



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Maniobra orbital no impulsiva

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

Índice general

1. Introducción	2
2. Objetivos	3
3. Expresión vectorial del movimiento con empuje continuo	3
4. Expresión escalar de r con bajo empuje	5
5. Aplicación: Transferencias con impulso prolongado	7
6. Cierre	11

1 Introducció

Las maniobras orbitales impulsivas son utilizadas a menudo porque son buenas aproximaciones de las maniobras reales si el impulso aplicado es muy breve. En ellas se considera que el Δv es aplicado en un instante determinado y que la duración de ese Δv es 'nula', resultando que el vector posición de la nave no varía con el impulso (solo lo hace el vector velocidad).

En este artículo se presenta un estudio de las maniobras no impulsivas, en las que el empuje actúa sobre la nave durante un periodo de tiempo más o menos largo (no en un instante). Esto va a obligar a que ese impulso sea considerado en la integración de la ecuación del movimiento.

Para los cálculos de nuestros ejemplos vamos a considerar algunas constantes y recordar algunas igualdades de Mecánica orbital:

- La Tierra no es esférica pero cuando, por aproximación se considera que tiene esa forma, se utiliza como radio terrestre el radio ecuatorial y por otra parte, la aceleración de la gravedad en la Tierra varía con la altura pero en general se considera la gravedad al nivel del mar. Por tanto supondremos

$$R_T = 6378 \text{ km}. \quad g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2 = 0.00981 \text{ km/s}^2$$

- Cualquier nave o satélite tiene una masa insignificante comparada con la del Sol o la de la Tierra por lo que el parámetro gravitacional terrestre es considerado constante

$$\mu = G(M + m) = GM = 398\,600.5 \text{ km}^3/\text{s}^2.$$

- La **ecuación fundamental del movimiento relativo de dos cuerpos**, es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}. \quad (1)$$

- Es necesario recordar que en cualquier órbita el momento angular específico h es constante y se puede calcular con el radio del apogeo r_a y el del perigeo r_p :

$$h = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{r_a \cdot r_p}{r_a + r_p}} \quad \left(= \sqrt{\frac{\mu}{r}} \text{ para órbitas circulares} \right) \quad (2)$$

Además en cualquier posición se verifica que $h = r v_{\perp}$ siendo r la distancia al foco y v_{\perp} la velocidad transversal en esa posición. Por tanto, como en el apogeo y en el perigeo $v = v_{\perp}$, igual que en órbitas circulares, se obtiene:

$$v_a = \frac{h}{r_a} \quad v_p = \frac{h}{r_p} \quad v_{\text{circ}} = \frac{h}{r} = \frac{\sqrt{\mu r}}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (3)$$

- El vector velocidad en un punto cualquiera se puede determinar con el momento h , la excentricidad e y la anomalía verdadera θ :

$$\vec{v} = \left(-\frac{\mu}{h} \sin \theta, \frac{\mu}{h} (e + \cos \theta), 0 \right) \quad (4)$$

- La masa de propelente necesaria para hacer un impulso Δv , depende de la masa total de la nave

$$\frac{\Delta m}{m} = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} \quad \rightarrow \quad \Delta m = m \left(1 - e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} \right) \quad (5)$$

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Integrar la ecuación del movimiento teniendo en cuenta un posible empuje pudiendo determinar la trayectoria descrita y el vector estado (y por tanto la nueva órbita) al final del empuje.
- Estimar la cantidad de propelente consumido durante la maniobra no impulsiva.
- Calcular, cuando el empuje es suficientemente bajo, una aproximación del tiempo de activación del motor para alcanzar un determinado radio orbital y viceversa.
- Hallar el tiempo de viaje (con alto/bajo empuje) para conseguir llegar a una determinada órbita.

3 Expresión vectorial del movimiento con empuje continuo

Partiendo de la ecuación del movimiento relativo de dos cuerpos (1), al aplicar un impulso aparece sobre la nave otra fuerza externa \vec{F} que debe ser incorporada a la ecuación:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{F}}{m}$$

donde m es la masa de la nave.

Si consideramos que esa fuerza externa es debida a un empuje T que es aplicado en cada momento en la dirección del vector velocidad $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{T}{m} \frac{\vec{v}}{v} \quad (6)$$

Separando por coordenadas resultan

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{r^3} + \frac{T}{m} \frac{\dot{x}}{v} \quad \ddot{y} = -\mu \frac{y}{r^3} + \frac{T}{m} \frac{\dot{y}}{v} \quad \ddot{z} = -\mu \frac{z}{r^3} + \frac{T}{m} \frac{\dot{z}}{v}$$

donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Además de las variaciones en coordenadas y velocidades, mientras un motor está encendido para producir impulso, la masa de la nave decrecerá puesto que la combustión de propelente expulsa materia al espacio a través de la tobera. Así, si se considera que la nave expulsa un flujo de masa \dot{m}_e a una velocidad constante, la masa del cohete decrecerá verificando

$$\frac{dm}{dt} = -\dot{m}_e \quad (7)$$

siendo, por tanto, la masa del vehículo una función del tiempo dada por:

$$m(t) = m_0 - \dot{m}_e t$$

donde m_0 es la masa inicial del cohete.

Por otra parte, el empuje T (del inglés Thrust) es el producto de la tasa de masa expulsada (\dot{m}_e) por la velocidad de expulsión ($c = I_{sp}g_0$), siendo I_{sp} el impulso específico en segundos del motor y g_0 la gravedad a nivel del mar. Resulta entonces

$$T = \dot{m}_e I_{sp} g_0 \quad \rightarrow \quad \dot{m}_e = \frac{T}{I_{sp} g_0} \quad \xrightarrow{(7)} \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{T}{I_{sp} g_0} \quad (8)$$

Esta igualdad debe ser incorporada al sistema anterior resultando el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\mu \frac{x}{r^3} + \frac{T}{m} \frac{\dot{x}}{v} \\ \ddot{y} &= -\mu \frac{y}{r^3} + \frac{T}{m} \frac{\dot{y}}{v} \\ \ddot{z} &= -\mu \frac{z}{r^3} + \frac{T}{m} \frac{\dot{z}}{v} \\ \dot{m} &= -\frac{T}{I_{sp} g_0} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ejemplo 3.1 Considera una nave de 2500 kg que se encuentra en la ISS, cuya posición y velocidad geocéntricas son respectivamente¹

$$\vec{r}_0 = (-4943, -617.2, -4634) \text{ km} \quad \text{y} \quad \vec{v}_0 = (-1.92, -6.79, 2.95) \text{ km/s.}$$

Halla la posición, la velocidad y la masa de la nave al finalizar un encendido del motor en cada uno de los siguientes casos. Halla también para cada caso cuánto ha variado la altura de la nave y su velocidad y cuál ha sido el consumo de propelente de cada maniobra.

- La nave dispone de un motor con un empuje de $T = 10 \text{ kN}$ y un impulso específico de $I_{sp} = 350 \text{ s}$ que es encendido durante 4.5 min.
- La nave dispone de un motor de bajo empuje y elevado impulso específico, $T = 2 \text{ N}$ y $I_{sp} = 7500 \text{ s}$ que es encendido durante 30 días.

Solución:

a) Si integramos numéricamente el sistema formado por las ecuaciones (9) desde $t = 0$ hasta $t = 4.5 \text{ min} = 270 \text{ s}$ se obtienen

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (-5255.85, -2536.26, -3564) \rightarrow r = 6838 \text{ km} \\ \vec{v} &= (-0.35, -7.37, 4.99) \rightarrow v = 8.91 \text{ km/s} \\ m &= 1713.4 \text{ kg.} \end{aligned}$$

¹Vector estado de la ISS el 30 de noviembre de 2022 0:00

Se puede observar que en este caso la altura ha pasado de 425 km a 460 km ganando casi 35 km de altura mientras que la velocidad se ha incrementado en más de 1 km/s pasando de 7.65 km/s a 8.91 km/s

Finalmente la masa de propelente consumido es de $m_p = 2500 - 1713.4 = 786.6 \text{ kg}$.

Además, la energía de la órbita se ha incrementado pasando de $-29.3 \text{ km}^2/\text{s}^2$ a $-18.8 \text{ km}^2/\text{s}^2$ por lo que $\Delta\xi = 10.5 \text{ km}^2/\text{s}^2$.

b) Repitiendo la integración para el nuevo empuje y el nuevo impulso específico a lo largo de 30 días resultan

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (-9244.6, -692.9, -9001.3) \rightarrow r = 12921.6 \text{ km} \rightarrow \Delta r = 6118 \text{ km} \\ \vec{v} &= (-1.56, -4.94, 1.98) \rightarrow v = 5.55 \text{ km/s} \rightarrow \Delta v = -2.1 \text{ km/s} \\ m &= 2429.5 \text{ kg} \rightarrow m_p = 2500 - 2429.5 = 70.5 \text{ kg} \\ \Delta\xi &= -15.4 - (-29.3) = 13.9 \text{ km}^2/\text{s}^2\end{aligned}$$

4 Expresión escalar de r con bajo empuje

Cuando el **empuje aplicado es bajo** y la órbita tiene poca excentricidad se puede obtener una expresión escalar que relaciona r y t .

Partiendo de la ecuación del movimiento sometido a un empuje tangencial (6) y multiplicando escalarmente los dos términos por \vec{v} se obtiene

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{v} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{v} + \frac{T}{m} \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{v} \quad (10)$$

El término de la izquierda puede reescribirse de otra manera

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = 2\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \\ \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt} (v^2) \end{array} \right\} \rightarrow \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

El primer sumando de la derecha también puede reescribirse²

$$-\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \cdot \vec{v}) = -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \stackrel{(\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}} = a\dot{a})}{=} -\frac{\mu}{r^3} (r\dot{r}) = -\mu \frac{\dot{r}}{r^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \right)$$

Incorporando los dos últimos resultados en la expresión (10) resulta

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \right) + \frac{T}{m} v$$

que reordenando queda

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = \frac{T}{m} v \quad (11)$$

² $\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}} = a^2 \rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}) = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\vec{a}} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\vec{a}} \cdot \ddot{\vec{a}} = 2\dot{\vec{a}} \cdot \ddot{\vec{a}} \\ \frac{d}{dt} (a^2) = 2a\dot{a} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a} \cdot \dot{\vec{a}} = a\dot{a}$.

lo que indica cómo es la variación de la energía

$$\frac{d}{dt} \xi = \frac{T}{m} v \quad (12)$$

De esta expresión se deduce que cuando se incrementa el empuje tangencial la energía también se incrementa.

Cuando la órbita en la que se está trabajando es **circular** o **casi circular**, la velocidad de la nave es aproximadamente la velocidad circular, $v \approx \sqrt{\frac{\mu}{r}}$. Por tanto,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{2r} - \frac{\mu}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{-\mu}{2r} \right) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \right)$$

Si el impulso es de **bajo empuje** la modificación de la órbita será pequeña en cada instante generando así una órbita en espiral que puede considerarse aproximadamente circular en cada instante con el radio de ese momento. Así, la expresión (11) quedará aproximada por

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \right) = \frac{T}{m} \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad \rightarrow \quad \frac{d \left(\frac{\mu}{r} \right)}{\sqrt{\frac{\mu}{r}}} = -\frac{2T}{m} dt$$

Por otra parte, la masa de la nave m varía con el tiempo y se puede considerar que esa variación es lineal

$$m = m_0 - \dot{m}_e t$$

donde m_0 es la masa de la nave al inicio del impulso ($t = 0$) y \dot{m}_e es la tasa constante de propelente expulsado. Sustituyendo en la expresión obtenida anteriormente queda

$$\frac{d \left(\frac{\mu}{r} \right)}{\sqrt{\frac{\mu}{r}}} = -\frac{2T}{m_0 - \dot{m}_e t} dt$$

Integrando cada término por separado y considerando que $r = r_0$ cuando $t = 0$ se tiene

$$\int_0^t \frac{d \left(\frac{\mu}{r} \right)}{\sqrt{\frac{\mu}{r}}} = 2 \sqrt{\frac{\mu}{r}} \Big|_0^t = 2 \left(\sqrt{\frac{\mu}{r}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \right)$$

$$\int_0^t \frac{-2T}{m_0 - \dot{m}_e t} = \frac{2T}{\dot{m}_e} (\ln(m_0 - \dot{m}_e t)) \Big|_0^t = \frac{2T}{\dot{m}_e} \ln \left(\frac{m_0 - \dot{m}_e t}{m_0} \right)$$

por tanto

$$\sqrt{\frac{\mu}{r}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} = \frac{T}{\dot{m}_e} \ln \left(\frac{m_0 - \dot{m}_e t}{m_0} \right) = \frac{T}{\dot{m}_e} \ln \left(1 - \frac{\dot{m}_e t}{m_0} \right)$$

Teniendo en cuenta que $\dot{m}_e = -\frac{dm}{dt} = \frac{T}{I_{sp} g_0} \rightarrow \frac{T}{\dot{m}_e} = I_{sp} g_0$ y simplificando se deduce la igualdad que permite hallar r conociendo t y viceversa

$$\boxed{\sqrt{\frac{\mu}{r}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} = I_{sp} g_0 \ln \left(1 - \frac{T}{m_0 g_0 I_{sp}} t \right)} \quad (13)$$

Podría obtenerse r en función de t despejando r y análogamente t en función de r

$$r = \frac{\mu}{\left[\sqrt{\frac{\mu}{r_0}} + I_{sp} g_0 \ln \left(1 - \frac{T}{m_0 g_0 I_{sp}} t \right) \right]^2} ; \quad t = \frac{m_0 g_0 I_{sp}}{T} \left[1 - e^{\frac{1}{I_{sp} g_0} \left(\sqrt{\frac{\mu}{r}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \right)} \right]$$

Ejemplo 4.1 Estima el radio de la posición r y la masa consumida m_p para cada una de las situaciones planteadas en el ejemplo anterior utilizando la expresión escalar que relaciona r y t .

Solución: Utilizando (13) y despejando o directamente utilizando la expresión de r en función de t obtenida después

Para el caso a) $r = \frac{\mu}{\left[\sqrt{\frac{\mu}{6803.5}} + 350 \cdot g_0 \ln \left(1 - \frac{10}{2500 \cdot g_0 \cdot 350} 270 \right) \right]^2} = 9862.3 \text{ km}$

El valor de r obtenido discrepa notablemente del obtenido por integración, 6838 km , lo que deja en evidencia que la expresión (13) no es válida para este caso. El motivo es el elevado empuje aplicado en este caso.

Para el caso b) $r = \frac{\mu}{\left[\sqrt{\frac{\mu}{6803.5}} + 7500 g_0 \ln \left(1 - \frac{0.002}{2500 g_0 \cdot 7500} 30 \cdot 86400 \right) \right]^2} = 12936.6 \text{ km}$

El valor de r obtenido ahora sí es muy similar al obtenido por integración, 12921.6 km . En esta ocasión el bajo empuje aplicado hace que (13) nos dé un valor de r bastante aceptable.

5 Aplicación: Transferencias con impulso prolongado

Cuando los motores no tienen el empuje adecuado para que las maniobras sean consideradas impulsivas se considerará que el motor permanece encendido durante un determinado tiempo. El tiempo mínimo necesario para alcanzar la órbita objetivo puede ser estimado para minimizar el consumo de propelente.

Ejemplo 5.1 Una nave de 1500 kg de masa se encuentra orbitando en una órbita circular de 250 km de altura. La nave dispone de un motor que ejerce un empuje de $T = 5 \text{ kN}$ con un impulso específico de $I_{sp} = 250 \text{ s}$. La pretensión es transferir la nave hasta una órbita geosíncrona manteniendo la misma inclinación.

- ¿Cuánto tiempo debemos mantener encendido el motor, t_b , para que la órbita resultante tras apagar el motor pueda alcanzar el radio de la órbita objetivo?
- Tras apagar el motor, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar ese radio?
- Al llegar a la órbita geosíncrona ¿qué impulso hay que dar en ese punto para que la nave se quede en esa órbita circular?
- ¿Cuál ha sido el consumo de combustible necesario para hacer los dos tramos de la transferencia?
- Evalúa el consumo necesario para hacer la transferencia de la órbita de parking a la geosíncrona mediante una maniobra de Hohmann y compara el resultado con la anterior.

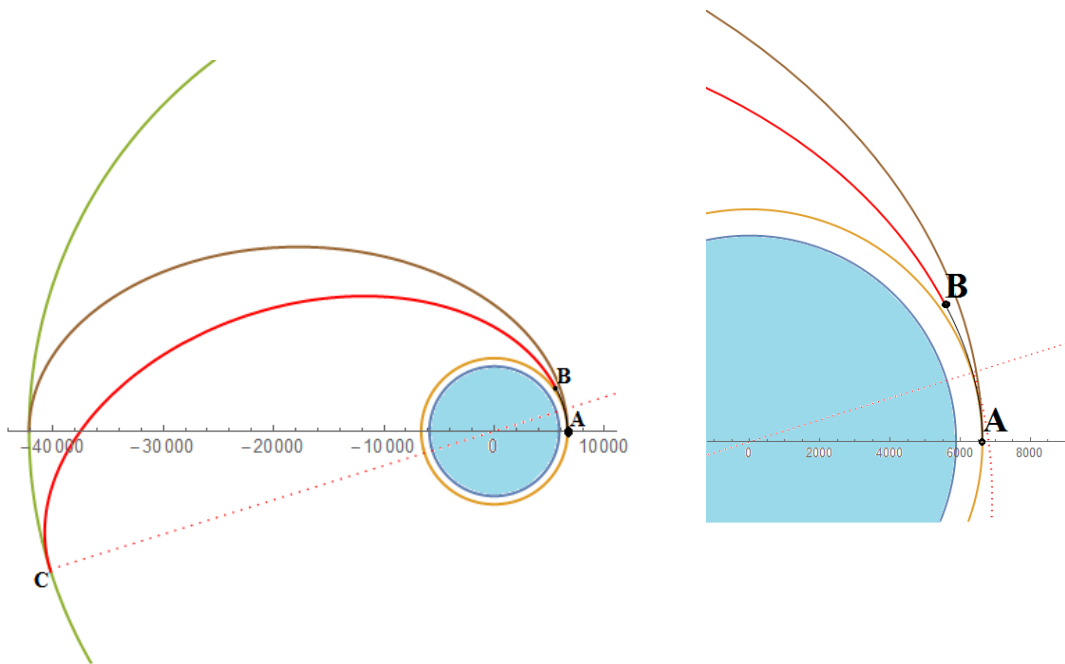


Figura 1: Transferencia orbital desde la órbita de parking (naranja) integrando con empuje durante t_b s (negro) y un último tramo sin empuje hasta el apogeo de esa nueva órbita (rojo). También se puede ver la órbita de transferencia de Hohmann (marrón).

Solución: En este caso no va a ser necesario mantener el motor encendido hasta llegar a la órbita objetivo, bastará alcanzar un punto B en el que se apague el motor y el radio del apogeo de la nueva órbita llegue a la órbita geosíncrona $r_{ap} = 42164.1 \text{ km}$ (ver figura 1).

a) Es posible encontrar el valor del tiempo de quemado (t_b), con el que se alcanza ese r_{ap} mediante un proceso iterativo donde t_b se vaya incrementando hasta que el radio del apogeo asociado al vector estado obtenido tras el apagado alcance el valor del radio objetivo.

El proceso iterativo es el siguiente:

- Consideramos las condiciones iniciales (punto A) donde $t_0 = 0 \text{ s}$.

$$\vec{r}(t_0) = (6628, 0, 0) \text{ km} \quad \vec{v}(t_0) = (0, \sqrt{\frac{\mu}{6628}}, 0) = (0, 7.755, 0) \text{ km/s}$$

$$m(t_0) = 1500 \text{ kg}$$

- Integrar partiendo de esas condiciones iniciales hasta un determinado t_b considerando que el empuje actúa durante la integración. Se obtiene posición, velocidad y masa para t_b ,

$$\vec{r}(t_b) \quad \vec{v}(t_b) \quad m(t_b)$$

- Con la posición y la velocidad podemos hallar algunos elementos de la nueva órbita como el semieje, la excentricidad, la anomalía verdadera y el radio del apogeo

$$a_{t_b} \quad e_{t_b} \quad \theta_{t_b} \quad (r_a)_{t_b}$$

- Comparar el radio del apogeo de la nueva órbita con el radio que queremos alcanzar. Si $(r_a)_{t_b} < r_{obj}$ incrementaremos el intervalo de motor encendido, $t_b = t_b + \Delta t_b$ y volvemos al segundo paso, integración con las mismas condiciones iniciales. Si $(r_a)_{t_b} \geq r_{obj}$ detenemos el proceso almacenando las coordenadas, velocidades y masa de la nave para t_b junto con los elementos de su nueva órbita.

El diagrama de flujo de ese algoritmo puede verse en [figura 2](#)

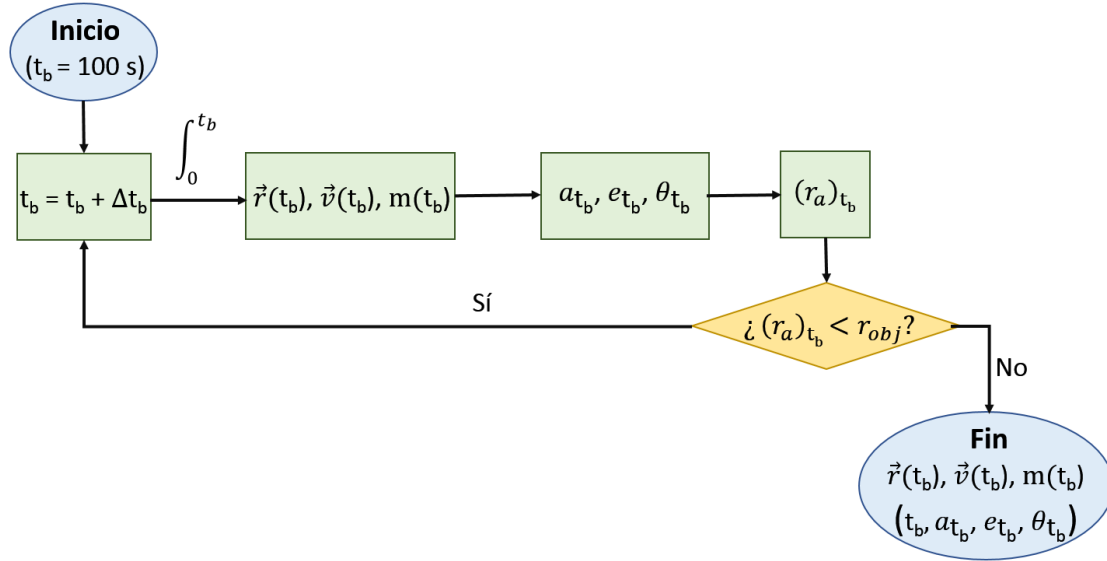


Figura 2: Diagrama de flujo del algoritmo empleado para estimar el tiempo de encendido del motor t_b requerido para alcanzar un radio del apogeo superior al radio objetivo, r_{obj} .

Si se comienzan las iteraciones por $t_b = 100 \text{ s}$ y se incrementa en cada iteración³ $\Delta t_b = 0.1 \text{ s}$ obtenemos que el radio del apogeo de la órbita resultante al apagar el motor es

$$(r_a)_{t_b} = 42166.6 \text{ s} > 42164.1 \text{ s}$$

situación que se da cuando (punto B de la [figura 1](#))

$$t_b = 465.3 \text{ s}$$

Durante el proceso también se puede obtener la masa de propelente consumido $m(t_b)$ mientras el que el motor ha estado encendido

$$m(t_b) = 551.3 \text{ kg}$$

También se obtienen los valores de la nueva órbita tras apagar el motor:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_b) &= (5584.91, 3888.98, 0) \text{ km} & \vec{v}(t_b) &= (-4.63, 8.91, 0) \text{ km/s} \\ a_{t_b} &= 24419.3 \text{ km} & e_{t_b} &= 0.726771 & \theta_{t_b} &= 17.56^\circ \end{aligned} \quad (14)$$

b) Tras la trayectoria con empuje el perigeo de esta nueva órbita habrá variado y por tanto el tiempo desde su paso por el perigeo $(t_1 - t_p)_{t_b}$. Este valor lo obtendremos con la ecuación de Kepler, partiendo de la anomalía verdadera y calculando progresivamente la excéntrica AE_{t_b} , la media AM_{t_b} y el movimiento medio n_{t_b} :

$$\begin{aligned} AE_{t_b} &= 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e_{t_b}}{1+e_{t_b}}} \tan \frac{\theta_{t_b}}{2} \right) = 0.12272 \text{ rad} \\ AM_{t_b} &= AE_{t_b} - e_{t_b} \sin(AE_{t_b}) = 0.00337544 \text{ rad} \\ (t_1 - t_p)_{t_b} &= \frac{AM_{t_b}}{n_{t_b}} = \frac{AM_{t_b}}{\sqrt{\frac{\mu}{a_{t_b}^3}}} = 204.015 \text{ s} \end{aligned}$$

³Una vez hecho el primer cálculo se puede refinar más la estimación de t_b iniciando el proceso con valores más altos de t_b y reduciendo el paso de Δt_b . Por ejemplo considerando $t_b = 460 \text{ s}$ y $\Delta t_b = 0.001 \text{ s}$.

Por otra parte, el semiperiodo de esta órbita de transición coincidirá con el tiempo transcurrido desde su paso por el perigeo hasta alcanzar su apogeo

$$t_{(ra)_{t_b}} - t_p = \pi \sqrt{\frac{a_{t_b}^3}{\mu}} = 19988.1 \text{ s}$$

Por tanto, el tiempo desde que se apaga el motor hasta que llega al nuevo apogeo será

$$(t_{(ra)_{t_b}} - t_p) - (t_1 - t_p)_{t_b} = 19988.1 - 204.015 = 19249.4 \text{ s}$$

que añadiendo el tiempo de motor encendido nos da un total de:

$$t_2 = (t_{(ra)_{t_b}} - t_p) - (t_1 - t_p)_{t_b} + t_b = 19249.4 + 465.3 = 19714.7 \text{ s}$$

Ahora podemos hacer la integración sin impulso desde t_b hasta t_2 tomando como condiciones iniciales las expresiones de $\vec{r}(t_b)$ y $\vec{v}(t_b)$ obtenidas en (14) resultando

$$\vec{r}(t_2) = (-40260.9, -12533, 0) \text{ km} \quad \text{y} \quad \vec{v}(t_2) = (0.478, -1.534, 0) \text{ km/s}$$

que nos da $\|\vec{r}(t_2)\| = 42166.5 \text{ km}$. Este valor coincide con el estimado tras la integración con empuje confirmando que cuando $t = t_2$ la nave ha alcanzado la distancia de la órbita geosíncrona.

c) Al alcanzar este punto (C en figura 1) debemos aplicar un nuevo impulso para adaptarnos a la órbita geosíncrona que es circular. Este impulso debe ser

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v} &= \vec{v}_{circ} - \vec{v}(t_2) \stackrel{(4)}{\underset{(e=0)}{=}} \left(-\frac{\mu}{h} \sin \theta_C, \frac{\mu}{h} \cos \theta_C, 0 \right) - \vec{v}(t_2) \stackrel{\left(\frac{\mu}{h} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}\right)}{=} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{42164.1}} (-\sin \theta_C, \cos \theta_C, 0) - (0.478, -1.534, 0) = \\ &= (-1.392, -1.401, 0) \quad \rightarrow \quad \Delta v = 1.975 \text{ km/s.} \end{aligned}$$

siendo θ_C la anomalía verdadera⁴ de la nave en ese punto (C) de la órbita geosíncrona.

d) Por otra parte, la masa de propelente gastada en este impulso y en toda la transferencia es

$$m_2 \stackrel{(5)}{=} (1500 - m(t_b)) \left(1 - e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} \right) = 524.7 \text{ kg} \rightarrow m_p = m(t_b) + m_2 = 1076.03 \text{ kg.}$$

e) Para calcular el coste de la maniobra mediante la transferencia de Hohmann podemos estimar en primer lugar el momento de la órbita de transferencia utilizando la expresión (2)

$$h_H = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{42164.1 \cdot 6628}{42164.1 + 6628}} = 67572.8 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

⁴ $\theta_C = \arccos \left(\frac{\vec{r}(t_2) \cdot (1, 0, 0)}{\|\vec{r}(t_2)\|} \right) = 197.3^\circ$

que junto con la expresión (3) permite hallar los dos impulsos

$$\begin{cases} \Delta v_1 = \frac{h_H}{6628} - \sqrt{\frac{\mu}{6628}} = 2.44 \text{ km/s} \\ \Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{42164.1}} - \frac{h_H}{42164.1} = 1.472 \text{ km/s} \end{cases} \rightarrow \Delta v_H = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 3.912 \text{ km/s}$$

La masa de propelente gastada en esta transferencia se obtiene aplicando (5)

$$m_H = 1500 \left(1 - e^{-\frac{\Delta v_H}{I_{sp} g_0}} \right) = 1195.8 \text{ kg}$$

que supera en más de 100 kg el gasto de la primera transferencia, lo que supone un incremento de más de un 10 %.

6 Cierre

En este artículo se ha obtenido la expresión del movimiento incorporando impulso. Se han mostrado las ecuaciones con las que integrar para obtener la trayectoria y el consumo de propelente.

Se ha obtenido, para las situaciones de bajo impulso, una expresión que permite relacionar aproximadamente el radio de una transferencia con impulso continuo y el tiempo durante el que se mantiene activado el motor.

Estos contenidos han sido apoyados con ejemplos que muestran su aplicación a posibles situaciones reales.

Referencias

- [1] CURTIS, HOWARD D., *Orbital Mechanics for Engineering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.