias entre ambos modelos se encuentran en los tiempos más pequeños $\xi = 0.3$ y $\xi = 0.7$ y en el centro de la banda. En estos tiempos las temperaturas predichas por el modelo parabólicos son inferiores a las estimadas por el hiperbólico, es decir son inferiores a las temperaturas que se producen en la práctica, por tanto este hecho pone de manifiesto los errores que

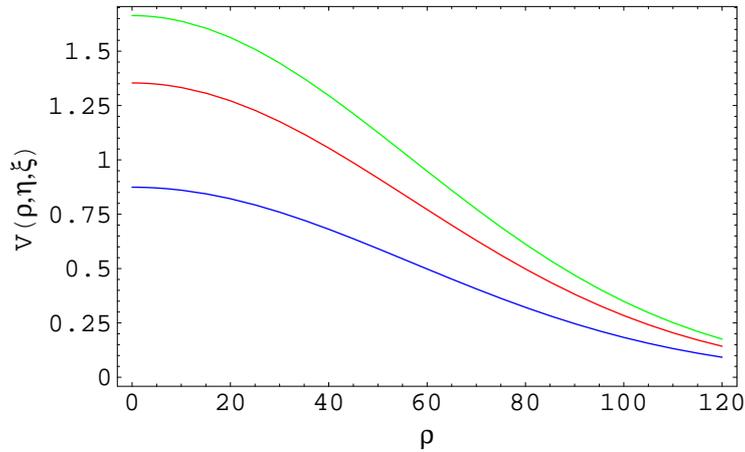


Figura 8.4: Distribución de la temperatura parabólica en función de ρ para $\eta = 0$ en diferentes tiempos.

se producen con el modelo parabólico. Para $\xi = 1.4$ el comportamiento de los dos modelos es idéntico y por tanto la naturaleza ondulatoria del modelo hiperbólico no es significativa.

La figura 8.5 que hemos realizado es análoga a la figura 8.2 del apartado anterior.

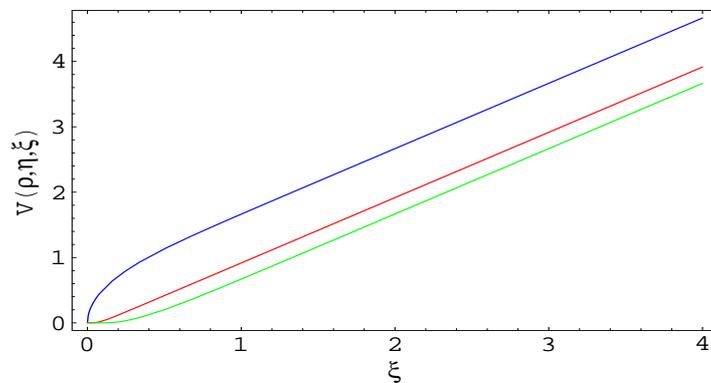


Figura 8.5: Distribución de la temperatura parabólica en función de ξ para $\rho = 0$ en diferentes puntos a lo largo del eje η .

Entre las figuras 8.5 y 8.2 se pueden observar grandes diferencias ya que en la figura 8.5 no existen zonas en las que la temperatura sea cero

incluso para tiempos muy pequeños o puntos alejados. Este fenómeno se produce porque el modelo parabólico predice una velocidad infinita de transmisión del calor, de manera que desde el instante en el que se aplica el láser se supone que está llegando calor a todos los puntos de la banda.

La figura 8.6 realizada con el perfil parabólico es análoga a la figura 8.3 del apartado anterior. Entre estas dos figuras también pueden observarse grandes diferencias. De la misma forma que en la figura 8.5 la ausencia de una zona donde no ha llegado la perturbación provocada por el aumento de temperaturas delata que el modelo parabólico predice una velocidad infinita de transmisión del calor.

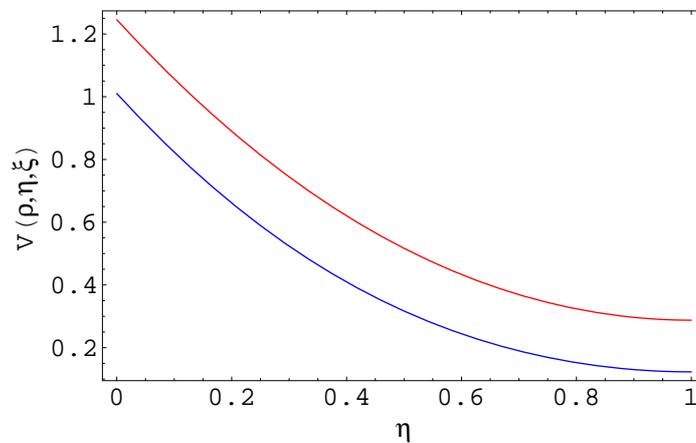


Figura 8.6: Distribución de la temperatura parabólica en función de η para $\rho = 0$ en diferentes tiempos.

En las figuras 8.4, 8.5 y 8.6 puede observarse que las diferencias entre ambos modelos disminuyen a medida que aumenta el tiempo, o lo que es lo mismo los errores del modelo parabólico se producen a tiempos muy cortos. En procesos en los que estos tiempos pequeños no sean importantes el modelo parabólico no conlleva a errores y se ajusta perfectamente a la experiencia. Sin embargo, en procesos en los que se aplican grandes cantidades de calor en pequeños intervalos de tiempo es muy importante lo que ocurre a tiempos cortos y por tanto el modelo parabólico conduce a graves errores por lo que se hace necesario el uso del modelo hiperbólico.

Finalmente, las figuras tridimensionales 8.7 y 8.8 correspondientes a los modelos hiperbólico y parabólico, respectivamente, muestran una clara visión del aspecto más destacado de cada uno de los modelos. Las dos figuras están realizadas para los mismos valores de las variables. En la figura 8.7 que corresponde al modelo hiperbólico podemos observar claramente las dos zonas a las que hemos hecho referencia: una zona que se encuentra a la temperatura inicial donde el calor no ha llegado todavía y otra zona en la que sí que ha llegado el calor y la temperatura ha aumentado. En la figura 8.8 sin embargo la temperatura en todos los puntos es siempre superior a la inicial porque se supone que el calor se transmite con velocidad infinita.

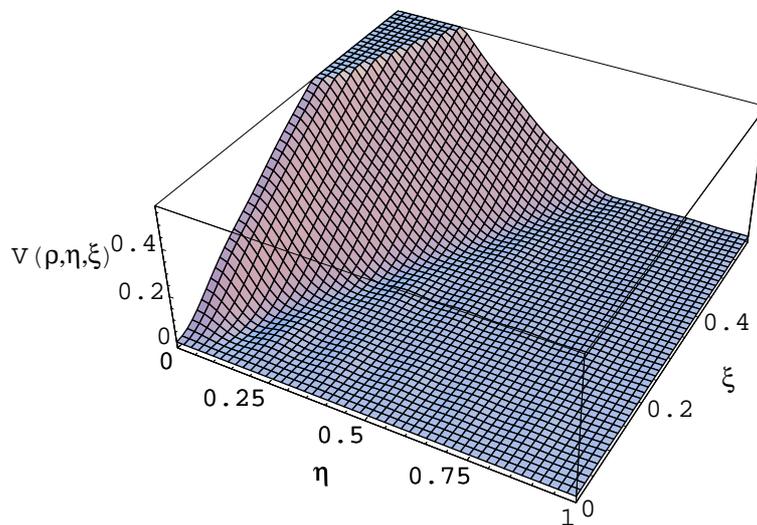


Figura 8.7: Distribución de la temperatura hiperbólica en función de ξ y η para $\rho = 0$.

Con esto concluiría el estudio que hasta ahora hemos realizado dentro del ambicioso proyecto del desarrollo de un riguroso tratamiento matemático que nos permita establecer los fundamentos teóricos para el cálculo de temperaturas, desde el punto de vista del modelo hiperbó-

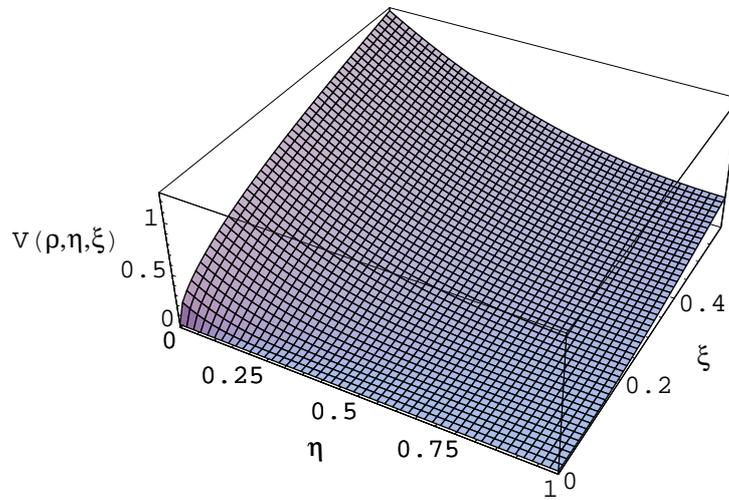


Figura 8.8: Distribución de la temperatura parabólica en función de ξ y η para $\rho = 0$.

lico de transmisión del calor, aún cuando las fuentes internas de calor o las condiciones iniciales y de contorno estén dadas por distribuciones irregulares.

A continuación, tal y como comentamos en la introducción, pasamos a mostrar el planteamiento, desarrollo y resultados, bajo el punto de vista del modelo hiperbólico, del estudio de la respuesta térmica producida cuando se ponen súbitamente en contacto dos cuerpos que inicialmente se encuentran a diferentes temperaturas.

Capítulo 9

Perfil hiperbólico de temperatura de dos cuerpos en contacto perfecto

El objetivo de este estudio es encontrar la solución analítica completa, desde el punto de vista del modelo hiperbólico de transmisión del calor, para el problema de transmisión del calor entre dos cuerpos semiinfinitos que inicialmente se encuentran a temperaturas diferentes pero uniformes T_0^1 y T_0^2 , respectivamente, y que en el instante $t = 0$ se ponen súbitamente en contacto.

En este capítulo vamos a resolver el problema suponiendo que el **contacto entre los dos cuerpos es perfecto**, lo que también llamaremos contacto directo. En principio se puede pensar que este tipo de contacto se aleja mucho de la realidad por la dificultad de lograr poner los dos cuerpos en contacto perfecto. Sin embargo, su solución analítica se emplea en numerosas ocasiones para medir las propiedades termofísicas de los materiales o en aquellos casos en los que la resistencia térmica es prácticamente despreciable.

En el capítulo 10 resolveremos este mismo problema pero suponiendo que entre los cuerpos existe cierta resistencia al contacto.

Los resultados de este estudio tienen gran aplicación práctica en el campo de la ingeniería nuclear, ya que escogiendo los materiales ade-

cuados se pueden estudiar las circunstancias de un hipotético accidente en reactores nucleares (ver [40]). De manera que el interés que nos ha llevado a realizar este estudio está basado en que a pesar de que el problema que se va a resolver tiene gran aplicación práctica, no hemos encontrado ningún trabajo que muestre su solución analítica completa desde el punto de vista del modelo hiperbólico de transmisión del calor. Por ejemplo, este problema ha sido considerado con algunas variantes bajo el punto de vista del modelo clásico en [42] y resuelto bajo el punto de vista del modelo hiperbólico para determinados tiempos y sólo en el caso de contacto directo en [14].

9.1. Planteamiento y solución del problema

Consideremos dos cuerpos isotrópos semiinfinitos con propiedades físicas diferentes pero constantes ρ_i , c_i , k_i y τ_i , donde el subíndice i hace referencia a cada uno de los cuerpos. Inicialmente los cuerpos se encuentran a temperaturas uniformes pero diferentes T_0^1 y T_0^2 , respectivamente, y en el instante inicial $t = 0$ los cuerpos se ponen súbitamente en contacto perfecto. Las ecuaciones de gobierno para cada uno de los dos cuerpos son

$$\alpha_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} = \tau_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2} + \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2), \quad (9.1)$$

y las condiciones iniciales y de contorno son

$$\forall x < 0 \quad T_1(x, 0) = T_0^1, \quad (9.2)$$

$$\forall x > 0 \quad T_2(x, 0) = T_0^2, \quad (9.3)$$

$$\forall x < 0 \quad \frac{\partial T_1}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad (9.4)$$

$$\forall x > 0 \quad \frac{\partial T_2}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad (9.5)$$

$$\forall t > 0 \quad T_1(0, t) = T_2(0, t), \quad (9.6)$$

$$\forall t > 0 \quad q_1(0, t) = q_2(0, t), \quad (9.7)$$

$$\forall t > 0 \quad T_1(-\infty, t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} T_1(x, t) = T_0^1, \quad (9.8)$$

$$\forall t > 0 \quad T_2(\infty, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} T_2(x, t) = T_0^2. \quad (9.9)$$

La resolución del problema está basada en el uso de las transformadas de Laplace. Según las condiciones (9.2)-(9.5), la transformada de Laplace de la ecuación (9.1) es

$$\alpha_i \frac{\partial^2 \widehat{T}_i}{\partial x^2}(x, s) - (\tau_i s^2 + s) \widehat{T}_i(x, s) = -(1 + \tau_i s) T_0^i,$$

la cual es una ecuación diferencial de segundo orden con respecto a la variable espacial x con solución

$$\widehat{T}_i(x, s) = A_i e^{\beta_i x} + B_i e^{-\beta_i x} + \frac{T_0^i}{s}, \quad \text{donde } \beta_i = \sqrt{\frac{s + \tau_i s^2}{\alpha_i}}. \quad (9.10)$$

Por la condición (9.8):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \widehat{T}_1(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} \lim_{x \rightarrow -\infty} T_1(x, t) dt = \int_0^\infty e^{-st} T_0^1 dt = \frac{T_0^1}{s}$$

y de (9.10)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \widehat{T}_1(x, s) = \lim_{x \rightarrow -\infty} A_1 e^{\beta_1 x} + B_1 e^{-\beta_1 x} + \frac{T_0^1}{s} = \frac{T_0^1}{s}.$$

Como $\beta_i > 0$ entonces $B_1 = 0$. Análogamente, utilizando la condición (9.9) obtenemos $A_2 = 0$.

Para utilizar la condición (9.7), tenemos que expresar el flujo en función de la temperatura. Es conocido (ver por ejemplo [27]) que

$$q_i(0, t) = \frac{-k_i}{\tau_i} e^{\frac{-t}{\tau_i}} \int_0^t e^{\frac{\eta}{\tau_i}} \frac{\partial T_i}{\partial x}(0, \eta) d\eta \quad (9.11)$$

y tomando transformada de Laplace

$$\mathcal{L} \left[e^{\frac{-t}{\tau_i}} \int_0^t e^{\frac{\eta}{\tau_i}} \frac{\partial T_i}{\partial x}(0, \eta) d\eta \right] = \frac{\tau_i}{\tau_i s + 1} \frac{\partial \widehat{T}_i}{\partial x}(0, s).$$

Ahora por la condición (9.7)

$$\frac{-k_1}{\tau_1} \frac{\tau_1}{(\tau_1 s + 1)} \frac{\partial \widehat{T}_1}{\partial x}(0, s) = \frac{-k_2}{\tau_2} \frac{\tau_2}{(\tau_2 s + 1)} \frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial x}(0, s).$$

Calculando $\frac{\partial \widehat{T}_1}{\partial x}(0, s)$ y $\frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial x}(0, s)$ a partir de la ecuación (9.10) obtenemos

$$\frac{-k_1}{\sqrt{\alpha_1}} A_1 \frac{1}{\sqrt{\tau_1 s + 1}} = \frac{k_2}{\sqrt{\alpha_2}} B_2 \frac{1}{\sqrt{\tau_2 s + 1}}. \quad (9.12)$$

Finalmente, tomando transformada de Laplace en la condición (9.6)

$$\widehat{T}_1(0, s) = \widehat{T}_2(0, s) \quad (9.13)$$

llegamos a

$$\widehat{T}_1(x, s) = \frac{(T_0^1 - T_0^2)}{s \left(\frac{-k_1 \sqrt{\alpha_2} \sqrt{\tau_2 s + 1}}{k_2 \sqrt{\alpha_1} \sqrt{\tau_1 s + 1}} - 1 \right)} e^{\sqrt{\frac{s + \tau_1 s^2}{\alpha_1}} x} + \frac{T_0^1}{s}, \quad (9.14)$$

$$\widehat{T}_2(x, s) = \frac{T_0^2}{s} + (T_0^1 - T_0^2) \frac{\sqrt{\tau_2 s + 1}}{s \left(\sqrt{\tau_2 s + 1} + \frac{k_2 \sqrt{\alpha_1}}{k_1 \sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\tau_1 s + 1} \right)} e^{-x \sqrt{\frac{s + \tau_2 s^2}{\alpha_2}}}. \quad (9.15)$$

El duro trabajo que se nos plantea ahora es el de encontrar las transformadas inversas de estas dos expresiones. Comenzaremos primero con la inversa de $\widehat{T}_2(x, s)$. Expresamos

$$\widehat{T}_2(x, s) = \frac{T_0^2}{s} + (T_0^1 - T_0^2) g(s)$$

y tomamos

$$g_1(s) := \frac{\sqrt{\tau_2 s + 1}}{s(\sqrt{\tau_2 s + 1} + \frac{k_2 \sqrt{\alpha_1}}{k_1 \sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\tau_1 s + 1})}$$

y

$$g_2(s) := e^{-x \sqrt{\frac{s + \tau_2 s^2}{\alpha_2}}},$$

entonces, por el teorema de convolución

$$\mathcal{L}^{-1}[g(s)] = \int_0^t G_1(t-u) G_2(u) du,$$

donde $G_1(u)$ y $G_2(u)$ son las inversas de Laplace de $g_1(s)$ y $g_2(s)$, respectivamente. Empezaremos primero por buscar $\mathcal{L}^{-1}[g_2(s)]$. Por una bien conocida propiedad de las inversas de Laplace (ver por ejemplo página 507 en [16])

$$\mathcal{L}^{-1}[g_2(s)] = \frac{d}{dt} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{g_2(s)}{s} \right]. \quad (9.16)$$

La inversa de $\frac{g_2(s)}{s}$ ha sido calculada en [2]

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{g_2(s)}{s} \right] (t) = \\ & = H \left(t - \frac{x}{v_2} \right) \left(e^{-\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 \tau_2}}} + \frac{x v_2}{4\alpha_2 \tau_2} \int_{\frac{x}{v_2}}^t e^{-\frac{u}{2\tau_2}} \frac{I_1 \left(\sqrt{\left(\frac{u}{2\tau_2}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2 \tau_2}} \right)}{\sqrt{\left(\frac{u}{2\tau_2}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2 \tau_2}}} du \right), \end{aligned}$$

donde $H(u)$ es la función de Heaviside y

$$v_i := \sqrt{\frac{\alpha_i}{\tau_i}}, \quad i = 1, 2$$

es la velocidad de transmisión del calor en cada cuerpo. De este modo por (9.16)

$$G_2(t) := \frac{d}{dt} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{g_2(s)}{s} \right] (t) \right) =$$

$$= \delta \left(t - \frac{x}{v_2} \right) \left(e^{-\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2\tau_2}}} + \frac{v_2 x}{4\alpha_2\tau_2} \int_{\frac{x}{v_2}}^t e^{\frac{-u}{2\tau_2}} \frac{I_1 \left(\sqrt{\left(\frac{u}{2\tau_2}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2\tau_2}} \right)}{\sqrt{\left(\frac{u}{2\tau_2}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2\tau_2}}} du \right) +$$

$$+ H \left(t - \frac{x}{v_2} \right) \frac{v_2 x}{4\alpha_2\tau_2} e^{\frac{-t}{2\tau_2}} \frac{I_1 \left(\sqrt{\left(\frac{t}{2\tau_2}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2\tau_2}} \right)}{\sqrt{\left(\frac{t}{2\tau_2}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2\tau_2}}},$$

donde $\delta(u)$ es la distribución δ de Dirac.

Para obtener $\mathcal{L}^{-1}[g_1(s)]$ utilizamos la fórmula de Bromwich. Para tener una integral convergente necesaria para poder utilizar esta fórmula consideramos

$$\frac{g_1(s)}{s} = \frac{\sqrt{\tau_2 s + 1}}{s^2 \left(\sqrt{\tau_2 s + 1} + \frac{k_2 \sqrt{\alpha_1}}{k_1 \sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\tau_1 s + 1} \right)}.$$

Entonces, nuevamente utilizamos (9.16) reemplazando $g_2(s)$ por $g_1(s)$. Por la fórmula de Bromwich

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{g_1(s)}{s} \right] (t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \frac{\sqrt{\tau_2 s + 1}}{s^2 \left(\sqrt{\tau_2 s + 1} + \frac{k_2 \sqrt{\alpha_1}}{k_1 \sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\tau_1 s + 1} \right)} ds \quad (9.17)$$

donde tomamos cualquier $\gamma > 0$. A partir de ahora supondremos siempre que $\tau_1 \leq \tau_2$. Teniendo en cuenta que $s = \frac{-1}{\tau_1}$ y $s = \frac{-1}{\tau_2}$ son puntos de ramificación utilizamos el contorno de la figura 9.1.

Señalar que hay sólo un polo (doble) en $s = 0$ dentro del contorno. Si $\tau_1 \neq \tau_2$ no hay más polos. Por otra parte si $\tau_1 = \tau_2$ quedaría

$$\frac{g_1(s)}{s} = \frac{1}{s^2 \left(1 + \frac{k_2 \sqrt{\alpha_1}}{k_1 \sqrt{\alpha_2}} \right)}$$

con lo que nuevamente tenemos el polo $s = 0$.

Para simplificar, definimos

$$B = \frac{k_2 \sqrt{\alpha_1 \tau_1}}{k_1 \sqrt{\alpha_2 \tau_2}}. \quad (9.18)$$

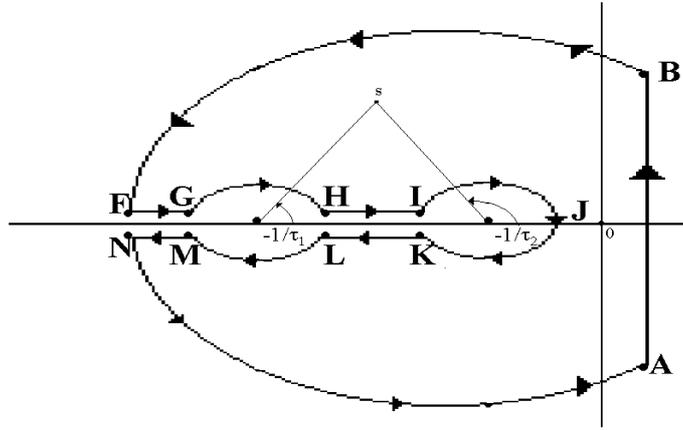


Figura 9.1: Contorno de Bromwich necesario para calcular $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{g_1(s)}{s} \right]$.

Entonces el residuo en $s = 0$ es

$$\begin{aligned}
 R(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(s^2 e^{st} \frac{\sqrt{\tau_2 s + 1}}{s^2 (\sqrt{\tau_2 s + 1} + \frac{k_2 \sqrt{\alpha_1}}{k_1 \sqrt{\alpha_2}} \sqrt{\tau_1 s + 1})} \right) = \\
 &= \frac{t}{1 + B \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}} + \frac{B \left(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}} - \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}} \right)}{2 \left(\sqrt{\frac{1}{\tau_1}} + B \sqrt{\frac{1}{\tau_2}} \right)^2}. \quad (9.19)
 \end{aligned}$$

De modo que por (9.17)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{g_1(s)}{s} \right] &= \frac{t}{1 + B \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}} + \frac{B \left(\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}} - \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}} \right)}{2 \left(\sqrt{\frac{1}{\tau_1}} + B \sqrt{\frac{1}{\tau_2}} \right)^2} - \\
 &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{\tau_1}}^{-\frac{1}{\tau_2}} \frac{e^{yt}}{y^2} \frac{B \sqrt{-y - \frac{1}{\tau_2}} \sqrt{y + \frac{1}{\tau_1}}}{B^2 y + \frac{B^2}{\tau_1} - y - \frac{1}{\tau_2}} dy.
 \end{aligned}$$

Según (9.16), $\mathcal{L}^{-1}[g_1(s)]$ se obtiene por diferenciación

$$G_1(t) = \frac{1}{1 + B \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}} - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{\tau_1}}^{-\frac{1}{\tau_2}} \frac{e^{yt}}{y} \frac{B \sqrt{-y - \frac{1}{\tau_2}} \sqrt{y + \frac{1}{\tau_1}}}{B^2 y + \frac{B^2}{\tau_1} - y - \frac{1}{\tau_2}} dy.$$

Finalmente $\mathcal{L}^{-1}[g(s)]$ se obtiene por el teorema de convolución y así, tras realizar algunas simplificaciones, obtenemos el perfil de temperaturas del cuerpo 2

$$\begin{aligned}
 \forall x \geq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad T_2(x, t) = T_0^2 + (T_0^1 - T_0^2) & \left[H \left(t - \frac{x}{v_2} \right) e^{-\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2\tau_2}}} \times \right. \\
 & \times \left(\frac{1}{1 + B\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}} - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{\tau_1}}^{-\frac{1}{\tau_2}} \frac{e^{y(t-\frac{x}{v_2})}}{y} \frac{B\sqrt{-y-\frac{1}{\tau_2}}\sqrt{y+\frac{1}{\tau_1}}}{B^2y + \frac{B^2}{\tau_1} - y - \frac{1}{\tau_2}} dy \right) + \\
 & + H \left(t - \frac{x}{v_2} \right) \int_{\frac{x}{v_2}}^t \frac{x v_2}{4\alpha_2\tau_2} e^{\frac{-q}{2\tau_2}} \frac{I_1 \left(\sqrt{\left(\frac{q}{2\tau_2}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2\tau_2}} \right)}{\sqrt{\left(\frac{q}{2\tau_2}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2\tau_2}}} \times \\
 & \times \left(\frac{1}{1 + B\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}} - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{\tau_1}}^{-\frac{1}{\tau_2}} \frac{e^{y(t-q)}}{y} \frac{B\sqrt{-y-\frac{1}{\tau_2}}\sqrt{y+\frac{1}{\tau_1}}}{B^2y + \frac{B^2}{\tau_1} - y - \frac{1}{\tau_2}} dy \right) dq \left. \right]. \tag{9.20}
 \end{aligned}$$

Un análisis similar se aplica al cuerpo 1 para obtener el perfil de temperaturas. Finalmente llegamos a

$$\begin{aligned}
 \forall x \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad T_1(x, t) = T_0^1 + (T_0^2 - T_0^1) & \left[H \left(t + \frac{x}{v_1} \right) e^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1\tau_1}}} \times \right. \\
 & \times \left(\frac{B}{B + \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{\tau_1}}^{-\frac{1}{\tau_2}} \frac{e^{y(t+\frac{x}{v_1})}}{y} \frac{B\sqrt{-y-\frac{1}{\tau_2}}\sqrt{y+\frac{1}{\tau_1}}}{B^2y + \frac{B^2}{\tau_1} - y - \frac{1}{\tau_2}} dy \right) + \\
 & - H \left(t + \frac{x}{v_1} \right) \int_{\frac{-x}{v_1}}^t \frac{x v_1}{4\alpha_1\tau_1} e^{\frac{-q}{2\tau_1}} \frac{I_1 \left(\sqrt{\left(\frac{q}{2\tau_1}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_1\tau_1}} \right)}{\sqrt{\left(\frac{q}{2\tau_1}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_1\tau_1}}} \times \\
 & \times \left(\frac{B}{B + \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{\tau_1}}^{-\frac{1}{\tau_2}} \frac{e^{y(t-q)}}{y} \frac{B\sqrt{-y-\frac{1}{\tau_2}}\sqrt{y+\frac{1}{\tau_1}}}{B^2y + \frac{B^2}{\tau_1} - y - \frac{1}{\tau_2}} dy \right) dq \left. \right]. \tag{9.21}
 \end{aligned}$$

lo que resuelve completamente nuestro problema. Las integrales que se encuentran en las ecuaciones (9.20) y (9.21) no se pueden expresar en

términos de funciones tabuladas y por ello deben evaluarse numéricamente.

9.2. Solución del problema suponiendo $\tau_1 =$

τ_2

El problema se ha resuelto suponiendo que los tiempos de relajación de ambos cuerpos son diferentes ($\tau_1 \neq \tau_2$). Sin embargo pensamos que también podía resolverse suponiendo igualdad de tiempos de relajación. De este modo, por un lado, se puede estudiar cómo influye el valor de τ_i en los perfiles de temperaturas y por otro lado, si las diferencias entre ambos casos no son significativas, se puede trabajar con expresiones más sencillas, ya que considerar $\tau_1 = \tau_2$ supone una gran simplificación de los cálculos y de las expresiones finales de los perfiles de temperaturas.

Bajo la suposición de igualdad de tiempos de relajación los perfiles de temperatura de los cuerpos según (9.21) y (9.20), respectivamente, son

$$\forall x \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad T_1(x, t) = T_0^1 + \frac{(T_0^2 - T_0^1) k_2 \sqrt{\alpha_1}}{k_1 \sqrt{\alpha_2} + k_2 \sqrt{\alpha_1}} H \left(t + \frac{x}{v_1} \right) \times$$

$$\times \left[e^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 \tau}}} - \int_{-\frac{x}{v_1}}^t \frac{x v_1}{4\alpha_1 \tau} e^{\frac{-q}{2\tau}} \frac{I_1 \left(\sqrt{\left(\frac{q}{2\tau}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_1 \tau}} \right)}{\sqrt{\left(\frac{q}{2\tau}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_1 \tau}}} \right] \quad (9.22)$$

y

$$\forall x \geq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad T_2(x, t) = T_0^2 + \frac{(T_0^1 - T_0^2) k_1 \sqrt{\alpha_2}}{k_1 \sqrt{\alpha_2} + k_2 \sqrt{\alpha_1}} H \left(t - \frac{x}{v_2} \right) \times$$

$$\times \left[e^{-\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 \tau}}} + \int_{\frac{x}{v_2}}^t \frac{x v_2}{4\alpha_2 \tau} e^{\frac{-q}{2\tau}} \frac{I_1 \left(\sqrt{\left(\frac{q}{2\tau}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2 \tau}} \right)}{\sqrt{\left(\frac{q}{2\tau}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2 \tau}}} \right]. \quad (9.23)$$

De nuevo las integrales que encontramos en las ecuaciones (9.22) y (9.23) tienen que ser evaluadas numéricamente.

9.3. Discusión de la solución

Para poder obtener valores numéricos de temperaturas y gráficas que muestren su evolución temporal y espacial hemos utilizado el software *Mathematica* versión 5.0.

Los perfiles obtenidos (9.20), (9.21), (9.22) y (9.23) tienen que ser aplicados a materiales concretos para poder obtener representaciones y valores numéricos. Elegimos en este caso concreto dióxido de uranio UO_2 para el cuerpo 1 y sodio líquido Na para el cuerpo 2. La razón de la elección de estos dos materiales es porque son un buen modelo para estudiar las circunstancias de un hipotético accidente en reactores nucleares (ver [40]). Los valores de los parámetros físicos para el UO_2 y el Na han sido obtenidos también de este trabajo:

Parámetro	UO_2	Na
$\alpha_i \left(\frac{m^2}{s}\right)$	$4.89 \cdot 10^{-7}$	$3.55 \cdot 10^{-5}$
$k_i \left(\frac{cal}{m^{\circ}C}\right)$	0.5	9.15
$T_0^i \left(^{\circ}C\right)$	3000	800
$\tau_i \left(s\right)$	$1.69 \cdot 10^{-13}$	$6.72 \cdot 10^{-12}$

A través de las representaciones gráficas y los valores numéricos vamos a estudiar las principales características de los perfiles obtenidos en los diferentes casos.

Uno de los puntos donde es más interesante observar el comportamiento de la temperatura es en la interfase. Para estudiar la temperatura en $x = 0$ podemos hacerlo con el perfil de temperaturas del cuerpo 1 o del cuerpo 2 indistintamente ya que la condición que se establece en este punto (condición (9.6)) indica igualdad de temperaturas en la interfase para ambos cuerpos. De este modo vamos a utilizar por ejemplo el perfil de temperaturas del cuerpo 2, teniendo en cuenta que obtendríamos los mismos resultados si utilizásemos el del cuerpo 1. Sustituyendo $x = 0$ en (9.20) obtenemos el valor exacto de la temperatura en la interfase en el caso general:

$$\forall t > 0 \quad T(t) = T_0^2 + (T_0^1 - T_0^2) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{1 + B \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}}} - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{\tau_1}}^{-\frac{1}{\tau_2}} \frac{e^{y t}}{y} \frac{B \sqrt{-y - \frac{1}{\tau_2}} \sqrt{y + \frac{1}{\tau_1}}}{B^2 y + \frac{B^2}{\tau_1} - y - \frac{1}{\tau_2}} dy \right). \quad (9.24)$$

Por los teoremas inicial y final de las transformadas de Laplace y (9.15) obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}^{-1}[T_2(0, t)](s) = T_0^2 + \frac{(T_0^1 - T_0^2) k_1 \sqrt{\alpha_2} \tau_2}{k_1 \sqrt{\alpha_2} \tau_2 + k_2 \sqrt{\alpha_1} \tau_1} \quad (9.25)$$

para la temperatura inicial en la interfase y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}^{-1}[T_2(0, t)](s) = T_0^2 + \frac{(T_0^1 - T_0^2) k_1 \sqrt{\alpha_2}}{k_1 \sqrt{\alpha_2} + k_2 \sqrt{\alpha_1}} \quad (9.26)$$

para la temperatura límite o final en la interfase. Como puede observarse la temperatura final es independiente de los parámetros de relajación τ_1 y τ_2 . Podemos admitir según (9.24), (9.25) y (9.26) que la temperatura en la interfase no es constante. En nuestro ejemplo hemos calculado con *Mathematica* el valor de la temperatura inicial y final de la temperatura en la interfase a partir de las expresiones (9.25) y (9.26) obteniendo $2441^\circ C$ para la inicial y $1498^\circ C$ para la final.

Para obtener la temperatura en la interfase en el caso concreto en el que los parámetros de relajación son iguales hacemos $x = 0$ en (9.23) obteniendo

$$T(t) = T_0^2 + (T_0^1 - T_0^2) \frac{k_1 \sqrt{\alpha_2}}{k_1 \sqrt{\alpha_2} + k_2 \sqrt{\alpha_1}}. \quad (9.27)$$

Podemos ver que en el caso $\tau_1 = \tau_2$ la temperatura de la interfase es siempre constante desde el instante en el que comienza el proceso de transmisión del calor. En nuestro ejemplo el valor de la temperatura en la interfase es siempre $1498^\circ C$. La figura 9.2 compara la temperatura en la interfase en los casos $\tau_1 = \tau_2$ y $\tau_1 \neq \tau_2$. En ella se puede observar una línea que marca el valor de la temperatura constante correspondiente al caso $\tau_1 = \tau_2$ y otra línea que marca una temperatura variable correspondiente al caso $\tau_1 \neq \tau_2$.

Por otro lado, tal y como se ha indicado al comienzo de este capítulo, en el trabajo [14] se muestra una aproximación para tiempos cortos de la solución del problema considerado. Es interesante ver cuál es el

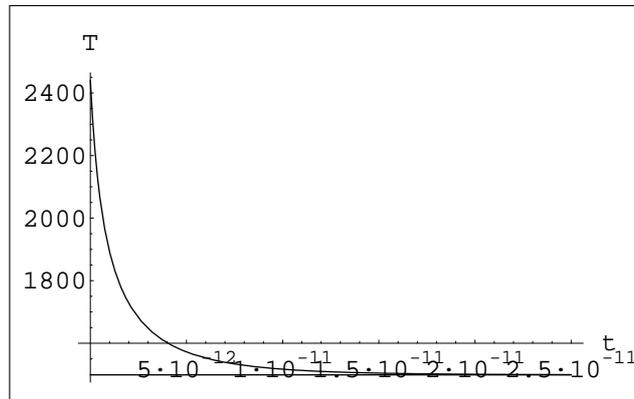


Figura 9.2: Temperatura en la interfase en los casos $\tau_1 = \tau_2$ (constante) y $\tau_1 \neq \tau_2$ (variable).

comportamiento de las diferentes soluciones en la interfase. En la figura 9.3 se comparan la solución general que hemos obtenido, la temperatura aproximada de Kazimi y Erdmann y la temperatura constante de la interfase tomando $\tau_1 = \tau_2$. Está claro a partir de esta figura que para nuestro ejemplo en el intervalo temporal $[0, 10^{-11}]$ las diferentes aproximaciones producen errores considerables.

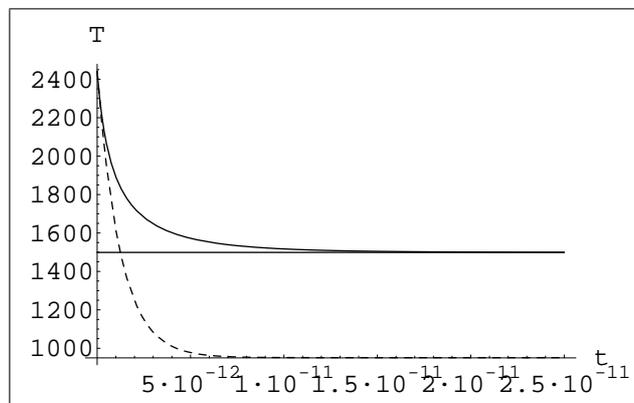


Figura 9.3: Comparación en la interfase de la solución general (línea continua), la solución de Kazimi y Erdman (línea discontinua) y la solución suponiendo $\tau_1 = \tau_2$ (temperatura constante).

La otra principal diferencia encontrada entre las soluciones supo-

niendo igualdad y diferencia entre tiempos de relajación se encuentra precisamente en el tipo de función que constituye la expresión analítica de los perfiles de temperaturas. En el caso en que $\tau_1 = \tau_2$ la temperatura de los cuerpos es una función de x decreciente para cada valor fijo de tiempo t como se muestra en la figura 9.4. En esta figura hemos

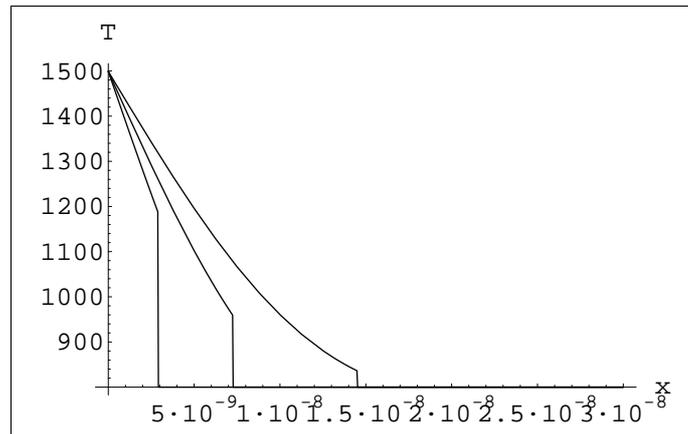


Figura 9.4: Temperatura del cuerpo 2 en tres tiempos fijos suponiendo $\tau_1 = \tau_2$.

dibujado la temperatura $T_2(x, t)$ en el intervalo espacial $[0, 3 \cdot 10^{-8}]$ en los tiempos fijos $t = 0.2 \cdot 10^{-12} \text{ s}$, $t = 0.5 \cdot 10^{-12} \text{ s}$ y $t = 0.9 \cdot 10^{-12} \text{ s}$. Mientras que si $\tau_1 \neq \tau_2$ se puede observar por ejemplo, que la temperatura del cuerpo 2 no es monótona decreciente en el intervalo espacial $[0, v_2 t]$, como se muestra en la figura 9.5 en la que hemos dibujado la temperatura $T_2(x, t)$ en el intervalo espacial $[0, 5 \cdot 10^{-8}]$ en tiempos fijos $t = 0.5 \text{ s}$, $t = 10^{-11} \text{ s}$ y $t = 1.5 \cdot 10^{-11} \text{ s}$.

Dadas las grandes diferencias existentes entre las soluciones suponiendo igualdad y diferencia de tiempos de relajación concluimos que cuando los cuerpos están realizados con diferentes materiales la aproximación $\tau_1 \approx \tau_2$ es inaceptable ya que conduce a graves errores de cálculo.

Lo que sí que tienen en común los dos casos es el efecto de la función de Heaviside. En las figuras 9.4 y 9.5 puede observarse como se encuentran divididas en dos zonas, una zona se encuentra a la temperatura inicial porque el calor para el tiempo considerado aún no ha llegado (corresponde a la zona $t < \frac{x}{v_2}$) y otra zona en la que la temperatura ha

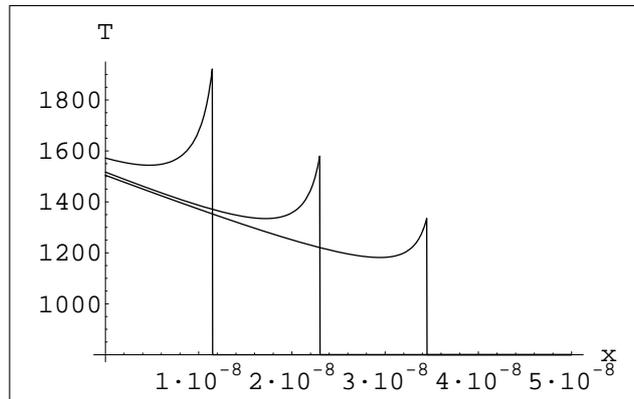


Figura 9.5: Temperatura del cuerpo 2 en tres tiempos fijos suponiendo $\tau_1 \neq \tau_2$.

cambiado siendo diferente a la inicial porque para el tiempo considerado el calor sí que ha llegado (corresponde a la zona $t > \frac{x}{v_2}$). El efecto de la función de Heaviside muestra que el modelo hiperbólico predice una velocidad finita de transmisión del calor porque desde que comienza el proceso de transmisión del calor no está llegando calor a todo el cuerpo instantáneamente, sino es necesario que transcurra cierto tiempo. La figura 9.6 realizada para el cuerpo 1 en el caso general que representa la temperatura frente a la variable espacial y el tiempo muestra de una forma clara el efecto de la función de Heaviside.

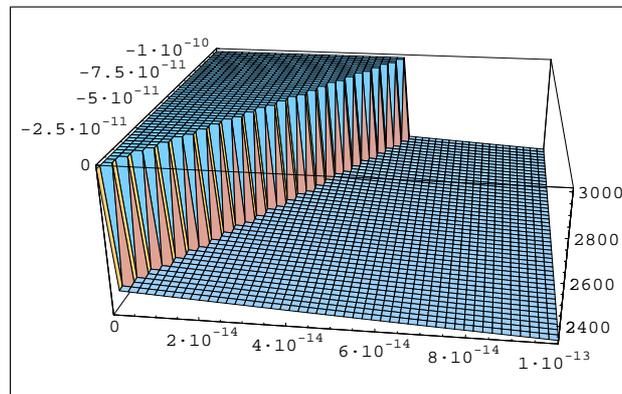


Figura 9.6: Temperatura del cuerpo 1 en función de las variables espacial y temporal.

9.4. Comparación con el modelo parabólico

La solución del problema desde el punto de vista del modelo parabólico de transmisión del calor puede encontrarse en [42]. En este caso los perfiles de temperaturas están determinados por las siguientes expresiones:

$$\forall x \leq 0, \forall t \geq 0 \quad T_1(x, t) = T_0^1 + \frac{(T_0^2 - T_0^1)k_2 \sqrt{\alpha_1}}{k_1 \sqrt{\alpha_2} + k_2 \sqrt{\alpha_1}} f_{cer} \left(\frac{-x}{2\sqrt{t} \alpha_1} \right) \quad (9.28)$$

$$\forall x \geq 0, \forall t \geq 0 \quad T_2(x, t) = T_0^2 + \frac{(T_0^1 - T_0^2)k_1 \sqrt{\alpha_2}}{k_1 \sqrt{\alpha_2} + k_2 \sqrt{\alpha_1}} f_{cer} \left(\frac{x}{2\sqrt{t} \alpha_2} \right), \quad (9.29)$$

donde $f_{cer}(u)$ es la función complementaria de error.

La temperatura parabólica en la interfase es constante y tiene el mismo valor que la temperatura límite en la interfase en el caso hiperbólico (9.26)

$$\frac{T_0^1 k_1 \sqrt{\alpha_2} + T_0^2 k_2 \sqrt{\alpha_1}}{k_1 \sqrt{\alpha_2} + k_2 \sqrt{\alpha_1}},$$

es decir, en el caso parabólico desde que comienza el proceso de transmisión del calor la interfase se encuentra a la temperatura de equilibrio $1498 \text{ }^\circ\text{C}$. Hemos visto en este ejemplo concreto que el tiempo necesario, desde el punto de vista del modelo hiperbólico, para alcanzar en la interfase la temperatura de equilibrio es aproximadamente $1.5 \cdot 10^{-11} \text{ s}$. De modo que en los procesos en los que tiempos cortos (del orden de nano o picosegundos) son importantes, como son los procesos en los que se aplican grandes cantidades de calor a los materiales en pequeños intervalos de tiempo, el modelo parabólico produce errores debido a la gran diferencia en temperaturas que existen con respecto al modelo hiperbólico en estos tiempos. La figura 9.7 muestra estas diferencias en la interfase entre el modelo parabólico (línea discontinua) y el modelo hiperbólico (línea continua).

Las soluciones parabólicas (9.28) y (9.29) muestran que para todo $t > 0$ y todo $x \leq 0$ en el cuerpo 1 y todo $x \geq 0$ en el cuerpo 2 la temperatura es siempre diferente a la inicial, ya que la función complementaria de error es siempre mayor que cero. Si inicialmente todos los puntos se

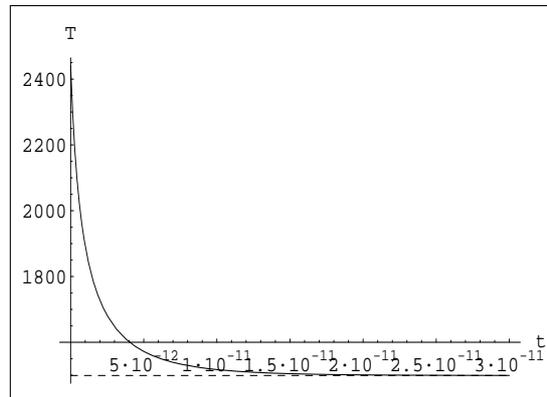


Figura 9.7: Diferencias en la interfase entre los modelos parabólico (línea discontinua) e hiperbólico (línea continua).

encuentran a la temperatura inicial y un aumento de temperatura es debido a la contribución del calor, entonces podemos concluir que la velocidad con la que se transmite el calor es infinita.

El efecto de suposición de una velocidad infinita de transmisión del calor en el modelo parabólico no sólo puede observarse en la interfase sino también en otros puntos de los cuerpos, ya que sea cual sea el punto que tomemos su temperatura será siempre superior a la inicial, aunque tan solo sea de algunos grados. En la figura 9.8 se puede observar el comportamiento de la temperatura parabólica (línea discontinua) e hiperbólica (línea continua) para el cuerpo 2 en el instante $t = 2 \cdot 10^{-11} \text{ s}$.

Como puede observarse en esta figura en la solución hiperbólica el efecto de la función de Heaviside (dividiendo la figura en dos zonas) muestra una velocidad finita de transmisión del calor, mientras que la solución parabólica muestra que la temperatura del cuerpo es diferente de la inicial desde el principio del proceso.

Podemos concluir diciendo que existen grandes diferencias entre la solución parabólica e hiperbólica. Estas diferencias entre los dos modelos las encontramos a tiempos cortos, es decir que serán significativas en los procesos en los que estos tiempos sean importantes, como lo son los procesos en los que se aplican grandes cantidades de calor en pequeños intervalos de tiempo.

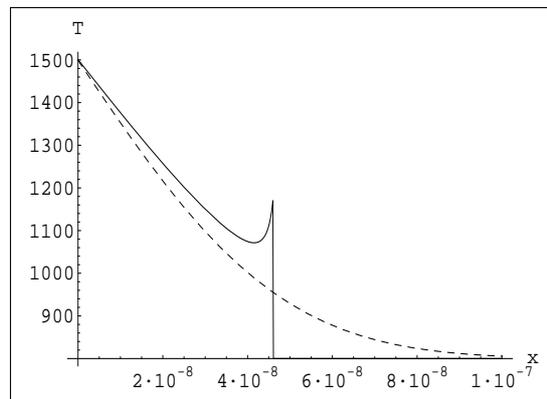


Figura 9.8: Comparación de las temperaturas parabólica (línea discontinua) e hiperbólica (línea continua) en el cuerpo 2 en un determinado instante.

Los resultados de este capítulo han sido aceptados para su publicación en la revista *Applications of Mathematics*.

Capítulo 10

Temperatura hiperbólica de dos cuerpos en contacto con resistencia

En este capítulo vamos a resolver el mismo problema del capítulo anterior pero suponiendo que **existe resistencia al contacto entre los dos cuerpos**.

En este caso el problema tiene mayor relevancia práctica ya que está más próximo a la realidad, de manera que su solución analítica además de utilizarse en el campo de la ingeniería nuclear puede emplearse también en la ingeniería de modernos materiales, enfriamiento de equipos electrónicos, ingeniería biomédica y en el desarrollo de técnicas de medida.

Vamos a dividir el capítulo en cuatro apartados. En el apartado 10.1 plantearemos el problema tal y como hicimos en el capítulo 9 pero suponiendo ahora que existe resistencia al contacto entre los cuerpos. En el apartado 10.2 discutiremos la solución obtenida. En el apartado 10.3 compararemos la solución obtenida en este capítulo suponiendo que existe resistencia de contacto con la obtenida en el capítulo 9 suponiendo contacto perfecto. Finalmente, en el apartado 10.4 compararemos la solución obtenida con la que se obtiene si el problema se resuelve bajo el punto de vista del modelo parabólico.

10.1. Planteamiento y solución del problema

En este caso el planteamiento del problema es prácticamente el mismo que en el caso de contacto perfecto. La única condición que cambiamos es la condición (9.6) que establecemos en la interfase. En el caso de contacto con resistencia la condición que establecemos en la interfase es

$$\forall t > 0 \quad h(T_1(0, t) - T_2(0, t)) = q_1(0, t), \quad (10.1)$$

donde h es el recíproco de la resistencia de contacto ($h = \frac{1}{R}$) conocido como conductancia de contacto.

El problema nuevamente se resuelve tomando transformada de Laplace en la ecuación (9.1) respecto a t . Procediendo de la misma forma que en el caso de contacto directo obtenemos las ecuaciones (9.10) y (9.12). A partir de este punto es donde comienzan los cambios con respecto a la resolución del caso de contacto directo.

Teniendo en cuenta la relación hiperbólica entre flujo y temperatura dada por (9.11) y su transformada (mostrada en el capítulo 9), tomamos transformada de Laplace en la condición (10.1). A partir de esta transformada y las ecuaciones (9.10) y (9.12) llegamos a

$$\frac{-k_1}{h(\tau_1 s + 1)} \frac{\partial \widehat{T}_1}{\partial x}(0, s) = \widehat{T}_1(0, s) - \widehat{T}_2(0, s) = A_1 - B_2 + \frac{T_0^1 - T_0^2}{s},$$

expresión que nos permite calcular A_1 y B_2 . Con lo que finalmente obtenemos

$$\widehat{T}_1(x, s) = \frac{T_0^1}{s} + \frac{(T_0^2 - T_0^1) e^{x \sqrt{\frac{s + \tau_1 s^2}{\alpha_1}}}}{s \left(1 + \frac{k_1 \sqrt{\alpha_2} \sqrt{\tau_2 s + 1}}{k_2 \sqrt{\alpha_1} \sqrt{\tau_1 s + 1}} + \frac{k_1 \sqrt{s}}{h \sqrt{\tau_1 s + 1} \sqrt{\alpha_1}} \right)} \quad (10.2)$$

y

$$\widehat{T}_2(x, s) = \frac{T_0^2}{s} + \frac{(T_0^1 - T_0^2) k_1 \sqrt{\alpha_2} \sqrt{\tau_2 s + 1} e^{-x \sqrt{\frac{s + \tau_2 s^2}{\alpha_2}}}}{s \sqrt{\alpha_1} k_2 \sqrt{\tau_1 s + 1} \left(1 + \frac{k_1 \sqrt{\alpha_2} \sqrt{\tau_2 s + 1}}{k_2 \sqrt{\alpha_1} \sqrt{\tau_1 s + 1}} + \frac{k_1 \sqrt{s}}{h \sqrt{\tau_1 s + 1} \sqrt{\alpha_1}} \right)}. \quad (10.3)$$

Nuevamente, el duro problema matemático es hacer la inversión de Laplace de las expresiones (10.2) y (10.3). Comenzaremos primero calculando la inversa de $\widehat{T}_2(x, s)$. Consideramos nuevamente

$$\widehat{T}_2(x, s) = \frac{T_0^2}{s} + (T_0^1 - T_0^2) g(s)$$

siendo $g(s) = g_1(s) g_2(s)$ donde

$$g_1(s) := \frac{k_1 \sqrt{\alpha_2} \sqrt{\tau_2 s + 1}}{s \sqrt{\alpha_1} k_2 \sqrt{\tau_1 s + 1} \left(1 + \frac{k_1 \sqrt{\alpha_2} \sqrt{\tau_2 s + 1}}{k_2 \sqrt{\alpha_1} \sqrt{\tau_1 s + 1}} + \frac{k_1 \sqrt{s}}{h \sqrt{\tau_1 s + 1} \sqrt{\alpha_1}} \right)}$$

y

$$g_2(s) := e^{-x \sqrt{\frac{s + \tau_2 s^2}{\alpha_2}}}.$$

Al igual que en el caso de contacto perfecto la idea es encontrar $T_2(x, t)$ aplicando el teorema de convolución.

La inversa de $g_2(s)$ ha sido obtenida ya en el capítulo anterior, de manera que

$$\begin{aligned} G_2(t) &:= \delta \left(t - \frac{x}{v_2} \right) \times \\ &\times \left(e^{-\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 \tau_2}}} + \frac{v_2 x}{4\alpha_2 \tau_2} \int_{\frac{x}{v_2}}^t e^{-\frac{-u}{2\tau_2}} \frac{I_1 \left(\sqrt{\left(\frac{u}{2\tau_2} \right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2 \tau_2}} \right)}{\sqrt{\left(\frac{u}{2\tau_2} \right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2 \tau_2}}} du \right) + \\ &+ H \left(t - \frac{x}{v_2} \right) \frac{v_2 x}{4\alpha_2 \tau_2} e^{-\frac{-t}{2\tau_2}} \frac{I_1 \left(\sqrt{\left(\frac{t}{2\tau_2} \right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2 \tau_2}} \right)}{\sqrt{\left(\frac{t}{2\tau_2} \right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2 \tau_2}}}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Para encontrar la inversa de Laplace de $g_1(s)$, que es mucho más complicada, utilizamos de nuevo el teorema de convolución, para ello tomamos

$$p_1(s) := \frac{\sqrt{\tau_2} \sqrt{s + \frac{1}{\tau_2}}}{s}$$

y

$$p_2(s) := \frac{1}{B \sqrt{\tau_1} \sqrt{s + \frac{1}{\tau_1}} + \sqrt{\tau_2} \sqrt{s + \frac{1}{\tau_2}} + A \sqrt{s}},$$

donde en este caso $B := \frac{k_2\sqrt{\alpha_1}}{k_1\sqrt{\alpha_2}}$ y $A := \frac{k_2}{h\sqrt{\alpha_2}}$. Una vez más vamos a utilizar la fórmula de inversión de Bromwich para obtener las inversas de $p_1(s)$ y $p_2(s)$. Para obtener una integral convergente necesaria para poder aplicar esta fórmula y calcular $\mathcal{L}^{-1}[p_1(s)]$ tenemos que considerar

$$\frac{p_1(s)}{s} = \frac{\sqrt{\tau_2}\sqrt{s + \frac{1}{\tau_2}}}{s^2}.$$

Aplicando la fórmula de Bromwich

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p_1(s)}{s}\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \frac{\sqrt{\tau_2}\sqrt{s + \frac{1}{\tau_2}}}{s^2} ds,$$

($\gamma > 0$). Podemos ver que hay un punto de ramificación en $s = -\frac{1}{\tau_2}$ y un polo doble en $s = 0$. De modo que elegimos el contorno de la figura 10.1.

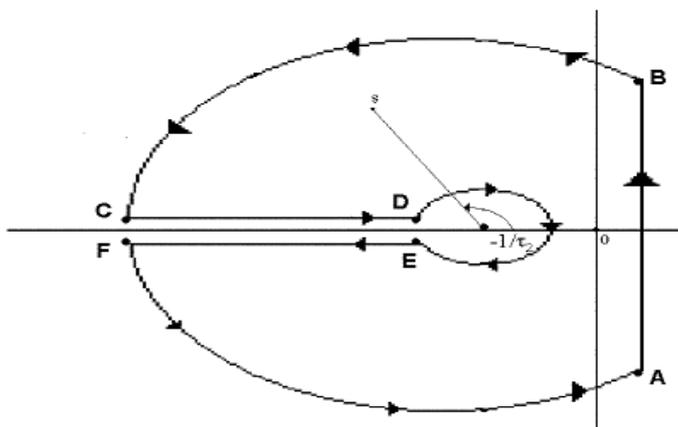


Figura 10.1: Contorno de Bromwich necesario para calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p_1(s)}{s}\right]$.

El residuo en $s = 0$ es

$$Res(s = 0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(s^2 e^{st} \frac{\sqrt{\tau_2}\sqrt{s + \frac{1}{\tau_2}}}{s^2} \right) = t + \frac{\tau_2}{2}$$

y así, por la fórmula de Bromwich

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p_1(s)}{s} \right] = t + \frac{\tau_2}{2} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{\tau_2}} e^{yt} \frac{\sqrt{\tau_2} \sqrt{-y - \frac{1}{\tau_2}}}{y^2} dy .$$

Utilizando la propiedad de las inversas (9.16) citada en el capítulo 9, obtenemos la inversa de $p_1(s)$

$$P_1(t) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{\tau_2}} e^{yt} \frac{\sqrt{\tau_2} \sqrt{-y - \frac{1}{\tau_2}}}{y} dy .$$

Análogamente para encontrar la inversa de $p_2(s)$ por la fórmula de Bromwich es necesario considerar $\frac{p_2(s)}{s}$. En este caso hay tres puntos de ramificación $s = -\frac{1}{\tau_2}$, $s = -\frac{1}{\tau_1}$ y $s = 0$. Puede existir algún polo según los valores de τ_1 , τ_2 , A y B . Como para los materiales utilizados en los cálculos numéricos se da la circunstancia que los polos están en el semiplano $Re(z) > 0$ podemos por simplicidad suponer que siempre se da esta situación. Así que siempre supondremos que las constantes físicas del problema son tales que no hay polos en el interior del circuito. El contorno de Bromwich adecuado en este caso se muestra en la figura 10.2.

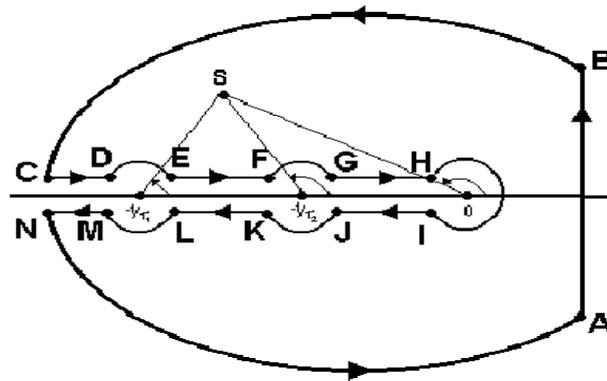


Figura 10.2: Contorno de Bromwich necesario para calcular $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p_2(s)}{s} \right]$.

Aplicando la fórmula de Bromwich obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p_2(s)}{s} \right] = \frac{-1}{B+1} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{-\frac{1}{\tau_1}} \frac{e^{yt}}{y \left(B\sqrt{\tau_1}\sqrt{-y - \frac{1}{\tau_1}} + \sqrt{\tau_2}\sqrt{-y - \frac{1}{\tau_2}} + A\sqrt{-y} \right)} dy + \right. \\
 & + \int_{-\frac{1}{\tau_2}}^{-\frac{1}{\tau_1}} \frac{\frac{1}{y} e^{yt} \left(\sqrt{\tau_2}\sqrt{-y - \frac{1}{\tau_2}} + A\sqrt{-y} \right)}{B^2\tau_1\left(y + \frac{1}{\tau_1}\right) - \tau_2\left(y + \frac{1}{\tau_2}\right) - A^2y + 2A\sqrt{\tau_2}\sqrt{-y}\sqrt{-y - \frac{1}{\tau_2}}} dy + \\
 & \left. + \int_{-\frac{1}{\tau_2}}^0 \frac{\frac{1}{y} e^{yt} A\sqrt{-y}}{B^2\tau_1\left(y + \frac{1}{\tau_1}\right) + \tau_2\left(y + \frac{1}{\tau_2}\right) + 2B\sqrt{\tau_1\tau_2}\sqrt{y + \frac{1}{\tau_1}}\sqrt{y + \frac{1}{\tau_2}} - A^2y} dy \right]
 \end{aligned}$$

y de nuevo utilizando la propiedad (9.16) obtenemos por diferenciación

$$\begin{aligned}
 P_2(t) = & \int_{-\infty}^{-\frac{1}{\tau_1}} \frac{\frac{1}{\pi} e^{yt}}{B\sqrt{\tau_1}\sqrt{-y - \frac{1}{\tau_1}} + \sqrt{\tau_2}\sqrt{-y - \frac{1}{\tau_2}} + A\sqrt{-y}} dy + \\
 & + \int_{-\frac{1}{\tau_2}}^{-\frac{1}{\tau_1}} \frac{\frac{1}{\pi} e^{yt} \left(\sqrt{\tau_2}\sqrt{-y - \frac{1}{\tau_2}} + A\sqrt{-y} \right)}{B^2\tau_1\left(y + \frac{1}{\tau_1}\right) - \tau_2\left(y + \frac{1}{\tau_2}\right) - A^2y + 2A\sqrt{\tau_2}\sqrt{-y}\sqrt{-y - \frac{1}{\tau_2}}} dy + \\
 & + \int_{-\frac{1}{\tau_2}}^0 \frac{\frac{1}{\pi} e^{yt} A\sqrt{-y}}{B^2\tau_1\left(y + \frac{1}{\tau_1}\right) + \tau_2\left(y + \frac{1}{\tau_2}\right) + 2B\sqrt{\tau_1\tau_2}\sqrt{y + \frac{1}{\tau_1}}\sqrt{y + \frac{1}{\tau_2}} - A^2y} dy.
 \end{aligned} \tag{10.5}$$

Finalmente, por el teorema de convolución

$$G_1(t) = \int_0^t P_2(u) P_1(t - u) du \tag{10.6}$$

y

$$\begin{aligned}
 T_2(x, t) & = T_0^2 + (T_0^1 - T_0^2) \int_0^t G_1(t - q) G_2(q) dq = \\
 & = T_0^2 + (T_0^1 - T_0^2) H \left(t - \frac{x}{v_2} \right) \left[e^{-\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2}\tau_2}} G_1 \left(t - \frac{x}{v_2} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{v_2 x}{4\alpha_2 \tau_2} \int_{\frac{x}{v_2}}^t G_1(t-q) e^{\frac{-q}{2\tau_2}} \frac{I_1 \left(\sqrt{\left(\frac{q}{2\tau_2}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2 \tau_2}} \right)}{\sqrt{\left(\frac{q}{2\tau_2}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_2 \tau_2}}} dq \Bigg]. \quad (10.7)$$

Los cálculos para el cuerpo 1 son similares. Tomando

$$Q_1(t) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{\tau_1}} e^{yt} \frac{\sqrt{\tau_1} \sqrt{-y - \frac{1}{\tau_1}}}{y} dy$$

y

$$Q_2(t) = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{\tau_1}} \frac{\frac{1}{\pi} e^{yt}}{\sqrt{\tau_1} \sqrt{-y - \frac{1}{\tau_1}} + D \sqrt{\tau_2} \sqrt{-y - \frac{1}{\tau_2}} + C \sqrt{-y}} dy +$$

$$+ \int_{-\frac{1}{\tau_1}}^{-\frac{1}{\tau_2}} \frac{\frac{1}{\pi} e^{yt} \left(D \sqrt{\tau_2} \sqrt{-y - \frac{1}{\tau_2}} + C \sqrt{-y} \right)}{\tau_1 \left(y + \frac{1}{\tau_1} \right) - D^2 \tau_2 \left(y + \frac{1}{\tau_2} \right) - C^2 y + 2CD \sqrt{\tau_2} \sqrt{-y} \sqrt{-y - \frac{1}{\tau_2}}} dy +$$

$$+ \int_{-\frac{1}{\tau_2}}^0 \frac{\frac{1}{\pi} e^{yt} C \sqrt{-y}}{\tau_1 \left(y + \frac{1}{\tau_1} \right) + D^2 \tau_2 \left(y + \frac{1}{\tau_2} \right) + 2D \sqrt{\tau_1 \tau_2} \sqrt{y + \frac{1}{\tau_1}} \sqrt{y + \frac{1}{\tau_2}} - C^2 y} dy,$$

donde $D = \frac{1}{B}$ y $C = \frac{k_1}{h\sqrt{\alpha_1}}$. Por convolución

$$R_1(t) = \int_0^t Q_2(u) Q_1(t-u) du, \quad (10.8)$$

con lo que llegamos a

$$T_1(x, t) = T_0^1 + (T_0^2 - T_0^1) H \left(t + \frac{x}{v_1} \right) \left[e^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 \tau_1}}} R_1 \left(t + \frac{x}{v_1} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{v_1 x}{4\alpha_1 \tau_1} \int_{\frac{-x}{v_1}}^t R_1(t-q) e^{\frac{-q}{2\tau_1}} \frac{I_1 \left(\sqrt{\left(\frac{q}{2\tau_1}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_1 \tau_1}} \right)}{\sqrt{\left(\frac{q}{2\tau_1}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha_1 \tau_1}}} dq \right]. \quad (10.9)$$

10.2. Discusión de la solución

Para estudiar los perfiles de temperaturas obtenidos nuevamente utilizamos el software *Mathematica* versión 5.0. Los materiales de los cuerpos 1 y 2 son los mismos que utilizamos en el caso de contacto directo. Para el caso de contacto con resistencia necesitamos además el valor de h . El valor de la resistencia de contacto, por tanto también el valor de h , dependen de varios factores como por ejemplo puede ser la rugosidad superficial de los cuerpos o la presión de contacto. Inicialmente tomaremos $h = 10^9 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$ (ver [26]).

Empezaremos también en este caso por estudiar la distribución de la temperatura en la interfase. Con los teoremas de valor final e inicial de las transformadas de Laplace podemos calcular fácilmente la temperatura inicial y final en la interfase, obteniendo

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \widehat{T}_2(0, s) = T_0^2 \quad (10.10)$$

para la temperatura inicial en la interfase del cuerpo 2 y

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s \widehat{T}_2(0, s) &= T_0^2 + (T_0^1 - T_0^2) \frac{k_1 \sqrt{\alpha_2}}{k_1 \sqrt{\alpha_2} + k_2 \sqrt{\alpha_1}} = \\ &= \frac{T_0^1 k_1 \sqrt{\alpha_2} + T_0^2 k_2 \sqrt{\alpha_1}}{k_1 \sqrt{\alpha_2} + k_2 \sqrt{\alpha_1}} \end{aligned} \quad (10.11)$$

para la temperatura de equilibrio o final en la interfase del cuerpo 2. En la interfase del cuerpo 1 obtenemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \widehat{T}_1(0, s) = T_0^1 \quad (10.12)$$

para la temperatura inicial y

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s \widehat{T}_1(0, s) &= T_0^1 + (T_0^2 - T_0^1) \frac{k_2 \sqrt{\alpha_1}}{k_1 \sqrt{\alpha_2} + k_2 \sqrt{\alpha_1}} = \\ &= \frac{T_0^1 k_1 \sqrt{\alpha_2} + T_0^2 k_2 \sqrt{\alpha_1}}{k_1 \sqrt{\alpha_2} + k_2 \sqrt{\alpha_1}} \end{aligned} \quad (10.13)$$

para la temperatura de equilibrio.

Para nuestro ejemplo concreto según (10.11) y (10.13) la temperatura de equilibrio es $1498^\circ C$. Podemos observar que el valor de la

temperatura de equilibrio es independiente del valor de la resistencia térmica.

La temperatura inicial de la interfase es 3000°C para el cuerpo 1 y 800°C para el cuerpo 2 según (10.12) y (10.10), respectivamente. Se observa, por tanto, que la temperatura inicial de la interfase es diferente para cada cuerpo. Este hecho no es sorprendente ya que la ecuación (10.1) supone que $T_1(0, t) \neq T_2(0, t)$ hasta que el flujo de calor desaparezca. Por otro lado, bajo un punto de vista físico, en el caso de contacto con resistencia la interfase es una mezcla de aire y zonas de contacto entre los dos cuerpos, por ello, la evolución de la temperatura de cada uno de los cuerpos en la interfase no es la misma. Las figuras 10.3 y 10.4 muestran la evolución de la temperatura en la interfase del cuerpo 1 y 2, respectivamente, en el intervalo temporal $[0, 10^{-13}]$.

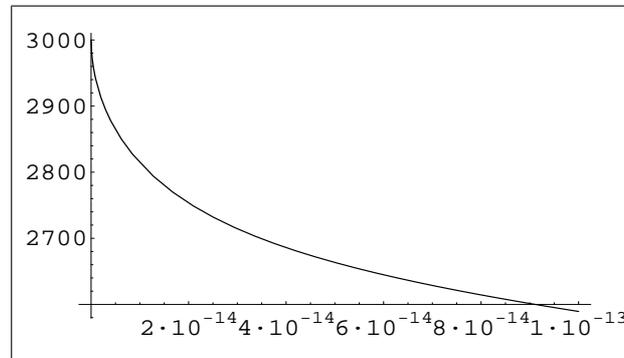


Figura 10.3: Temperatura del cuerpo 1 en la interfase.

De nuevo en los perfiles de temperaturas (10.7) y (10.9) podemos encontrar la presencia de la función de Heaviside, lo que proporciona a estos perfiles un carácter ondulatorio ya que determina en cada instante t una zona del cuerpo en la que permanece la situación inicial ($T(x, t) = T_0^i$) porque aún no ha llegado el calor (esta es la zona correspondiente a $t < \frac{x}{v_2}$ para el cuerpo 2 y la zona $t < -\frac{x}{v_1}$ para el cuerpo 1), y otra zona en la que la temperatura es diferente a la inicial porque el calor ha llegado ya (esta es la zona correspondiente a $t > \frac{x}{v_2}$ para el cuerpo 2 y la zona $t > -\frac{x}{v_1}$ para el cuerpo 1). El cuadro 10.1 muestra la evolución de la temperatura en un punto del cuerpo 2. En él podemos ver que en este punto hasta que no ha transcurrido un tiempo de aproximadamente $5 \cdot 10^{-12}$ s no se produce el cambio de temperatura.

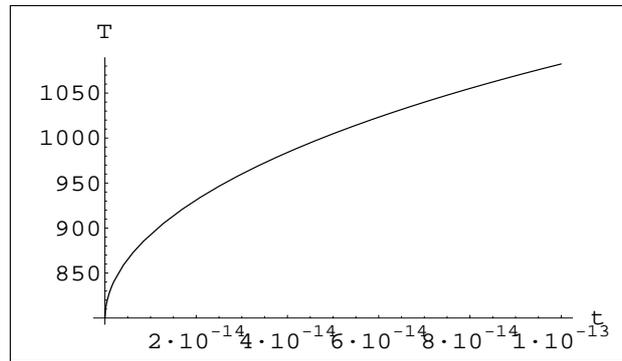


Figura 10.4: Temperatura del cuerpo 2 en la interfase.

$x(m)$	$t(s)$	Cuerpo 2 ($^{\circ}C$)
10^{-8}	10^{-13}	800
10^{-8}	10^{-12}	800
10^{-8}	$5 \cdot 10^{-12}$	1209
10^{-8}	10^{-11}	1301
10^{-8}	10^{-10}	1414
10^{-8}	10^{-8}	1489

Cuadro 10.1: Temperatura del cuerpo 2 en el punto $10^{-8} m$ a diferentes tiempos.

10.3. Comparación con el caso de contacto perfecto

En ambos casos la temperatura de equilibrio en la interfase a la que se llega es la misma, $1498^{\circ}C$, ya que el valor de esta temperatura es independiente de la resistencia. Y en ambos casos también, la temperatura de la interfase no es constante. Sin embargo la principal diferencia entre las dos suposiciones se encuentra en los valores iniciales de temperaturas obtenidos precisamente en la interfase.

Como ya se ha citado en el capítulo 9 en el caso de contacto directo la

temperatura inicial a la que se encuentra la interfase es de 2441°C y la temperatura final o de equilibrio es de 1498°C . Estos valores se obtienen al sustituir $x = 0$ en cualquiera de los dos perfiles de temperatura (del cuerpo 1 o 2), es decir, como en este caso la interfase es el punto de unión entre los dos cuerpos y por tanto un punto común a ambos, los cálculos en este punto se pueden hacer realizar con cualquiera de los dos perfiles de temperaturas pues el resultado va a ser el mismo. Por el contrario, cuando existe resistencia al contacto entre los dos cuerpos, los valores iniciales de temperaturas obtenidos en la interfase son diferentes según el perfil de temperaturas utilizado para calcularlo sea del cuerpo 1 o 2, ya que en este caso la interfase es una mezcla de aire y zonas de contacto entre los dos cuerpos.

En puntos diferentes a la interfase también podemos encontrar diferencias entre los valores de temperaturas obtenidos en el caso de contacto con resistencia y contacto directo. En el caso de contacto directo en un determinado punto se alcanza antes la temperatura de equilibrio que en el caso de contacto con resistencia, debido a que precisamente en la interfase no existe resistencia ninguna al paso del flujo de calor. Sin embargo, hemos podido observar que al aumentar el valor de h disminuyen las diferencias. Este hecho es debido a que cuando aumenta h disminuye la resistencia y como precisamente es la resistencia lo que diferencia a los dos casos, cuando ésta disminuye, disminuyen también las diferencias. En el cuadro 10.2 se recogen temperaturas en un punto determinado y a diferentes tiempos para los casos de contacto directo y contacto con resistencia.

Como podemos observar para el valor de h que hemos supuesto ($h = 10^9 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$) las diferencias entre ambos casos son despreciables. Sin embargo a medida que disminuye h (aumenta la resistencia) las diferencias entre ambos casos son mucho mayores. El cuadro 10.3 está realizado suponiendo $h = 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$.

El valor de h para el cual no se observan diferencias entre los casos de contacto directo y contacto con resistencia depende del punto considerado. Cuanto más cerca esté el punto considerado de la interfase mayor tiene que ser h para que no hayan diferencias. Así por ejemplo, como hemos visto para $h = 10^9 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$ no hay diferencias entre los casos de contacto directo y contacto con resistencia para $x = -10^{-7}$, sin embargo para el punto $x = -10^{-8}$ situado más cerca de la interfase existen diferencias entre ambos casos para $h = 10^9 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$ pero ya no

x(m)	t(s)	Resistencia (°C)	Directo (°C)
-10^{-7}	10^{-5}	1537	1539
-10^{-7}	10^{-6}	1620	1622
-10^{-7}	10^{-7}	1876	1879
-10^{-7}	10^{-8}	2532	2535
-10^{-7}	10^{-9}	2998	3000
-10^{-7}	10^{-10}	3000	3000

Cuadro 10.2: Temperaturas en los casos de contacto directo y contacto con resistencia cuando $h = 10^9 \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ C}$.

x(m)	t(s)	Resistencia (°C)	Directo (°C)
-10^{-7}	10^{-5}	1989	1539
-10^{-7}	10^{-6}	2052	1622
-10^{-7}	10^{-7}	2538	1879
-10^{-7}	10^{-8}	2937	2535
-10^{-7}	10^{-9}	3000	3000
-10^{-7}	10^{-10}	3000	3000

Cuadro 10.3: Temperaturas en los casos de contacto directo y contacto con resistencia cuando $h = 10^6 \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ C}$.

existen para $h = 10^{10} \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ C}$.

Con todo esto podemos concluir que utilizar los perfiles de temperaturas obtenidos suponiendo contacto directo cuando la resistencia es considerable (su valor dependerá del punto considerado) produce graves errores, siendo necesario utilizar los perfiles de temperaturas obtenidos suponiendo que existe resistencia al contacto aunque su expresión sea mucho más complicada.

10.4. Comparación con el modelo parabólico

La distribución de temperaturas de los cuerpos 1 y 2 para el caso de contacto con resistencia desde el punto de vista del modelo parabólico de transmisión del calor puede encontrarse en [42]. En este caso los perfiles de temperaturas son

$$T_1(x, t) = T_0^1 + (T_s - T_0^1) \times \left(\operatorname{Erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{\alpha_1 t}} \right) - e^{\left(\frac{-h_1 x}{k_1} + \frac{h_1^2 \alpha_1 t}{k_1^2} \right)} \operatorname{Erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{\alpha_1 t}} + \frac{h_1 \sqrt{\alpha_1 t}}{k_1} \right) \right) \quad (10.14)$$

$$T_2(x, t) = T_0^2 + (T_s - T_0^2) \times \left(\operatorname{Erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \right) - e^{\left(\frac{-h_2 x}{k_2} + \frac{h_2^2 \alpha_2 t}{k_2^2} \right)} \operatorname{Erfc} \left(\frac{-x}{2\sqrt{\alpha_2 t}} + \frac{h_2 \sqrt{\alpha_2 t}}{k_2} \right) \right) \quad (10.15)$$

siendo h_i el coeficiente de convección para cada cuerpo, donde $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{h}$, T_s es la temperatura de equilibrio que en el caso parabólico viene determinada (según [42]) por

$$\frac{T_0^1 k_1 \sqrt{\alpha_2} + T_0^2 k_2 \sqrt{\alpha_1}}{k_1 \sqrt{\alpha_2} + k_2 \sqrt{\alpha_1}}. \quad (10.16)$$

Como podemos observar en (10.16) la temperatura de equilibrio es la misma que hemos obtenido con el modelo hiperbólico.

Como en el caso parabólico de contacto directo, las expresiones (10.14) y (10.15) suponen una velocidad infinita de transmisión del calor, ya que aunque consideremos un punto muy alejado de la interfase o un tiempo muy corto, la temperatura en ambos cuerpos desde que comienza el proceso de transmisión de calor es diferente a la inicial. Sin embargo, en el modelo hiperbólico la presencia de la función de Heaviside en los perfiles de temperaturas muestra la suposición de una velocidad finita de transmisión del calor.

Hemos encontrado diferencias en temperaturas entre ambos modelos en la interfase. El cuadro 10.4 muestra la evolución de la temperatura en la interfase del cuerpo 2 de los modelos parabólico e hiperbólico.

x(m)	t(s)	Parabólico (°C)	hiperbólico (°C)
0	10^{-5}	1498	1498
0	10^{-8}	1497	1496
0	10^{-10}	1480	1479
0	10^{-12}	1324	1416
0	10^{-13}	1117	1082
0	10^{-15}	848	829

Cuadro 10.4: Temperatura en la interfase del cuerpo 2 con los modelos parabólico e hiperbólico.

A la vista de este cuadro podemos decir que las diferencias en la interfase entre ambos modelos se observan a tiempos cortos. En este ejemplo concreto, para el coeficiente de convección considerado, las diferencias se observan en la interfase para $t < 10^{-10}$ s.

Podemos observar también en el cuadro anterior que las diferencias son irregulares, es decir, que en los tiempos en los que se observan diferencias podemos encontrar instantes en los que la temperatura parabólica es mayor que la hiperbólica y otros instantes de tiempo en los que ocurre justamente lo contrario. Este hecho se explica porque la evolución de la temperatura en los cuerpos es diferente en ambos modelos. En la figura 10.5 se puede observar el comportamiento de la temperatura del cuerpo 2 en la interfase en los modelos parabólico (línea discontinua) e hiperbólico (línea continua).

$x(m)$	$t(s)$	Parabólico ($^{\circ}C$)	hiperbólico ($^{\circ}C$)
10^{-8}	10^{-5}	1498	1498
10^{-8}	10^{-8}	1490	1489
10^{-8}	10^{-10}	1413	1414
10^{-8}	10^{-11}	1240	1301
10^{-8}	$8 \cdot 10^{-12}$	1213	1281
10^{-8}	$5 \cdot 10^{-12}$	1148	1209
10^{-8}	10^{-12}	900	800
10^{-8}	10^{-13}	800	800

Cuadro 10.5: Temperatura parabólica e hiperbólica en un punto diferente a la interfase.

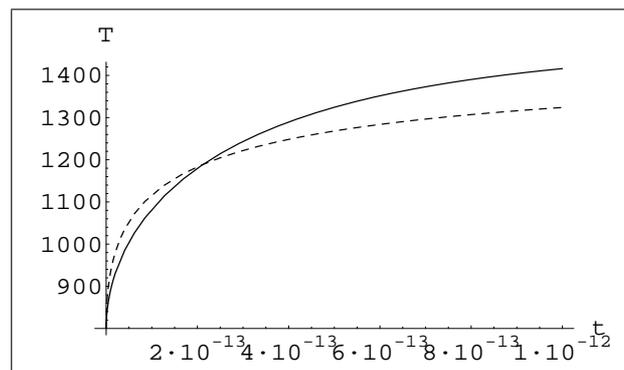


Figura 10.5: Temperatura en la interfase del cuerpo 2 con los modelos parabólico (línea discontinua) e hiperbólico (línea continua).

También se observan diferencias en puntos diferentes a la interfase. El cuadro 10.5 está realizado en un punto determinado y a diferentes tiempos. Como puede observarse los valores de temperaturas obtenidos con los dos modelos son diferentes. Nuevamente, las diferencias entre los dos modelos las encontramos a tiempos cortos.

Hemos observado que las diferencias entre ambos modelos desaparecen a medida que disminuye el valor de h , o lo que es lo mismo, aumenta el valor de la resistencia. En el punto considerado en la tabla anterior (10^{-8}), concretamente para $h = 10^6 \frac{W}{m^2 \cdot ^{\circ}C}$ ya no se observan diferencias

entre los dos modelos. La explicación de este hecho es sencilla ya que cuando la resistencia es muy elevada el efecto de los tiempos de relajación es despreciable frente al efecto que supone la resistencia. Como precisamente la diferencia entre los dos modelos estriba precisamente en la existencia de los tiempos de relajación en el modelo hiperbólico y la no existencia de los mismos en el modelo parabólico, entonces si se consideran despreciables, los resultados que se obtienen son los mismos con ambos modelos.

Podemos concluir diciendo, al igual que en el caso de contacto directo, que existen diferencias entre los valores de temperaturas obtenidos con ambos modelos y que nuevamente estas diferencias aparecen a tiempos cortos. De manera que en aquellos procesos en los que estos tiempos sean significativos (procesos en los que se transmiten grandes cantidades de calor en pequeños intervalos de tiempo) el uso del modelo parabólico conducirá a graves errores. Sin embargo, en este caso hay que tener en cuenta que cuando el valor de la resistencia sea elevado (dependerá de los materiales empleados y las temperaturas iniciales de los mismos) las diferencias entre ambos modelos serán despreciables.

Índice de espacios funcionales

- $Y_\theta^{2r+1}(\Omega \times]0, 1[)$, página 34
- $\mathfrak{R}^{2r+1}(\Omega)$, página 41
- $\mathcal{L}(X, Y)$, página 44
- $\mathcal{J}_p(\Omega)$, página 45
- $X^r(\Omega \times]0, T[)$, página 53
- $\mathcal{N}^{2r-1, 2r}(\Omega \times]0, T[)$, página 64
- $H_{\mathfrak{A}\mathfrak{R}}^{2r+1, 2r+1}(\Omega \times]0, T[)$, página 65
- $\mathcal{Z}_A^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, T[)$, página 80
- $\mathcal{W}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$, página 82
- $\mathbf{W}_A^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$, página 82
- $\mathcal{V}^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$, página 85
- $\mathbf{V}_A^{-(2r-1)}(\Omega \times]0, \infty[)$, página 85

Bibliografía

- [1] BACHS, L., CUESTA, J., CARLES, N.: *Aplicaciones industriales del láser*. Macombo. Barcelona, (1988).
- [2] BAUMEISTER, J. K., HAMILL, T. D.: *Hyperbolic Heat-Conduction Equation-A Solution for the Semi-infinite Body Problem*. Journal of Heat Transfer, pp. 543-548, 1969.
- [3] BREBBIA, C. A.: *Progress in Boundary Element Methods*. Pentech Press London. London.
- [4] CALDERÓN, A. P.: *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. 24, 113-190, (1964).
- [5] CARSLAW, H. S., JAEGER, J. C.: *Conduction of heat in Solids*. Oxford Science Publications. Clarendon Press. Oxford. 1990.
- [6] CATTANEO, C.: *A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation*, Comptes Rendus 247, 431-433, (1958).
- [7] CHANDRASEKHARAI AH, D. S.: *Thermoelasticity with second sound: A review*, Appl. Mech. Rev. 39, 3, (1986).
- [8] CHESTER, M.: *Second sound in solids*, Phys. Rev. 131, 2013-2015, (1963).
- [9] DUBINSKI J, J. A.: *Sobolev spaces of infinite order and differential equations*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, (1986).

- [10] DUFFY, D. G.: *Green's functions with applications*, Studies in Advanced Mathematics. Chapman and Hall/Crc, (2001).
- [11] GRADSHTEYN, I. S., RYZHIK, I. M.: *Table of integrals, series and products*. Academic Press. New York, (1980).
- [12] GURKA, P., OPIC, B.: *Continuous and compact embeddings of weighted Sobolev spaces I*, Czech. Math. J., 38, 113, 730-744, (1988).
- [13] HECTOR JR., L. G., KIM, W. S., ÖZISIK, M. N.: *Propagation and reflection of thermal waves in a finite medium due to axisymmetric surface sources*, Int. J. Heat Mass Transfer, 35, 4, 897-912, (1992).
- [14] KAZIMI, M. S., ERDMAN, C. A.: *On the Interface Temperature of Two Suddenly Contacting Materials*, Journal of Heat Transfer, pp. 615-617, 1975
- [15] KELLEY, D. C.: *Diffusion: a relativistic appraisal*, Am. J. Phys. 36, 585-591,(1968).
- [16] LAVRENTIEV, M., CHABAT, E. T.: *Méthodes de le théorie des fonctions d'une variable complexe*. Mir. Moscú, 1977.
- [17] LIONS, J. L.: *Supports dans la transformation de Laplace*, J. d'Analyse Math. d'Israël 2, 369-380, (1952-53).
- [18] LIONS, J. L.: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, (1969).
- [19] LIONS, J.L., MAGENES, E.: *Problèmes aux limites non homogènes et applications, volume I et II*, Dunod, Paris, (1968).
- [20] LOPEZ MOLINA, J. A., TRUJILLO, M.: *Hyperbolic heat conduction in two semi-infinite bodies in contact*, Applications of Mathematics, Preprint, (2003).

-
- [21] MAURER, M. J., THOMPSON, H. A.: *Non Fourier effects at high heat flux*. Journal of heat transfer. Trans. ASME, 284-286, (1973).
- [22] MAXWELL, J. C.: *On the dynamic theory of gases*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. 157,49-88, (1867).
- [23] MAZ'JA, V. G.: *Sobolev spaces*, Springer Verlag, Berlin, (1985).
- [24] MORSE, P. M., FESHBACH, H.: *Methods of theoretical Physics*, Vol. I. McGraw-Hill, New York, (1953).
- [25] ÖZISIK, M. N.: *Boundary value problems of heat conduction*, Dover Publications, Inc, New York (1968).
- [26] ÖZISIK, M. N.: *Heat Conduction*, Ed. John Wiley and sons, Inc., United States, (1980), 4, 262.
- [27] ÖZISIK, M. N., TZOU, D. Y.: *On the wave theory on heat conduction*, ASME, Journal of Heat Transfer, 116, (1994), 526-535.
- [28] PATHAK, R. S.: *Integral transforms of generalized functions and their applications*, Gordon and Breach Science Publishers, The Netherlands, (1997).
- [29] PESHKOV, V.: *Second sound in helium II*, J. Phys. VIII, USSR, 381-386,(1944).
- [30] SNEDDON, I. N.: *Fourier transforms*, Dover Publications, Inc., New York, (1995).
- [31] SPARKS, M.: *Theory of laser heating of solids metals*, J. Appl. Phys. 47, 837-849, (1976).
- [32] SCHWARTZ, L.: *Théorie des distributions a valeurs vectorielles I, II*, Ann. Inst. Fourier, 7, 1-141, (1957); 8, 1-209, (1958).

- [33] TEHRANI, P. H., HECTOR JR., L. G., HETNARSKI, R. B., ESLAMI, M. R.: *Boundary elements formulation for thermal stresses during pulsed laser heating*, ASME J. Appl. Mech., 68, 480-489, (2001).
- [34] VAN KAMPEN, N. G.: *A model for relativistic heat transfer*, Physica 46, 315-332, (1970).
- [35] VERNOTTE, P.: *Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur*, Comptes Rendus 246, 3154-3155, (1958).
- [36] VERNOTTE, P.: *Some possible complications in the phenomena of thermal conduction*, Comptes Rendus 252, 2190-2191, (1961).
- [37] WELSH, L. P., TUCHMAN, J. A., HERMAN, I. P.: *The importance of thermal stresses and strains induced in laser processing with focused Gaussian beams*, J. Appl. Phys. 64, (11) 1, 6274-6286, (1988).
- [38] WATSON, G. N.: *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge, (1966).
- [39] WEYMANN, H. D.: *Finite speed of propagation in heat conduction, diffusion and viscous shear motion*, Am. J. Phys. 35, 488-496, (1967).
- [40] WIGGERT, D. C.: *Analysis of Early-Time Transient Heat Conduction by Method of Characteristics*, Journal of Heat Transfer, 35-40, 1977.
- [41] WLOKA, J.: *Partial differential equations*. Cambridge University Press. London, (1987).
- [42] XIN, R. C., TAO, W. Q.: *Analytical Solution for Transient Heat Conduction in Two Semi-infinite Bodies in Contact*, Journal of Heat Transfer, 116, pp. 224-228, 1994.