



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA VALENCIA



**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS**

**NUEVA PROPUESTA PARA EL CÁLCULO DEL FACTOR DE
AMPLIFICACIÓN DE MOMENTOS
EN SOPORTES ESBELTOS DE HORMIGÓN ARMADO**

**EJERCICIO FINAL DE CARRERA
TIPO II**

AUTOR:
DAVID OLMOS RODRÍGUEZ

TITULACIÓN:
INGENIERO DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

TUTOR:
JOSÉ LUIS BONET SENACH

VALENCIA, JULIO 2006

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a mi tutor José Luís por su guía constante y ayuda en la tarea investigadora, aportando nuevas ideas y soluciones en los momentos de dificultad. Por su paciencia demostrada y el interés prestado.

A mi familia, amigos, y a Mari Carmen y Alfonso que siempre han estado a mi lado.

A mi madre que ha sido un constante apoyo y estímulo en la consecución de mis objetivos.

A María porque siempre tenía palabras de ánimo y comprensión, y ha tenido la infinita paciencia de estar siempre cuando la necesitaba.

Por último, y muy especialmente, a mi padre que ya no está y desgraciadamente no ha podido ver el resultado de mis esfuerzos.

ÍNDICE

Capítulo I: INTRODUCCIÓN

Introducción.....	I.1
Planteamiento del problema	I.2
Estructura del proyecto	I.3
Objetivos.....	I.4

Capítulo II: ESTADO DEL ARTE

Introducción.....	II.1
Método de amplificación de momentos.....	II.5
Artículos referentes al cálculo de la rigidez EI.....	II.6
Normativas.....	II.23

Capítulo III: SIMULACIÓN NUMÉRICA

Modelo teórico de referencia	III.2
Ensayos numéricos	III.7

Capítulo IV: ANÁLISIS DE RESULTADOS

Parámetros de estudio	IV.1
Metodología de análisis	IV.4
Propuesta de método.....	IV.32

Capítulo V: COMPROBACIÓN DEL MÉTODO

Comprobación gráfica	V.3
Comprobación numérica.....	V.32
Comprobación experimental.....	V.51

Capítulo VI: CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Conclusiones	VI.1
Futuras líneas de investigación	VI.4

Capítulo VII: BIBLIOGRAFÍA

Referencias Bibliográficas	VII.1
Ensayos experimentales	VII.3

ANEJOS

Anejo A: PROGRAMA DE ENSAYOS

Anejo B: GRÁFICAS

- B.I Secciones no rectangulares
- B.II Secciones rectangulares

I. Introducción.

I.1 Introducción

La constante evolución de los materiales empleados en la construcción, así como la búsqueda de una optimización de los mismos, ha llevado al empleo de soportes cada vez más esbeltos.

Así mismo, de un tiempo a esta parte, el empleo de hormigones de mayores resistencias de las habituales, incluyendo el empleo de hormigones de alta resistencia (HSC), ha permitido un ahorro del material empleado, al poder resistir con una menor sección mayores esfuerzos. Esto ha llevado a unos ahorros en los costes de producción de todas las estructuras que emplean el hormigón como material.

Esta ampliación del campo de aplicación de los materiales va acompañada de unos nuevos problemas que se plantean a la hora de realizar los estudios de resistencia de las secciones.

Habitualmente los estudios relacionados con pilas esbeltas de hormigón se centran en el estudio de flexión recta siendo pocos los estudios que aborden la flexión esviada, cuando en la realidad se muestra que los casos más habituales suelen producirse en flexión esviada.

El tipo de estudio que a lo largo de los últimos años se ha venido realizando, ha sido el de piezas de sección rectangular. Habiéndose desechado el estudio en flexo-compresión de secciones que no fueran rectangulares.

Así mismo la introducción de las nuevas tecnologías de materiales, en particular las secciones compuestas, ha soslayado el estudio de las secciones de hormigón armado que no fueran rectangulares.

En estructuras metálicas la inestabilidad de soportes esbeltos era bien conocida. En cambio en el hormigón armado y debido a su menor resistencia, el diseño de piezas esbeltas no se inició hasta muchos años más tarde en los que la tecnología permitió ir reduciendo la geometría de los soportes de hormigón. A partir de ese instante los efectos de segundo orden que habían quedado en un segundo plano a la hora de condicionar el diseño de las piezas, volvían a tener una importancia fundamental.

Este trabajo se inicia como consecuencia de esa necesidad de dar respuesta a los nuevos retos que plantea el estudio de los efectos de segundo orden y la forma de abordarlos de una manera racional a la vez que rápida y efectiva.

I.2 Planteamiento del problema

El objetivo que se plantea es el de buscar una metodología que permita diseñar soportes esbeltos de hormigón que estén sometidos a flexo-compresión, independientemente del tipo de sección que se trate: tanto si se ve sometida a una flexión recta como esviada o si el análisis se realiza para cargas instantáneas o diferidas.

Los pasos para resolver este problema serán:

- El estudio de los diferentes métodos empleados para resolver el problema del diseño con efectos de segundo orden en piezas que no sean rectangulares. Buscando siempre un método sencillo y efectivo
- Valoración de un método adecuado para resolver el problema y búsqueda de una metodología que permita afrontar la resolución del problema de la manera más efectiva posible
- Realización de ensayos basados en un modelo teórico de referencia, suficientemente contrastado que sirva de base.
- Análisis de los parámetros que gobiernan el problema de los efectos de segundo orden. Clasificación según su importancia
- Propuesta de un método que sea válido para analizar la resistencia mecánica del soporte.
- Validación del modelo

En este momento se recoge una de las líneas de investigación que quedaron abiertas en el estudio de “*Método simplificado de cálculo de soportes esbeltos de hormigón armado de sección rectangular sometidos a compresión y flexión biaxial*” de Bonet (2001) y siguiendo la metodología aplicada se busca dar respuesta al problema planteado.

I.3 Estructura del proyecto

El proyecto se ha estructurado en siete partes o capítulos claramente diferenciados, más dos anejos que complementan el estudio realizado en las partes anteriores.

El primer capítulo, el presente, denominado **Capítulo I – Introducción**, en el que se hace una presentación del proyecto y descripción de los diferentes apartados que compone el estudio.

El segundo capítulo, denominado **Capítulo II – Estado del Arte**, se analiza el estado actual del conocimiento, las diferentes formas en las que se puede analizar el problema, entre ellos la de amplificación de momentos, y se repasan los diferentes estudios que han tenido mayor relevancia. Así mismo se hace una breve descripción de las normativas que tratan la amplificación de momentos para el estudio de piezas esbeltas de hormigón armado.

El **Capítulo III – Simulación Numérica**, incide en la forma que se tendrá de analizar el problema de piezas esbeltas, describiendo la tipología de ensayos y las diferentes características de las secciones.

En el **Capítulo IV – Análisis de Resultados**, se analizan los resultados obtenidos mediante los ensayos numéricos. Se estudia la diferente influencia que tiene cada parámetro en el resultado obtenido y por último lugar se realiza una propuesta de método simplificado.

Como consecuencia directa surge el **Capítulo V – Verificación de la propuesta**, en la que se comprueba el nuevo modelo propuesto y se ve el rango de validez. Se llevan a cabo tres tipos diferentes de verificaciones: a nivel gráfico, a nivel numérico y a nivel experimental. En este capítulo se analizan los parámetros que tienen mejor ajuste y se explica las limitaciones que tiene el modelo.

El **Capítulo VI – Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación**, se resume y extrae una valoración crítica del estudio realizado viendo las características principales del modelo, así como las limitaciones existentes. Se valora los diferentes ajustes de los parámetros. En un segundo apartado, y a partir de las conclusiones extraídas, se sugieren las diferentes líneas de investigación

En el **Capítulo VII – Bibliografía**, se recoge los diferentes estudios, normativas y artículos a los que se ha ido haciendo referencia a lo largo del estudio.

Los apartados o capítulos que son complementarios al estudio realizado, se han integrado en los **ANEJOS**:

En el primer **Anejo – A**, se detalla el programa de los diferentes ensayos realizados en formato de tabla con las diferentes variaciones de los parámetros que influyen en el estudio.

En el segundo **Anejo – B**, se muestra las diferentes gráficas que se obtienen del programa de ensayos: se grafía los resultados que se obtienen mediante el modelo

teórico de referencia y el ajuste que se obtiene con el modelo propuesto. Se divide este anejo en dos partes claramente diferenciadas, la primera, corresponde a las piezas de sección no rectangular que son las que se han ensayado específicamente para este estudio y en una segunda parte se detalla una selección de las de sección rectangular que se ensayaron en la *Bonet* (2001).

I.4 Objetivos

Las principales líneas de investigación de la mayoría de los autores, además de los métodos de cálculo que aparecen en las normativas más representativas, se centran en el análisis de soportes en flexo-compresión recta. En ninguna de las normas se propone ningún método de cálculo específico para el cálculo de soportes esbeltos sometidos a sollicitación de flexo-compresión esviada que tenga en cuenta la interacción entre el eje fuerte y el eje débil en flexión.

El método más general propuesto por las normativas [EHE (1999), ACI-318 (05), BAEL-91 y BS-8110 (1997)] es amplificar componente a componente el momento de primer orden con las expresiones deducidas en flexión recta.

En las instrucciones EHE (1999), CM-90 y EC-2 (1991), se plantea un método simplificado para desacoplar los efectos y comprobar en cada plano de pandeo el Estado Límite independientemente; esta forma de proceder sólo puede aplicarse bajo determinadas condiciones de geometría y sollicitación. No obstante, esta forma de proceder puede llevar a situaciones del lado de la inseguridad, por no tener en cuenta la interacción del eje débil que provoca una pérdida de capacidad resistente en el soporte.

Únicamente el EC-2 (1991) y la instrucción BS-8110 (1997) contemplan la posibilidad de fallo debido a los efectos de segundo orden en este tipo de soportes, teniendo en cuenta la interacción entre los ejes de flexión.

Los métodos simplificados para la consideración de la pérdida de capacidad resistente de los soportes debido a los efectos de esbeltez se engloban dentro de dos tipologías:

- Métodos de amplificación de momentos (que aproxima la rigidez EI)
- Métodos de la excentricidad adicional o del momento complementario (que aproxima la curvatura)

El método de amplificación de momentos es el que se ha elegido para el estudio de soportes esbeltos en este ejercicio de fin de carrera. Ambos métodos son válidos para soportes cuyas excentricidades en los extremos sean iguales en dirección y magnitud. Si no sucediera así, sería necesario un cálculo previo de una excentricidad equivalente, en función de la excentricidad equivalente, en función de la excentricidad en los extremos (aunque esta situación no es objeto de estudio en este trabajo).

En el *Capítulo IV* se desarrolla el método de amplificación de momento para el análisis de soportes esbeltos en flexo-compresión esviada con excentricidades en los extremos iguales.

Además se realiza una comparación, *Capítulo V*, de los resultados que proporcionan los métodos simplificados de las normativas respecto a los ensayos experimentales. Se compararán los resultados de las normativas frente a los obtenidos con el método simplificado propuesto en este estudio. Este análisis comparativo se extenderá a soportes con diferentes características y mecánicas; y condiciones de sollicitación.

II. Estado del arte.

II.1 Introducción

Los elementos lineales al verse sometidos a esfuerzos de flexión adoptan una posición deformada que está desplazada con respecto a la original. En estas condiciones y cuando se presentan esfuerzos axiales de compresión se producen flexiones adicionales: mayores cuanto mayor es el desplazamiento con respecto a la posición original. Esta flexión adicional es un efecto de segundo orden, conocido como no-linealidad geométrica, que anula el principio de linealidad que se aplica entre las acciones que se someten a la estructura y los esfuerzos de la misma.

Estos esfuerzos de segundo orden se ven incrementados al considerar: materiales como el hormigón, con un comportamiento no-lineal, la fisuración y efectos diferidos (no-linealidad de los materiales).

A continuación se realizará una breve introducción a los diferentes métodos aplicables para el estudio de los efectos de segundo orden.

II.1.1. Métodos generales:

1. Elementos finitos:

Es el procedimiento más extendido para el análisis de estructuras de hormigón. La ventaja que tiene este método es que se puede aplicar con relativa sencillez a cualquier tipo de estructura, pudiéndose incorporar el comportamiento de hormigón armado.

1.1. Planteamiento en rigidez

Se establece una relación entre los desplazamientos $u(x, y, z)$ y las fuerzas exteriores actuantes $F(x, y, z)$, a partir de las ecuaciones de equilibrio, constitutivas y cinemáticas, estableciéndose una interpolación en desplazamientos:

$$F_{(x,y,z)} \xrightarrow{\text{Ec. equilibrio}} \sigma_{(x,y,z)} \xrightarrow{\text{Ec. constitutivas}} \epsilon_{(x,y,z)} \xrightarrow{\text{Ec. cinemáticas}} u_{(x,y,z)}$$

Los aspectos constitutivos del hormigón desde el punto de vista del material, se consideran en la ecuación constitutiva. La no-linealidad geométrica se considera al equilibrar en posición deformada y al considerar los efectos de segundo orden de las deformaciones.

1.2. Planteamiento en flexibilidad

A diferencia del planteamiento en rigidez que se basa en la interpolación de desplazamientos, estos métodos se basan en la interpolación de esfuerzos internos.

La principal ventaja es que la solución es más exacta al interpolar esfuerzos. Por el contrario, su formulación es más compleja, siendo necesaria más operaciones en cada iteración.

Los efectos no-lineales del material se tienen en cuenta en la matriz de flexibilidad de la sección. La no-linealidad geométrica se considera al equilibrar en posición deformada y al considerar los efectos de segundo orden de las deformaciones.

2. Método de la integración de las curvaturas

Es un método eficaz para analizar soportes aislados, en cambio no es adecuado para estructuras reticuladas.

El procedimiento de cálculo adecuado para analizar una columna exenta, consiste en subdividir el soporte en un número suficiente de tramos representativos y mediante un proceso iterativo encontrar la solución que satisface las condiciones de equilibrio y compatibilidad de las deformaciones y, todo ello teniendo en cuenta las ecuaciones constitutivas de los materiales considerados.

3. Método de las diferencias finitas.

Es un método aplicado para el análisis de soportes aislados, no siendo eficaz por su complejidad el empleo en estructuras reticuladas.

II.1.2. Métodos simplificados para soporte aislado

1. Esbeltez límite inferior

En ciertas circunstancias los efectos de segundo orden son pequeños y pueden ser despreciables. Por consiguiente cabe diferenciar entre aquellos soportes en los que se ha de realizar un análisis de segundo orden [soportes esbeltos] y los que no precisan dicho análisis [soportes cortos]. Es necesario establecer un criterio, mediante la esbeltez del soporte, para diferenciar entre soportes esbeltos y cortos, ese parámetro es la esbeltez límite inferior.

2. Flexo-compresión recta en soportes esbeltos

2.1 Métodos de comprobación

Estos métodos consisten en determinar, para los esfuerzos aplicados, si se produce el equilibrio estable, el agotamiento del soporte o la inestabilidad

Los esfuerzos de segundo orden se obtienen estableciendo una función conocida que aproxima la deformada del soporte. Así, de una forma sencilla, se obtiene la relación entre la deformación total de cada sección y su curvatura. La relación entre momento total y curvatura es la *directriz geométrica*.

La respuesta mecánica frente al momento flector total aplicado en cada sección del soporte se tiene en cuenta mediante los diagramas momento-curvatura para el esfuerzo axial dado, esta relación es la *directriz mecánica*.

Si la función que aproxima la deformada del soporte se define mediante un único parámetro (desplazamiento o curvatura de una sección) sólo es necesario plantear la ecuación de equilibrio en una única sección. La determinación de la deformada supone el planteamiento del equilibrio en tantas secciones como parámetros se hayan empleado para definirla.

Los diferentes métodos de comprobación se diferencian entre sí por la hipótesis de aproximación de la deformada.

- Método de la deformada senoidal
- Método de la columna modelo
- Aproximación de la deformada a partir de una función lineal
- Método basado en una combinación lineal de curvaturas
- Aproximación de la deformada a partir de series de Fourier.
- Aproximación de la deformada a partir de la combinación lineal de funciones trigonométricas con una función lineal.

2.2 Métodos de dimensionamiento indirecto

La filosofía general de estos métodos consiste en reducir el problema del soporte a un problema de flexión compuesta mediante el cálculo de un momento flector de

referencia a partir de los esfuerzos de cálculo. Según el modo de obtener este momento flector de referencia se distinguen dos tipos de métodos:

- Método del momento complementario o excentricidad adicional.
- Método de amplificación del momento.

Estos métodos son las que habitualmente se emplean en las normas de los distintos países.

2.3 Métodos de dimensionamiento directo

Estos permiten el cálculo directo de la armadura necesaria de la sección a partir de los esfuerzos de primer orden. Debido a la diversidad de parámetros que es necesario considerar, sólo son aplicables a unos casos muy específicos de distribución de armadura y forma de la sección.

II.1.3. Flexo-compresión esviada en soportes esbeltos

El problema se complica mucho más por la presencia de momentos flectores fuera de los planos de simetría, provocando direcciones de curvaturas no coincidentes con la dirección de momento flector total. La deformada del soporte formará una curva alabeada en la que el plano de flexión será variable para cada sección analizada.

Los métodos simplificados de análisis de las columnas esbeltas solicitadas a esfuerzos de flexo-compresión esviada se pueden clasificar como:

- Métodos gráficos.
- Métodos simplificados basados en la reducción a dos cálculos en flexión recta.
- Métodos simplificados basados en la reducción a un problema uniaxial equivalente.
- Métodos simplificados en flexión biaxial.
- Métodos generales simplificados en flexión biaxial.

II.1.4. Métodos simplificados de cálculo seccional

Es un método de dimensionamiento indirecto aplicado a soportes esbeltos de hormigón para la evaluación de los efectos de segundo orden: reduciéndose el análisis del soporte a un cálculo seccional en flexión compuesta mediante la evaluación de unos esfuerzos de referencia obtenidos a partir de los esfuerzos de referencia obtenidos de los de cálculo.

Los tipos de procedimientos se engloban en cuatro:

- Métodos gráficos.

- Métodos simplificados basados en la reducción a dos cálculos en flexión recta.
- Métodos simplificados basados en la reducción a un problema uniaxial equivalente.
- Aproximaciones analíticas de la superficie de interacción $[N, M_x, M_y]$

II.2 Método de amplificación de momentos

La aplicación del método, objeto de este ejercicio de fin de carrera, es la obtención del momento total de diseño: a partir del axil aplicado en el soporte N_d y el momento flector de primer orden en los extremos M_1

$$M_t = \delta_{ns} \cdot M_1 \quad (\text{II.i})$$

siendo,

M_t momento total de diseño

M_1 momento de primer orden

$\delta_{ns} = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} < 1$ factor de amplificación

N axil aplicado en el soporte

N_{cr} axil crítico, igual a $\frac{EI \cdot \pi^2}{\ell_p^2}$

EI rigidez del soporte

ℓ_p longitud de pandeo del soporte

El método se basa en suponer que el soporte adopta una deformada senoidal.

Para aplicar este método es necesario conocer la rigidez del soporte que depende de la geometría y características mecánicas del soporte.

Como se comprobará más tarde la determinación de la rigidez es un punto fundamental debido a que la sobrevaloración del mismo conduce a la obtención de momentos del lado de la inseguridad.

El método de amplificación de momentos contempla los efectos diferidos de forma implícita, disminuyendo la rigidez del soporte.

En el siguiente apartado se realizará un estudio de la bibliografía referente a la amplificación de momentos y al cálculo de la rigidez EI .

II.3 ARTICULOS REFERENTES AL CÁLCULO DE LA RIGIDEZ EI

- En 1966, el *Bureau of Public Roads* propuso la siguiente expresión:

$$EI = 1.6 \cdot E_c \cdot I_h \cdot (N/N_0) \cdot (1 - N/N_0) \quad (\text{II.ii})$$

siendo,

- E_c módulo de deformación del hormigón
- I_h inercia homogeneizada de la sección
- N axil aplicado
- N_0 axil último de la sección sometido a compresión simple

- En 1966, **Spang** propuso para las columnas con cuantía geométrica de armadura del 4% la siguiente expresión:

$$EI = 1000 \cdot f_c \cdot I_c \quad (\text{II.iii})$$

siendo,

- f_c resistencia a compresión del hormigón
- I_c inercia bruta de la sección

Cuando la cuantía no es del 4% el autor propone

$$EI = \frac{E_c \cdot I_c}{4.1} + E_s \cdot I_s \quad (\text{II.iv})$$

siendo,

- E_c módulo de deformación del hormigón
- I_c inercia bruta de la sección
- E_s módulo de deformación del acero
- I_s inercia de las armaduras

- En 1966, **Parme** lleva a cabo un estudio para obtener la rigidez EI en secciones con la armadura dispuesta en dos caras opuestas. Los parámetros sobre los que examina el modelo son la cuantía geométrica, el nivel de axil (N/N_0) y la distancia entre la armadura de compresión y de tracción. Este autor presenta sus resultados en tablas obteniendo un intervalo de variación entre 0.167 y 1.625 veces la rigidez obtenida por *Spang* (1966).

- En 1971, la instrucción *ACI-318* presenta dos expresiones para la obtención de la carga crítica de Euler para cargas instantáneas: la primera en función de la rigidez del hormigón y la segunda incluyendo además la rigidez de las armaduras.

$$EI = \frac{E_c \cdot I_c}{2.5} \quad (\text{II.v})$$

$$EI = \frac{E_c \cdot I_c}{5} + E_s \cdot I_s \quad (\text{II.vi})$$

siendo,

E_c módulo elástico del hormigón

I_c inercia bruta de la sección transversal

E_s módulo elástico del acero

I_s momento de inercia de las armaduras respecto al c.d.g. de la sección bruta de hormigón

Distintos autores como *Mirza y Mavichak et alii*, citan que dichas expresiones están del lado de la inseguridad en determinadas ocasiones al no tener en cuenta ni el nivel de axil ni la excentricidad relativa entre sus parámetros.

- En 1976, **Mavichak et alii**, obtienen de forma experimental el valor de la rigidez EI para columnas de sección rectangular y oval: con cuantía geométrica de armadura igual al 1%, esbeltez mecánica de 50 y con resistencia del hormigón entre 30 y 40 MPa.

$$EI = \frac{E_c \cdot I_c}{5 \cdot (1 - N/N_0)} \quad (\text{II.vii})$$

siendo,

E_c módulo de deformación del hormigón

I_c inercia bruta de la sección

N axil aplicado

N_0 axil último de la sección sometido a compresión simple

Estos autores afirman que esta expresión propuesta no tiene un comportamiento aceptable al no haber contemplado como variable la cuantía de armadura un su distribución. Por eso incorporan los ensayos realizados por *Drysdale (1971)* y *Wu (1973)*, correspondientes a una serie de columnas de esbeltez mecánica de 105 y aproximadamente una cuantía geométrica del 3%, obteniendo la siguiente expresión:

$$EI = \frac{0.2 \cdot E_c \cdot I_c + E_s \cdot I_s}{1.6 \cdot (1 - 2 \cdot N/N_0)} \quad (\text{II.viii})$$

siendo,

E_s módulo elástico del acero

I_s momento de inercia de las armaduras respecto al c.d.g. de la sección bruta de hormigón

- En 1979, **Furlong** propone a partir de resultados experimentales las siguientes expresiones de la rigidez del soporte:

$$EI = (1/3 \cdot N/N_0 - 1/7.5) \cdot E_c \cdot I_c + E_s \cdot I_s \geq E_s \cdot I_s \quad (\text{II.ix})$$

$$EI = (2/3 \cdot N/N_0) \cdot E_c \cdot I_c \geq 0.2 \cdot E_c \cdot I_c \quad (\text{II.x})$$

siendo,

N axil aplicado

N_0 axil último de la sección sometido a compresión simple

E_c módulo elástico del hormigón

I_c inercia bruta de la sección transversal

E_s módulo elástico del acero

I_s momento de inercia de las armaduras respecto al c.d.g. de la sección bruta de hormigón

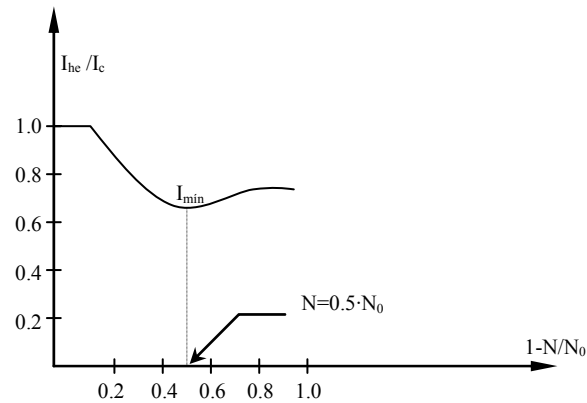
- En 1987, **Ehsani et alii**, desarrollan una expresión de la rigidez en soportes circulares a partir de un estudio paramétrico. Las variables estudiadas fueron:

- El brazo mecánico entre centros de gravedad de las armaduras extremas.
- El recubrimiento de la sección.
- El límite elástico del acero f_{yk}
- La cuantía geométrica de armadura ρ .

Obteniéndose como conclusiones:

- La variable con mayor influencia es la cuantía de armadura.
- La rigidez EI presenta un mínimo cuando la carga que actúa en la sección es igual al 50% del axil último a compresión simple.
- Para pequeños niveles de cuantía ($\rho=0.01$) la menor rigidez de la sección se obtiene para cargas pequeñas, en la práctica este límite tiene poca importancia, ya que siempre actúa una pequeña carga axil.
- La influencia del límite elástico del acero en la rigidez, es pequeña
- Respecto al recubrimiento de la sección, se puede considerar como despreciable ya que en la práctica los recubrimientos utilizados son similares.

En la siguiente figura se muestra la relación que existe entre el índice de carga $(1-N/N_0)$ y el ratio entre la inercia homogénea eficaz (I_{he}) y la inercia bruta (I_c).



Los autores proponen dos expresiones analíticas distintas para obtener la rigidez del soporte. Para axiles inferiores a $0.5 \cdot N_0$, se ajusta una función cúbica, y en caso contrario una parábola. Las expresiones que se obtienen son excesivamente complicadas para la aplicación en un método simplificado.

- En 1990 **G. R. Sigmon** y **S. H. Ahmad** analizan el código de la *ACI 318-83* en soportes de sección transversal circular, se comprueba que sobreestima la rigidez del soporte y por lo tanto proponen un nuevo método que incluye el efecto de la carga axial P y de la cuantía de armadura. Se plantea el problema de verificar las ecuaciones *10-10* y *10-11* de la *ACI*.

$$EI = (E_c I_g / 5 + E_s I_{sc}) / (1 + \beta_d) \quad (\text{II.xi})$$

$$EI = E_c I_g / 2.5 \quad (\text{II.xii})$$

Siendo β_d el porcentaje de momento de carga muerta sobre la carga total

Hasta la fecha el único intento que se había producido en el estudio de secciones circulares era el de un programa no lineal que encontraba la profundidad de la fibra neutra que equilibraba las fuerzas. Se empleó una transformación de la sección para encontrar el momento de inercia de la sección en rotura para la profundidad de fibra neutra. El error de este método era el de emplear dicha transformación de sección ya que está limitado al rango lineal elástico de los materiales.

El modelo desarrollado por los autores lleva a cabo análisis en sección en rotura y en no rotura. El análisis en sección en rotura satisface el equilibrio de fuerzas y la compatibilidad de deformaciones para obtener el momento y curvatura de los diferentes modelos de deformación de compresión del hormigón. Se asumen las siguientes premisas:

1. Deformaciones en la armadura y en el hormigón se asumen como directamente proporcionales a la distancia de la fibra neutra
2. Las curvas del hormigón tensión-deformación [incluido el comportamiento *postpico*] y del acero [incluido la deformación de endurecimiento/ablandamiento] se describen completamente.
3. La contribución de la resistencia a tracción del hormigón hasta la rotura puede ser empleada.

La limitación del modelo es que las barras deben tener todas el mismo diámetro. El acero debe estar dispuesto en forma de círculo. Siendo γ el cociente entre la distancia entre el extremo de compresión y de tracción del acero y el diámetro de la columna.

El modelo de computación se empleó para llevar a cabo un estudio paramétrico para investigar el efecto de los diferentes parámetros:

- Coeficiente de armado ρ .
- Coeficiente de carga axial sobre axial último P/P_0 [desde 27.6 a 82.8 MPa].
- Cuantía de armadura ω .

El resultado en el momento de rotura demuestran que la rigidez relativa a flexión [$EI/E_c I_g$] disminuye conforme aumenta la resistencia del hormigón. Esto es más importante con bajos niveles de carga axial. La ecuación (II.xi) sobrestima la rigidez relativa a flexión para niveles bajos y altos de la resistencia del hormigón con $\rho = 3$.

El valor de la rigidez a flexión aumenta al aumentar los valores de γ . La rigidez relativa también aumenta cuando lo hace el coeficiente de armado.

Para diferentes diámetros de columna pero con el mismo valor de γ se mantiene igual la rigidez relativa a flexión. Esto es así debido a que la rigidez relativa es adimensional con respecto a $E_c I_g$. En cambio al aumentar γ y el diámetro de la columna, la rigidez relativa a flexión aumenta.

Para un coeficiente de armado ρ del 3%, el resultado con niveles elevados de carga axial ($P/P_0=0.6$) muestran que las columnas de HSC tienen una mayor rigidez relativa con respecto a las columnas de NSC. Para niveles bajos de carga axial, la situación es a la inversa y son las columnas de NSC las que tienen una mayor rigidez relativa. La ecuación (II.xi) sobrestima la rigidez relativa en todos los casos.

La rigidez relativa se reduce al aumentar el coeficiente de armado ρ . Es más, con un valor de P/P_0 entre 0.6 y 0.2, cuanto mayor es ρ menor es la reducción de la rigidez relativa. Esta reducción es menor debida a que las armaduras contribuyen en mayor medida a la rigidez con el hormigón deformado a 0.003. Para valores de P/P_0 entre 0.2 y 0, cuanto más coeficiente de armado ρ , mayor es la reducción de la rigidez relativa a flexión. Esto es debido a la forma de la curva $M-\Phi$ para los casos de baja nivel de carga axial.

El diámetro de la columna no tiene ningún efecto en los valores de la resistencia de la armadura mientras γ y ρ permanezcan constantes. Un aumento en el diámetro de la columna y en γ produce un aumento de la rigidez relativa, esto es menos pronunciado para la condición de carga axial cero.

Las ecuaciones propuestas por los autores mediante un modelo de regresión fueron las siguientes:

Rotura

Para $P/P_0 \leq 0.6$

$$EI/E_c I_g = 0.61\sqrt{\omega} - 0.24 \cdot (P/P_0) + 0.74 \quad (\text{II.xiii})$$

Para $P/P_0 > 0.6$

$$EI/E_c I_g = 0.53\sqrt{\omega} - 0.54 \cdot (1 - P/P_0)^3 + 0.50 \quad (\text{II.xiv})$$

Siendo en ambos casos

$$\omega = \rho \frac{f_y}{f'_c}$$

$$\rho = \frac{A_{st}}{A_g}$$

$$P_0 = 0.8 \cdot f'_c A_c + f_y A_{st}$$

Efecto de la rigidez relativa en la amplificación de momentos

La rigidez a flexión es directamente proporcional a la carga crítica, por lo que es importante una razonable aproximación de EI a la hora de calcular el factor δ de amplificación del momento. La aproximación tiene que tener en cuenta las variaciones debidas a rotura y no-linealidad de la curva tensión-deformación del hormigón.

Los valores que se obtienen en rotura muestran que el código de diseño de la *ACI* está del lado de la inseguridad. Con una deformación del hormigón del 0.003 también se muestra que es inseguro el cálculo del factor de amplificación con este método.

Un valor más alto (sobrestimación) de la rigidez a flexión EI aumenta la estimación de la carga crítica por pandeo, llevando a un factor de amplificación menor. Esto produce valores de momento menores en columnas esbeltas y produciéndose diseños inseguros.

- En 1990, **Mirza** analiza estadísticamente los distintos parámetros que intervienen en la definición de la rigidez: el objetivo es el revisar y actualizar los métodos de análisis propuestos por la *ACI 318-89*.

Para ello diseña un procedimiento por el cual variando las características mecánicas y geométricas del soporte obtiene la rigidez del soporte, basándose en el diagrama momento-curvatura de la sección crítica y en la hipótesis que la deformada del soporte adopta una forma senoidal. La expresión de la ecuación sería:

$$EI = \alpha \cdot E_c I_g + E_s I_{se} \quad (\text{II.xv})$$

α es un factor adimensional reductor [factor de rigidez efectiva] que depende de un número determinado de variables que afectan a la rigidez de columnas esbeltas.

La ecuación teórica en la que se basa el estudio es:

$$EI = \frac{P_u \cdot \ell^2}{4 \cdot \left[\sec^{-1}(M_{cs} / M_{col}) \right]^2} \quad (\text{II.xvi})$$

a partir de las ecuaciones de momento de *Timoshenko y Gere*

$$M_c = M_2 \cdot \sec \left[\frac{\pi}{2} \sqrt{P_u / P_c} \right] \quad (\text{II.xvii})$$

y el axil crítico:

$$P_u = \pi^2 EI / \ell^2 \quad (\text{II.xviii})$$

Las variables que estudia son:

1. Excentricidad relativa (e/h).
2. Índice de carga aplicada ($1-N/N_0$) o bien $(1-N/N_0)^2$.
3. Esbeltez geométrica del soporte ($\lambda_g=l_p/h$).
4. Relación de rigidez $E_s I_s / E_c I_c$ o E_s / E_c o bien I_s / I_c .
5. Cuantía geométrica o mecánica de armadura.
6. Índice de recubrimiento (recubrimiento de la armadura longitudinal dividido por el canto total de la sección).

El primer y tercer grupo de variables se consideran como las más importantes. Los autores aportan un estudio experimental que demuestra el gran efecto que tienen estas variables en la resistencia de las columnas esbeltas.

El estudio indica que existe una gran dependencia entre la excentricidad relativa y el índice de carga aplicada, lo cual parece razonable, ya que la relación N/N_0 depende de la excentricidad. Además se observó que la relación entre las rigideces o el recubrimiento tiene muy poca importancia sobre la rigidez.

Cabe destacar que la variable de la esbeltez l_p/h no presenta ninguna correlación con la excentricidad e/h .

Por último el autor realiza una regresión múltiple con los datos $EI_{teóricos}$, obteniéndose la siguiente expresión:

$$EI = \left[\left(0.27 + 0.003 \cdot \frac{l_p}{h} - 0.3 \cdot \frac{e}{h} \right) \cdot E_c \cdot I_c + E_s \cdot I_s \right] \geq E_s \cdot I_s \quad (\text{II.xix})$$

Se observa que la esbeltez tiene una relativa importancia, respecto al resto de variables, por tanto el autor prescinde de este efecto obteniendo la siguiente expresión:

$$EI = \left[\left(0.3 - 0.3 \cdot \frac{e}{h} \right) \cdot E_c \cdot I_c + E_s \cdot I_s \right] \geq E_s \cdot I_s \quad (\text{II.xx})$$

- En 1992 **Jian-Min Zeng et alli** proponen un método práctico para calcular la rigidez a flexión en vigas basándose en las relaciones de momento-curvatura, ampliándolo más tarde para calcular la rigidez de flexión para columnas de hormigón armado con cargas excéntricas y periodos de carga cortos.

$$EI = \frac{(1 + 0.3 \cdot \gamma_1) \cdot (P_n \cdot e')}{\alpha \cdot \Phi_y} \quad (\text{II.xxii})$$

Φ_y se puede calcular mediante la expresión $\Phi_y \cdot d = (0.7 + 2.8 \cdot \xi) \cdot 10^{-3} + f_y / E_s$, mientras que la altura de la zona de compresión a nivel seccional ($\xi \cdot d = \beta_1 \cdot x$) se debe determinar de acuerdo con las condiciones de equilibrio y compatibilidad de *ACI 318-89*.

Para comprobar la validez del modelo se compara con las expresiones de *ACI 318-89* y con las de *Mirza*. La comparación se llevo a cabo con 68 ensayos disponibles.

En los ensayos de estas 68 columnas, los anchos de la sección estaban comprendidos entre $b = 12$ a 15 cm, alturas desde $h = 10$ a 15 cm. Las cuantías en la zona de tracción $\rho = 0.5$ a 3.21% y la cuantía en la zona de compresión $\rho' = 0.5$ a 3.21% . La resistencia a compresión del hormigón $f'_c = 200.4$ a 60.5 MPa, la resistencia de plastificación del acero $f_y = 227$ a 434 MPa, esbelteces $L/h = 9.6$ a 31.0 y excentricidades $e/h = 0.06$ a 1.0 . Los ensayos concluyeron que las expresiones propuestas se aproximaban mucho mejor a los resultados de los ensayos que los de *ACI 318-89* y *Mirza*: siendo el coeficiente de variación del modelo propuesto el menor de todos y el de *ACI* el mayor.

Parámetros:

$$\gamma_1 = (b_i - b) \cdot h_f / (b \cdot d)$$

P_n axil último

e' excentricidad de la carga

α Coeficiente reductor de la rigidez

Φ_y Curvatura de la sección correspondiente al primer punto plástico del acero

β_1 Factor del bloque rectangular de compresión [*ACI 318 - 89*]

- En 1994, **M. Resheidat et alli**, proponen una expresión para evaluar la rigidez para cargas instantáneas. El diseño de columnas esbeltas de hormigón está fuertemente influido por la rigidez efectiva a flexión que varía debido a la rotura, fluencia y comportamiento no lineal del hormigón.

La variación de la rigidez relativa EI no es uniforme con respecto a la carga axil P . Se calcula como coeficiente entre el momento M_y y la curvatura Φ_y .

$$EI = \alpha \cdot E_c \cdot I_c + E_s \cdot I_s \quad (\text{II.xxiii})$$

siendo,

- α factor de rigidez
- E_c módulo de deformación del hormigón
- I_c inercia bruta de la sección
- E_s módulo de deformación del acero
- I_s momento de inercia de las armaduras, respecto al centro de gravedad de la sección bruta

La expresión del factor de rigidez α es igual a:

$$\alpha = \alpha_{\text{máx}} \cdot \left[\frac{2 \cdot \beta}{\beta_{\text{máx}}} - \left(\frac{\beta}{\beta_{\text{máx}}} \right)^2 \right] \text{ para } \beta \leq \beta_{\text{máx}} \quad (\text{II.xxiii})$$

siendo,

- $\beta = N / N_0$
- N carga axial mayorada
- N_0 resistencia a compresión simple
- $\beta_{\text{máx}} = 0.6 - 0.004 \cdot \frac{f_y}{f_c} - \beta \cdot \rho$
- $\alpha_{\text{máx}} = 0.65 - 0.02 \cdot \frac{f_y}{f_c} - \beta \cdot \rho$
- ρ cuantía geométrica del acero
- f_y límite elástico del acero
- f_c resistencia del hormigón

-
- En 2001 **W. Zhou** y **H.P. Hong** llevan a cabo un análisis probabilístico de los modelos de error de los métodos de predicción de la resistencia de columnas esbeltas de hormigón armado. Los modelos seleccionados incluían los de amplificación de momentos propuesto por los códigos de diseño de *ACI* y *CSA*, y los modelos teóricos basados en estabilidad. Se incluyó en el estudio tanto los hormigones de resistencia normal como los de alta resistencia.

Los resultados de los análisis sugieren que el coeficiente de variación de los modelos de error para columnas esbeltas de hormigón armado, RC, puede llegar a ser de hasta un 20% lo cual es considerablemente superior a las cifras que se sugieren y emplean para análisis de confianza en la literatura. Los resultados también sugieren que los factores de los que dependen los modelos de error son la resistencia a compresión del hormigón, la excentricidad de la carga y el factor de esbeltez. Sin embargo este último parámetro, el factor de esbeltez, tiene un peso irrelevante en los modelos de error.

Para investigar los efectos de los diferentes bloques de esfuerzos de los modelos de error, se emplearon los parámetros señalados en los códigos de diseño del *ACI* y de la *CSA* y los propuestos por *Ibrahim y McGregor (1977)*. A continuación se muestran los tres parámetros, siendo α_1 y β_1 los que definen la geometría del bloque, ϵ_{cm} la deformación de la fibra neutra (*McGregor 1977*).

Parámetro	ACI 318-95	CSA A23.3-94	Ibrahim y McGregor (1997)
α_1	0.85	$0.85-0.0015 \cdot f'_c$ ≥ 0.67	$0.85-0.00125 \cdot f'_c$ ≥ 0.725
β_1	$1.09-0.008 \cdot f'_c$ $0.85 \geq \beta_1 \geq 0.65$	$0.97-0.0025 \cdot f'_c$ ≥ 0.67	$0.95-0.0025 \cdot f'_c$ ≥ 0.70
ϵ_{cm}	0.003	0.0035	0.003

Los análisis probabilísticas empleados en el estudio (*Zhou y Hong 2000*) de modelizado del error para columnas cortas de RC sirvieron de base para este estudio. En un primer lugar se obtienen modelos de error simplificados que son independientes de las propiedades de columna y de las condiciones de carga. De estos modelos simplificados se puede comprobar que los métodos basados en la amplificación de momentos (tanto *ACI*, *CSA* como *Ibrahim*) son métodos muy conservadores siendo el error medio superior a la unidad. Los valores del coeficiente de variación están entorno a un 20%, que es superior a los valores del coeficiente de variación que sugieren para las propiedades de los materiales, tales como f'_c y f_y . De ahí que se deba tener esto en cuenta al emplear la amplificación de momentos en la fiabilidad del análisis de columnas esbeltas de RC.

En un segundo lugar se llevó a cabo un estudio pseudoprobabilístico para encontrar la dependencia de los parámetros f'_c , θ y l_e/r (*Carroll y Rupert 1988*).

Siendo

$$\theta = \tan^{-1}(h/e) \text{ [rad] siendo igual a } 0 \text{ en flexión pura y } \pi/2 \text{ con axil puro.}$$

$$l_e = \text{longitud efectiva de flexión}$$

Las conclusiones que se extrajeron tras realizar una estimación pseudoprobabilística fueron:

1. Existe una alta variación asociada a la predicción de la capacidad de columnas esbeltas de RC, con un coeficiente de variación de hasta el 20%. El modelo teórico proporciona una predicción mucho más ajustada aunque con valores por encima del 15%. Los resultados del análisis sugieren que para columnas esbeltas de RC los modelos de error que se encuentran en la literatura pueden no ser adecuados para su empleo en códigos de diseño.
2. Los modelos de error dependen de los parámetros f'_c y θ , en cambio los efectos de l_e/r son despreciables.
3. La modelización de los errores para la amplificación de momentos no se ve afectada por los parámetros de los tres bloques de esfuerzos considerados, y es imprescindible tener en cuenta los efectos de segundo con precisión para lograr la precisión de la amplificación del momento.

- En 2001 **S.S.F. Mehanny**, **H. Kuramoto** y **G.G. Deierlein** proponen un método que supone un compromiso entre las guías básicas que sugieren la *ACI 318-95* y *CEB-FIB*. Los autores proponen una relación lineal para estimar la resistencia efectiva secante para columnas/vigas cargadas a un nivel significativo:

$$EI_{cf}/EI_{g,tr}=(0.4+P/2.4P_b)\leq 0.9 \quad (\text{II.xxiv})$$

donde $EI_{g,tr}$ es la rigidez bruta de flexión; P es la carga axial de compresión y P_b el axial de compresión en rotura estable. Hay dos diferencias significativas entre la propuesta y las previsiones de la *ACI 318-95* y *FEMA 273* es que la ecuación (II.xxii) considera la variación en la compresión axial relativa al punto de equilibrio en el punto de superficie de interacción de resistencia, y el refuerzo de acero mediante el empleo de propiedades de sección transversal bruta. Considerando los dos valores límites $0.4 \cdot EI_{g,tr}$ para $P=0$ y $0.9 \cdot EI_{g,tr}$ para $P>1.2 \cdot P_b$ se define una transición lineal para valores del axial entre esos dos límites. Los valores que se obtienen de rigidez de la ecuación (II.xxii) son ligeramente superiores a los $0.4 \cdot E_c I_g$ y $0.8 \cdot E_c I_g$ propuestos por *Hage y MacGregor* (1974) y empleando términos de inercia bruta (sin considerar el armado) en vez de inercia transformada de la sección transversal.

Se comparó el modelo con los resultados experimentales obtenidos con los ensayos de: *Watson y Park* (1994); *Azizinamini, Corley y Johal* (1992); y *Kuramoto et alii* (1994). Se comparó con niveles de carga entre $P/P_b=0$ hasta 1.72 ($P/A_g f_c'=0$ hasta 0.7). Las resistencias del hormigón iban desde $f_c=39$ hasta 72 MPa. Los autores creen que la ecuación (II.xxiv) es aplicable para todo tipo de hormigones, aunque también reconocen que se debería confirmar con ensayos especialmente para valores de resistencia significativamente mayores del intervalo.

Las secciones de *Watson y Park* (1994) eran secciones cuadradas de 400mm con 12 redondos de 16mm de diámetro espaciados uniformemente ($\rho_s=1.5\%$) con diferentes cantidades de refuerzo transversal. La resistencia del hormigón iba desde los 39 hasta los 47 MPa.

La serie de *Azizinamini, Corley y Johal* (1992) eran secciones cuadradas de 457mm con 8 redondos de 25mm de diámetro espaciados uniformemente ($\rho_s=1.9\%$) con diferentes cantidades de refuerzo transversal. La resistencia del hormigón es desde 41.4 MPa.

La serie de *Kuramoto et alii* (1994) eran secciones rectangulares de 300·400 mm doblemente armada con 6 redondos de 16mm de diámetro espaciados en la cara superior e inferior de la dimensión de 400mm ($\rho_s=1.4\%$) con $f_y = 342$ MPa. La armadura transversal consiste en cercos de 6 mm de diámetro cada 40 mm con $f_y = 993$ MPa con cercos de diferentes cantidades de refuerzo transversal. La resistencia del hormigón es desde 71.7 MPa.

Los resultados mostraron que la ecuación medía muy bien el cambio de respuesta y de rigidez con la carga axial. En cambio los dos modelos del *CEB* infravaloraban el valor de la rigidez, probablemente porque parten de la sección en rotura en vez de considerar un modelo que considere una media entre rotura y no rotura. El modelo *AIJ* [*Architectural Institute of Japan*] en cambio muestra ratios muy bajos entre la rigidez medida y la bruta transformada.

Se observa que el modelo propuesto ofrece una mejora de la rigidez sobre las recomendaciones de la *ACI 318-95* y *FEMA 273* debido a que considera los efectos de

la compresión axil. Además comparándolo con otros métodos alternativos se comporta bien o incluso mejor que algunos. Esto es debido a que muchos métodos no ponderan con la sección en rotura y sin rotura, y al considerar sólo la sección en rotura se infravalora la rigidez. Comparándolo con *ACI 318-95*: las previsiones de análisis de columnas esbeltas también infravaloraban la rigidez en el punto de plastificación inicial, esto es razonable porque las previsiones pretenden dotar de un límite inferior de rigidez para determinar los momentos de segundo orden. Esta forma de proceder de manera conservadora no debería ser utilizada para análisis dinámicos de sismos donde la respuesta se deberá determinar empleando la medida justa de la rigidez.

- En 2002 **S. A. Mirza** y **E. A. Lacroix** analizan tres procedimientos computacionales diferentes: *ACI 318-99*, *Eurocódigo 2* y un programa comercial de elementos finitos no-lineales. Los parámetros que se incluyeron en el estudio fueron la resistencia del hormigón, el porcentaje de excentricidad, el ratio de esbeltez, la cuantía de armadura y la cuantía transversal de armadura.

ACI 318-99

Se especifica que la máxima carga axil que debe actuar debe estar limitada a $0.8 \cdot \Phi \cdot P_0$, siendo

$$P_0 = 0.85 \cdot f'_c \cdot (A_g - A_{st}) + f_y \cdot A_{st} \quad (\text{II.xxv})$$

El límite superior tiene como objetivo tener en consideración excentricidades adicionales que no se hayan considerado en el diseño pero que puedan existir en la estructura real.

El área de armado longitudinal de la sección transversal no debe de ser menor de $0.01 \cdot A_g$. El límite inferior de la *ACI* de A_{st} tiene como función proteger contra la rotura a la armadura longitudinal debido a la retracción y fluencia bajo esfuerzos de compresión sostenidos bajo cargas de servicio.

El ratio de esbeltez l/h de una columna biapoyada sujeta a curvatura simple simétrica por flexión no mayor de 30 cuando se emplea la amplificación de momentos. Este límite superior tiene como objetivo representar el rango superior de ensayos físicos de columnas esbeltas empleados en los estudios de calibración cuando se desarrolló la amplificación de momentos.

La resistencia axil de una columna se determinó inicialmente como el menor de la ecuación (II.xxv) y la siguiente expresión:

$$P_c = \pi^2 \cdot EI / \ell^2 \quad (\text{II.xxvi})$$

Esto establece la máxima resistencia axil de la columna. El momento resistente de flexión de la sección transversal M_{cs} se divide por el factor de amplificación δ_{ns} para obtener el momento flector resistente de la columna M_{col} para cada punto de la sección transversal de la curva de interacción con la carga axil P_u menor que la resistencia a axil puro de la columnas. El factor δ_{ns} equivale a

$$\delta_{ns} = \frac{1}{1 - \left(\frac{P_u \cdot \ell^2}{\pi^2 \cdot EI} \right)} \quad (\text{II.xxvii})$$

Para columnas esbeltas sujetas a cargas de corto tiempo [empleadas en este estudio] las ecuaciones se simplifican en,

$$EI = 0.4 \cdot E_c I_g \quad (\text{II.xxviii})$$

$$EI = 0.2 \cdot E_c I_g + E_s I_{se} \quad (\text{II.xxix})$$

con $E_c = 4733 \cdot \sqrt{f'_c}$ MPa ; $E_s = 199955$ MPa ; I_g momento de inercia de la sección bruta e I_{se} momento de la inercia de las barras longitudinales . En un intento de tener en cuenta la no-linealidad y la rotura de la curva tensión-deformación para determinar la rigidez EI, *Mirza* (1990) propone una modificación de la ecuación de cálculo de la rigidez:

$$EI = \left[0.3 \cdot \left(1 - \frac{e}{h} \right) \cdot E_c I_g + E_s I_{se} \right] \geq E_s I_{se} \quad (\text{II.xxx})$$

Las resistencias de las columnas de la *ACI* se computan teniendo en cuenta las ecuaciones (II.xxviii), (II.xxix) y (II.xxx).

Eurocódigo 2

El código pone un límite superior de 50 MPa a la f'_c . La mínima dimensión de la sección transversal debe ser superior a 200mm y un mínimo de excentricidad de e/h de 0.10 para columnas esbeltas ($l/h \geq 7.5$).

El método de cómputo del *Eurocódigo 2* es el de *columna modelo* [soporte aislado empotrado en la base y libre en el extremo]. En este modelo se asume flexión con curvatura simple bajo carga axial y momento flector teniendo la máxima flexión en la base. La columna se diseña para una excentricidad total e_{tot} que consiste en a) la excentricidad de primer orden equivalente que incluye el efecto del gradiente de momentos, b) la excentricidad causada por las imperfecciones iniciales y c) la excentricidad de segundo orden que actúa en la rotura de la sección transversal,

$$e_{tot} = e + e_a + e_2 \quad (\text{II.xxxi})$$

con e excentricidad de primer orden de una columna sujeta a momentos iguales y opuestos en los extremos; e_a excentricidad adicional que tiene en cuenta las imperfecciones iniciales [dimensiones y excentricidad carga]; e_2 las excentricidad de segundo orden. Reordenando la ecuación (II.xxxi),

$$e = e_{tot} - (e_a + e_2) \quad (\text{II.xxxii})$$

que representa la relación entre la resistencia al momento flector de una columna y la de su sección transversal.

MEF – Modelo de Elementos Finitos

Se emplea un programa comercial (Abaqus 1994) que tiene en cuenta efectos de segundo orden que incluyen las de material y las geométricas. La sección transversal se

divide en tres tipos de materiales con diferentes curvas tensión-deformación: hormigón no confinado, hormigón parcialmente confinado y la armadura longitudinal del acero.

El número de puntos de integración se aumentaron con respecto a los que venían por defecto para aumentar la precisión del método. En el punto medio de la columna se sitúa un nodo por motivos de integración. Se puede aprovechar la simetría y considerar la mitad de la sección en soporte ahorrando tiempo de computación.

Para el análisis de una columna sometida a axil puro se añade una imperfección al elemento no deformado inicial para asegurar la continuidad entre la estabilidad de la columna y la no estabilidad.

Comparativa de los tres modelos:

Un menor coeficiente de variación implica un método computacional más fiable siempre que la media no se desvíe significativamente de la unidad.

El MEF con una media del ratio de la resistencia de 0.98 y un coeficiente de variación de 0.13 es que el procedimiento más preciso de los estudiados. Esto es debido a las curvas tensión-deformación empleadas y a la precisión inherente al método.

El método del *ACI* empleando la ecuación (II.xxviii) es el menos preciso de todos los métodos con una media en el ratio de la resistencia de 1.10 y un coeficiente de variación de 0.22.

En cambio, empleando el método de la *ACI* con la ecuación (II.xxix) y el *Eurocódigo 2* se obtienen valores muy cercanos: 1.08 y 1.12 en cuanto a medias de las resistencias y de 0.17 como coeficiente de variación en ambos casos.

Se obtienen unas precisiones mayores empleando la ecuación (II.xxx) de la *ACI* con una media de 1.07 y desviación de 0.14. Esto sucede al estimar la rigidez de una forma más precisa.

Efectos de las variables principales:

- La mejor capacidad resistente empleando el MEF no se ve afectada por ninguna de las variables examinadas al incorporarlas en el propio método.
- Las resistencias de la *ACI* y el *Eurocódigo 2* se ven afectadas por e/h , ρ' , y l/h . En cambio no se ven afectadas por los parámetros ρ_{rs} , f_y/f'_c y f'_c dentro de los rangos que se examinaron.
- El efecto de e/h en la resistencia de la ecuación *ACI* (II.xxx) es mínimo.

- En 2004 **M. Khuntia** y **S.K. Ghosh** revisan las previsiones de la ACI 318-02 de la rigidez efectiva tanto en vigas como en soportes. Los parámetros principales que se consideran son: la cuantía de la armadura, porcentaje de carga axil, al porcentaje de excentricidad y la resistencia a compresión del hormigón. Se propone a partir de un estudio paramétrico fórmulas sencillas para determinar la rigidez efectiva a flexión. Estas expresiones son válidas para todos los niveles de carga incluyendo cargas de servicio y cargas últimas. Los análisis analíticos muestran que la rigidez a flexión que

presenta la *ACI* es extremadamente conservadora en el diseño de columnas esbeltas de hormigón.

Asumir estos parámetros conservadores de la rigidez afecta al análisis estructural y al diseño de la siguiente forma:

1. Efectos $P-\delta$ y $P-\Delta$: asumir valores menores de la resistencia a flexión incrementa el efecto computado $P-\delta$ en el soporte individual y el $P-\Delta$ en el soporte de un edificio, por lo tanto aumentan los efectos de segundo orden. El actual procedimiento *ACI* de cálculo de columnas esbeltas de RC (Sección 10.13.4.3) predice un fallo de estabilidad debido a los efectos $P-\Delta$, ese fallo no se predice si se emplean otros procedimientos del código *ACI* (Sección 10.13.4.1 y 10.13.4.2).
2. Distribución interna de fuerzas: en estructuras regulares/normales se asume que la distribución interna de fuerzas no se ve afectada de una forma significativa por las rigideces que se asumen para las distintas partes de la estructura. Esto sucede mientras los ratios de rigidez columna-viga en las diferentes uniones sean de un valor similar a los de la estructura sujeta a cargas crecientes. Incluso en esos casos, los efectos $P-\Delta$ pueden aumentar las fuerzas internas en los extremos del soporte. Análisis llevados a cabo por los autores sugieren que el empleo de rigideces inadecuadas pueden llevar a resultados del lado de la inseguridad.

Para obtener una rigidez a flexión de las columnas de RC, se realiza previamente un estudio paramétrico para averiguar la influencia de las diferentes variables: cuantía de armadura ρ_g [1 a 3%], la resistencia a compresión del hormigón f_c [27.579 a 82.737 MPa], el nivel de carga axial P/P_0 (desde 0.00 a 0.80), y el ratio de excentricidad e/h (desde 0.10 a 0.80). El momento nominal se calcula como el cociente entre el momento flector y la curvatura $E \cdot I_e = M/\Phi$. La magnitud $E \cdot I_e$ se considera hasta la plastificación por tracción de las armaduras.

Influencia de la cuantía de armadura ρ_g : Cuando el área del acero aumenta, para una determinada profundidad de la fibra neutra, la carga axial y el correspondiente momento aumentan para cualquier valor de P_u/P_0 y e/h . Por lo tanto $E \cdot I_e$ es substancialmente mayor para columnas con porcentajes de armado mayor.

Influencia del porcentaje de excentricidad e/h : Este es el segundo factor más importante que afecta a la rigidez de una columna. Para columnas con niveles altos de excentricidad, el momento flector es superior para un determinado valor de carga axial, llevando a un aumento de la longitud de rotura a flexión y una reducción en la rigidez efectiva de la sección. La reducción de la rigidez efectiva debida al aumento de excentricidad ya fue referida por *Mirza* (1990) y *Lloyd y Rangan* (1996).

Influencia del nivel de carga axial P_u/P_0 : Cuando la carga axial última, P_u , aumenta, disminuye la profundidad de las fisuras de flexión. Por lo tanto sería esperable que la rigidez efectiva de la columna aumente con el nivel de carga. Sin embargo los análisis muestran que para un valor determinado de la excentricidad, cuando aumenta el P_u , la deformación de compresión del hormigón en las fibras extremas aumenta en una proporción superior que el incremento de P_u/P_0 . Esto significa que un aumento del porcentaje de nivel de carga conlleva una reducción en la rigidez efectiva de la columna.

Influencia de hormigones de alta resistencia: El aumento de resistencia del hormigón conlleva un aumento de la rigidez efectiva de la columna para un valor dado de P_u/P_0 y de e/h .

La propuesta que formularon estos autores obviaba, para aportar mayor simplicidad a la solución final, la influencia del hormigón de alta resistencia [esta simplificación se hizo del lado de la seguridad]

$$EI_e = E_c I_b \cdot (0.80 + 25 \cdot \rho_g) \cdot \left(1 - \frac{e}{h} - 0.5 \cdot \frac{P_u}{P_0}\right) \leq E_c I_b \quad (\text{II.xxxiii})$$

La ecuación anterior se podría expresar en términos de e/h , como:

$$EI_e = E_c I_b \cdot (0.80 + 25 \cdot \rho_g) \cdot \left(0.65 - 0.5 \cdot \frac{e}{h}\right) \leq E_c I_b \quad (\text{II.xxxiv})$$

y en términos de P_u/P_0 , como:

$$EI_e = E_c I_b \cdot (0.80 + 25 \cdot \rho_g) \cdot \left(0.30 - 0.5 \cdot \frac{P_u}{P_0}\right) \leq E_c I_b \quad (\text{II.xxxv})$$

Los resultados obtenidos con las ecuaciones (II.xxxiv) y (II.xxxv) se comparan con el estudio paramétrico. Se comprueba que las predicciones de la ecuación (II.xxxiv) son ligeramente más conservadoras que los valores que se obtienen de la ecuación (II.xxxiii). Los valores que se obtienen de la ecuación (II.xxxv) en cuanto a P/P_0 son los menos precisos de todos (II.xxxiii), (II.xxxiv) y (II.xxxv).

Estrictamente hablando las ecuaciones (II.xxxiv) y (II.xxxv) son bastante precisas si las cargas aplicadas (P_u , M_u) se aproximan a la curva de diseño de fuerzas, lo cual sucede en el caso más perjudicial. Para el diseño lejos de esas situaciones los resultados son muy conservadores, por lo que los autores recomendaban el empleo de la ecuación (II.xiv) ya que tiene mejor ajuste bajo cargas de servicio.

Influencias de parámetros menores:

Influencia del recubrimiento: Al aumentar el recubrimiento del hormigón disminuye la rigidez efectiva y al disminuir el recubrimiento aumenta la rigidez. El porcentaje aumento/disminución de rigidez es entorno a 7-12% para una pulgada de disminución/aumento de recubrimiento.

Influencia de la distribución de armado: Al concentrar el recubrimiento cerca de dos caras, la media de la rigidez efectiva aumenta en un 8% comparándolo con el caso de distribución uniforme para cuantías del 1% y del 15% para cuantías del 3%. En todos los casos los resultados están del lado de la seguridad.

Influencia de la forma de la sección transversal: La rigidez efectiva de una sección circular es un 10% menor que la que tendría una sección rectangular con las dimensiones iguales al diámetro, la misma resistencia del hormigón y la cuantía de armadura.

Por simplicidad los efectos del recubrimiento, distribución de armado y forma de la sección transversal se pueden despreciar debido a que su influencia es menor, y proporciona más simplicidad en el cálculo.

- En 2004 **J.L. Bonet et alli** proponen una nueva expresión para el cálculo de la rigidez EI en soportes esbeltos de flexo-compresión recta.

$$EI = \alpha E_c I_c + E_s I_s \quad (\text{II.xxxvi})$$

con

$$\alpha = (-0.14 \cdot \lambda_g + 2.5) \cdot (e_0/h - 0.2) + \left(\frac{f_c}{200} + 0.12 \right) \not\leq 0.1 \quad \text{si } e_0/h < 0.2$$

$$\alpha = \left(\frac{f_c}{200} + 0.12 \right) \cdot (1.2 - e_0/h) \not\leq 0.1 \quad \text{si } e_0/h \geq 0.2$$

siendo

- α factor de rigidez
- λ_g esbeltez geométrica
- e_0/h excentricidad relativa
- f_c resistencia a compresión

II.4 NORMATIVAS

II.4.1. Código Americano ACI-318 (05)

En 1971, el American Concrete Institute (ACI) introduce un nuevo enfoque para el análisis de los soportes esbeltos basado en un conjunto de estudios analíticos y en las comprobaciones de numerosas series de ensayos, siguiendo las recomendaciones del *ACI-ASCE Comité 44, Reinforced Concrete Columns*

Este método es similar al empleado por la instrucción americana del metal, *AISC, American Institute of Steel Construction*.

Bases

(a) Clasificación de las estructuras y de los elementos estructurales

Estructura intraslacional

Se proporcionan dos criterios para comprobar la intraslacionalidad de la estructura:

- Si el incremento de los momentos en los extremos debidos a los efectos de segundo orden no excede del 5% de los momentos extremos de primer orden.
- Si el índice de estabilidad de un forjado es menor que un 0.05

$$Q = \frac{\sum N_d \cdot \Delta_0}{V_d \cdot L_c} \leq 0.05$$

donde

Q índice de estabilidad

N_d axiles mayorados aplicados en los soportes

Δ_0 desplazamientos laterales relativos de primer orden entre la parte superior e inferior del forjado

V_d fuerzas horizontales mayoradas

L_c altura del piso medida de nudo a nudo

Estructura traslacional

Aquella estructura que no satisfaga los criterios de intraslacionalidad anteriores.

(b) Metodología de cálculo

En la siguiente tabla se indica los métodos de cálculo que se han de emplear para el cálculo de soportes esbeltos, fundamentalmente, de la tipología estructural y la esbeltez mecánica.

Grado de traslacionalidad	Esbeltez mecánica	Metodología de cálculo
Estructura intraslacional o soporte aislado	$\lambda_m \leq 34 - 12 \cdot M_1 / M_2 \leq 40$	Análisis de 1 ^{er} orden
	$34 - 12 \cdot M_1 / M_2 \leq \lambda_m \leq 100$ con $34 - 12 \cdot M_1 / M_2 \leq 40$	Método simplificado para estructuras intraslacionales
	$\lambda_m > 100$	Método General
Estructura traslacional	$\lambda_m \leq 22$	Análisis de 1 ^{er} orden
	$22 \leq \lambda_m \leq 100$	Método simplificado para estructuras intraslacionales
	$\lambda_m > 100$	Método General

Con: M_2 momento máximo mayorado de extremos, tomado con signo positivo

M_1 momento mínimo de extremos, tomado con signo positivo que le corresponda ($|M_2| > |M_1|$)

Comprobación del soporte aislado

(a) Flexo-compresión recta

El *ACI-318* (05) propone para analizar los efectos de segundo orden en los soportes esbeltos el método simplificado de amplificación de momentos. Este procedimiento consiste en obtener previamente el valor del axil y de los momentos en extremos por medio de un análisis de primer orden, y dimensionar el soporte para el mismo valor del axil y para un momento amplificado igual a:

$$M_c = \delta_{ns} \cdot M_2$$

Rigidez de las barras

Los esfuerzos axiles N , los momentos en los extremos del soporte M_1, M_2 y el desplazamiento horizontal del piso Δ se calculan a través de un análisis elástico y lineal de primer orden del entramado, teniendo en cuenta la fisuración de los elementos y la duración de las cargas. Para llevar a cabo este cálculo las características mecánicas a considerar son:

- Módulo de deformación del hormigón $E_c = 4700 \cdot \sqrt{f_{ck}}$
- Momento de inercia
 - Vigas $0.35 \cdot I_g$
 - Columnas $0.7 \cdot I_g$

Los momentos de inercia se deben dividir por $(1 + \beta_d)$ cuando actúen cargas horizontales sostenidas.

- Área: $10 \cdot A_g$

con

A_g área bruta de la sección transversal

I_g inercia bruta de la sección transversal

β_d factor que introduce la fluencia, y que se define como la relación entre la carga axial permanente mayorada respecto a la carga axial total mayorada. Por simplificación se puede tomar 0.61

Estructura intraslacional

El momento amplificado para estructuras intraslacionales es igual a:

$$M_c = \delta_{ns} \cdot M_2$$

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{N_d}{0.75 \cdot N_{cr}}} \leq 1$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{\ell_p^2}$$

con

M_c momento mayorado de diseño del soporte

δ_{ns} factor de amplificación de momentos en estructuras intraslacionales

M_2 momento máximo mayorado de los extremos, tomado con signo positivo

N_{cr} axial crítico

C_m factor de corrección del momento, en función de la relación de excentricidades en extremos

$$C_m = 0.6 + 0.4 \cdot \frac{M_1}{M_2} \leq 0.4$$

con M_1 : momento mínimo de extremos tomado con el signo que le corresponda en relación al signo de M_2 ($|M_2| > M_1$)

N_d : axial mayorado aplicado

EI rigidez del soporte, que puede aproximarse por una de las siguientes expresiones

$$EI = \frac{(0.2 \cdot E_c I_g + E_s I_{se})}{1 + \beta_d}$$

$$EI = \frac{0.4 \cdot E_c I_g}{1 + \beta_d}$$

I_{se} momento de inercia de la armadura respecto al c.d.g. de la sección transversal

I_g momento de inercia de la sección bruta respecto al c.d.g.

El coeficiente de reducción 0.75 que aparece en la ecuación evalúa la variación de la resistencia de la sección transversal en el soporte. Este factor fue propuesto por *Mirza* en 1987.

El momento M_2 no debe tomarse menor que $M_{2,\text{mín}}$, que se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$M_{2,\text{mín}} = N_d \cdot (15 + 0.03 \cdot h)^1$$

Para soportes en los que $M_{2,\text{mín}}$ supera a M_2 , el valor de C_m debe ser tomado como 1 o bien usar el resultado de la ecuación basada en el cociente M_1/M_2 .

Estructuras tralacionales

(b) Flexo-compresión esviada

Para soportes en flexo-complexi3n esviada, las componentes del momento según cada eje principal se deben amplificar separadamente, en base a las condiciones de restricci3n de cada eje. Si las condiciones de rigidez son diferentes para cada eje resultarán diferentes factores de amplifi3n.

¹ h (mm)

II.4.2. Eurocódigo n°2 [EN 1992-1-1:2004]

Generalidades

El Eurocódigo aborda el estudio de elementos y estructuras en los que el comportamiento estructural está significativamente influido por los efectos de segundo orden.

En las situaciones en las que se tengan en cuenta los efectos de segundo orden, el equilibrio y resistencia debe ser comprobado en la deformada. Las deformaciones deberán ser evaluadas con los efectos relevantes de rotura, no-linealidad de los materiales y fluencia.

Se debe considerar en el análisis el efecto de la flexibilidad de elementos adyacentes así como la cimentación (interacción cimiento-estructura)

El comportamiento estructural debe ser considerado en la dirección en la que las deformaciones puedan ocurrir, incluyendo en caso de que sea necesario el efecto de flexión biaxial.

Las incertidumbres de la geometría y posición de las cargas axiales deben considerarse como momentos de primer orden adicionales basados en imperfecciones geométricas.

Los efectos de segundo orden pueden despreciarse si representan el 10% de los efectos de primer orden.

Criterios básicos para los efectos de segundo orden

(a) Criterios de esbeltez para elementos aislados.

Como alternativa al criterio del 10% para despreciar los efectos de segundo orden, se puede ignorar si la esbeltez λ es inferior al valor de λ_{lim} .

$$\lambda_{lim} = \frac{20 \cdot A \cdot B \cdot C}{\sqrt{n}}$$

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{N_d}{0.75 \cdot N_{cr}}} \leq 1$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{\ell_p^2}$$

con

- A $1/(1+0.2 \cdot \varphi_{ef})$; A = 0.7 si φ_{ef} es desconocido
B $\sqrt{(1+2 \cdot \omega)}$; B = 1.1 si ω es desconocido
C $1.7 - r_m$; C = 0.7 si r_m es desconocido
 φ_{ef} fluencia efectiva
 ω cuantía de armado : $A_s \cdot f_{yd}/(A_c \cdot f_{cd})$
 A_s es el área total de armado longitudinal
n $N_{Ed}/(A_c \cdot f_{cd})$ esfuerzo normal relativo
 r_m ratio de momento : $M_{0,1}/M_{0,2}$
 $M_{0,1}; M_{0,2}$ son los momentos de primer orden en los extremos $|M_{0,2}| \geq |M_{0,1}|$

Si los momentos $M_{0,1}$ y $M_{0,2}$ en los extremos generan tensión en el mismo lado, r_m se debe tomar positivo ($C \leq 1.7$), en caso contrario negativo ($C > 1.7$).

En los siguientes casos se debe tomar r_m como 1.0 ($C > 0.7$):

- o en elementos con excentricidad en los que los efectos de primer orden aparecen solo por o principalmente por las imperfecciones o cargas transversales
- o para elementos sin brazo de esfuerzo de manera general.

En los casos de flexión biaxial, el criterio de esbeltez se deberá comprobar separadamente para cada dirección. Dependiendo de este resultado, los efectos de segundo orden:

- (a) podrán ser ignorados en ambas direcciones
- (b) debería considerarse en una única dirección
- (c) debería considerarse en dos direcciones

(b) Esbeltez y longitud efectiva de elementos aislados

La esbeltez² se define como sigue

$$\lambda = \frac{\ell_0}{i}$$

con ℓ_0 la longitud efectiva³
 i es el radio de giro de la sección sin fisurar

(c) Fluencia

El efecto de la fluencia debe tenerse en cuenta en los efectos de segundo orden, con consideración especial de las condiciones generales de fluencia y de la duración de las diferentes cargas en la combinación de cargas consideradas.

² Esta definición se corresponde con la definición de esbeltez mecánica.

³ En el estudio que se lleva a cabo $\ell_0 = \ell$

La duración de las cargas deben tenerse en cuenta de una manera simplificada mediante la fluencia efectiva φ_{ef} , la cual, empleada con la carga de diseño, da una deformación de fluencia (curvatura) correspondiente a cargas cuasi-permanente:

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty; t_0)} \cdot M_{0Eqp} / M_{0Ed}$$

con

- $\varphi_{(\infty; t_0)}$ es el coeficiente final de fluencia
- M_{0Eqp} es el momento de primer orden en combinación de carga cuasi permanente
- M_{0Ed} es el momento de primer orden en combinación de carga de diseño

Si la relación M_{0Eqp} / M_{0Ed} , varía en un elemento o estructura, el ratio deberá ser calculado de la sección con máximo momento, o se puede emplear una media que sea representativa.

El efecto de fluencia puede ser ignorado siempre que se reúnan estas 3 condiciones de manera simultánea:

$$\varphi_{(\infty; t_0)} \leq 2$$

$$\lambda \leq 75$$

$$M_{0Ed} / N_{0Ed} \geq h$$

Aquí M_{0Ed} es el momento de primer orden y h es el canto de la sección transversal, en la dirección correspondiente.

(d) Métodos de análisis

La metodología que se incluye:

- Método general
- Métodos simplificados:
 - a. Método basado en la rigidez nominal
 - b. Método basado en la curvatura nominal

El método a), basado en la rigidez puede ser empleado tanto para elementos aislados como para estructuras completas, siempre que los valores de la rigidez se evalúen de manera adecuada.

El método b), se emplea principalmente para miembros aislados. No obstante puede extrapolarse para estructuras con supuestos reales, siempre que los valores de la rigidez se evalúen de manera adecuada.

(d).1 Método general

El método general está basado en análisis no lineales, incluyendo efectos de segundo orden como p.e. la no-linealidad geométrica.

Las curvas tensión-deformación del hormigón y acero deben ser empleadas para el análisis global.

$$E_{cd} = E_{cm} / \gamma_{cE}$$

En ausencia de modelos más refinados, la fluencia debe ser tenida en cuenta multiplicando todos los valores de deformación en el diagrama de tensión-deformación del hormigón de acuerdo con el factor $(1 + \varphi_{ef})$.

El efecto favorable del *tension-stiffening* puede ser considerado.

Normalmente, las condiciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones satisfacen en un número de secciones transversales. Una alternativa simplificada es considerar sólo las secciones críticas transversales, y asumir una variación relevante de la curvatura intermedia.

(d).2 Método basado en la rigidez nominal

En los efectos de segundo orden basados en la rigidez, los valores de rigidez efectiva deberían ser considerados, teniendo en cuenta los efectos de rotura, no-linealidad del material y fluencia en el cómputo global. Cuando sea relevante, la interacción con la cimentación debería ser considerada

(d).2.1 Rigidez nominal

El siguiente modelo se emplea para estimar la rigidez efectiva de soportes esbeltos de hormigón comprimidos con sección transversal cualesquiera.

$$EI = K_c \cdot E_{cd} I_c + K_s \cdot E_s I_s$$

donde

- E_{cd} es la elasticidad de diseño del hormigón
- I_c es el momento de inercia de la sección transversal
- E_s es la elasticidad de diseño del armado
- I_s es el momento de inercia del armado
- K_c es el factor que recoge los efectos de rotura, fluencia
- K_s es el factor de contribución de la armadura

Si $\rho \geq 0.002$, se pueden tomar los siguientes valores de las factores

$$K_s = 1$$

$$K_c = \frac{k_1 \cdot k_2}{1 + \varphi_{ef}}$$

donde

$$\rho = A_s / A_c$$

$$k_1 = \sqrt{f_{ck} / 20} \text{ (MPa)}$$

$$k_2 = n \cdot \frac{\lambda}{170} \leq 0.20$$

Se puede simplificar la expresión, siempre que $\rho \geq 0.01$

$$K_s = 0$$

$$K_c = \frac{0.3}{1 + 0.5 \cdot \varphi_{ef}}$$

d).2.2 Factor de amplificación de momentos

El momento total de diseño, incluyendo el momento de segundo orden, se puede expresar como una ampliación de los momentos flectores resultantes de un análisis lineal:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \cdot \left[1 + \frac{\beta}{(N_B / N_{Ed}) - 1} \right]$$

donde

M_{0Ed} es el momento de primer orden

β es un factor que depende de la distribución de esfuerzos de primer y segundo orden

N_{Ed} es la valor del axil de diseño

N_B es el carga crítica

Para elementos aislados con sección transversal constante y carga axil, el efecto de segundo orden se puede asumir que tiene una deformada senoidal. Siendo:

$$\beta = \pi^2 / c_0$$

con

c_0 coeficiente que depende de la distribución del momento de primer orden

Para miembros elementos sin carga transversal, los diferentes momentos en los extremos M_{01} y M_{02} pueden ser remplazados por una expresión :

$$M_{0e} = 0.6 \cdot M_{02} + 0.4 M_{01} \geq 0.4 M_{02}$$

Para los demás casos, $\beta=1$ es una simplificación razonable quedando la expresión reducida a:

$$M_{Ed} = \frac{M_{0Ed}}{1 - (N_{Ed} / N_B)}$$

II.4.3. Architectural Institute of Japan Standard (1991)

En 1991 el **Architectural Institute of Japan Standard (1991) – (AIJ 1991)** propone el empleo de la rigidez bruta $E_c I_g$ para el cálculo de cargas en servicio y la efectiva $EI_{ef} = \alpha \cdot E_c I_g$ con cargas factorizadas. El coeficiente α se determinan mediante las siguientes ecuaciones basadas en Sugano (1968)

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \left(\frac{1}{\alpha_y} - 1 \right) \cdot \frac{1 - M_c / M}{1 - M_c / M_y}$$

$$\alpha_y = (0.043 + 1.64 \cdot n \cdot \rho_t + 0.043 \cdot a / h + 0.33 \cdot v) \cdot (d_r / h)^2$$

$$M_c = \gamma \cdot \sqrt{f'_c} \cdot Z_c + P \cdot h / 6$$

$$M_y = \left[\frac{d}{h} \cdot \omega_1 + 0.5 \cdot v \cdot (1 - v) \right] \cdot f'_c \cdot b \cdot h^2$$

donde M es el momento objetivo; n es E_s/E_c ; ρ_t es la cuantía de armadura de tracción $A_{st}/b \cdot h$; a el tramo de cortante; d_r es la distancia desde el límite de la sección transversal a la armadura de tracción; M_c es el momento de rotura; Z_e es el módulo de la sección considerando el refuerzo de las armaduras; d es la distancia entre las armaduras de tracción y compresión; $\gamma = 0.56$ con los términos de resistencia del hormigón en MPa.

III. Simulación numérica.

El presente ejercicio de final de carrera se basa en la metodología expuesta en la tesis doctoral de *Bonet* (2001) “Método simplificado de cálculo de soportes esbeltos de hormigón armado de sección rectangular sometidos a compresión y flexión biaxial” , buscando la posible aplicación de este método para secciones que no sean rectangulares. Esto constituye una de las posibles líneas de futura investigación recogidas en la citada tesis.

En primer lugar se describirá el modelo teórico de referencia, que se ha empleado en el estudio: incidiendo en sus características particulares. En segundo lugar se describe los ensayos numéricos que se realizaron y el rango de variación de distintos parámetros de los ensayos. Además se muestra la tipología seccional empleada

III.1 Modelo teórico de referencia

Son necesarias unas características determinadas para que el modelo pueda reproducir con la máxima exactitud posible y con suficiente fiabilidad el comportamiento del hormigón armado.

Las solicitaciones normales definen el comportamiento de los soportes esbeltos, pudiéndose despreciar las solicitaciones de torsión o de cortante. Los soportes esbeltos presentan una dirección preferente la longitudinal, frente a las transversales. Es por esto que el modelo numérico ha de reproducir elementos estructurales unidimensionales frente a solicitaciones normales.

Un método adecuado para definir el modelo teórico de referencia es el de elementos finitos, ya que recoge la totalidad de las características requeridas del modelo y está suficientemente verificado por la práctica.

A continuación se detallan las características de las que consta el modelo.

III.1.1 No-linealidad geométrica

Los soportes esbeltos están fuertemente condicionados por la no-linealidad geométrica. La no-linealidad geométrica tiene dos consecuencias: grandes deformaciones y por otro lado grandes desplazamientos.

Cuando el tamaño del elemento finito es pequeño, el efecto de las grandes deformaciones no es relevante, pudiéndose despreciar los efectos de segundo orden de la ecuación cinemática. No obstante se incluye en el modelo.

La causa principal que origina la no-linealidad geométrica en las estructuras son los grandes desplazamientos. Se tiene en cuenta en el modelo teórico equilibrando la estructura en la posición deformada mediante la actualización de las coordenadas de los nodos.

III.1.2 Modelo de comportamiento de los materiales

a) Hormigón

El comportamiento tenso-deformacional del hormigón difiere si las fibras están comprimidas o están traccionadas.

El intervalo de variación de la resistencia del hormigón que se considera oscila entre 12 y 100 MPa.

Para hormigones de resistencia normal [NSC] cuya resistencia es menor de 50 MPa se ha procedido a emplear la ecuación constitutiva propuesta por el *Código Modelo* 1990. La ecuación esta suficientemente sancionada por la práctica.

Para los hormigones de alta resistencia [HSC], cuya resistencia es mayor a 50 MPa no existe en la actualidad una curva constitutiva lo suficientemente universal como en el hormigón normal. La curva constitutiva propuesta por el *CEB-FIP* (1995) sin confinamiento, se comporta adecuadamente.

La resistencia a tracción del hormigón difiere, según si el hormigón tiene una resistencia superior o inferior de 50 MPa.

Para hormigones de resistencia normal [NSC] se ha empleado la resistencia a tracción propuesta por el *CM* (1990) y la *EHE* (1999), cuyos valores coinciden.

Para los hormigones de alta resistencia [HSC] se ha optado por la propuesta del *CEB-FIP* (1995).

La relación tenso-deformacional del hormigón en tracción es lineal hasta alcanzar una tensión igual a la resistencia a tracción. El módulo de deformación elegido es igual al módulo de deformación tangente en el origen de la rama ascendente en compresión.

b) Acero

El comportamiento tenso-deformacional del acero se modeliza a partir del diagrama bilineal de la *EHE* (1999).

III.1.3 Fisuración

La fisuración es uno de los fenómenos que condiciona la definición del modelo de referencia.

En las secciones situadas entre fisuras no existe en general compatibilidad de deformaciones entre las fibras traccionadas de hormigón y las armaduras, no obstante, dichas fibras si absorben tensiones de tracción debiéndose de tener en cuenta esta capacidad residual para la evaluación de la rigidez del elemento. Es lo que se conoce como “*tension-stiffening*” o tenso-rigidez.

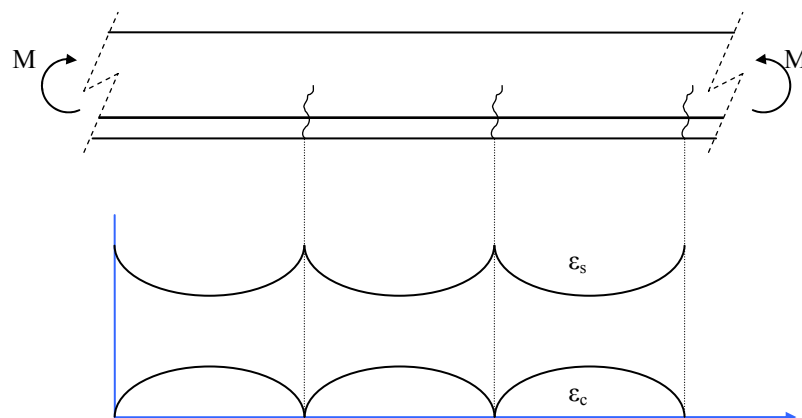


Figura III.1 Efecto del *tension-stiffening*

En el presente modelo el efecto de tenso-rigidez ha sido considerado a nivel fibra variando la ecuación constitutiva del hormigón (Figura III.2).

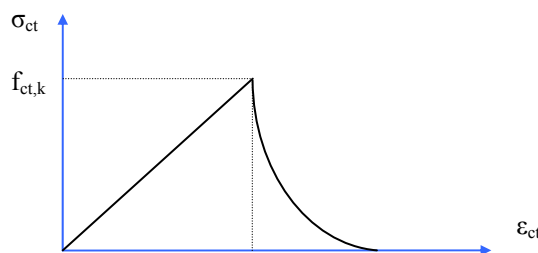


Figura III.2 Efecto del tension-stiffening: Modelo gradual

El *CEB-FIP* n°229 recomienda la utilización de este modelo gradual de descarga, para tener en cuenta dicho efecto.

III.1.4 Comportamiento en el tiempo.

a) Cansancio

Para analizar el comportamiento en el tiempo del elemento estructural, se disminuye la resistencia del hormigón mediante la aplicación de un coeficiente reductor igual a 0.85.

b) Retracción

El modelo teórico de referencia evalúa los efectos de la deformación de retracción para un instante determinado t .

La deformación de retracción se evalúa a partir del modelo multiplicativo definido en la *EHE* (1999) que coincide con el modelo propuesto por el *Código Modelo* (1990).

Los efectos de la deformación son considerados en el modelo teórico como una fuerza nodal equivalente externa.

c) Fluencia

Los efectos producidos por la deformación de fluencia en el modelo teórico de referencia se evalúan para un instante determinado t .

La evaluación del coeficiente de fluencia se realiza a partir del modelo definido en la *EHE* (1999) que coincide con el modelo propuesto por el *Código Modelo* (1990).

Los efectos de la deformación de fluencia se consideran en el modelo teórico, modificando la ecuación constitutiva del hormigón.

La modificación de la ecuación constitutiva del hormigón, se obtiene aplicando una afinidad paralela al eje de deformaciones de razón $(1+\eta\cdot\varphi)$ en donde η es un coeficiente ponderador que depende de la relación entre las cargas permanentes y las totales; y φ es el coeficiente de fluencia.

III.1.5 Inestabilidad y agotamiento por tensiones normales.

El objetivo del modelo teórico desarrollado es detectar los estados de carga que producen en la estructura la inestabilidad o el agotamiento por tensiones normales (Figura IV.3).

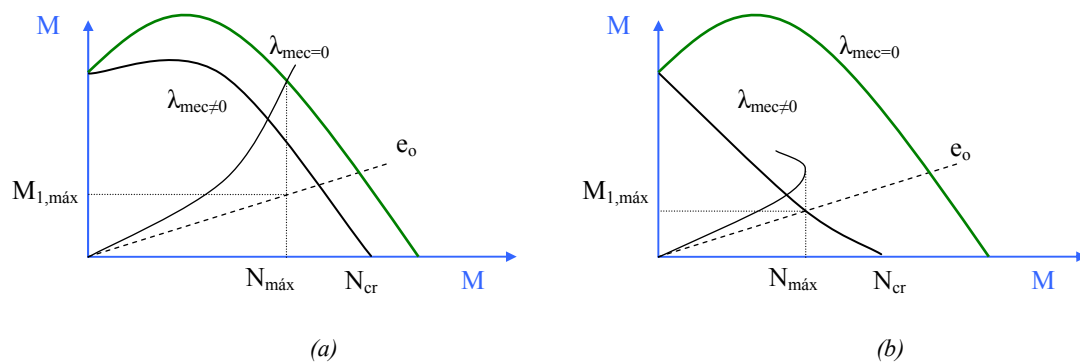


Figura III.3 Tipos de rotura (a) Agotamiento (b) Inestabilidad

La inestabilidad puede clasificarse en tres niveles diferentes: a nivel fibra, a nivel sección o a nivel estructura *Bonet* (2001).

La inestabilidad de la fibra se refleja en el diagrama constitutivo que presenta una rama de descenso, a este fenómeno de reblandecimiento del hormigón se denomina “softening”.

La inestabilidad a nivel sección se manifiesta en la formación de rótulas plásticas y da lugar al colapso de la estructura en el caso de ser isostática, o cuando el número de rótulas formadas sea superior al grado de hiperestatismo de la misma. Esta inestabilidad produce un fenómeno numérico denominado “snap-back” o vuelta a atrás.

Tanto la inestabilidad a nivel sección y a nivel fibra originan el fallo de la sección transversal. La inestabilidad a nivel estructura en cambio, implica la falta de equilibrio de la misma al desarrollarse unos desplazamientos tales que no es posible obtener una posición de equilibrio.

El soporte también puede fallar debido al agotamiento por tensiones normales de la sección: se produce cuando en la sección más solicitada de la estructura sobrepasa las deformaciones límites definidas en la *Instrucción de Hormigón Estructural EHE* (1999) (Figura III.4).

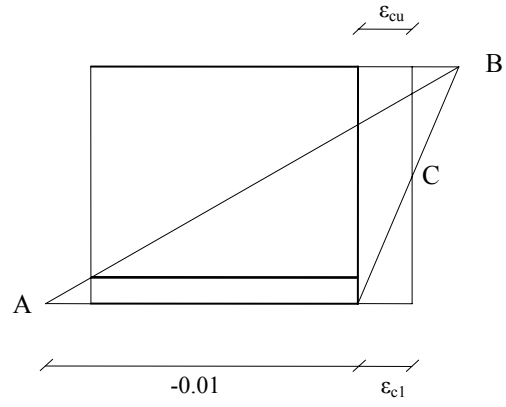


Figura III.4 Pivotes de rotura

III.2 Ensayos numéricos

III.2.1 Parámetros de estudio e intervalos de variación

Los factores que influyen en el comportamiento no-lineal de los soportes de hormigón se pueden dividir en geométricos y en mecánicos.

Los factores geométricos considerados son:

- Esbeltez mecánica del soporte.
- Tipo de sección transversal.
- Distribución de armaduras.
- Tipología estructural.

Los factores mecánicos considerados son:

- Esfuerzo axial.
- Ángulo de inclinación del esfuerzo flector respecto al eje fuerte de la sección.
- Resistencia mecánica del hormigón y del acero.
- Cuantía mecánica de la armadura.
- Efectos diferidos.

A continuación se detalla las características y el rango de variación de los factores

Esbeltez mecánica del soporte

La esbeltez del soporte es el factor más importante que caracteriza la influencia de los efectos de segundo orden. La instrucción *EHE* (99) despreja los efectos de segundo orden, si la esbeltez geométrica del soporte (λ_g) es inferior a 10, que corresponde a la esbeltez mecánica (λ_{mec}) de 35.

El rango de esbelteces mecánicas consideradas en el estudio están entre 35 y 100 que coincide con el rango definido por la *EHE* (99) [equivalentes a una esbeltez mecánica de entre 10 y 30] para la aplicación de los métodos simplificados. Este rango de aplicación es habitual en la edificación.

Tipo de sección transversal

Se han considerado diferentes tipos de sección transversal, algunos de ellos habituales en edificación rectangulares, circular, sección L (simétrica o asimétrica); otros menos comunes hexagonales, cruz, rectangular con hueco en su interior.

El objetivo sería cubrir el máximo posible rango de secciones transversales que es razonable encontrar y ver el comportamiento del modelo con secciones no tan comunes.

Distribución de armaduras

Se han considerado diferentes disposiciones de armaduras, en función de la sección transversal

- Armadura en las esquinas
- Armadura doblemente simétrica en las cuatro esquinas [rectangular]

- Armadura doblemente simétrica distribuida uniformemente en los cuatro lados [rectangular]
- Armadura simétrica dos caras opuestas [rectangular]
- Armadura distribuida uniformemente a lo largo de la sección.

Tipología estructural

El soporte objeto de estudio es biarticulado intraslacional.

Los resultados se pueden extrapolar a otras tipologías estructurales a partir de la definición de las longitudes de pandeo conforme a las indicaciones definidas en el artículo 43 de la instrucción *EHE (99)*.

Esfuerzo axial

Se ha tenido en cuenta la totalidad del rango de axiles de compresión que el soporte es capaz de resistir, es decir el intervalo de axiles definidos entre el axil nulo y el axil último en compresión simple N_0 , o el axil crítico del soporte, N_{cr} .

Una vez se ha definido las características del soporte, se analiza el soporte para diez niveles de axil entre axil nulo y el último de compresión simple. Si el axil aplicado es superior al axil crítico, el soporte adopta el segundo modo de pandeo desechándose estos resultados al carecer de sentido físico alguno. En determinados casos, con esbelteces altas, se subdividió en veinte niveles de axil.

Ángulo de inclinación del esfuerzo flector respecto al eje fuerte

Se estudia el soporte sometido a una sollicitación de flexo-compresión esviada, en donde se consideran distintos ángulos β del esfuerzo flector respecto al eje fuerte de la sección, comprendidos entre 0° y 90° ; 0° y 180° o 0° y 360° en función de la sección.

Resistencia mecánica del hormigón y el acero

El rango de estudio de la resistencia del hormigón es entre 30 y 100 MPa. La resistencia del acero que se considera es de 400 y 500 MPa, que coinciden con los valores normalizados en la instrucción *EHE (99)*.

Cuantía mecánica de la armadura

El intervalo de variación de la cuantía de armadura se establece a partir de las cuantías mecánicas mínimas y máximas definidas en la instrucción *EHE (99)*.

La instrucción *EHE (99)* fija un mínimo geométrico en soportes de un 4 ‰ para evitar los efectos producidos por deformaciones impuestas debidas a la temperatura y la retracción (Art. 24.3.5 EHE).

$$\omega \geq 0.004 \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$$

con,

- ω cuantía de la armadura
- f_{yd} resistencia de cálculo del acero
- f_{cd} resistencia de cálculo del hormigón

Además dependiendo del tipo de sollicitación se exigen unos máximos y mínimos mecánicos de armadura.

- a) Para secciones rectangulares y armaduras simétricas, sometidas a una sollicitación de flexión simple o compuesta (Art. 42.3.3 EHE):

$$\omega \geq 0.08$$

- b) Para secciones sometidas a compresión simple o compuesta:

$$\omega \geq \frac{0.1 \cdot N_d \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd} \cdot f_{ycd}} \quad ; \quad \omega \leq \frac{N_d \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd} \cdot f_{ycd}}$$

con,

N_d axil de cálculo

A_c área bruta de la sección

f_{yd} resistencia de cálculo del acero a compresión

$$f_{ycd} = f_{yd} < 400 \text{ MPa}$$

Si se tiene en cuenta el intervalo de variación de la cuantía mínima definida por el primer criterio, teniendo en cuenta el rango de variación de la cuantía mínima definida por el primer criterio, y el rango de variación de la resistencia del hormigón y del acero, se observa que su valor oscila entre 0.021 e 0.087, para el rango de resistencias mecánicas definidas. El primer valor corresponde para hormigón 100 MPa y acero de 400 MPa; y el segundo valor corresponde para el hormigón de 30 MPa y acero de 500 MPa.

El segundo criterio fija una cuantía mínima de 0.08 si la sollicitación que actúa en la sección es de flexión simple o compuesta.

En cuanto a la cuantía mínima definida por el tercer criterio: para el primer valor corresponde para hormigón de 100 MPa y acero de 400 MPa; y para el segundo valor corresponde para hormigón entre 30 Mpa y 50 MPa, y acero de 500 MPa.

Puesto que la cuantía mecánica mínima ha de cumplir tanto las limitaciones geométricas, definidas por el primer criterio, como las limitaciones mecánicas, definidas por el segundo y tercer criterio, la cuantía mínima que se considera es igual a 0.06.

La cuantía máxima se define a partir del tercer criterio. Si se fija el axil reducido igual a la unidad y la resistencia del acero igual a 400 MPa, la cuantía máxima sería igual a 1. Esta cuantía es excesivamente alta, por lo que se reduce a un valor de 0.50 para realizar el estudio.

Por lo tanto el rango de variación de la cuantía mecánica, considerando lo expuesto anteriormente, que se va a considerar es,

$$0.06 \leq \omega \leq 0.50$$

Efectos diferidos

Retracción

Se considera para el estudio un intervalo de variación de la deformación de retracción entre $0.128 \cdot 10^{-3}$ y $0.603 \cdot 10^{-3}$, que coincide con el rango de variación de la deformación de retracción para las resistencias consideradas en el estudio y una oscilación de la humedad relativa entre el 50% y el 80% (Tabla III.1).

f_{ck} (MPa)	$\varepsilon_{cs} (\cdot 10^{-3})$ para $t - t_s = \infty$			
	HR(%)			
	50	60	70	80
25	0.603	0.541	0.453	0.336
80	0.231	0.206	0.273	0.128

Tabla III.1 – Intervalo de variación de la deformación de retracción

Fluencia

El coeficiente de fluencia depende del espesor ficticio de la sección transversal (relación entre el área y el perímetro de la sección), de tal manera que crece, conforme disminuye el espesor ficticio. Por tanto cuanto menor es la dimensión transversal del soporte es mayor la deformación de fluencia.

La dimensión mínima transversal del soporte para ser ejecutado en obra es de 25 cm (Art. 55 EHE [99]). Por tanto, el espesor ficticio mínimo es de igual a:

$$e = \frac{2 \cdot A}{u} = 25 \text{ mm}$$

con,

- e espesor ficticio
- A área de la sección
- u perímetro de la sección

En la tabla III.2 se indica el valor del coeficiente de fluencia para el soporte de mínima dimensión transversal y una edad de puesta en carga de 7 días y 14 días. A la vista de los resultado se considera un intervalo de variación del coeficiente de fluencia entre 1 y 3.

f_{ck} (MPa)	$\varphi(7, \infty)$			
	HR(%)			
	50	60	70	80
25	2.87	2.50	2.13	1.75
80	2.14	1.92	1.69	1.46

(a)

f_{ck} (MPa)	$\varphi(14, \infty)$			
	HR(%)			
	50	60	70	80
25	2.65	2.31	1.98	1.65
80	2.00	1.80	1.60	1.40

(b)

Tabla III.2 – Intervalo de variación del coeficiente de fluencia
(a) Edad de puesta en carga 7 días – (b) Edad de puesta en carga 14 días

En la tabla III.3 se indican los principales parámetros empleados en el estudio así como su intervalo de variación.

Parámetros	Rango de variación estudiado
Esbeltez mecánica	$35 \leq \lambda_{mec} \leq 100$
Forma de la sección transversal	Rectangular
	Circular
	Hexagonal
	Cruz
	Hueca
	Pila Puente
	L con 1 eje de simetría
	L sin eje de simetría
	<i>A nivel sección:</i> <ul style="list-style-type: none"> • Armadura en las esquinas • Armadura doblemente simétrica en las cuatro esquinas [rectangular] • Armadura doblemente simétrica distribuida uniformemente en los cuatro lados [rectangular] • Armadura simétrica dos caras opuestas [rectangular] • Armadura distribuida uniformemente a lo largo de la sección.
	<i>A nivel estructura:</i> <ul style="list-style-type: none"> • Constante a lo largo del soporte
Tipología estructural	Soporte aislado biapoyado
Esfuerzo axial	$0 \leq N_d \leq N_0$; $0 \leq N_d \leq N_{cr}$
Flexión esviada	$0 \leq \beta \leq 90^\circ$ Sección Rectangular, Hueca, Pila Puente
	$0 \leq \beta \leq 180^\circ$ Sección L con 1 eje de simetría
	$0 \leq \beta \leq 360^\circ$ Sección L sin eje de simetría
Resistencia del hormigón	$30 \text{ MPa} \leq f_c \leq 100 \text{ MPa}$
Resistencia del acero	$f_y = 400 \text{ y } 500 \text{ MPa}$
Cuantía mecánica	$0.06 \leq \omega \leq 0.50$
Deformación de retracción	$0.128 \cdot 10^{-3} \leq \epsilon_{cs} \leq 0.603 \cdot 10^{-3}$
Coefficiente de fluencia	$0 \leq \varphi \leq 3$

Tabla III.3 –Parámetros de estudio y Rango de estudio

III.2.2 Programa de ensayos numéricos

Para realizar el estudio se realizaron aproximadamente 8.000 ensayos numéricos, como consecuencia de la variación de los parámetros señalados en el punto anterior.

Para evitar tener que considerar un número excesivo de elementos finitos, se eligen las secciones transversales del soporte de pequeña dimensión. En las siguientes figuras se muestran las secciones tipo consideradas

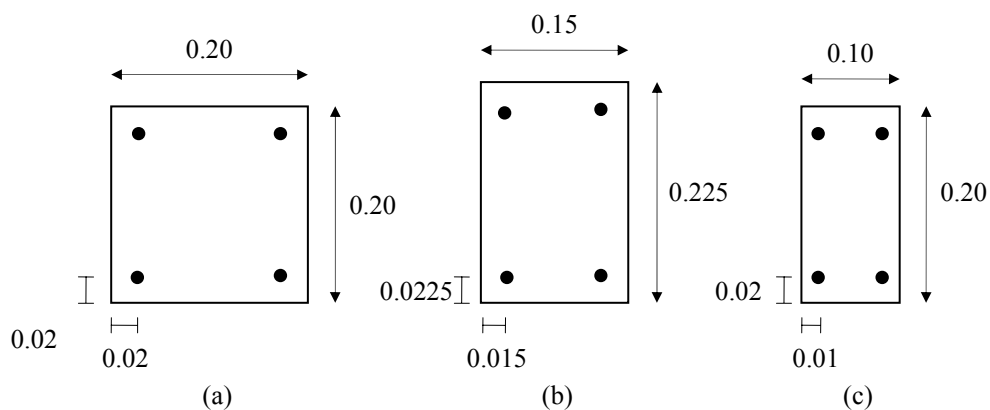


Figura III.5 – Sección transversal tipo. Distribución de armadura en las cuatro esquinas.
(a) $H/B = 1$; (b) $H/B = 1.5$; (c) $H/B = 2$; [Cotas en metros]

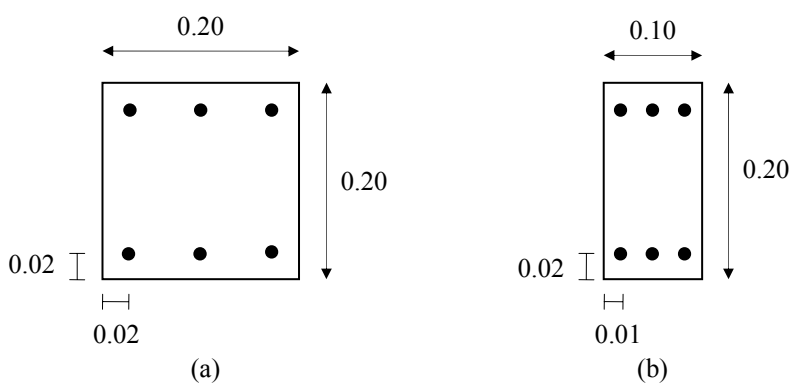


Figura III.6 – Sección transversal tipo. Distribución de armadura simétrica en caras opuestas.
(a) $H/B = 1$; (b) $H/B = 2$; [Cotas en metros]

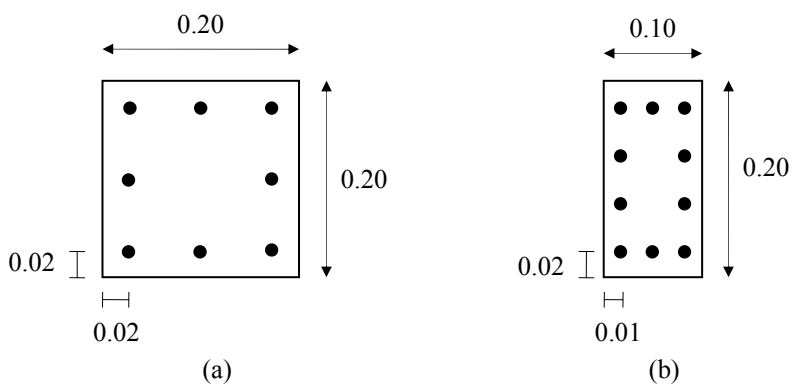


Figura III.7 – Sección transversal tipo. Distribución de armadura doblemente simétrica uniformemente distribuida en los cuatro lados.
(a) $H/B = 1$; (b) $H/B = 2$; [Cotas en metros]

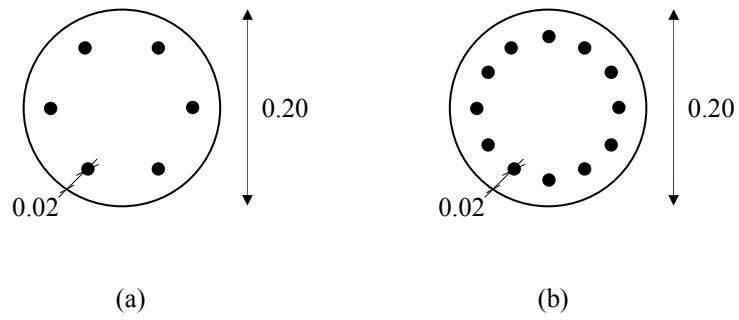


Figura III.8 – Sección transversal tipo. Sección circular.

(a) $\phi = 6$; (b) $\phi = 12$; [Cotas en metros]

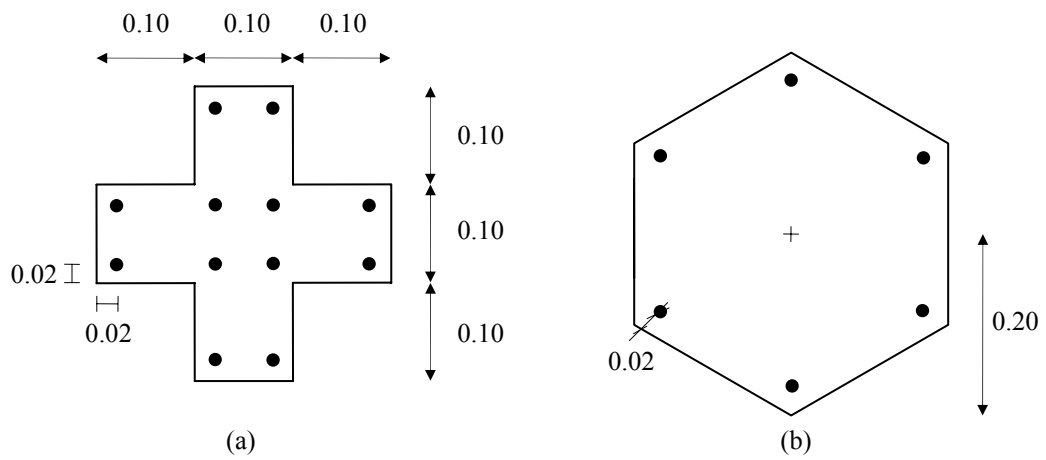


Figura III.9 – Sección transversal tipo.

(a) Sección en Cruz; (b) Sección hexagonal; [Cotas en metros]

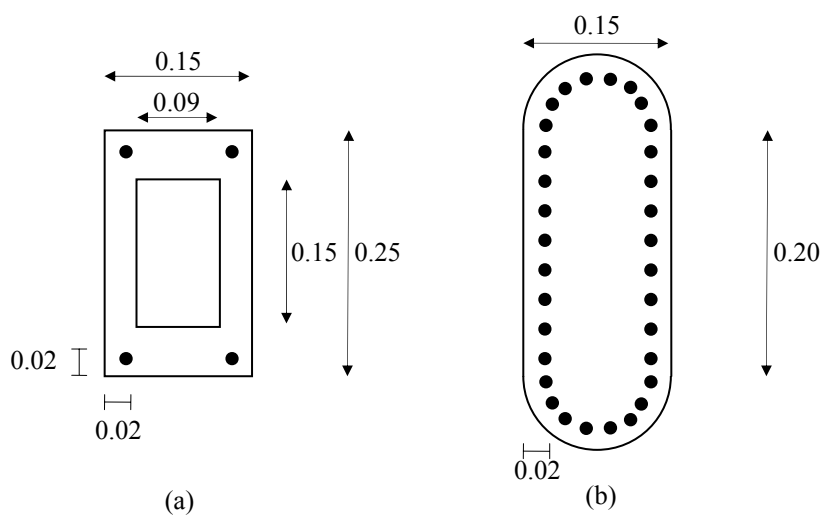
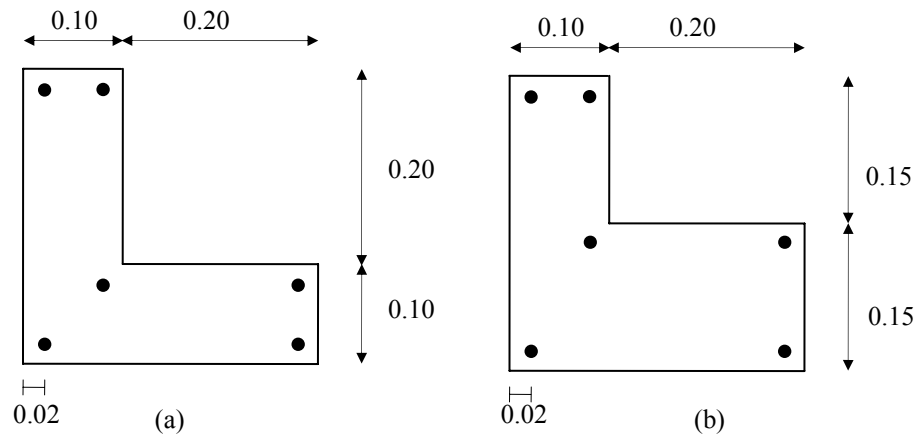


Figura III.10 – Sección transversal tipo.

(a) Sección Rectangular Hueca; (b) Sección tipo Pila Puente; [Cotas en metros]



*Figura III.11 – Sección transversal tipo. Sección en “L”.
(a) Con 1 eje de simetría; (b) Con 0 ejes de simetría; [Cotas en metros]*

IV. Análisis de resultados.

En es apartado se analizará los diferentes parámetros que afectan al modelo teórico de referencia. Se llevará un estudio a nivel gráfico para determinar el grado de influencia de cada parámetro

En función del estudio de dichos parámetros se formulará una propuesta para calcular el factor de amplificación. Dicha propuesta será validada en el *Capítulo V*.

IV.1. Parámetros de estudio

A la hora de iniciar el estudio para clasificar las estructuras se partía de un modelo de secciones rectangulares. En dicho modelo el parámetro que clasificaba y separaba los distintos soportes era la esbeltez geométrica.

La esbeltez geométrica de una sección rectangular es relación entre la longitud del soporte y el canto de la sección transversal. Así se estudiaba esbelteces geométricas comprendidas entre 10 y 50; aunque para este trabajo de investigación se acotó a esbelteces geométricas entre 10 y 30 debido a la enorme cantidad de datos que se debían obtener y a que la esbeltez geométrica 30 corresponde al límite de esbeltez mecánica 100 que establece la EHE como margen para el estudio mediante métodos simplificados del pandeo.

La primera sección que se estudia era la circular: en la que parece lógico considerar como esbeltez geométrica la relación entre el largo del soporte y el diámetro.

El problema se encontraba con las siguientes secciones estudiadas: hexagonal, en cruz, pilar hueco, pila de puente y sección en “L”, el canto en estas secciones podía ser el mismo en magnitud y por lo tanto la esbeltez geométrica de la sección ser la misma aunque el soporte fuera radicalmente diferente.

Por todo se ha creído necesario introducir el radio de giro de la sección que aproxima de una manera más adecuada la forma de la sección transversal. Así se cambia el parámetro de estudio de esbeltez geométrica a esbeltez mecánica que recoge de una manera más adecuada el comportamiento del soporte.

Será necesaria hacer una traslación de los datos de los que se dispone en sección rectangular de esbelteces geométricas adaptándolos al radio de giro y a la esbeltez mecánica.

$$\lambda_{\text{geométrica}} = \frac{\ell}{h};$$

$$\lambda_{\text{mecánica}} = \frac{\ell}{i}; \quad \text{siendo para sección rectangular } i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{b \cdot h^3 / 12}{b \cdot h}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

Igualando los términos de la longitud del soporte ℓ ,

$$\lambda_{\text{geométrica}} = \frac{\lambda_{\text{mecánica}}}{\sqrt{12}}$$

Sección rectangular		
$\lambda_{\text{geométrica}}$	$\lambda_{\text{mecánica}}$	$\lambda_{\text{mecánica}}^*$
10	34.64	35
20	69.28	67.5
30	103.92	100

Tabla IV.1 – Relación entre esbeltez mecánica y geométrica

Se ha redondeado las expresiones y se tomó para el estudio $\lambda_{\text{mecánica}}^*$ que son los valores de $\lambda_{\text{mecánica}}$ redondeados. Esta simplificación no altera en gran medida los resultados.

El parámetro con el que se suele comparar el factor de rigidez de la sección α es la excentricidad relativa, e/h . El parámetro e es la excentricidad de esfuerzos de primer orden:

$$e = \frac{M_{\text{total}}^1}{N}$$

El parámetro h es el canto de la sección rectangular, este parámetro debe ser adaptado ya que no define bien el comportamiento a flexión de secciones que no sean rectangulares.

En secciones circulares la bibliografía encontrada sugiere el empleo del término del diámetro para el análisis de flexión. El término del diámetro sería el equivalente al término *h canto* para sección rectangular.

En el resto de secciones el parámetro del canto *h* no recoge adecuadamente las características mecánicas de flexión, por lo que se hace necesario introducir un parámetro que recoja de manera más eficaz el comportamiento de la sección.

Son varios los autores [FIB-CEB] los que recomiendan y emplean el radio de giro de la sección para el análisis de flexión, parece adecuado pues, elegir este término que reproduce mejor la forma de la sección

En sección circular $i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot r^4 / 4}{\pi \cdot r^2}} = \frac{r}{2}$, si se quisiera reflejar la relación *e/d* siendo *d* el diámetro se tendría que emplear *e/4i*. Si se quisiera tener como base el canto de la sección rectangular $i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{b \cdot h^3 / 12}{b \cdot h}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$, la relación *e/h* sería equivalente a $\frac{e}{\sqrt{12} \cdot i}$.

Otra solución es la de definir un canto equivalente *h_e*, y que dicho parámetro representara de alguna manera la dirección de flexión y que recogiera el tipo de sección transversal.

En esta tabla comparativa se refleja los diferentes valores de *4·i* y $\sqrt{12} \cdot i$, para secciones que ni son rectangulares ni circulares y así se podrá elegir el parámetro más adecuado.

02	canto/4·i	canto/(i·12 ^{0.5})
Cruz	1.08	1.25
03	canto/4·i	canto/(i·12 ^{0.5})
Hexagonal	1.6432	1.90
04	canto/4·i	canto/(i·12 ^{0.5})
Hueca	0.7426	0.86
05	canto/4·i	canto/(i·12 ^{0.5})
Pila Puente	0.9389	1.08

Tabla IV.2 – Comparativa *4·i* vs $\sqrt{12} \cdot i$

Como se observa de la tabla anterior, el parámetro más adecuado es el de *4·i* ya que está más cerca del lado de la seguridad a la hora de representar el parámetro del canto de la sección, frente a $\sqrt{12} \cdot i$ ya que el ratio *canto* frente a *4i* está más del lado de la seguridad frente al ratio *canto* ~ $\sqrt{12} \cdot i$.

La resistencia del hormigón es otro de los parámetros fundamentales que influyen en el estudio de la resistencia del soporte. Se ha estudiado dos resistencias: una para

comprobar el comportamiento de hormigones de resistencia normal (NSC) y otra para hormigones de alta resistencia (HSC).

La resistencia que se ha elegido para resistencia normal es la de $f_c=30$ MPa, que representa perfectamente un hormigón NSC.

Para hormigones de alta resistencia [$f_c>50$ MPa] se ha optado por el hormigón de f_c 80 MPa. Los hormigones HSC tienen un comportamiento diferente a los NSC, con curvas de rotura más frágiles.

Se realizó una pequeña tanda de ensayos con soportes de resistencia de $f_c=100$ MPa, que corresponde con hormigón de muy alta resistencia.

La cuantía mecánica es la relación entre $\omega = \frac{A_s \cdot f_y}{A_c \cdot f_c}$ el producto de área de la armadura por la resistencia del acero y el producto del área bruta del hormigón por la resistencia del hormigón.

Se ha considerado tres escalones de armado para representar soportes con condiciones de armado bajo, medio y alto.

La armadura de bajo nivel armado, corresponde con una cuantía de armadura igual a 0.06; mientras que la armadura de nivel de armado alto correspondería a una cuantía del 0.50. Como condición media de nivel de armado se ha considerado una cuantía de armadura de 0.25.

La distribución de la armadura se estudió sólo en dos secciones. Este parámetro se incluyó en el estudio de las secciones rectangulares y circulares. En sección rectangular se estudió tres tipologías de distribución de armadura: armadura en las esquinas, armadura en dos caras, en las cuatro caras distribuidas uniformemente. En cuanto a sección circular se estudia la distribución con dos tipologías de armado diferentes: con 6 redondos y con 12 redondos a lo largo de la sección.

El último parámetro que se estudia es el coeficiente de fluencia: que define el comportamiento del soporte en función del tiempo. Se analiza el valor de este parámetro desde un valor igual a cero que equivale a unas condiciones de carga y análisis instantáneo. También se analizan con valor distinto de cero, que corresponde a un análisis con efectos diferidos en el tiempo de la resistencia del soporte

IV.2. Metodología de análisis para la propuesta del método

Una vez señalados los parámetros que rigen de manera significativa el comportamiento de los soportes esbeltos de hormigón, se definirá la forma de analizar los datos que se disponen para poder proponer las expresiones que recojan de manera adecuada el comportamiento.

El estudio se dividirá en cuatro bloques importantes: se subdivide en flexión recta y esviada y éstas a su vez en análisis en instantáneo y diferido. Se analiza el valor del coeficiente de fluencia desde un valor igual a cero, que equivale a unas condiciones

de análisis de cargas instantáneas, a valores distinto de cero [1, 2 y 3] que corresponden a condiciones de análisis de carga diferida.

Para realizar el análisis de los soportes se estudiarán dos tipos de curva. El primer tipo de curvas sería el que representan las superficies de rotura de sección/soporte: axil-momento [N-M] (Figura IV.1); o si se expresa independiente de las unidades axil adimensional – momento adimensional $[v = \frac{N}{A_c \cdot f_c} - \mu = \frac{M}{A_c \cdot f_c \cdot 4i}]$ (Figura IV.2).

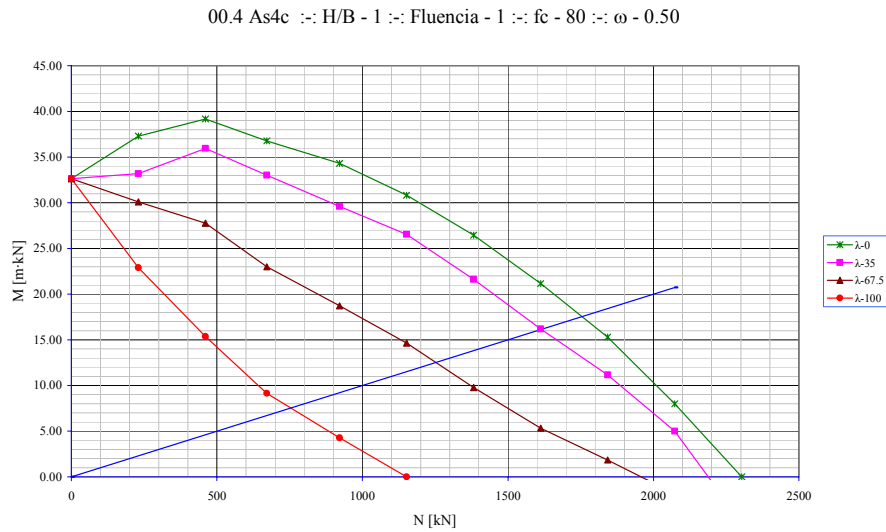
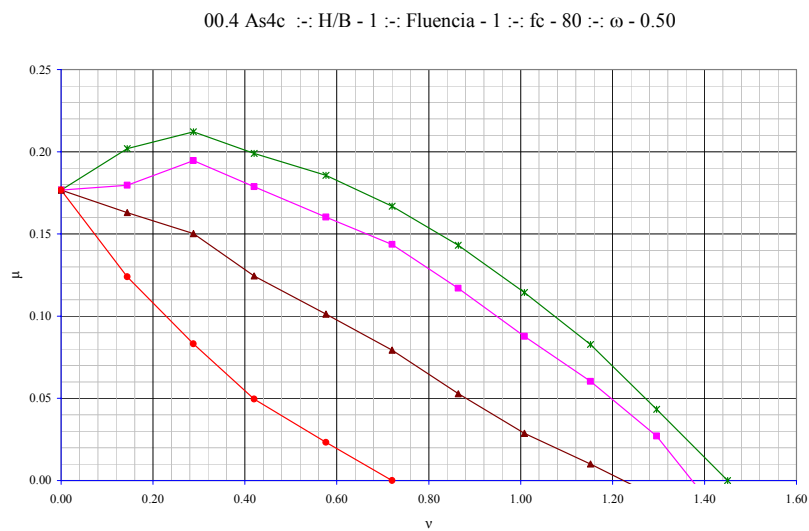


Figura IV.1 – Gráficas axil – momento para una sección rectangular con armadura en las cuatro caras, fluencia, resistencia 80 y cuantía de armado de 0.50 Parámetros dimensionales N [kN] – M [m·kN]



(b) Figura IV.2 – Gráficas axil – momento para una sección rectangular con armadura en las cuatro caras, fluencia, resistencia 80 y cuantía de armado de 0.50 Parámetros adimensionales v μ

IV.3. Flexión recta — Fluencia 0 [Análisis en instantáneo]

IV.3.1 Tipología seccional

A primera vista parece lógico que el tipo de sección no debería condicionar excesivamente la respuesta de tipo resistente del modelo, ya que el parámetro de estudio que se recoge, el radio de giro de la sección, define correctamente la tipología de la sección.

El estudio y análisis que aquí se presenta incidirá en ver si existe algún tipo de variación significativa entre las diferentes secciones.

Las características geométricas de las piezas son similares a excepción de la sección en cruz que se buscó deliberadamente una sección con unas características geométricas mayores de lo que se estaba analizando para ver si había algún efecto de escala en el modelo teórico de referencia.

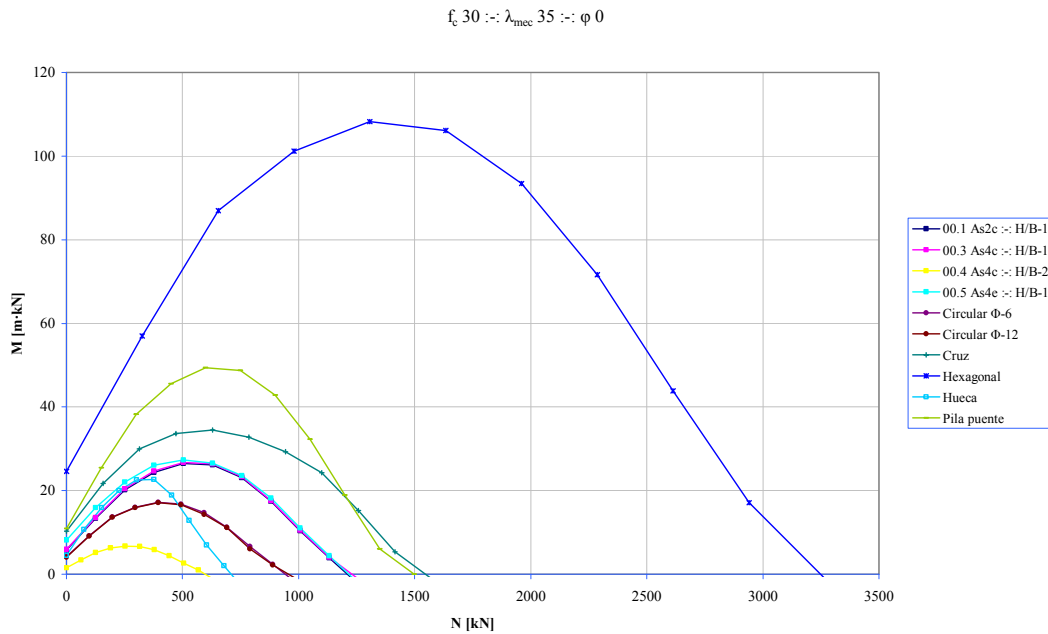


Figura IV.3 – Comparativa de las gráficas axil – momento para los diferentes tipos de sección transversal en flexión recta y fluencia=0, con esbeltez mecánica $\lambda_{mec}=35$, $\omega=0.06$ y $f_c=30$.

Las diferentes gráficas de la Figura IV.3 muestran una misma forma de comportamiento, al ser la figura de las gráficas homotéticas si se representaran con parámetros adimensionales.

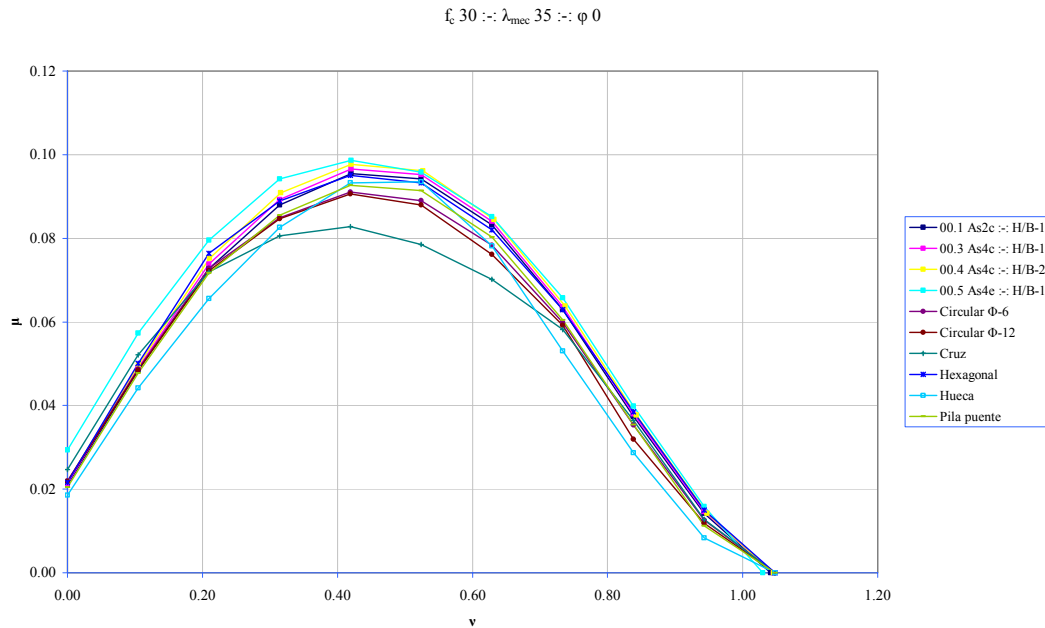


Figura IV.4 – Comparativa de las gráficas axil – momento adimensionalizados para los diferentes tipos de sección transversal en flexión recta y fluencia=0, con esbeltez mecánica $\lambda_{mec}=35$, $\omega=0.06$ y $f_c=30$.

En la Figura IV.4 se observa que la geometría de la sección transversal no interviene en la forma de las curvas de rotura del soporte. Esto implica que el modelo y los parámetros elegidos son adecuados y reflejan un comportamiento independiente de la geometría, por lo que el radio de giro recoge adecuadamente las características del tipo de sección.

De las diferentes secciones mostradas sólo hay tres secciones que no se comportan como la media aunque las diferencias son del orden de un 10% en las zonas con mayor diferencia [zona central de las curvas] y de un 3% en las demás zonas.

La sección en cruz, y la sección hueca tienen sus curvas por debajo de la media; en cambio la sección rectangular de relación canto/ancho igual a la unidad con armadura en las esquinas, presenta una curva por encima de la media.

Esto provocaría que un diseño basado en la media dejara del lado de la inseguridad a las secciones en cruz y hueca, y fuera excesivamente conservador con la sección rectangular con armadura en las 4 esquinas.

Si se analizara con distintas características mecánicas: con una resistencia mayor $f_c=80$ que corresponde con un hormigón de alta resistencia (HSC) y con una cuantía mayor de armado de 0.50. Los resultados se seguirían reproduciendo, comprobando que el tipo de sección, en cuanto a forma de rotura, influye escasamente en el comportamiento.

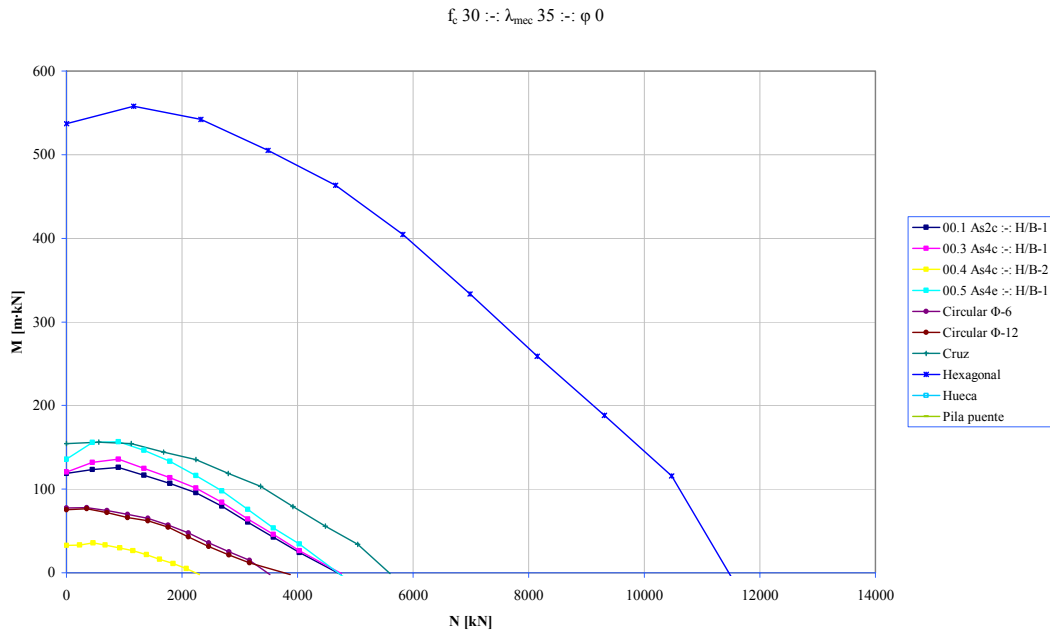


Figura IV.5 – Comparativa de las gráficas axil – momento para los diferentes tipos de sección transversal en flexión recta y fluencia=0, con esbeltez mecánica $\lambda_{mec}=35$, $\omega=0.50$ y $f_c=80$.

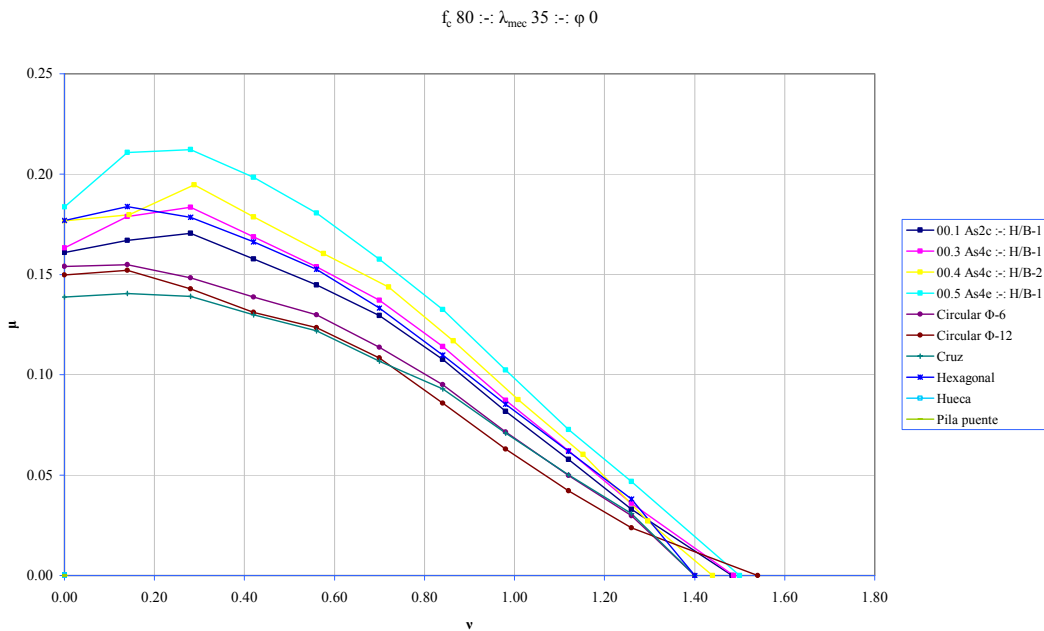


Figura IV.6 – Comparativa de las gráficas axil – momento adimensionalizados para los diferentes tipos de sección transversal en flexión recta y fluencia=0, con esbeltez mecánica $\lambda_{mec}=35$, $\omega=0.50$ y $f_c=80$.

Al comprobar las curvas representadas adimensionalmente, se vuelve a observar que las tendencias tienen una variación mínima entre las diferentes curvas y que el comportamiento es prácticamente idéntico entre las diferentes curvas.

Con niveles de armado mayores las curvas tienen un comportamiento con una menor diferencia.

Se puede concluir que en lo que respecta a flexión recta y condiciones instantáneas de carga [fluencia cero]. No hay diferencias significativas entre los diferentes tipo de

sección y que el parámetro esbeltez mecánica y por lo tanto el radio de giro es adecuado para la clasificación de los soportes.

IV.3.2. Esbeltez mecánica

El parámetro de esbeltez¹ es uno de los que más fuertemente condiciona la capacidad resistente de la sección. La resistencia de la sección disminuye al aumentar la esbeltez del soporte. Esta disminución de la resistencia es de carácter lineal y no depende de la sección tal y como se comprobó en el apartado anterior.

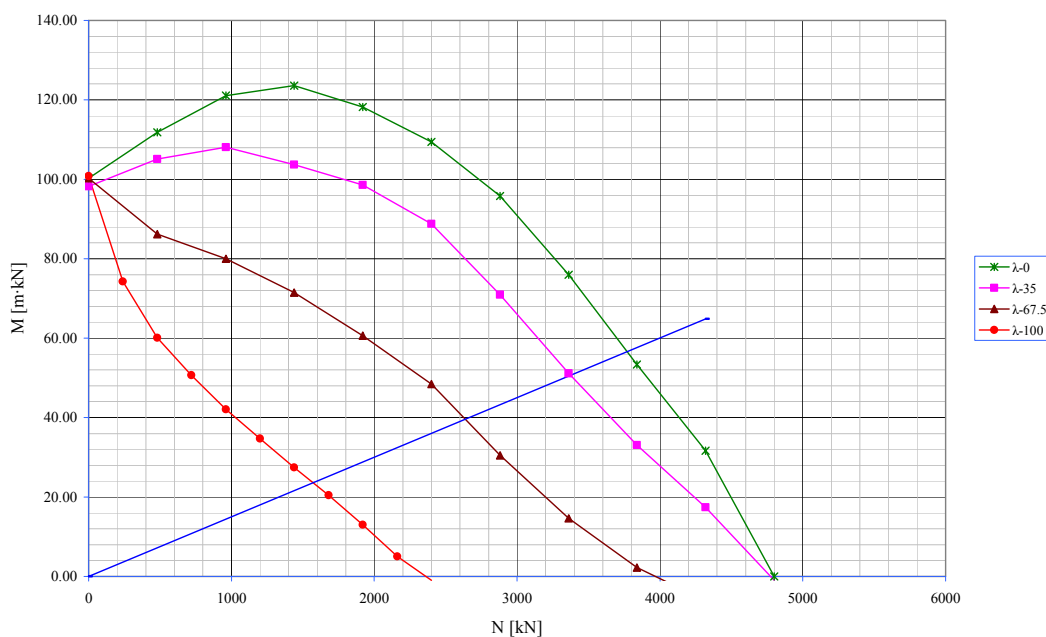


Figura IV.7 – Gráficas axil – momento de sección transversal en cruz, fluencia=0, $\omega=0.25$ y $f_c=80$.

Este parámetro se manifiesta en una reducción del axil crítico N_{cr} que corresponde al valor del axil en la superficie de interacción para la situación de compresión simple.

El tipo de rotura alcanzado por el soporte es diferente dependiendo de la esbeltez y la excentricidad de la carga. Para analizar el tipo de rotura, se ha de representar en el diagrama de interacción adimensional, el momento flector de primer orden en el extremo del soporte ($M_1=N \cdot e_0$) y el momento total (M_t) de la sección más solicitada, teniendo en cuenta la deformación de la columna.

Si el esfuerzo total corta a la curva del diagrama correspondiente a la esbeltez nula, la rotura se ha producido por agotamiento por tensiones normales. Esta situación es común para niveles de excentricidad grandes y esbelteces pequeñas.

Si la trayectoria de los puntos que representan las situaciones de equilibrio (N , M_t) tiene un máximo en axiles la rotura se produce por inestabilidad a nivel estructural. Esta situación se presenta para niveles de excentricidad pequeñas y esbelteces grandes.

¹ En adelante cuando se emplee el término esbeltez se entenderá que es esbeltez mecánica, y cuando sea esbeltez geométrica se citará explícitamente.

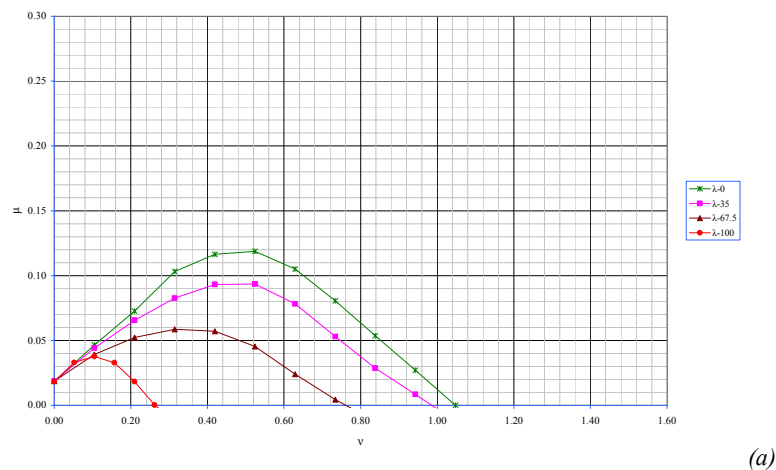
La pérdida de capacidad del soporte es mayor conforme aumenta la esbeltez y el nivel axil, y disminuye la excentricidad relativa.

La instrucción EHE define que los efectos de segundo orden son despreciables “si la pérdida de la capacidad resistente, respecto a la de la sección transversal, es inferior al 10%”. La esbeltez mecánica que corresponde a dicha pérdida es igual a 35 [en la instrucción el parámetro que aparece es el de esbeltez geométrica igual a 10] según la propia instrucción.

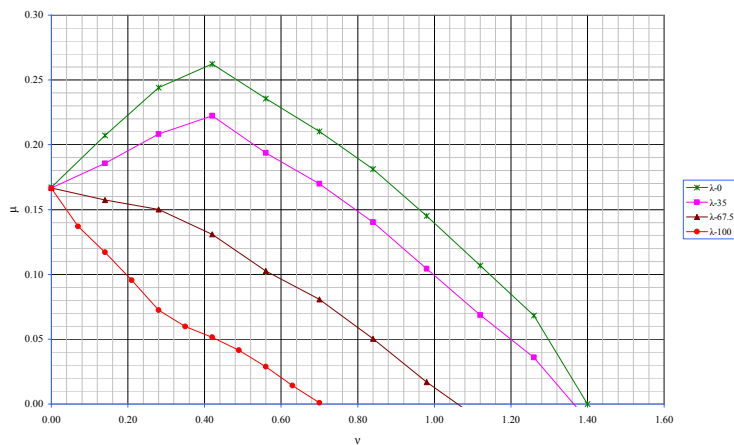
La pérdida de la capacidad resistente depende no solo de la esbeltez sino también del nivel axil y su excentricidad, así como las características de los materiales, distribución de armadura y efectos diferidos; y en segundo lugar, que para una esbeltez de 35, la pérdida de capacidad resistente, en general, es superior al 10%. Esto obliga replantear el estudio del límite de esbeltez inferior, pero esto queda fuera del estudio de este trabajo de fin de carrera.

IV.3.3. Cuantía mecánica de la armadura

La capacidad resistente de un soporte aumenta conforme la cuantía de armadura es mayor, de tal forma que para una excentricidad determinada el axil resistente será mayor.



(a)



(b)

Figura IV.8 – Influencia de la cuantía de armadura para una sección hueca, fluencia 0, resistencia 30:
a) $\omega=0.06$ b) $\omega=0.50$

La cuantía mecánica de armadura reduce la pérdida de capacidad resistente del soporte a igualdad de esfuerzo axial, pero aumenta si se mantiene la excentricidad constante al ser precisamente la capacidad axial de soporte superior.

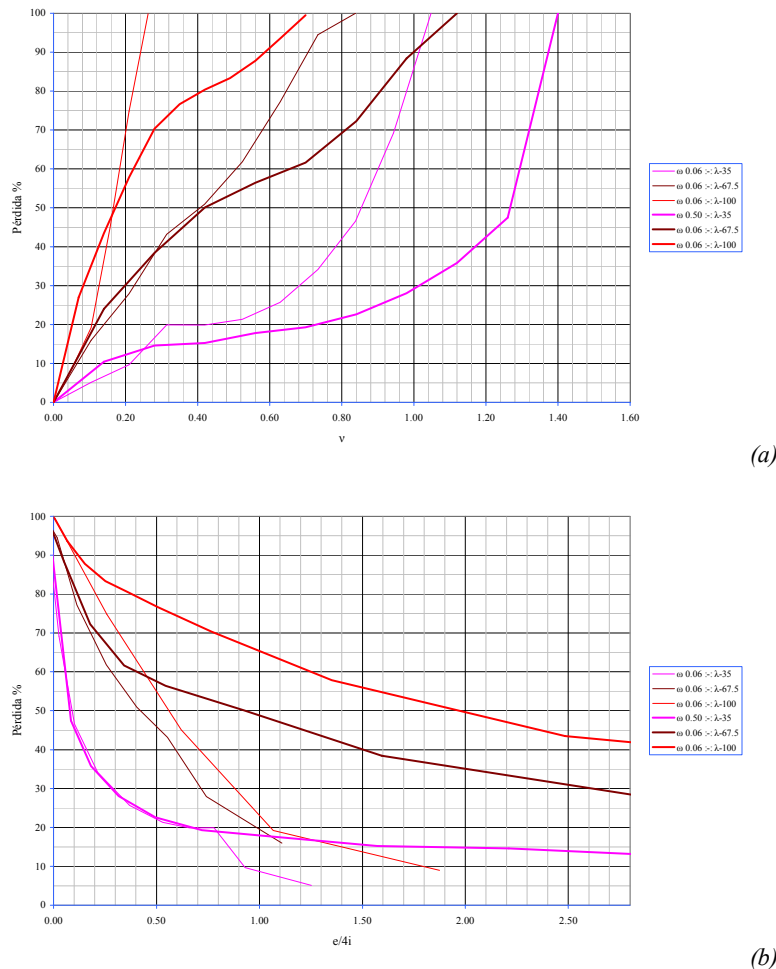


Figura IV.9 – Influencia de la cuantía de armadura en la pérdida de capacidad portante
a) en función del axil b) en función de la excentricidad

Para excentricidades pequeñas [$e/4i=0.05$] un incremento de ocho veces la cuantía de armadura supone un aumento de la capacidad portante del 50% constante para cualquier esbeltez. Para grandes excentricidades [$e/4i=0.4$] este incremento oscila entre un 90% y un 190%, creciente para mayores esbelteces.

Se observa que el axil crítico N_{cr} del soporte disminuye conforme las cuantías mecánicas son menores y crece la esbeltez geométrica.

IV.3.4. Distribución de armadura

La efectividad de la disposición de armaduras en la sección depende de las familias de combinaciones de esfuerzos que actúan en el soporte. Así, si las solicitaciones son principalmente de flexo-compresión recta resulta más adecuado

disponer la armadura en las dos caras opuestas perpendiculares al plano de flexión, a pesar de crear una dirección de debilidad perpendicular al plano de flexión principal.

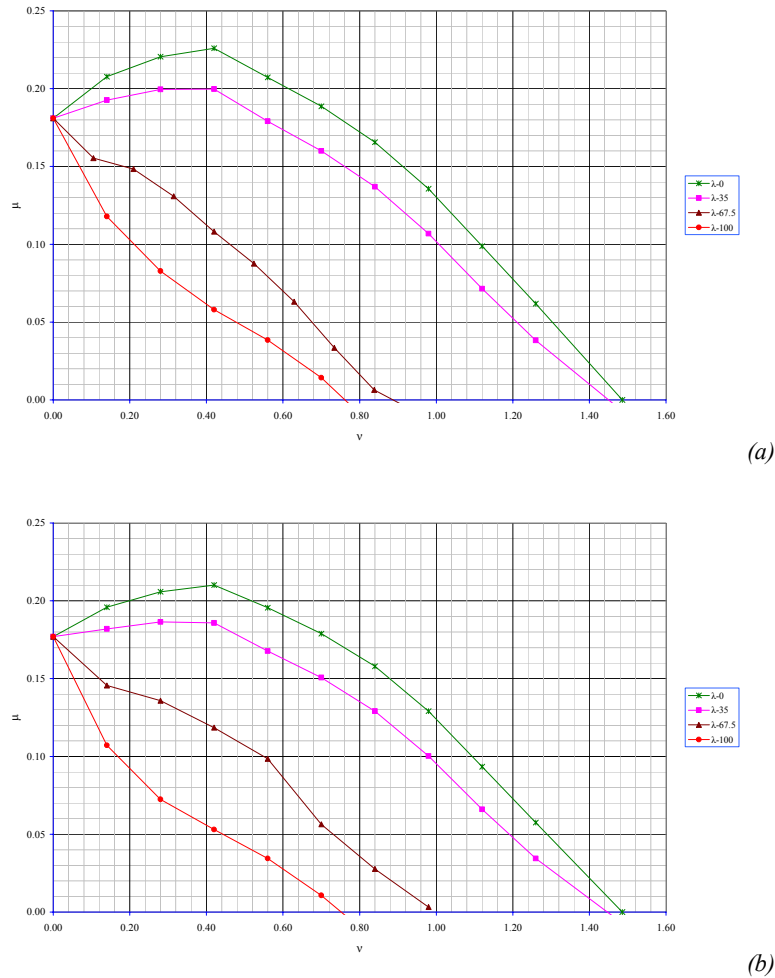
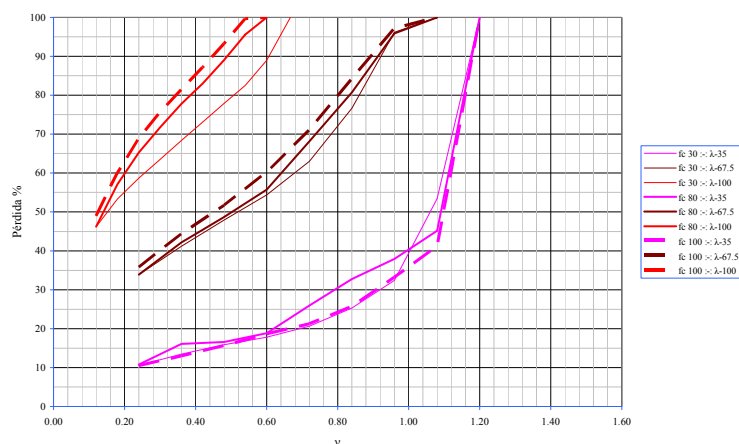
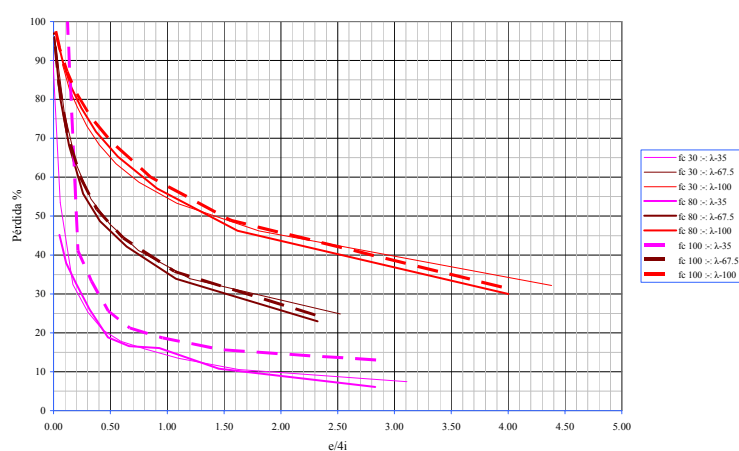


Figura IV.10 – Influencia de la distribución de armadura en la capacidad resistente.
 Fluencia 0, resistencia de hormigón 30, ω 0.50
 a) Armadura dispuesta en dos caras opuestas b) Armadura dispuesta en las cuatro caras.

Para dos distribuciones de armadura distintas como son la armadura dispuesta en las cuatro caras [A4c] o en dos caras opuestas [As2c], la diferencia de la pérdida de capacidad resistente aumenta conforme la esbeltez geométrica es mayor para una sollicitación de flexo-compresión recta.



(a)



(b)

Figura IV.11 – Influencia de la distribución de armadura en la capacidad resistente.
Fluencia 0, resistencia de hormigón 30, ω 0.50
a) En función del axil adimensionalizado b) En función de la excentricidad.

En el caso de flexo-compresión recta, para excentricidades pequeñas ($e/h=0.1$) el optar por una distribución de armadura igual en dos caras opuestas frente a una distribución igual en las cuatro caras implica un incremento de la capacidad entre un 5% para una esbeltez de 35 y de un 12% para una esbeltez de 100. Para excentricidades grandes [$e/h=0.9$] el incremento es del 22% para el rango de esbelteces entre 35 y 100.

IV.3.5. Hormigón

a) Influencia de la resistencia del hormigón en la superficie de interacción de primer orden correspondiente a esbeltez nula.

Para que la superficie de interacción de una sección de hormigón armado pueda expresarse en términos adimensionales a partir de la geometría de la sección y la resistencia del hormigón, el dominio de las deformaciones de rotura ha de ser el mismo para cualquier nivel de resistencia y el bloque de compresiones del hormigón correspondiente a una determinada profandidad de la fibra neutra ha de ser proporcional con la resistencia del hormigón.

El dominio de deformaciones en rotura para hormigones de resistencia inferior a 50 MPa es independiente de la resistencia del hormigón, mientras que para hormigones de resistencia superior a 50 MPa las deformaciones correspondientes a los pivotes de rotura son función de la resistencia del hormigón.

Además, si se obtiene el diagrama bloque rectangular equivalente a partir de las curvas constitutivas recomendadas por el *CEB-FIP*, la intensidad en el bloque rectangular, α , y su profundidad, β , dependen de la resistencia del hormigón. La instrucción *EHE*, para hormigones de resistencia menor a 50 MPa define el diagrama bloque rectangular independiente de la resistencia, y para hormigones de resistencia mayor en función de la resistencia.

Por tanto, en general, la superficie de interacción expresada en términos adimensionales no es independiente de la resistencia de hormigón. Si dicha superficie se obtiene aplicando los diagramas simplificados definidos en la instrucción *EHE*, sólo será independiente de la resistencia si ésta es igual o inferior a 50 MPa. En conclusión los ábacos adimensionales que existen en la bibliografía tanto en flexión recta como esviada son sólo válidos para hormigones de resistencia igual o inferior a 50 MPa.

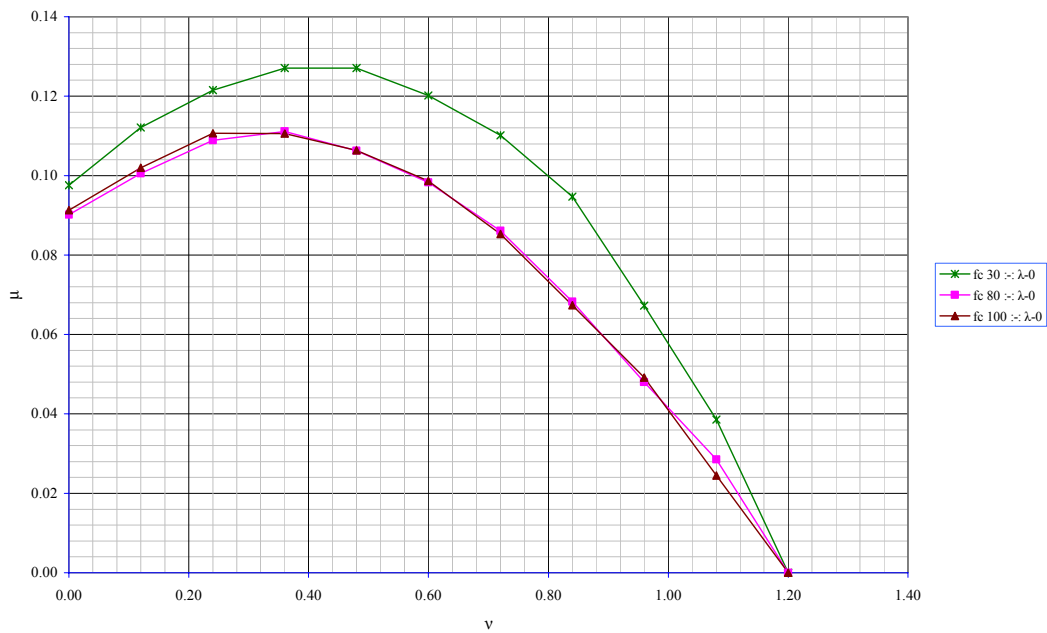


Figura IV.12 – Diagrama de interacción adimensional en función de la resistencia.

Influencia de la resistencia del hormigón en la superficie de interacción de primer orden correspondiente para esbeltez no nula.

En las siguientes figuras se aprecia que la influencia de la resistencia del hormigón en el tipo de rotura no es relevante, en los casos de cuantías geométricas y mecánicas constantes. Ello es debido a que se incrementa en la misma proporción la capacidad resistente del soporte que la rigidez del mismo.

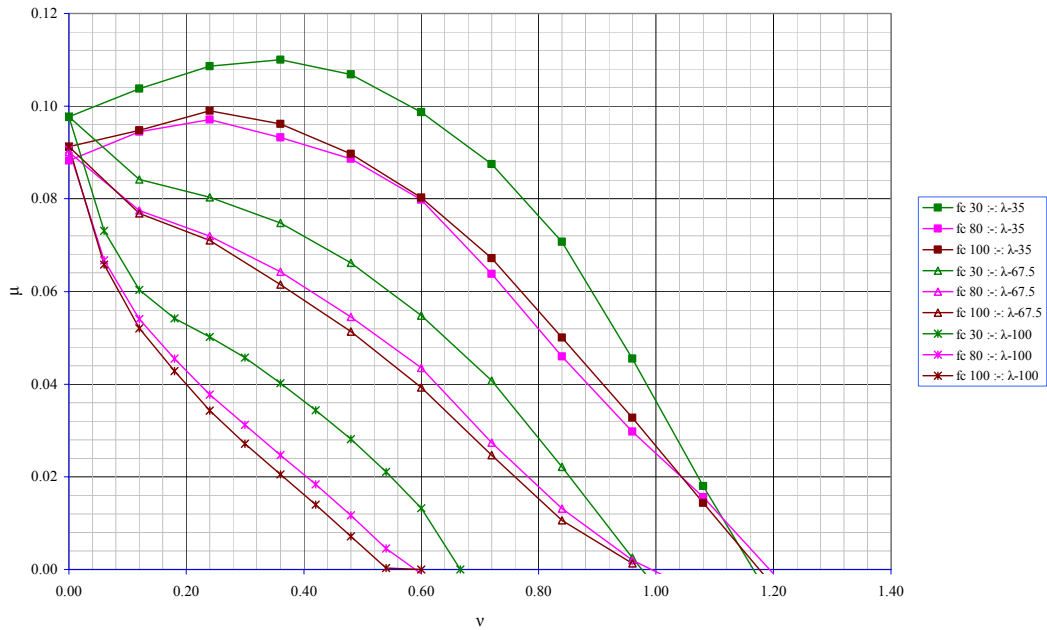


Figura IV.13 – Influencia de la resistencia en el tipo de rotura. Sección en cruz con cuantía ω 0.25

Se puede apreciar claramente que los hormigones con resistencia 80 y 100 tienen el mismo tipo de rotura coincidiendo las gráficas adimensionales independientemente de la esbeltez de la sección: esto se debe a que los pivotes de rotura que hay en los hormigones de 80 y 100 MPa están muy próximos y por eso las curvas de rotura son similares.

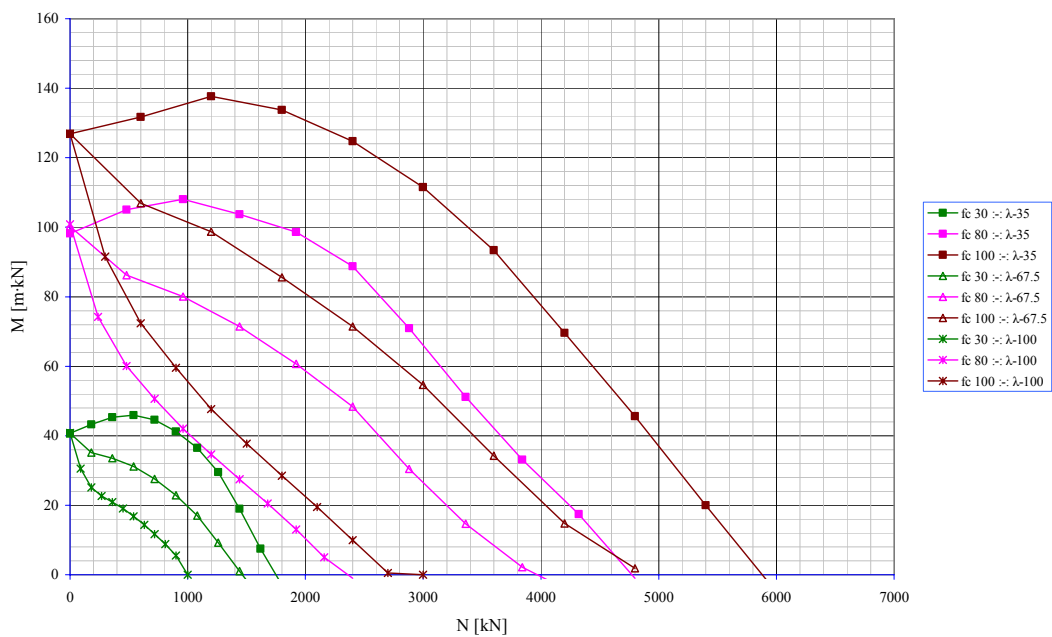
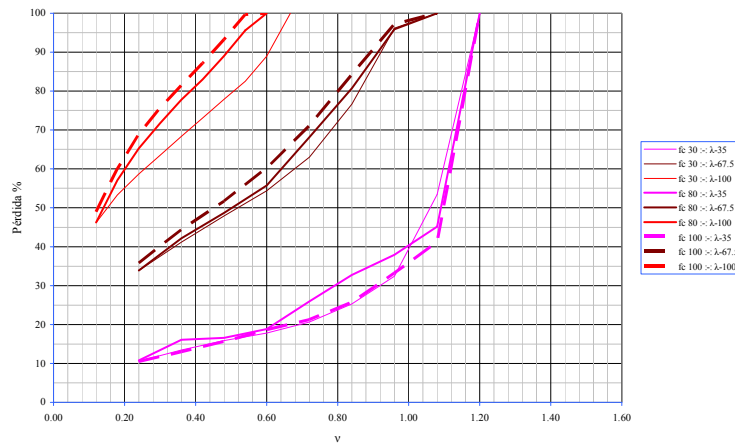
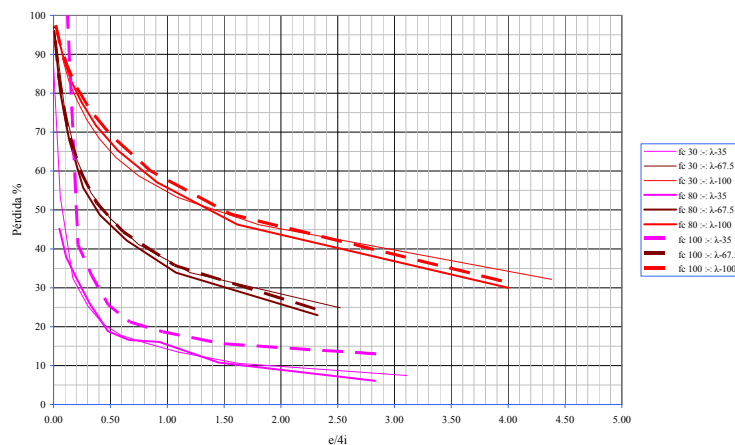


Figura IV.14 – Influencia de la resistencia en el tipo de rotura. Sección en cruz con cuantía ω 0.25, parámetros dimensionales.

Si la cuantía geométrica o mecánica de armadura se mantiene constante, la pérdida de capacidad portante en función de la excentricidad es menor en hormigones de alta resistencia. Por ello se observa un mayor incremento de resistencia. Sin embargo, en situaciones en donde la rotura de la sección sea por el hormigón no será eficaz aumentar la resistencia del acero.



(a)



(b)

Figura IV.15 – Influencia de la resistencia del hormigón en la pérdida de capacidad portante del soporte, con una cuantía de ω 0.25

a) En función del eje adimensionalizado b) En función de la excentricidad.

IV.3.6. Fluencia

La capacidad resistente de la sección depende del coeficiente de fluencia de tal forma que en general, se incrementa dicha capacidad portante.

Las deformaciones en el hormigón se incrementan debido a las deformaciones no mecánicas, de tal forma que se superan las deformaciones últimas definidas a partir de los pivotes de rotura (ϵ_{cu} , ϵ_{c1}) definidos bajo cargas instantáneas. En este caso, cabría pensar erróneamente que la sección ha alcanzado la rotura. Sin embargo, si se plantea la rotura a partir de estos pivotes, el agotamiento de la sección debe obtenerse en función de las deformaciones mecánicas y no de las totales, siempre y cuando la compatibilidad de la sección se haya realizado en totales.

Una forma más sencilla es definir los pivotes de rotura bajo cargas diferidas, para plantear así el agotamiento de la sección en deformaciones totales, de tal forma que los pivotes que definen la máxima compresión del hormigón (ϵ_{cu} , ϵ_{c1}) se desplazan aplicando una afinidad de razón $(1+\phi)$.

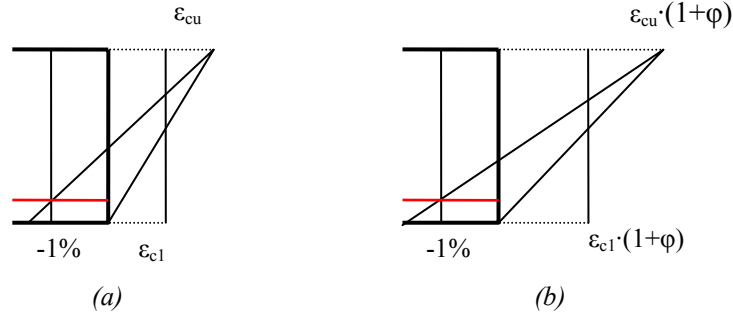


Figura IV.16 Deformaciones últimas de la sección (a) En deformaciones mecánicas (b) En deformaciones totales.

A causa de la deformación diferida, las deformaciones últimas de la sección crecen de tal forma que se incrementa la componente de compresiones de las armaduras, aumentando el brazo mecánico y por lo tanto el momento último. En el diagrama de interacción se produce un desplazamiento hacia la derecha y un incremento del momento máximo resistente.

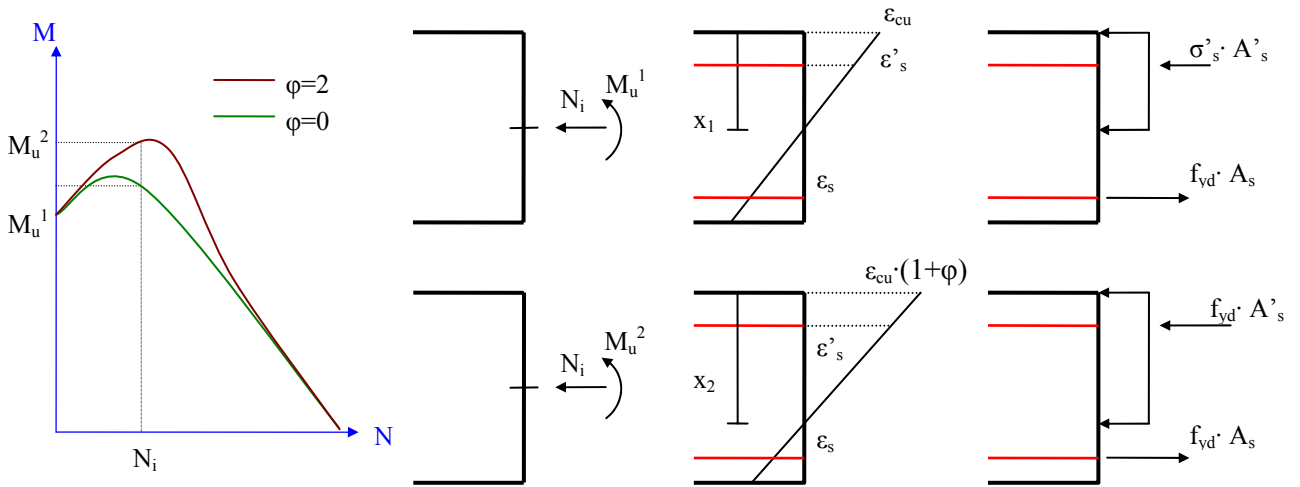
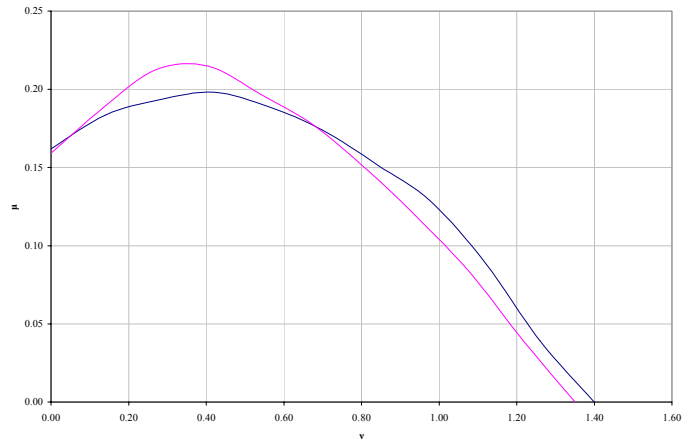
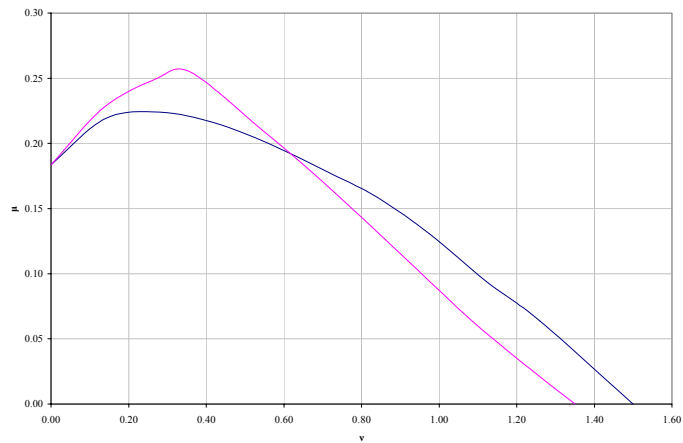


Figura IV.17 – Influencia de la deformación de fluencia en el momento último de la sección para un nivel de axil N_i .

Este fenómeno es más patente cuanto mayor es la cuantía de la armadura de compresión y la resistencia del hormigón. Esto es debido, en primer lugar, a que la componente de compresión es proporcional al área de armadura y en segundo lugar, a que el valor de la deformación “ ϵ_{cu} ” disminuye con la resistencia, de tal forma que para una deformación no mecánica el incremento de tensión en la armadura compresión es mayor conforme aumenta la resistencia.



(a) $f_c=30 \text{ MPa}$ $\omega=0.50$



(b) $f_c=80 \text{ MPa}$ $\omega=0.50$

Figura IV.18 - Influencia de la deformación de fluencia en los diagramas de interacción en función de la resistencia del hormigón.

De igual forma, el efecto del desplazamiento del diagrama de interacción se produce en flexión esviada debido al desplazamiento de la fibra neutra y el incremento de deformación.

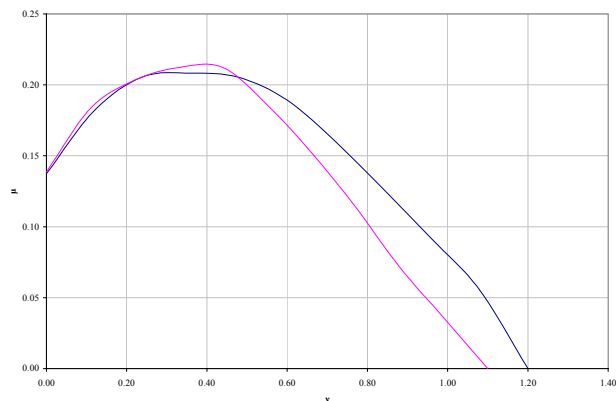


Figura IV.19 – Influencia de la deformación de fluencia en el diagrama de interacción en flexión esviada [$f_c=80 \text{ MPa}$ $\omega=0.25$ $\beta=22.5^\circ$].

El momento máximo que es capaz de soportar la sección en secciones doblemente simétricas coincide con el momento límite. Debido a las deformaciones diferidas la profundidad límite de la fibra neutra aumenta, y por tanto el valor del axil límite y del momento límite.

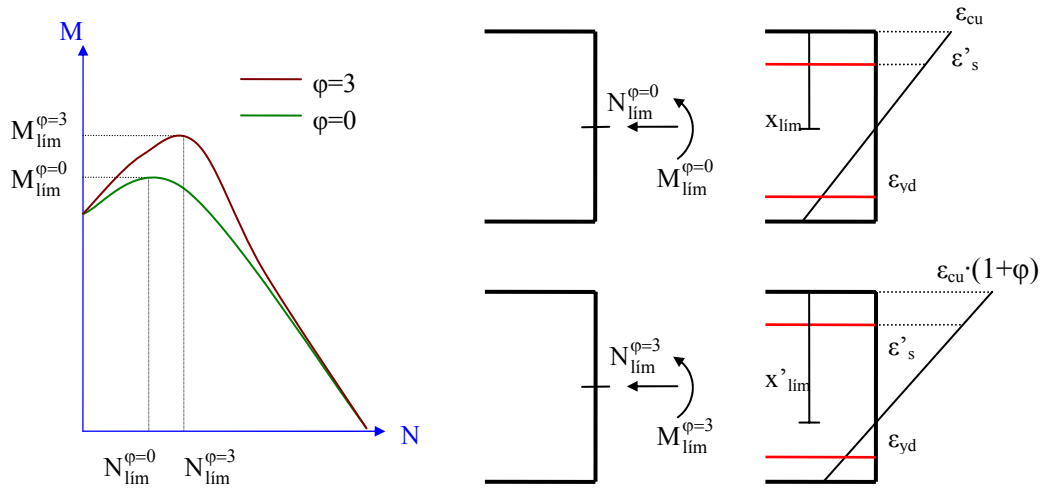


Figura IV.20 – Influencia de la deformación de fluencia en el momento último de la sección para un nivel de axil N_i .

IV.3.5.1 Fluencia - Tipología seccional

Al igual que sucedía en análisis en instantáneo el tipo de sección no debería condicionar excesivamente la respuesta de tipo resistente del modelo, ya que el parámetro de estudio que se recoge, el radio de inercia de la sección, define correctamente la tipología de la sección.

$$f_c = 30 \text{ :- } \lambda_{mec} = 67.5 \text{ :- } \phi = 1 \text{ :- } \omega = 0.50$$

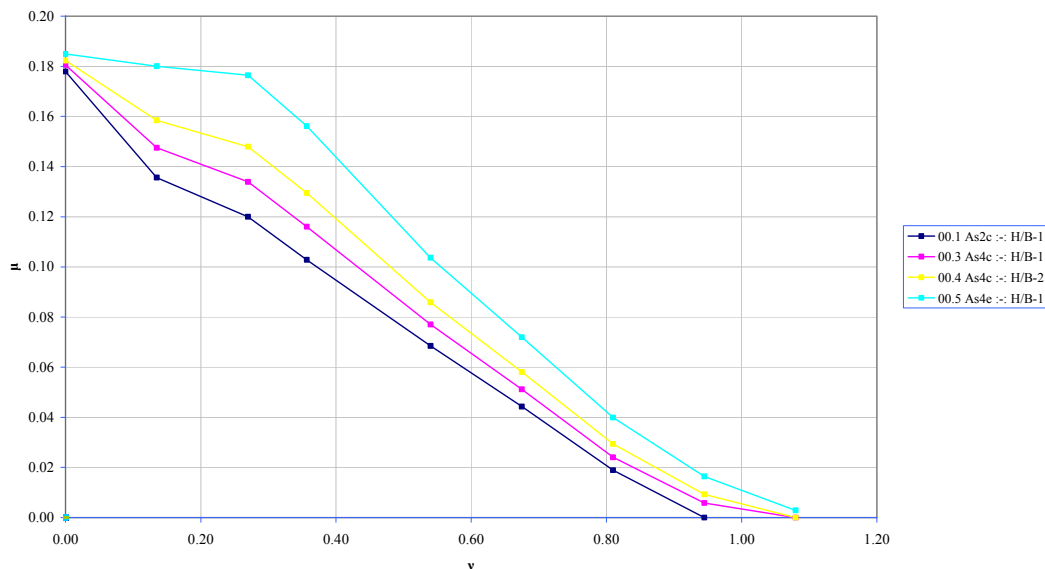


Figura IV.21 – Comparativa de las gráficas axil – momento adimensionalizados para los diferentes tipos de sección transversal en flexión recta y fluencia=1, con esbeltez mecánica $\lambda_{mec}=67.5$, $\omega=0.50$ y $f_c=30$.

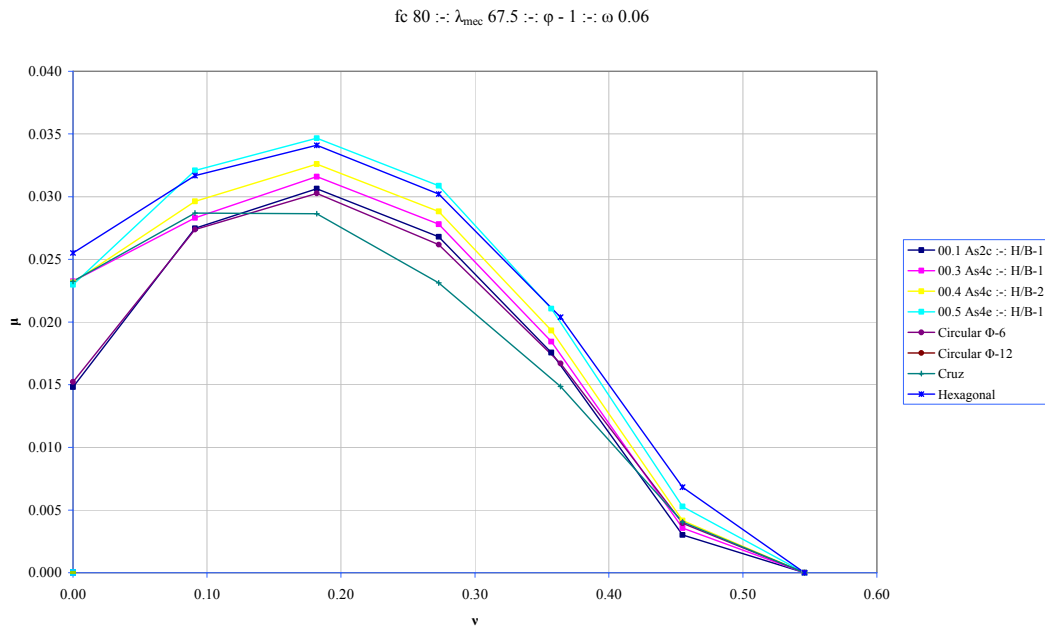


Figura IV.22 – Comparativa de las gráficas axil – momento adimensionalizados para los diferentes tipos de sección transversal en flexión recta y fluencia=1, con esbeltez mecánica $\lambda_{mec}=67.5$, $\omega=0.06$ y $f_c=80$.

Como sucedía en análisis en instantáneo no hay variación significativa independientemente del tipo de sección que se analice. De nuevo las envolventes de las curvas corresponden a las curvas de sección en cruz y la sección rectangular con armadura en las esquinas.

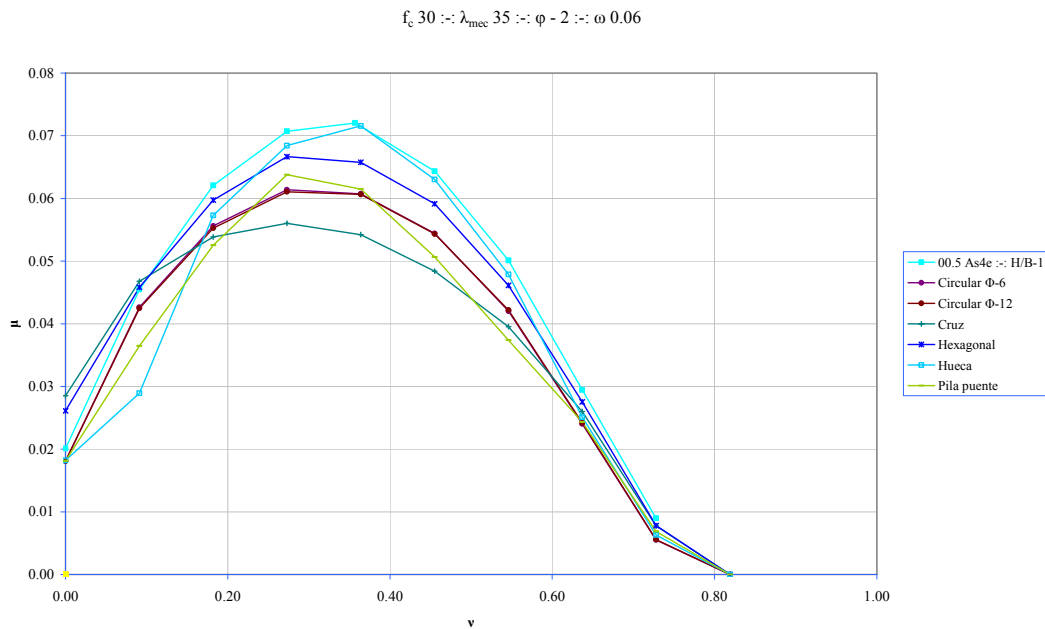


Figura IV.23 – Comparativa de las gráficas axil – momento adimensionalizados para los diferentes tipos de sección transversal en flexión recta y fluencia=2, con esbeltez mecánica $\lambda_{mec}=35$, $\omega=0.06$ y $f_c=30$.

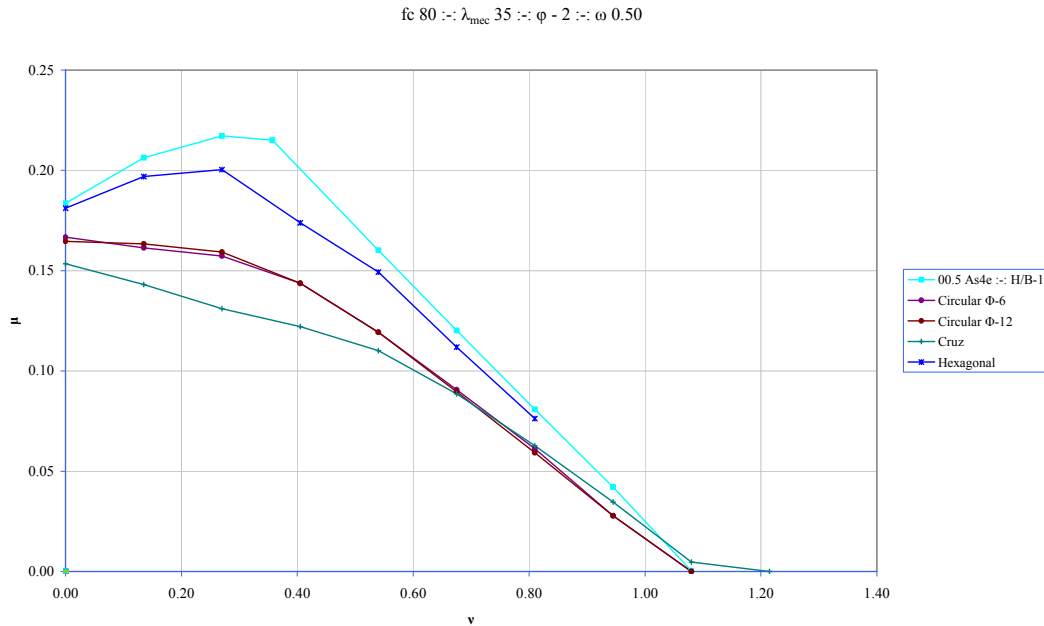


Figura IV.24 – Comparativa de las gráficas axil – momento adimensionalizados para los diferentes tipos de sección transversal en flexión recta y fluencia=2, con esbeltez mecánica $\lambda_{mec}=35$, $\omega=0.50$ y $f_c=80$.

Al igual que en fluencia $\phi=1$, el comportamiento es similar al de fluencia 2. No existiendo diferencias apreciables en cuanto a comportamiento que dependan del valor de la fluencia.

A la vista de las gráficas se ve una mayor dispersión con cuantías superiores de armado frente a cuantías de armado inferior.

La conclusión que se puede extraer es que no hay diferencias significativas y que la tipología de la sección no influye en la rotura de la sección, al tener unas gráficas axil-momento adimensionales prácticamente equivalentes.

Las mayores diferencias que se aprecian en las curvas corresponden a la zona en la que el comportamiento de la sección cambia de rotura por agotamiento a rotura por inestabilidad. Esta diferencia puede llegar hasta un 7% en función del tipo de sección que estemos comparando.

00.5 As4e H/B=1 :-: f_c 30 :-: ω 0.50

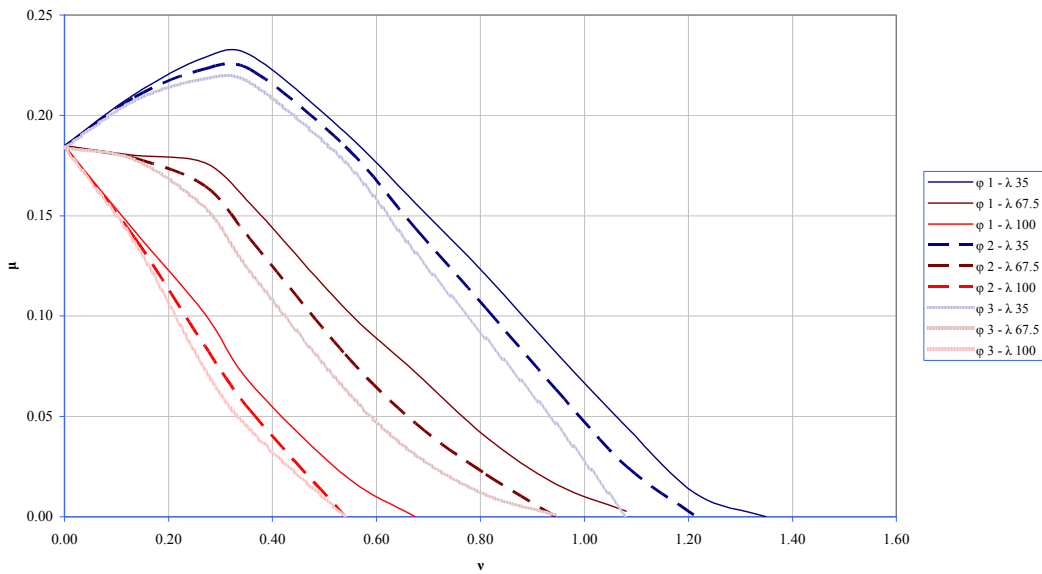


Figura IV.25 – Comparativa de las gráficas axil – momento adimensionalizados en función de la fluencia para una sección rectangular de relación de lados H/B=1 y con armadura en las 4 esquinas, en flexión recta, $\omega=0.50$ y $f_c=30$

A la vista de la figura, la forma de la curva de rotura que presenta una sección determinada no se ve fuertemente influida por el nivel de fluencia al que se vea sometido el soporte. (Figura IV.25)

El aumento del nivel de fluencia de la pieza lleva aparejado una disminución del nivel de resistencia de la misma. La pérdida de la resistencia es de hasta un 4% en las situaciones de carga más desfavorables.

El aumento de la diferencia por el nivel de fluencia va creciendo conforme aumenta el nivel de carga y la rotura deja de ser por agotamiento y pasa a ser por inestabilidad.

Cuando se trata de esbelteces altas como lo es la de esbeltez 100 la pérdida por aumento del nivel de fluencia se hace menos importante.

IV.3.6 Flexión Esviada

Los soportes que se ven sometidos a un momento flector total en flexo-compresión esviada no suele llevar por lo general la misma dirección que el momento de primer orden aplicado en los extremos.

No obstante el método de la amplificación de momentos no busca obtener los esfuerzos totales de la sección crítica si no los esfuerzos totales de diseño, a partir de los de primer orden, de manera que tengan la misma dirección.

Para el análisis en flexión esviada habrá que estudiar una serie de ángulos β en los que se aplicarán los esfuerzos. Debido a lo que se ha señalado en el párrafo anterior,

no coincide la dirección de aplicación del esfuerzo total en los extremos con la dirección que se obtiene como resultante en la sección crítica $[\beta^*]$.

La relación que rige entre el ángulo β en los extremos del soporte y el ángulo de la sección crítica β^* es la siguiente:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{M_y}{M_x}$$

$$\operatorname{tg}\beta^* = \frac{\dot{\mu}_x}{\dot{\mu}_y} = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{2 \cdot i_x}{2 \cdot i_y}$$

$$\operatorname{tg}\beta^* = \operatorname{tg}\beta \cdot \frac{i_x}{i_y} \Rightarrow \beta = \operatorname{atg} \left[\operatorname{tg}\beta^* \cdot \frac{i_y}{i_x} \right]$$

Para el estudio de la flexión esviada se tendrá en cuenta el número de ejes de simetría que presenta la sección:

- Sección con 2 ejes de simetría: el estudio de la sección esviada se reducirá a los ángulos contenidos en uno de los cuadrantes delimitados por los 2 ejes de simetría. El comportamiento de la sección se repite a lo largo de cada cuadrante.
- Sección con 1 eje de simetría: el estudio de la flexión esviada tiene que englobar 180° delimitados por el eje de simetría.
- Sección asimétrica: el estudio ha de englobar los 360° de la sección.

Las secciones que se han estudiado en flexión esviada son: la sección hueca, la de pila puente y secciones en L con 1 eje de simetría y con ningún eje de simetría. La sección circular no presenta flexión esviada al tener simetría radial. Para no extender el estudio en cuanto a número de ensayos no se realizó estudio de flexión esviada para la sección en cruz y hexagonal.

Sección Hueca

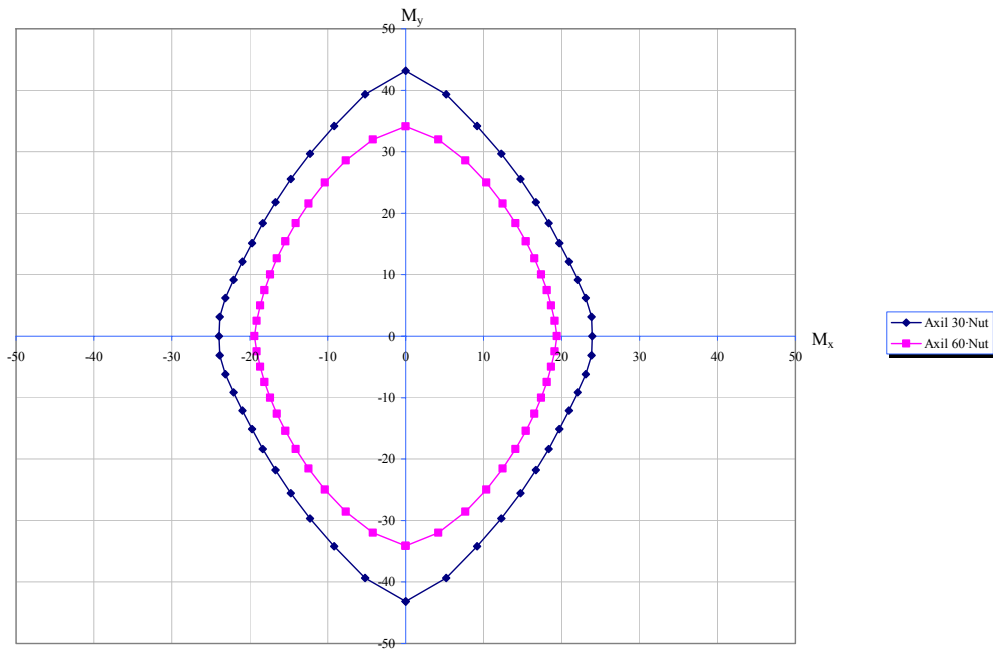


Figura IV.26 – Análisis de los ángulos de flexión esviada: Esquema de la sección hueca

La gráfica muestra el esquema de momentos descompuestos en los dos ejes principales de inercia de la sección transversal [x,y] para diferentes niveles de axil. En particular los niveles de axil estudiados son del 30 y del 60% sobre el nivel de axil último de la sección. El momento flector en módulo es equivalente variando sólo el ángulo sobre el que actúa en la sección: se comprueba que hay una doble simetría a nivel momentos que equivale a la simetría a nivel sección.

A la vista de la gráfica bastaría con el estudio de uno de los cuatro cuadrantes de la sección para que el estudio en flexión esviada quedara totalmente recogido ya que la tipología de rotura se repite a lo largo de la sección.

Sería necesario establecer una serie de ángulos β^* equidistantes que cubrieran todo el espectro posible del cuadrante:

$$\beta^* \in [0,90^\circ] \quad \frac{i_y}{i_x} = \frac{5.049752 \cdot 10^{-2}}{8.416254 \cdot 10^{-2}} = 0.5999$$

β^*	$\text{tg}(\beta^*)$	$\text{tg}(\beta^*) \cdot i_y/i_x$	$\beta = \text{atg}[\text{tg}(\beta^*) \cdot i_y/i_x]$
0	0.00	0.00	0.00
22.5	0.41	0.25	13.96
45	1.00	0.60	30.96
67.5	2.41	1.45	55.38
90	1.63E+16	9.79E+15	90

Tabla IV.3 – Análisis de los ángulos de flexión esviada: Esquema de la sección hueca

Como se puede comprobar la diferencias entre los ángulos β no son equidistantes, aunque sí que lo son ángulos β^* .

Sección “pila puente”

Se procede igual con la sección “pila de puente”. Esta sección también contiene dos ejes de simetría, por lo que el diagrama de momentos presentará dos ejes de simetría.

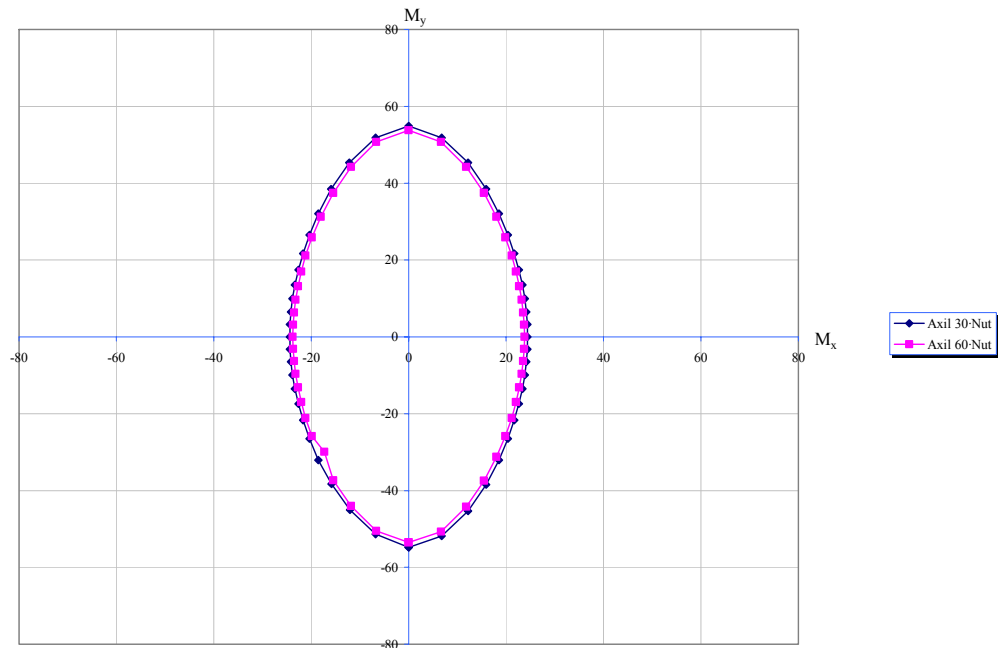


Figura IV.27 – Análisis de los ángulos de flexión esviada: Esquema de la sección “pila de puente”

La gráfica muestra el comportamiento de esta sección para los niveles de axil de 30 y del 60 % del axil último de la sección. El momento flector representando en todos los puntos tiene el mismo módulo sólo que se varía el ángulo β que se representa. Los ejes de simetría coinciden con los ejes principales de inercia de la sección.

Ahora se ha de decidir los ángulos del primer cuadrante que se van a estudiar, ya que con este intervalo se cubre todo el comportamiento típico de la sección en flexión esviada.

$$\beta^* \in [0,90^\circ] \quad \frac{i_y}{i_x} = \frac{4.124606 \cdot 10^{-2}}{9.319767 \cdot 10^{-2}} = 0.442565$$

β^*	$\text{tg}(\beta^*)$	$\text{tg}(\beta^*) \cdot i_y/i_x$	$\beta = \text{atg}[\text{tg}(\beta^*) \cdot i_y/i_x]$
0	0.00	0.00	0.00
22.5	0.41	0.18	10.39
45	1.00	0.44	23.87
67.5	2.41	1.07	46.90
90	1.63E+16	7.22E+15	90

Tabla IV.4 – Análisis de los ángulos de flexión esviada: Valores de la sección “pila puente”.

Sección “L” con 1 eje de simetría

Para poder analizar los esquemas de momento de la sección en “L” es necesario hacer un cambio de ejes de la sección y estudiarla en ejes principales. Esto se debe hacer ya que en el estudio de los ángulos $\beta - \beta^*$, se obtiene los mismos valores de los radios de giro y no se podría estudiar correctamente la flexión esviada.

Se realizará una rotación de 45° grados [por la simetría de la sección] de los ejes x e y para obtener los ejes ξ_1 y ξ_2 que corresponderían a los ejes mayor y menor de inercia de la sección; realizándose el mismo estudio que se ha llevado a cabo para la sección hueca y pila de puente con la salvedad de que los ejes no son los mismos, pero siguiendo el mismo tipo de estudio.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta &= \frac{M_y}{M_x} \\ &\Downarrow \\ \operatorname{tg}\beta^* &= \frac{\mu_y}{\mu_x} = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{i_x}{i_y} \\ \operatorname{tg}\beta^* &= \operatorname{tg}\beta \cdot \frac{i_x}{i_y} \Rightarrow \beta = \operatorname{tg}^{-1} \left[\operatorname{tg}\beta^* \cdot \frac{i_y}{i_x} \right] \end{aligned}$$

Evidentemente habrá que trabajar en ejes principales ya que $i_x=i_y$ y $P_{xy} \neq 0$. Aplicando un giro de 45° en sentido antihorario. Y llamando ξ_1 al eje de $[\beta=45^\circ; \xi=0^\circ]$ correspondiente al eje fuerte e ξ_2 al de eje débil $[\beta=135^\circ; \xi=90^\circ]$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\xi &= \frac{M_2}{M_1} \\ \operatorname{tg}\xi^* &= \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{i_1}{i_2} \\ \mu_i &= \frac{M_i}{A_c \cdot f_c \cdot 4 \cdot i_j} \\ \operatorname{tg}\xi^* &= \operatorname{tg}\xi \cdot \frac{i_1}{i_2} \Rightarrow \xi = \operatorname{tg}^{-1} \left[\operatorname{tg}\xi^* \cdot \frac{i_2}{i_1} \right] \\ \xi^* &\in [-90^\circ, 90^\circ] \Rightarrow \operatorname{tg}\xi^* \in]-\infty, +\infty[\\ \frac{i_2}{i_1} &= \frac{6.027714 \cdot 10^{-2}}{0.1040833} = 0.57912402 \end{aligned}$$

ξ^*	$\text{tg}(\xi^*)$	$\text{tg}(\xi^*) \cdot i_2/i_1$	$\xi = \text{atg}[\text{tg}(\xi^*) \cdot i_2/i_1]$	$\beta = \xi + 45^\circ$
0	0.00	0.00	0.00	45.00
30	0.58	0.33	18.49	63.49
60	1.73	1.00	45.09	90.09
90	1.63E+16	9.45E+15	90.00	135.00
-30	-0.58	-0.33	-18.49	26.51
-60	-1.73	-1.00	-45.09	-0.09
-90	-1.63E+16	-9.45E+15	-90.00	-45.00

Tabla IV.5 – Análisis de los ángulos de flexión esviada: Valores de la sección “L”.

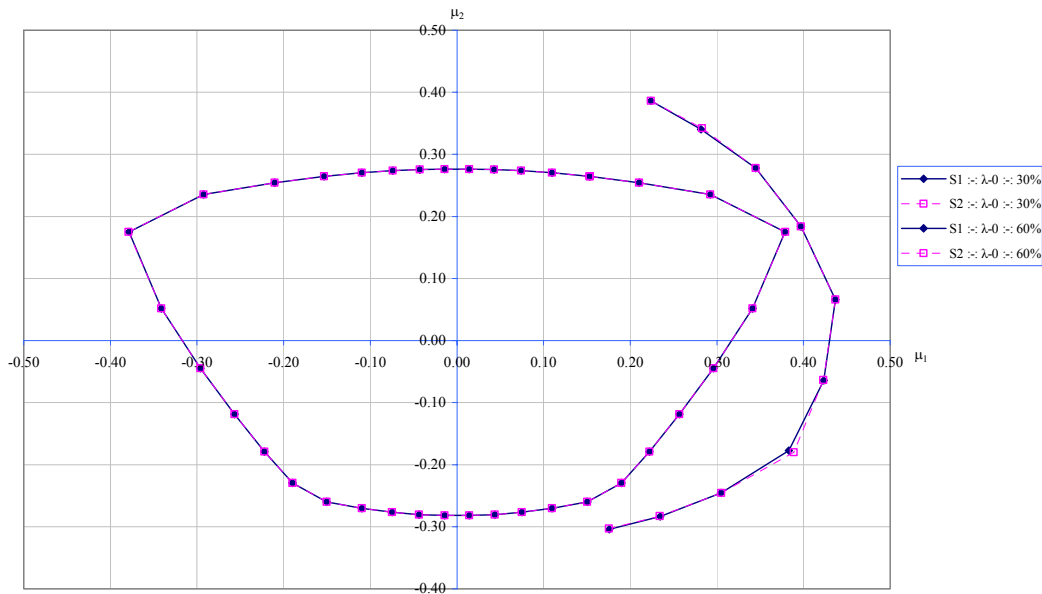


Figura IV.28 – Análisis de los ángulos de flexión esviada: Esquema de la sección “L” con un único eje de simetría

La sección presenta simetría con respecto al eje de momentos μ_2 que corresponden a los ángulos de $\xi=90^\circ$ y $\xi=-90^\circ$ [ejes débiles de flexión].

En la Figura IV.28 se ha representado adimensionalmente la sección en L: S_1 y S_2 que corresponde a una sección con las dimensiones dobles que la S_1 . Como se comprueba las gráficas son idénticas

Se ha vuelto a representar la sección con una carga de 30 y del 60% de los axiles críticos de la sección, aunque en este caso el nivel del 0.6 del axil crítico no se ha representado en los 360° .

Si no se hubiera representado en ejes principales el tipo de gráfica obtenido hubiera sido del siguiente tipo

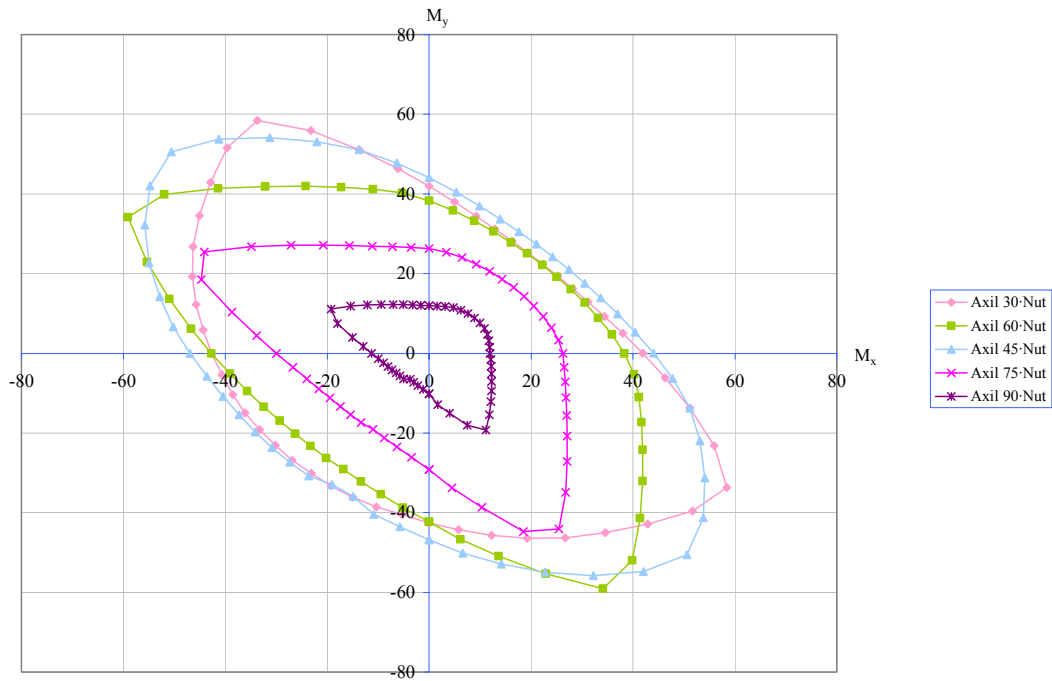


Figura IV.29 – Análisis de los ángulos de flexión esviada: Esquema de la sección “L” con un único eje de simetría [ejes no principales]

Sección “L” con ningún eje de simetría

Se debe seguir el mismo procedimiento para el análisis de la flexión esviada que se siguió con la sección “L” con un eje de simetría, en esta ocasión $i_x \neq i_y$ y $P_{xy} \neq 0$ por lo que se ha de estudiar la sección en los ejes principales para que el producto de inercia de la sección $P_{12} = 0$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M_y}{M_x}$$

$$\operatorname{tg} \beta^* = \frac{\dot{\mu}_y}{\dot{\mu}_x} = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{i_x}{i_y}$$

$$\operatorname{tg} \beta^* = \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{i_x}{i_y} \Rightarrow \beta = \operatorname{tg}^{-1} \left[\operatorname{tg} \beta^* \cdot \frac{i_y}{i_x} \right]$$

Procediendo análogamente se debe aplicando un giro a los ejes cartesianos xy de 77.61° , ángulo que corresponde al eje fuerte para la sección considerada en sentido antihorario. Llamando ξ_1 al eje de $[\beta = 77.61^\circ; \xi = 0^\circ]$ correspondiente al eje fuerte e ξ_2 al de eje débil $[\beta = -12.39^\circ; \xi = 90^\circ]$. A continuación se detallan los pasos necesarios para poder determinar los ángulos que se desean estudiar y los ángulos que se corresponden al ángulo de los esfuerzos en los extremos.

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{M_2}{M_1}$$

$$\operatorname{tg} \xi^* = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{i_1}{i_2}$$

$$\mu_i = \frac{M_i}{A_c \cdot f_c \cdot 4 \cdot i_j}$$

$$\operatorname{tg} \xi^* = \operatorname{tg} \xi \cdot \frac{i_1}{i_2} \Rightarrow \xi = \operatorname{tg}^{-1} \left[\operatorname{tg} \xi^* \cdot \frac{i_2}{i_1} \right]$$

$$\xi^* \in [0^\circ, 315^\circ] \Rightarrow \operatorname{tg} \xi^* \in]-\infty, +\infty[$$

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{6.391282 \cdot 10^{-2}}{0.1548248} = 0.4128$$

ξ^*	$\operatorname{tg}(\xi^*)$	$\operatorname{tg}(\xi^*) \cdot i_2/i_1$	$\xi = \operatorname{atg}[\operatorname{tg}(\xi^*) \cdot i_2/i_1]$	$\beta = \xi + 77.61243^\circ$
0	0.00	0.00	0.00	77.61
45	1.00	0.41	22.43	100.04
90	1.63E+16	6.74E+15	90.00	167.61
135	-1.00	-0.41	157.57	235.18
180	-1.23E-16	-5.06E-17	180.00	257.61
225	1.00	0.41	202.43	280.04
270	5.44E+15	2.25E+15	270.00	347.61
315	-1.00	-0.41	337.57	415.18

Tabla IV.6 – Análisis de los ángulos de flexión esviada: Valores de la sección “L” con 0 ejes de simetría.

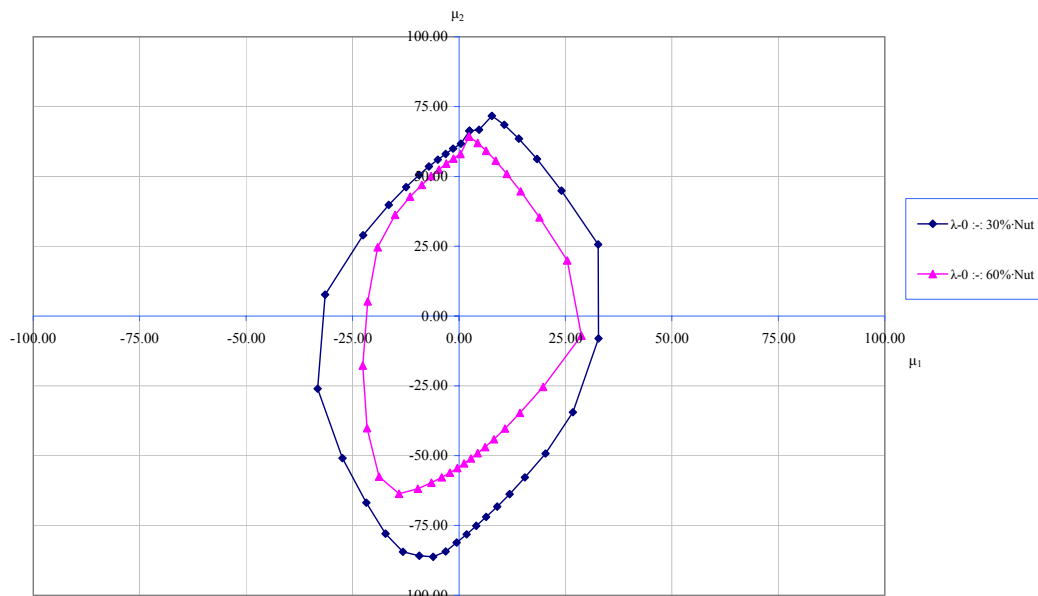


Figura IV.30 – Análisis de los ángulos de flexión esviada: Esquema de la sección “L” sin ejes de simetría [ejes principales de inercia]

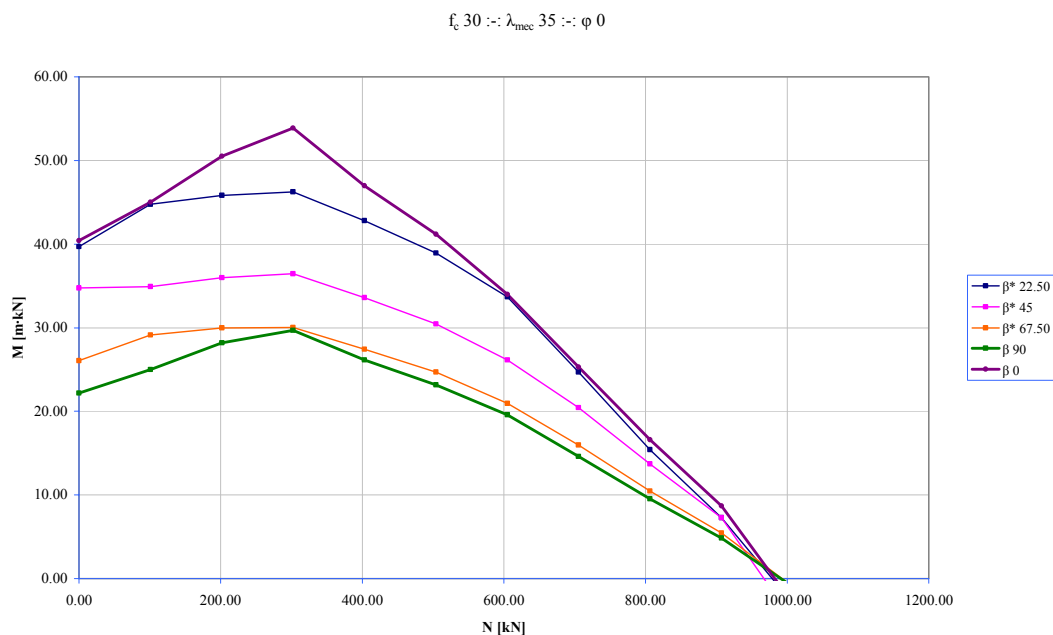


Figura IV.31 – Curvas axil–momento sección hueca para valores de β [$0^\circ, 90^\circ$] Análisis en instantáneo

Los ejes principales de inercia de la sección corresponden tal y como se señaló en el análisis previo de estudio de ángulos en flexión esviada, a los ejes con mayor y menor resistencia del soporte. (Figura IV.31).

En el caso de la figura anterior se comprueba que los valores de $\beta=0^\circ$ corresponde al eje principal de inercia mayor y que por lo tanto es la dirección con mayor resistencia. Todo lo contrario de lo que sucede con el ángulo $\beta=90^\circ$, correspondiente al eje menor de inercia que es el eje de menor resistencia del soporte. Estas dos curvas constituyen la envolvente de superficies de rotura de los soportes. Los demás valores de β están comprendidos dentro de estos dos valores.

La pérdida de resistencia tiene dos comportamientos bien diferenciados en función de la zona de la curva de axil–momento en la que está la sección.

En la zona de rotura por agotamiento [hasta alcanzar el momento máximo]. La pérdida de resistencia es de casi un 25% entre el eje fuerte y el eje débil, y de un 10% para el eje del bisector [$\beta^*=45^\circ$]. Esta pérdida permanece constante desde la zona de rotura a flexión pura hasta la zona de máximo momento resistido.

En la zona de rotura por inestabilidad, la pérdida va decreciendo conforme se acerca a niveles de axil próximos a rotura por compresión pura.

El mecanismo que sigue al aumentar el nivel de flexión es en una primera etapa se disminuye fuertemente el momento máximo soportado y la zona de axil–momento próxima a esta; mientras que para los niveles de axil alejados de esta zona el comportamiento es prácticamente idéntico [$\beta^*=22.5$].

Para rangos de flexión esviada $\beta^*=67.5$ se comprueba que hay un fuerte arrastre hacia el eje débil de la sección y que prácticamente no hay diferencias significativas con respecto a la flexión de eje débil: el momento resistido máximo es el mismo que el del eje débil y sólo hay una resistencia de entorno a un 3% más del eje débil.

Las primeras conclusiones que se deben de sacar es que las pérdidas que se producen son muy marcadas en el momento máximo resistido en el instante que se introduce la flexión esviada. La pérdida es elevada para los distintos niveles de axil cuando ya hay un ángulo de esviaje importante llegando a un extremo tal que superado el ángulo de 45° la curva de rotura es prácticamente idéntica a la del eje débil.

En compresión simple como no podía ser de otra forma todos los ángulos de esviaje resisten el mismo axil.

IV.4. PROPUESTA METODO

IV.4.1 Planteamiento teórico

IV.4.1.1 Método de amplificación de momentos

En un soporte aislado sometido a una sollicitación de flexo-compresión recta con excentricidades iguales en extremos, el momento de centro-luz es igual a,

$$M_t = N \cdot (e_0 + \delta) \quad (IV.i)$$

donde:

M_t momento total en la sección crítica del soporte

N axil aplicado

e_0 excentricidad de primer orden

δ flecha total en la sección crítica, igual a la flecha producida por el esfuerzo de primer orden δ_1 más la flecha producida por los efectos de segundo orden δ_2

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

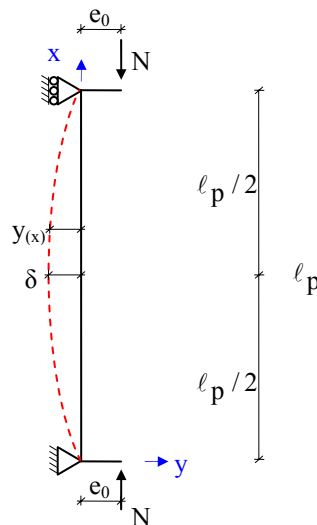


Figura IV.32 – Posición de equilibrio del soporte aislado

Se asume una deformada del tipo senoidal

$$y(x) = -\delta \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi \cdot x}{l_p} \right) \quad (IV.ii)$$

siendo l_p la longitud del soporte.

Asumiendo un comportamiento elástico y lineal, el momento de segundo orden para una sección cualquiera es igual a:

$$M_2 = N \cdot y(x) = -N \cdot \delta \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot x}{\ell_p}\right) = -EI \cdot y_2''(x) \quad (\text{IV.iii})$$

donde:

EI rigidez de la sección transversal paralela al plano de pandeo

$y_2''(x)$ curvatura de la sección producida por el momento flector de segundo orden

La ecuación (IV.iii) es una ecuación diferencial que puede resolverse fácilmente si la rigidez EI es constante y si se imponen las condiciones de contorno se obtiene que:

$$\begin{cases} y_2''(x) = \frac{N \cdot \delta}{EI} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot x}{\ell_p}\right) \\ y_{2(x=0)} = 0 \\ y_{2(x=\ell_p)} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.iv})$$

Bajo estas condiciones de contorno, la deformada de segundo orden es:

$$y_2(x) = \frac{N \cdot \delta}{EI} \cdot \left(\frac{\ell_p}{\pi}\right)^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot x}{\ell_p}\right) \quad (\text{IV.v})$$

Siendo la flecha en centro-luz por efectos de segundo orden:

$$\delta_2(x) = y_{2(x=\ell_p/2)} = \frac{N \cdot \delta}{EI} \cdot \left(\frac{\ell_p}{\pi}\right)^2 = \delta \cdot \frac{N}{\frac{\pi^2 \cdot EI}{\ell_p^2}} = \delta \cdot \frac{N}{N_{cr}} \quad (\text{IV.vi})$$

donde N_{cr} es el axil crítico de pandeo correspondiente al soporte biarticulado [carga crítica de Euler]

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{\ell_p^2} \quad (\text{IV.vii})$$

y sustituyendo

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_1 + \delta \cdot N / N_{cr} \\ \delta &= \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \cdot \delta_1 \end{aligned} \quad (\text{IV.viii})$$

La flecha de primer orden que corresponde a la sollicitación de un momento flector constante a lo largo del soporte es:

$$\delta_1 = \frac{M_1 \cdot \ell_p^2}{8 \cdot EI} \quad (IV.ix)$$

donde M_1 es el momento de primer orden igual a $M_1 = N \cdot e_0$

$$M_t = M_1 + N \cdot \frac{\delta_1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} = M_1 \cdot \left[1 + \frac{\frac{N \cdot \ell_p^2}{8 \cdot EI}}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \right] \quad (IV.x)$$

$$M_t \approx M_1 \cdot \left[1 + \frac{\frac{N}{N_{cr}}}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \right] = M_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} = M_1 \cdot \delta_{ns} \quad (IV.xi)$$

El coeficiente δ_{ns} se denomina factor de amplificación, siendo igual a:

$$\delta_{ns} = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \quad (IV.xii)$$

donde N axil aplicado
 N_{cr} axil crítico

El factor de amplificación δ_{ns} se ha obtenido con unas hipótesis de comportamiento elástico y lineal, que no corresponde a las condiciones presentes en el hormigón armado. Para aplicar este método es necesario estimar correctamente la rigidez EI del soporte que interviene en el valor del axil crítico.

IV.4.1.2 Método simplificado propuesto basado en la amplificación de momentos

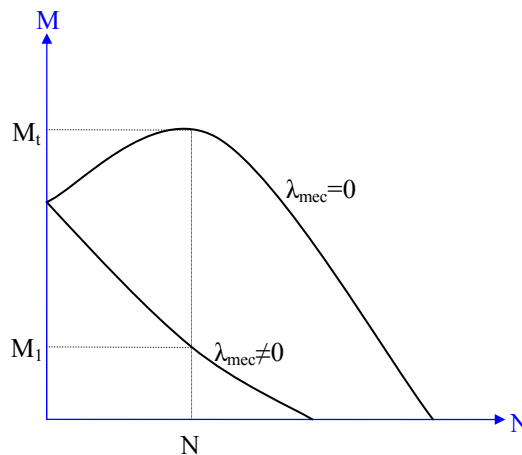


Figura IV.33 Método de amplificación de momentos

Para aplicar este método se ha estimado el factor de rigidez EI a partir de los resultados obtenidos en el modelo teórico de referencia (MTR).

En el problema de comprobación de un soporte, la cuantía y la distribución de armadura dispuesta en la sección transversal son datos, por tanto, la estimación del soporte se puede obtener a partir de la rigidez del hormigón $E_c I_c$ y de la rigidez $E_s I_s$

$$EI = \alpha \cdot E_c I_c + E_s I_s \quad (\text{IV.xiii})$$

donde:

α factor de rigidez de comprobación

E_c módulo de deformación del hormigón igual a $E_c = 8500 \cdot \sqrt[3]{f_c}$

I_c inercia bruta de la sección según el plano de flexión

E_s módulo de deformación del acero igual a 200.000 MPa

I_s inercia de las armaduras según el plano de flexión

En el caso de dimensionamiento de la armadura longitudinal de un soporte [que no se trata en este ejercicio de fin de carrera], solamente se conoce la distribución de la armadura pero no la cuantía por lo que la estimación de la rigidez se plantea únicamente a partir de la rigidez del hormigón.

$$EI = \alpha' \cdot E_c I_c \quad (\text{IV.xiv})$$

El proceso para estimar la rigidez “EI” se plantea en tres etapas:

1. Estimación del valor del factor de rigidez de comprobación bajo cargas instantáneas y en flexo-compresión.
2. Análisis de los soportes en flexo-compresión esviada y bajo cargas instantáneas, obteniéndose la inercia equivalente del soporte en función de la dirección del momento flector.
3. Introducción del efecto de la fluencia en la rigidez “EI” del soporte mediante el análisis de los soportes en flexo-compresión recta bajo cargas diferidas.
4. Comprobación del método en flexo-compresión esviada bajo cargas diferidas, la bondad del método desarrollado.

IV.4.2 Estimación de la rigidez EI del soporte

IV.4.2.1 Planteamiento y estudio

IV.4.2.1.a Flexo-compresión recta bajo cargas instantáneas

Si se aplica al modelo teórico de referencia (MTR) a un soporte esbelto sometido a unos esfuerzos de flexo-compresión se obtiene para un determinado nivel de axil N_d , el máximo momento flector de primer orden que puede resistir $(M_1)_{MTR}$. También es posible calcular el máximo momento flector de rotura correspondiente a la sección transversal $(M_t)_{MTR}$. A partir de estos datos se puede obtener el valor del factor de rigidez “ α ”.

El factor de amplificación se obtiene despejando en la ecuación (IV.xi)

$$\delta_{ns_{MTR}} = \frac{M_{t_{MTR}}}{M_{1_{MTR}}} \quad (IV.xv)$$

El axil crítico a partir de la ecuación (IV.xii)

$$N_{cr_{MTR}} = \frac{N_d}{1 - \frac{1}{\delta_{ns_{MTR}}}} \quad (IV.xvi)$$

Obteniéndose el factor de rigidez “ α ”. La rigidez del soporte se calcula a partir de la ecuación (IV.xiii)

$$\alpha_{MTR} = \frac{EI_{MTR} - E_s I_s}{E_c I_c} \quad (IV.xvii)$$

Se representaría gráficamente el factor de rigidez “ α ” en función de la excentricidad relativa de primer orden $e_0/4 \cdot i$ [y de la esbeltez mecánica λ_{mec}]

$$e_0/4 \cdot i = \frac{M_1/N_d}{4 \cdot i} \quad (IV.xviii)$$

Para distintos valores de la esbeltez, el valor de $e_0/4 \cdot i$ coincide en un punto común en $e_0/4 \cdot i = 0.2$ que se denominará **factor de rigidez pivote** “ α_p ”.

El factor de rigidez se comporta de distinta forma dependiendo del valor que tenga $e_0/4 \cdot i$ con respecto al valor del pivote.

Cuando la excentricidad $e_0/4 \cdot i$ es superior al factor de rigidez de pivote 0.2, se observa que el comportamiento del factor de rigidez de comprobación α tiene una tendencia decreciente frente al aumento de excentricidad. El parámetro α se puede considerar con tendencia independiente de la esbeltez mecánica del soporte y se puede simplificar su comportamiento como el de una recta.

En los casos en los que la excentricidad está por debajo del factor de rigidez pivote, la esbeltez condiciona de una manera determinante el comportamiento del factor de rigidez α . Para esbelteces pequeñas las pendientes son positivas frente a pendientes negativas que se observan en las esbelteces grandes. Es por esto que es necesario aproximar el factor de rigidez α en función de la excentricidad relativa $e_0/4 \cdot i$ mediante diferentes rectas con diferentes pendientes en función de la esbeltez λ_{mec} .

La forma que tienen las curvas del factor de rigidez α está asociada al comportamiento físico, siendo consecuencia del diferente tipo de rotura del soporte: para excentricidades elevadas la rotura es debida principalmente al agotamiento, en este caso la rigidez no está influida por la esbeltez del soporte; para excentricidades pequeñas la rotura es un fenómeno de inestabilidad, es un estado marcado fuertemente por la esbeltez del soporte.

Se observa una tendencia decreciente del coeficiente α cuando las excentricidades superan el valor de 0.2 se explica porque, para excentricidades crecientes la situación de fallo viene determinada en mayor medida por el agotamiento de la sección que por inestabilidad. En este caso, la sección transversal alcanza mayores deformaciones y disminuye su rigidez.

En cuanto al comportamiento del factor de rigidez para excentricidades inferiores al valor del pivote para esbelteces elevadas el coeficiente α aumenta cuando disminuye la excentricidad relativa $e_0/4 \cdot i$. En estos casos domina la inestabilidad, por lo que la sección transversal alcanza menores deformaciones y en consecuencia su rigidez es mayor.

En cambio para excentricidades inferiores a 0.2 y pequeñas esbelteces el coeficiente α disminuye con la excentricidad relativa $e_0/4 \cdot i$. En esta situación, la rotura viene determinada por el agotamiento de la sección transversal. Es por esto, que conforme el soporte está más comprimido y la diferencia entre los módulos de deformación tangente, aplicados a la ecuación (IV.xiii), y secante del acero E_s y del hormigón E_c aumenta para el estado de deformaciones de la sección en la que se encuentra, por lo que se sobrestiman dichos módulos

Por lo tanto, para rangos pequeños de esbeltez, conforme disminuye la excentricidad, para $e_0/4 \cdot i < 0.2$, la sección se comprime más y el coeficiente α disminuye de valor, y por otra parte, para una misma $e_0/4 \cdot i < 0.2$, si la esbeltez disminuye, también la sección crítica se comprime más (menores efectos de segundo orden) y en consecuencia también el coeficiente α disminuye de valor.

La expresión analítica es,

$$^{(i)} e_0/4 \cdot i < 0.2 \quad \alpha = m_1 \cdot (e_0/4 \cdot i - 0.2) + \alpha_p$$

$$^{(ii)} e_0/4 \cdot i \geq 0.2 \quad \alpha = m_2 \cdot (e_0/4 \cdot i - 0.2) + \alpha_p$$

Los coeficiente m_1 , m_2 y α_p se obtiene mediante un ajuste por mínimos cuadrados respecto al modelo teórico de referencia.

La pendiente “ m_1 ” depende como ya se ha señalado principalmente de la esbeltez. La propuesta es de una variación lineal en función de la esbeltez mecánica λ_{mec} .

$$m_1 = -0.04 \cdot \lambda_{mec}$$

La pendiente “ m_2 ” depende en cambio de la resistencia del hormigón, y depende en menor medida de la esbeltez y de la cuantía de la armadura. La propuesta es de una variación lineal en función de la resistencia mecánica f_c .

$$m_2 = -0.01 \cdot f_c - 0.5$$

El factor de rigidez pivote “ α_p ” depende exclusivamente de la resistencia del hormigón. La propuesta es de una variación lineal en función de la resistencia mecánica f_c .

$$\alpha_p = 0.006 \cdot f_c + 0.12$$

Quedando el factor de rigidez α con la siguiente expresión

$$^{(i)} e_0/4 \cdot i < 0.2 \quad \alpha = (-0.04 \cdot \lambda_{mec} + 2.2) \cdot (e_0/4 \cdot i - 0.2) + \alpha_p$$

$$^{(ii)} e_0/4 \cdot i \geq 0.2 \quad \alpha = (-0.01 \cdot f_c - 0.5) \cdot (e_0/4 \cdot i - 0.2) + \alpha_p$$

IV.4.2.1.b Flexo-compresión esviada bajo cargas instantáneas

El momento flector que solicita la sección crítica del soporte sometido a cargas de flexo-compresión esviada no llevará, en general la misma dirección que el momento de primer orden aplicado en extremos. El objetivo que se busca con el método simplificado no es la obtención de los esfuerzos totales de la sección crítica, sino la obtención de unos esfuerzos totales de diseño, a partir de los esfuerzos de primer orden, de manera que ambos tengan la misma dirección.

El modelo teórico de referencia proporciona, por una parte, la superficie de interacción del soporte ($\lambda_{mec} \neq 0$), es decir, los momentos de primer orden máximos para los cuales el soporte alcanza el estado límite, y por otra parte, proporciona la superficie de interacción de la sección transversal ($\lambda_{mec} = 0$), es decir, los momentos para los cuales la sección alcanza la rotura. La intersección de un plano bisector con ambas superficies de interacción dan lugar a los momentos de rotura del soporte y de la sección correspondientes a una determinada dirección. Por tanto, para un determinado nivel de axil es posible relacionar el momento de primer orden (M_1) con el momento total de diseño (M_T), correspondientes ambos a una misma dirección.

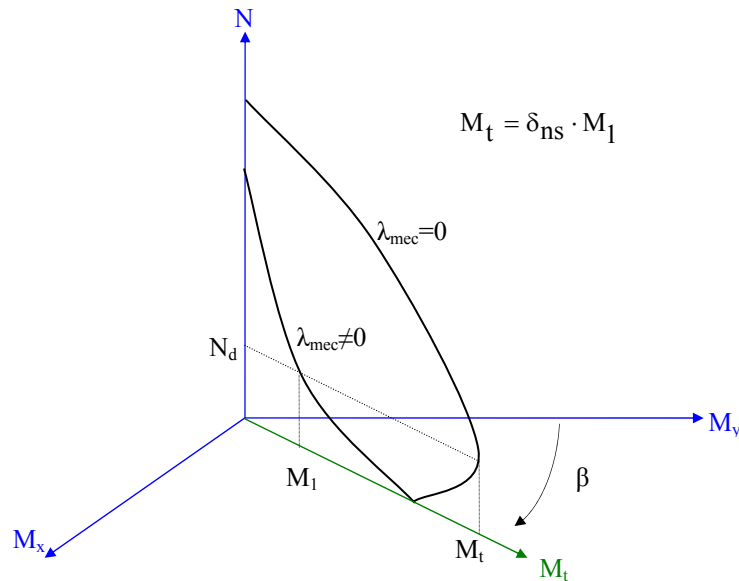


Figura IV.34 Diagrama de interacción de la sección correspondiente a la dirección del momento β .

Si la sección transversal es doblemente simétrica, y con misma relación de lados o simétrica radialmente, y con simetría de armado la pérdida de capacidad no depende de la dirección β del momento flector. En este caso el factor de amplificación δ_{ns} no depende de la dirección β , siendo válido para este tipo de secciones el análisis realizado para flexo-compresión recta.

Por otra parte, si la rigidez es distinta para cada eje principal de inercia, la pérdida de rigidez depende de la dirección β , aumentando conforme se acerca β a la dirección del eje débil.

La forma de la sección define la dirección de debilidad del soporte, además de otros factores tales como distribución de armado y el tipo de arriostramiento del soporte.

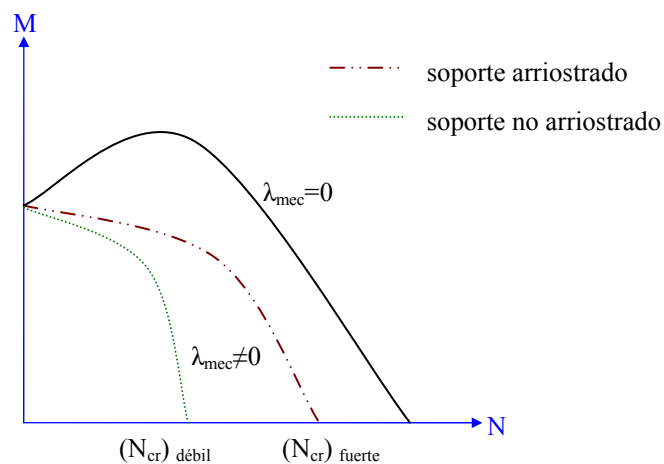


Figura IV.35 – Influencia del arriostramiento transversal del soporte.

En un soporte no arriostrado sometido a sollicitación de flexo-compresión recta, cuando la excentricidad tiende a ser nula, la inercia con la cual responde el soporte corresponde al del eje débil de la sección transversal.

En los casos de flexo-compresión esviada, el axil crítico corresponde al del eje débil, es decir que cuando la excentricidad tienda a ser nula, la rigidez del soporte corresponde al eje débil.

Si el soporte está sometido a flexión simple respecto al eje fuerte, el soporte responde con la rigidez del eje fuerte.

Dependiendo del tipo de sollicitación la rigidez está comprendida entre los límites $e_0/4 \cdot i=0$ y $e_0/4 \cdot i \rightarrow \infty$.

La evaluación de los efectos de segundo orden en flexo-compresión esviada requiere del cálculo de la rigidez equivalente del soporte de manera que reproduzca el citado comportamiento. Es por ello que no es necesario modificar el parámetro α , sino simplemente modificar el de la inercia de la sección transversal.

Una primera aproximación a la inercia equivalente de la sección, en flexión esviada pura, se podría calcular la inercia que corresponde a un eje polar paralelo a la dirección del momento que pasa por el centro de gravedad de la sección.

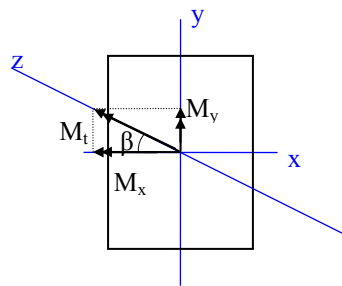


Figura IV.36 – Definición de la dirección del eje polar z-z' paralelo al momento flector.

$$I_{z'} = I_x \cdot \cos^2 \beta + I_y \cdot \sin^2 \beta$$

tomando como:

I_x inercia según el eje fuerte

I_y inercia según el eje débil

β inclinación del momento flector igual a :

$$\beta = \arctan \frac{M_y}{M_x}$$

con

M_x momento flector según el eje fuerte

M_y momento flector según el eje débil

Sin embargo el valor que se observa de la inercia a partir de esta aproximación, $I_{z'}$, es muy superior a la inercia que realmente tiene la sección. Esto es debe al arrastre que sufre la fibra neutra por parte del eje débil. Por tanto, se debe modificar el ángulo del eje polar incrementándolo hacia el eje débil.

Suponiendo un comportamiento elástico y lineal de la sección, se puede calcular la inercia respecto a la dirección de la fibra neutra en una situación de flexión biaxial pura. Esta es la solución que propuso *Mavichak et alii* a partir de los radios de giro

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{M_y / i_{cy}}{M_x / i_{cx}} \right)$$

con

i_{cx} radio de giro de la sección bruta respecto al eje fuerte

i_{cy} radio de giro de la sección bruta respecto al eje débil

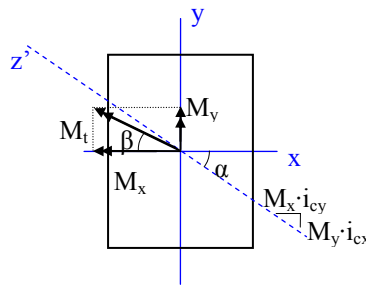


Figura IV.37 – Comportamiento elástico y lineal de la sección transversal sometida a una situación de carga de flexión biaxial pura.

El momento de inercia según la dirección de la fibra neutra es igual a:

$$I_{z'} = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha$$

A pesar de esta nueva aproximación, se vuelve a obtener una inercia que supera a la que realmente tiene el soporte. Por lo que se hace necesario buscar una nueva aproximación para la inercia.

Se opta por una fórmula que recoja una combinación lineal de inercias de la sección transversal tanto en función de la inercia de eje débil como la de eje fuerte:

$$I_{z'} = I_x \cdot (1 - \delta) + I_y \cdot \delta$$

con

$I_{z'}$ inercia de la sección transversal en flexión esviada pura

I_x inercia de la sección respecto al eje fuerte

I_y inercia de la sección respecto al eje débil

δ función de interpolación igual a :

$$\delta = \text{sen}^{\xi} \beta$$

ξ coeficiente de interpolación

β inclinación del momento flector

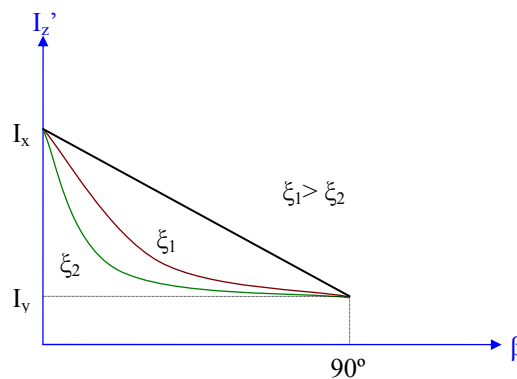


Figura IV.38 - Influencia del coeficiente de interpolación ξ en la inercia $I_{z'}$ de la sección transversal.

La expresión plantea una interpolación de la inercia $I_{z'}$, que depende de un único parámetro ξ . Conforme decrece el parámetro ξ el valor de la inercia $I_{z'}$ disminuye, de manera que la función $I_{z'}(\beta)$ es más asintótica al eje de ordenadas. Además para ángulos de inclinación β crecientes, la inercia $I_{z'}$ tiende más rápidamente a la inercia del eje débil I_y . Esta expresión de interpolación garantiza simular el arrastre que sufre la fibra neutra por parte del eje débil a nivel sección, si se toma el ángulo β no inferior a un grado.

La inercia equivalente del soporte en flexo-compresión esviada debe adaptarse adecuadamente tanto en los casos de flexión pura como en los casos de compresión simple, así como en los casos intermedios.

Para determinar esta función se han impuesto las siguientes condiciones de contorno:

- cuando la excentricidad tienda a infinito (flexión esviada pura), la inercia equivalente I_e ha de ser igual a la inercia de la sección transversal en flexión esviada pura;
- cuando la excentricidad tienda a ser nula (compresión simple), la inercia equivalente es igual a la inercia del eje débil.

$$e_0/4 \cdot i \rightarrow \infty \quad I_e = I_{z'} \quad \forall \beta \text{ (Flexión esviada pura)}$$

$$e_0/4 \cdot i \rightarrow 0 \quad I_e = I_y \quad \forall \beta \text{ (Compresión simple)}$$

Para cumplir estas condiciones de contorno, se propone la siguiente función de interpolación para la inercia equivalente:

$$I_e = I_{z'} \cdot \frac{(e_0/4 \cdot i_2)^\gamma + I_y}{(e_0/4 \cdot i_2)^\gamma + I_{z'}}$$

siendo

$e_0/4 \cdot i_2$ excentricidad relativa respecto a la dimensión menor de la sección transversal

γ coeficiente de interpolación para evaluar el gradiente entre la inercia en flexión biaxial pura $I_{z'}$ y la inercia respecto al eje débil de la sección I_y , en función de la excentricidad relativa $e_0/4 \cdot i$

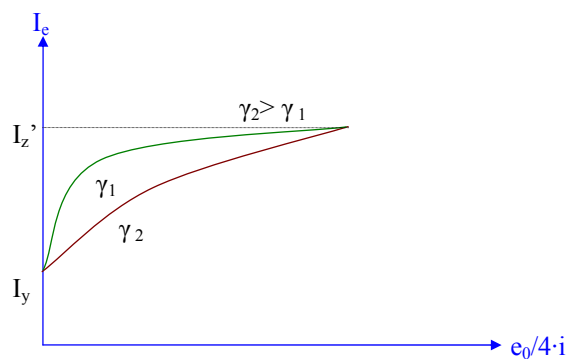


Figura IV.39 – Influencia del coeficiente de interpolación γ en la inercia I_e de la sección transversal.

A partir del coeficiente γ , es posible calibrar el arrastre del eje débil a nivel de la estructura. Esta interpolación será válida tanto para el cálculo de la inercia del hormigón como de la armadura.

En flexión esviada se emplea el factor de rigidez α ajustado en flexión recta, pero calculando la excentricidad relativa total ($e_0/4 \cdot i$) y la esbeltez mecánica (λ_{mec}) con la menor dimensión transversal.

$$(i) \quad e_0/4 \cdot i < 0.2 \quad \alpha = (-0.04 \cdot \lambda_{mec} + 2.2) \cdot (e_0/4 \cdot i - 0.2) + \alpha_p$$

$$(ii) \quad e_0/4 \cdot i \geq 0.2 \quad \alpha = (-0.01 \cdot f_c - 0.5) \cdot (e_0/4 \cdot i - 0.2) + \alpha_p$$

siendo

e_0 excentricidad de primer orden, equivalente a $e_0 = M_1/N_d$

i_2 radio de giro del eje débil

Analizando todos los soportes sometidos a flexión esviada, bajo cargas instantáneas, resueltos con el modelo teórico de referencia, y empleando el coeficiente α anterior, se concluye que los valores a adoptar para los parámetros de flexión esviada son:

$\xi=0.1$ cuando el eje débil es el menos armado,

$\xi=0.2$ para el resto de casos

$\gamma=5$

IV.4.2.1.c Flexo-compresión recta bajo cargas diferidas

Al considerar los efectos diferidos la rigidez “EI” obtenida mediante el modelo teórico de referencia reobserva que es inferior a la rigidez elásticas del acero $E_s I_s$. Esto es debido a la existencia de la rama plástica del diagrama tensión deformación del acero. De manera que cuando el acero plastifica y desarrolla deformaciones superiores a la deformación de plastificación, el módulo de deformación que interviene en la rigidez EI de la sección es el módulo secante (E_s^*) y no el tangente (E_s).

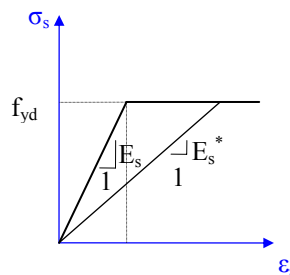


Figura IV.40 – Módulo secante de deformación del acero

Los soportes de esbeltez pequeña alcanzan la rotura fundamentalmente por agotamiento. Debido a la deformación de fluencia, las armaduras comprimidas plastifican desarrollando deformaciones muy superiores a la deformación de plastificación ϵ_{yd} del acero. El módulo de deformación del acero disminuye conforme se reduce la esbeltez, al desarrollarse mayores deformaciones en la sección transversal. Por el contrario cuando la esbeltez es mayor la rotura viene producida por fenómenos de inestabilidad a nivel de estructura, de tal forma que conforme se incrementa la esbeltez el módulo de deformación secante tiende al módulo tangente E_s .

El módulo secante del acero se ajustará de la siguiente forma:

$$E_s^* = \frac{E_s}{1 + \eta}$$

siendo

E_s^* módulo secante del acero

E_s módulo de elasticidad del acero

η coeficiente de minoración

El módulo secante cumple que:

- A menor esbeltez o mayor coeficiente de fluencia, las deformaciones de la sección transversal aumentan, y por lo tanto el módulo secante disminuye.
- Cuando la esbeltez tiende a infinito, el módulo secante tenderá al módulo de elasticidad del acero.

Se procede de manera similar para el hormigón, el módulo de rigidez de la sección transversal E_c también disminuye:

$$\frac{E_c}{1 + \varphi}$$

Por lo que la rigidez equivalente del soporte se estima a partir de la siguiente expresión:

$$EI = \alpha \cdot \frac{E_c}{1 + \varphi} \cdot I_c + \frac{E_s}{1 + \eta(\lambda_{mec}, \varphi)} \cdot I_s$$

La deformación de fluencia afecta a la rigidez del acero y a la del hormigón.

La función $\eta(\lambda_{mec}, \varphi)$ se debe ajustar analizando soportes resueltos con el modelo teórico de referencia. El ajuste se realizó con mínimos cuadrados comprobando cual era el valor más adecuado de η con distintas combinaciones de λ_{mec} y φ .

$$\eta = 1.9 \cdot \varphi \cdot e^{-0.1 \cdot \frac{\lambda_{mec}}{\sqrt{12}}}$$

La resistencia del hormigón que se emplea para la evaluación del parámetro α debe afectarse por el valor de fatiga 0.85.

$$^{(i)} e_0/4 \cdot i < 0.2 \quad \alpha = (-0.04 \cdot \lambda_{mec} + 2.2 - 0.3 \cdot \varphi) \cdot (e_0/4 \cdot i - 0.2) + \alpha_p$$

$$^{(ii)} e_0/4 \cdot i \geq 0.2 \quad \alpha = (-0.01 \cdot f_c - 0.5) \cdot (e_0/4 \cdot i - 0.2) + \alpha_p$$

IV.4.2.1.d Flexo compresión esviada bajo cargas diferidas

Se observa que la fluencia incrementa el arrastre de eje débil, disminuyendo la inercia equivalente. Por esto para la interpolación de la inercia de la sección transversal en flexión esviada pura se proponen valores de ξ menores:

$$I_z = I_x \cdot (1 - \delta) + I_y \cdot \delta$$

$$\delta = \text{sen}^{\xi} \beta$$

Analizando todos los soportes sometidos a flexión esviada, bajo cargas instantáneas, resueltos con el modelo teórico de referencia, y empleando el coeficiente α anterior, se concluye que los valores a adoptar para los parámetros de flexión esviada son:

- $\xi=0.1$ cuando el eje débil es el menos armado,

- $\xi=0.15$ para el resto de casos

IV.4.2.2 Formulación general del método de amplificación del momento biaxial

Para poder aplicar el método simplificado de amplificación de momentos se debe llevar a cabo un análisis de primer orden previo del soporte obteniendo el valor del axil N_d y el módulo del momento flector de primer orden M_1 en sus extremos, para a continuación dimensionar el soporte para el mismo valor del axil N_d y para el momento de diseño $\delta_{ns} \cdot N_d$, siendo δ_{ns} el factor de amplificación del momento M_1 mayor que la unidad.

$$M_t = \delta_{ns} \cdot M_1$$

donde

M_t módulo del momento total del diseño

M_1 módulo del momento flector de primer orden

δ_{ns} factor de amplificación

El factor de amplificación se calcula como,

$$\delta_{ns} = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}}$$

donde

N_d axil de diseño

N_{cr} axil crítico del soporte

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{\ell_p^2}$$

ℓ_p longitud de pandeo del soporte

EI rigidez del soporte

La rigidez del soporte EI se obtiene a partir de la rigidez equivalente del hormigón y del acero que constituyen la sección transversal:

$$EI = \alpha \cdot \frac{E_c}{1 + \varphi} \cdot I_{ce} + \frac{E_s}{1 + \eta} \cdot I_{se}$$

siendo

- α factor de rigidez de comprobación
- E_c módulo de deformación del hormigón igual a
 $E_c = 8500 \cdot \sqrt[3]{f_c}$ [f_c en MPa]
- f_c resistencia del hormigón bajo cargas instantáneas
- I_{se} inercia equivalente de la armadura
- φ coeficiente de fluencia
- I_{ce} inercia equivalente bruta del hormigón
- E_s módulo de elasticidad del acero, igual a 200.000 MPa
- η coeficiente de minoración por cargas diferidas

El factor de rigidez de la sección transversal es igual a:

$$^{(i)} e_0/4 \cdot i < 0.2 \quad \alpha = (-0.04 \cdot \lambda_{mec} + 2.2 - 0.3 \cdot \varphi) \cdot (e_0/4 \cdot i - 0.2) + \alpha_p$$

$$^{(ii)} e_0/4 \cdot i \geq 0.2 \quad \alpha = (-0.01 \cdot f_c - 0.5) \cdot (e_0/4 \cdot i - 0.2) + \alpha_p$$

siendo

- e_0 excentricidad de primer orden, equivalente al cociente entre el módulo de primer orden y el axil de diseño,

$$e_0 = \frac{M_1}{N_d}$$

- i_2 dimensión crítica de la sección transversal igual:
 radio de giro de la sección del eje fuerte de inercia en flexión recta
 radio de giro del eje débil de inercia en el resto de casos

- λ_{mec} esbeltez mecánica del soporte $\lambda_{mec} = \ell_p / i_2$

- f'_c resistencia del hormigón
 1. bajo condiciones de carga instantáneas $f'_c = f_c$
 2. bajo condiciones de carga diferidas $f'_c = 0.85 \cdot f_c$

- α_p factor de rigidez pivote

El coeficiente de minoración de cargas es:

$$\eta = 1.9 \cdot \varphi \cdot e^{-0.1 \cdot \frac{\lambda_{mec}}{\sqrt{12}}}$$

V. Comprobación del método

En este apartado se comprobará la eficacia del método propuesto en el apartado anterior.

Una vez realizada la propuesta del método simplificado atendiendo a los parámetros mas significativos que influyen en el comportamiento de soportes esbeltos, el objetivo sería ahora el de verificar la validez del método.

La verificación será a tres niveles bien diferenciados:

- Gráfica
- Numérica
- Experimental

La verificación gráfica es una comprobación a nivel **cuantitativo**: el objetivo es detectar de manera rápida y eficaz la validez del método, se buscará detectar puntos anómalos, así como las zonas/secciones que tienen un buen comportamiento con dicho método simplificado.

La verificación numérica a diferencia de la gráfica incide en una comprobación a nivel **cuantitativo**, se pretende determinar el error que se comete al emplear un método

simplificado y tener las bases necesarias para poder decidir el rango de validez del ajuste que se ha realizado.

La verificación **experimental** tiene dos fases de comprobación. La primera en la que se dispone de una bibliografía de ensayos con soportes reales que han sido sometidos al mismo tipo de esfuerzos y que tienen las mismas características que los estudiados a nivel numérico. Se comparará esos ensayos reales con los valores que se hubieran obtenido en caso de haber aplicado el método simplificado. Es una verificación de carácter cuantitativo.

En una segunda fase de comprobación, se verificará piezas ensayadas a nivel experimental pero que no se han ensayado a nivel numérico. Estas piezas tienen una tipología seccional diferente a las estudiadas a nivel numérico. Se empleará una de las conclusiones extraídas de los ensayos numéricos realizados: que la tipología de la sección transversal no influía de manera significativa en el comportamiento del soporte. Se comparará el método simplificado frente a los ensayos reales, y se comprobará la bondad del ajuste; el objetivo es que los errores obtenidos sean similares a los de la primera fase. La comprobación es de carácter cuantitativo ya que se compara en base a los errores que se producen, pero a la vez es de carácter cualitativo al no disponer de ensayos numéricos para esas secciones, haciéndose una extrapolación desde otra tipología seccional.

V.1 Comprobación del método: verificación a nivel gráfico

La verificación gráfica como se ha comentado es una comprobación a nivel **cuantitativo**.

Constituye el primer paso a nivel de comprobación: se representará las gráficas obtenidas con los ensayos numéricos y las obtenidas mediante el ajuste del método simplificado de amplificación de momentos.

Las condiciones que determinarán la idoneidad del método serán un diseño del lado de la seguridad, una trayectoria de la curva axil–momento que sea similar a la de los ensayos numéricos y un ajuste próximo sin desviaciones elevadas.

Estas condiciones deben cumplirse en la mayoría de los casos analizados y han de darse simultáneamente. La propuesta que se ha realizado ha tenido en consideración estos factores y deberá cumplirlas en la mayoría de situaciones, no obstante y dado la gran cantidad de ensayos realizados y a las singularidades específicas que pueden tener alguna de las tipologías seccionales estudiadas, puede que no se cumplan en determinados casos puntuales.

El proceso de comprobación seguirá el esquema siguiente en:

- Flexión recta – análisis de cargas instantáneas.
- Flexión recta – análisis de cargas diferidas.

- Flexión esviada – análisis de cargas instantáneas.
- Flexión esviada – análisis de cargas diferidas.

V.1.1 Verificación a nivel gráfico: Flexión recta – análisis de cargas instantáneas

Para flexión recta y cargas instantáneas se analizarán los diferentes parámetros que condicionaban la resistencia de los soportes de hormigón: disposición de armado, esbeltez mecánica, cuantía de armado y resistencia del hormigón. También se estudia los parámetros que a pesar que no condicionan la resistencia de los soportes, sí que pueden presentar un comportamiento diferente al aplicar el método simplificado, en este estudio sería necesario analizar las posibles diferencias que pudieran existir.

V.1.1.1 Tipología seccional

A primera vista es lógico suponer que el tipo de sección no debería condicionar excesivamente la respuesta de tipo resistente del modelo, ya que el parámetro de estudio que se recoge, el radio de giro de la sección, define correctamente la tipología de la sección.

El estudio y análisis que se presenta en este apartado deberá de incidir pues en acreditar si existe algún tipo de variación significativa entre las diferentes secciones, y si esta diferencia es excesiva y por lo tanto invalida la propuesta para esa sección.

Antes de entrar a valorar las diferencias entre las tipologías seccionales, hay que conocer el comportamiento en función de la cuantía y de la resistencia del hormigón.

El ajuste es mejor cuando el soporte presenta condiciones que se acercan más a la linealidad: en el caso de cuantía de armado a mayor cuantía de armado, mejor comportamiento del soporte [en términos de ajuste].

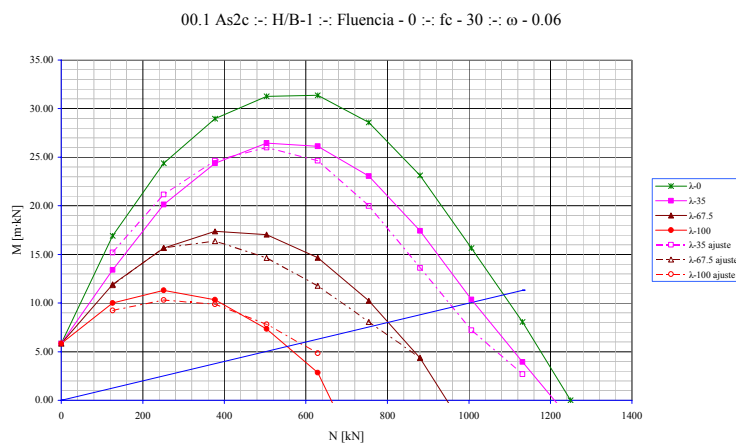
Por otra parte los hormigones de alta resistencia (HSC) tienen un comportamiento más lineal al tener mayor resistencia, siendo mejor su ajuste que los hormigones de resistencia normal (NSC).

Existe un rango de validez para el cálculo de los efectos de 2º orden por la normativa de la EHE. Ésta limita el cálculo de esfuerzos de 2º orden para valores de axil-momento que se encuentran por encima de la recta con pendiente $h/20$. Siendo h el canto de la sección.

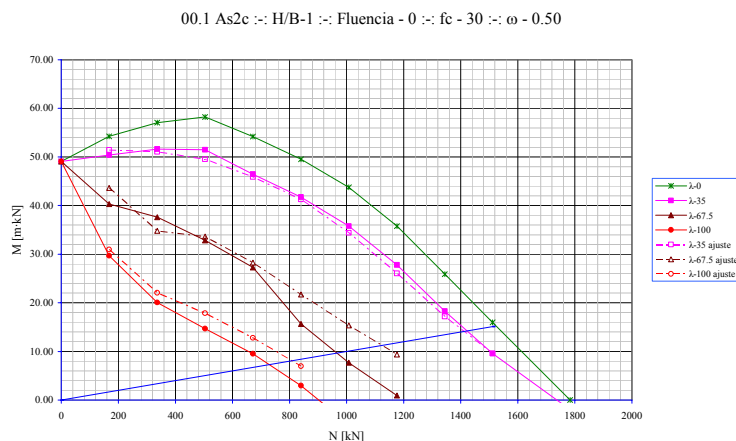
V.1.1.1.A Relación de secciones

❖ Sección Rectangular con armadura en las dos caras y relación canto/ancho=1 Nomenclatura empleada: 00.1 As2c H/B 1

En esta primera tipología de secciones se analizará todos los casos ensayados para comprobar como las premisas de las que se partían eran adecuadas.



(a)



(b)

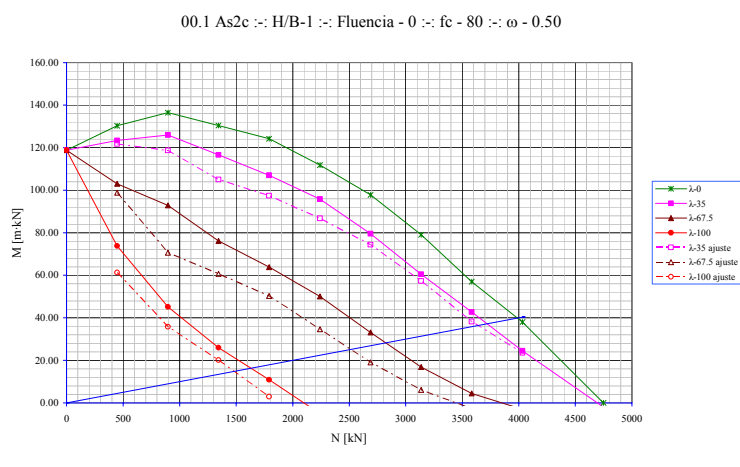
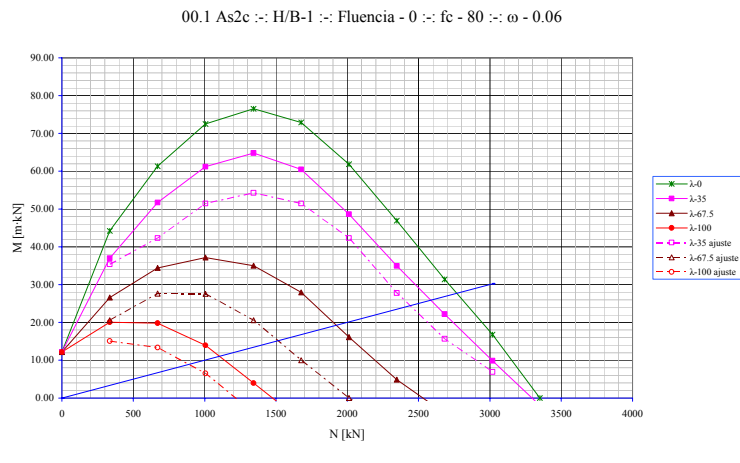


Figura V.1 Propuesta de método simplificado – Comparativa gráficas axial momento para sección rectangular con armadura en las 2 caras y relación canto/ancho igual a 1.
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.50$

Tal y como se señaló el comportamiento más desfavorable se presenta con el hormigón de resistencia de 30 MPa y con cuantía de $\omega=0.50$. Con esta sección los únicos casos que están del lado de la inseguridad son para esbelteces de 67.5 y 100 con resistencia de 30 MPa y con cuantía de $\omega=0.50$; los demás casos tienen un comportamiento bastante ajustado a los ensayos numéricos.

❖ **Sección Rectangular con armadura en las cuatro caras y relación canto/ancho=1**

Nomenclatura empleada: 00.3 As4c H/B 1

00.3 As4c Nueva Propuesta :-: H/B - 1 :-: Fluencia - 0 :-: f_c - 30 :-: ω - 0.50

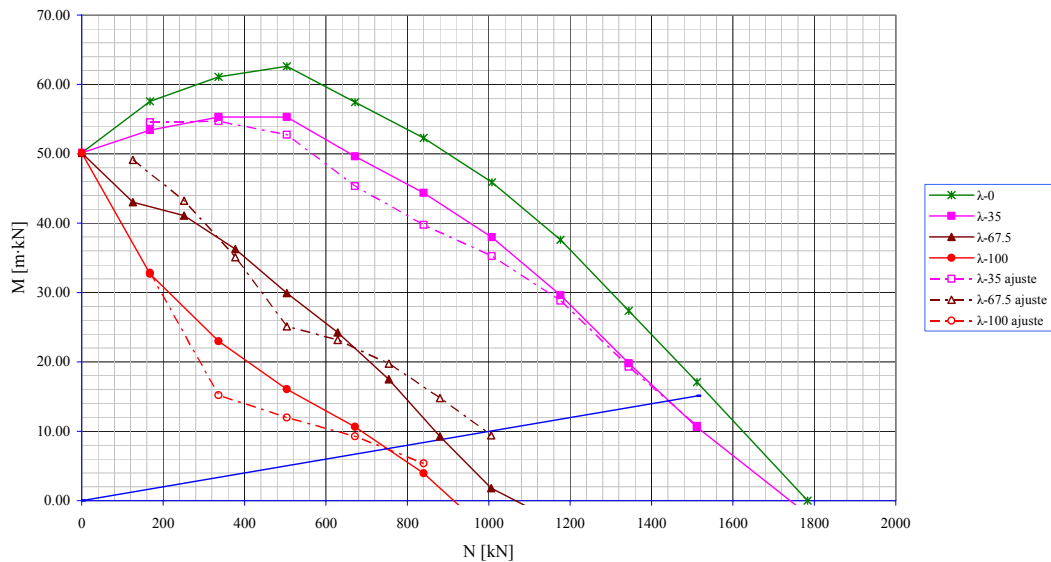


Figura V.2 Propuesta de método simplificado – Comparativa gráfica axial momento para sección rectangular con armadura en las 4 caras y relación canto/ancho igual a 1. $f_c=30$ $\omega=0.50$

El comportamiento que muestra la sección rectangular con armadura en las cuatro caras no muestra una diferencia significativa a lo esperado: buen comportamiento con hormigones de resistencia de 80 MPa y buen ajuste en los de 30 MPa. En comparación con la sección anterior aún tiene un mejor ajuste incluso con cuantía de 0.50.

❖ **Sección Rectangular con armadura en las cuatro caras y relación canto/ancho=2**

Nomenclatura empleada: 00.4 As4c H/B 2

Esta sección se diferencia de la anterior en que la relación de canto–ancho es del doble. No obstante el ajuste que muestra no es tan bueno como la de la sección anterior tal y como se ve en las siguientes gráficas [Figura V.3]

El comportamiento que muestra la sección rectangular con armadura en doble cara con relación canto–ancho igual a 2 tiene un comportamiento similar a la de las otras secciones.

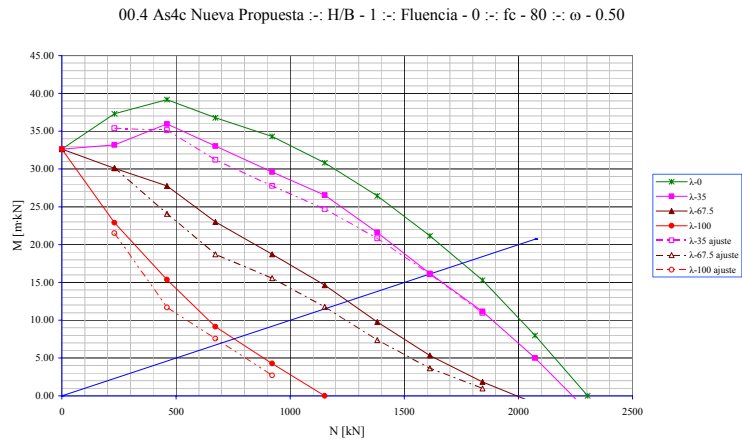


Figura V.3 Propuesta de método simplificado – Comparativa gráfica axil momento para sección rectangular con armadura en las 4 caras y relación canto/ancho igual a 2, $f_c=80$ $\omega=0.50$

❖ **Sección Rectangular con armadura en las cuatro esquinas y relación canto/ancho=1**

Nomenclatura empleada: 00.5 As4e H/B 2

Esta sección es una de las que mejor ajuste tiene de todas las estudiadas del bloque de secciones rectangulares, inclusive se puede apreciar en las piezas con hormigón de resistencia de 30 MPa y cuantía de 0.50.

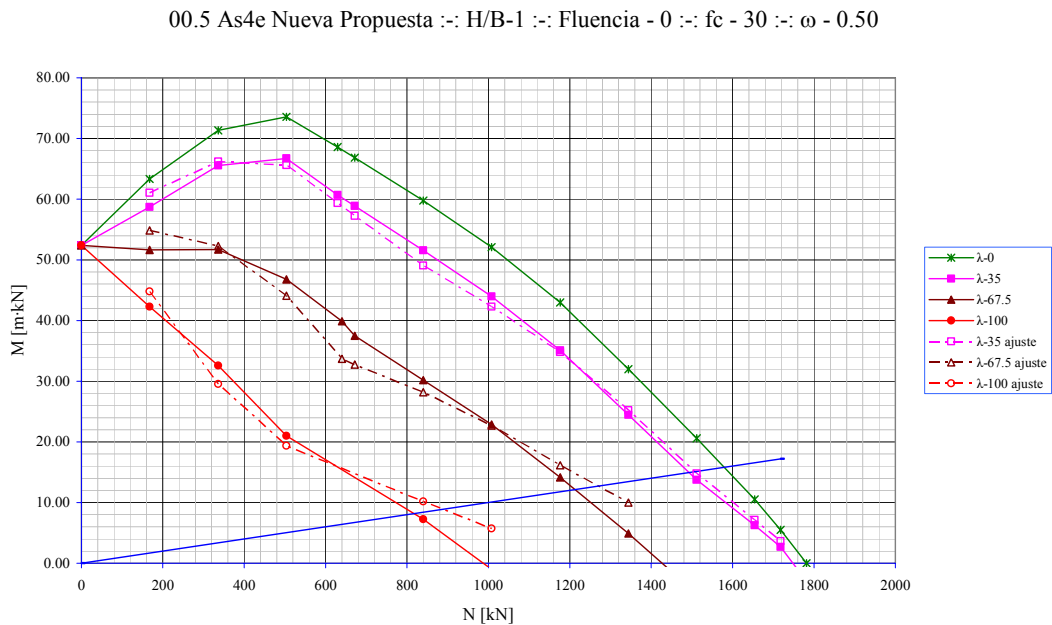


Figura V.4 Propuesta de método simplificado – Comparativa gráfica axil momento para sección rectangular con armadura en las 4 esquinas y relación canto/ancho igual a 1, $f_c=30$ $\omega=0.50$

❖ Sección Circular con 6 diámetros de armado

Nomenclatura empleada: 01.1 Circular Φ 6

Esta sección presenta un buen comportamiento en el ajuste: no presenta ninguna gráfica con ajuste inadecuado.

Las condiciones que sirven como parámetro “marcador” corresponden a un hormigón de resistencia de 30 MPa y cuantía de 0.50: tiene un ajuste correcto con todas las esbelteces con una ligera tendencia por el lado de la inseguridad para el caso de $\lambda_{mec}=100$. En los demás casos el comportamiento siempre permanece mayoritariamente en el lado de la seguridad.

01 Circular :-: ϕ -6 :-: Fluencia-0 :-: f_c -30 :-: ω -0.50

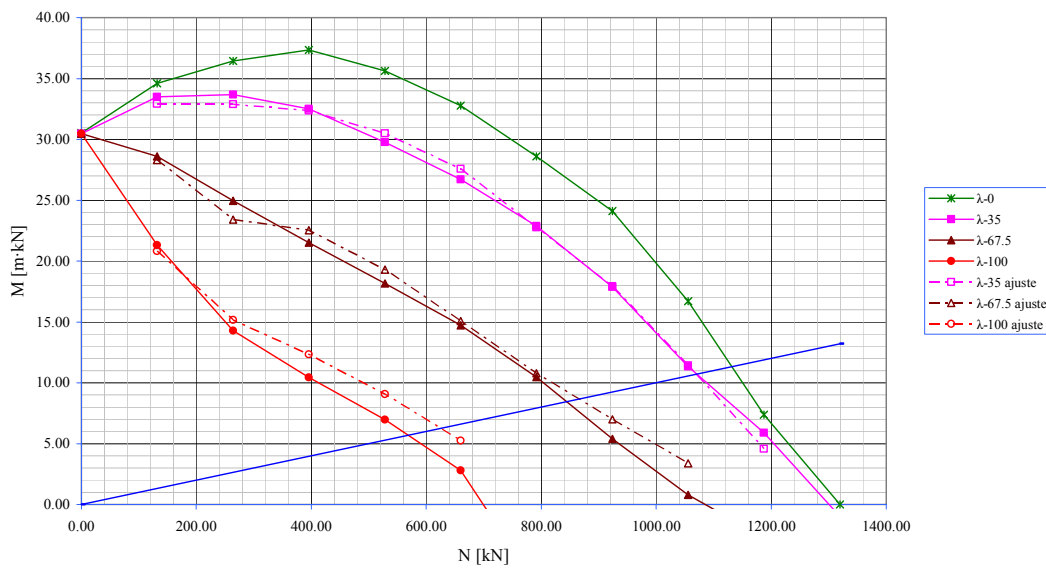


Figura V.5 Propuesta de método simplificado – Comparativa gráfica axil momento para sección circular con 6 redondos de armadura, $f_c=30$ $\omega=0.50$

❖ Sección Circular con 12 diámetros de armado

Nomenclatura empleada: 01.2 Circular Φ 12

Esta sección no presenta ninguna diferencia significativa al comportamiento que presente la sección circular con 6 redondos: la diferencia que se puede observar en la siguiente figura [Figura V.6] es prácticamente mínima, con un buen ajuste de todas las secciones estudiadas en flexión recta y cargas instantáneas.

Los únicos valores que no están totalmente del lado de la seguridad son los de las secciones con esbeltez mecánica igual a 100, aunque las diferencias no llegan al 3%.

ϕ -12 0-fluen $f_c=30$ $\omega=0.50$

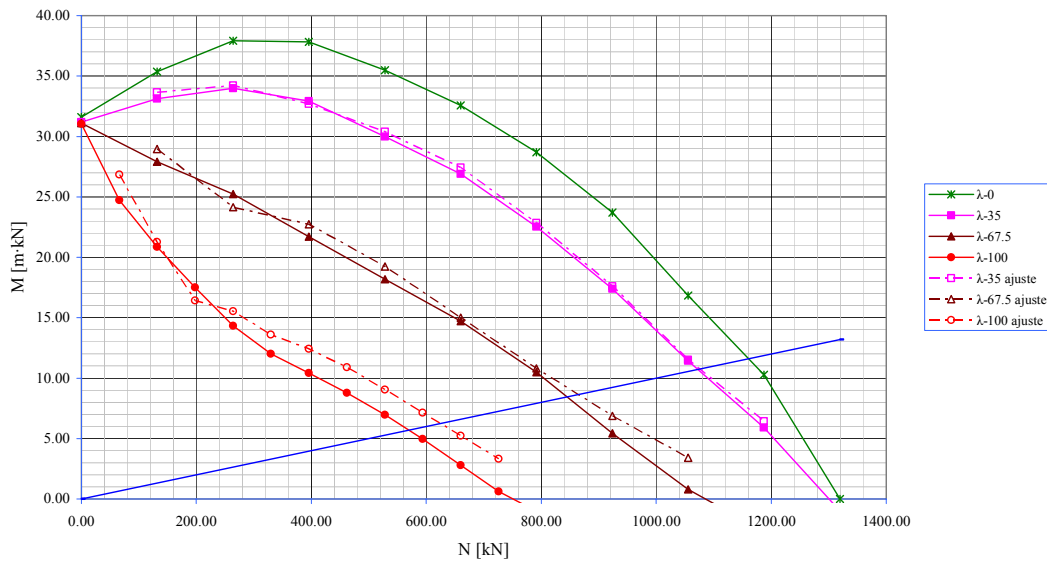


Figura V.6 Propuesta de método simplificado – Comparativa gráfica axil momento para sección circular con 12 redondos de armadura, $f_c=30$ $\omega=0.50$

❖ **Sección en Cruz**

Nomenclatura empleada: 02 Cruz

El comportamiento de la propuesta en esta sección es muy ajustado a pesar de secciones que tienen una geometría no habitual y con zonas cóncavas y convexas.

02 cruz :-: 0-fluen :-: $f_c=30$:-: $\omega=0.50$

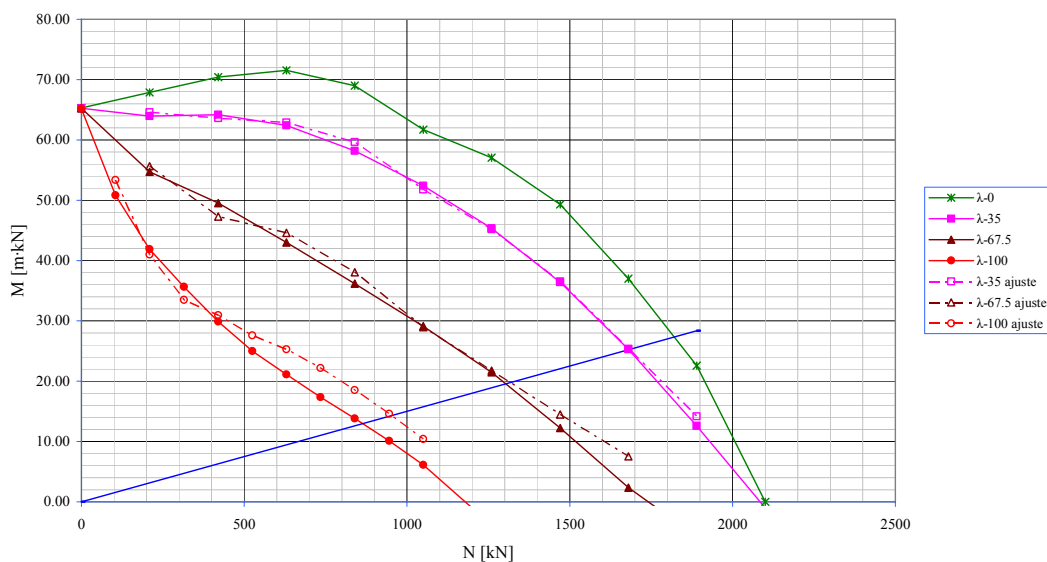


Figura V.7 Propuesta de método simplificado – Comparativa gráfica axil momento para sección en cruz $f_c=30$ $\omega=0.50$

❖ Sección Hexagonal

Nomenclatura empleada: 03 Hex

El ajuste que tiene el método con esta sección es correcto, sin ningún caso en el que se esté del lado de la inseguridad el ajuste. El comportamiento que muestra la sección hexagonal es muy bueno sin presentar ninguna anomalía destacable.

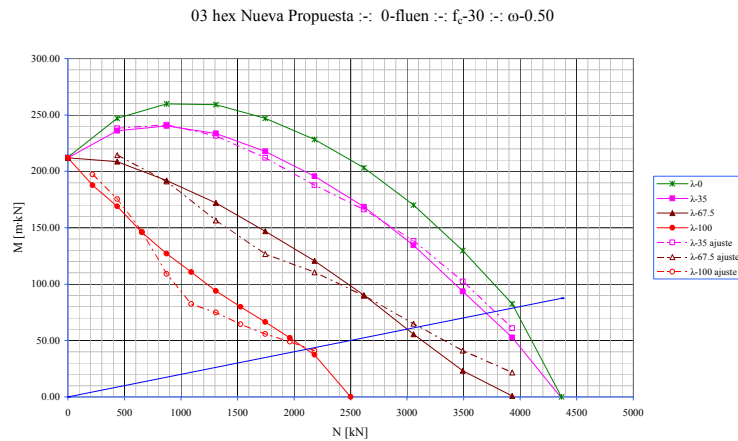


Figura V.8 Propuesta de método simplificado – Comparativa gráfica axil momento para sección hexagonal $f_c=30$ $\omega=0.50$

❖ Sección Rectangular Hueca

Nomenclatura empleada: 04 Hueca

El ajuste que tiene el método con esta sección es el que peor resultados tiene en cuanto a flexión recta se refiere, tanto en hormigones de 30 MPa, como en los de 80 MPa, en cambio los soportes ensayados con hormigón de 100 MPa, mostraron un buen ajuste

El ajuste está en la mayor parte de las ocasiones del lado de la inseguridad, aunque en esbeltez mecánica 35 el ajuste que muestra es mucho mejor del que se obtiene con esbelteces de 67.5 y de 100

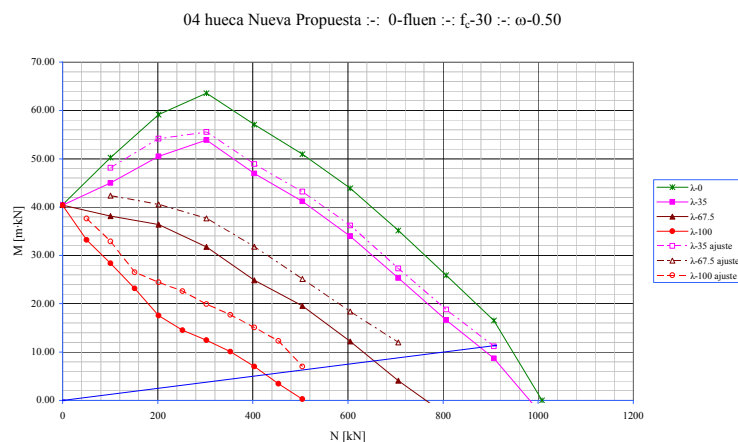


Figura V.9 Propuesta de método simplificado – Comparativa gráfica axil momento para sección rectangular hueca $f_c=30$ $\omega=0.50$

❖ Sección “Pila Puente”

Nomenclatura empleada: 05 PPT

Esta sección es una composición de una sección rectangular y de dos semicírculos, con unos resultados aceptables a pesar de la complejidad que presentaba a la hora de integrar numéricamente la sección.

El ajuste está en la mayor parte de las ocasiones del lado de la seguridad, aunque en esbeltez mecánica 100 el ajuste no se comporta así con resultados del lado de la inseguridad.

05 ppt Nueva Propuesta :-: 0-fluen :-: $f_c=30$:-: $\omega=0.50$

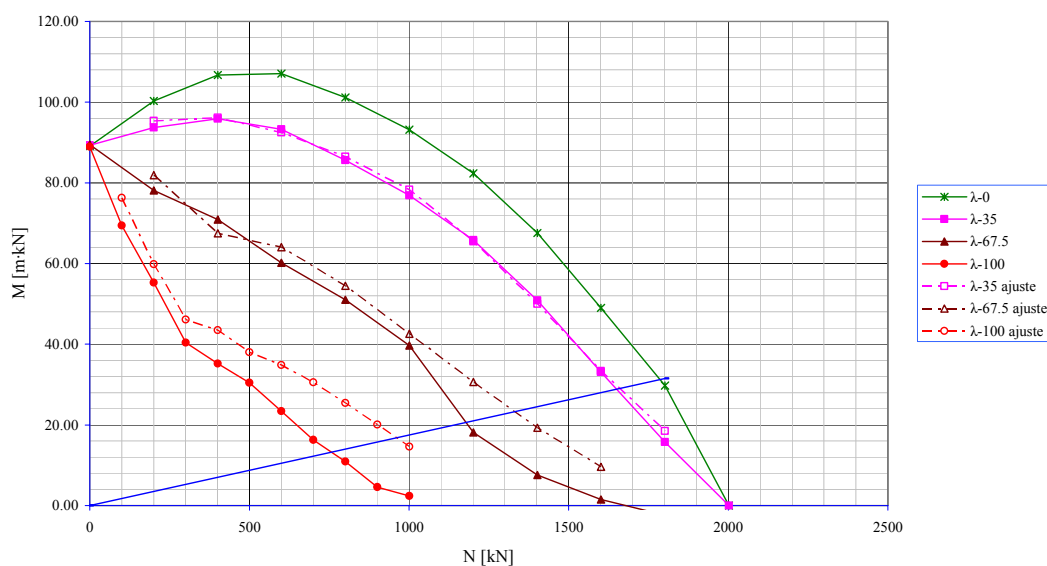


Figura V.10 Propuesta de método simplificado – Comparativa gráfica axil momento para sección pila puente $f_c=30$ $\omega=0.50$

V.1.1.1.B Conclusiones del estudio de la tipología seccional.

Las diferencias encontradas al aplicar la propuesta de método simplificado sobre las diferentes tipologías seccionales son mínimas y se puede extraer una primera conclusión que el método es adecuado para la mayor parte de las secciones.

Las gráficas que se han mostrado han sido las que tenían un peor comportamiento al ser el hormigón de resistencia de 30 MPa y de cuantía de armado $\omega=0.50$ las condiciones de más difícil ajuste de todas las que se pueden dar en flexión recta y cargas instantáneas.

En los casos en los que el ajuste no estaba del lado de la seguridad, la esbeltez mecánica de 35 $[\lambda_{mec}]$ sí que estaba del lado de la seguridad, siendo esta la sección que con mayor frecuencia se dará en la realidad.

A pesar de las desviaciones que han existido en algunas secciones [hueca] la media de todos los casos estudiados permiten considerar que el ajuste es bueno independientemente del tipo de sección que se estudie el método tiene un

comportamiento robusto y ajustado a los errores habituales presentes en métodos simplificados.

A continuación se detalla una tabla resumen del comportamiento de las diferentes secciones:

Sección	Comportamiento	Observaciones
00.1 As4c1	✓	
00.3 As4c1	✓	
00.4 As4c2	✓	
00.5 As4e1	✓	
01.1 Circular Φ - 6	✓	
01.2 Circular Φ -12	✓	
02 Cruz	✓	
03 Hex	✓	
04 Hueca	•	La sección estaba del lado de la inseguridad, en hormigones de 30 MPa [aunque tenía un comportamiento adecuado con $\lambda_{mec}=35$]. El comportamiento es adecuado para hormigones HSC.
05 PPT	✓	

Tabla V.1 Resumen del ajuste de la tipología seccional [Nivel Gráfico]

Leyenda:
✓ Adecuado
✗ Inadecuado
• Con matices

V.1.1.2 Flexión recta con cargas instantáneas: Estudio de la Esbeltez

Aunque ya se ha podido intuir el comportamiento del ajuste en función del nivel de esbeltez en el estudio de la tipología seccional, en este apartado se tratará con más precisión de incidir en como se ajusta el método propuesto en función de las esbelteces de la sección.

El método propuesto es una ecuación de tipo lineal que depende de la esbeltez para valores de $e/4 \cdot i < 0.2$ y depende de la resistencia del hormigón para valores de excentricidad mayores de $e/4 \cdot i > 0.2$.

Por lo tanto la esbeltez sólo afectará al ajuste para valores de excentricidad menores de 0.2. En los casos de excentricidad relativa mayores la esbeltez no gobernará el comportamiento del ajuste.

A la hora de realizar el ajuste y al ser del tipo lineal, se buscó unas rectas que tuvieran un buen ajuste por la esbeltez mecánica de 35. Ese valor de la esbeltez es el más importante a la hora del diseño al ser el que con más probabilidad se presentará en la realidad.

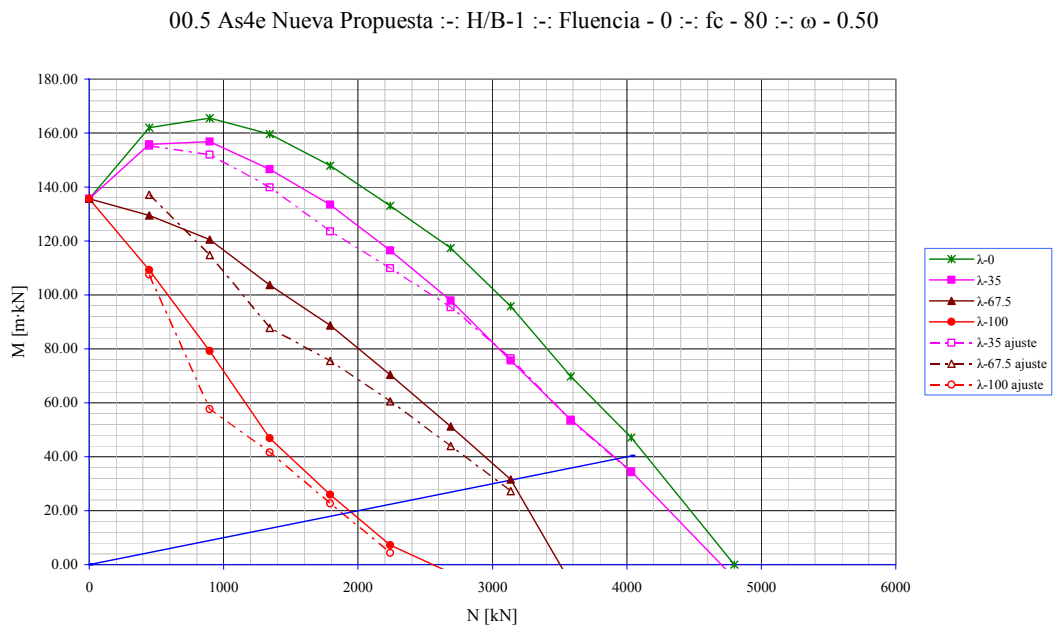


Figura V.11 Comparativa gráfica axil momento para sección rectangular con armadura en las 4 esquinas $f_c=80$ $\omega=0.50$

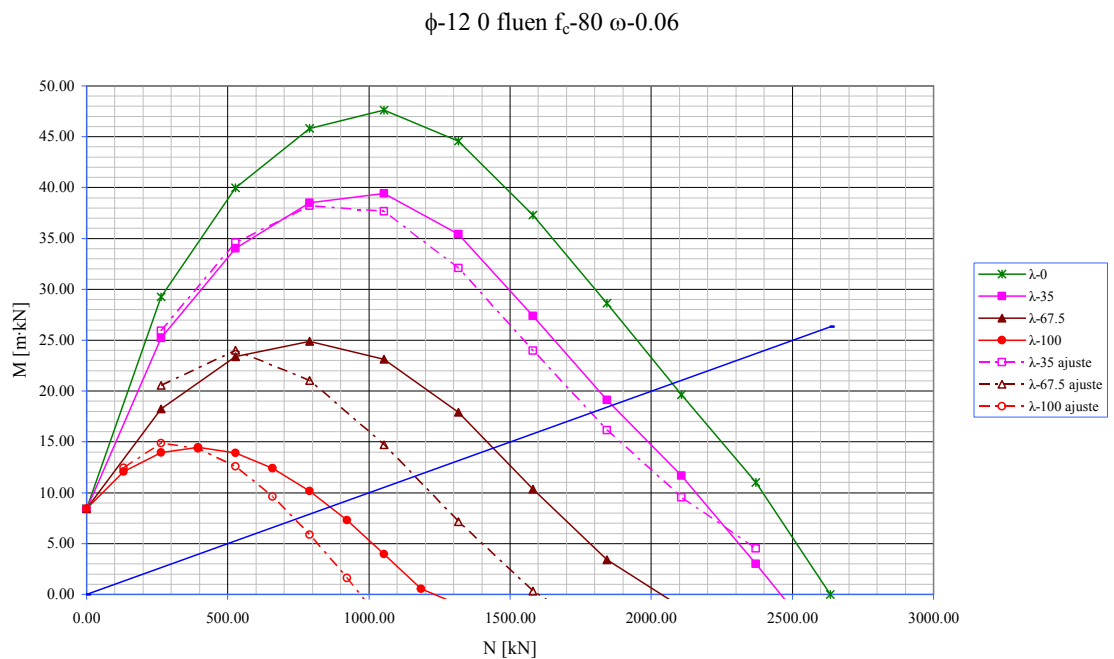


Figura V.12 Comparativa gráfica axil momento para sección circular con $\Phi 12$ $f_c=80$ $\omega=0.06$

A la vista de las diferentes gráficas se comprueba que el ajuste es muy bueno para esbelteces de 35, con un trazado casi idéntico al de los ensayos numéricos y en la mayor parte de las gráficas por debajo de las curvas numéricas lo que supone un ajuste del lado de la seguridad.

El ajuste para esbelteces de 67.5 y 100 no es tan bueno como el de esbeltez mecánica de 35. La causa principal es que se buscó lograr un mejor ajuste para la esbeltez de 35 y luego que la recta de ajuste se acercara a la media de las esbelteces de 67.5 y de 100.

No hay muchas diferencias significativas entre las esbelteces de 67.5 y de 100 por el motivo que se ha comentado, y suele coincidir el tipo de comportamiento tal y como se ve en la gráfica (Figura V.12) en la que el ajuste tiene un quiebro en la misma zona para las esbelteces de 67.5 y 100. Este quiebro es debido al cambio de ajuste ya que se ha pasado de excentricidades menores de 0.2 a mayores de 0.2.

Del mismo modo coincide en cuanto a ajuste del lado de la seguridad/inseguridad. Suelen coincidir valores de 67.5 y de 100 en cuanto a inseguridad se refiere.

Esbeltez mecánica	Comportamiento	Observaciones
$\lambda_{mec}=35$	✓	El ajuste es prácticamente perfecto porque se ha buscado, que se adecuara a este valor de la esbeltez.
$\lambda_{mec}=67.5$	✓•	Aún no teniendo un ajuste malo, no es tan bueno como el que presenta la esbeltez de 35.
$\lambda_{mec}=100$	✓•	

Tabla V.2 Resumen del ajuste de la esbeltez [Nivel Gráfico]

Leyenda:
✓ Adecuado
✗ Inadecuado
• Con matices

V.1.1.3 Flexión recta con cargas instantáneas: Estudio de la cuantía

El nivel de cuantía de armado de la sección tiene distinto grado de ajuste en función del valor de cuantía. La resistencia de la sección del soporte aumenta conforme se aumenta la cuantía de armado.

La cuantía de $\omega=0.06$ corresponde a un nivel de armado mínimo, en el que el hormigón está escasamente armado, y presente condiciones de menor linealidad.

La cuantía de armado $\omega=0.50$, por el contrario, constituye una tipo de sección con un hormigón fuertemente armado, y cuyo comportamiento es mucho más lineal.

Se ha estudiado además la cuantía de armado $\omega=0.25$, que es una situación de armado intermedio y que está a medio camino entre la cuantía de 0.06 [bajo nivel de armado] y de 0.50 [alto nivel de armado]

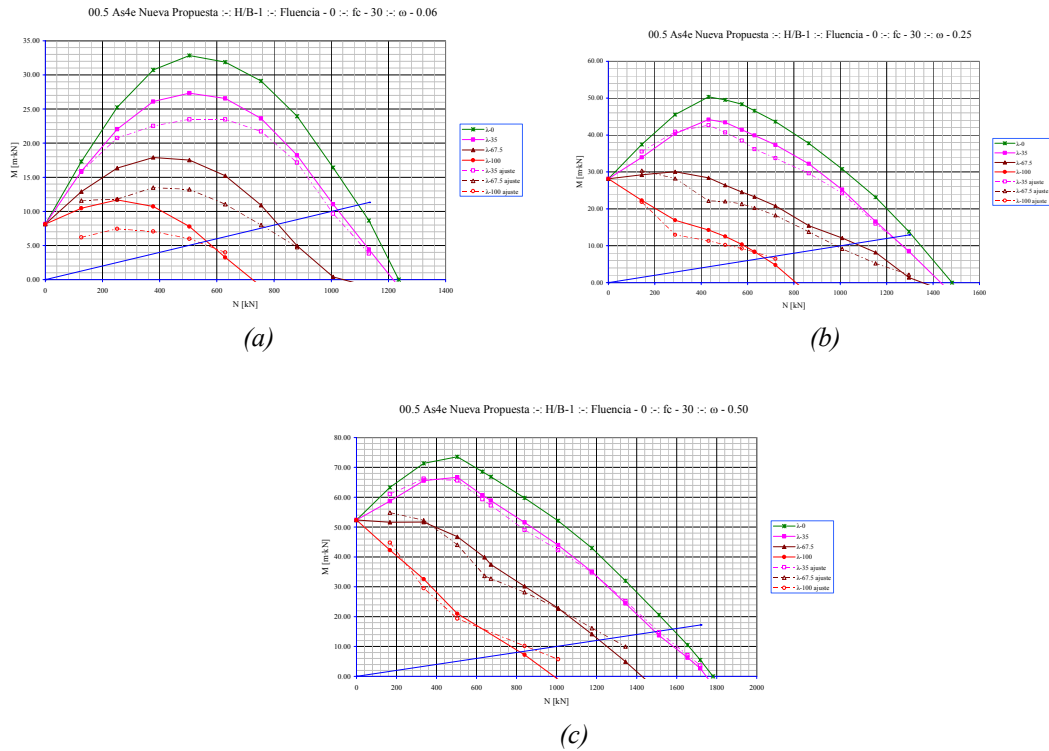


Figura V.13 Análisis del ajuste para diferentes niveles de cuantía de armado
 (a) $\omega=0.06$; (b) $\omega=0.25$; (c) $\omega=0.50$

Las gráficas anteriores muestran claramente el comportamiento esperado en función de la cuantía. Según va aumentando el valor de armado del soporte el ajuste va mejorando, siendo los valores más conservadores para cuantías escasas de armado y más ajustado en valores altos de armado.

Se ha buscado primar los valores de cuantía medio y alto, obteniendo valores del lado de la seguridad, resultando este ajuste en un diseño conservador de piezas menos armadas. Si se buscara un diseño menos conservador de piezas poco armadas se obtendría valores del lado de la inseguridad para cuantías mayores

Cuantía de armado	Comportamiento	Observaciones
$\omega=0.06$	✓•	Este ajuste, es el que está más del lado de la seguridad: esto se debe a que si se ajustase más se obtendría valores del lado de la inseguridad para cuantías mayores.
$\omega=0.25$	✓	
$\omega=0.50$	✓	

Tabla V.3 Resumen del ajuste de la cuantía [Nivel Gráfico]

Leyenda:
✓ Adecuado
✗ Inadecuado
• Con matices

V.1.1.4 Flexión recta con cargas instantáneas: Estudio de la excentricidad relativa

El ajuste se ha realizado mediante dos rectas en función de la excentricidad relativa.

Para valores de la excentricidad relativa bajos [$e/4i < 0.2$] la ecuación depende de la esbeltez mecánica de la sección. En cambio para valores de la excentricidad relativa mayores de 0.2; el ajuste depende de la resistencia del hormigón del soporte.

Este tipo de formulación puede ocasionar que bajo determinadas condiciones haya algunos puntos de quiebro en las curvas de ajuste de la sección. Estas situaciones son puntuales e inevitables, ya que se ha preferido buscar una simplicidad a la hora de hacer la formulación del método simplificado.

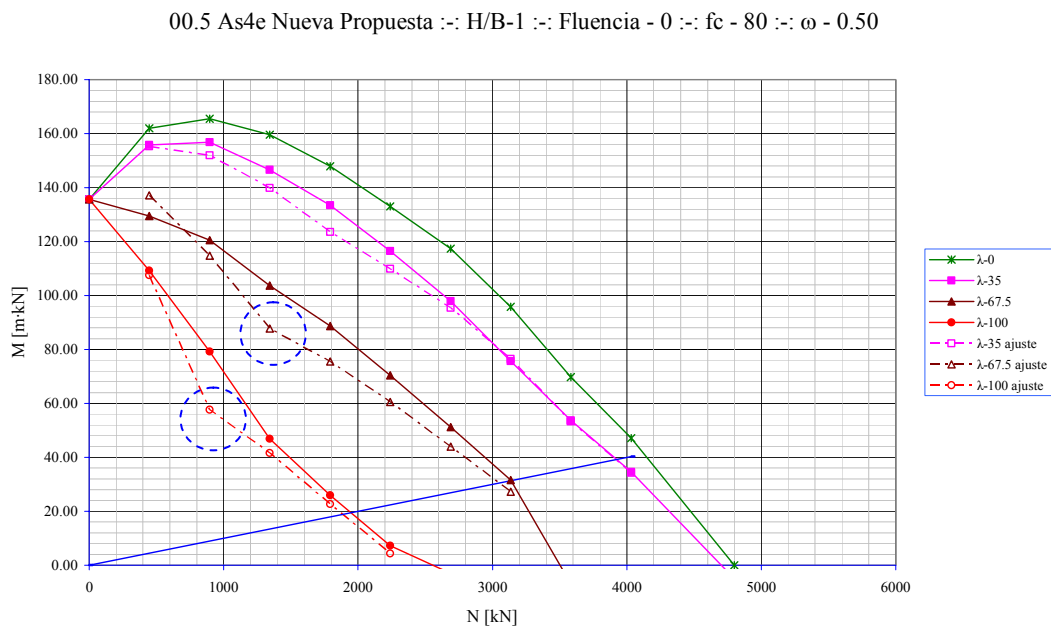


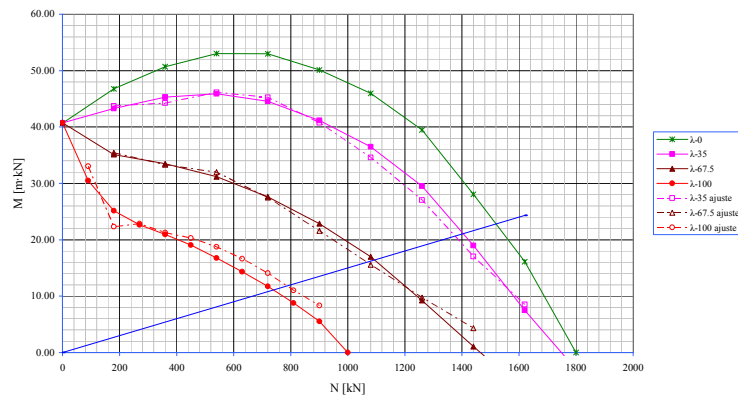
Figura V.14 Análisis del ajuste para diferentes niveles de excentricidad relativa

V.1.1.5 Flexión recta con cargas instantáneas: Estudio de la resistencia del hormigón

El objetivo de este apartado es el de comprobar el comportamiento del método y comprobar si existe alguna diferencia apreciable entre los diferentes niveles de la resistencia del hormigón.

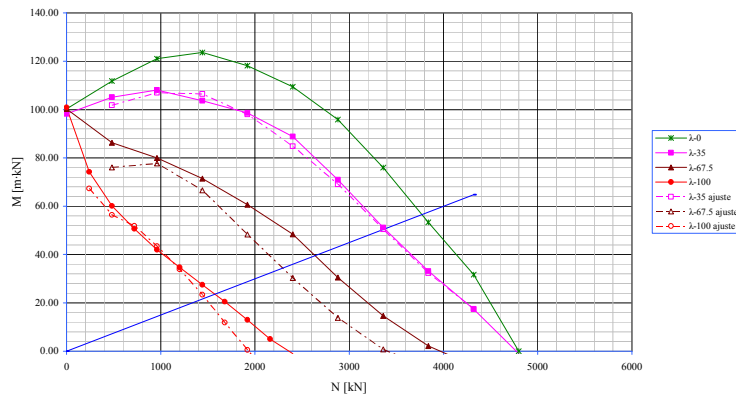
No se incide en la dependencia del método de la resistencia del hormigón para excentricidades relativas mayores de 0.2. Se busca analizar el comportamiento general de los soportes frente a la variación de la resistencia.

02 cruz :-: 0-fluen :-: $f_c=30$:-: $\omega=0.25$



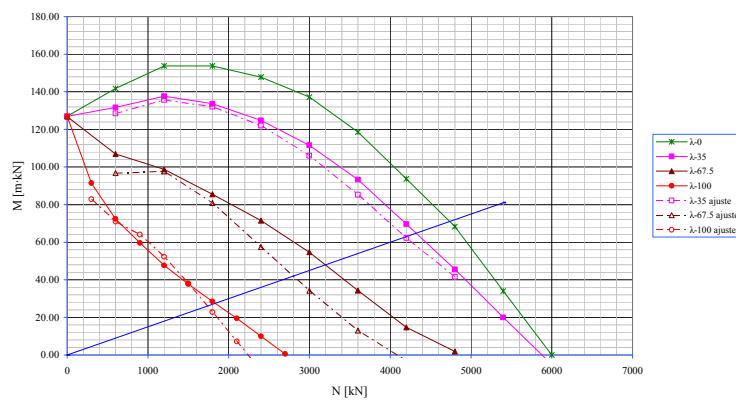
(a)

02 cruz :-: 0-fluen :-: $f_c=80$:-: $\omega=0.25$



(b)

02 cruz :-: 0-fluen :-: $f_c=100$:-: $\omega=0.25$



(c)

Figura V.15 Análisis del ajuste para diferentes niveles de resistencia del hormigón
(a) $f_c=30$; (b) $f_c=80$; (c) $f_c=100$

El comportamiento de las piezas de hormigón de alta resistencia es mucho más ajustado y suele estar siempre del lado de la seguridad.

Los hormigones de resistencia normal (NSC) tienen un buen comportamiento igualmente aunque su ajuste está en ocasiones levemente por el lado de la inseguridad.

Esbeltez mecánica	Comportamiento	Observaciones
$f_c=30$	✓	
$f_c=80$	✓	El ajuste es muy similar en los casos de hormigones de alta resistencia (HSC). Esto es debido a que los pivotes de rotura están muy próximos
$f_c=100$	✓	

Tabla V.4 Resumen del ajuste de la cuantía [Nivel Gráfico]

Leyenda:
✓ Adecuado
✗ Inadecuado
• Con matices

V.1.1.6 Flexión recta con cargas instantáneas: Estudio de la distribución de armado

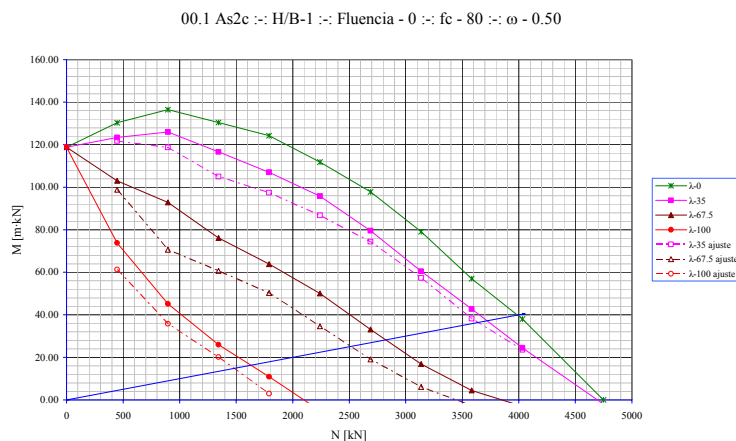
Hay dos tipos de secciones en las que se ha cambiado el tipo de armado: las secciones rectangulares y las secciones circulares.

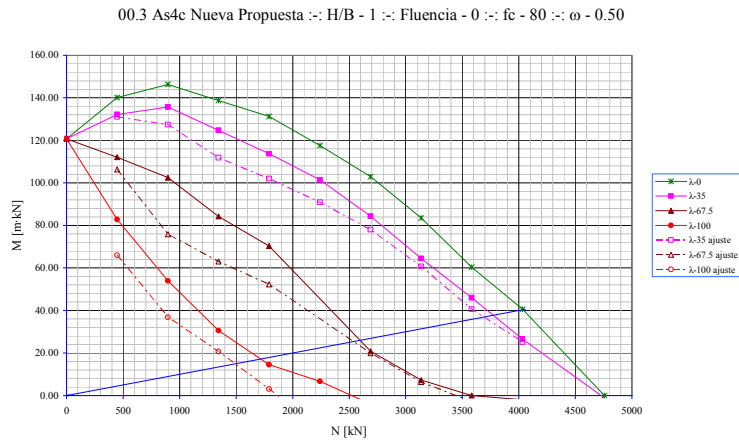
La distribución de armado que se ha propuesto para sección circular, no tiene diferencias significativas en cuanto a su distribución [la diferencia es un aumento en el número de armaduras].

Las diferencias existentes para secciones rectangulares son más acusadas ya que la variación en la disposición del armado es mucho más marcada.

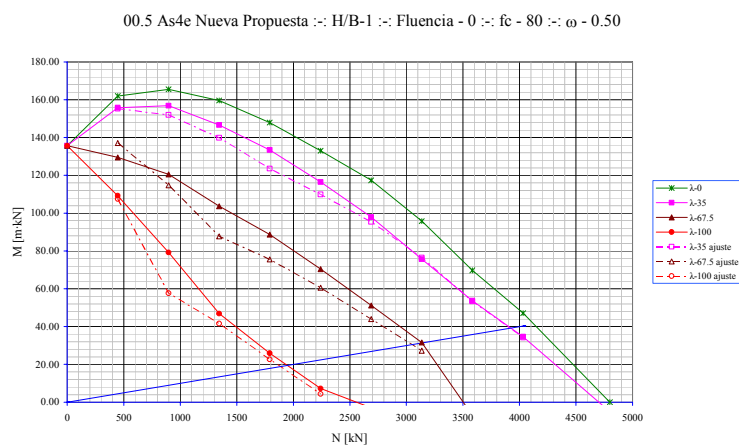
Se considerará en todos los grupos estudiados la misma cuantía de armado. En sección rectangular las disposiciones de armado consideradas son:

- Armado en 2 caras
- Armado en 4 caras
- Armado en 4 esquinas





(b)



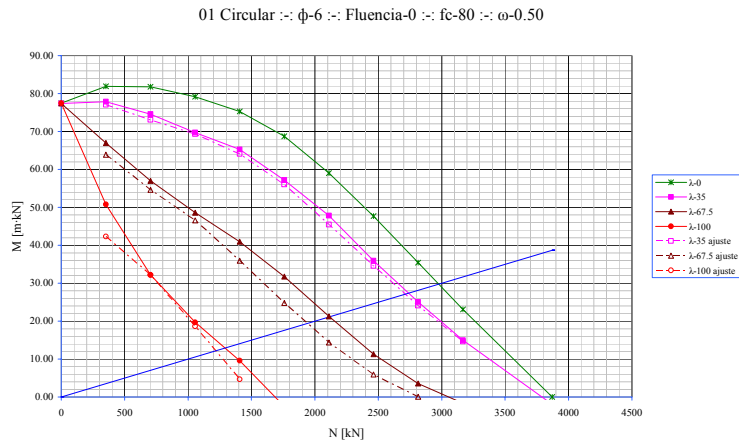
(c)

Figura V.16 Análisis del ajuste para la distribución de armado [sección rectangular]
 (a) Armadura en las 2 caras; (b) Armadura en las 4 caras; (c) Armadura en las 4 esquinas;

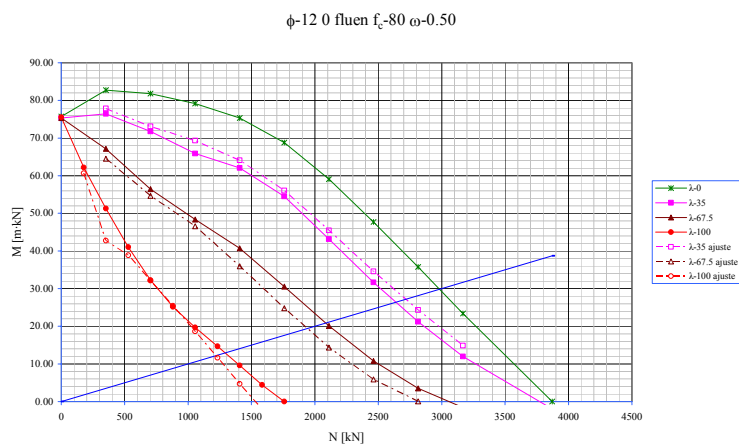
A la vista de las gráficas se comprueba que hay diferencias entre la distribución de armado propuesta para sección rectangular.

Las distribuciones de armado en las 4 esquinas y en 2 caras son las que mejor ajuste tienen, mientras que el armado en las 4 caras tiene un ajuste peor. A pesar de tener un ajuste peor, la distribución de armado en 4 caras tiene un buen ajuste para esbelteces mecánicas de 35.

Como ya se apuntó previamente, las dos distribuciones de armado estudiadas en secciones circulares no tienen a penas diferencias significativas.



(a)



(b)

Figura V.17 Análisis del ajuste para la distribución de armado [sección circular]
 (a) Armadura de 6 diámetros de armado; (b) Armadura de 12 diámetros de armado

A penas hay diferencias remarcables entre los dos tipos de distribución. La única diferencia destacable no es en cuanto al ajuste si no a los valores obtenidos con el modelo teórico de referencia para esbeltez 35.

Distribución de armado		Comportamiento	Observaciones
Sección rectangular	En las 2 caras	✓	
	En las 4 caras	✓•	Ajuste bueno, aunque no llega al nivel de los armado en 2 caras o en las 4 esquinas
	En las 4 esquinas	✓	
Sección circular	Φ - 6	✓	Ajuste bueno, sin diferencias entre las dos distribuciones
	Φ - 12	✓	

Tabla V.5 Resumen del ajuste de la distribución de armado [Nivel Gráfico]

Leyenda:
✓ Adecuado
✗ Inadecuado
• Con matices

V.1.2 Verificación a nivel gráfico: Flexión recta – análisis de cargas diferidas

En flexión recta y cargas instantáneas se analizarán los diferentes parámetros que condicionaban la resistencia de los soportes de hormigón. En los casos de flexión recta y cargas diferidas se reproduce el mismo comportamiento en función de los parámetros estudiados: disposición de armado, esbeltez mecánica, cuantía de armado y resistencia del hormigón. Es por esto que no se va a volver a repetir un ensayo que reproduciría los mismos resultados y las mismas conclusiones.

En este apartado se incidirá en el cambio que se produce al introducir en el análisis las cargas diferidas, pero sólo en cuanto a niveles de ajuste del método ya que los efectos de la fluencia fueron tratados en el *Capítulo IV*.

También se revisará las condiciones que presentaron problemática en cargas instantáneas para comprobar si se siguen reproduciendo lo que significaría un fallo a nivel de la sección/tipología estudiada, o en el caso que no se volviera a reproducir esos fallos significaría una problemática puntual a la que no habría que darle más importancia.

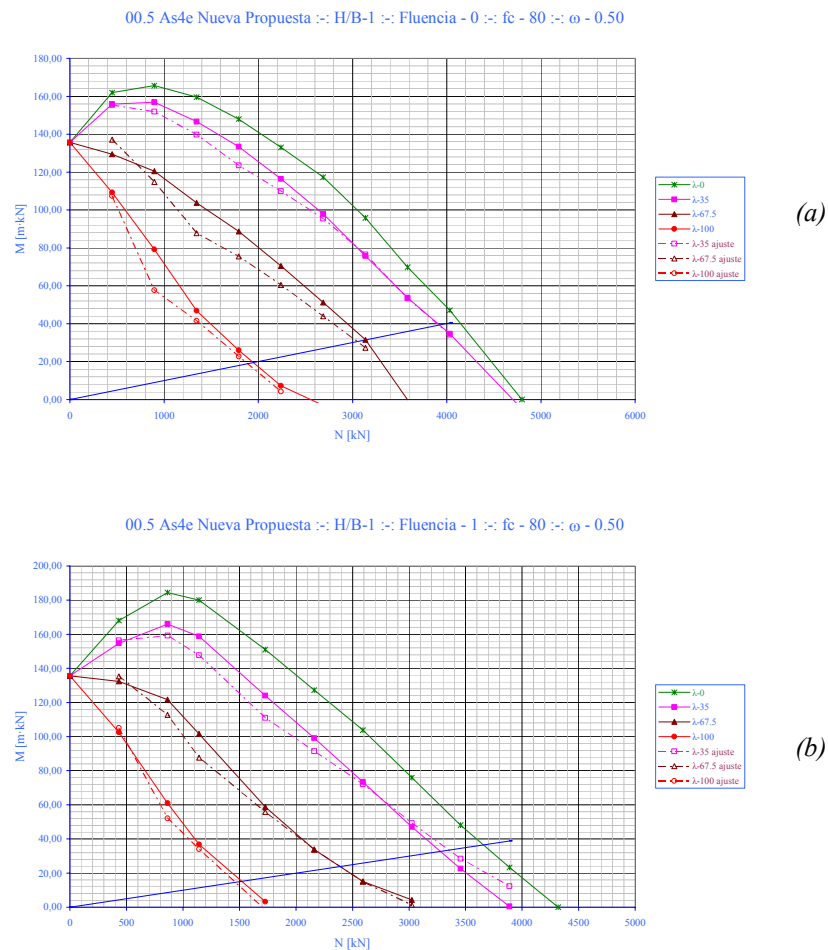


Figura V.18 Análisis del ajuste para el efecto de la carga diferida
(a) Cargas instantáneas, fluencia=0; (b) Cargas diferidas, fluencia=1

00.5 As4e Nueva Propuesta :-: H/B-1 :-: Fluencia - 2 :-: f_c - 80 :-: ω - 0.50

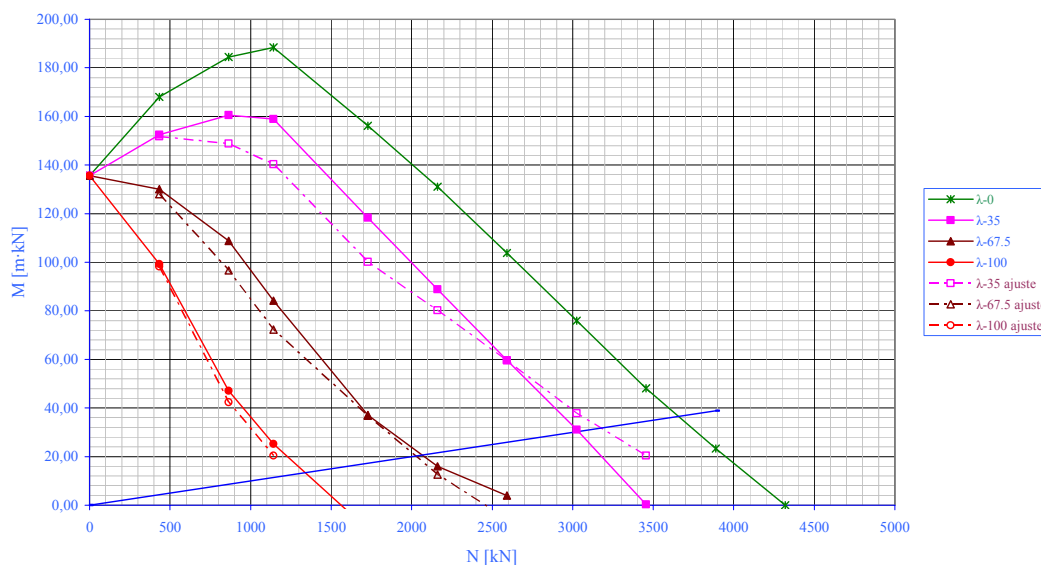


Figura V.19 Análisis del ajuste para el efecto de la carga diferida
Cargas diferidas, fluencia=2

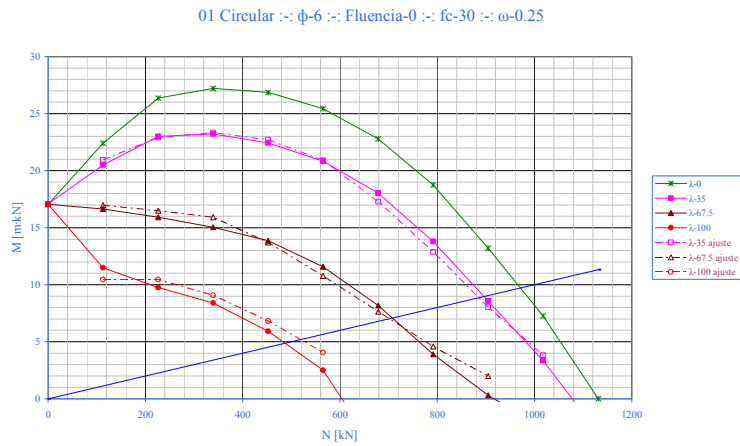
Como se puede apreciar para el caso más desfavorable, que es el de hormigón de 80 MPa, no hay diferencias significativas del ajuste presentado tanto en diferido como instantáneo. De hecho el ajuste es mucho mejor para fluencia 1 que para fluencia 0, que corresponde a cargas instantáneas.

Para hormigones de resistencia normal [30 MPa], el ajuste es mucho mejor que el de fluencia $\phi = 0$, existiendo una menor diferencia entre el ajuste propuesto y el modelo teórico de referencia.

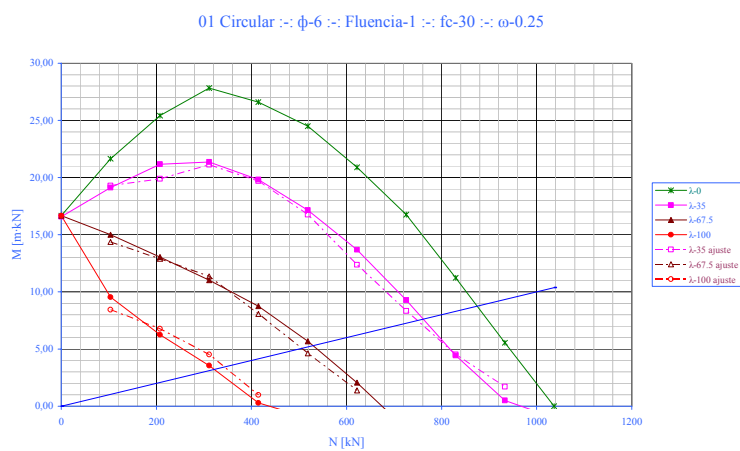
El ajuste que se produce en fluencia $\phi = 1$ es menos conservador que el de fluencia $\phi = 2$, o lo que es lo mismo $\phi = 2$ presenta un peor ajuste.

Los ajustes obtenidos en las gráficas de fluencia de valor 1 tal como se puede observar en las gráficas (Figura V.18.a y Figura V.18.b) están mucho más cercanos a los valores del modelo teórico de referencia aunque en ocasiones ligeramente del lado de la inseguridad.

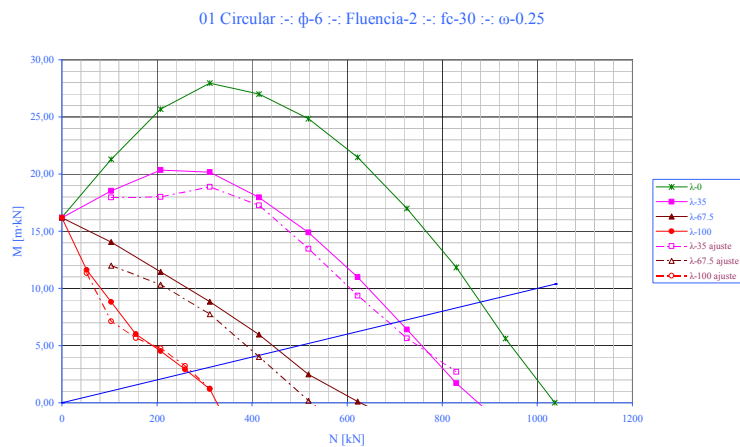
Para valores de fluencia de valor 2, se comprueba que el ajuste es más conservador que la solución adoptada para valores de fluencia 1. En ambos casos los ajustes son mejores que los obtenidos en flexión recta y cargas instantáneas.



(a)



(b)



(c)

Figura V.20 Análisis del ajuste para fluencia con hormigón de resistencia normal $f_c=30$ MPa [NSC]
 (a) Fluencia=0; (b) Fluencia=1; (c) Fluencia=2

A continuación se realizará un breve estudio de las gráficas que presentaban un peor ajuste en cargas instantáneas que eran las de sección hueca.

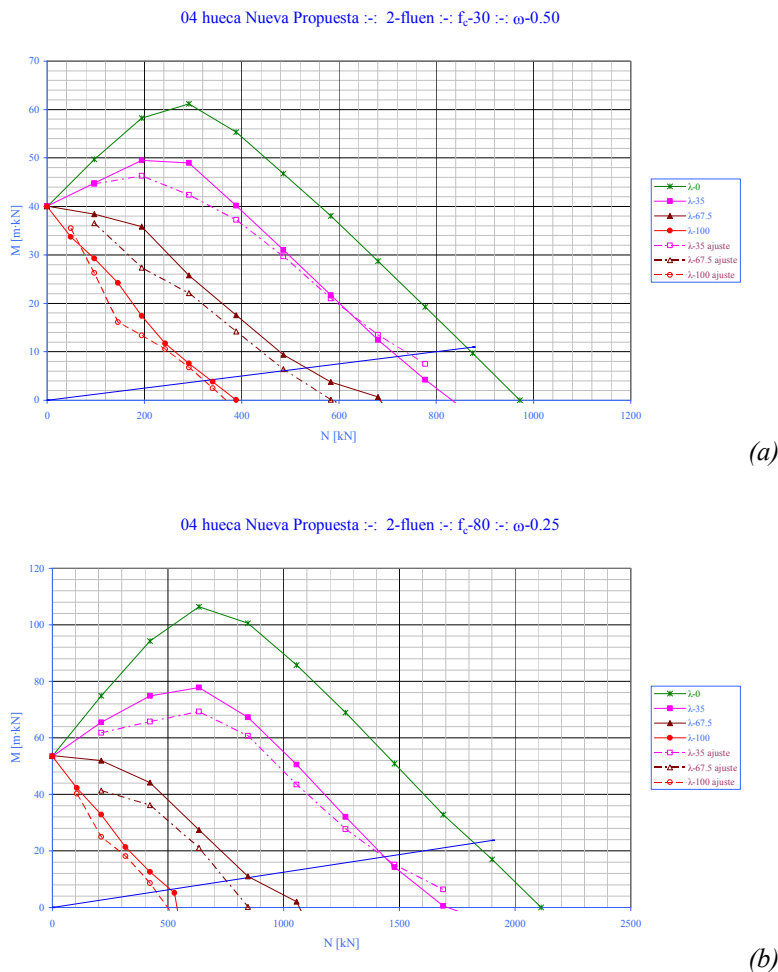


Figura V.21 Análisis del ajuste para la sección hueca, fluencia $\varphi=2$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (b) $f_c=80$ $\omega=0.25$

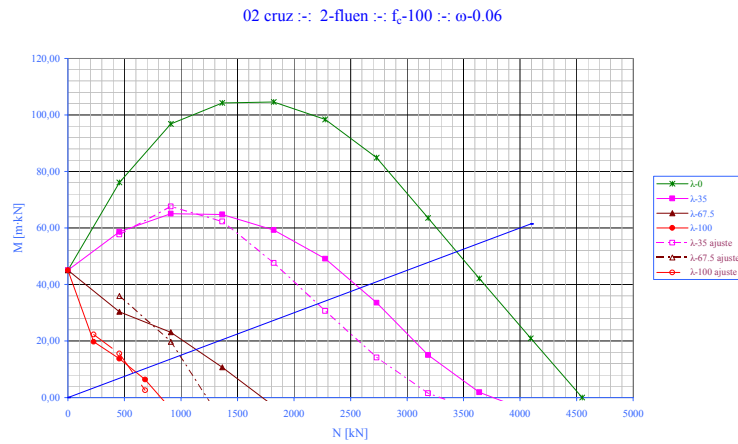
Como se observa de las dos gráficas mostradas tanto de hormigones de resistencia normal, como de hormigón de alta resistencia, el comportamiento mostrado por el ajuste para la sección hueca es adecuado. Las trayectorias del ajuste están siempre del lado de la seguridad y cercanas a las curvas del modelo teórico de referencia.

La conclusión lógica que se puede extraer es que los errores que se producían en la sección hueca eran puntuales ya que no se reproducen con fluencia, por lo que el método que se propone es válido. Además hay que señalar que todo soporte tiene fluencia, o lo que es lo mismo, las cargas están actuando siempre en un soporte por lo que un diseño adecuado con valores de fluencia distinto de cero es lo que se tiene que garantizar y esto es lo que se comprueba que sucede.

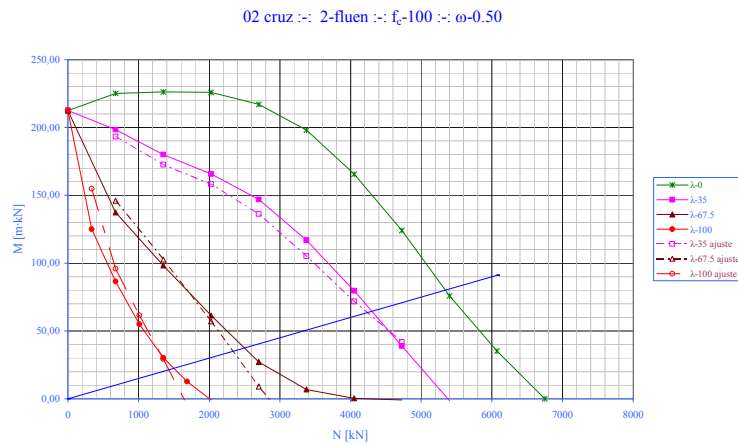
Los casos que se han estudiado en hormigones de 100 MPa (HSC), tanto con cuantías elevadas $\omega=0.50$, como con cuantías de escaso nivel de armado $\omega=0.06$ presentan un muy buen comportamiento.

Los valores elevados de cuantía tienen unas trayectorias del ajuste que coinciden prácticamente con los valores obtenidos por el modelo teórico de referencia. Los valores

de cuantía de menor armado no tienen un ajuste tan bueno pero siempre están del lado de la seguridad.



(a)



(b)

Figura V.22 Análisis del ajuste para hormigones de alta resistencia $f_c=100$ MPa
 (a) $f_c=100$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=100$ $\omega=0.50$

Fluencia	Comportamiento	Observaciones
Fluencia 1	✓	Ajuste muy bueno, mejora los valores de fluencia 0 [cargas instantáneas].
Fluencia 2	✓	Ajuste bueno, mejora los valores de fluencia 0.

Tabla V.6 Resumen del ajuste de fluencia [Nivel Gráfico]

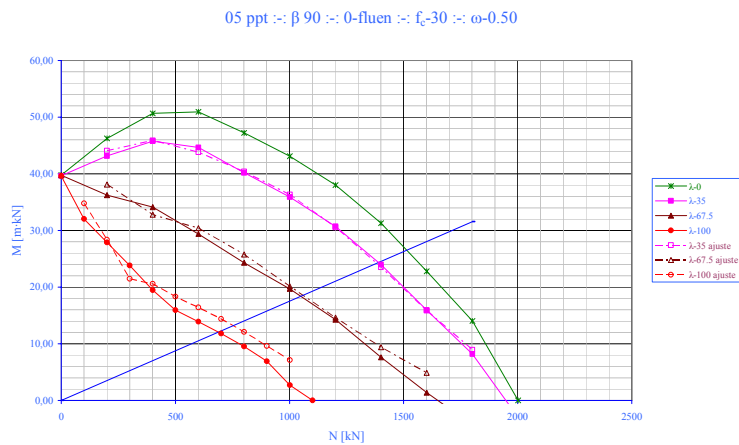
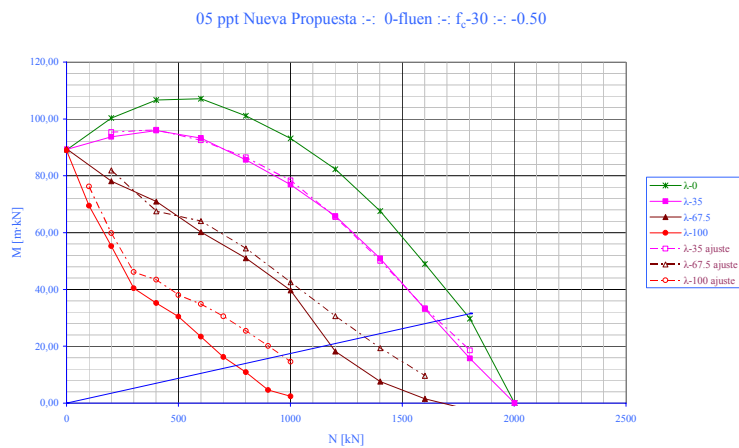
Leyenda:

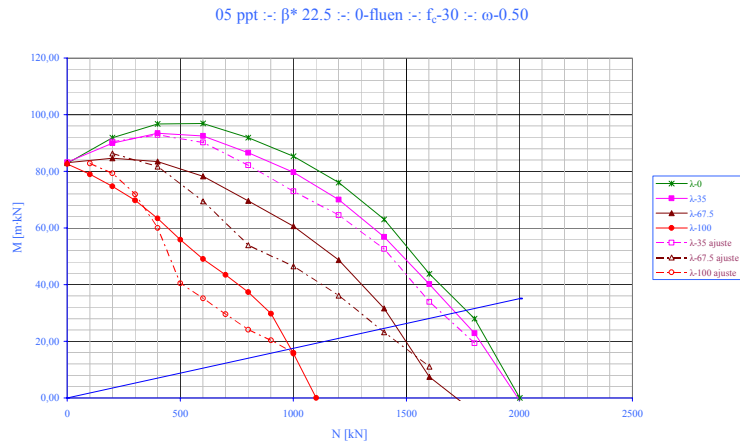
- ✓ Adecuado
- ✗ Inadecuado
- Con matices

V.1.3 Verificación a nivel gráfico: Flexión esviada – análisis de cargas instantáneas

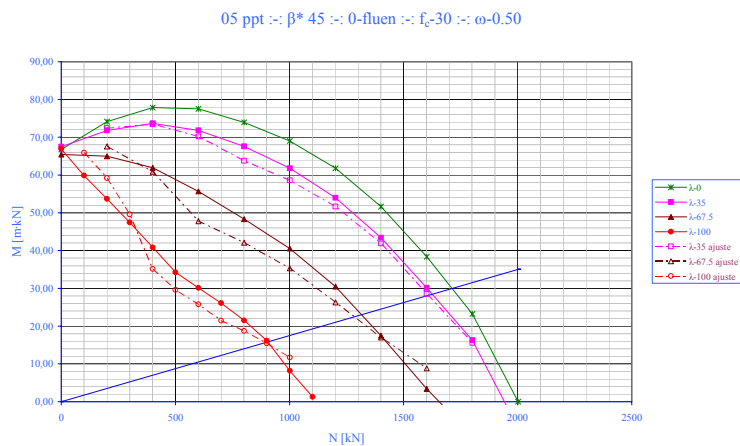
En flexión esviada y cargas instantáneas se toma como base el estudio realizado para flexión recta y se analiza si existiera algún tipo de variación significativa que hiciera necesario un ajuste a la propuesta realizada.

Se estudiarán los diferentes ángulos de esviaje para comprobar si hay algún eje que presenta unos valores de ajuste no asumibles, por ser del lado de la inseguridad, o muy alejados del modelo teórico de referencia, siendo excesivamente conservador el diseño.





(c)



(d)

Figura V.23 Análisis del ajuste para flexión esviada con cargas instantáneas $f_c=30$ MPa [NSC] (a) $\beta = \beta^*=0$ [eje principal mayor]; (b) $\beta = \beta^*=90$ [eje principal mayor]; (c) $\beta^*=22.5$; (d) $\beta^*=45$

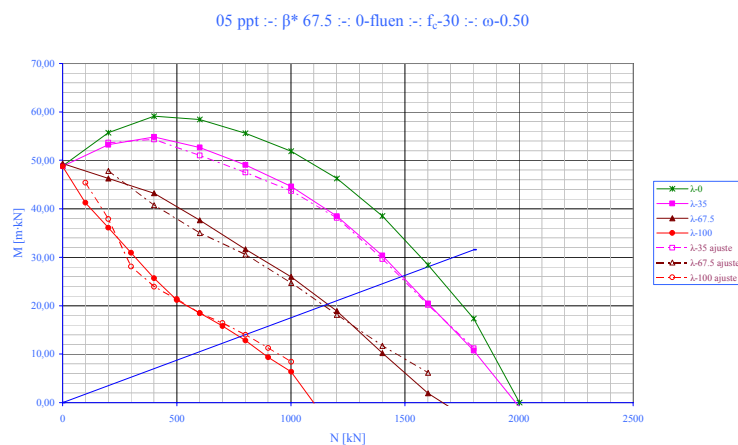


Figura V.24 Análisis del ajuste para flexión esviada con cargas instantáneas $f_c=30$ MPa [NSC] $\beta^*=67.5$

Los ajustes observados tienen la misma precisión que la obtenida en flexión recta. Hay que señalar que algunos ángulos de esviaje tienen mejor ajuste que otros pero no hay ninguna pauta que se pueda seguir: el ajuste no mejora, ni empeora, al aumentar el ángulo de esviaje.

Las características o pautas que se pueden observar en el ajuste se han esquematizado de la siguiente manera:

Característica		Comportamiento	Observaciones
Esbeltez λ_m	35	✓	Ajuste muy bueno, para todos los ángulos de esviaje estudiados.
	67.5	✓•	El ajuste es bueno, aunque hay en algunos casos que el ajuste no es tan adecuado.
	100	✓•	
Ángulo de esviaje β^*	0	✓•	El ajuste tiene un comportamiento moderado con respecto a los demás ángulos de esviaje.
	90	✓	El ajuste de los demás ángulos que no son el principal de inercia mayor tiene muy buen ajuste.
	22.5	✓	
	45	✓	
	67.5	✓	

Tabla V.7 Resumen del ajuste de flexión esviada [Nivel Gráfico]

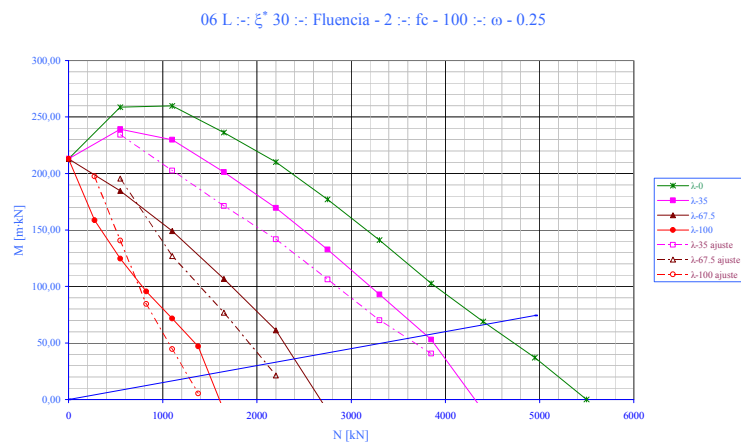
Leyenda:
✓ Adecuado
✗ Inadecuado
• Con matices

Los demás parámetros estudiados en flexión recta tienen la misma incidencia en flexión esviada por lo que no es necesario volver a incidir en los mismos puntos ya tratados. El comportamiento no se ve alterado por tratarse de flexión esviada siendo las mismas conclusiones extraídas en flexión recta, válidas para esviada.

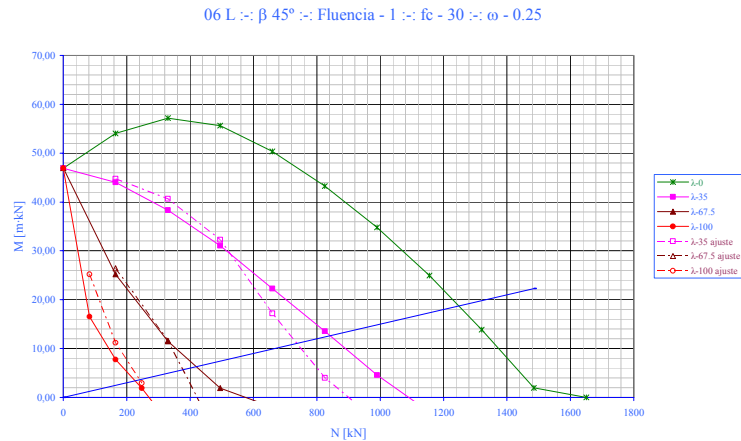
V.1.4 Verificación a nivel gráfico: Flexión esviada – análisis de cargas diferidas

En flexión esviada con cargas diferidas se toma como base el estudio realizado para flexión recta en cargas diferidas y de los resultados obtenidos en el apartado anterior de flexión esviada con cargas instantáneas.

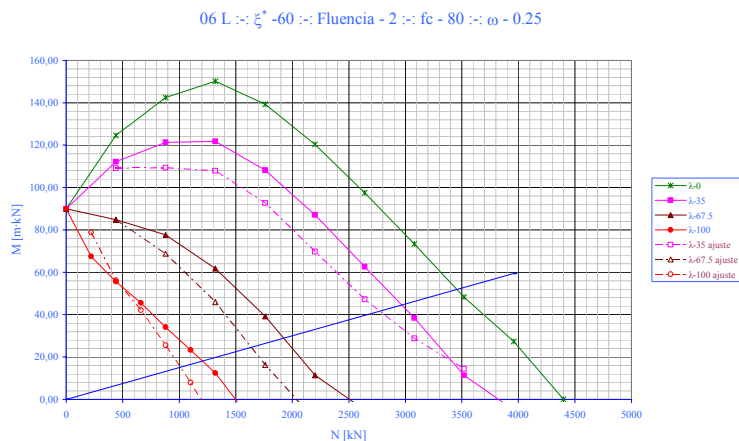
Como se comprobó en el apartado anterior no existía ningún eje que tuviera un mal ajuste, por lo que se espera repetir esos mismos resultados, o mejorados ya que en el estudio de cargas diferidas realizado en flexión recta se comprobó que los mejores resultados del ajuste se obtenía con cargas diferidas [fluencia $\varphi \neq 0$]



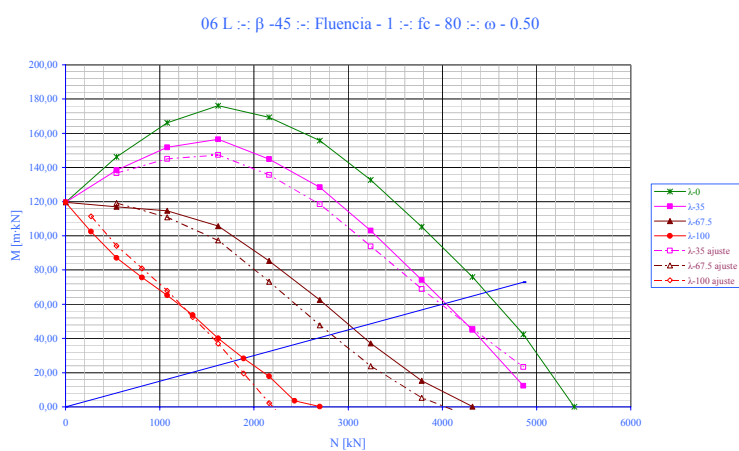
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura V.25 Análisis del ajuste para flexión esviada con cargas diferidas para la sección en L

(a) $\xi^* = 30$	$f_c = 100 \text{ MPa}$	$\omega = 0.25$	$\varphi = 2;$
(b) $\xi^* = 0$ [$\beta = 45$]	$f_c = 30 \text{ MPa}$	$\omega = 0.25$	$\varphi = 1;$
(c) $\xi^* = -60$	$f_c = 80 \text{ MPa}$	$\omega = 0.25$	$\varphi = 2;$
(d) $\xi^* = -180$ [$\beta = -45$]	$f_c = 80 \text{ MPa}$	$\omega = 0.50$	$\varphi = 1;$

Se ha tomado la sección en “L” como sección para referencia de las gráficas de estudio de ajuste.

Lo primero que se aprecia a partir de las gráficas es que el ajuste es mucho mejor para fluencia de valor 1 que el ajuste obtenido para valores de fluencia 2. [Figura V.25 (b) (d) frente a Figura V.25 (a) y (c)]. Al igual que sucedía en flexión recta tanto en para fluencia 1, como para fluencia 2.

En cuanto a cuantías de armado sucede igual en flexión recta, la propuesta formulada tiene una mejor precisión para cuantías de armado de 0.50, frente a cuantías menores de armado [Figura V.25 (d) frente a Figura V.25 (a), (b) y (c)].

El parámetro de resistencia del hormigón tiene mejor ajuste en hormigones de resistencia normal (NSC) frente a los de resistencia alta (HSC). Este resultado ya quedó patente en el estudio de fluencia para cargas diferidas en el que se señaló que el ajuste es menos preciso para HSC, sucediendo al revés que en cargas instantáneas [Figura V.25 (b) frente a Figura V.25 (a), (c) y (d)].

Las esbelteces se comportan de la misma forma que se han comportado con flexión recta y cargas diferidas. Un mejor ajuste para la esbeltez de 35 ya que se calibró el modelo con ese valor como punto de referencia: los valores de esbeltez de 67.5 y de 100 tienen un ajuste bueno

En cuanto a los ángulos de esviaje no hay ningún ángulo que se muestre con peores resultados que los otros, clarificando así el estudio que se llevó para cargas instantáneas lo que permite concluir que el método ajusta correctamente independientemente del ángulo de esviaje de los esfuerzos aplicados.

Los resultados se han resumido en la siguiente tabla:

Característica	Comportamiento	Observaciones
Fluencia	1	✓ Mejora los resultados obtenidos en cargas instantáneas.
	2	✓ Mejora los resultados de instantáneas aunque no es tan bueno el ajuste como el de fluencia 1.
Cuantía armado	✓	Se reproducen los mismos resultados obtenidos en flexión recta.
Resistencia del hormigón	✓	Se reproducen los mismos resultados obtenidos en flexión recta.
Esbeltez λ_m	✓	Se reproducen los mismos resultados obtenidos en flexión recta.
Ángulo de esviaje ξ^{*1}	✓	El ajuste no depende de los ángulos de esviaje los demás ángulos que no son el principal de inercia mayor tienen muy buen ajuste.

Tabla V.8 Resumen del ajuste de flexión esviada análisis cargas diferidas [Nivel Gráfico]

Leyenda:

- ✓ Adecuado
- ✗ Inadecuado
- Con matices

¹ Se empleará ξ para designar a los ángulos en flexión esviada que tienen como referencia los ejes formados por los principales de inercia cuando este no coincidan con los cartesianos. Para hacer referencia a los ejes cartesianos el ángulo se denotará β .

V.2 Comprobación del método: verificación a nivel numérico.

Tras la primera etapa en la que se ha revisado el ajuste a nivel gráfico, ahora es necesario realizar un análisis más detallado a nivel numérico en el que se comprobará la validez del ajuste a nivel **cuantitativo**.

La forma de abordar este nivel de comprobación será la de la elaboración de tablas de errores, la obtención de parámetros estadísticos sobre los errores, medias y desviaciones estándar; si bien se podrá representar las gráficas de los errores para ver el rango donde se encuentra el ajuste y detectar también puntos anómalos.

La forma de definir el parámetro de error que se ha considerado es la siguiente, *Bonet* (2001):

$$\varepsilon = (M_{1,\text{ajuste}} - M_{1,\text{mtr}}) / M_{u,\text{máx}}$$

donde:

ε	error de la propuesta de ajuste con respecto al modelo teórico de referencia.
$M_{1,\text{ajuste}}$	valor del momento de primer orden obtenido con la propuesta de método.
$M_{1,\text{mtr}}$	valor del momento de primer orden obtenido con el modelo teórico de referencia.
$M_{u,\text{máx}}$	máximo momento de primer orden para $\lambda_m=0$.

Tal y como se ha elegido el parámetro del error los resultados con valores positivos implicarán un error que implicaría un diseño del lado de la inseguridad; valores negativos por el contrario indican un diseño del lado de la seguridad.

La forma que se procesarán estos errores será la de obtención de parámetros estadísticos de medias y desviaciones estándar; y por otra parte el empleo de gráficas con los errores obtenidos.

Una vez procesados todos los valores de los errores del ajuste respecto del modelo teórico de referencia se obtiene los siguientes parámetros estadísticos:

$$\begin{aligned}\mu [\text{media}] &= -0,0586 \\ \sigma [\text{desviación estándar}] &= 0,0834\end{aligned}$$

La media obtenida de los errores es del -5.8%, estando este valor del lado de la seguridad. La desviación estándar es del 8.34%. Estos valores vienen a confirmar lo señalado en el análisis gráfico: el ajuste estaba por norma general del lado de la seguridad y el método propuesto se aproximaba bastante bien al modelo teórico de referencia.

Si se analizan los resultados con más detalle se comprueba que cerca de un 80% de los valores están del lado de la seguridad, frente a un 20% de los valores que están del lado de un diseño inseguro. Pero si se considera como valores adecuados los que superen hasta en un 5% el valor del modelo teórico de referencia obtenemos como

valores que tienen un ajuste del lado de la seguridad un 95%, y valores que no son adecuados en torno a un 5%. A estos puntos del lado de la inseguridad hasta del 5% y al conjunto de valores del lado de la seguridad será denominado como seguridad*.

Esas cifras no consideran el límite que marca la EHE en el que establece que los métodos simplificados no son de aplicación para valores por debajo de la recta de pendiente $h/20$, siendo h el canto.

El procedimiento que se va a seguir es el de analizar los errores en función de los distintos parámetros analizados previamente, empleando parámetros estadísticos.

V.2.1 Verificación a nivel numérico: Análisis seccional

Como se señaló en el análisis gráfico, no existían grandes diferencias de ajuste entre los diferentes tipos de secciones estudiadas por lo que el método era aplicable independientemente de la sección empleada sin que por ello se viera condicionado notablemente los resultados obtenidos.

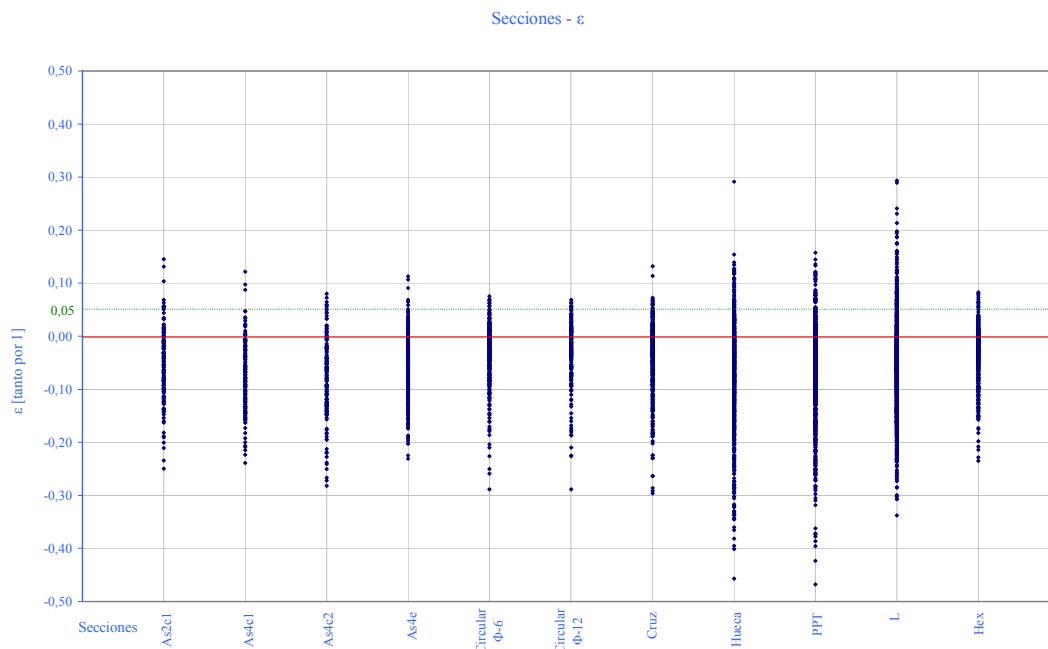


Figura V.26 Análisis del ajuste Gráfica errores en función de la sección.

De la gráfica V.26 se comprueba lo ya señalado previamente los errores que muestra los diferentes tipos de secciones son prácticamente en el mismo rango. Estos se encuentran principalmente en la zona de diseño del lado de la seguridad $\varepsilon < 0$ [línea de trazo rojo], y si consideramos un error aceptable aquel que sea inferior del 5%, $\varepsilon < +0.05$ [línea de trazo verde] comprobamos que casi todos los puntos se encuentran con un buen ajuste.

Las únicas secciones que presentan una mayor dispersión son las secciones hueca, pila de puente y L. Esto se debe a que presentan un mayor número de datos al representar los datos de flexión esviada cuyo ajuste es menos preciso que la flexión recta.

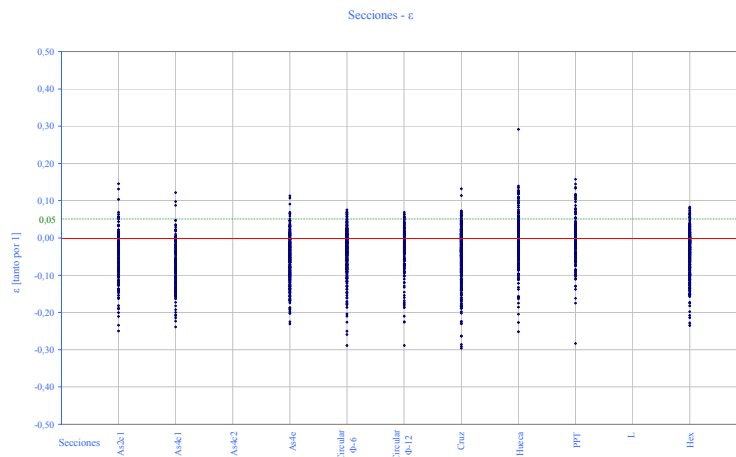


Figura V.27 Análisis del ajuste Gráfica errores en función de la sección.

Si sólo se representara la flexión recta se comprueba que los valores de la sección hueca y pila puente se encuentran en el mismo rango que los valores del resto de las secciones.

V.2.2 Verificación a nivel numérico: Análisis de la esbeltez

El ajuste a nivel gráfico mostraba que los valores de esbeltez para los que el método propuesto era más adecuado era para los valores de esbeltez mecánica de 35. Este resultado no era casual ya que el ajuste se diseñó mediante rectas y se calibró para que ajustara bien para esos valores de esbeltez. Los valores de esbeltez de 67.5 y 100 daban un peor ajuste del método propuesto.

Los parámetros estadísticos obtenidos son:

$$\mu_{35} = -0,0496$$

$$\sigma_{35} = 0,0614$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 81.16%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 18.84%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 97.19%

$$\mu_{67.5} = -0,0819$$

$$\sigma_{67.5} = 0,0929$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 82.83%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 17.17%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 94.95%

$$\mu_{100} = -0,0481$$

$$\sigma_{100} = 0,0935$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 73.36%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 26.64%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 91.06%

La media de la esbeltez de 35 es muy buena [en torno al 5%] además de estar del lado de la seguridad. La dispersión de la muestra es baja [desviación del 6%], por lo que se puede concluir que el ajuste es bueno para esbeltez 35

La media de esbeltez de 67.5 muestra que el ajuste es el más conservador de todos y que la dispersión de la muestra es más elevada que el de 35 y del mismo orden que el de 100.

La media que se obtiene para esbeltez 100 es ligeramente mejor que la de 35 pero la desviación es peor: hay una mayor dispersión en la esbeltez de 100, es por esto que el ajuste para 100 se puede considerar bueno aunque no tan bueno como el de 35.

Si se analiza el resto de parámetros que se han considerado se podrá precisar mucho mejor la valoración realizada en esta primera aproximación.

La esbeltez de 35 tiene un porcentaje de puntos del lado de la seguridad del 81% y si se considera el margen ampliado que se señaló antes este valor crece hasta un 97%. Esto implica que la solución adoptada está muy bien centrada en el modelo teórico de referencia.

La esbeltez de 67.5 tiene un porcentaje de puntos del lado de la seguridad de 82%, lo cual significa un porcentaje ligeramente mayor que los que presenta la esbeltez de 35. En cambio si se amplía el rango a los puntos que superen en un 5% el modelo teórico de referencia el porcentaje sólo sube al 94.9%, lo que significa que hay una mayor dispersión en la solución de esbeltez de 67.5.

Por último al comprobar el porcentaje de puntos del lado de la seguridad en la esbeltez de 100 se comprueba que tomar el valor de la media no daba una idea completa del comportamiento. El porcentaje de puntos del lado de la seguridad es de un 73%, esto lo que significa es que la media es buena debido a que hay muchos puntos que son excesivamente conservadores y que compensan la cantidad de puntos que están del lado de la inseguridad.

Si se considera el margen extra del 5%, se comprueba que la cantidad de puntos englobados en dicho margen es de sólo del 91%.

La conclusión que se extrae es que la consideración en exclusiva de las medias y de la desviación estándar, no da una idea completa del comportamiento. Es necesario valorar otros parámetros y complementar el estudio mediante gráficas de la dispersión de los errores.

A continuación se representará la gráfica de los errores clasificados por el nivel de esbeltez, en el que se comprueba a nivel gráfico las conclusiones extraídas de este apartado.

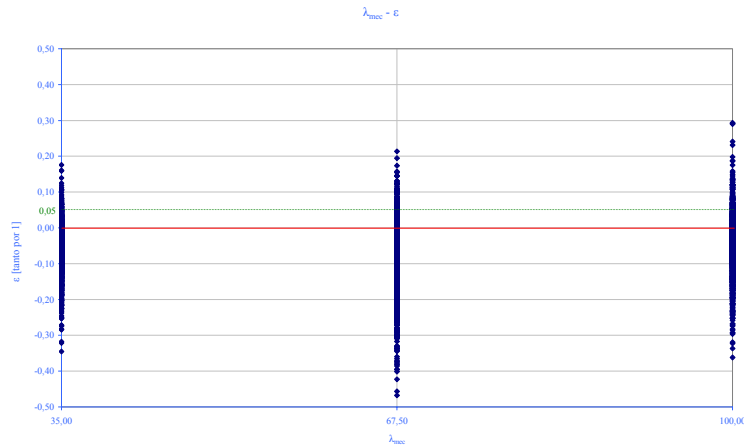


Figura V.28 Análisis del ajuste Gráfica errores en función de la esbeltez.

La gráfica anterior [Figura V.28] confirma todo lo señalado previamente:

- Esbeltez de 35 con mejor ajuste
- Esbeltez de 67.50 y 100 con peor ajuste debido a la dispersión de los resultados
- Un buen ajuste en todos los casos

V.2.3 Verificación a nivel numérico: Análisis del nivel de axil

Este parámetro no había sido evaluado en el análisis a nivel cualitativo [estudio a nivel gráfico], se estudiará la influencia de parámetro de nivel de axil y su influencia en los errores cometidos.

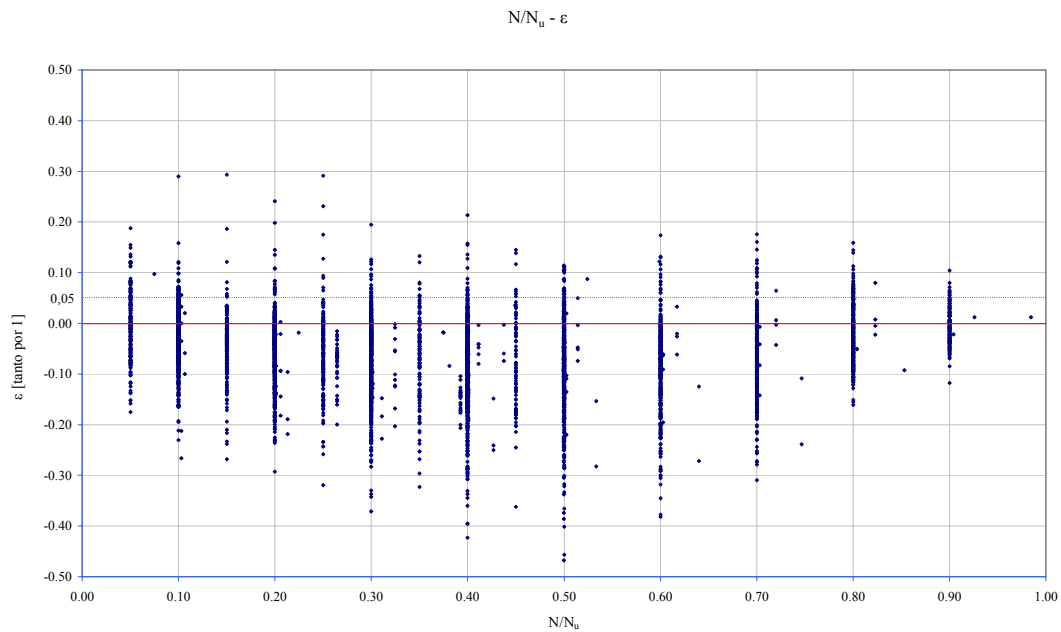


Figura V.29 Análisis del ajuste Gráfica errores en función del nivel de axil.

Se ha representado el nivel de axil (axil respecto a axil último) frente a los errores. A la vista de la gráfica se comprueba que la zona de peor ajuste corresponde a la zona central comprendida entre los valores de nivel de axil de 0.30 y 0.60 esta zona corresponde al cambio de tipo de rotura de la sección de rotura por inestabilidad a rotura por agotamiento.

No hay diferencias significativas entre la zona de rotura por inestabilidad y la zona de rotura por agotamiento: las dos zonas presentan buenos resultados.

V.2.4 Verificación a nivel numérico: Análisis de la resistencia del hormigón

En el análisis gráfico se comprobó que la resistencia del hormigón tenía buen ajuste independientemente del nivel de resistencia. Se señaló que para fluencia igual a cero la resistencia limitante era la de 30 MPa, mientras que para cargas diferidas [fluencia \neq 0] la resistencia limitante era la de 80 MPa.

La resistencia de 30 MPa era la que mejor ajuste tenía al estar más cerca de los valores del modelo teórico de referencia, mientras que el hormigón de resistencia de 80 MPa daba valores más conservadores (al tener una media más elevada).

Los parámetros estadísticos analizados son:

$$\mu_{30} = -0.0413$$

$$\sigma_{30} = 0.0709$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 73.04%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 26.96%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 92.59%

$$\mu_{80} = -0.0787$$

$$\sigma_{80} = 0.0924$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 86.16%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 13.84%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 96.82%

$$\mu_{100} = -0.0578$$

$$\sigma_{100} = 0.0778$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 80.31%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 19.69%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 96.85%

La media que se obtiene para los soportes analizados con resistencia de 30 MPa es la más precisa, y la desviación estándar es la más baja de todas. Aún así el porcentaje de puntos del lado de la seguridad tiene un valor moderado, 73.04%. Si consideramos ese valor con el margen del 5% ese valor sube hasta casi el 93%.

Para resistencias de hormigón de 80 MPa, los resultados obtenidos son más conservadores, a pesar de tener una mayor desviación de la media. La media es -7.87%

[por debajo del modelo teórico de referencia] y el porcentaje de puntos del lado de la seguridad es muy bueno siendo del 86.16%. Esto es debido a que el diseño ha sido conservador con este tipo de hormigones.

Los valores de resistencia de 100 MPa son muy buenos aunque sería necesario realizar más ensayos porque los datos obtenidos no son suficientes en comparación con los otros dos grupos. Aunque los valores obtenidos permiten aventurar un buen comportamiento.

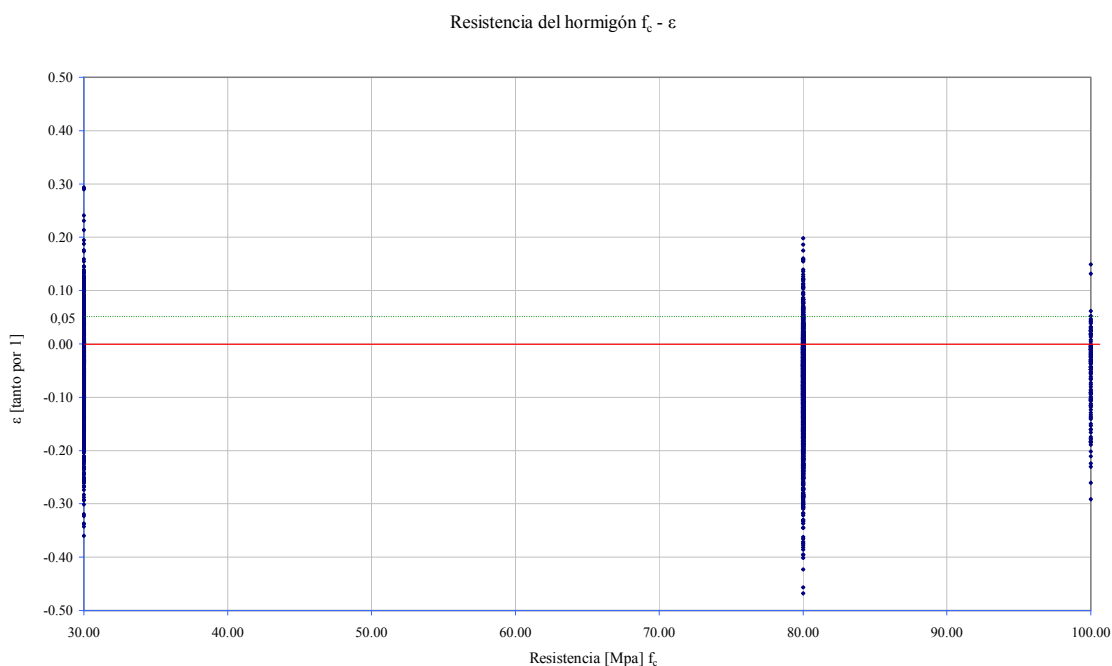


Figura V.30 Análisis del ajuste: Gráfica errores en función de la resistencia del hormigón.

La gráfica confirma los datos apuntados previamente:

- La resistencia de 30 MPa da valores más ajustados aunque con más puntos del lado de la seguridad
- La resistencia de 80 MPa es una solución más conservadora aunque con más dispersión.
- El hormigón de 100 MPa tiene muy buen ajuste pero haría falta ensayar más piezas.

Profundizando más en el análisis, sería necesario separar en función de la fluencia de la sección, así como de la cuantía de armado.

Tal y como se ha explicado en apartados anteriores para fluencia 0, correspondiente a cargas instantáneas los valores más ajustados se obtienen para hormigones de resistencia normal (NSC), frente a los hormigones de alta resistencia (HSC) que obtienen mejores resultados en cargas diferidas.

A continuación se analizarán diferentes gráficas en función del nivel de fluencia para confirmar las conclusiones extraídas.

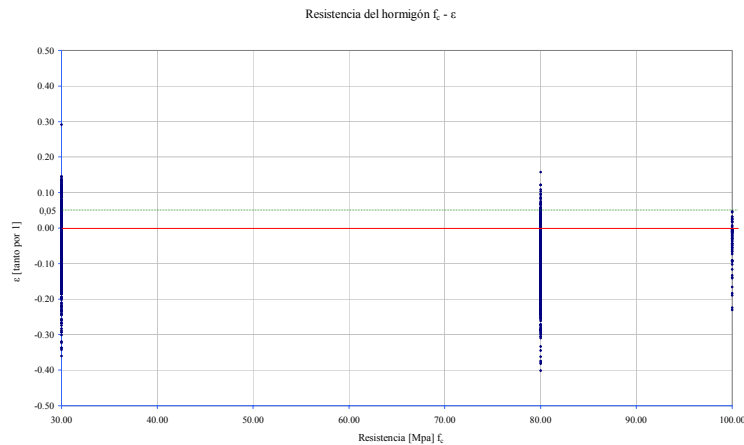


Figura V.31 Análisis del ajuste: Gráfica errores en función de la resistencia del hormigón.
Fluencia $\varphi = 0$

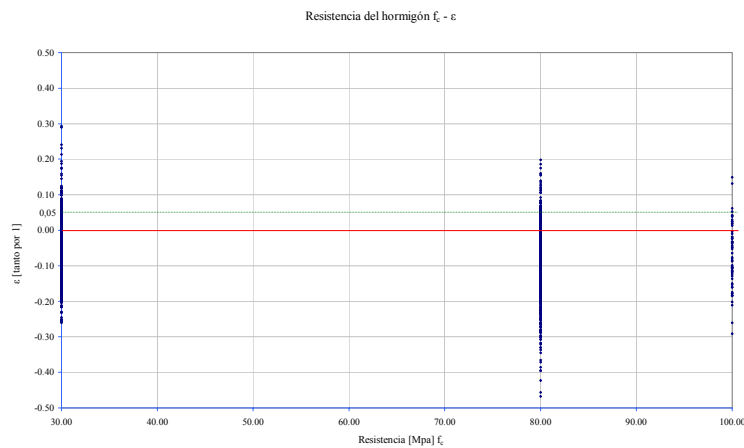


Figura V.32 Análisis del ajuste: Gráfica errores en función de la resistencia del hormigón.
Fluencia $\varphi \neq 0$

A pesar de todo lo comentado las diferencias no son significativas. El hormigón de resistencia de 30 MPa tiene un mejor comportamiento para cargas instantáneas que el que manifiesta en cargas diferidas [$\varphi \neq 0$].

Para hormigones de 80 MPa las gráficas no son muy clarificadoras al respecto y sería necesario analizar los parámetros estadísticos que se han empleado previamente.

Se desagregará el estudio de los parámetros estadísticos en función de la resistencia y de la fluencia del soporte, para poder comprobar así de forma numérica si todo lo supuesto a partir del estudio gráfico y del estudio gráfico de los errores

Parámetros estadísticos para cargas instantáneas

$\mu_{30 \cap \varphi=0}$	= -0.0368
$\sigma_{30 \cap \varphi=0}$	= 0.0736
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:	68.85%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:	31.15%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:	94.60%

$\mu_{80 \cap \varphi=0}$	= -0.0824
$\sigma_{80 \cap \varphi=0}$	= 0.0978
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:	88.82%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:	11.18%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:	94.86%

Parámetros estadísticos para cargas diferidas

$\mu_{30 \cap \varphi \neq 0}$	= -0.0458
$\sigma_{30 \cap \varphi \neq 0}$	= 0.0677
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:	77.12%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:	22.88%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:	93.92%

$\mu_{80 \cap \varphi \neq 0}$	= -0.0751
$\sigma_{80 \cap \varphi \neq 0}$	= 0.0866
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:	83.61%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:	16.39%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:	95.80%

Los valores obtenidos confirman las conclusiones extraídas previamente. El hormigón de resistencia de 30 MPa es el que mejor resultados tiene en todos los casos estudiados, mejorando los valores del ajuste que se obtienen con el hormigón 80 MPa.

El ajuste del hormigón de 30 MPa es mejor para fluencia $\varphi=0$, cargas instantáneas, que para fluencia $\varphi \neq 0$, cargas diferidas. Las medias obtenidas son de -0.0368 y de -0.0458, que implica un diseño más conservador para cargas diferidas y un diseño más ajustado en cargas instantáneas. Por contra hay una mayor desviación en los valores de fluencia $\varphi=0$.

La situación se invierte para el hormigón de 80 MPa, donde es mejor para fluencia $\varphi \neq 0$, cargas diferidas, que para fluencia $\varphi=0$, cargas instantáneas. Las medias obtenidas son de -0.0824 y de -0.0751, que implica un diseño más conservador para cargas instantáneas y un diseño más ajustado en cargas diferidas. Además hay una mayor desviación en los valores de fluencia $\varphi=0$.

Todo esto permite confirmar el análisis realizado previamente con las gráficas de errores y es consecuente con el diseño realizado en el ajuste en el que se primaba los hormigones de resistencia normal (NSC) para cargas instantáneas y los de alta resistencia (HSC) para las cargas diferidas.

V.2.5 Verificación a nivel numérico: Análisis de la cuantía de armado

La precisión del ajuste en función de la cuantía de armado ha quedado suficientemente expuesta a lo largo del estudio realizado:

- Ajuste moderado para cuantías baja de armado [$\omega=0.06$]
- Buen ajuste para cuantías de armado elevadas [$\omega=0.50$]
- Ajuste correcto para cuantías de armado en situación intermedia [$\omega=0.25$]

Soportes con poca cuantía de armado son difíciles de ajustar por lo que se optó por ajustar las cuantías de mayor armado sacrificando las de menor armado. Esto se puede hacer ya que un buen ajuste en cuantías mayores lleva a diseños conservadores para cuantías baja de armado: mientras que un diseño ajustado para cuantías de poco armado lleva a un diseño inseguro para secciones de mayor armado.

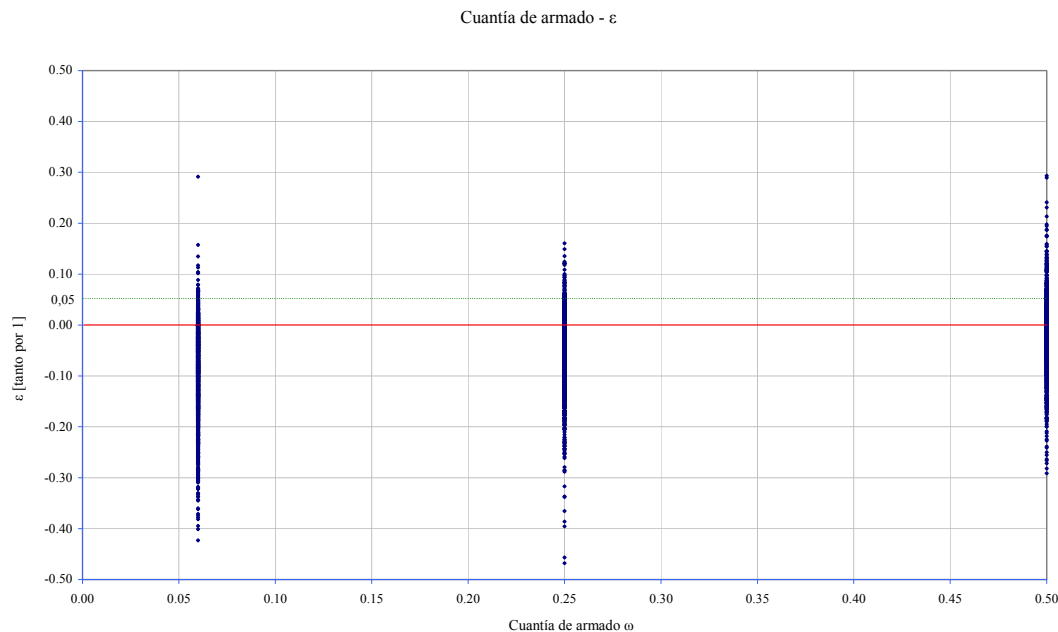


Figura V.33 Análisis del ajuste: Gráfica errores en función de la cuantía de armado.

La gráfica confirma lo señalado previamente: una gran dispersión para los valores de cuantía de $\omega=0.06$, y unos valores más ajustados para cuantías de $\omega=0.50$ y de $\omega=0.25$.

Para ver más detallados estos resultados, se estudiará los parámetros estadísticos de media y desviación estándar. Además se combinarán los valores de cuantía con los de resistencia de hormigón.

Parámetros estadísticos de cuantías de armado

$\mu_{0.06} = -0.0862$	
$\sigma_{0.06} = 0.0826$	
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:	88.13%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:	11.87%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:	94.60%

$\mu_{0.25} = -0.0565$	
$\sigma_{0.25} = 0.0859$	
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:	79.78%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:	20.22%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:	95.81%

$\mu_{0.50} = -0.0223$	
$\sigma_{0.50} = 0.0667$	
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:	33.84%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:	66.16%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:	88.46%

Los valores de cuantía de armado $\omega=0.50$ prueban que el ajuste es muy bueno ya que la media es de un 2% con respecto al modelo teórico de referencia, pero al ser tan próximo al modelo teórico de referencia ha aumentado el porcentaje de puntos del lado de la inseguridad.

Por el contrario los estadísticos de cuantía de armado de $\omega=0.06$ muestran un ajuste conservador para este parámetro: confirmado por ser el parámetro con menores puntos del lado de la inseguridad.

La situación intermedia lógicamente se encuentra en la cuantía de armado $\omega=0.25$ con un ajuste correcto con respecto al modelo teórico de referencia y con un porcentaje de puntos del lado de la inseguridad moderado.

Parámetros estadísticos de cuantías de armado en función de la resistencia del hormigón.

$\mu_{0.06 \cap f_c=30} = -0.0699$	
$\sigma_{0.06 \cap f_c=30} = 0.0697$	
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:	87.14%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:	12.86%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:	97.93%

$\mu_{0.06 \cap f_c=80} = -0.1040$	
$\sigma_{0.06 \cap f_c=80} = 0.0915$	

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:	89.51%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:	10.49%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:	98.71%

$$\mu_{0.50 \cap f_c=30} = -0.0169$$

$$\sigma_{0.50 \cap f_c=30} = 0.0673$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:	60.72%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:	39.28%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:	86.38%

$$\mu_{0.50 \cap f_c=80} = -0.0352$$

$$\sigma_{0.50 \cap f_c=80} = 0.0640$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:	78.76%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:	21.24%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:	92.59%

Si se desglosa el estudio en función de la resistencia del hormigón se comprueba que el método propuesto es mucho más ajustado para hormigones de 30 MPa, tanto en cuantías de armado bajas [$\omega=0.06$] como para cuantías de armado altas [$\omega=0.50$], por el contrario tiene mayor porcentaje de puntos del lado de la inseguridad.

Para soportes con hormigón de resistencia 80 MPa, la situación se invierte: el método propuesto está menos ajustado tanto en cuantías de armado bajas [$\omega=0.06$] como en cuantías de armado altas [$\omega=0.50$]. Esto se ve compensado por una menor cantidad de puntos del lado de la inseguridad.

A la hora de la elección de la propuesta del método se ha tenido que elegir una solución de compromiso, ya que no hay ninguna propuesta que se pueda adaptar de manera sencilla a todos los casos y las singularidades que se presentan.

V.2.6 Verificación a nivel numérico: Análisis de la fluencia

En cuanto a fluencia quedó comprobado con la verificación a nivel gráfico que los mejores ajustes se obtenían con fluencia de valor 1. Si se grafían los errores cometidos frente a los parámetros de fluencia se comprobará que la conclusión extraída es del todo válida.

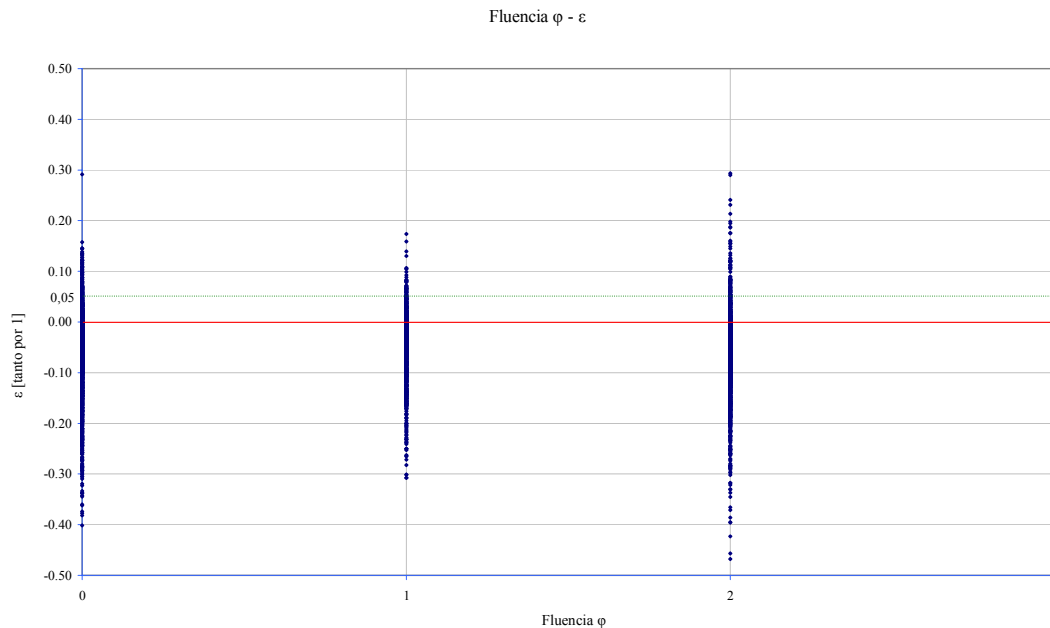


Figura V.34 Análisis del ajuste: Gráfica errores en función del nivel de fluencia.

Así mismo se constata que los puntos de fluencia 3 no son suficientes para poder sacar conclusiones, y que la fluencia $\phi=2$ tiene una gran dispersión

Parámetros estadísticos de fluencia

$\mu_{\phi=0}$	=	-0.0575
$\sigma_{\phi=0}$	=	0.0881
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:		78.14%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:		21.86%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:		94.42%

$\mu_{\phi=1}$	=	-0.0526
$\sigma_{\phi=1}$	=	0.0707
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:		75.81%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:		24.19%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:		95.38%

$$\mu_{\varphi=2} = -0.0638$$

$$\sigma_{\varphi=2} = 0.0829$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 82.49%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 17.51%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 94.41%

$$\mu_{\varphi=3} = -0.0586$$

$$\sigma_{\varphi=3} = 0.0611$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 88.89%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 11.11%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 94.44%

El mejor ajuste es el de fluencia 1: tiene la mejor media además de la desviación estándar más baja, pero también es la que tiene más porcentaje de puntos del lado de la inseguridad.

La fluencia de valor 0, cargas instantáneas, tiene una media muy buena aunque una dispersión elevada en comparación con lo obtenido para fluencia 1.

Los resultados que se obtienen para fluencia de valor 2, muestran que el ajuste es más conservador: media más alta y porcentaje de puntos del lado de la seguridad mayor.

Si se agrupan todos los valores de cargas diferidas, se comprueba que el ajuste a pesar de que tenga una media un poco más conservadora tiene una menor dispersión y un menor porcentaje de puntos del lado de la inseguridad.

$$\mu_{\varphi \neq 0} = -0.0597$$

$$\sigma_{\varphi \neq 0} = 0.0787$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 80.09%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 19.91%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 94.76%

V.2.6 Verificación a nivel numérico: Análisis de la excentricidad relativa

Un parámetro cuyo estudio estaba implícito en los demás parámetros estudiados era la excentricidad relativa $e/4i$

$$e/4 \cdot i = \frac{N/M}{4 \cdot i}$$

El ajuste se realizaba mediante dos rectas en función del nivel de excentricidad relativa. Si la excentricidad era menor de 0.2, el ajuste dependía principalmente de la esbeltez de la sección. En cambio si superaba dicho valor el ajuste estaba en función de la resistencia del hormigón [no dependía de la esbeltez del soporte]

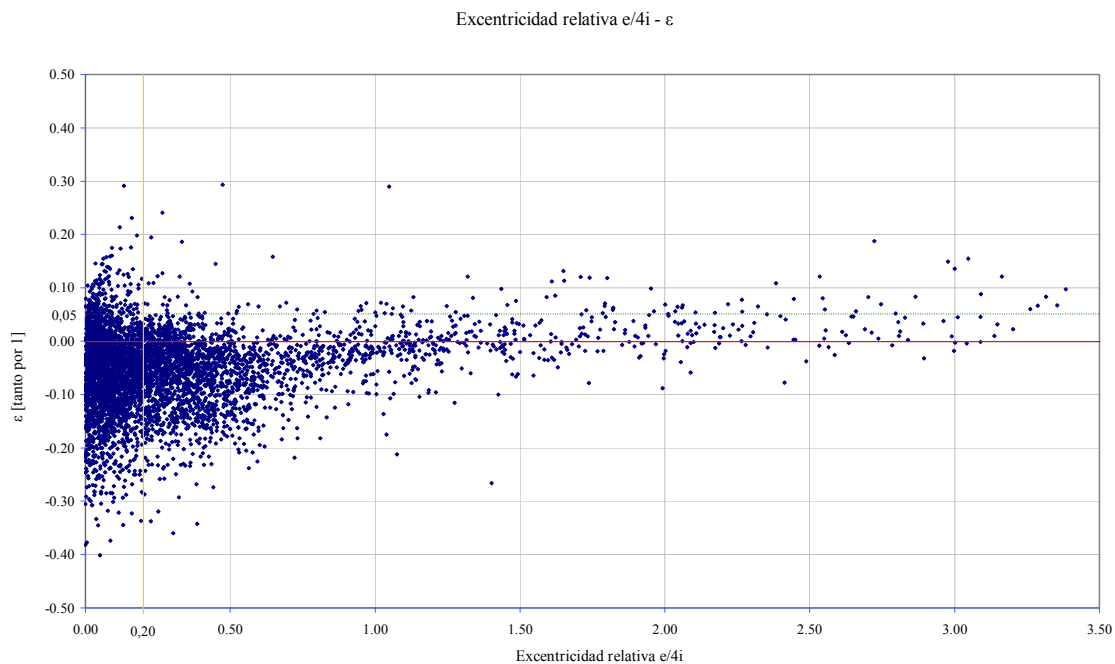


Figura V.35 Análisis del ajuste: Gráfica errores en función de la excentricidad relativa.

Se comprueba que para valores de excentricidad mayores de 1.5 los errores que se obtienen indican que están del lado de la inseguridad.

Los valores de excentricidad relativa menores de 0.2 están en su mayoría del lado de la seguridad, aunque también hay un porcentaje del lado de la inseguridad.

Para valores que superan el valor de excentricidad de 0.2 y por debajo de 1.5, prácticamente están todos del lado de la seguridad.

V.2.7 Verificación a nivel numérico: Análisis de la flexión esviada

Las posibles diferencias que se observan en función del ángulo de esviaje son prácticamente mínimas presentando unos valores muy ajustados.

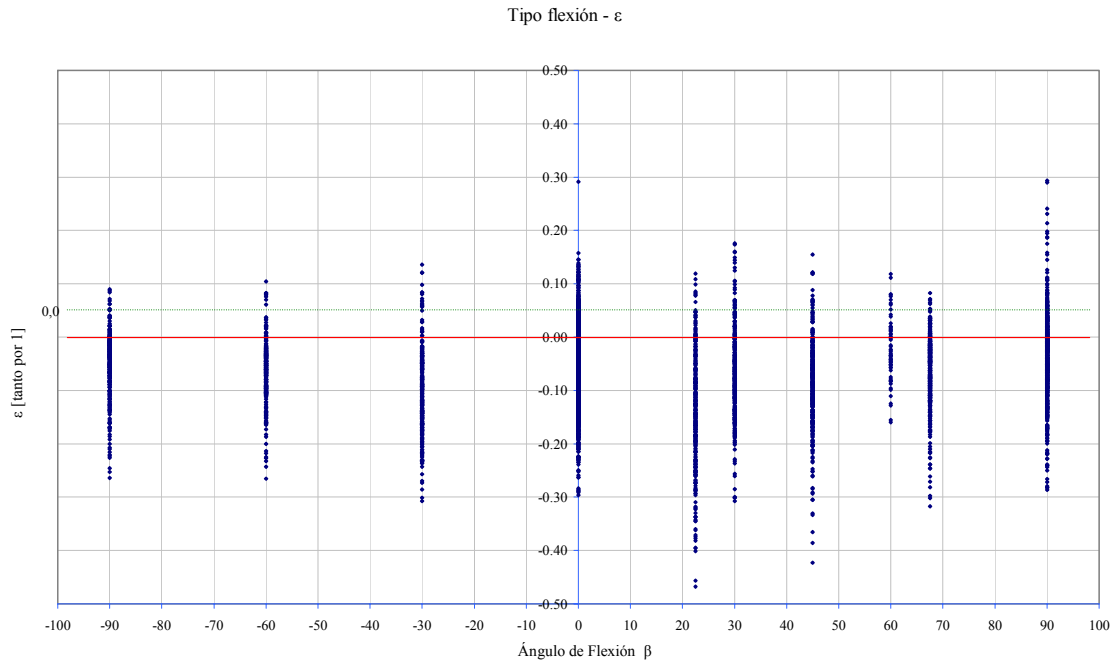


Figura V.36 Análisis del ajuste: Gráfica errores en función del nivel del ángulo de flexión esviada

Tal y como se observa en la gráfica el análisis realizado sigue siendo válido independientemente de que el estudio se realice en flexión recta o esviada.

Parámetros estadísticos de flexión

$$\mu_{\beta=0} = -0.0416$$

$$\sigma_{\beta=0} = 0.0666$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 74.26%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 25.74%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 94.06%

$$\mu_{\beta \neq 0} = -0.0670$$

$$\sigma_{\beta \neq 0} = 0.0895$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 81.55%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 18.45%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 94.86%

Como se aprecia a pesar de haber ligeras variaciones tanto en flexión recta como en esviada el ajuste es bueno. En esviada el ajuste está más del lado de la seguridad, mientras que el de flexión recta está más próximo del modelo teórico de referencia.

Parámetros estadísticos de flexión en función de la resistencia del hormigón

$\mu_{\beta=0 \cap f_c=30} = -0.0387$	
$\sigma_{\beta=0 \cap f_c=30} = 0.0548$	
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:	76.32%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:	23.68%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:	96.83%

$\mu_{\beta \neq 0 \cap f_c=30} = -0.0554$	
$\sigma_{\beta \neq 0 \cap f_c=30} = 0.0640$	
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:	83.60%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:	16.40%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:	97.39%

$\mu_{\beta=0 \cap f_c \neq 30} = -0.0437$	
$\sigma_{\beta=0 \cap f_c \neq 30} = 0.0737$	
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:	72.79%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:	27.21%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:	92.10%

$\mu_{\beta \neq 0 \cap f_c \neq 30} = -0.0742$	
$\sigma_{\beta \neq 0 \cap f_c \neq 30} = 0.1016$	
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad:	80.26%
Porcentaje de puntos del lado inseguridad:	19.74%
Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*:	93.28%

Si se representa los parámetros estadísticos en función de la flexión esviada o recta, se comprueba que el comportamiento sigue las mismas pautas independientemente del tipo de flexión que haya. El comportamiento que muestra el ajuste en función del hormigón no depende en gran medida del tipo de flexión.

V.2.8 Verificación a nivel numérico: Cuadro resumen

Se ha realizado un cuadro con todas las medias en función de los distintos parámetros estudiados. Por simplicidad ha habido algunos que se han obviado: se han eliminado los que presentaban una menor diferencia entre ellos.

En la diagonal principal [color amarillo] se ha representado la media de ese parámetro en exclusiva.

Dentro de cada grupo, p.e. esbeltez, los elementos exteriores de la diagonal corresponden a la media de la *unión*² de los dos parámetros [la intersección es en todos los casos Ø]

Cuando se analizan dos parámetros diferentes, p.e. esbeltez y resistencia del hormigón, el valor de la media corresponde a la *intersección*³ de los dos parámetros.

MEDIAS		Esbeltez mecánica λ_{eq}			Resistencia hormigón f_c			Fluencia φ			Cuantía armado ω			Flexión		
		35	67.5	100	30	80	100	0	1	2	3	0.06	0.25	0.5	recta	esviada
Esbeltez mecánica λ_{eq}	35	-0.0496	-0.0634	-0.0489	-0.0378	-0.0614	-0.0618	-0.0377	-0.0469	-0.0665	-0.0351	-0.0750	-0.0407	-0.0189	-0.0387	-0.0554
	67.5	-0.0634	-0.0819	-0.0647	-0.0559	-0.1130	-0.0811	-0.0767	-0.0772	-0.0939	-0.0838	-0.1158	-0.0831	-0.0379	-0.0601	-0.0934
	100	-0.0489	-0.0647	-0.0481	-0.0321	-0.0698	-0.0229	-0.0616	-0.0351	-0.0320	-0.0626	-0.0739	-0.0515	-0.0110	-0.0254	-0.0577
Resistencia hormigón f_c	30	-0.0378	-0.0559	-0.0321	-0.0413	-0.0586	-0.0420	-0.0368	-0.0407	-0.0485	-0.0586	-0.0699	-0.0298	-0.0169	-0.0278	-0.0475
	80	-0.0614	-0.1130	-0.0698	-0.0586	-0.0787	-0.0777	-0.0824	-0.0655	-0.0811	x	-0.1040	-0.0716	-0.0352	-0.0566	-0.0895
	100	-0.0618	-0.0811	-0.0229	-0.0420	-0.0777	-0.0578	-0.0436	x	-0.0731	x	-0.0894	-0.0592	-0.0216	-0.0441	-0.1040
Fluencia φ	0	-0.0377	-0.0767	-0.0616	-0.0368	-0.0824	-0.0436	-0.0575	-0.0561	-0.0599	-0.0575	-0.0865	-0.0599	-0.0140	-0.0338	-0.0689
	1	-0.0469	-0.0772	-0.0351	-0.0407	-0.0655	x	-0.0561	-0.0526	-0.0597	-0.0527	-0.0806	-0.0220	-0.0324	-0.0496	-0.0548
	2	-0.0665	-0.0939	-0.0320	-0.0485	-0.0811	-0.0731	-0.0599	-0.0597	-0.0638	-0.0637	-0.0891	-0.0628	-0.0267	-0.0480	-0.0699
	3	-0.0351	-0.0838	-0.0626	-0.0586	x	x	-0.0575	-0.0527	-0.0637	-0.0586	x	x	-0.0586	-0.0586	x
Cuantía armado ω	0.06	-0.0750	-0.1158	-0.0739	-0.0699	-0.1040	-0.0894	-0.0865	-0.0806	-0.0891	x	-0.0862	-0.0748	-0.0593	-0.0644	-0.0956
	0.25	-0.0407	-0.0831	-0.0515	-0.0298	-0.0716	-0.0592	-0.0599	-0.0220	-0.0628	x	-0.0748	-0.0565	-0.0381	-0.0358	-0.0672
	0.5	-0.0189	-0.0379	-0.0110	-0.0169	-0.0352	-0.0216	-0.0140	-0.0324	-0.0267	-0.0586	-0.0593	-0.0381	-0.0223	-0.0200	-0.0235
Flexión	recta	-0.0387	-0.0601	-0.0254	-0.0278	-0.0566	-0.0441	-0.0338	-0.0496	-0.0480	-0.0586	-0.0644	-0.0358	-0.0200	-0.0416	-0.0586
	esviada	-0.0554	-0.0934	-0.0577	-0.0475	-0.0895	-0.1040	-0.0689	-0.0548	-0.0699	x	-0.0956	-0.0672	-0.0235	-0.0586	-0.0670

Tabla V.9 Análisis del ajuste: Cuadro resumen de medias.

El valor máximo de la media $\mu_{\text{máx}}=-0.0110$, el más cercano pues al modelo teórico de referencia corresponde a $\omega=0.50$ y $f_c=100$. Este valor representa una media del 1% de diferencia frente al modelo teórico de referencia.

El valor mínimo de la media $\mu_{\text{mín}}=-0.1158$, el más alejado del modelo teórico de referencia corresponde a $\omega=0.06$ y $f_c=67.5$. Este valor representa una media del 11.58% de diferencia frente al modelo teórico de referencia.

Si se analiza el parámetro que mejor ajusta corresponde a $\omega=0.50$ con una media de $\mu_{\text{máx}}=-0.0223$.

² Unión entendida como parámetro estadístico.

³ Intersección entendida como parámetro estadístico.

El parámetro con peor ajuste, en este caso con los valores más conservadores es $\omega=0.06$ con $\mu_{\min}=-0.0862$.

Se comprueba de igual forma que no existe ningún valor/parámetro de media que de un valor positivo, esto implicaría un método propuesto inseguro y por lo tanto no válido para el diseño.

V.3 Comprobación del método: verificación a nivel experimental

La verificación experimental tiene una doble vertiente: comparación de la propuesta de método con ensayos experimentales y comparación entre las normativas basándose en dichos ensayos.

Se ha buscado en la diferente bibliografía ensayos llevados a cabo sobre soportes esbeltos de hormigón armado en flexo-compresión. En una primera fase se buscaron secciones que coincidieran con el rango de secciones estudiado: en una segunda fase, se buscaron ensayos de flexo-compresión aunque tuvieran una sección diferente a las estudiadas.

Los ensayos experimentales fueron comparados con los diferentes métodos de amplificación de momentos que proponen las normativas y con la EHE, a pesar de que el caso de esta normativa no se haya desarrollado un método simplificado de amplificación de momentos.

La relación de ensayos experimentales que sirvieron para comparar fueron:

- Kim 1995, 2000
- Wang 1992
- Breen 1969
- Mavichack 1976
- Dry 1971
- Tsao 1994
- Hsu 1995
- Clae 1998
- Fost 1997
- Lloy 1996
- Sake 2001
- Clae 2000
- Chan 1963
- Molzahn
- Green
- Goy 1971
- Vie 1956
- Wu 1973
- Tsao 1994
- Hsu 1985, 87, 89
- Poston 1985

Las normativas empleadas fueron:

American Concrete Institute

Para diferenciar los dos modelos de amplificación de momentos que recoge la ACI se separó el estudio en las dos metodologías que se emplean:

$$\text{ACI - I:} \quad EI = 0.4 \cdot E_c I_c$$

$$\text{ACI - II:} \quad EI = 0.2 \cdot E_c I_c + \cdot E_s I_s$$

EuroCódigo 2

Para diferenciar los dos modelos de amplificación de momentos que recoge la EC2 se separó el estudio en las dos metodologías que se emplean:

$$EI = K_c \cdot E_c I_c + K_s \cdot E_s I_s$$

EC2 - I: En flexión esviada se amplifica cada dirección independientemente y luego se considera el momento total.

EC2 – II: En flexión esviada se amplifica el momento total.

EHE

Como ya se ha señalado, a pesar de que la EHE se basa en la excentricidad adicional [en cuanto a los métodos simplificados], se ha juzgado de interés emplearla. Para diferenciar los dos modelos de amplificación de momentos que recoge la EHE se separó el estudio en las dos metodologías que se emplean:

EHE – I: El análisis de la flexión esviada se realiza como la flexión biaxial, separando el estudio en dos ejes independientes, sin interacción entre ellos.

EHE – II:

La comprobación de flexión esviada se realizará verificando la siguiente inecuación:

$$\frac{M_{xd}}{M_{xu}} + \frac{M_{yd}}{M_{yu}} \leq 1$$

con

M_{xd} , M_{yd} componentes del momento de cálculo, en las direcciones "x" e "y" (incluyen los momentos complementarios)

M_{xu} , M_{yu} momentos de agotamiento de la sección transversal calculados en flexión recta respecto a los ejes "x" e "y"

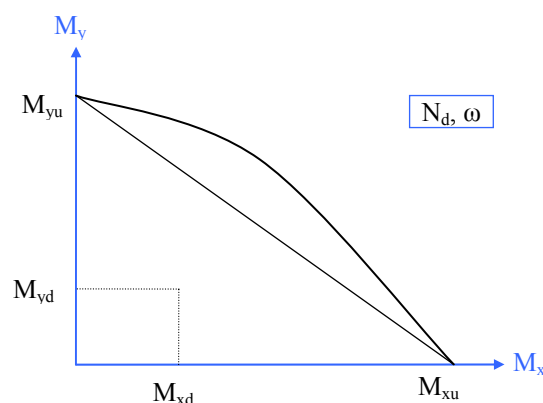


Figura V.37 Comprobación del soporte en flexo-compresión esviada [EHE].

La tipología de secciones que se estudió fue:

- Sección Rectangular
- Sección en "L"
- Sección en "T"

- Sección en “U”
- Sección Rectangular con 1 célula interior [la que se ha venido denominando como “Hueca”]
- Sección Rectangular con 2 células interiores
- Sección Rectangular con 3 células interiores
- Sección Pila Puente [composición de rectangular y circular]

La metodología será comparar la propuesta realizada con los diferentes métodos, siguiendo el esquema que se ha empleado en este capítulo. Se pretende ver el rango de validez del método con la experimentación real y su grado de precisión con respecto a otros métodos.

V.3.1 Verificación a nivel experimental: Tipología seccional

El ajuste que tiene el método propuesto con respecto a los ensayos experimentales es muy bueno.

$$\mu_{\text{propuesta}} = -0.0511$$

$$\sigma_{\text{propuesta}} = 0.2023$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 65.98%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 34.02%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 76.84%

La media que se obtiene es buena, y la desviación a pesar que es del 20% es, como se comprobará posteriormente del mismo orden de magnitud que los demás métodos.

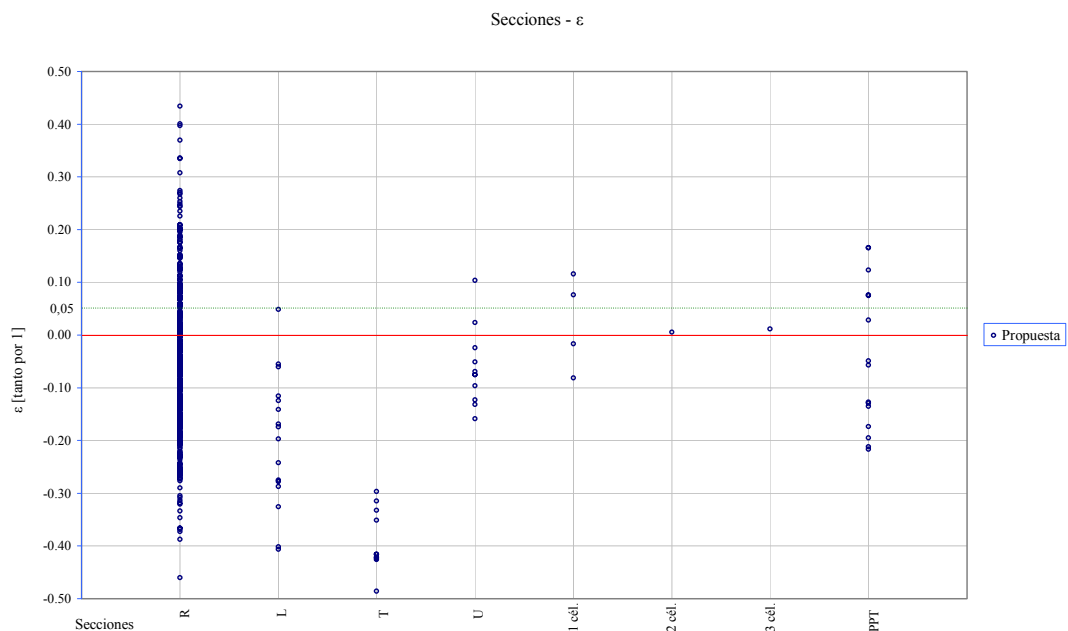


Figura V.38 Análisis ajuste: Propuesta en función de la tipología.

Como se comprueba la propuesta tiene un buen ajuste en todas las secciones a excepción de la sección en T.

	R	L	T	U	1 cel	2 cel	3 cel	PPT
$\mu_{propuesta}$	-0.0360	-0.2003	-0.4230	-0.0617	0.0231	0.0053	0.0117	-0.0442
$\sigma_{propuesta}$	0.2001	0.1225	0.0936	0.0713	0.0773	—	—	0.1342

Tabla V.10 Análisis del ajuste: Propuesta – Cuadro resumen de medias-desviaciones estándar.

Las secciones que tienen peor ajuste son la sección en “L” y en “T”, que tienen un ajuste excesivamente conservador, por lo demás el ajuste es correcto.

V.3.1.1 Verificación a nivel experimental: Tipología seccional Propuesta versus ACI-I

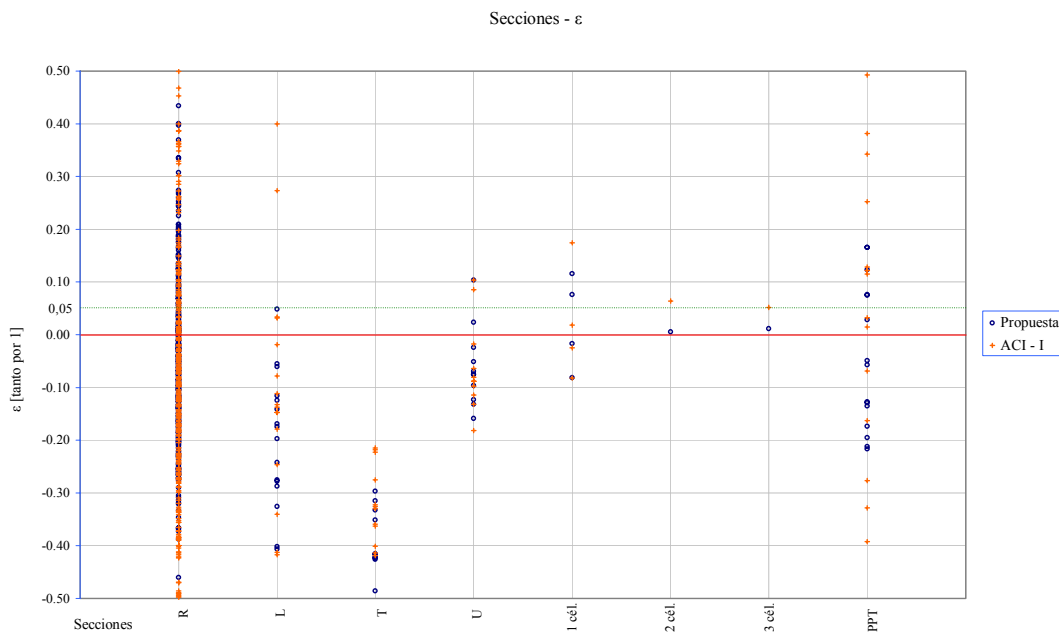


Figura V.39 Análisis ajuste: Propuesta versus ACI-I en función de la tipología.

$$\mu_{ACI-I} = -0.00922$$

$$\sigma_{ACI-I} = 0.5233$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 65.16%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 34.84%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 73.16%

La media que proporciona la ACI-I, es prácticamente idéntica a los resultados de los ensayos experimentales, pero si se analiza los demás parámetros se comprueba que tiene una desviación estándar elevada.

	R	L	T	U	1 cel	2 cel	3 cel	PPT
$\mu_{propuesta}$	-0.0360	-0.2003	-0.4230	-0.0617	0.0231	0.0053	0.0117	-0.0442
$\sigma_{propuesta}$	0.2001	0.1225	0.0936	0.0713	0.0773	—	—	0.1342
μ_{ACI-I}	0.0005	-0.1019	-0.3219	-0.0614	0.0213	0.0638	0.0518	0.0852
σ_{ACI-I}	0.5510	0.2124	0.0717	0.0832	0.0952	—	—	0.2906

Tabla V.11 Análisis del ajuste: Propuesta versus ACI-I

Cuadro resumen de medias-desviaciones estándar.

De la tabla de medias se comprueba que tiene un buen ajuste en casi todas las secciones pero que la desviación estándar es elevada en casi todas.

El modelo propuesto tiene mejores resultados que los de la ACI-I, ya que el método de la ACI-I tiene una gran variabilidad.

V.3.1.2 Verificación a nivel experimental: Tipología seccional Propuesta versus ACI-II

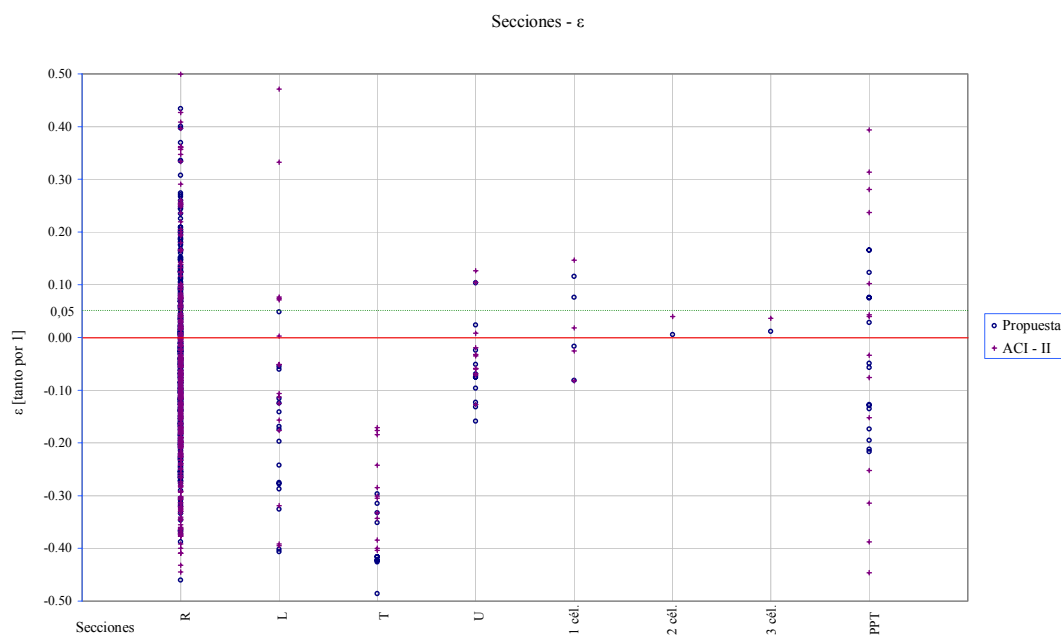


Figura V.40 Análisis ajuste: Propuesta versus ACI-II en función de la tipología.

$$\mu_{ACI-II} = +0.0373$$

$$\sigma_{ACI-II} = 0.5503$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 67.01%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 32.99%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 74.80%

La media que proporciona la ACI-II, está del lado de la inseguridad además de tener una gran variabilidad.

	R	L	T	U	1 cel	2 cel	3 cel	PPT
$\mu_{propuesta}$	-0.0360	-0.2003	-0.4230	-0.0617	0.0231	0.0053	0.0117	-0.0442
$\sigma_{propuesta}$	0.2001	0.1225	0.0936	0.0713	0.0773	—	—	0.1342
μ_{ACI-II}	0.0523	-0.0536	-0.2939	-0.0212	0.0144	0.0399	0.0362	0.0200
σ_{ACI-II}	0.5800	0.2257	0.0812	0.0724	0.0844	—	—	0.2878

Tabla V.12 Análisis del ajuste: Propuesta versus ACI-II
Cuadro resumen de medias-desviaciones estándar.

De la tabla de medias se comprueba que tiene un ajuste moderado en casi todas las secciones, pero en sección rectangular ese valor está del lado de la seguridad, acompañado de una desviación estándar elevada.

El modelo propuesto tiene mejores resultados que los de la ACI-II.

V.3.1.3 Verificación a nivel experimental: Tipología seccional Propuesta versus EC2-I

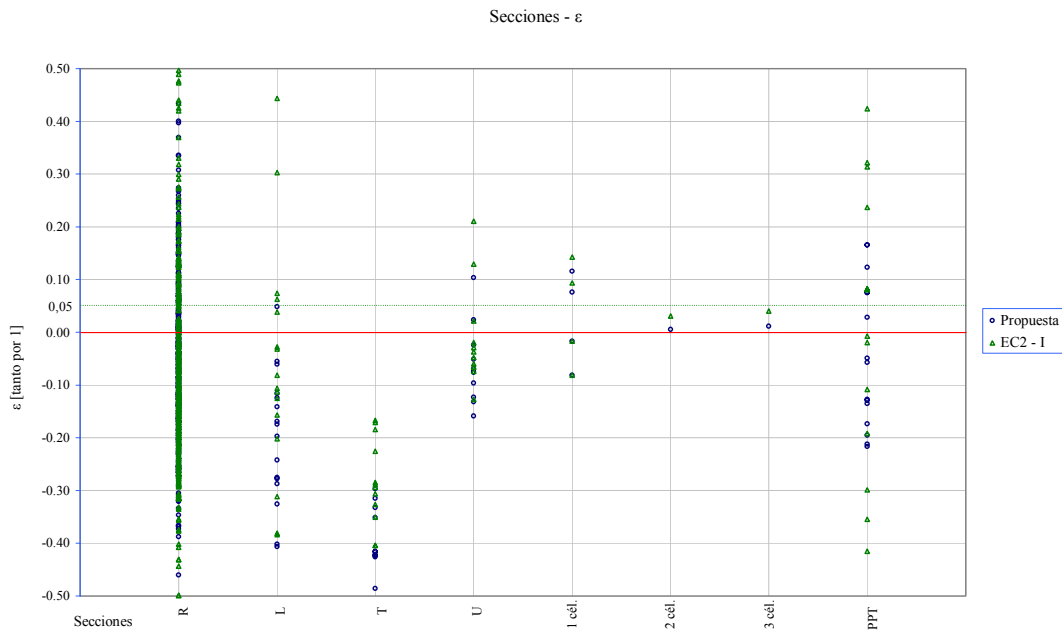


Figura V.41 Análisis ajuste: Propuesta versus EC2-I en función de la tipología.

$$\mu_{EC2-I} = +0.0222$$

$$\sigma_{EC2-I} = 0.4736$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 67.01%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 32.99%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 72.13%

Los resultados obtenidos por la EC2-I, son peores que los de la propuesta: la media de los resultados está del lado de la inseguridad además de tener una desviación estándar elevada.

	R	L	T	U	1 cel	2 cel	3 cel	PPT
$\mu_{propuesta}$	-0.0360	-0.2003	-0.4230	-0.0617	0.0231	0.0053	0.0117	-0.0442
$\sigma_{propuesta}$	0.2001	0.1225	0.0936	0.0713	0.0773	—	—	0.1342
μ_{EC2-I}	0.0336	-0.0624	-0.2839	-0.0090	0.0346	0.0313	0.0407	0.0487
σ_{EC2-I}	0.4976	0.2150	0.0794	0.0929	0.0884	—	—	0.2829

Tabla V.13 Análisis del ajuste: Propuesta versus EC2-I

Cuadro resumen de medias-desviaciones estándar.

De la tabla de medias se comprueba que tiene un mal ajuste en secciones rectangular y un buen ajuste en sección en L, T y U. En las secciones celulares y Pila

puede el método propuesto otorga mejores resultados, así como los de sección rectangular.

El modelo propuesto tiene mejores resultados que los de la EC2–I.

V.3.1.4 Verificación a nivel experimental: Tipología seccional Propuesta versus EC2-II

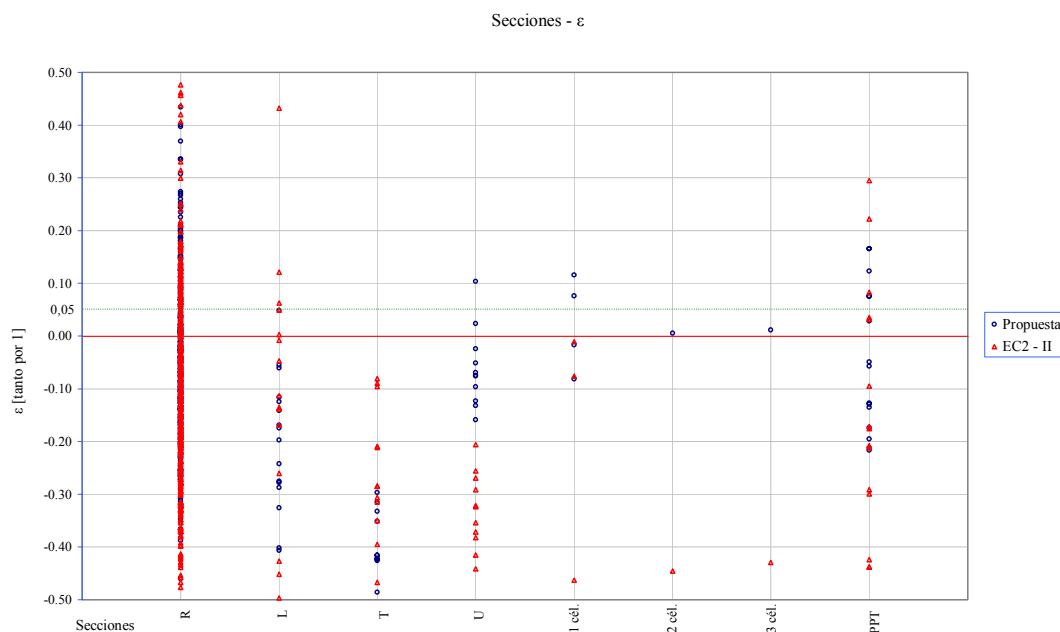


Figura V.42 Análisis ajuste: Propuesta versus EC2-II en función de la tipología.

$$\mu_{EC2-II} = -0.0579$$

$$\sigma_{EC2-II} = 0.3284$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 72.34%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 27.66%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 77.83%

Los resultados obtenidos por la EC2–II, son similares a los de la propuesta: la media de los resultados está en los mismos niveles, aunque la desviación estándar es ligeramente superior.

	R	L	T	U	1 cel	2 cel	3 cel	PPT
$\mu_{propuesta}$	-0.0360	-0.2003	-0.4230	-0.0617	0.0231	0.0053	0.0117	-0.0442
$\sigma_{propuesta}$	0.2001	0.1225	0.0936	0.0713	0.0773	—	—	0.1342
μ_{EC2-II}	-0.0411	-0.0624	-0.2574	-0.3302	-0.0008	-0.4454	-0.4295	-0.1391
σ_{EC2-II}	0.3351	0.2811	0.1186	0.0681	0.3605	—	—	0.2236

Tabla V.14 Análisis del ajuste: Propuesta versus EC2–II
Cuadro resumen de medias-desviaciones estándar.

De la tabla de medias se comprueba que tiene un mal ajuste en secciones en U y en las de 2 y 3 células. Tiene un ajuste similar para las rectangulares, y mejora la propuesta para las de L y T.

El modelo propuesto tiene unos resultados similares a los del EC2-II.

V.3.1.5 Verificación a nivel experimental: Tipología seccional Propuesta versus EHE-I

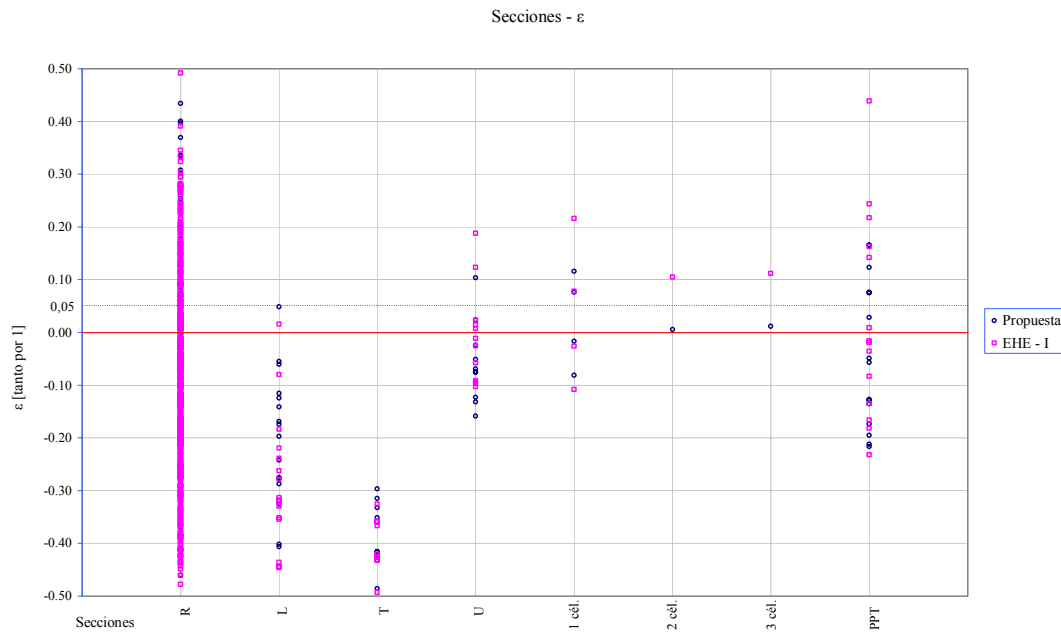


Figura V.43 Análisis ajuste: Propuesta versus EHE-I en función de la tipología.

$$\mu_{EHE-I} = -0.0897$$

$$\sigma_{EHE-I} = 0.2145$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 67.42%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 32.58%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 75.20%

Los resultados obtenidos por la EHE-I, son peores a los de la propuesta: la media de los resultados está por encima, aunque la desviación estándar es similar.

	R	L	T	U	1 cel	2 cel	3 cel	PPT
$\mu_{propuesta}$	-0.0360	-0.2003	-0.4230	-0.0617	0.0231	0.0053	0.0117	-0.0442
$\sigma_{propuesta}$	0.2001	0.1225	0.0936	0.0713	0.0773	—	—	0.1342
μ_{EHE-I}	-0.0824	-0.2850	-0.4343	-0.0026	0.0399	0.1049	0.1120	0.0616
σ_{EHE-I}	0.2085	0.1219	0.0806	0.0869	0.1212	—	—	0.2260

Tabla V.15 Análisis del ajuste: Propuesta versus EHE-I
Cuadro resumen de medias-desviaciones estándar.

De la tabla de medias se comprueba que tiene un peor ajuste en casi todas las piezas y la desviación estándar es ligeramente peor.

El modelo propuesto tiene uno mejor ajuste que la EHE-I.

V.3.1.6 Verificación a nivel experimental: Tipología seccional Propuesta versus EHE-II

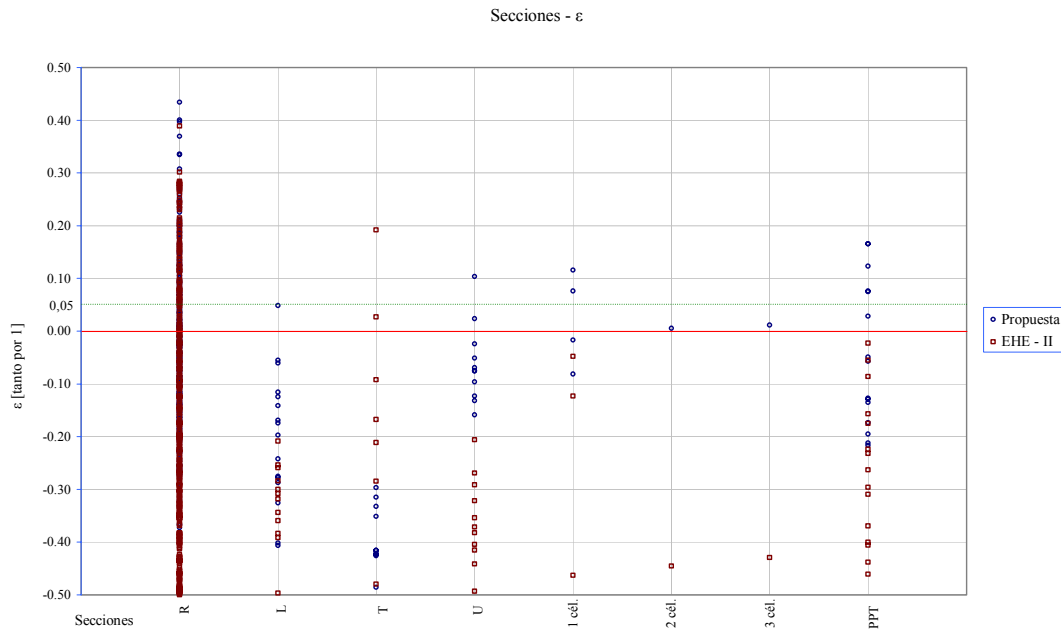


Figura V.44 Análisis ajuste: Propuesta versus EHE-II en función de la tipología.

$$\mu_{EHE-II} = -0.1835$$

$$\sigma_{EHE-II} = 0.2627$$

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad: 76.23%

Porcentaje de puntos del lado inseguridad: 23.77%

Porcentaje de puntos del lado de la seguridad*: 80.74%

Los resultados obtenidos por la EHE-II, son peores que los de la propuesta: la media de los resultados es muy superior [es muy conservadora] y la desviación estándar es ligeramente superior.

	R	L	T	U	1 cel	2 cel	3 cel	PPT
$\mu_{propuesta}$	-0.0360	-0.2003	-0.4230	-0.0617	0.0231	0.0053	0.0117	-0.0442
$\sigma_{propuesta}$	0.2001	0.1225	0.0936	0.0713	0.0773	—	—	0.1342
μ_{EHE-II}	-0.1856	-0.2041	0.1654	-0.3591	-0.0274	-0.4454	-0.4295	-0.2597
σ_{EHE-II}	0.2462	0.4164	0.4065	0.0788	0.3550	—	—	0.1359

Tabla V.16 Análisis del ajuste: Propuesta versus EHE-II
Cuadro resumen de medias-desviaciones estándar.

De la tabla de medias se comprueba que tiene un peor ajuste en casi todas las piezas y la desviación estándar es ligeramente peor.

El modelo propuesto tiene uno mejor ajuste que la EHE-II.

V.3.2 Verificación a nivel experimental: Esbeltez

El objetivo de este apartado es comprobar la validez de los diferentes métodos y la propuesta, para simplificar el análisis se van a desestimar aquellas propuestas que a nivel seccional daban malos resultados.

$$\begin{aligned}\mu_{\text{propuesta}, \lambda < 35} &= -0.0924 \\ \sigma_{\text{propuesta}, \lambda < 35} &= 0.1301\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{\text{propuesta}, 35 < \lambda < 67.5} &= -0.0712 \\ \sigma_{\text{propuesta}, 35 < \lambda < 67.5} &= 0.2078\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{\text{propuesta}, 67.5 < \lambda < 100} &= -0.0138 \\ \sigma_{\text{propuesta}, 67.5 < \lambda < 100} &= 0.1580\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{\text{propuesta}, \lambda > 100} &= 0.0175 \\ \sigma_{\text{propuesta}, \lambda > 100} &= 0.2784\end{aligned}$$

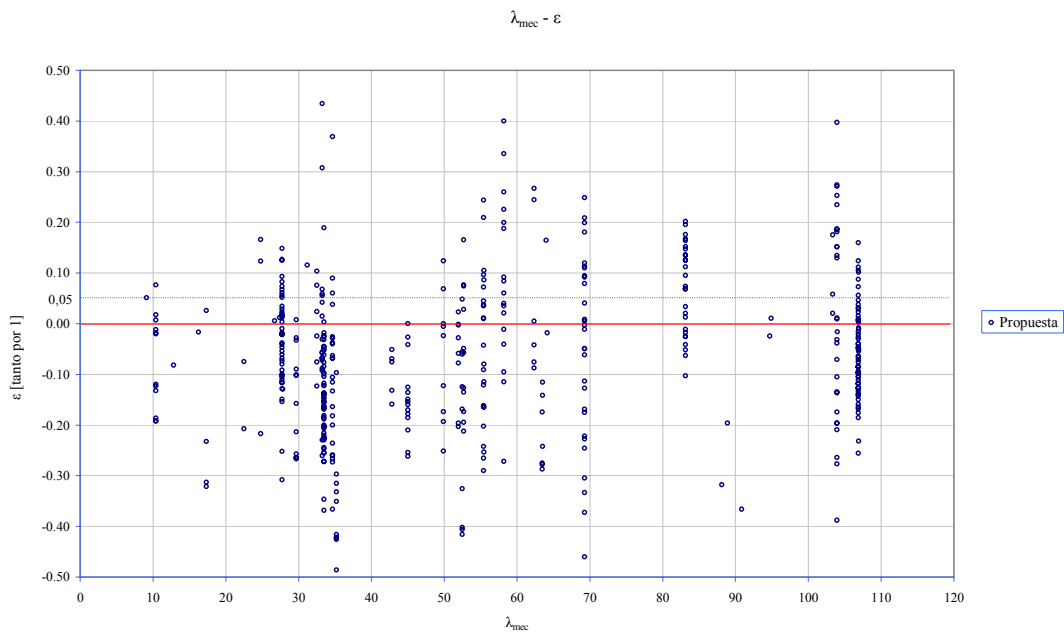


Figura V.45 Análisis ajuste: Propuesta en función de la esbeltez.

Los mejores ajustes están para esbelteces superiores a 67.5, y los peores se obtienen con rango de esbelteces pequeñas: sucediendo todo lo contrario en la comprobación que se hizo a nivel numérico con el modelo teórico de referencia.

V.3.2.1 Verificación a nivel experimental: Esbeltez – Propuesta versus EC2-I

Entre paréntesis y con color verde se indica el valor que se obtuvo para el método propuesto.

$$\mu_{EC2-I, \lambda < 35} = -0.1000 \text{ (-0.0924)}$$

$$\sigma_{EC2-I, \lambda < 35} = 0.1589 \text{ (0.1301)}$$

$$\mu_{EC2-I, 35 < \lambda < 67.5} = 0.0334 \text{ (-0.0712)}$$

$$\sigma_{EC2-I, 35 < \lambda < 67.5} = 0.3237 \text{ (0.2078)}$$

$$\mu_{EC2-I, 67.5 < \lambda < 100} = -0.0208 \text{ (-0.0138)}$$

$$\sigma_{EC2-I, 67.5 < \lambda < 100} = 0.2298 \text{ (0.1580)}$$

$$\mu_{EC2-I, \lambda > 100} = 0.2318 \text{ (0.0175)}$$

$$\sigma_{EC2-I, \lambda > 100} = 0.8396 \text{ (0.2784)}$$

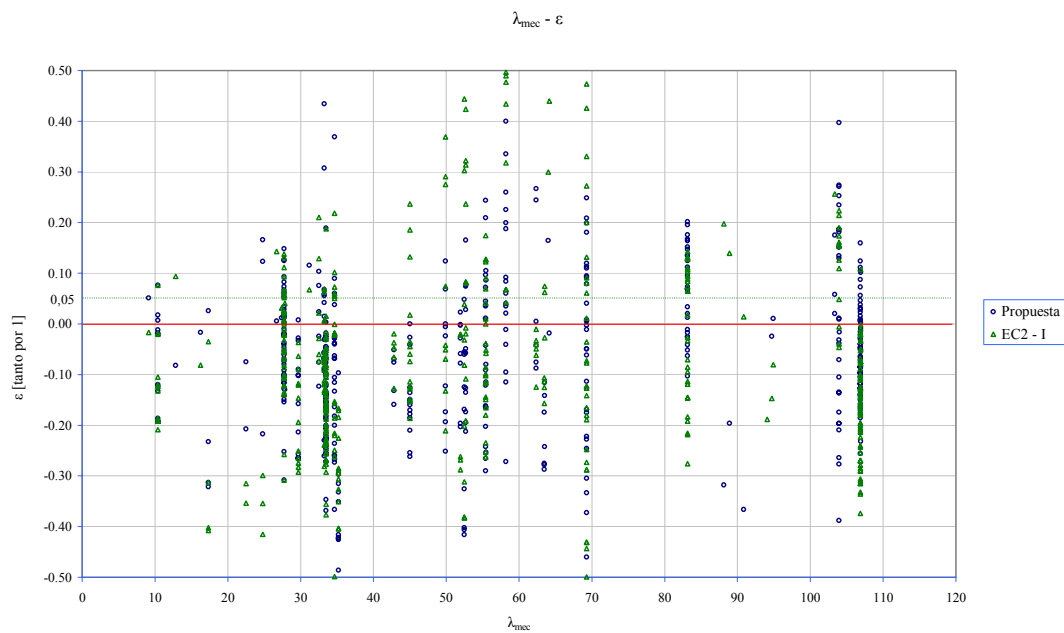


Figura V.46 Análisis ajuste: Propuesta versus EC2-I en función de la esbeltez.

Los mejores ajustes están de nuevo con el modelo propuesto, dando valores similares a los del EC2-I, a excepción de para esbelteces superiores a 100, en los que el EC2-I está muy del lado de la inseguridad.

V.3.2.2 Verificación a nivel experimental: Esbeltez – Propuesta versus EC2-II

Entre paréntesis y con color verde se indica el valor que se obtuvo para el método propuesto.

$$\mu_{EC2-II, \lambda < 35} = -0.1583 \text{ (-0.0924)}$$

$$\sigma_{EC2-II, \lambda < 35} = 0.1819 \text{ (0.1301)}$$

$$\mu_{EC2-II, 35 < \lambda < 67.5} = -0.0209 \text{ (-0.0712)}$$

$$\sigma_{EC2-II, 35 < \lambda < 67.5} = 0.3464 \text{ (0.2078)}$$

$$\mu_{EC2-II, 67.5 < \lambda < 100} = -0.0694 \text{ (-0.0138)}$$

$$\sigma_{EC2-II, 67.5 < \lambda < 100} = 0.2103 \text{ (0.1580)}$$

$$\mu_{EC2-II, \lambda > 100} = 0.0704 \text{ (0.0175)}$$

$$\sigma_{EC2-II, \lambda > 100} = 0.4654 \text{ (0.2784)}$$

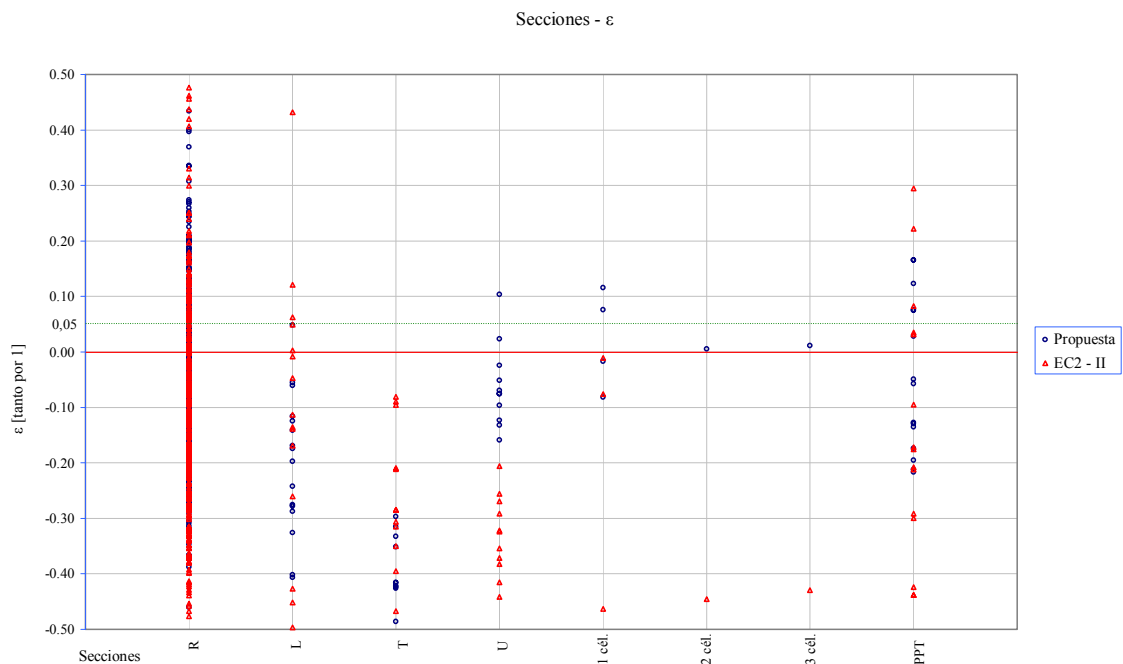


Figura V.47 Análisis ajuste: Propuesta versus EC2-II en función de la esbeltez.

Los mejores ajustes están de nuevo con el modelo propuesto, a excepción del rango de esbelteces entre [35, 67.5] que el EC2-II, tiene mejor resultado aunque a costa de una mayor dispersión.

V.3.2.3 Verificación a nivel experimental: Esbeltez – Propuesta versus EHE-I

Entre paréntesis y con color verde se indica el valor que se obtuvo para el método propuesto.

$$\mu_{\text{EHE-I}, \lambda < 35} = -0.0821 \text{ (-0.0924)}$$

$$\sigma_{\text{EHE-I}, \lambda < 35} = 0.1473 \text{ (0.1301)}$$

$$\mu_{\text{EHE-I}, 35 < \lambda < 67.5} = -0.0847 \text{ (-0.0712)}$$

$$\sigma_{\text{EHE-I}, 35 < \lambda < 67.5} = 0.2237 \text{ (0.2078)}$$

$$\mu_{\text{EHE-I}, 67.5 < \lambda < 100} = 0.0277 \text{ (-0.0138)}$$

$$\sigma_{\text{EHE-I}, 67.5 < \lambda < 100} = 0.2521 \text{ (0.1580)}$$

$$\mu_{\text{EHE-I}, \lambda > 100} = -0.1724 \text{ (0.0175)}$$

$$\sigma_{\text{EHE-I}, \lambda > 100} = 0.2383 \text{ (0.2784)}$$

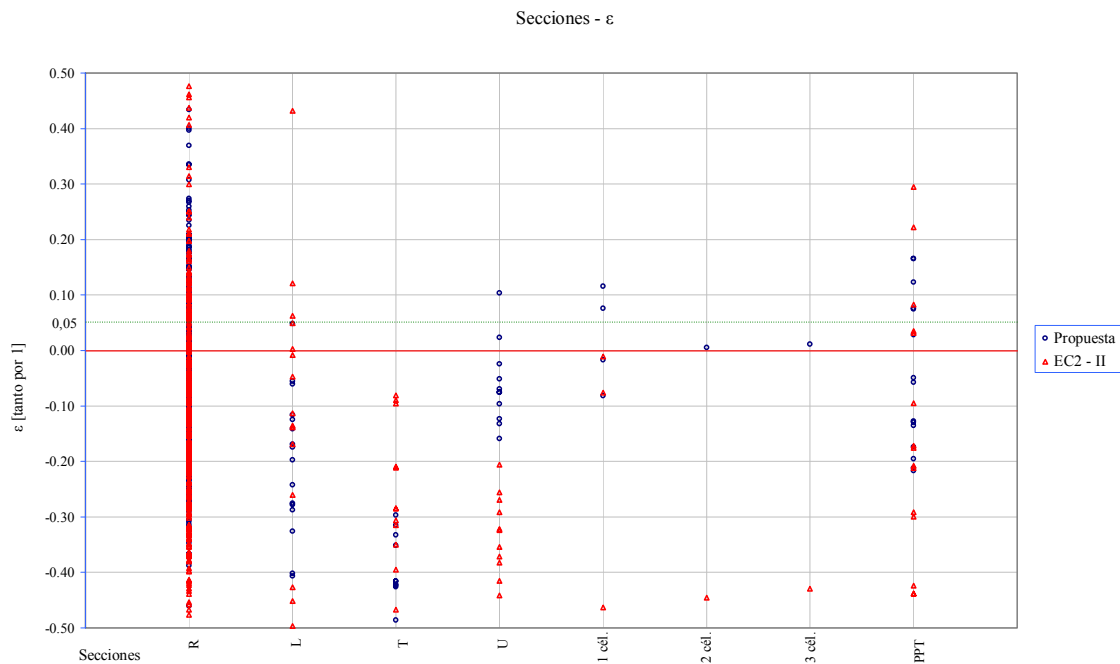


Figura V.48 Análisis ajuste: Propuesta versus EC2-II en función de la esbeltez.

Los mejores ajustes están de nuevo con el modelo propuesto, a excepción del rango de esbelteces menores de 35 que el EHE-I que tiene una media ligeramente más ajustada.

V.3.3 Verificación a nivel experimental: Resistencia del hormigón

El parámetro que ahora servirá de comparación, será la resistencia del hormigón. Primero se analizará el comportamiento de la propuesta sobre los ensayos experimentales, para más tarde compararla con las normativas que daban mejor ajuste.

Debido a que las resistencias de los hormigones corresponden a ensayos experimentales, se ha optado por clasificar en función del tipo de hormigón:

NSC, *normal strength concrete*, hormigón de resistencia normal para hormigones de resistencia menor de 50 MPa.

HSC, *high strength concrete*, hormigón de alta resistencia para hormigones de resistencia mayor de 50 MPa.

$$\begin{aligned}\mu_{\text{propuesta, NSC } f_c < 50} &= -0.0504 \\ \sigma_{\text{propuesta, NSC } f_c < 50} &= 0.1986\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{\text{propuesta, HSC } f_c > 50} &= -0.0524 \\ \sigma_{\text{propuesta, HSC } f_c > 50} &= 0.2087\end{aligned}$$

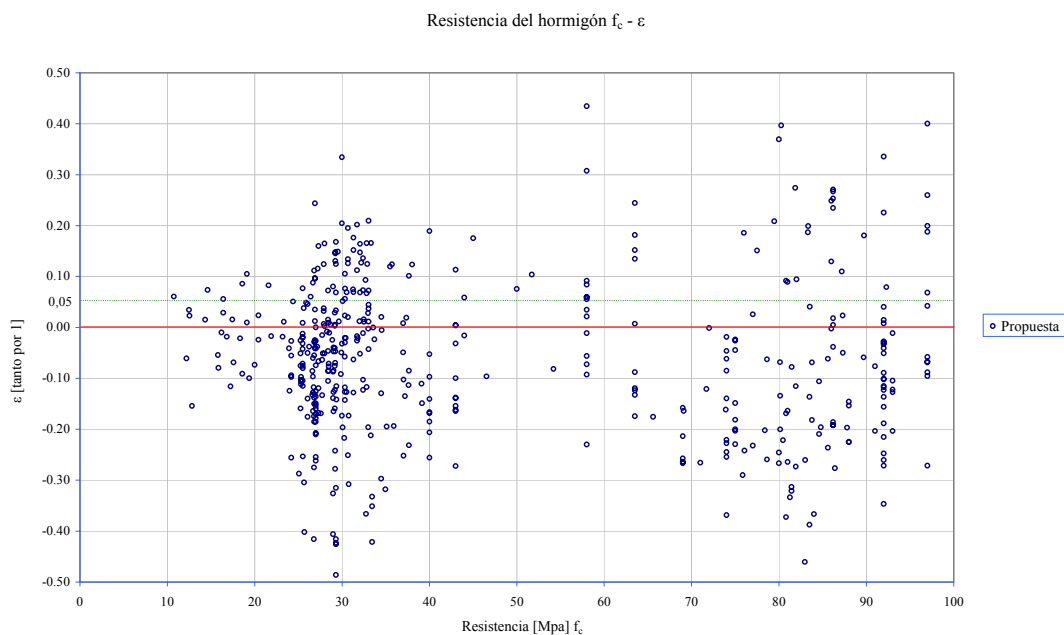


Figura V.49 Análisis ajuste: Propuesta en función de la resistencia del hormigón f_c .

El comportamiento es bueno en los dos casos, comportándose de manera similar los dos tipos de hormigón, no hay grandes diferencias entre ninguno y la desviación es similar en ambos casos. El ajuste que se produce a partir de la propuesta formulada es adecuado.

V.3.3.1 Verificación a nivel experimental: Resistencia f_c – Propuesta versus EC2-I

Entre paréntesis y con color verde se indica el valor que se obtuvo para el método propuesto.

$$\mu_{EC2-I, NSC f_c < 50} = -0.0443 \text{ (-0.0504)}$$

$$\sigma_{EC2-I, NSC f_c < 50} = 0.2026 \text{ (0.1986)}$$

$$\mu_{EC2-I, HSC f_c > 50} = 0.1390 \text{ (-0.0524)}$$

$$\sigma_{EC2-I, HSC f_c > 50} = 0.7245 \text{ (0.2087)}$$

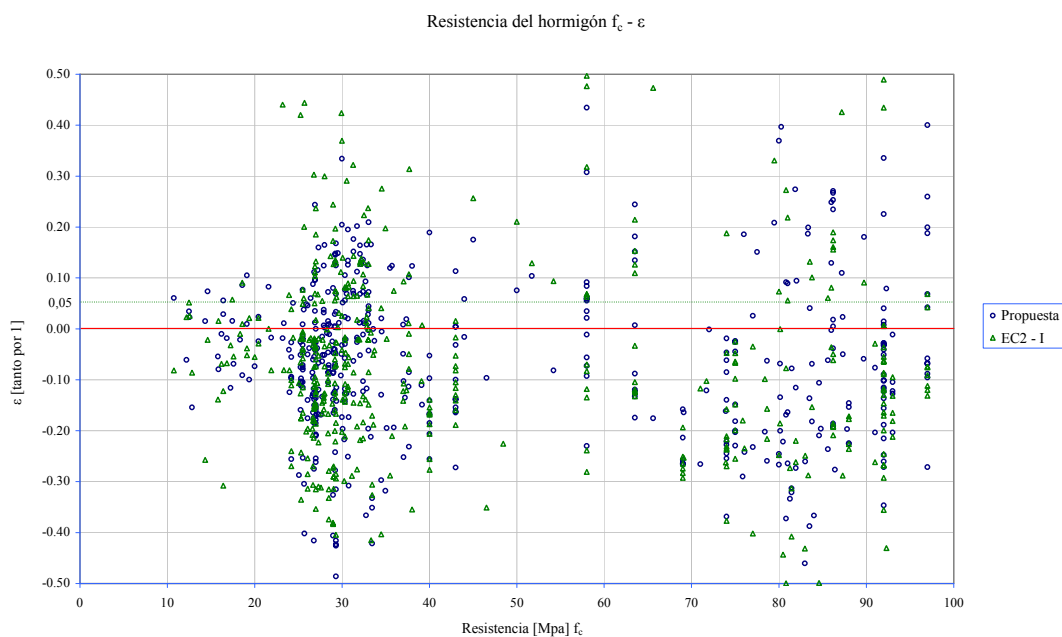


Figura V.50 Análisis ajuste: Propuesta versus EC2-I en función de la resistencia del hormigón f_c .

El comportamiento es bueno en el caso de NSC, en el que los resultados que tiene el EC2-I es parecido a la propuesta formulada. En cambio para hormigones HSC, el EC2-I está del lado de la inseguridad con unos valores que no son aceptables [del 14%].

Se puede concluir que el modelo propuesto es significativamente superior a la fórmula que propone el EC2-I.

V.3.3.2 Verificación a nivel experimental: Resistencia f_c – Propuesta versus EC2-II

Entre paréntesis y con color verde se indica el valor que se obtuvo para el método propuesto.

$$\mu_{EC2-II, NSC f_c < 50} = -0.0885 \text{ (-0.0504)}$$

$$\sigma_{EC2-II, NSC f_c < 50} = 0.2108 \text{ (0.1986)}$$

$$\mu_{EC2-II, HSC f_c > 50} = -0.0042 \text{ (-0.0524)}$$

$$\sigma_{EC2-II, HSC f_c > 50} = 0.4635 \text{ (0.2087)}$$

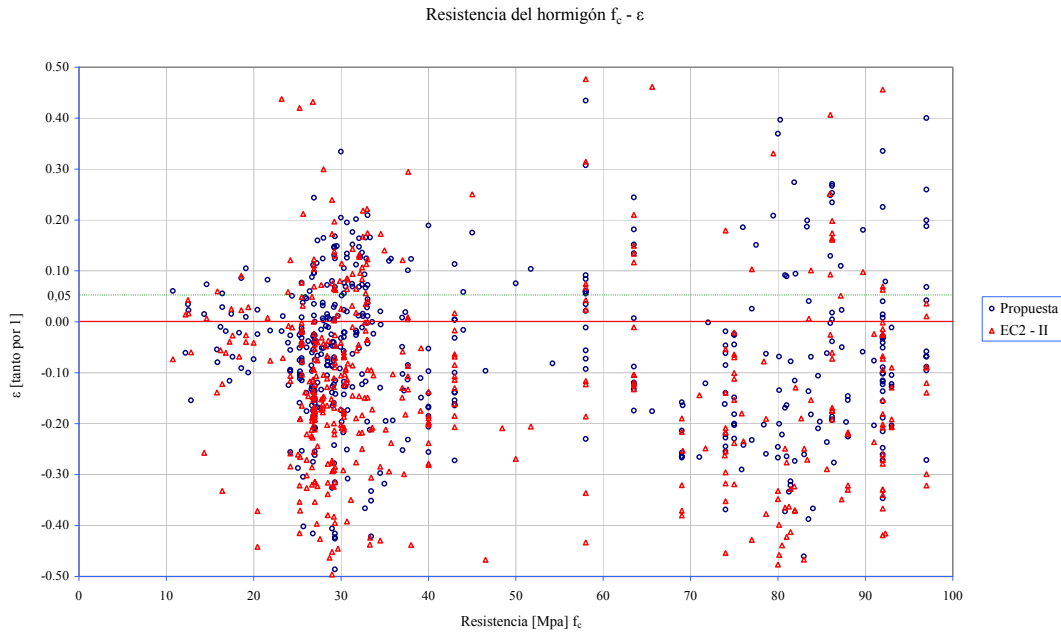


Figura V.51 Análisis ajuste: Propuesta versus EC2-II en función de la resistencia del hormigón f_c .

El comportamiento es bueno en tanto en el caso de NSC, como en el de HSC. En HSC mejora los resultados de la propuesta en cuanto a media, pero a costa de tener una gran dispersión en los resultados. En hormigones de resistencia normal la propuesta da mejores resultados. La conclusión que se puede extraer es que tanto el EC2-II como la propuesta obtienen buenas aproximaciones.

V.3.3.3 Verificación a nivel experimental: Resistencia f_c – Propuesta versus EHE-I

Entre paréntesis y con color verde se indica el valor que se obtuvo para el método propuesto.

$$\mu_{EHE-I, NSC f_c < 50} = -0.0927 \text{ (-0.0504)}$$

$$\sigma_{EHE-I, NSC f_c < 50} = 0.2220 \text{ (0.1986)}$$

$$\mu_{EHE-I, HSC f_c > 50} = -0.0844 \text{ (-0.0524)}$$

$$\sigma_{EHE-I, HSC f_c > 50} = 0.2007 \text{ (0.2087)}$$

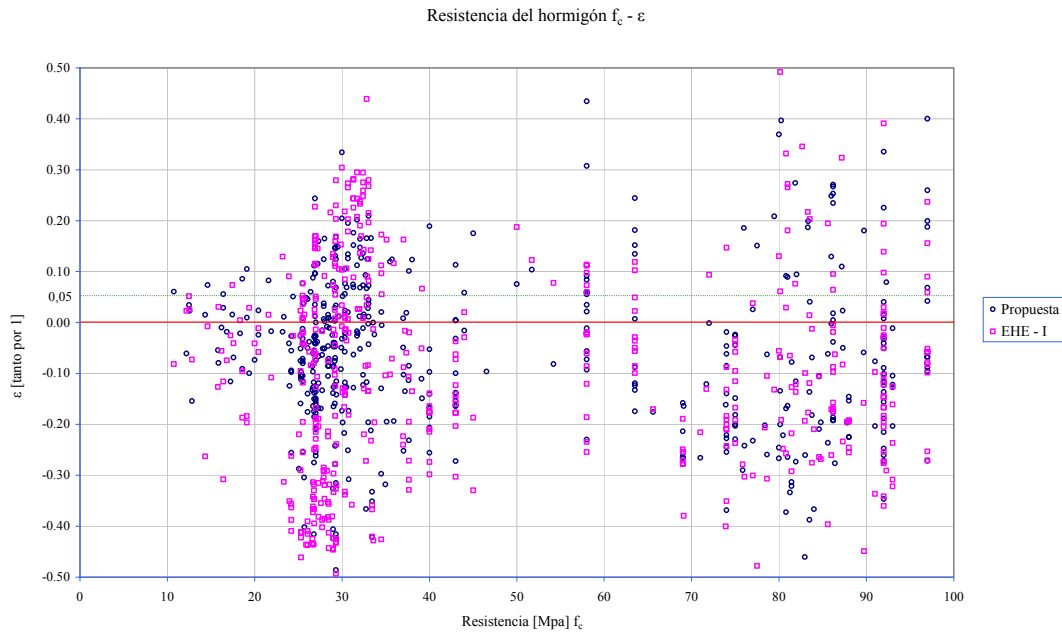


Figura V.52 Análisis ajuste: Propuesta versus EHE-I en función de la resistencia del hormigón f_c .

El comportamiento es bueno en los dos casos tanto en NSC como en HSC, aunque los resultados que obtiene el EHE-I están menos ajustados [mucho más del lado de la seguridad] que los obtenidos por la propuesta: el modelo propuesto mejora la fórmula que propone la EHE-I.

V.3.4 Verificación a nivel experimental: Fluencia

El parámetro de fluencia φ sirve para analizar el comportamiento del soporte a lo largo del tiempo: cargas instantáneas si $\varphi=0$ o diferidas siempre que $\varphi \neq 0$. Se ha dividido el estudio de la fluencia en función del nivel de fluencia:

- $\varphi = 0$ [instantáneas]
- $\varphi \leq 1$
- $\varphi > 1$

$$\mu_{\text{propuesta}, \varphi = 0} = -0.0700$$

$$\sigma_{\text{propuesta}, \varphi = 0} = 0.1944$$

$$\mu_{\text{propuesta}, \varphi \leq 1} = -0.0623$$

$$\sigma_{\text{propuesta}, \varphi \leq 1} = 0.2492$$

$$\mu_{\text{propuesta}, \varphi > 1} = 0.0107$$

$$\sigma_{\text{propuesta}, \varphi > 1} = 0.1882$$

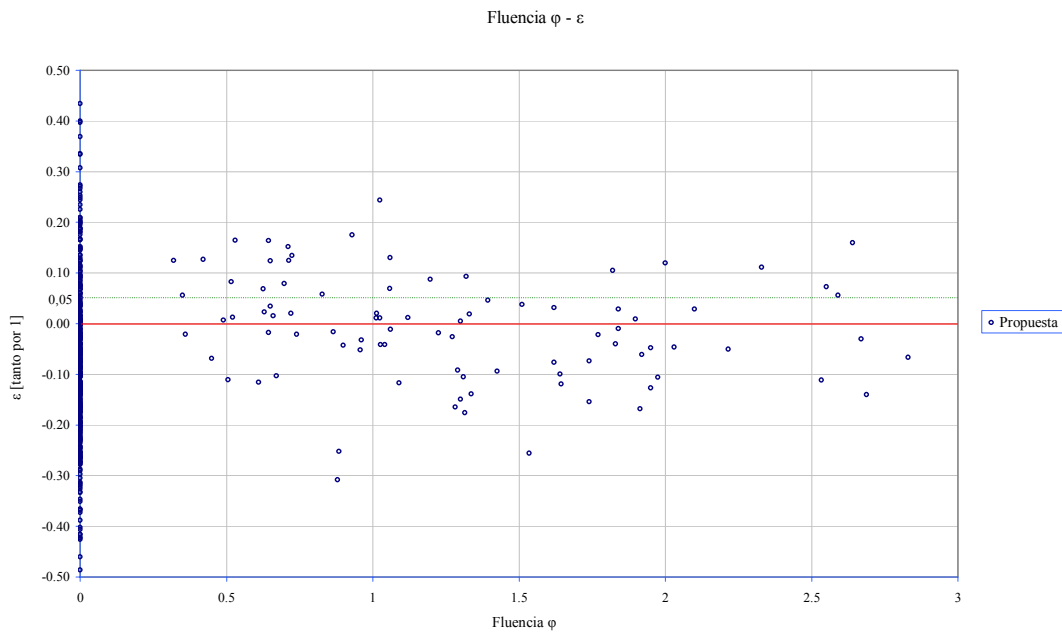


Figura V.53 Análisis ajuste: Propuesta en función del nivel de fluencia ϕ .

El comportamiento es bueno en los casos de fluencia 0 y fluencia menor que 1. En el caso de fluencia mayor que 1, a pesar de que está del lado de la inseguridad pero dentro del margen del +5% que se había estado dando como margen de validez.

Los resultados son muy buenos en los casos en los que $\phi \leq 1$, tanto en valores de media como desviación estándar. Esto concuerda con el estudio que se llevo a cabo de verificación numérica y gráfica.

V.3.4.1 Verificación a nivel experimental: Fluencia ϕ – Propuesta versus EC2-I

Entre paréntesis y con color verde se indica el valor que se obtuvo para el método propuesto.

$$\begin{aligned} \mu_{EC2-I, \phi=0} &= 0.0394 \text{ (-0.0700)} \\ \sigma_{EC2-I, \phi=0} &= 0.5087 \text{ (0.1944)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{EC2-I, \phi \leq 1} &= 0.0330 \text{ (-0.0623)} \\ \sigma_{EC2-I, \phi \leq 1} &= 0.3041 \text{ (0.2492)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{EC2-I, \phi > 1} &= -0.1038 \text{ (0.0107)} \\ \sigma_{EC2-I, \phi > 1} &= 0.2179 \text{ (0.1882)} \end{aligned}$$

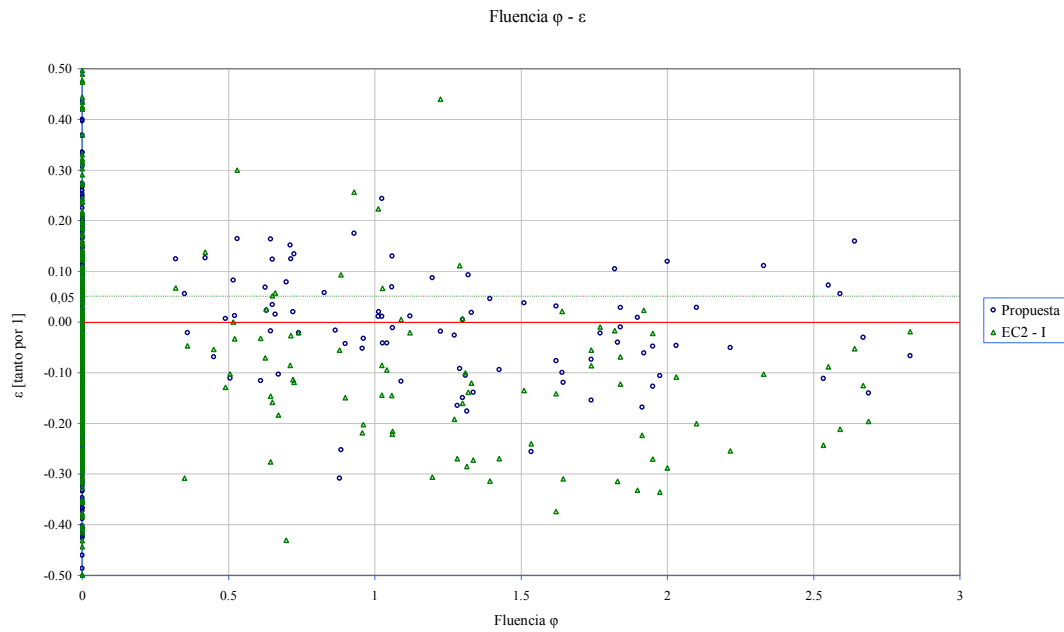


Figura V.54 Análisis ajuste: Propuesta versus EC2-I en función de la fluencia ϕ .

El comportamiento de la EC2-I sólo mejora el resultado de la propuesta para valores de fluencia mayores de la unidad. En los demás casos no sólo empeora los resultados del modelo propuesto, si no que está del lado de la inseguridad además de tener una gran variabilidad. Se puede concluir que el modelo propuesto es superior a la fórmula que propone el EC2-I, excepción hecha de valores de fluencia superiores a 1.

V.3.4.2 Verificación a nivel experimental: Fluencia ϕ – Propuesta versus EC2-II

Entre paréntesis y con color verde se indica el valor que se obtuvo para el método propuesto.

$$\mu_{EC2-II, \phi=0} = -0.0569 \text{ (-0.0700)}$$

$$\sigma_{EC2-II, \phi=0} = 0.3413 \text{ (0.1944)}$$

$$\mu_{EC2-II, \phi \leq 1} = 0.0258 \text{ (-0.0623)}$$

$$\sigma_{EC2-II, \phi \leq 1} = 0.3050 \text{ (0.2492)}$$

$$\mu_{EC2-II, \phi > 1} = -0.1162 \text{ (0.0107)}$$

$$\sigma_{EC2-II, \phi > 1} = 0.2225 \text{ (0.1882)}$$

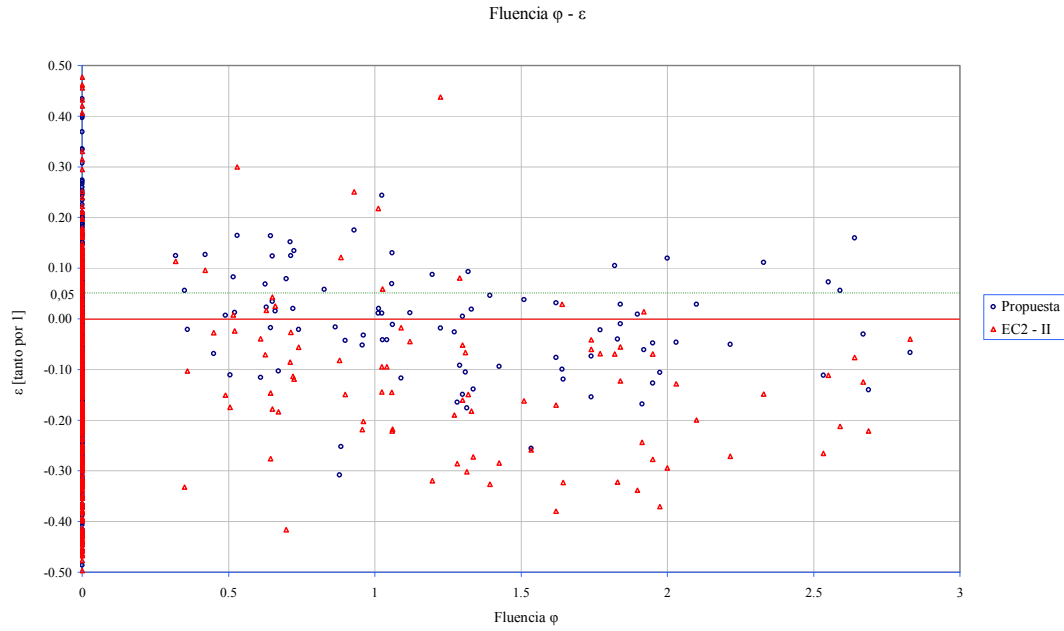


Figura V.55 Análisis ajuste: Propuesta versus EC2-II en función de la fluencia ϕ .

El comportamiento de la EC2-II mejora el resultado de la propuesta para valores de fluencia mayores de la unidad y para fluencia instantánea. En los casos de fluencia menor que 1, está ligeramente del lado de la inseguridad. Se puede decir que en cuanto a fluencia, la propuesta realizada y la EC2-II tienen un comportamiento similar.

V.3.4.3 Verificación a nivel experimental: Fluencia ϕ – Propuesta versus EHE-I

Entre paréntesis y con color verde se indica el valor que se obtuvo para el método propuesto.

$$\begin{aligned} \mu_{\text{EHE-I}, \phi=0} &= -0.0981 \text{ (-0.0700)} \\ \sigma_{\text{EHE-I}, \phi=0} &= 0.2123 \text{ (0.1944)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\text{EHE-I}, \phi \leq 1} &= 0.0391 \text{ (-0.0623)} \\ \sigma_{\text{EHE-I}, \phi \leq 1} &= 0.1784 \text{ (0.2492)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\text{EHE-I}, \phi > 1} &= -0.1104 \text{ (0.0107)} \\ \sigma_{\text{EHE-I}, \phi > 1} &= 0.2246 \text{ (0.1882)} \end{aligned}$$

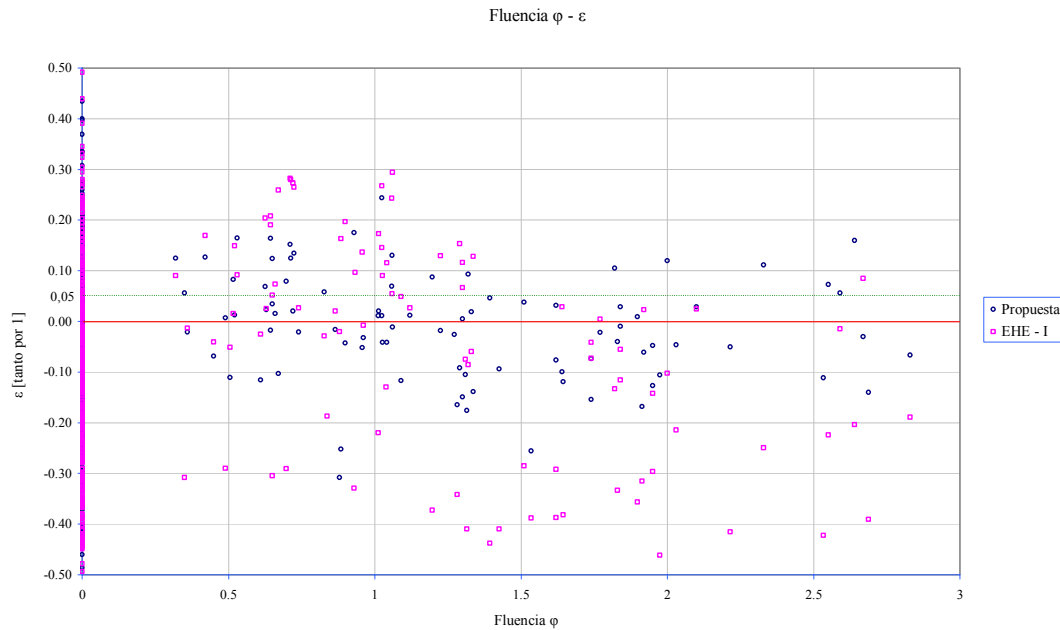


Figura V.56 Análisis ajuste: Propuesta versus EHE-I en función de la fluencia ϕ .

El comportamiento de la EHE-I sólo mejora el resultado de la propuesta para valores de fluencia mayores de la unidad. En los demás casos está con valores ligeramente más conservadores que los de la propuesta [$\phi=0$] o del lado de la inseguridad [$\phi \leq 1$]. Se puede decir que en cuanto a fluencia, la propuesta realizada mejora la EHE-I.

V.3.5 Verificación a nivel experimental: Cuantía de armado

El estudio de la cuantía se ha dividido en tres diferentes intervalos para intentar aproximar el estudio de los ensayos experimentales a la metodología de parámetros empleada en el estudio:

- $\omega \leq 0.10$ [baja cuantía de armado]
- $0.10 < \omega < 0.50$ [media cuantía de armado]
- $\omega \geq 0.50$ [alta cuantía de armado]

$$\mu_{\text{propuesta}, \omega \leq 0.10} = 0.0766$$

$$\sigma_{\text{propuesta}, \omega \leq 0.10} = 0.2083$$

$$\mu_{\text{propuesta}, 0.10 < \omega < 0.50} = -0.0422$$

$$\sigma_{\text{propuesta}, 0.10 < \omega < 0.50} = 0.2018$$

$$\mu_{\text{propuesta}, \omega \geq 0.50} = -0.1416$$

$$\sigma_{\text{propuesta}, \omega \geq 0.50} = 0.1636$$

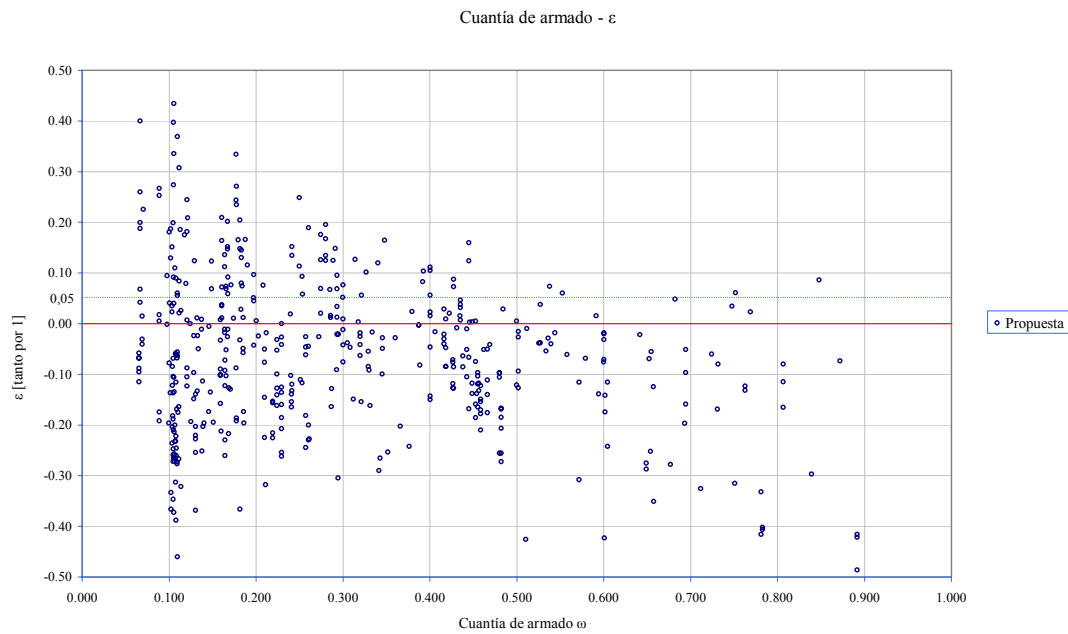


Figura V.57 Análisis ajuste: Propuesta en función del nivel de cuantía de armado ω .

V.3.5.1 Verificación a nivel experimental: Cuantía ω – Propuesta versus EC2-I

Entre paréntesis y con color verde se indica el valor que se obtuvo para el método propuesto.

$$\mu_{EC2-I, \omega \leq 0.10} = 0.2023 \text{ (0.0766)}$$

$$\sigma_{EC2-I, \omega \leq 0.10} = 0.4513 \text{ (0.2083)}$$

$$\mu_{EC2-I, 0.10 < \omega < 0.50} = 0.0319 \text{ (-0.0422)}$$

$$\sigma_{EC2-I, 0.10 < \omega < 0.50} = 0.5105 \text{ (0.2018)}$$

$$\mu_{EC2-I, \omega \geq 0.50} = -0.0908 \text{ (-0.1416)}$$

$$\sigma_{EC2-I, \omega \geq 0.50} = 0.1504 \text{ (0.1636)}$$

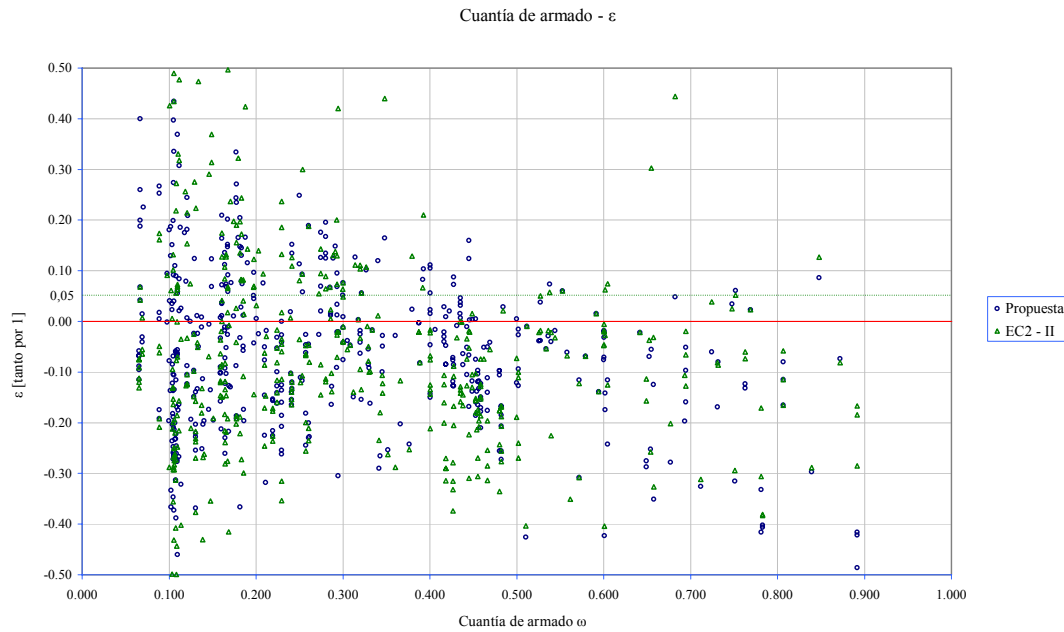


Figura V.58 Análisis ajuste: Propuesta versus EC2-I en función de la cuantía de armado ω .

El comportamiento de la EC2-I sólo mejora el resultado de la propuesta para valores de nivel de cuantía de armado superiores a 0.50. Para valores de cuantías menores, los resultados son mucho peores que la propuesta formulada, incluso del lado de la inseguridad para cuantías menores de 0.50.

V.3.5.2 Verificación a nivel experimental: Cuantía ω – Propuesta versus EC2-II

Entre paréntesis y con color verde se indica el valor que se obtuvo para el método propuesto.

$$\mu_{\text{EC2-II}, \omega \leq 0.10} = 0.2016 \text{ (0.0766)}$$

$$\sigma_{\text{EC2-II}, \omega \leq 0.10} = 0.4870 \text{ (0.2083)}$$

$$\mu_{\text{EC2-II}, 0.10 < \omega < 0.50} = -0.0618 \text{ (-0.0422)}$$

$$\sigma_{\text{EC2-II}, 0.10 < \omega < 0.50} = 0.3276 \text{ (0.2018)}$$

$$\mu_{\text{EC2-II}, \omega \geq 0.50} = -0.1304 \text{ (-0.1416)}$$

$$\sigma_{\text{EC2-II}, \omega \geq 0.50} = 0.1881 \text{ (0.1636)}$$

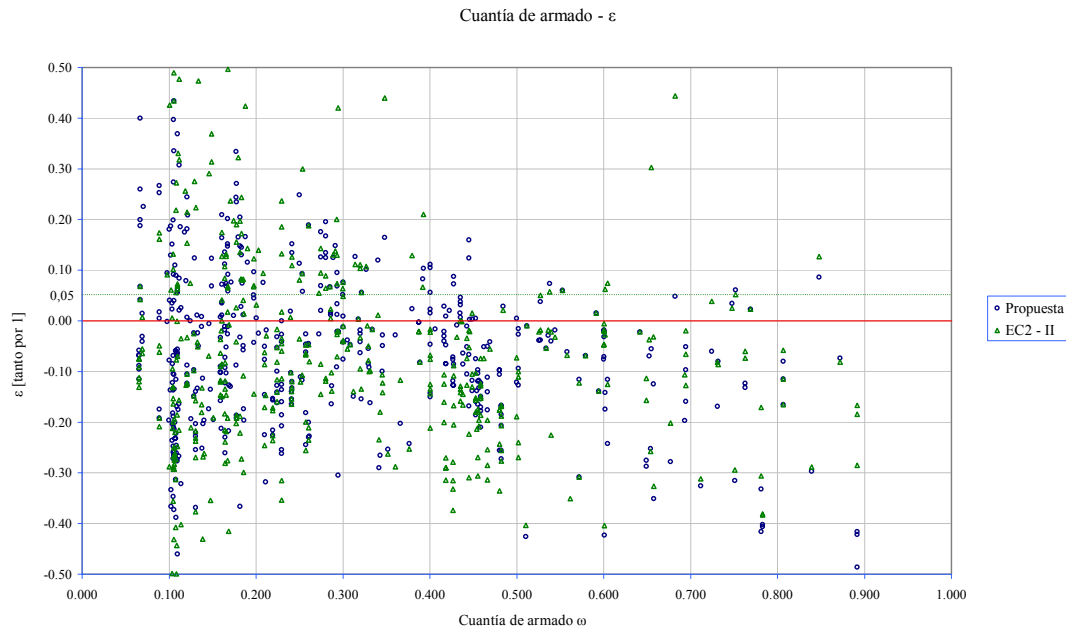


Figura V.59 Análisis ajuste: Propuesta versus EC2-II en función de la cuantía de armado ω .

El comportamiento de la EC2-II es similar a los resultados de la propuesta para valores de nivel de cuantía de armado superiores a 0.10. Para valores de cuantías menores de 0.10, los resultados son peores que la propuesta formulada. Se puede concluir que en cuanto a cuantía de armado, la propuesta realizada y la EC2-II tienen un comportamiento similar.

V.3.5.2 Verificación a nivel experimental: Cuantía ω – Propuesta versus EHE-I

Entre paréntesis y con color verde se indica el valor que se obtuvo para el método propuesto.

$$\begin{aligned} \mu_{\text{EHE-I}, \omega \leq 0.10} &= 0.2016 \text{ (0.0766)} \\ \sigma_{\text{EHE-I}, \omega \leq 0.10} &= 0.4870 \text{ (0.2083)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\text{EHE-I}, 0.10 < \omega < 0.50} &= -0.0618 \text{ (-0.0422)} \\ \sigma_{\text{EHE-I}, 0.10 < \omega < 0.50} &= 0.3276 \text{ (0.2018)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\text{EHE-I}, \omega \geq 0.50} &= -0.1304 \text{ (-0.1416)} \\ \sigma_{\text{EHE-I}, \omega \geq 0.50} &= 0.1881 \text{ (0.1636)} \end{aligned}$$

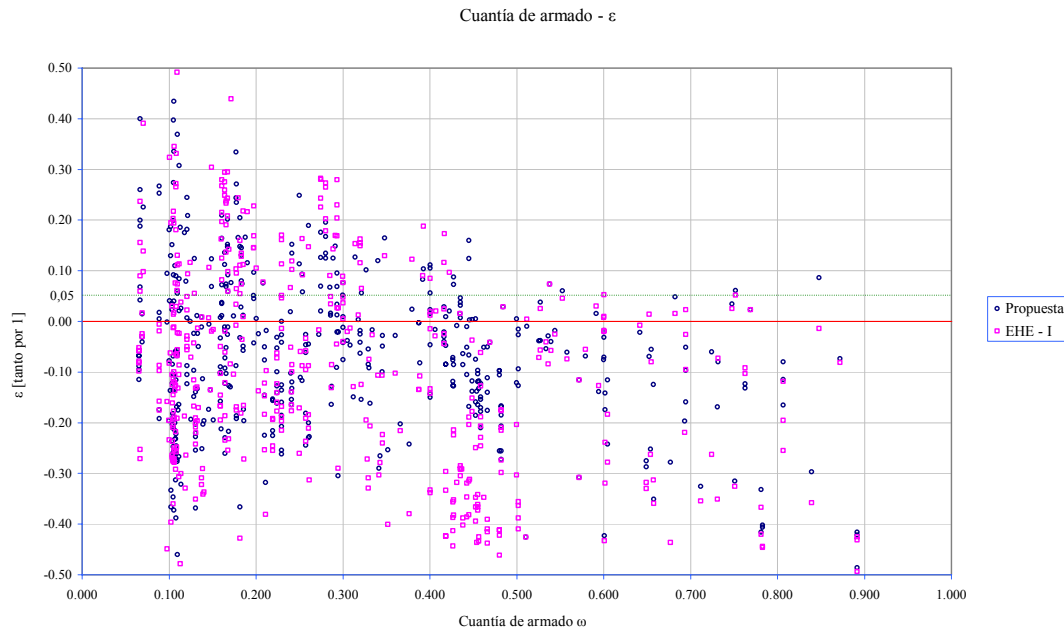


Figura V.60 Análisis ajuste: Propuesta versus EHE-I en función de la cuantía de armado ω .

El comportamiento de la EHE-I es similar a los resultados de la propuesta para valores de nivel de cuantía de armado superiores a 0.10. Para valores de cuantías menores de 0.10, los resultados son peores que la propuesta formulada. La propuesta realizada mejora ligeramente el comportamiento de la EHE-I.

V.3.6 Verificación a nivel experimental: Flexión esviada

El ángulo de flexión esviada β servirá para discriminar el estudio y clasificarlo en flexión recta o esviada. Como ya ha quedado patente a lo largo de este estudio, los parámetros que influyen en la resistencia del soporte no muestran diferencias significativas en los resultados obtenidos si es flexión recta o esviada, por lo que el apartado estudio se limitará a incidir entre las diferencias entre flexión esviada y recta sin clasificarlas en función de la intervención de otros parámetros.

$$\mu_{\text{propuesta}, \beta = 0} = -0.0388$$

$$\sigma_{\text{propuesta}, \beta = 0} = 0.1420$$

$$\mu_{\text{propuesta}, \beta \neq 0} = -0.0626$$

$$\sigma_{\text{propuesta}, \beta \neq 0} = 0.2448$$

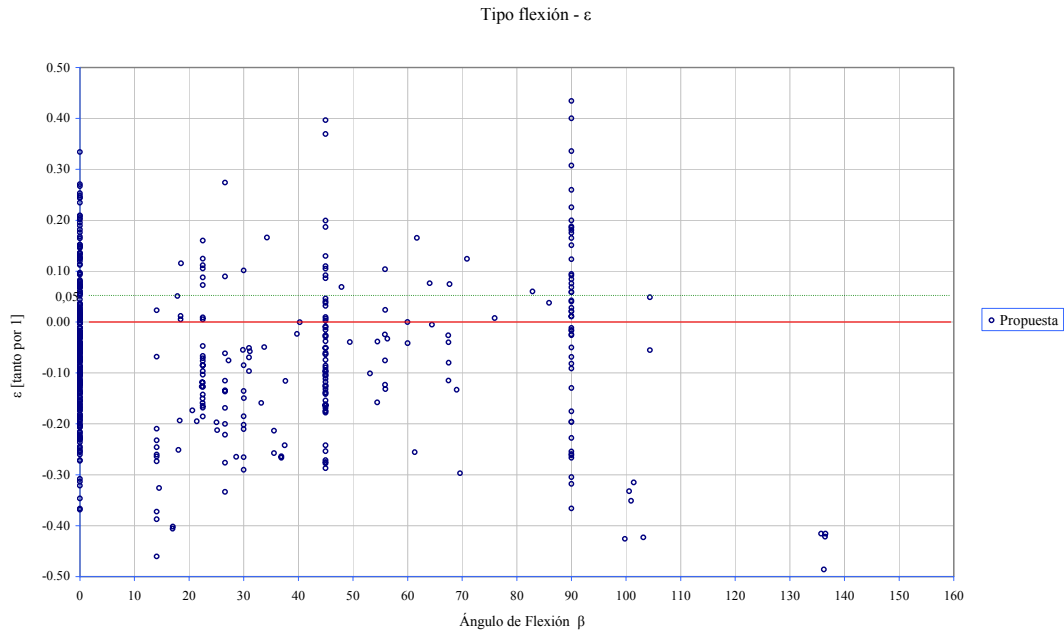


Figura V.61 Análisis ajuste: Propuesta en función del tipo flexión.

El comportamiento es bueno en los dos casos de flexión tanto en recta como en esviada. La flexión recta tiene una media de errores del 3.8% del lado de la seguridad, frente a la flexión esviada que es del 6.2%. La desviación estándar es ligeramente superior en el caso de la esviada. Los resultados, no obstante, son muy buenos en general lo que coincide con el estudio que se llevo a cabo de verificación numérica y gráfica.

V.3.6.1 Verificación a nivel experimental: Flexión esviada – Propuesta versus EC2-I

Entre paréntesis y con color verde se indica el valor que se obtuvo para el método propuesto.

$$\mu_{EC2-I, \beta=0} = -0.0926 \text{ (-0.0388)}$$

$$\sigma_{EC2-I, \beta=0} = 0.1631 \text{ (0.1420)}$$

$$\mu_{EC2-I, \beta \neq 0} = 0.1288 \text{ (-0.0626)}$$

$$\sigma_{EC2-I, \beta \neq 0} = 0.6199 \text{ (0.2448)}$$

El comportamiento de la EC2-I en cuanto a flexión esviada-recta es peor que el resultado de la propuesta. Los valores para flexión esviada están del lado de la inseguridad además de tener un gran valor de la desviación estándar.

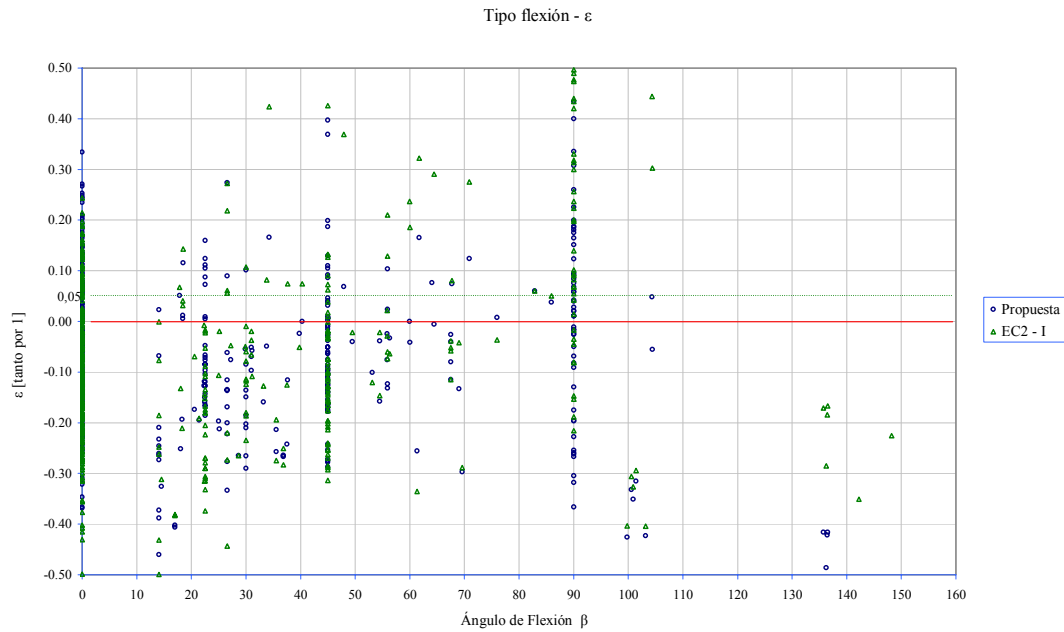


Figura V.61 Análisis ajuste: Propuesta versus EC2-I en función del tipo flexión.

V.3.6.2 Verificación a nivel experimental: Flexión esviada – Propuesta versus EC2-II

Entre paréntesis y con color verde se indica el valor que se obtuvo para el método propuesto.

$$\begin{aligned} \mu_{\text{EC2-II}, \beta=0} &= -0.1035 \text{ (-0.0388)} \\ \sigma_{\text{EC2-II}, \beta=0} &= 0.1740 \text{ (0.1420)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\text{EC2-II}, \beta \neq 0} &= -0.0156 \text{ (-0.0626)} \\ \sigma_{\text{EC2-II}, \beta \neq 0} &= 0.4198 \text{ (0.2448)} \end{aligned}$$

El comportamiento de la EC2-II en cuanto a flexión recta es más conservadora que el resultado de la propuesta. En cuanto a flexión esviada a pesar de que la media es mucho mejor, la desviación estándar es demasiado elevada.

El EC2-II tiene un comportamiento similar al de la propuesta formulada.

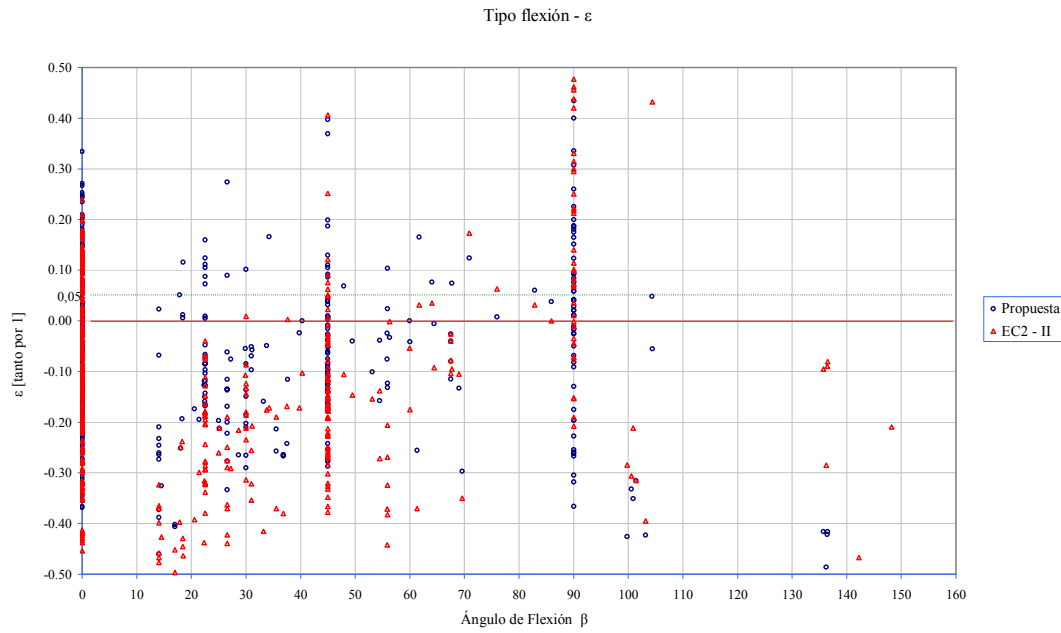


Figura V.62 Análisis ajuste: Propuesta versus EC2-II en función del tipo flexión.

V.3.6.3 Verificación a nivel experimental: Flexión esviada – Propuesta versus EHE-I

Entre paréntesis y con color verde se indica el valor que se obtuvo para el método propuesto.

$$\mu_{EHE-I, \beta=0} = -0.0346 \text{ (-0.0388)}$$

$$\sigma_{EHE-I, \beta=0} = 0.1705 \text{ (0.1420)}$$

$$\mu_{EHE-I, \beta \neq 0} = -0.1409 \text{ (-0.0626)}$$

$$\sigma_{EHE-I, \beta \neq 0} = 0.2374 \text{ (0.2448)}$$

El comportamiento de la EHE-I en cuanto a flexión recta es similar a los resultados de la propuesta, aunque con una desviación ligeramente superior. En cuanto a flexión esviada, la EHE-I muestra un ajuste más conservador.

El EHE-I tiene un comportamiento similar al de la propuesta formulada, aunque la propuesta mejora los resultados de la EHE-I.

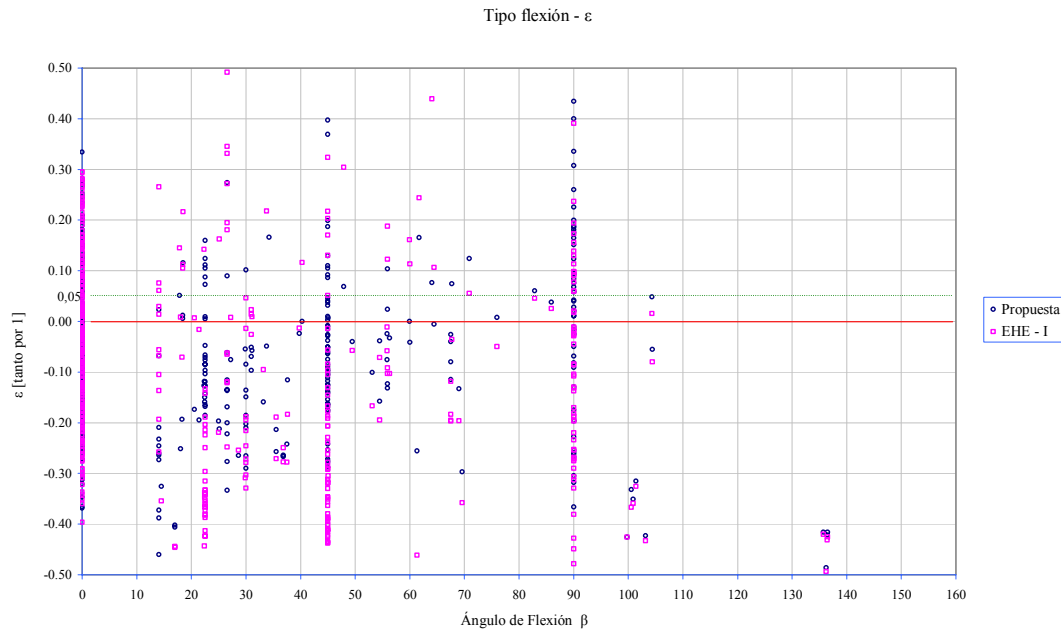


Figura V.63 Análisis ajuste: Propuesta versus EHE-I en función del tipo flexión.

V.3.7 Verificación a nivel experimental: Resumen

A continuación se presenta una tabla que resume los resultados obtenidos. En cada celda se muestra la comparación del modelo propuesto frente a la normativa [columna] en función de los parámetros [fila].

PROPUESTA		Normativa					
Parámetro		ACI-I	ACI-II	EC2-I	EC2-II	EHE-I	EHE-II
Tipo sección	R	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	L	↓	↓	↓	↓	↑	=
	T	↓	↓	↓	↓	=	↑
	U	↑=	↑	↓	↑	↓	↑
	1 cel	↑=	↓	↑	↓	↑	↓
	2 cel	↑	↑	↑	↓	↑	↓
	3 cel	↑	↑	↑	↓	↑	↑
	PPT	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Esbeltez	$\lambda < 35$	↑	↑	↑	↑	=	↑
	$35 < \lambda < 67.5$	↑	↑	↑	↓	↑=	↑
	$67.5 < \lambda < 100$	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	$\lambda > 100$	↑	↑	↑	↑	↓	↑
Resistencia del hormigón	NSC [$f_c < 50$ MPa]	↑	↑	=	↑	↑	↑
	HSC [$f_c > 50$ MPa]	↑	↑	↑	↓	↑	↑
Fluencia	$\phi = 0$	↑	↑	↑	=	↑	↑
	$\phi \leq 1$	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	$\phi > 1$	↑	↑	↓	↓	↓	↑
Cuantía de armado	$\omega \leq 0.10$	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	$0.10 < \omega < 0.50$	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	$\omega \geq 0.50$	↑	↑	↓=	↑=	↑	↑

Flexión recta-esviada	$\beta=0$	↑	↑	↑	↑	↑=	↑
	$\beta\neq 0$	↑	↑	↑	=	↑	↑

*Tabla V.17 Resumen de la verificación experimental
Comparativa de las diferentes normativas frente a la propuesta.*

La propuesta...:
 ↑ Mejora
 ↓ Empeora
 = Similar

VI. Conclusiones y Futuras Líneas de investigación.

VI.1 Conclusiones

El presente estudio ha versado sobre la aplicación del método de amplificación de momentos en soportes cuya sección transversal fuera arbitraria, es decir que no fuera exclusivamente secciones rectangulares.

El objetivo era realizar una propuesta que tuviera validez para las diferentes tipologías de secciones estudiadas y que tuviera un buen ajuste.

VI.1.1 Conclusiones referidas al método simplificado de amplificación de momentos.

Las primeras conclusiones que se extraen son las referidas al método propiamente dicho: el empleo de un método simplificado permite calcular rápidamente la resistencia del soporte.

Al tratarse de un método simplificado el tiempo computacional para el diseño o comprobación es menor que los métodos generales que tienen operaciones más complejas de ejecutar además de depender de un número mayor de parámetros.

Las ventajas que tiene el método simplificado de amplificación de momentos frente al de la excentricidad adicional es su menor grado de error. Es por lo tanto un método mucho más preciso.

La limitación principal del método es que es un método de comprobación, ya que la armadura no es un dato conocido a priori:

$$EI = \alpha \cdot E_c I_c + E_s I_s$$

No obstante el método de amplificación de momentos puede servir para el diseño de soportes mediante un proceso iterativo:

1. Tomar como dato de partida de armado la armadura mínima [$\omega = \omega_{\min}$]
2. Comprobar si el soporte está en rotura
3. Si está en rotura, aumentar la cuantía de armado y volver a hacer la comprobación hasta encontrar una cuantía de armado que no esté en rotura.

VI.1.2 Conclusiones referidas a la nueva propuesta para el cálculo del factor de amplificación de momentos.

La principal conclusión que se extrae es que la propuesta formulada sirve para todo tipo de secciones estudiadas, y como se comprobó en la verificación experimental, esta conclusión se puede extender a cualquier sección arbitraria.

La obtención de la propuesta tuvo como requisito primero a cumplir el obtener un ajuste que estuviera siempre del lado de la seguridad, y ese fue en todo momento el criterio para elaborar la propuesta.

El enfoque que se ha dado al estudio era la de obtener un método que fuera muy preciso para el rango de esbelteces habituales en la construcción que es el que se encuentra dentro del rango desde 35 a 100, frente a esbelteces de mayor valor pero que no se emplean tanto.

En cuanto a criterios de resistencia la propuesta tiene muy buen ajuste tanto para hormigones de resistencia normal, NSC, como para hormigones de alta resistencia, HSC.

La cuantía de armado presenta un buen ajuste para niveles de armado suficientes, en cambio para piezas escasamente armadas $\omega = 0.06$ la solución tiene que ser por fuerza conservadora, ya que una mayores precisión implicaría obtener valores del lado de la inseguridad para las cuantías mayores de armado.

El estudio de la fluencia del soporte presenta un mejor comportamiento cuando estos valores son distintos de cero: lo que significa que hay un mejor ajuste con cargas diferidas frente a cargas instantáneas [que correspondería con un valor de fluencia de 0]. Para tener en cuenta los efectos diferidos se emplean unos coeficientes a los que se

afectan tanto el módulo de deformación del acero, como al módulo de deformación del hormigón.

El análisis de flexión-compresión esviada se puede llevar a cabo adaptando la ecuación de amplificación de momentos: la interacción se tiene en cuenta mediante la “inercia equivalente del soporte”. Mediante este parámetro se puede asignar una inercia en función del ángulo de esviaje y variando desde la inercia del eje mayor a la inercia del eje menor de flexión.

El análisis en flexión esviada no arroja ninguna diferencia significativa frente al estudio realizado en flexión recta, pudiéndose aplicar las mismas conclusiones que se han extraído en el análisis en flexión recta.

VI.1.3 Conclusiones referidas a la verificación teórica.

La verificación teórica, tanto a nivel gráfico como a nivel numérico, da una buena aproximación de la propuesta formulada frente al modelo teórico de referencia.

La media de los errores es del 5.8% del lado de la seguridad, con una desviación del 8%. Permite concluir que el ajuste ha sido acertado.

Los parámetros que mejor se ajustan son los de cuantía de armado de 0.50 y resistencia de hormigón de 100. Esto es lógico y esperado ya que un aumento de resistencia y de cuantía de armado, lleva aparejado un comportamiento más lineal del soporte: siendo el ajuste más cercano al modelo teórico de referencia.

El parámetro que peor ajuste tiene es el de cuantía de armado de 0.06, pero entendiendo peor como más alejado del modelo teórico de referencia aunque del lado de la seguridad.

VI.1.4 Conclusiones referidas a la verificación experimental.

Los resultados que ofrece la propuesta frente a la verificación experimental son peores que los que se obtienen al compararla con el modelo teórico de referencia, no obstante en comparación con otras propuestas de las diferentes normativas la propuesta tiene un buen ajuste.

Las propuestas que se aproximan más a la propuesta realizada son las del EuroCódigo 2 [tanto la I como la II] y la EHE [la propuesta I]. De ellas la que más se acerca a los resultados que proporciona la propuesta es la del EC2-II aunque el EC2 da peores resultados.

Los parámetros que obtienen peores resultados (en el sentido de más del lado de la seguridad, y más conservadora) la propuesta formulada son:

- Tipología seccional en “T” y en “L”
- Fluencia mayor que la unidad
- Esbeltez entre 35 y 67.5 [sólo en Ec2-II]

VI.2 Futuras líneas de investigación

A pesar de que el estudio ha sido lo suficientemente amplio como para cubrir los diferentes factores que influían en el diseño y comprobación de soportes esbeltos de hormigón armado, ha habido ciertos aspectos que no se han podido desarrollar suficientemente en el estudio realizado.

Durante el proceso de la investigación se han detectado factores que o bien influyen o bien su inclusión hubiera complementado el estudio realizado, dándole un mayor alcance.

- Las tipologías seccionales estudiadas han sido amplias, pero sería necesario estudiar las secciones en “T”, y en “U” de las que se disponen ensayos experimentales.
- Es necesario reforzar el estudio de la sección en “L” sin ningún eje de simetría de la que sólo se ha realizado ensayos puntuales. Así mismo sería necesario estudiar más secciones asimétricas.
- Los valores de la resistencia del hormigón han sido de 30, 80 y 100 MPa. En el caso de 100 MPa, el número de ensayos realizados ha sido pequeño en relación a los otros dos valores de la resistencia. En futuros estudios se debería complementar con ensayos que recogieran estas resistencias. Si bien aunque su empleo en la construcción que aún no es tan importante, su estudio a nivel experimental/teórico sí que lo es.
- Otra línea de investigación sería el estudio de la resistencia de 50 MPa, con soportes que tuvieran la resistencia por encima y por debajo de ese valor para estudiar el cambio de comportamiento entre los hormigones de NSC y los HSC.
- El máximo nivel de esbeltez estudiada ha sido el de $\lambda=100$, a pesar de que experimentalmente hay pocas piezas que superen esa esbeltez, un estudio teórico debería recoger esbelteces mecánicas de hasta 150.
- Se debería estudiar para secciones arbitrarias un rango de esbelteces intermedias entre los valores estudiados de 35, 67.5 y 100.
- Desarrollo más completo del nivel de fluencia 3 para secciones arbitrarias.
- En cuanto al armado, sería conveniente desarrollar un mayor rango de estudio en función de la cuantía de armado. También se podría complementar este parámetro con la investigación de distribuciones de armado no simétricas.
- Otra línea de investigación recomendable sería una comparación de los diferentes métodos simplificados, viendo el alcance y limitaciones de cada uno. De esta manera se podría ofrecer unas recomendaciones de empleo de cada método en función de su mejor funcionamiento.

- Por último, sería conveniente comenzar el estudio de piezas compuestas: son piezas formadas por un perfil de acero embebido en el hormigón, o las CFT (concrete filled tube), en el que el hormigón está embebido dentro de una pieza tubular de acero..

VII. Bibliografía.

Referencias bibliográficas

En este capítulo se recogen las referencias bibliográficas que han servido para el estudio llevado a cabo presente estudio ha versado sobre la aplicación del método amplificación de momentos en soportes cuya sección transversal fuera arbitraria, es decir que no fuera exclusivamente secciones rectangulares.

American Concrete Institute – ACI Comitee 318: “Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-05)”, American Concrete Institute, Detroit, 2005.

American Concrete Institute: “ACI design handbook: design of structural reinforced concrete elements in accordance with the strength design method of ACI 318-95” SP-17(97), *Farmington Hills*, ACI 1997, páginas 482.

Bonet, J.L.: “Método simplificado de cálculo de soportes esbeltos de hormigón armado de sección rectangular sometidos a compresion y flexion biaxial”; 2001

Comité Europeo de Normalización: “Eurocódigo 2, EN 1992-1-1:2004”, páginas 64 a 72.

Comisión Permanente del Hormigón: “Instrucción de Hormigón Estructural. EHE”, Ministerio de Fomento, 1999.

Comité Euro-internacional du beton: “CEB-FIB Model Code 1990” C.E.B. Bulletin N°203-204 y 205, 1991.

CEB-FIB, Bulletin 2: Structural Concrete – Textbook on behaviour, design and performance, vol.2; páginas 226 a 240

Ahmad, S.H.; Sigmon, G.R.: “Flexural rigidity of circular reinforced concrete sections”; *ACI Structural Journal* V.87 N°5; 1990, páginas 548 a 556.

Chuang, Poon-Hwei; Kong, Sia-Keong: “Strength of Slender Reinforced Concrete Columns”; *ACI Structural Journal*; Septiembre 1998, páginas 992 a 998.

Ehsani, M.R.; Alameddine, F.: “Refined stiffness of slender circular reinforced concrete columns”; *ACI Structural Journal*; Septiembre–Octubre 1987.

Furlong, R.W.: “Concrete columns under biaxially eccentric thrust”; *ACI, Journal of the American concrete*, V.76, N° 10; 1979, páginas 1116 a 1130.

Hong, H. P.: “Strength of Slender Reinforced Concrete Columns Under Biaxial Bending”; *Journal of Structural Engineering*; Julio 2001; páginas 758 a 762

Hong, H. P. y Zhou W.: “Statistical Analyses of Strength of Slender Reinforced Concrete Columns”; *Journal of Structural Engineering*; Enero 2001; páginas 21 a 27

Hong, H. P. y Wang W.: “Appraisal of Reciprocal Load Method for Reinforced Concrete Columns of Normal and High Strength Concrete”; *Journal of Structural Engineering*; Noviembre 2002; páginas 1480 a 1486

Kemp, A.R.: “Simplified amplification factors representing material and geometric inelasticity in frame instability”; *Engineering Structures* 22, 2000, páginas 1609 a 1619

Khuntia, Madhu y Ghosh, S.K.: “Flexural Stiffness of Reinforced Concrete Columns and Beams: Analytical Approach”; *ACI Structural Journal*; Mayo–Junio 2000, páginas 351 a 363.

Khuntia, Madhu y Ghosh, S.K.: “Flexural Stiffness of Reinforced Concrete Columns and Beams: Experimental Verification”; *ACI Structural Journal*; Mayo–Junio 2000, páginas 364 a 374.

MacGregor, James G.: “Design of Slender Concrete Columns–Revisited”; *ACI Structural Journal*; Mayo–Junio 1993, páginas 302 a 309.

Mavichak, V. y Furlong, W.: “Strength and Stiffness of Reinforced Concrete Columns under Biaxial Bending”; *Research Report 7-2F – University of Texas, Austin*; Noviembre 1976.

Mehanny, Sameh S.F.; Kuramoto, Hiroshi y Deierlein, Gregory G.: “Stiffness Modeling of Reinforced Concrete Beam-Columns for Frame Analysis”; *ACI Structural Journal*; Marzo-Abril 2006, páginas 215 a 224.

Mendis, Priyan A.: “Behavior of Slender High-Strength Concrete Columns”; *ACI Structural Journal*; Noviembre-Diciembre 2000, páginas 895 a 901.

Mirza, S. Ali y Lacroix, Edward A.: “Comparative Study of Strength-Computation Methods for Rectangular Reinforced Concrete Columns”; *ACI Structural Journal*; Julio-Agosto 2002, páginas 399 a 410.

Mirza, S. Ali y Lacroix, Edward A.: “Flexural Stiffness of Composite Columns Subjected to Bending about Minor Axis of Structural Steel Section Core”; *ACI Structural Journal*; Septiembre-Octubre 1999, páginas 748 a 757.

Mirza, S. Ali; Lee, P.M. y Morgan, D.L.: “ACI Stability Resistance Factor for RC Columns”; *ACI Structural Journal*; Septiembre-Octubre 1963, páginas 748 a 757.

Mirza, S. Ali y MacGregor, James G.: “Slenderness and Strength Reliability of Reinforced Concrete Columns”; *ACI Structural Journal*; Julio-Agosto 1989, páginas 428 a 438.

Mirza, S. Ali: “Flexural Stiffness of Rectangular Reinforced Concrete Columns”; *ACI Structural Journal*; Julio-Agosto 1990, páginas 425 a 435.

Parme, A.L.: “Capacity of restrained eccentrically loaded long columns”; *Symposium on Reinforced Concrete Columns, SP-13, American Concrete Institute, Detroit*; 1966, páginas 354 a 367.

Resheidat, Musa; Ghanma, Mwafag; Mumayr, K.; Sutton, Charles y Chen, Wai-Fah: “Improved ‘EI’ Estimation for Reinforced Concrete Circular Columns”; *Materials and Structures*; 1994, páginas 515 a 526.

Spang, J.M.: “Design Method for Long Reinforced Concrete Columns”; *MS Thesis; Department of Civil Engineering, University of Delaware*; Junio 1996.

Sigmon, Gregory R. y Ahmad Shuaib H.: “Flexural Rigidity of Circular Reinforced Concrete Sections”; *ACI Structural Journal*; Septiembre-Octubre 1990, páginas 548 a 556.

Parme, A.L.: “Capacity of restrained eccentrically loaded long columns”; *Symposium on Reinforced Concrete Columns, SP-13, American Concrete Institute, Detroit*; 1966, páginas 354 a 367.

Ensayos experimentales

Hsu, Cheng-Tzu Thomas; “Biaxially loaded L-shaped reinforced concrete columns”; *Journal of Structural Engineering*, vol 11; 1985, páginas 2576 y ss.

Hsu, Cheng-Tzu Thomas; “T-shaped reinforced concrete columns under biaxial bending and axial compression”; *ACI Structural Journal*; Julio–Agosto 1989, páginas 460 y ss.

Hsu, Cheng-Tzu Thomas; “Channel-shaped reinforced concrete compression members under biaxial bending”; *ACI Structural Journal*; Mayo–Junio 1987, páginas 201 y ss.

Mavichak, V. y Furlong, W.; “Strength and Stiffness of Reinforced Concrete Columns under Biaxial Bending”; *Research Report 7-2F – University of Texas, Austin*; Noviembre 1976.

Poston, R. W.; Breen, John E.; y Roesset, J.M.: “Analysis of nonprismatic or hollow slender concrete bridge piers”; *ACI Structural Journal*; Septiembre–Octubre 1985, páginas 731 y ss.

Poston, R. W.; Gilliam, T.E.; Yamamoto, Y. Breen, y John E.: “Hollow concrete bridge pier behavior”; *ACI Structural Journal*; Noviembre–Diciembre 1985, páginas 779 y ss.

Taylor, Andrew W.; Rowell, Randall B. y Breen, John E.: “Behavior of Thin-Walled Concrete Box Piers”; *ACI Structural Journal*; Mayo–Junio 1995, páginas 319 y ss.

Tsao, W.H. y Hsu C.-T. T.: “Behaviour of biaxially loaded square and L-shaped slender reinforced concrete columns”; *Magazine of Concrete Research*; 1994, páginas 257 a 267.

ANEJOS

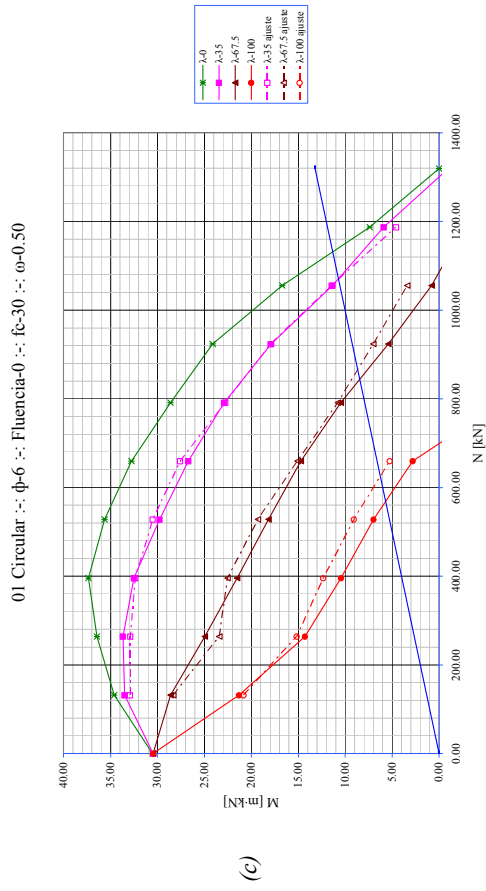
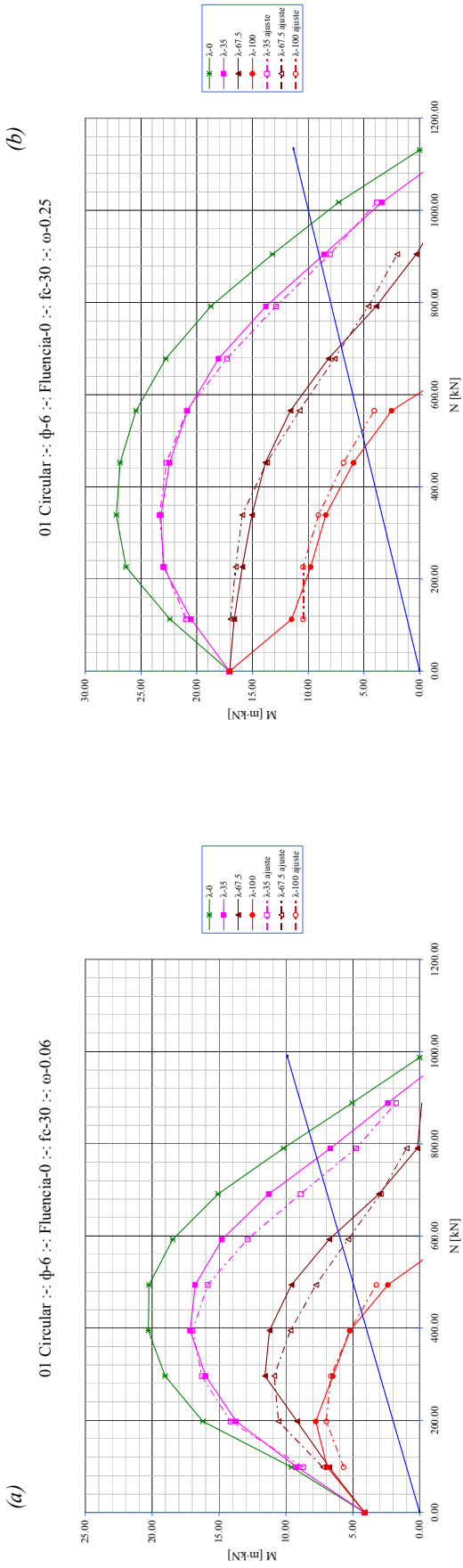
A. Programa de ensayos.

Flexión	β	Sección	Distribución de armaduras	Fluencia	f_c (MPa)	ω
Recta	0	Circular	6	0	30	0.06
						0.25
						0.5
				80	0.06	
					0.25	
					0.5	
			1	30	0.06	
					0.25	
					0.5	
				80	0.06	
					0.25	
					0.5	
			2	30	0.06	
					0.25	
					0.5	
				80	0.06	
					0.25	
					0.5	
		12	0	30	0.06	
					0.25	
					0.5	
			80	0.06		
				0.25		
				0.5		
		2	30	30	0.06	
					0.25	
					0.5	
			80	80	0.06	
					0.25	
					0.5	
		Cruz (En cada esquina)	0	30	30	0.06
						0.25
						0.5
				80	80	0.06
						0.25
						0.5
			1	30	30	0.06
						0.25
						0.5
				80	80	0.06
						0.25
						0.5
			2	30	30	0.06
						0.25
						0.5
				80	80	0.06
						0.25
						0.5
		Hexágono (En cada esquina)	0	30	30	0.06
						0.25
						0.5
				80	80	0.06
						0.25
						0.5
			1	30	30	0.06
						0.25
						0.5
				80	80	0.06
						0.25
						0.5
2	30		30	0.06		
				0.25		
				0.5		
	80		80	0.06		
				0.25		
				0.5		
Rectangular hueca	0	30	30	0.06		
				0.25		
				0.5		
	80	80	0.06			
			0.25			
			0.5			
2	30	30	0.06			
			0.25			
			0.5			
	80	80	0.06			
			0.25			
			0.5			
Pilar (En el contorno uniformemente distribuida)	0	30	30	0.06		
				0.25		
				0.5		
	80	80	0.06			
			0.25			
			0.5			
2	30	30	0.06			
			0.25			
			0.5			
	80	80	0.06			
			0.25			
			0.5			

Flexión	β	Sección	Distribución de armaduras	Fluencia	f_c (MPa)	ω
Esviada	min 4 ángulo de esviaje (2 FR + 2 FE los bisectores)	En L	6	0	30	0.06
						0.25
						0.5
					80	0.06
						0.25
						0.5
				1	30	0.06
						0.25
						0.5
					80	0.06
						0.25
						0.5
	2	30	0.06			
			0.25			
			0.5			
		80	0.06			
			0.25			
			0.5			
	min 4 ángulo (1 FR el que queda + 3 FE)	Rectangular hueca	4	0	30	0.06
						0.25
						0.5
					80	0.06
						0.25
						0.5
2				30	0.06	
					0.25	
					0.5	
				80	0.06	
					0.25	
					0.5	
min 4 ángulo (1 FR el que queda + 3 FE)	Pilar	En el contorno (uniformemente distribuida)	0	30	0.06	
					0.25	
					0.5	
				80	0.06	
					0.25	
					0.5	
			2	30	0.06	
					0.25	
					0.5	
				80	0.06	
					0.25	
					0.5	

B. Gráficas

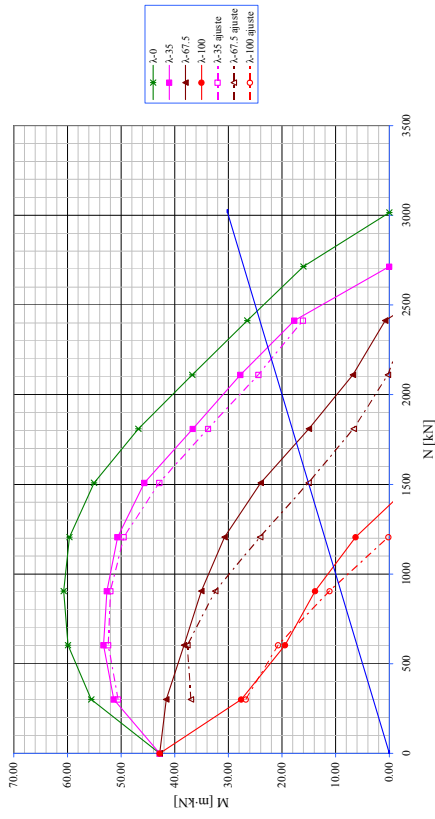
**B.I Gráficas secciones no
rectangulares.**



Sección Circular 01.1 Circular $\Phi=6$: Flexión recta Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=30$ $\omega=0.50$;

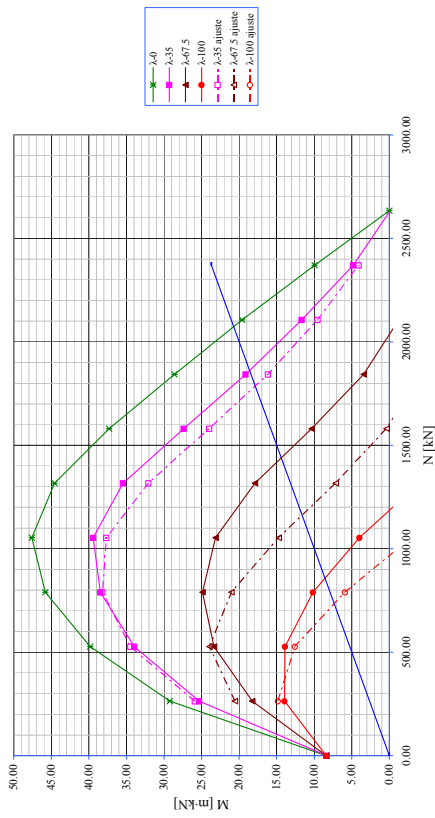
(b)

01 Circular :: $\phi=6$:: Fluencia-0 :: $f_c=80$:: $\omega=0.25$

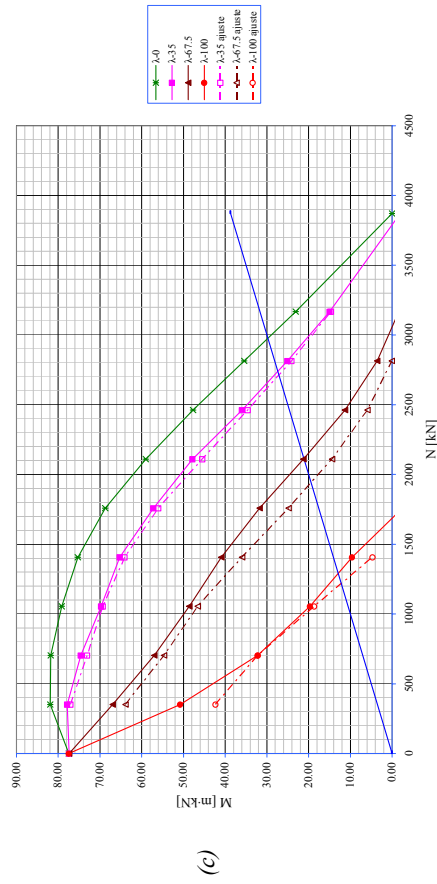


(a)

01 Circular :: $\phi=6$:: Fluencia-0 :: $f_c=80$:: $\omega=0.06$

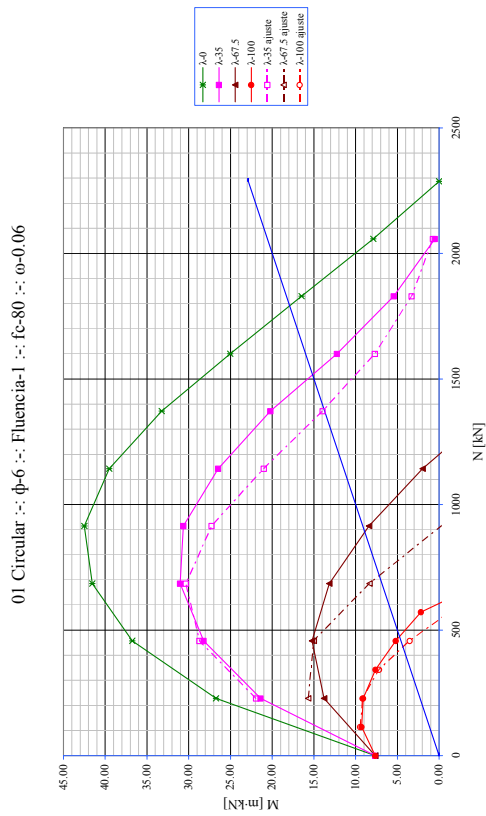
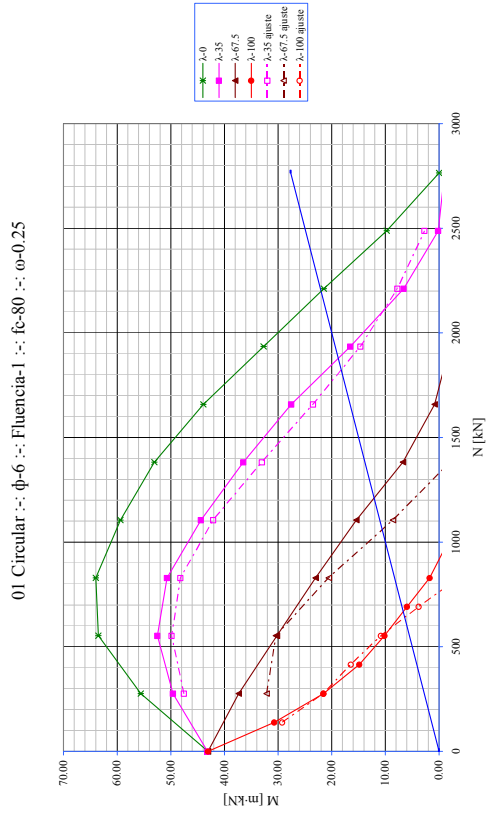
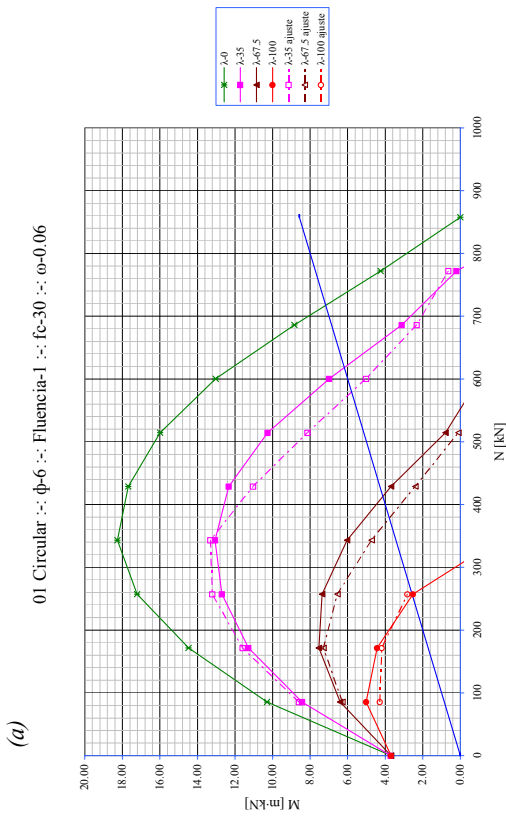
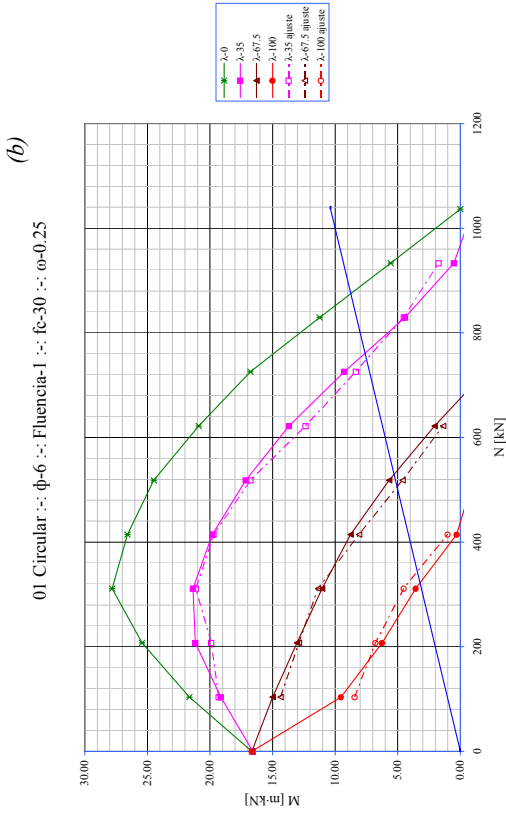


01 Circular :: $\phi=6$:: Fluencia-0 :: $f_c=80$:: $\omega=0.50$



Sección Circular 01.1 Circular $\Phi=6$: Flexión recta Fluencia $\varphi=0$

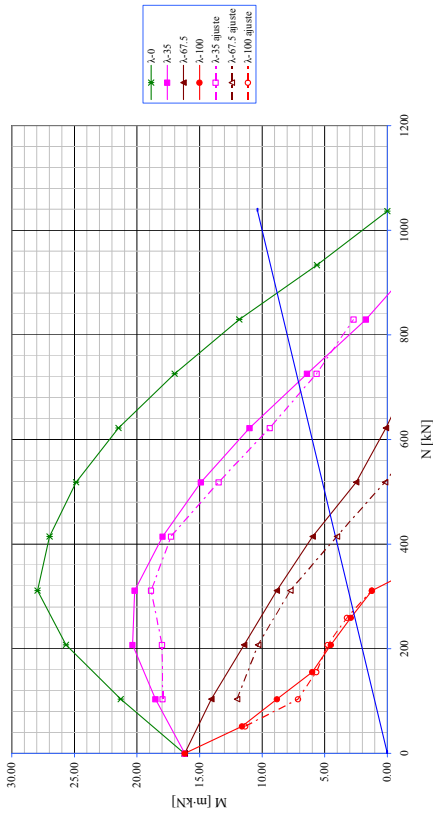
(a) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=80$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.50$;



Sección Circular 01.1 Circular $\Phi=6$: Flexión recta Fluencia $\varphi=1$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$;

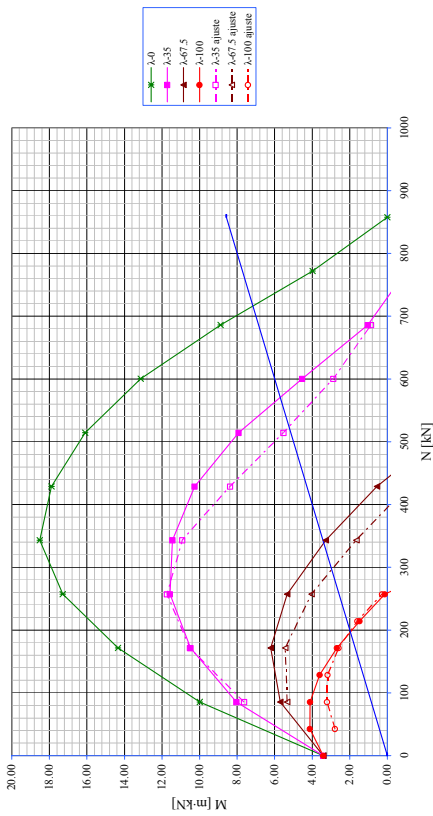
(b)

01 Circular :: $\phi=6$:: Fluencia-2 :: $f_c=30$:: $\omega=0.25$

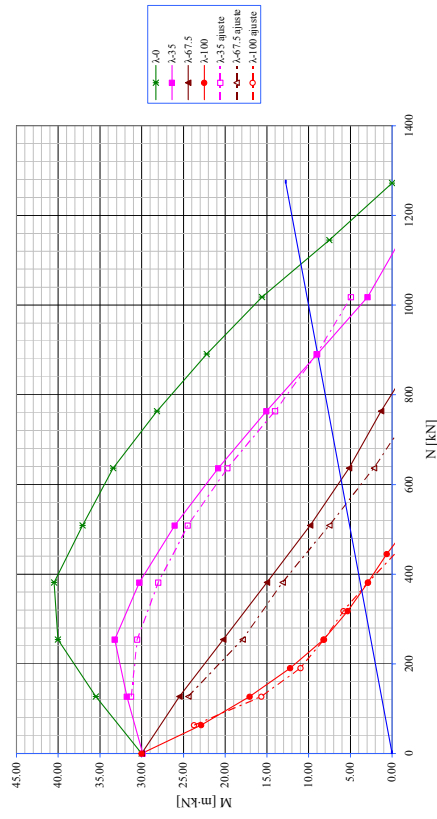


(a)

01 Circular :: $\phi=6$:: Fluencia-2 :: $f_c=30$:: $\omega=0.06$

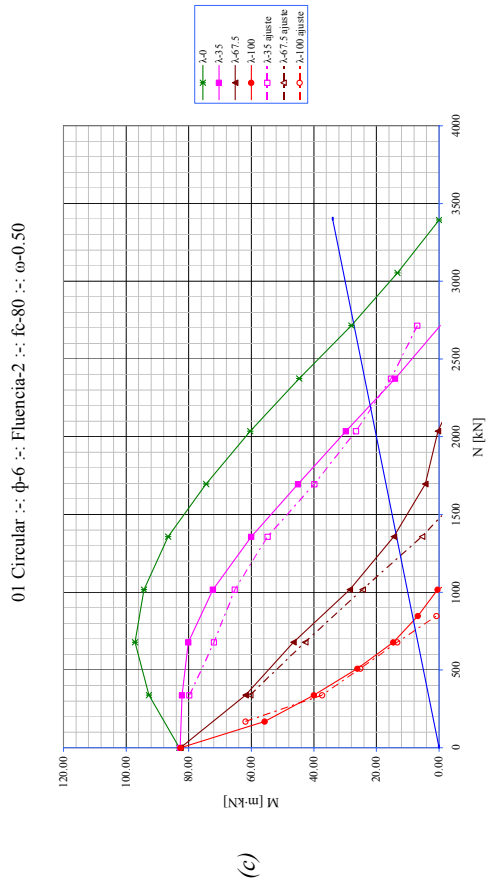
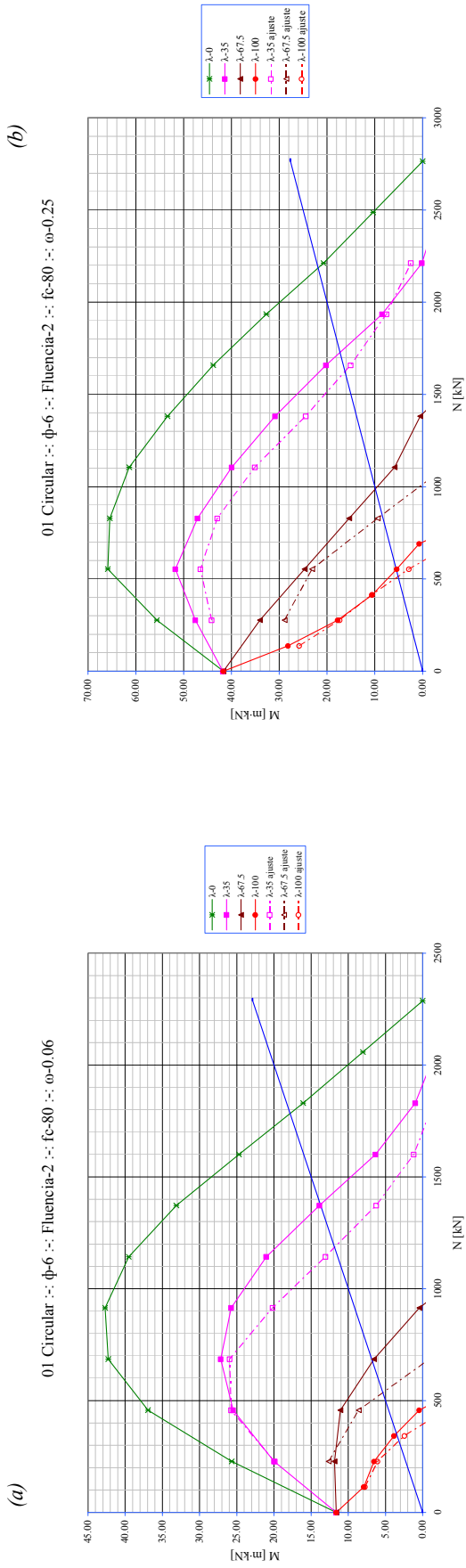


01 Circular :: $\phi=6$:: Fluencia-2 :: $f_c=30$:: $\omega=0.50$

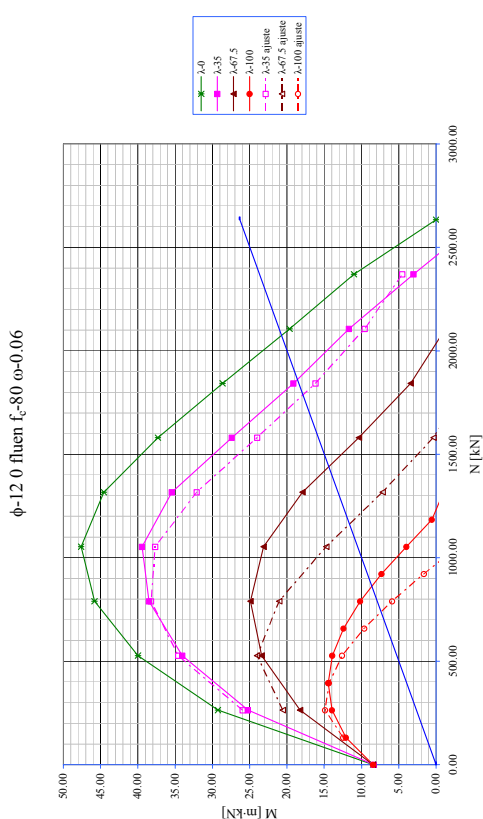
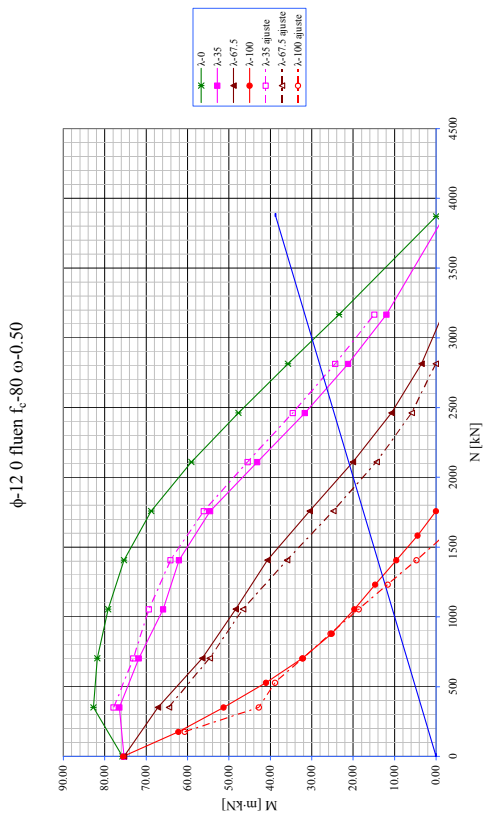
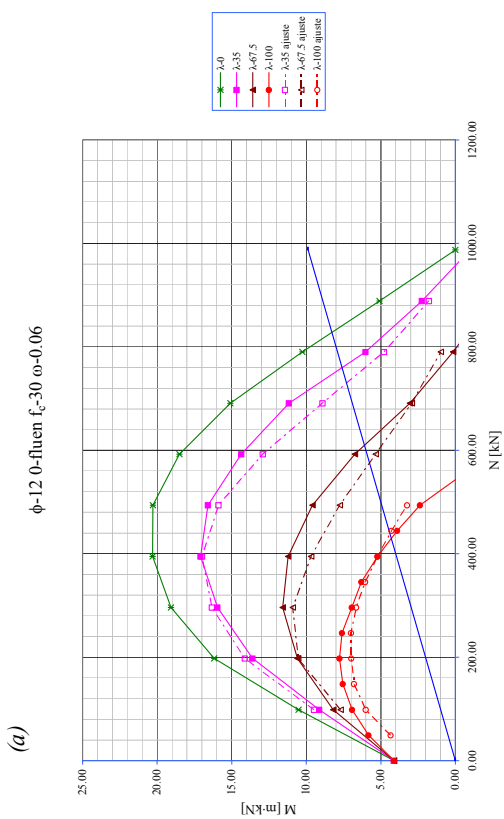
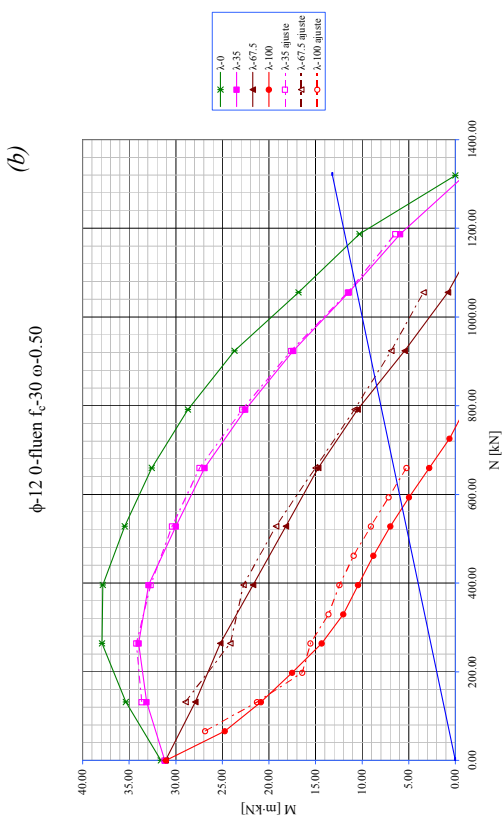


(c)

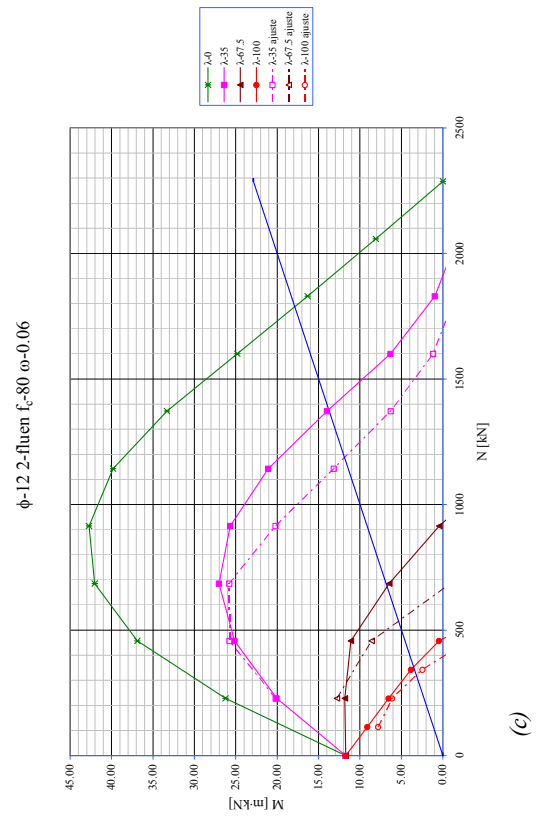
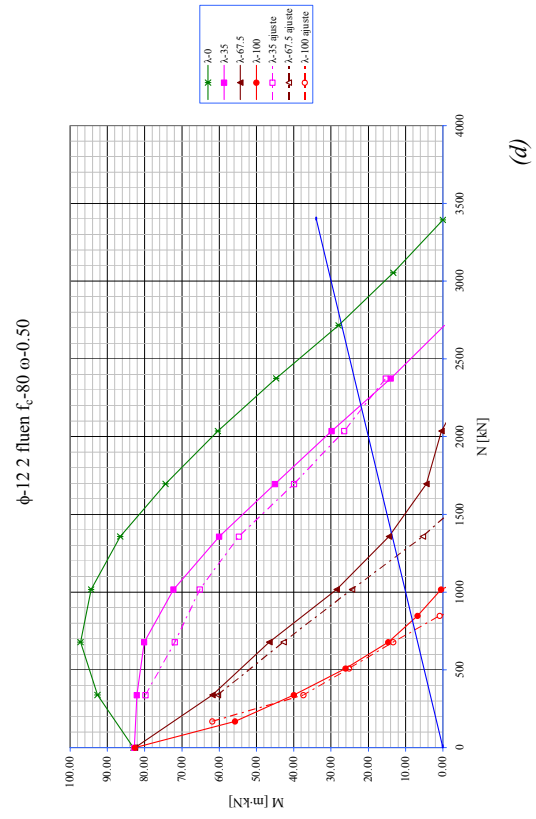
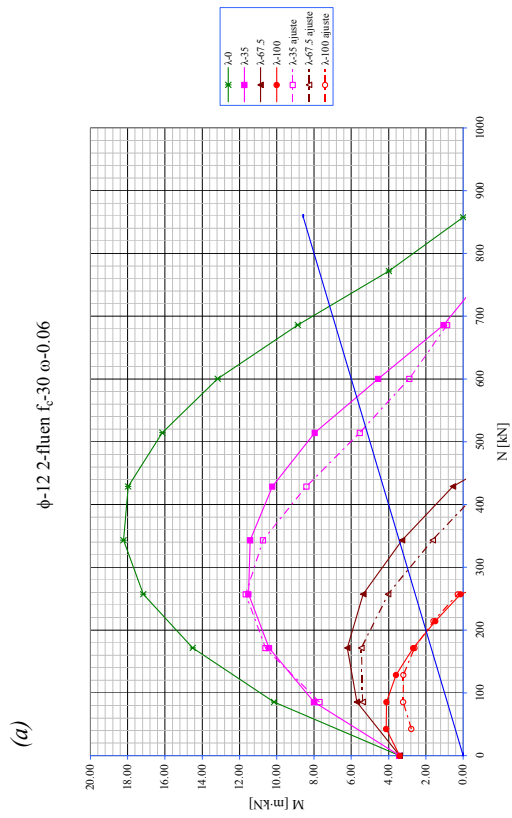
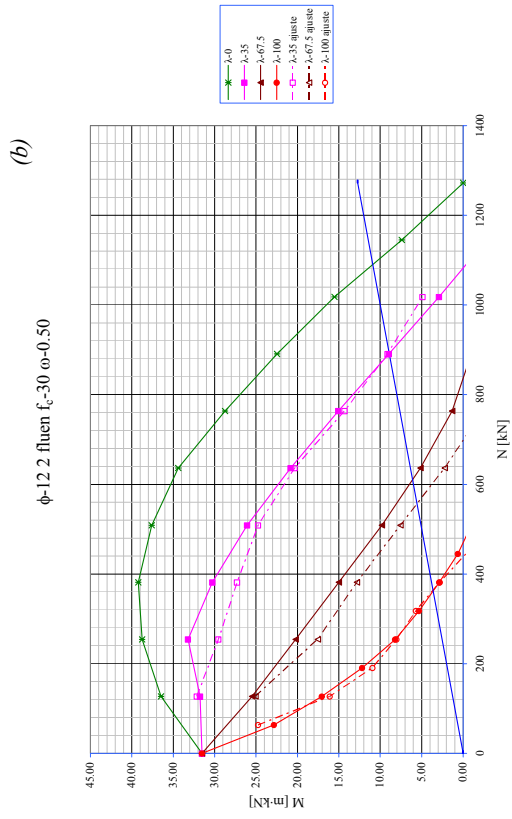
Sección Circular 01.1 Circular $\Phi=6$: Flexión recta Fluencia $\varphi=2$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=30$ $\omega=0.50$



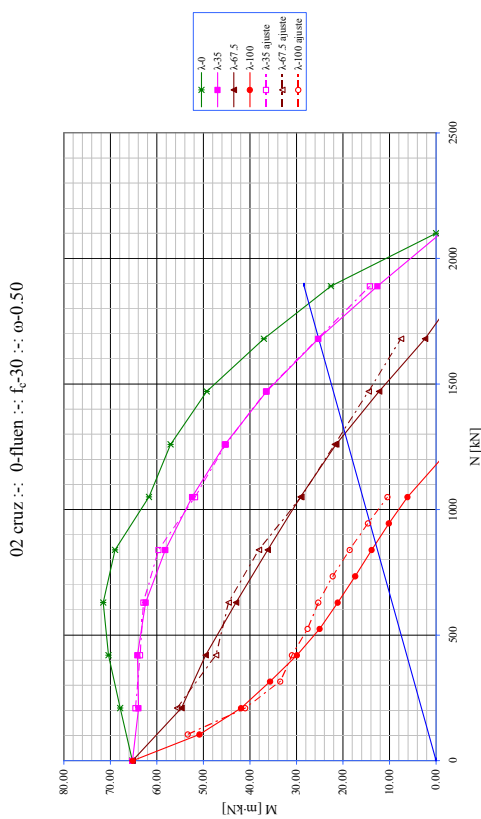
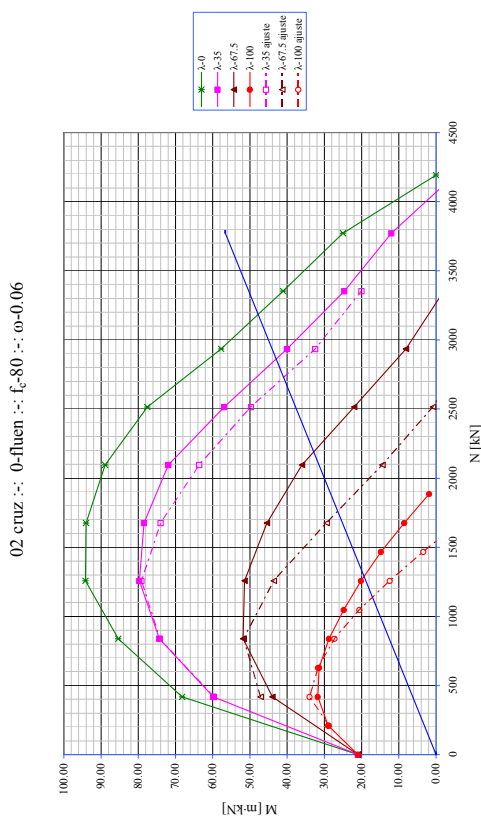
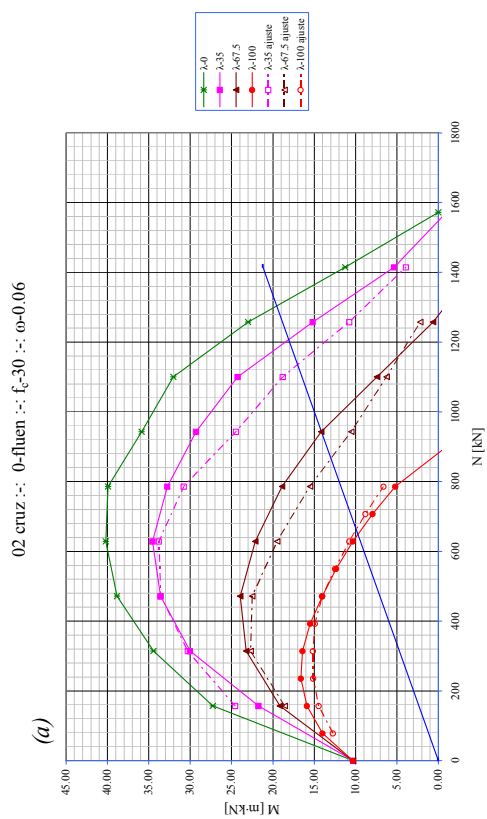
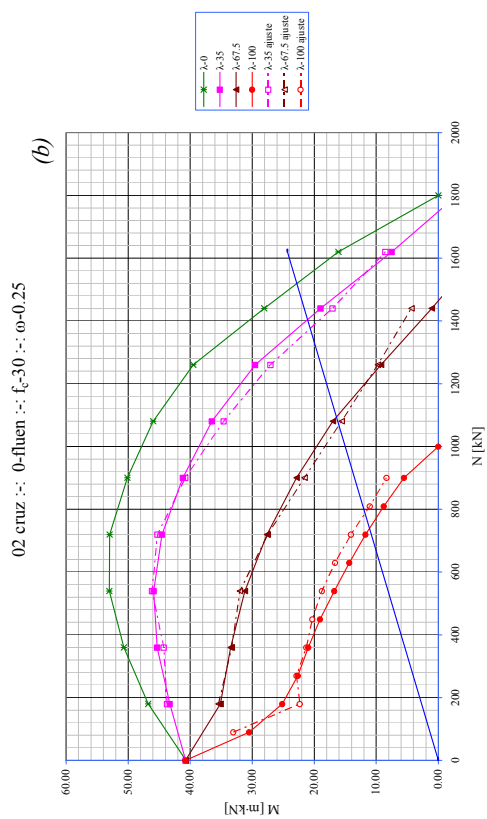
Sección Circular 01.1 Circular $\Phi=6$: Flexión recta Fluencia $\varphi=2$
 (a) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=80$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.50$



Sección Circular 01.2 Circular $\Phi-12$: Flexión recta Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.50$



Sección Circular 01.2 Circular $\Phi-12$: Flexión recta Fluencia $\varphi=2$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.50$

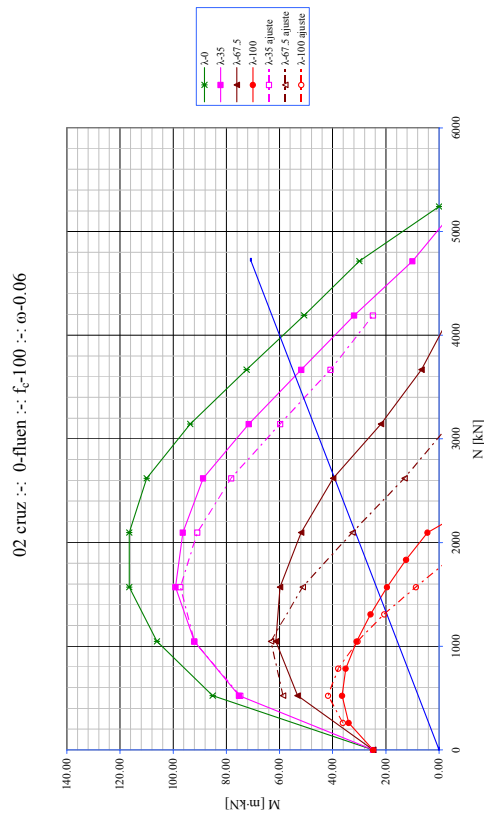
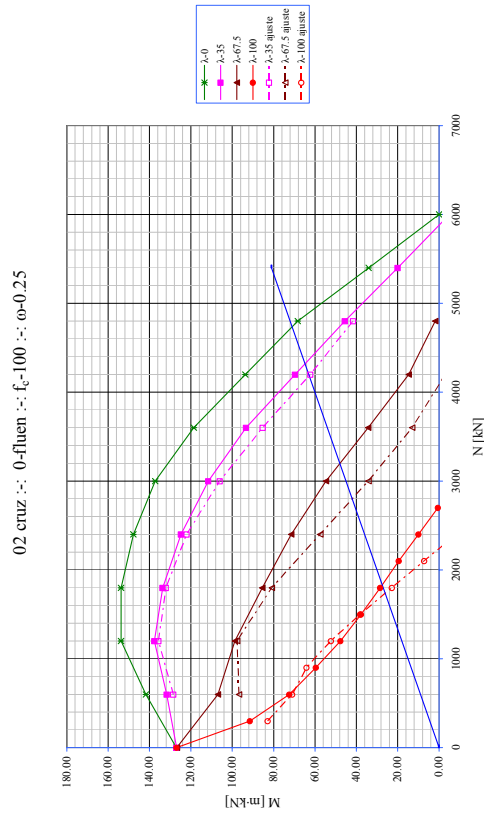
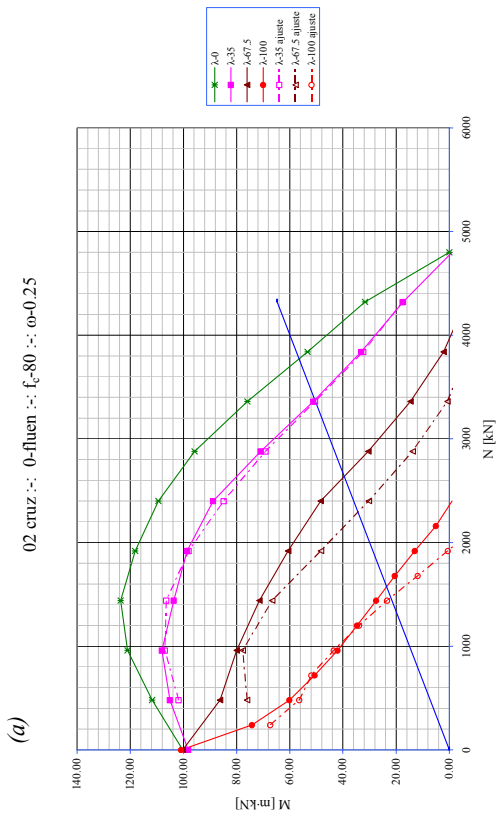
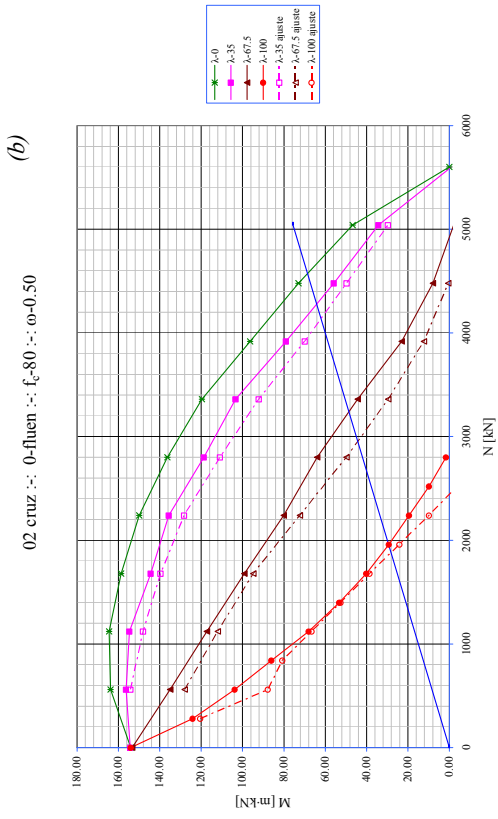


(d)

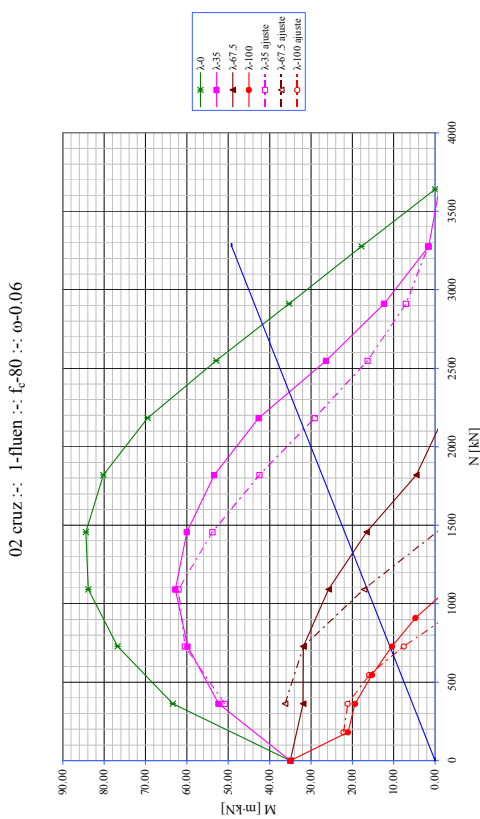
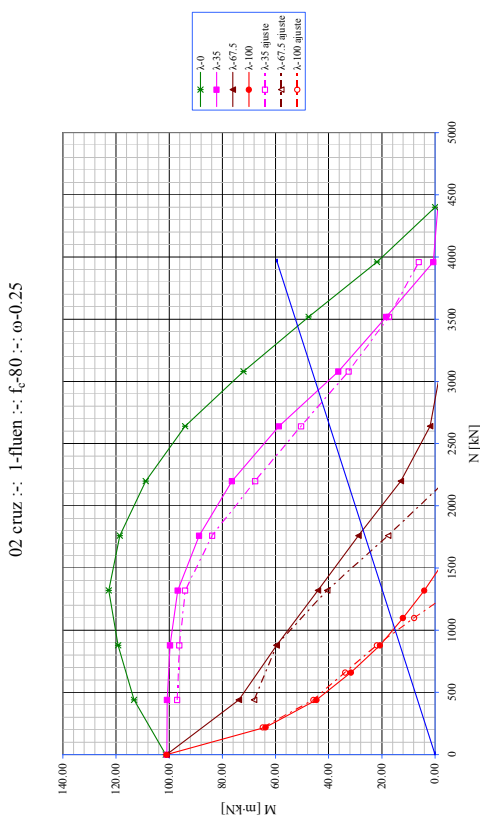
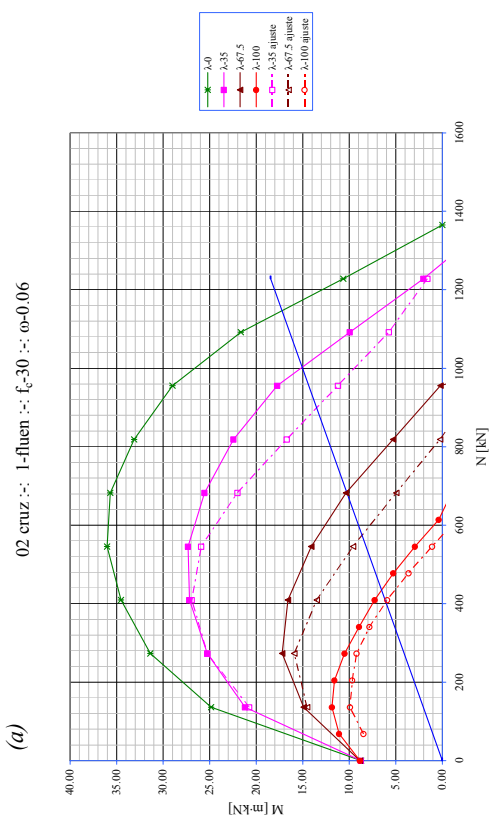
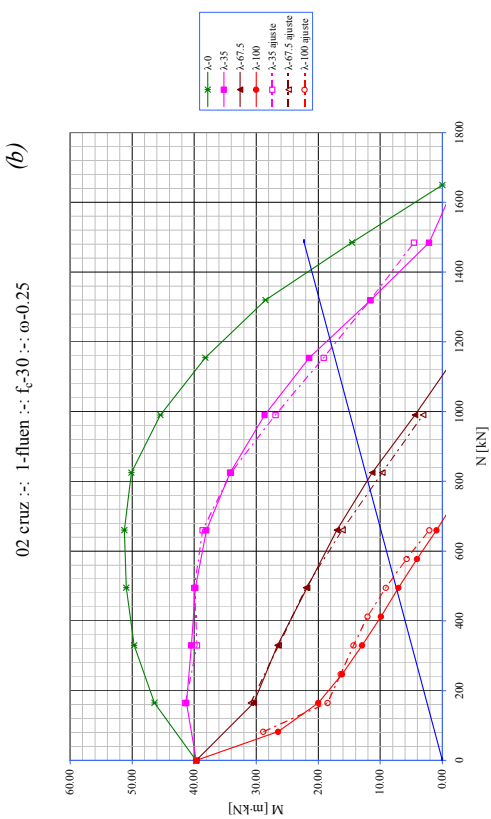
Sección Cruz; 02 Cruz; Flexión recta Fluencia $\varphi=0$

(a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.06$

(c)



Sección Cruz; 02 Cruz: Flexión recta Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=80$ $\omega=0.25$; (b) $f_c=80$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=100$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=100$ $\omega=0.25$

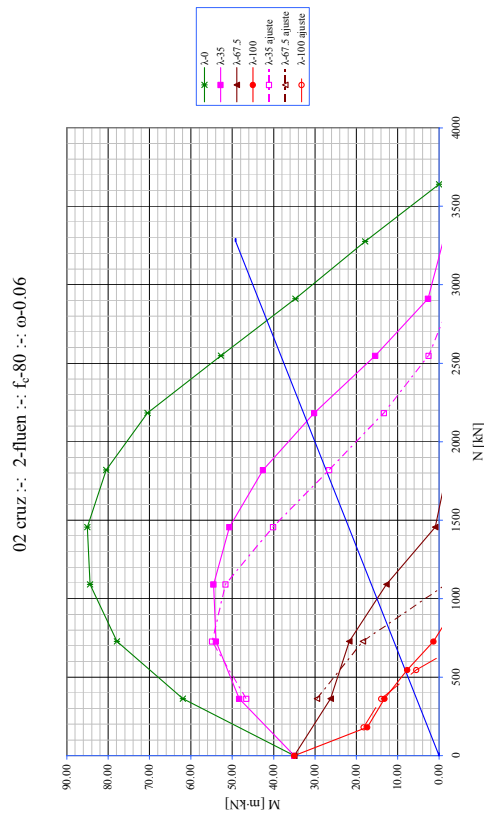
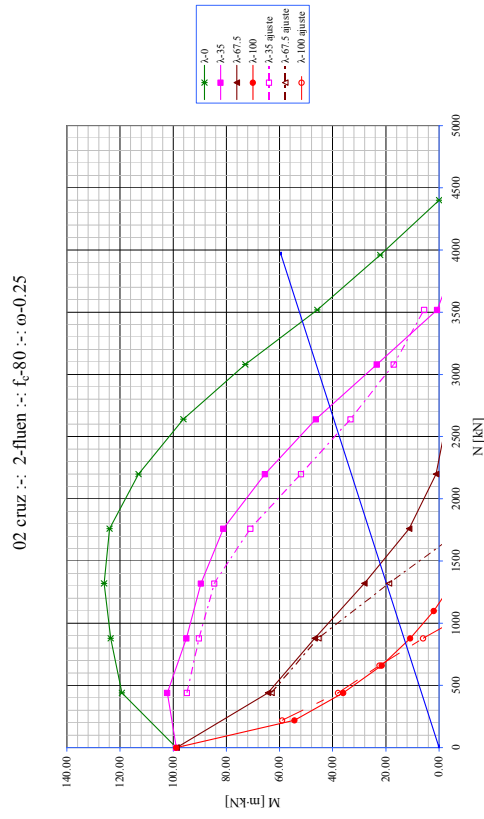
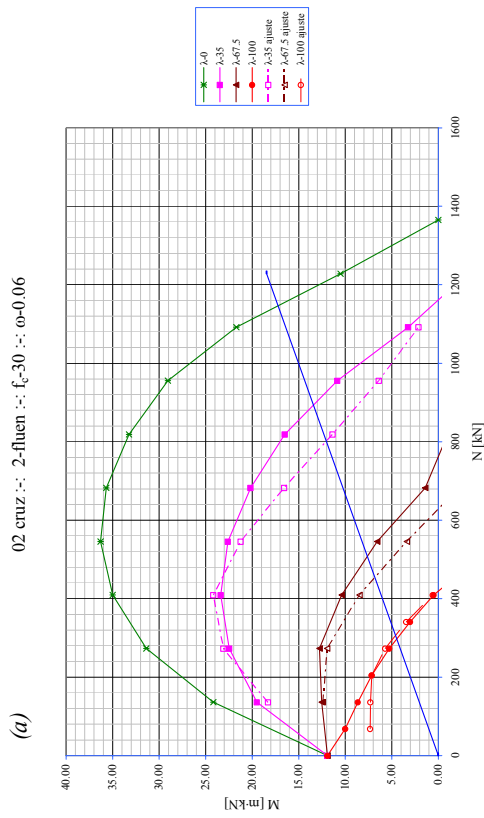
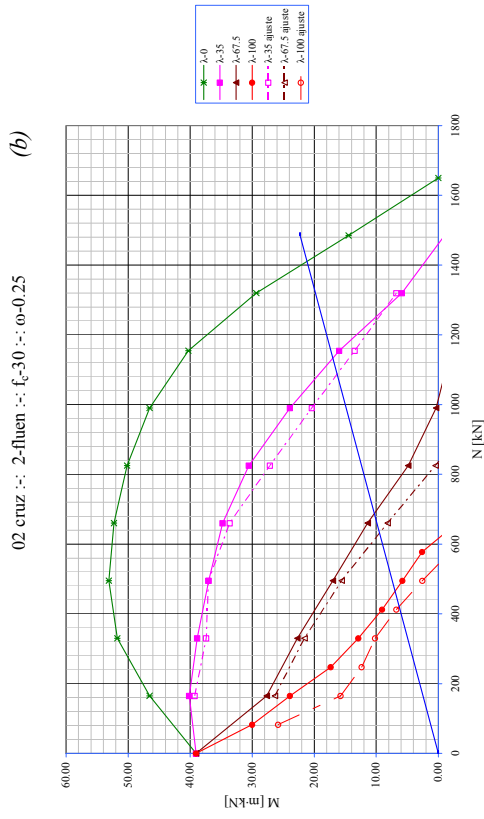


(d)

Sección Cruz; 02 Cruz: Flexión recta Fluencia $\varphi=1$

(a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

(c)



(a)

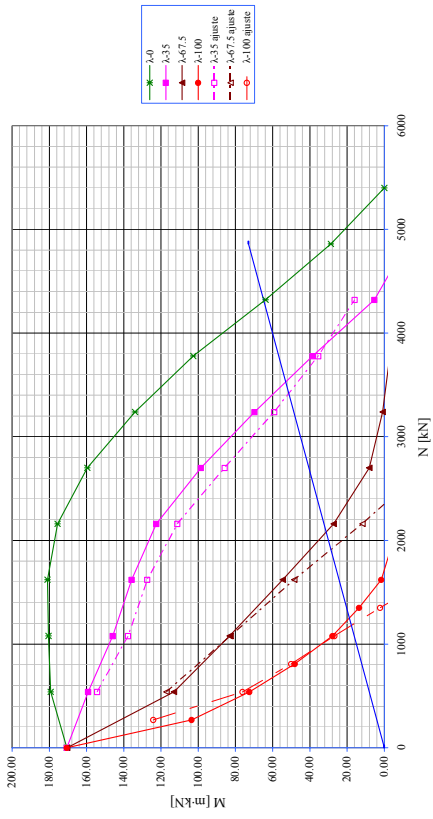
(b)

(c)

(d)

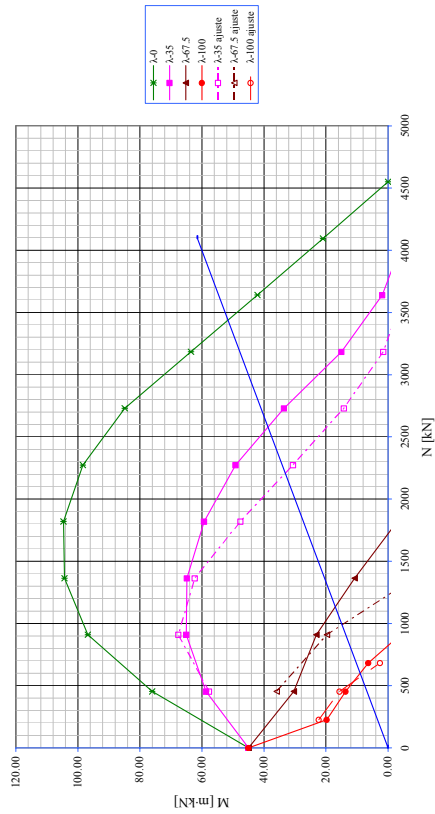
Sección Cruz; 02 Cruz: Flexión recta Fluencia $\varphi=2$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

02 cruz :: 2-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.50$



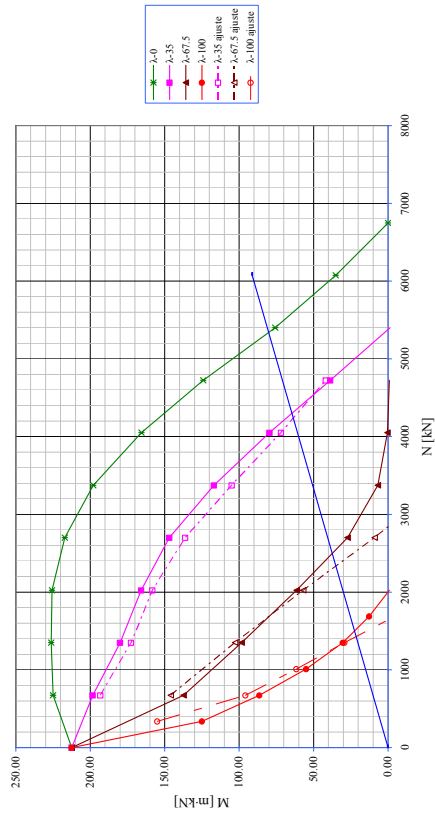
(a)

02 cruz :: 2-fluen :: $f_c=100$:: $\omega=0.06$



(b)

02 cruz :: 2-fluen :: $f_c=100$:: $\omega=0.50$

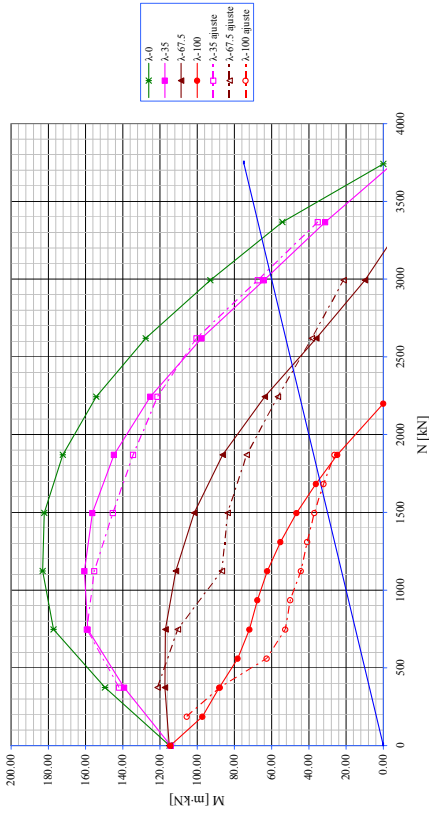


(c)

Sección Cruz; 02 Cruz: Flexión recta Fluencia $\varphi=2$
 (a) $f_c=80$ $\omega=0.50$; (b) $f_c=100$ $\omega=0.06$; (c) $f_c=100$ $\omega=0.50$

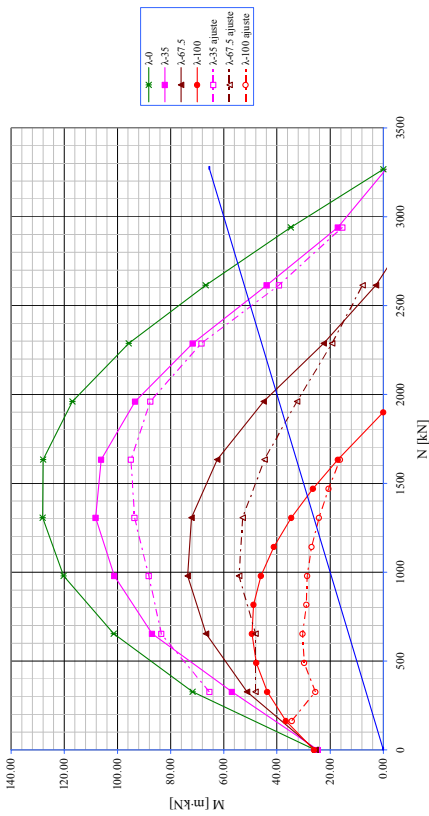
(b)

03 hex Nueva Propuesta :: 0-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.25$

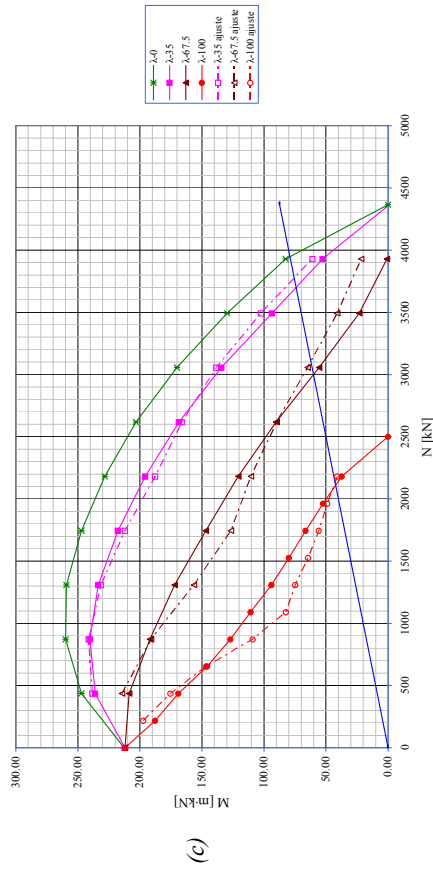


(a)

03 hex Nueva Propuesta :: 0-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.06$



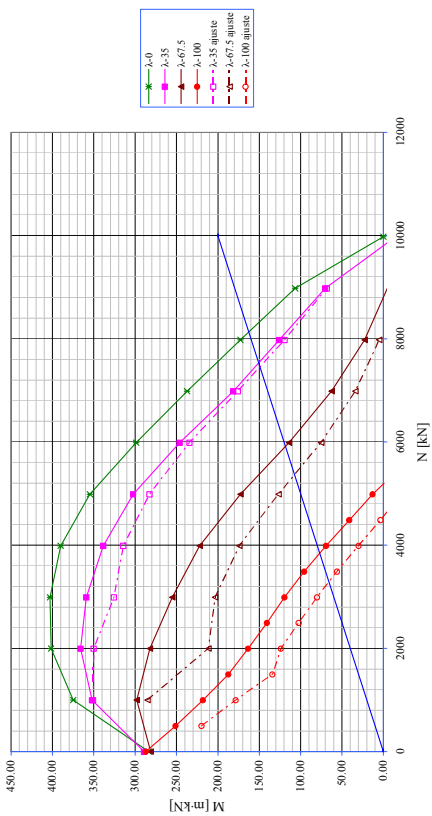
03 hex Nueva Propuesta :: 0-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.50$



Sección Hexagonal 03 Hex: Flexión recta Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=30$ $\omega=0.50$

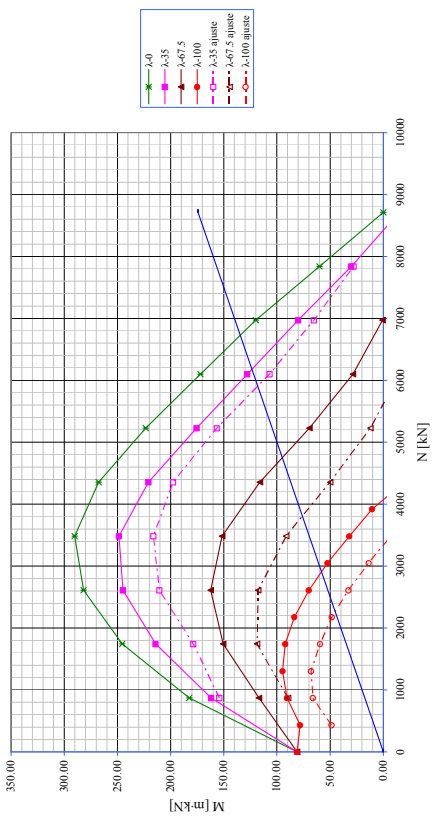
(b)

03 hex Nueva Propuesta :: 0-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.25$

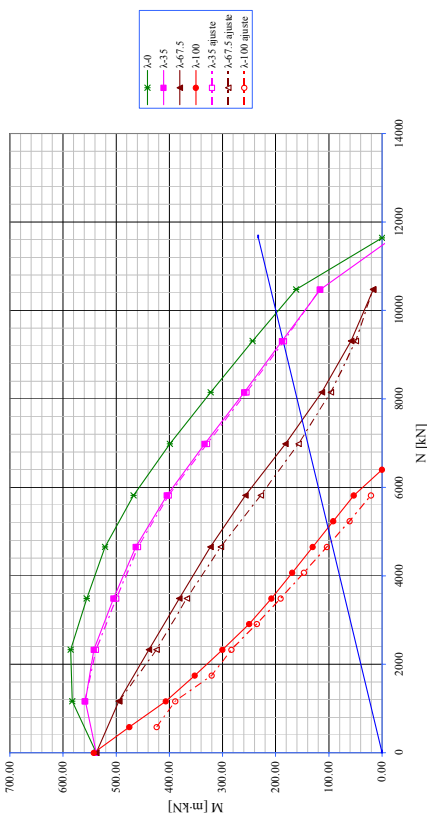


(a)

03 hex Nueva Propuesta :: 0-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.06$

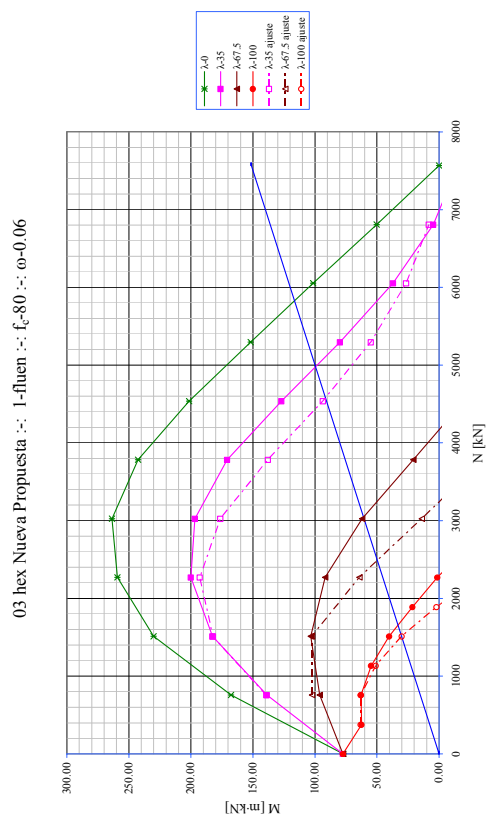
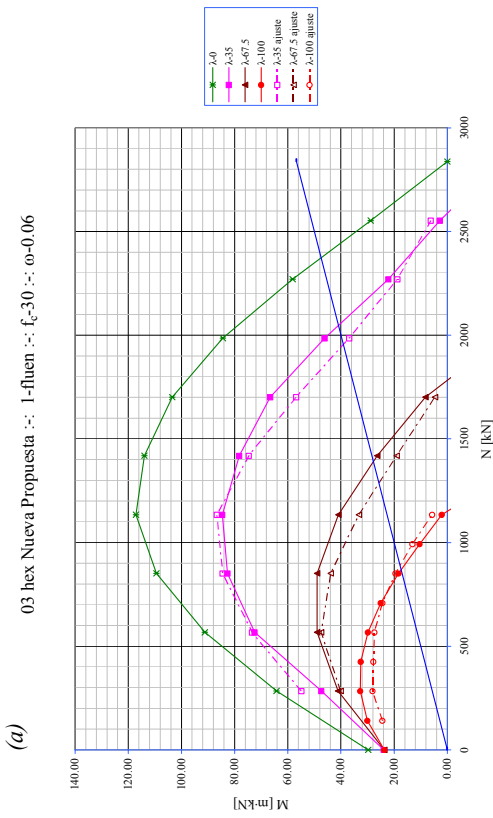
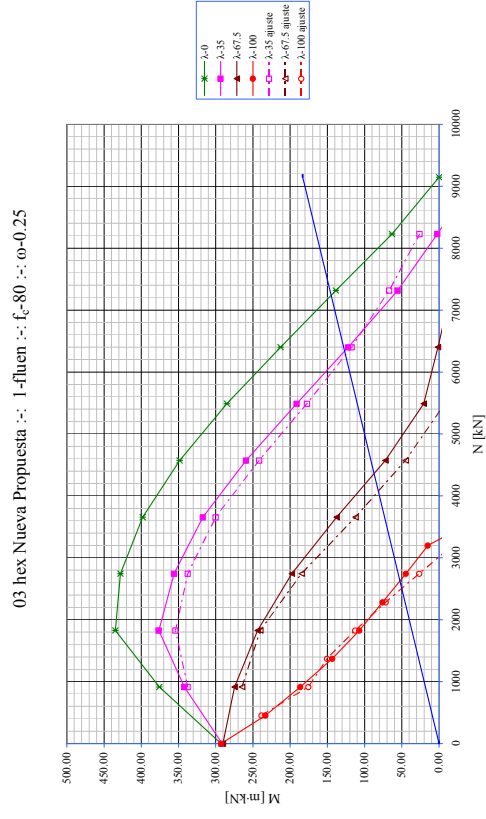
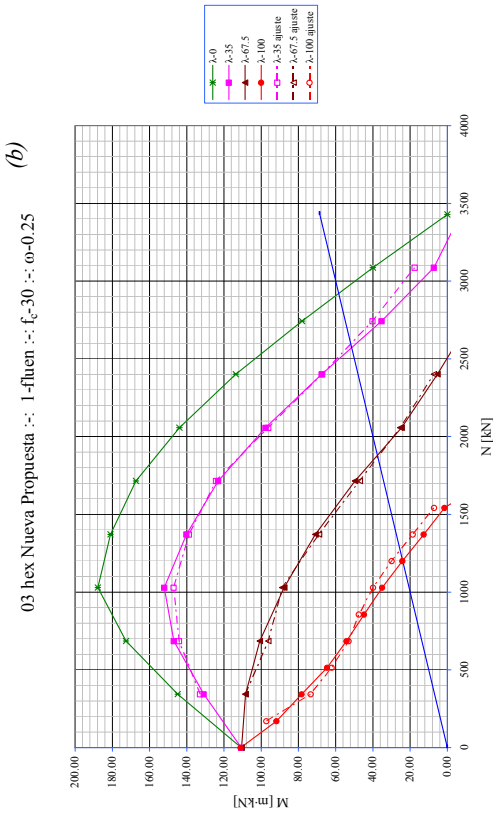


03 hex Nueva Propuesta :: 0-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.50$



(c)

Sección Hexagonal 03 Hex: Flexión recta Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=80$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.50$

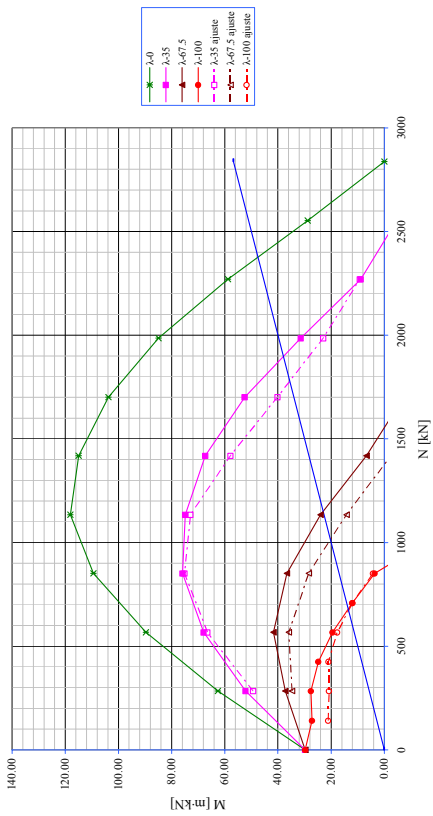


Sección Hexagonal 03 Hex: Flexión recta Fluencia $\varphi=1$

(a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

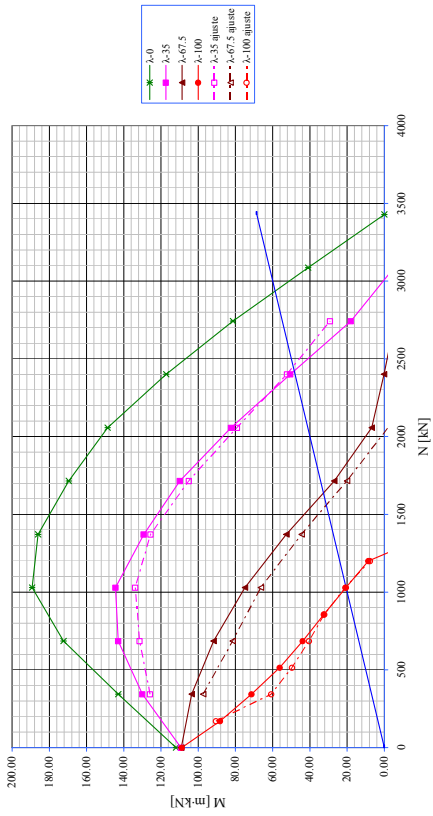
(a)

03 hex Nueva Propuesta :: 2-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.06$



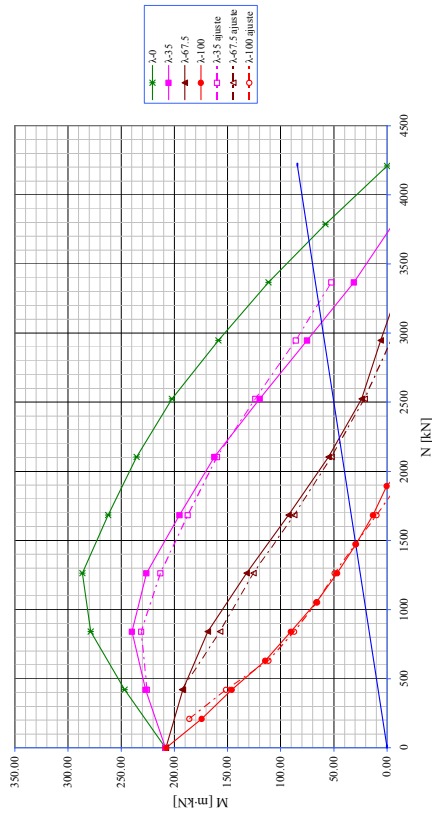
(b)

03 hex Nueva Propuesta :: 2-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.25$



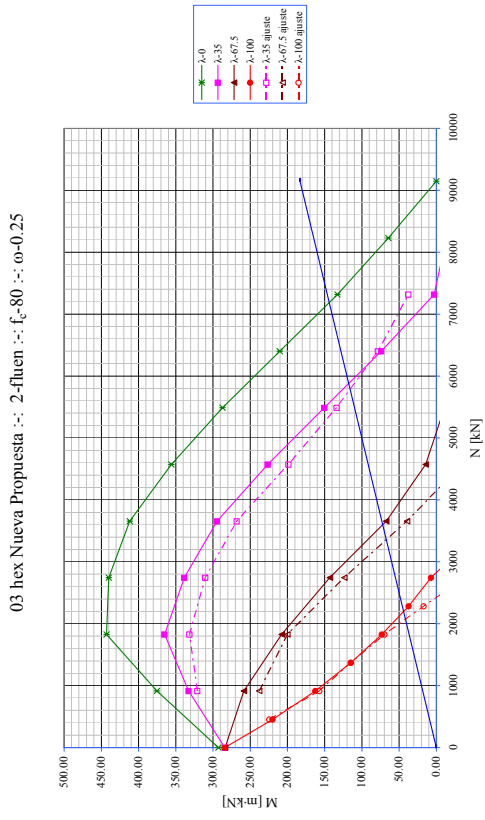
(c)

03 hex Nueva Propuesta :: 2-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.50$

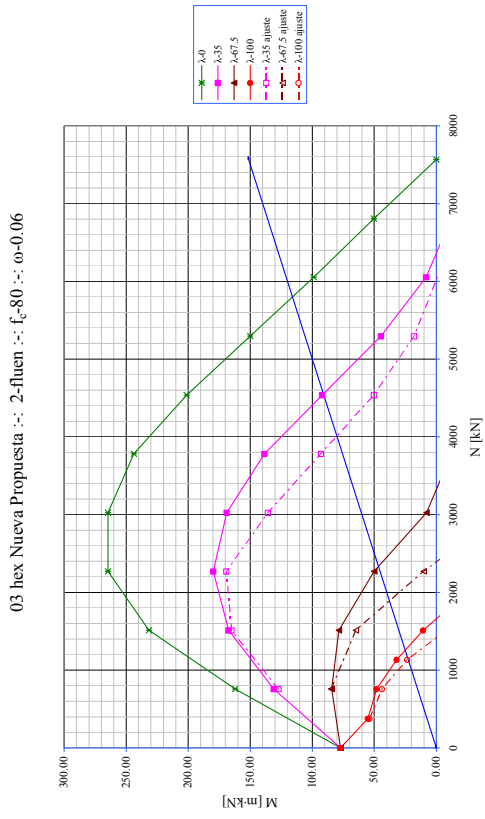


Sección Hexagonal 03 Hex: Flexión recta Fluencia $\varphi=2$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=30$ $\omega=0.50$

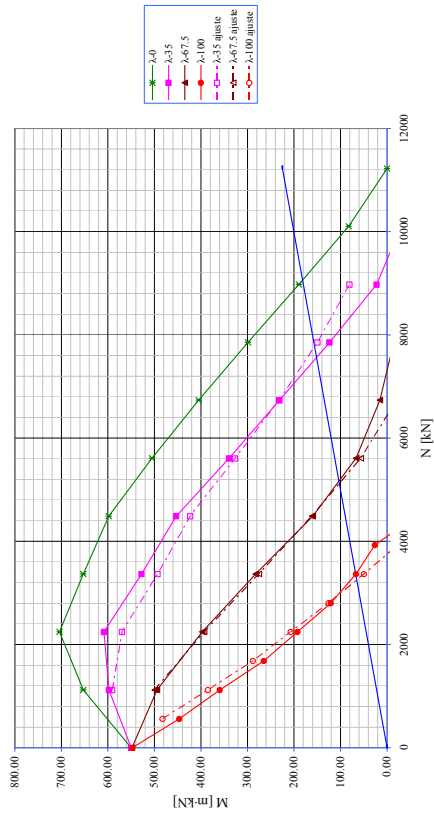
(b)



(a)



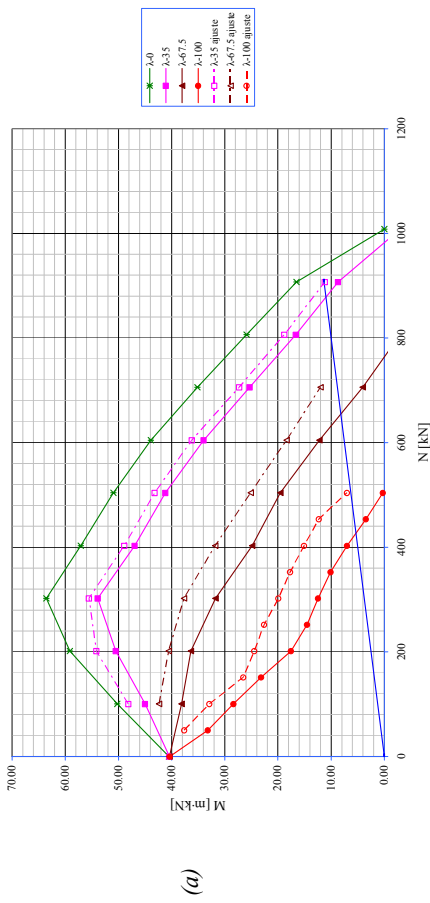
03 hex Nueva Propuesta :: 2-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.50$



(c)

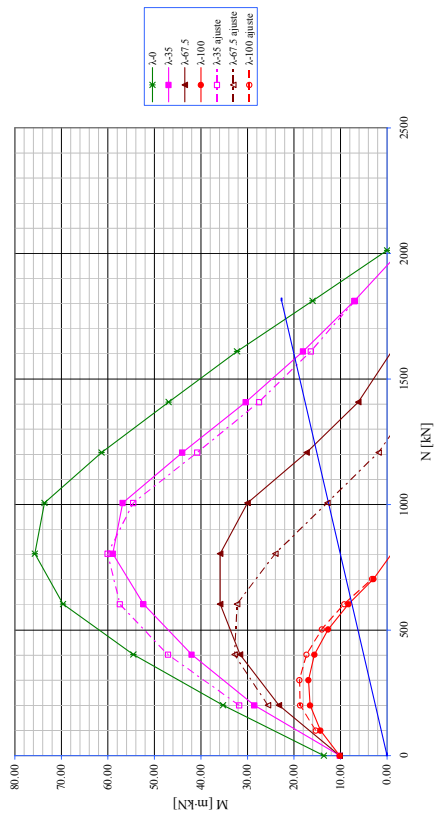
Sección Hexagonal 03 Hex: Flexión recta Fluencia $\varphi=2$
 (a) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=80$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.50$

04 hueca Nueva Propuesta :: 0-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.50$



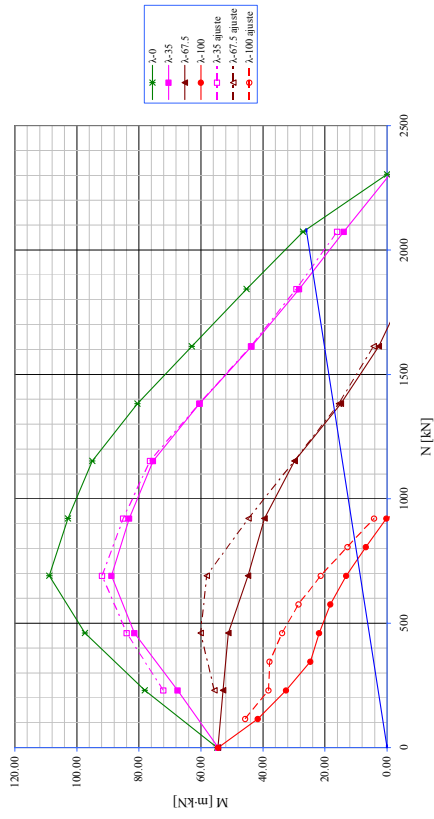
(a)

04 hueca Nueva Propuesta :: 0-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.06$



(b)

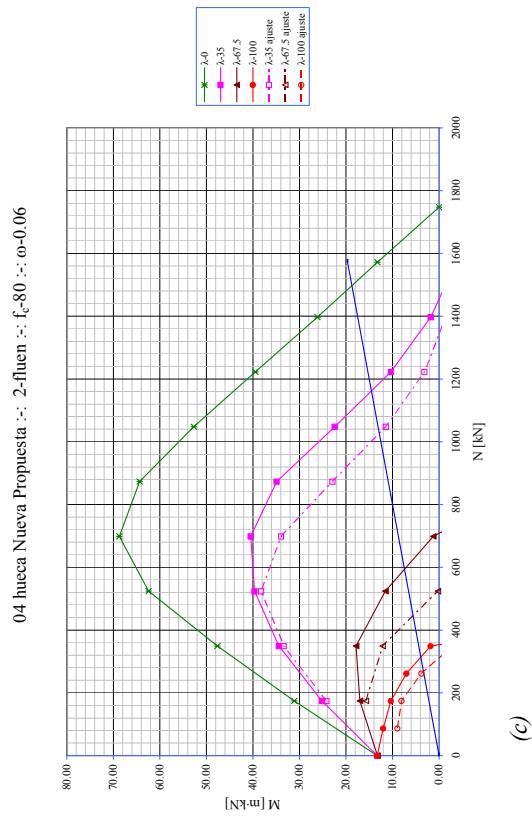
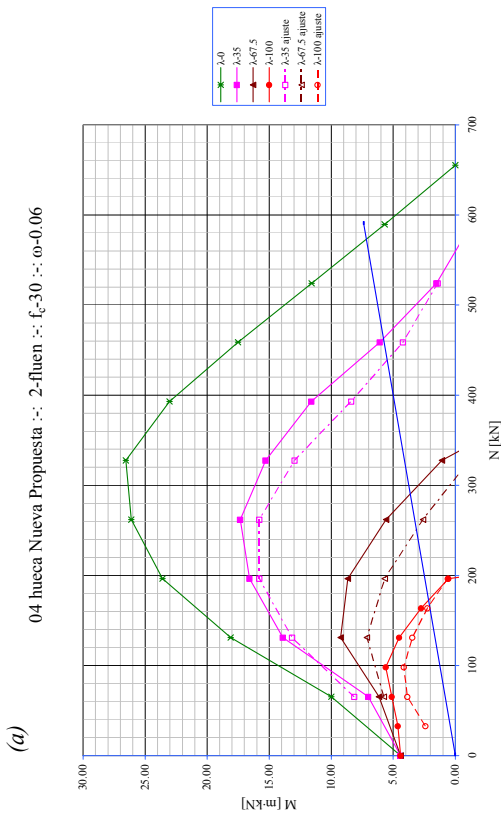
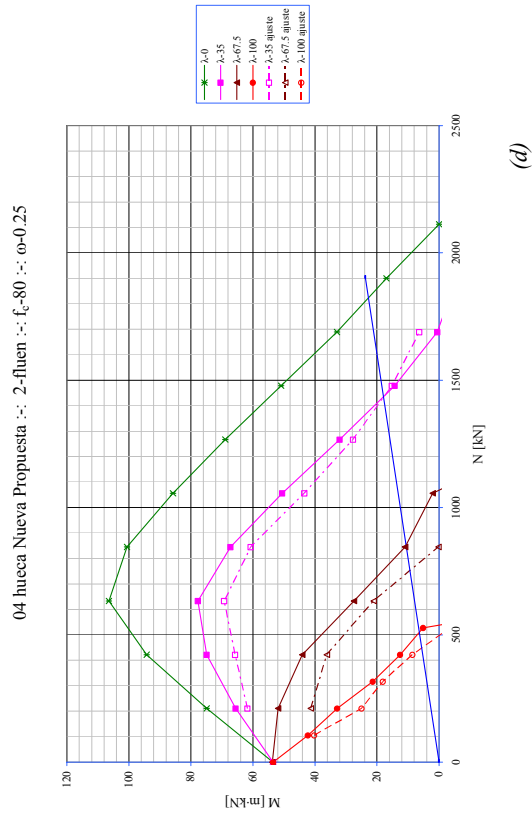
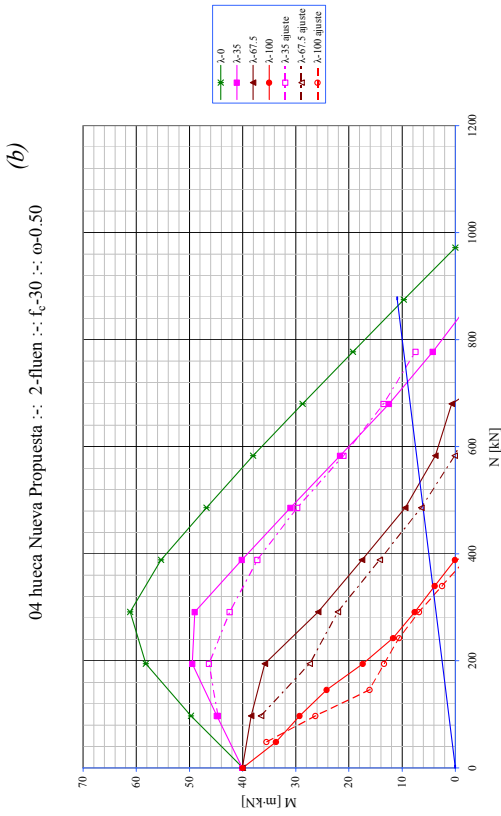
04 hueca Nueva Propuesta :: 0-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.25$



(c)

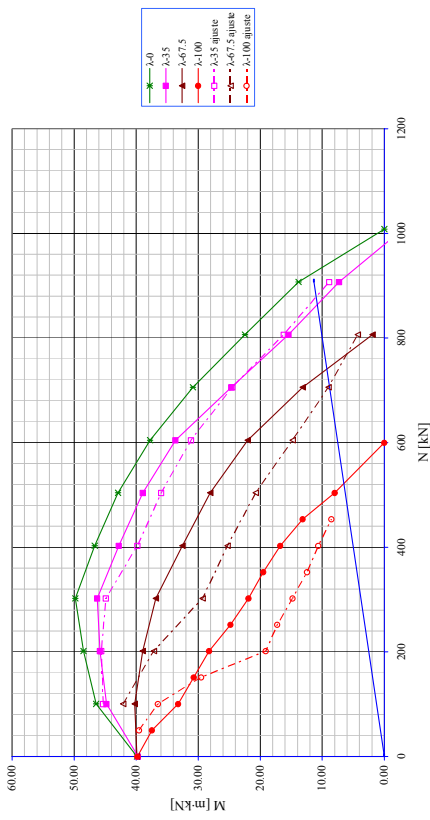
Sección Hueca [1 célula] 04 Hueca: Flexión recta Fluencia $\varphi=0$

(a) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (b) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.25$



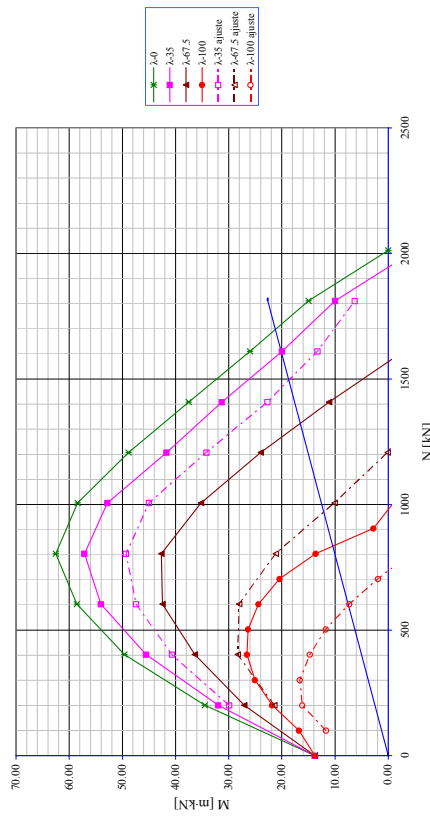
Sección Hueca [1 célula] 04 Hueca: Flexión recta Fluencia $\phi=2$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

04 hueca :: $\beta^* 22.5$:: 0-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.50$



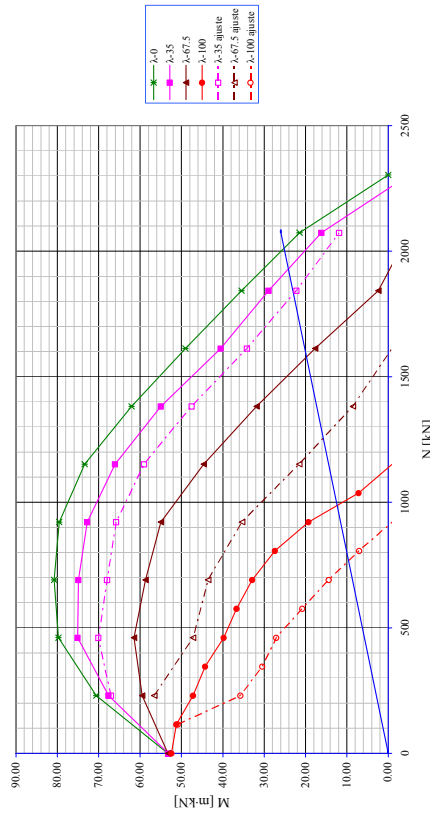
(a)

04 hueca :: $\beta^* 22.5$:: 0-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.06$



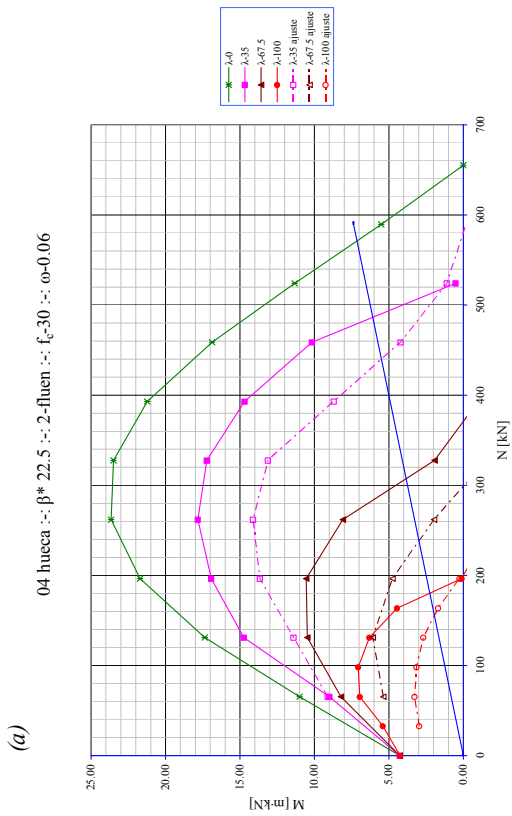
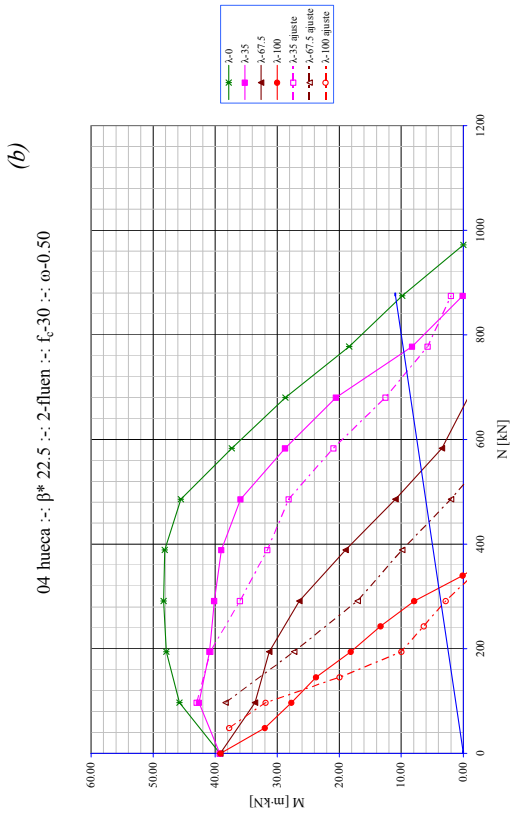
(b)

04 hueca :: $\beta^* 22.5$:: 0-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.25$



(c)

Sección Hueca [1 célula] 04 Hueca: Flexión esviada $\beta^*=22.5^\circ$ Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (b) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.25$



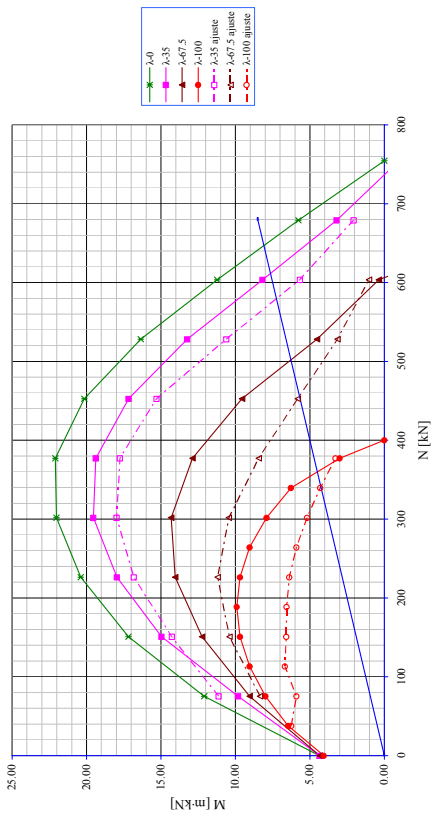
(a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

(a)

(d)

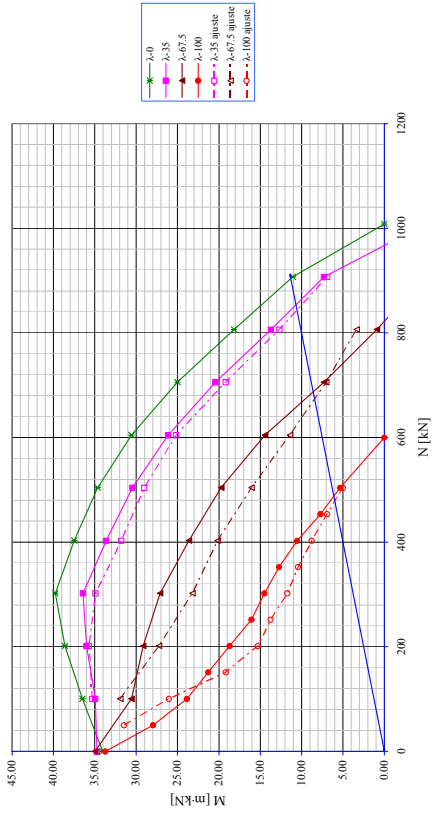
(a)

04 hueca :: $\beta^* 45$:: 0-fluen :: $f_c 30$:: $\omega 0.06$



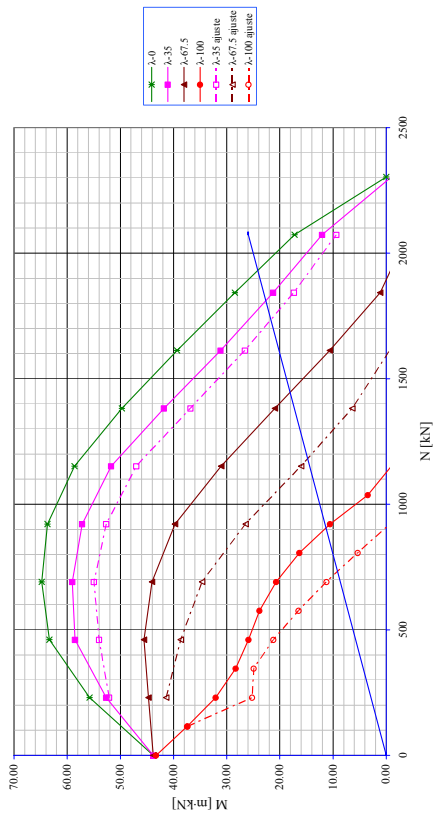
(b)

04 hueca :: $\beta^* 45$:: 0-fluen :: $f_c 30$:: $\omega 0.50$



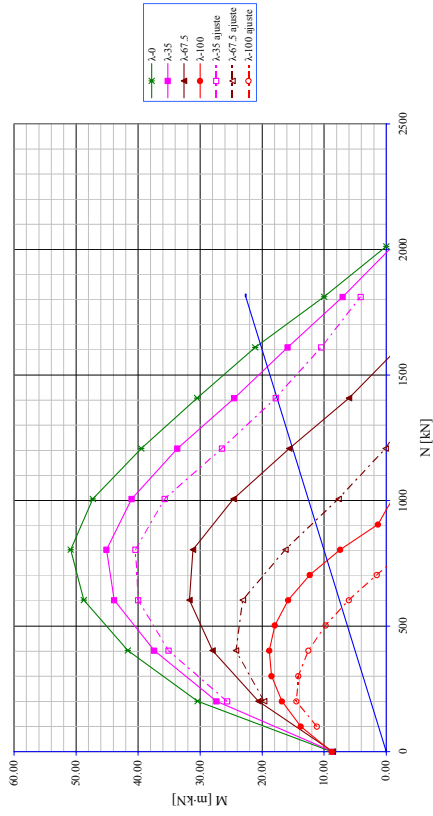
(d)

04 hueca :: $\beta^* 45$:: 0-fluen :: $f_c 80$:: $\omega 0.25$



(c)

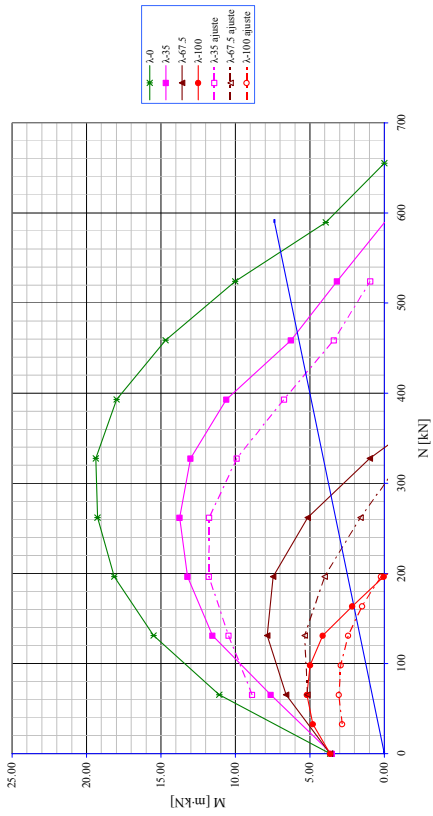
04 hueca :: $\beta^* 45$:: 0-fluen :: $f_c 80$:: $\omega 0.06$



Sección Hueca [1 célula] 04 Hueca: Flexión esviada $\beta^*=45^\circ$ Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

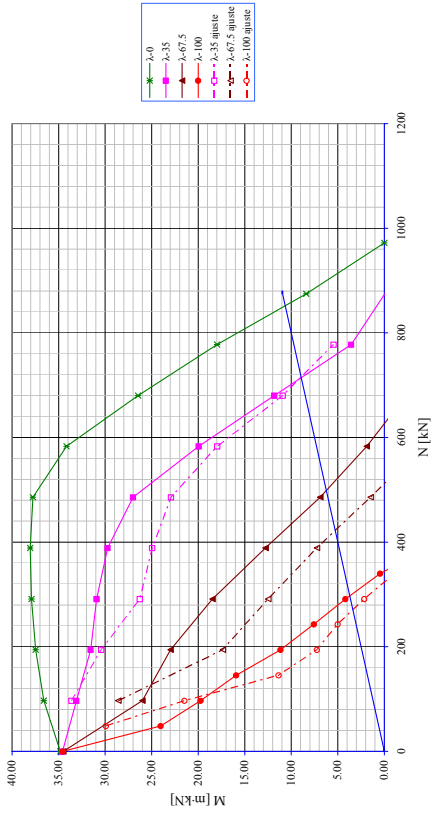
(a)

04 hueca :: $\beta^* 45$:: 2-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.06$



(b)

04 hueca :: $\beta^* 45$:: 2-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.50$



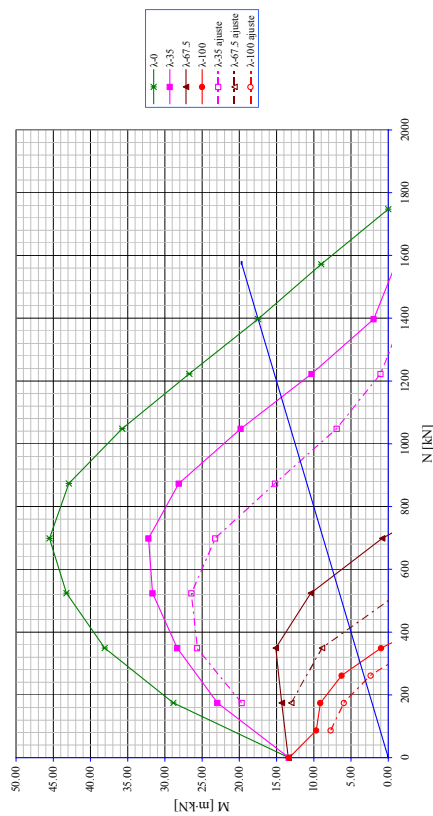
(c)

Sección Hueca [1 célula] 04 Hueca: Flexión esviada $\beta^*=45^\circ$ Fluencia $\varphi=2$

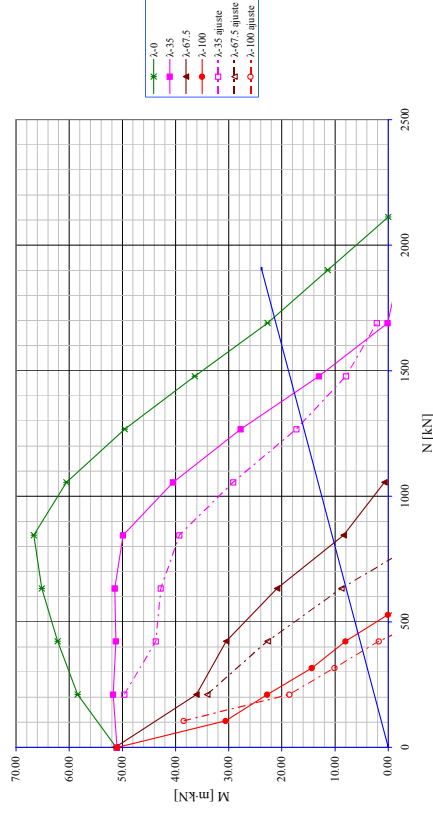
(a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

(d)

04 hueca :: $\beta^* 45$:: 2-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.06$

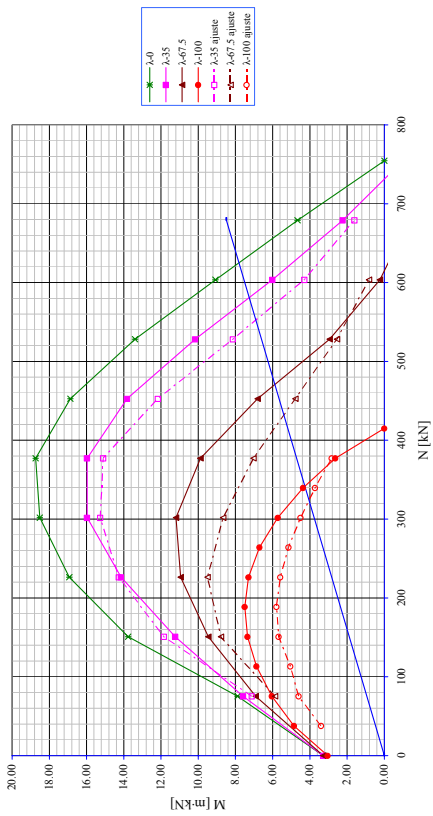


04 hueca :: $\beta^* 45$:: 2-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.25$



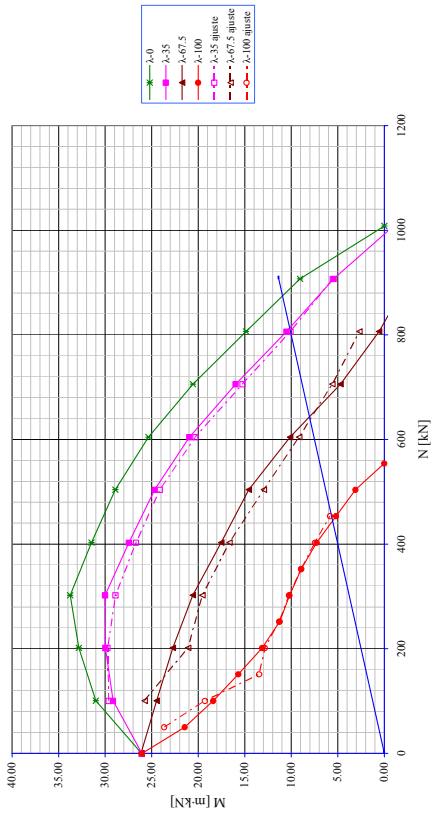
(a)

04 hueca :: $\beta^* 67.5$:: 0-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.06$



(b)

04 hueca :: $\beta^* 67.5$:: 0-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.50$



(c)

Sección Hueca [1 célula] 04 Hueca: Flexión esviada $\beta^*=67.5^\circ$ Fluencia $\varphi=0$

(a) $f_c=30$ $\omega=0.06$;

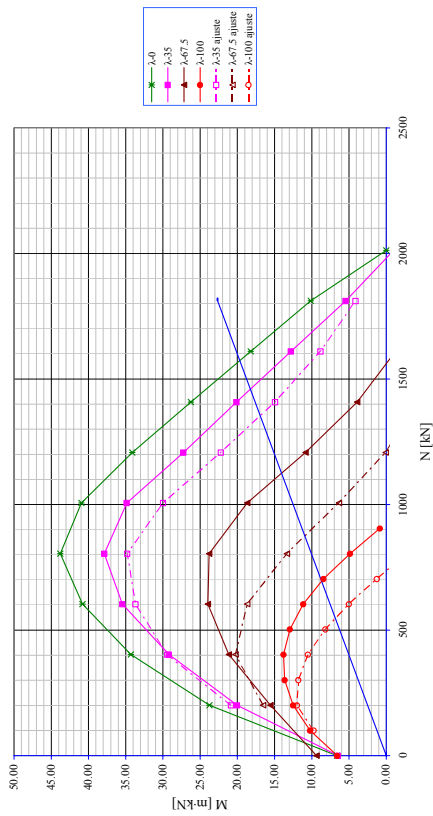
(b) $f_c=30$ $\omega=0.50$;

(c) $f_c=80$ $\omega=0.06$;

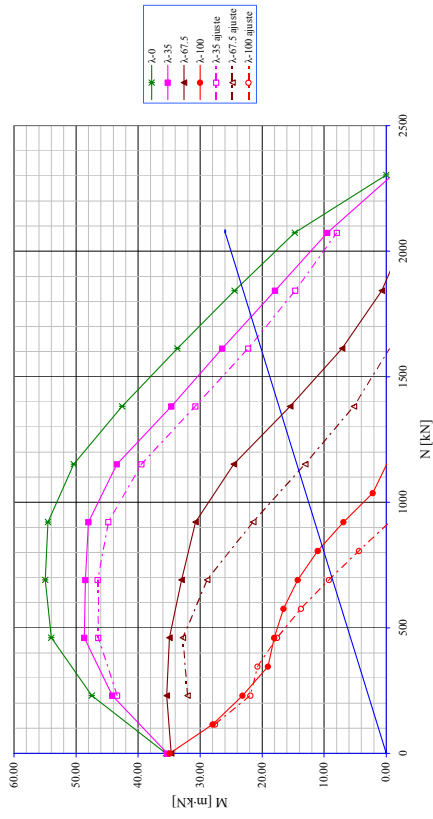
(d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

(d)

04 hueca :: $\beta^* 67.5$:: 0-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.06$

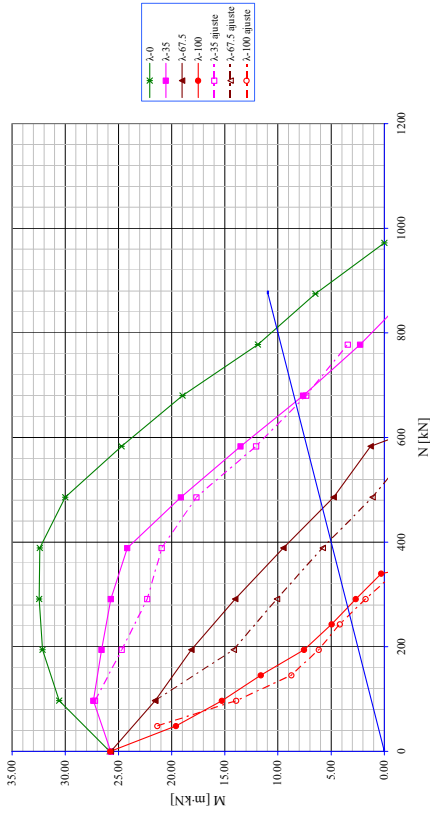


04 hueca :: $\beta^* 67.5$:: 0-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.25$



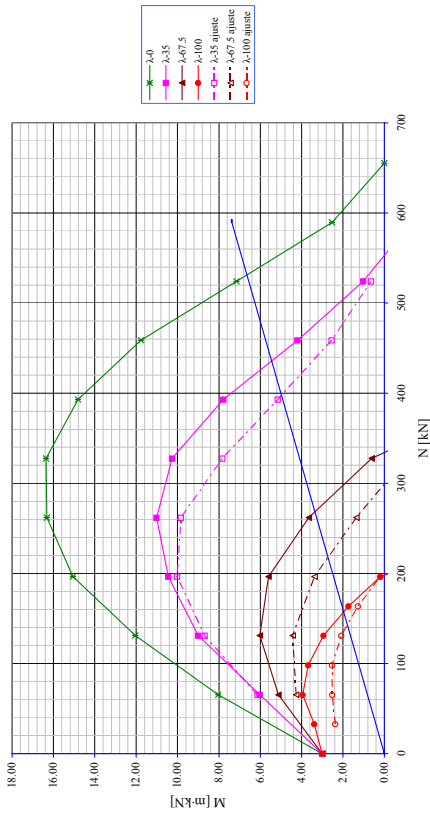
(b)

04 hueca :: $\beta^* 67.5$:: 2-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.50$



(a)

04 hueca :: $\beta^* 67.5$:: 2-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.06$



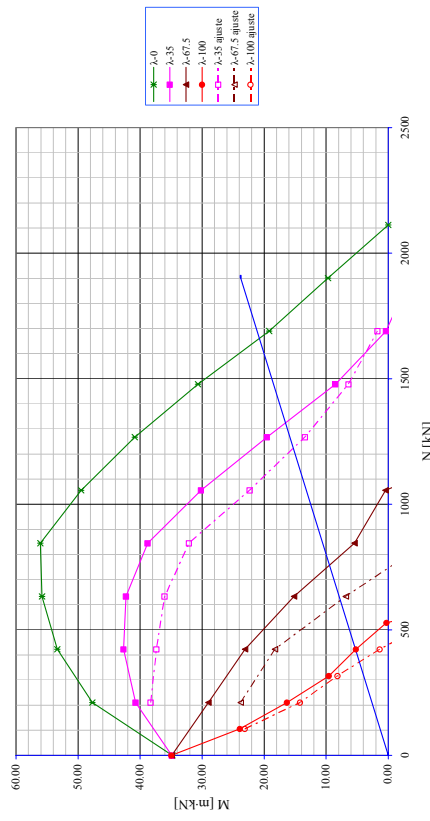
(c)

Sección Hueca [1 célula] 04 Hueca: Flexión esviada $\beta^*=67.5^\circ$ Fluencia $\varphi=2$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$;

(d)

(c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

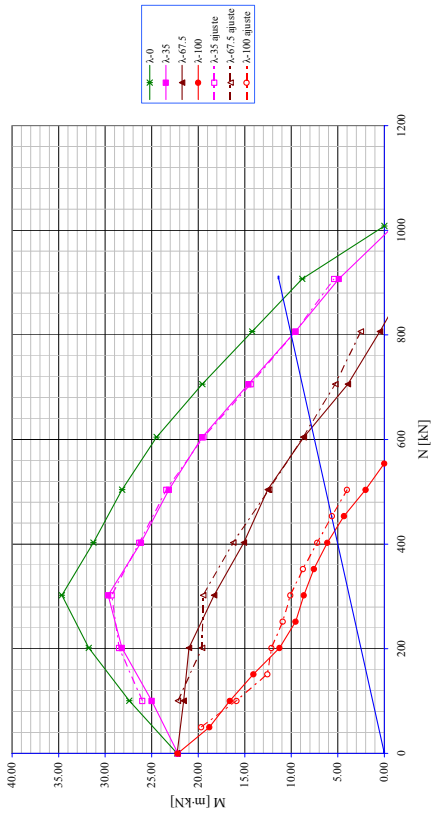
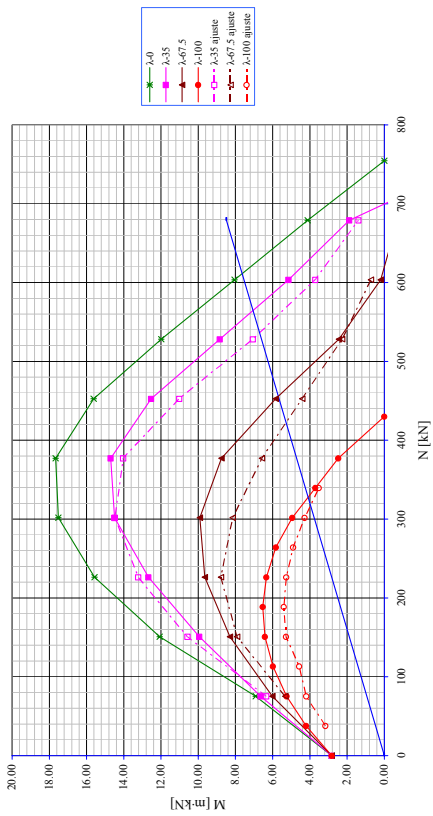
04 hueca :: $\beta^* 67.5$:: 2-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.25$



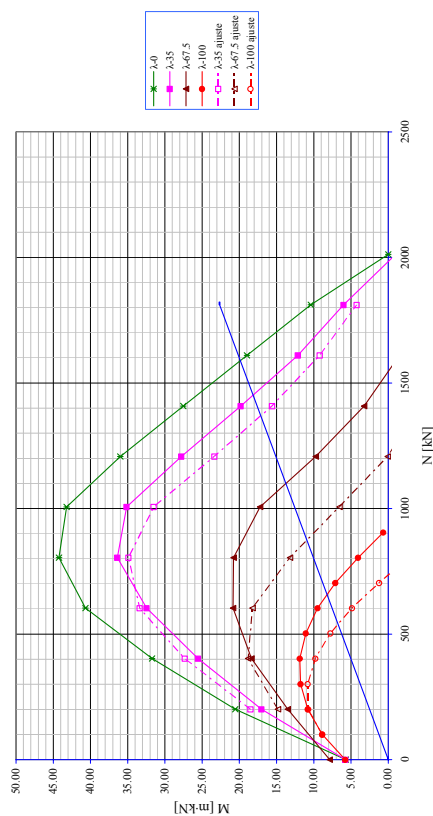
04 hueca :: $\beta^* 67.5$:: 2-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.06$



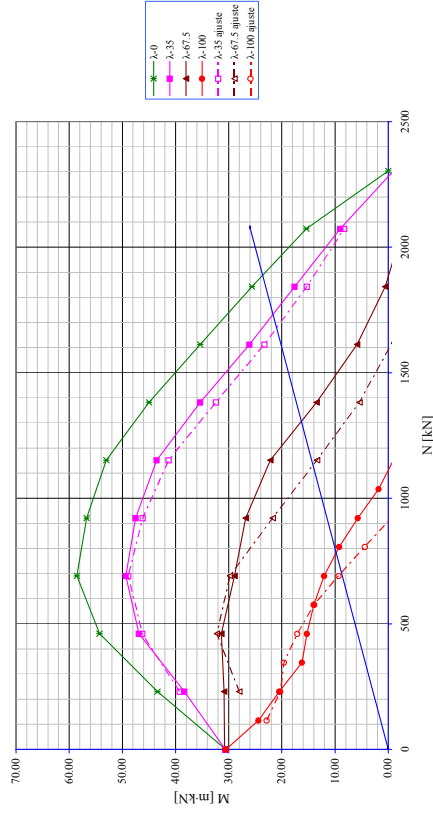
(a) 04 hueca Nueva Propuesta :: $\beta^* 90$:: 0-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.06$ (b) 04 hueca Nueva Propuesta :: $\beta^* 90$:: 0-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.50$



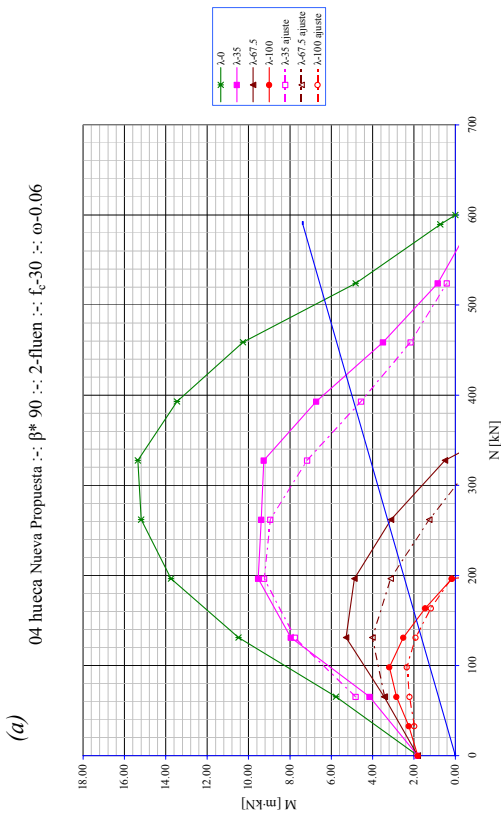
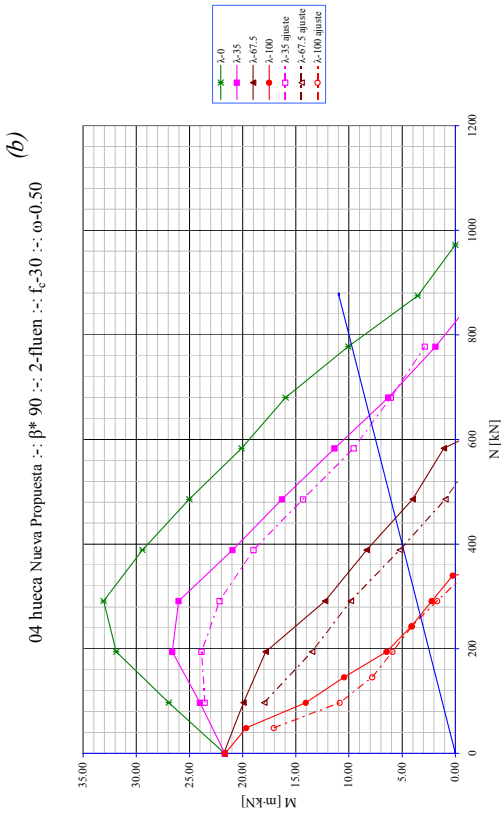
(c) 04 hueca Nueva Propuesta :: $\beta^* 90$:: 0-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.06$



(d) 04 hueca Nueva Propuesta :: $\beta^* 80$:: 0-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.25$



(c) Sección Hueca [1 célula] 04 Hueca: Flexión esviada $\beta^*=90^\circ$ Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$



(d)

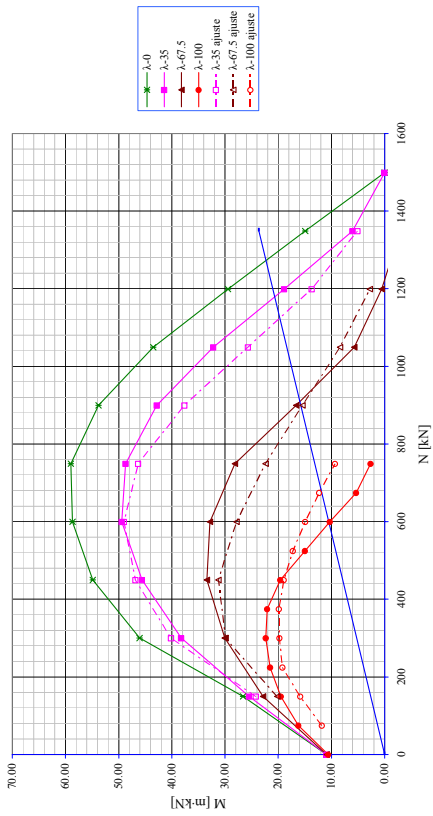
Sección Hueca [1 célula] 04 Hueca: Flexión esviada $\beta^*=90^\circ$ Fluencia $\varphi=2$

(a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

(c)

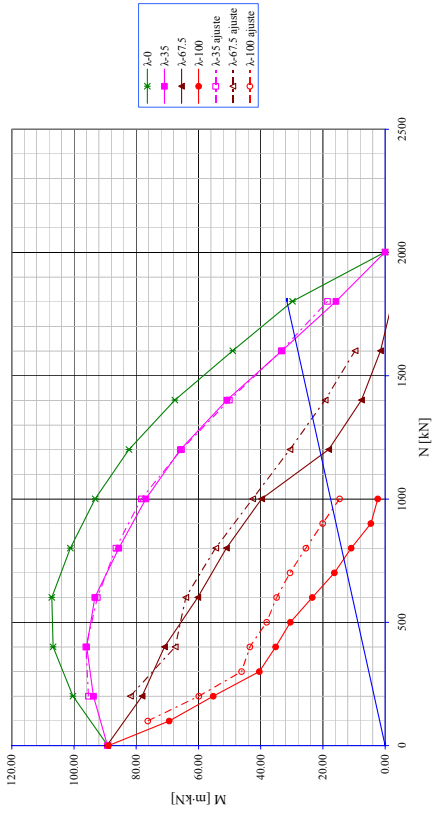
(a)

05 ppt Nueva Propuesta :: 0-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.06$



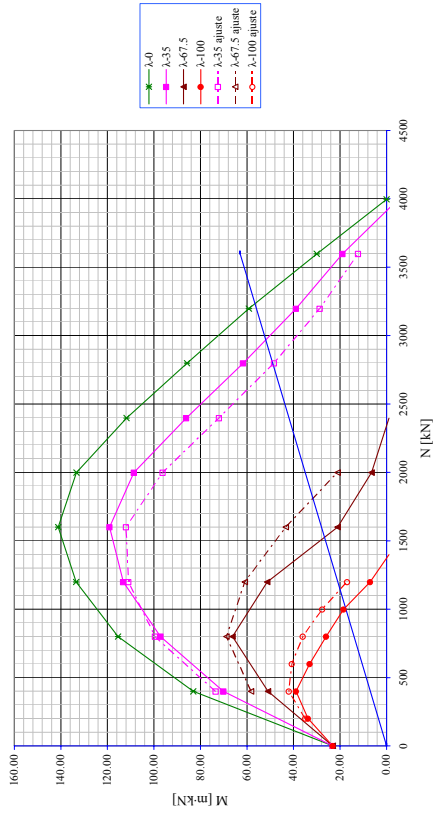
(b)

05 ppt Nueva Propuesta :: 0-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.50$



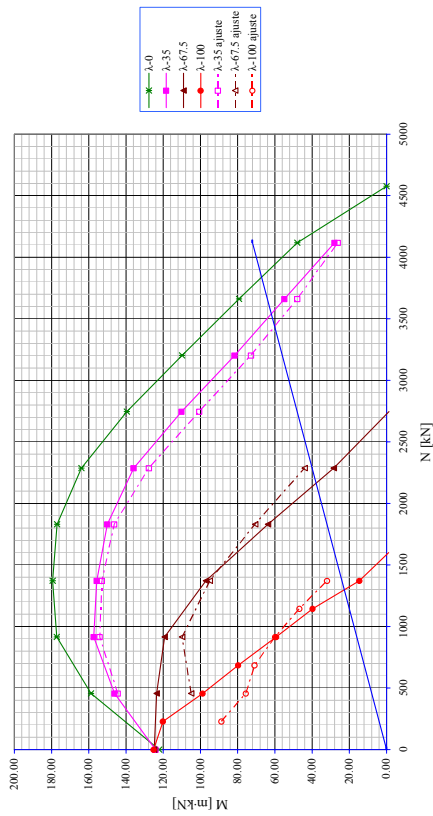
(c)

05 ppt Nueva Propuesta :: 0-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.06$



(d)

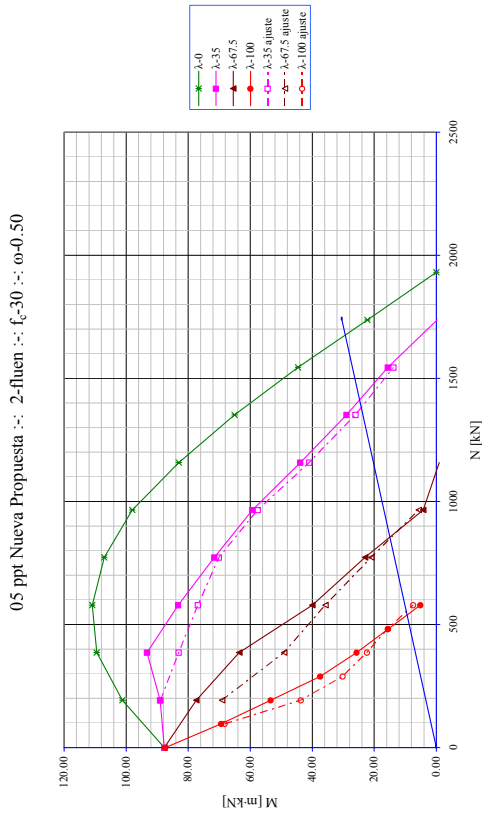
05 ppt Nueva Propuesta :: 0-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.25$



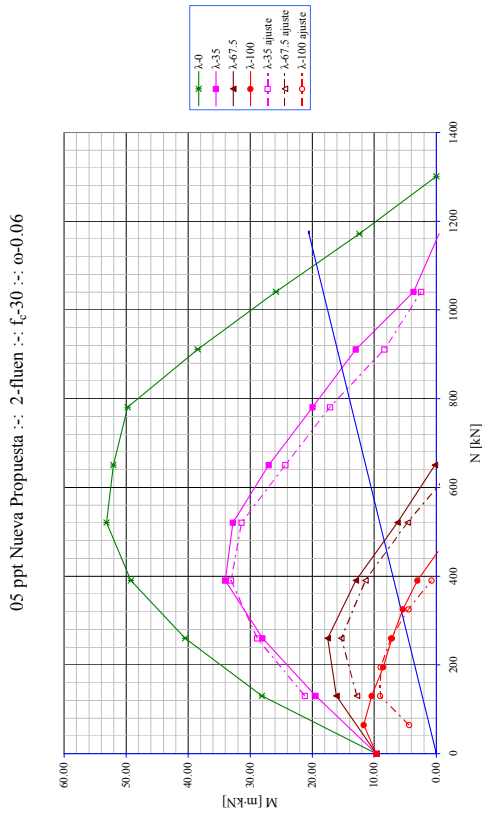
Sección Pila Puente 05 PPT: Flexión recta Fluencia $\varphi=0$

(a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

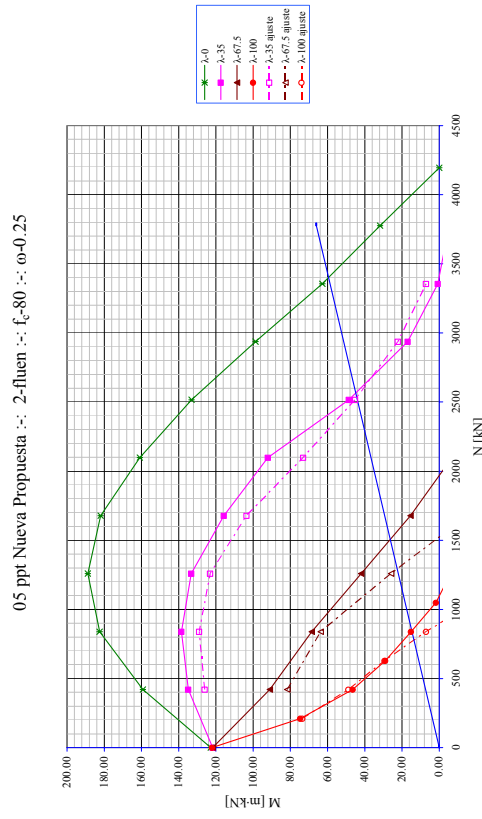
(b)



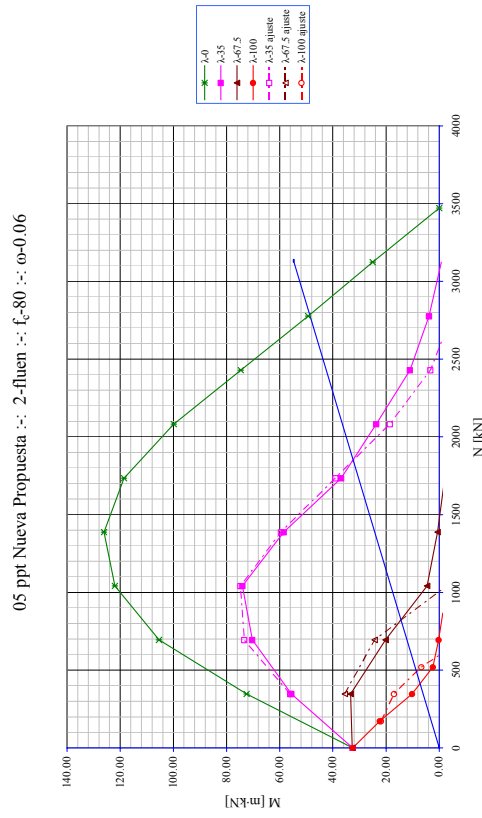
(a)



(d)



(c)

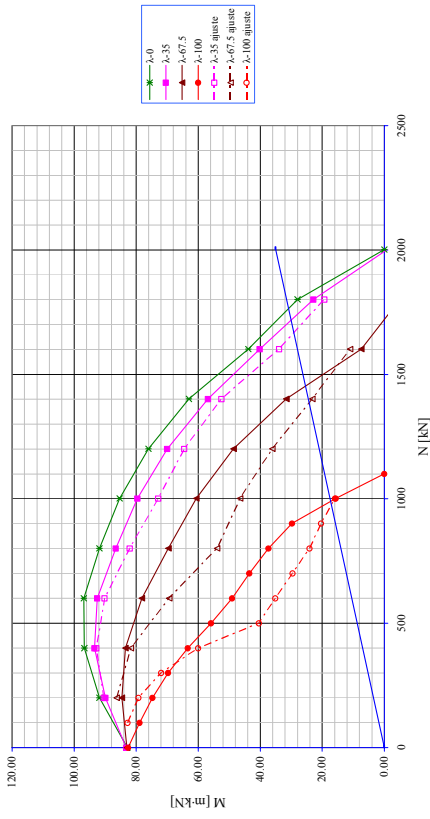


Sección Pila Puente 05 PPT: Flexión recta Fluencia $\varphi=2$

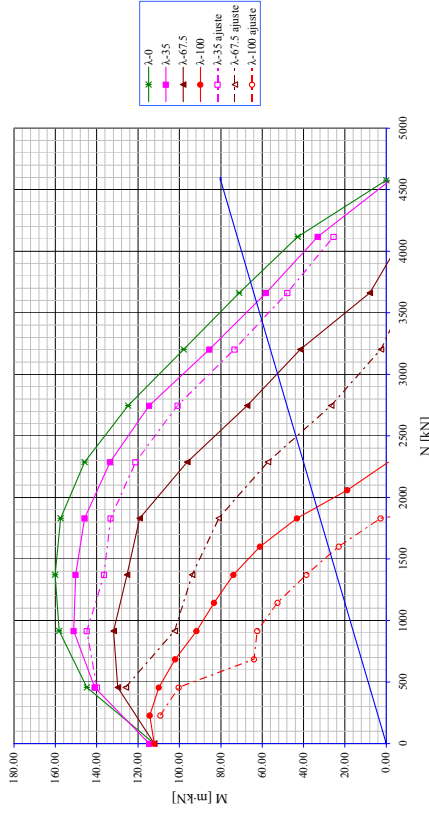
(a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

(b)

05 ppt :: $\beta^* 22.5$:: 0-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.50$



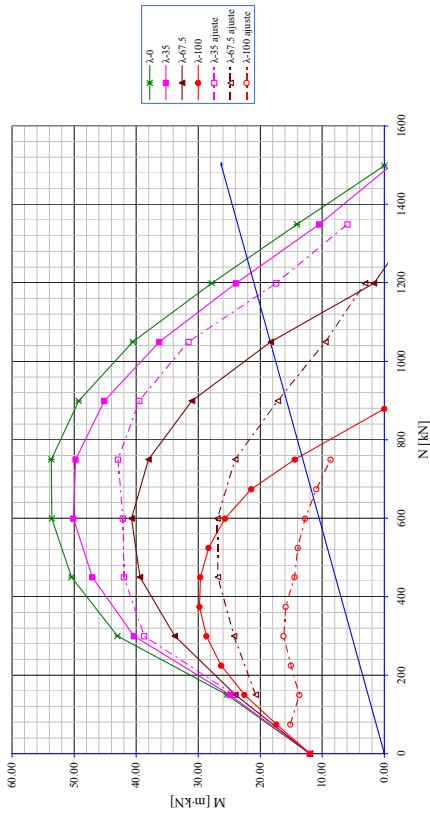
05 ppt :: $\beta^* 22.5$:: 0-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.25$



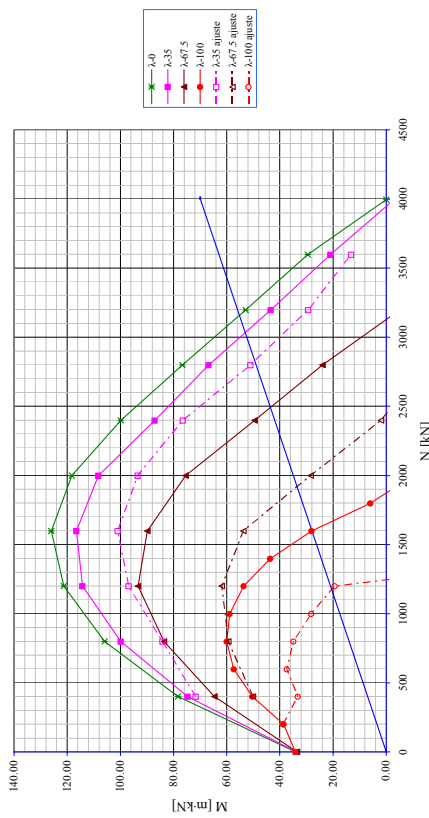
(d)

(a)

05 ppt :: $\beta^* 22.5$:: 0-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.06$



05 ppt :: $\beta^* 22.5$:: 0-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.06$



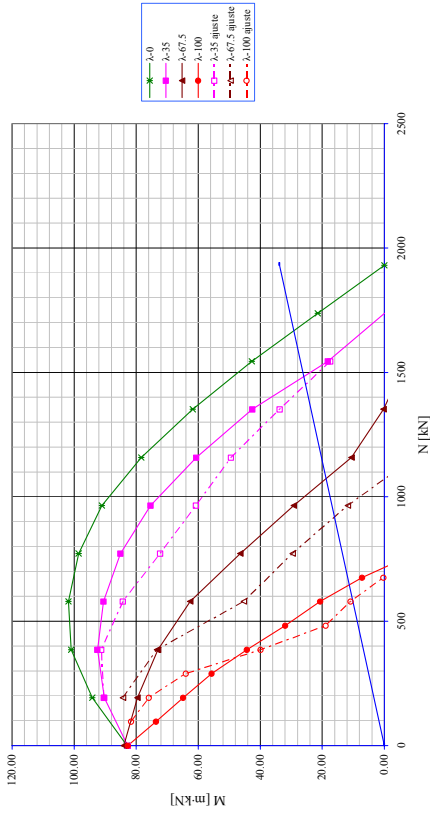
(c)

Sección Pila Puente 05 PPT: Flexión esviada $\beta^*=22.5^\circ$ Fluencia $\varphi=0$

(a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

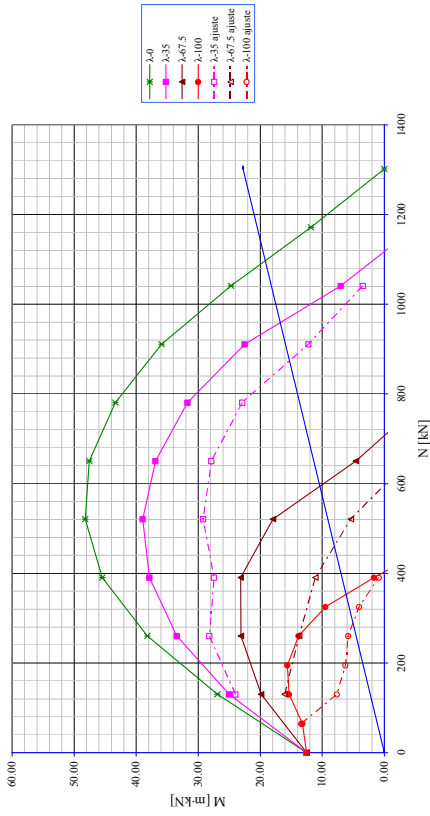
(b)

05 ppt :: $\beta^* 22.5$:: 2-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.50$



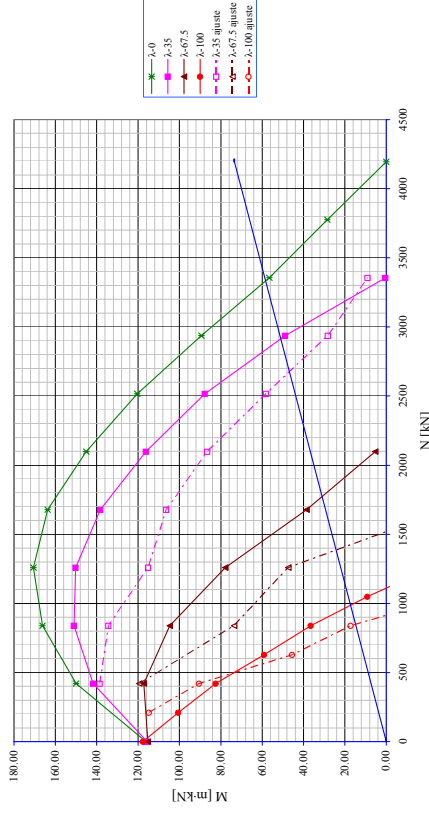
(a)

05 ppt :: $\beta^* 22.5$:: 2-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.06$



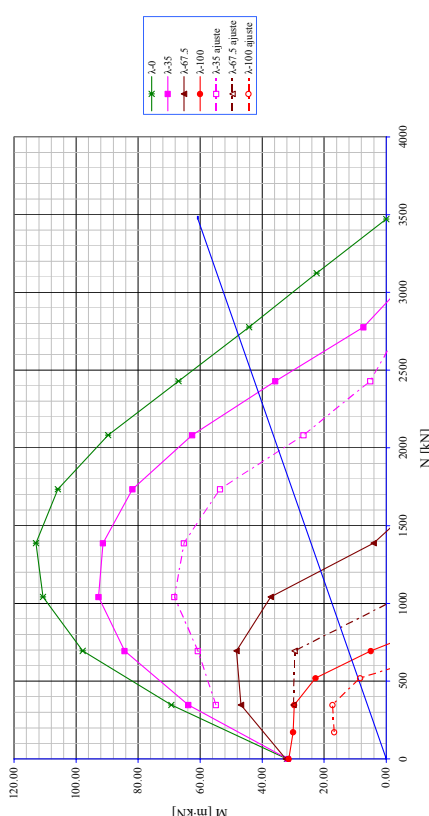
(d)

05 ppt :: $\beta^* 22.5$:: 2-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.25$



(c)

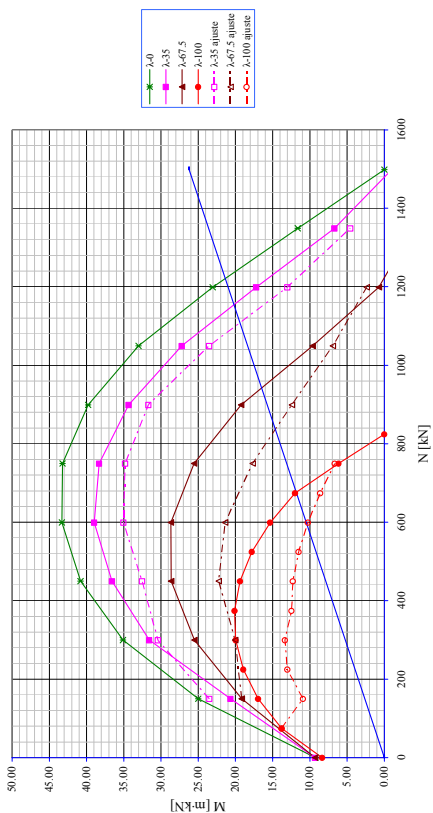
05 ppt :: $\beta^* 22.5$:: 2-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.06$



Sección Pila Puente 05 PPT: Flexión esviada $\beta^*=22.5^\circ$ Fluencia $\varphi=2$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

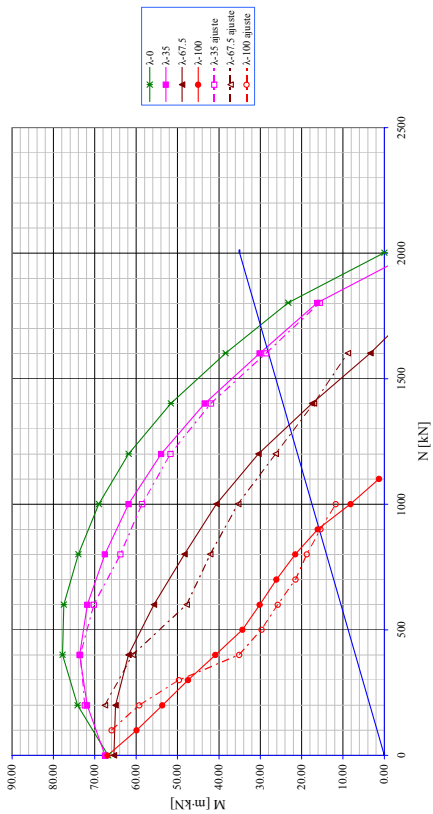
(a)

05 ppt. :: $\beta^* 45$:: 0-fluen. :: $f_c=30$:: $\omega=0.06$



(b)

05 ppt. :: $\beta^* 45$:: 0-fluen. :: $f_c=30$:: $\omega=0.50$



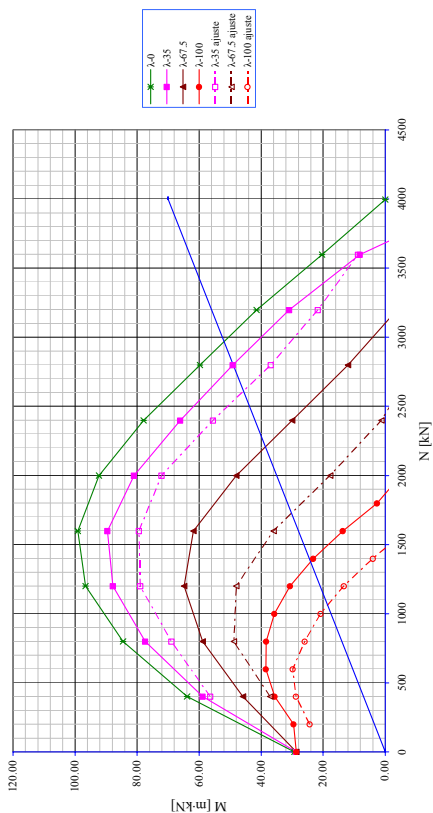
(c)

Sección Pila Puente 05 PPT: Flexión esviada $\beta^*=45^\circ$ Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$;

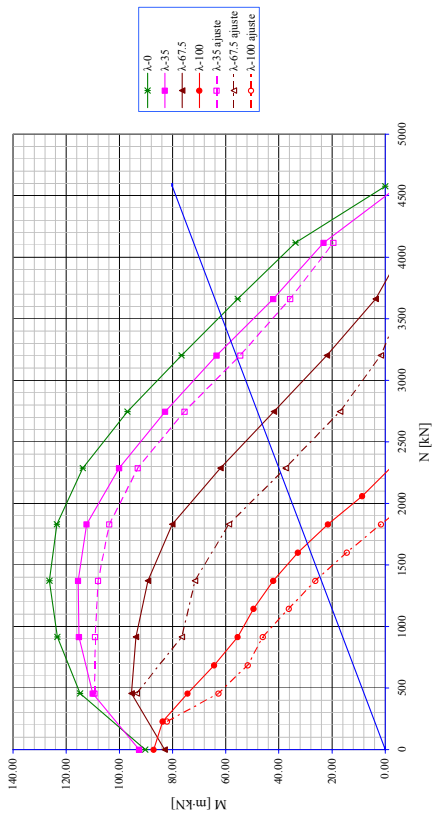
(d)

(c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

05 ppt. :: $\beta^* 45$:: 0-fluen. :: $f_c=80$:: $\omega=0.06$

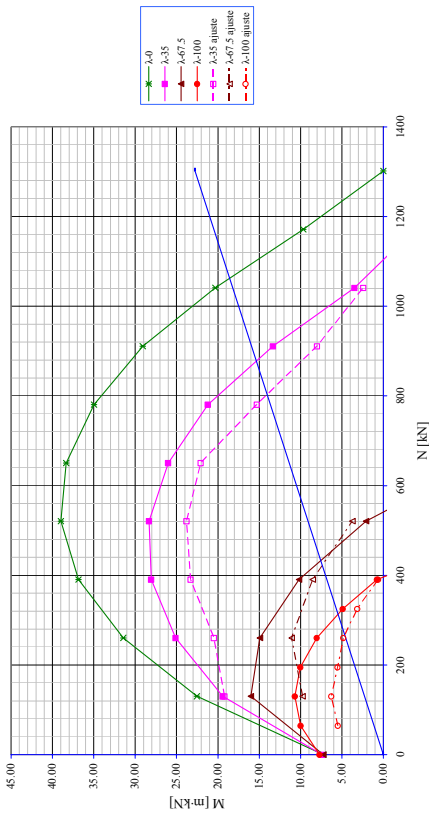


05 ppt. :: $\beta^* 45$:: 0-fluen. :: $f_c=80$:: $\omega=0.25$



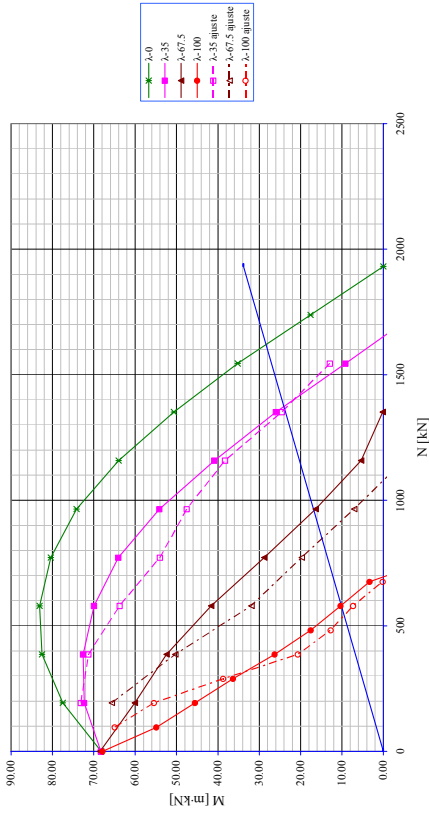
(a)

05 ppt :: $\beta^* 45$:: 2-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.06$



(b)

05 ppt :: $\beta^* 45$:: 2-fluen :: $f_c=30$:: $\omega=0.50$

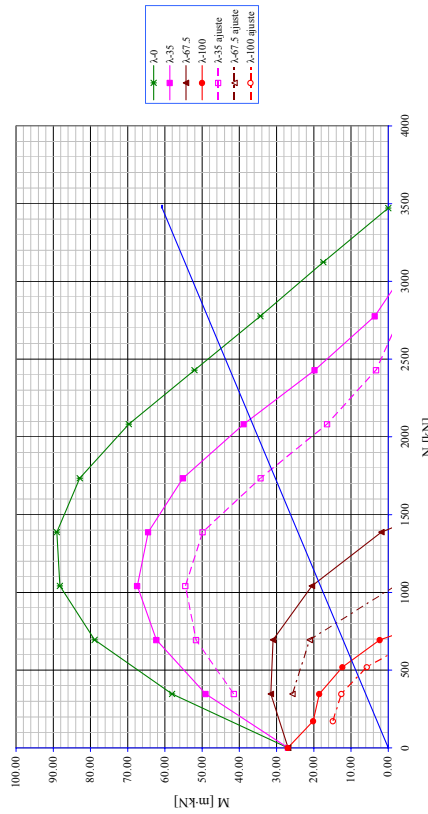


(c)

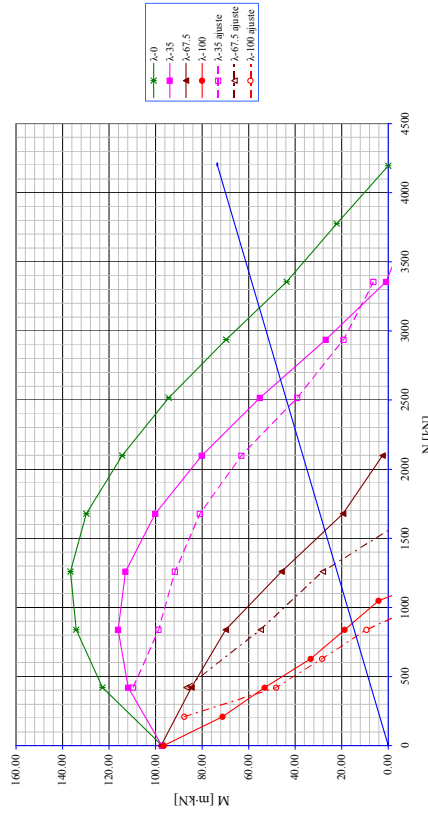
Sección Pila Puente 05 PPT: Flexión esviada $\beta^*=45^\circ$ Fluencia $\varphi=2$

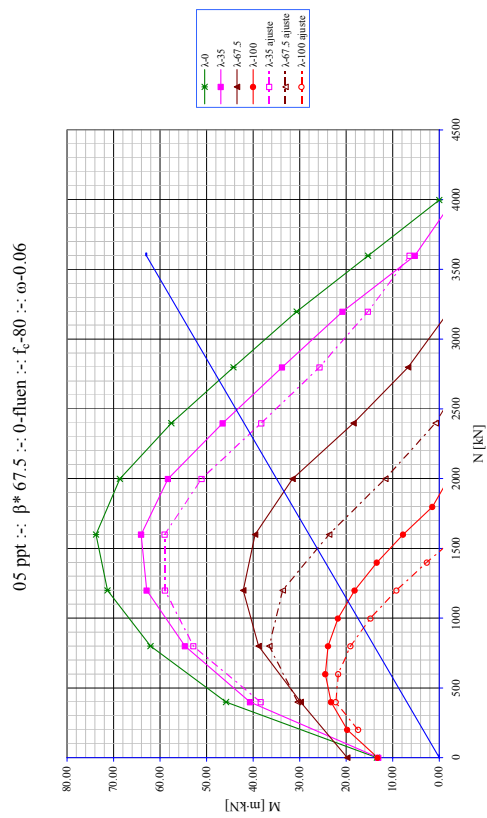
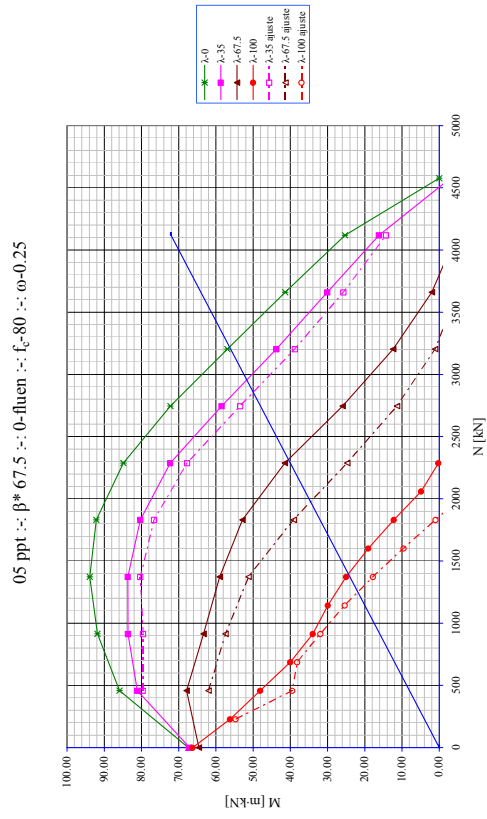
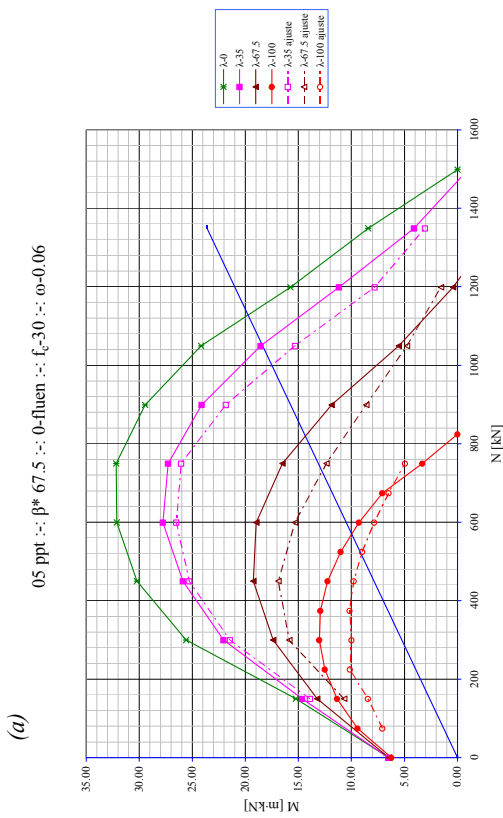
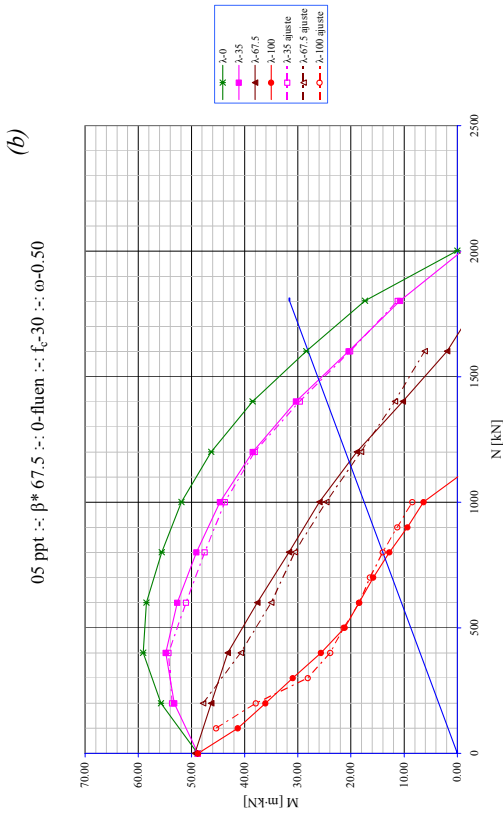
(a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

05 ppt :: $\beta^* 45$:: 2-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.06$



05 ppt :: $\beta^* 45$:: 2-fluen :: $f_c=80$:: $\omega=0.25$





(a)

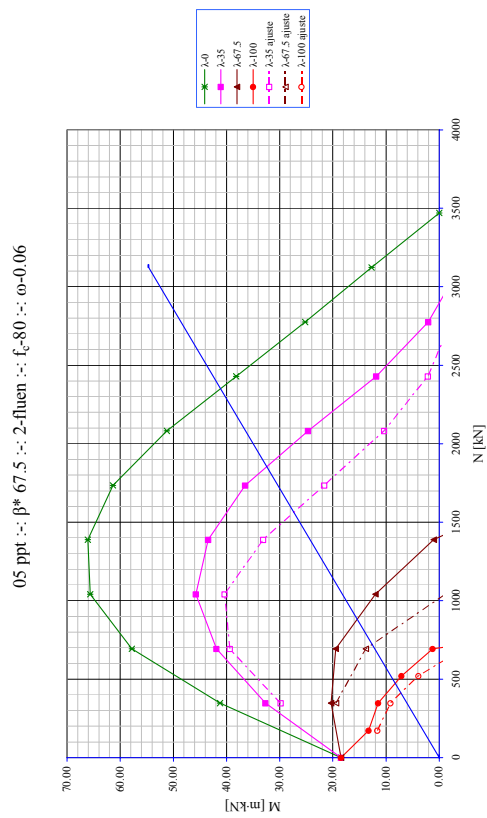
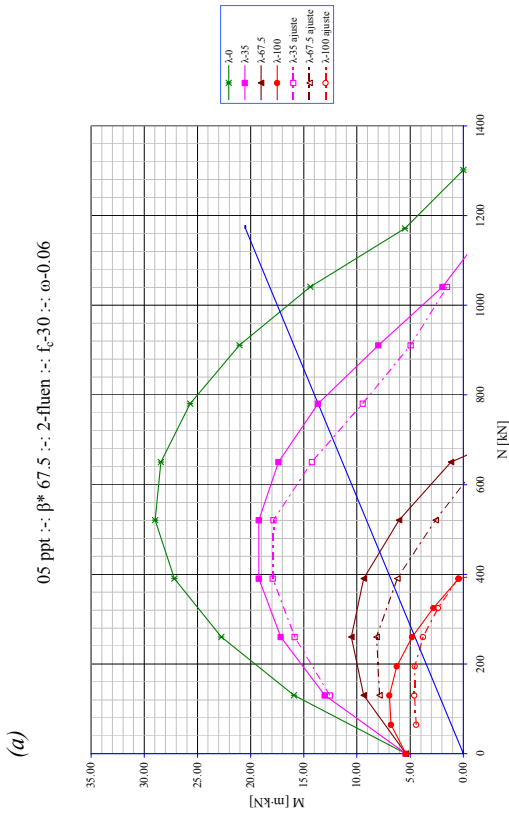
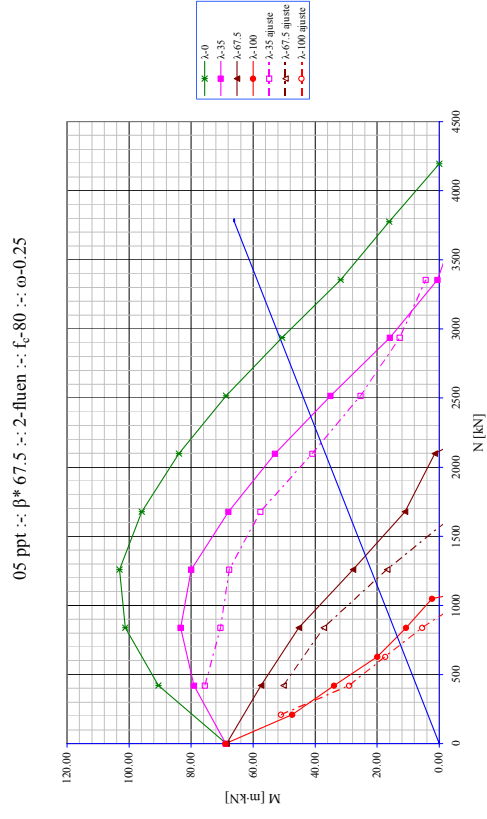
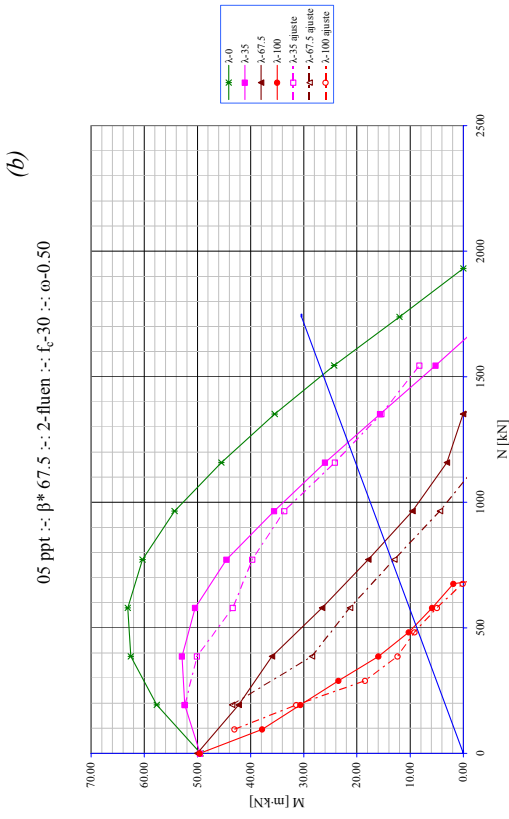
(b)

(c)

(d)

Sección Pila Puente 05 PPT: Flexión esviada $\beta^*=67.5^\circ$ Fluencia $\varphi=0$

(a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$



(d)

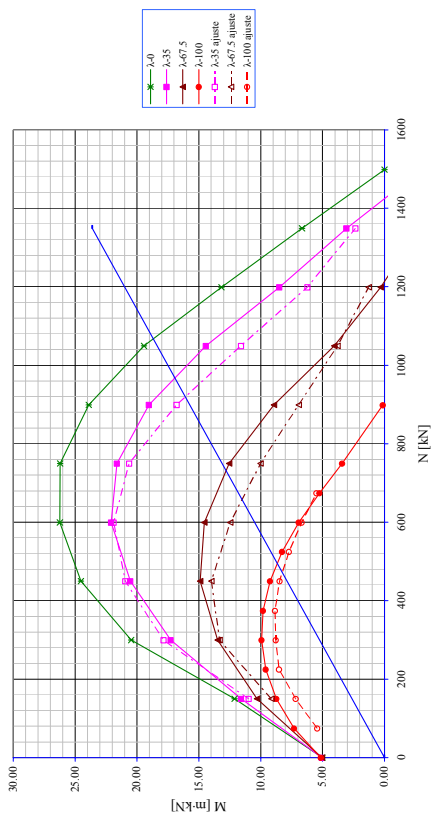
Sección Pila Puente 05 PPT: Flexión esviada $\beta^*=67.5^\circ$ Fluencia $\varphi=2$

(a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.25$

(c)

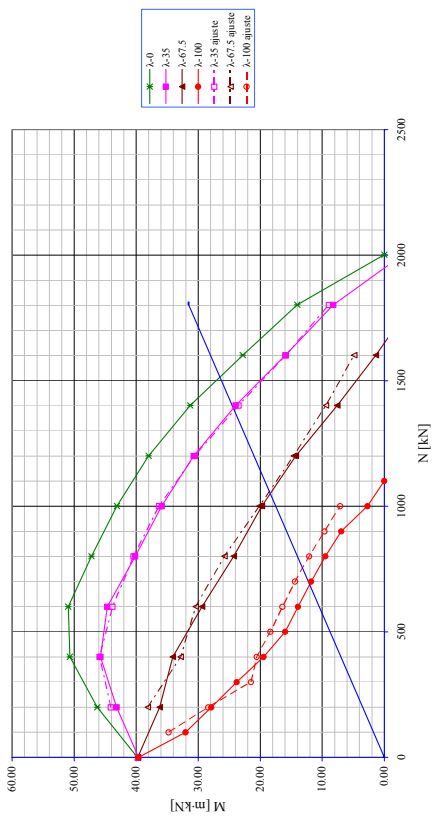
(a)

05 ppt :: $\beta = 90^\circ$:: 0-fluen :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$



(b)

05 ppt :: $\beta = 90^\circ$:: 0-fluen :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.50$



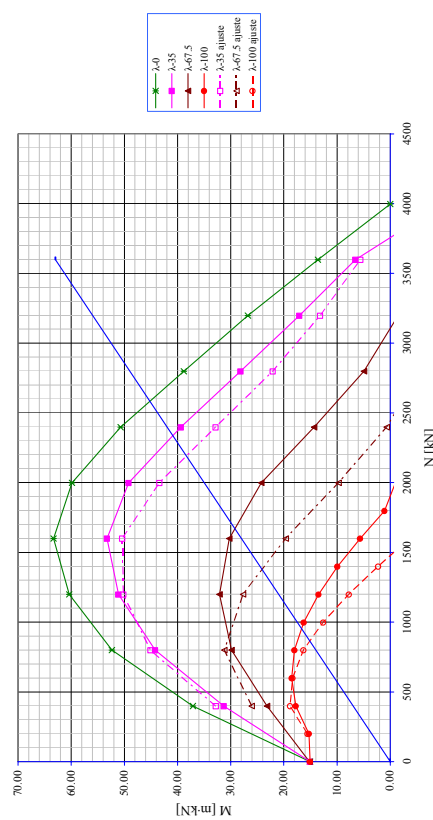
(c)

Sección Pila Puente 05 PPT: Flexión eviada $\beta^* = 90^\circ$ Fluencia $\varphi = 0$

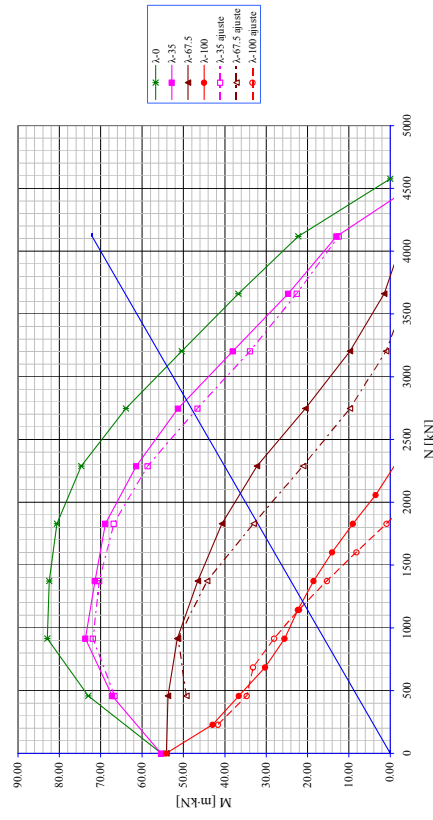
(a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.50$; (c) $f_c = 80$ $\omega = 0.06$; (d) $f_c = 80$ $\omega = 0.25$

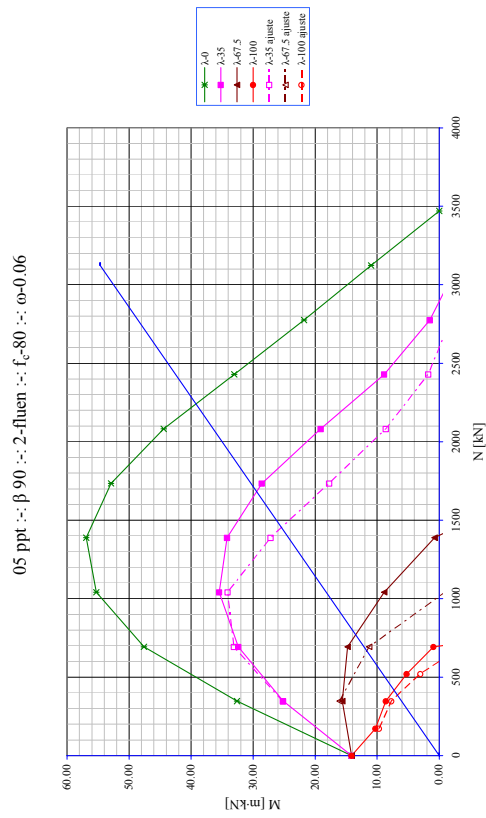
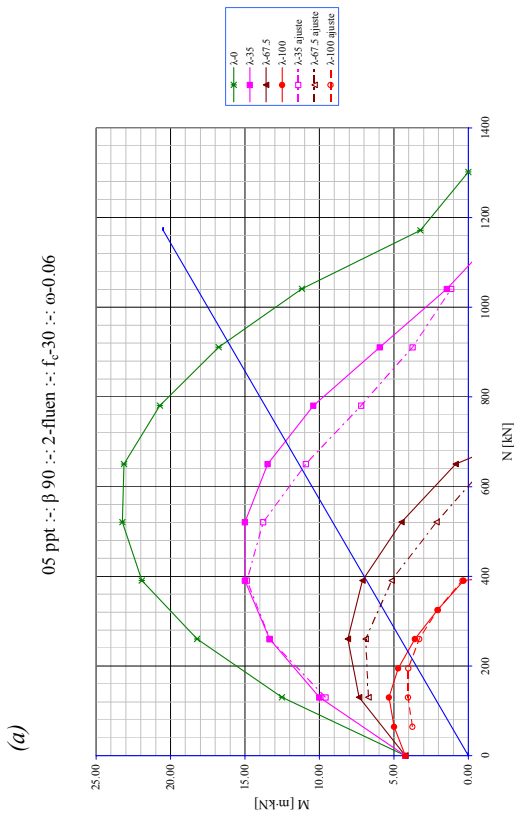
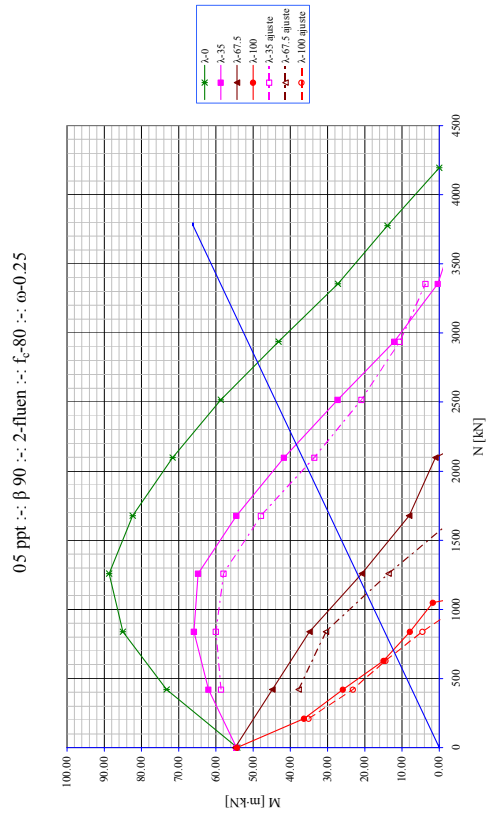
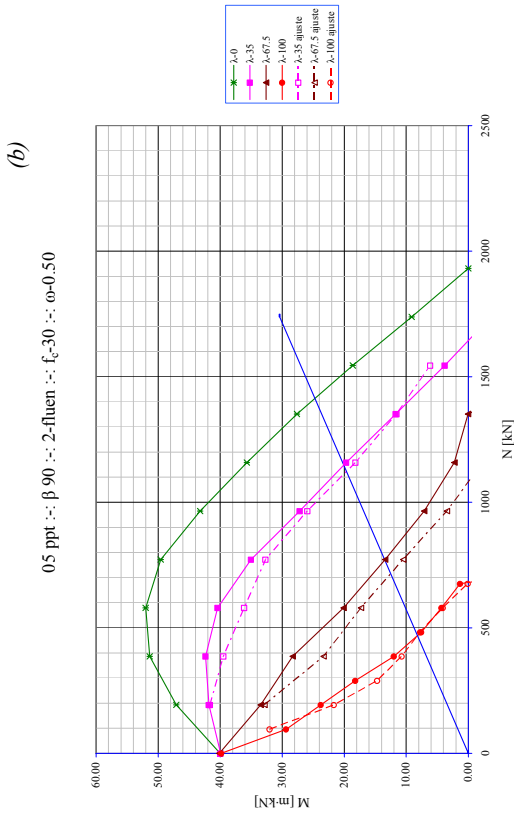
(d)

05 ppt :: $\beta = 90^\circ$:: 0-fluen :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.06$



05 ppt :: $\beta = 90^\circ$:: 0-fluen :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.25$





(d)

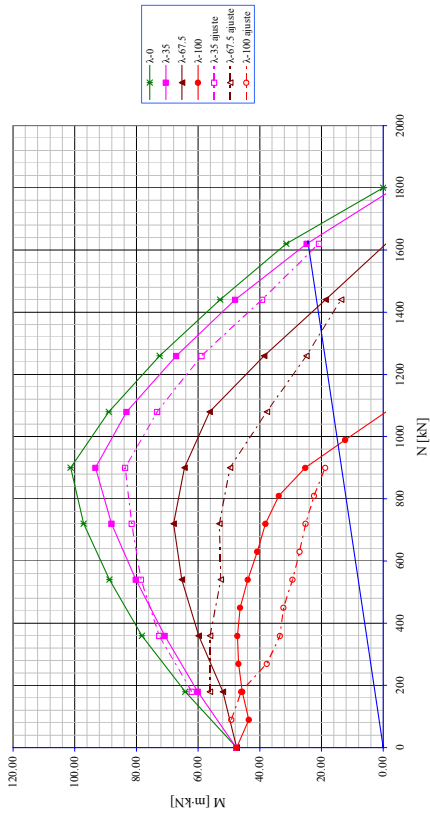
Sección Pila Puente 05 PPT: Flexión esviada $\beta^* = 90^\circ$ Fluencia $\varphi = 2$

(a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.50$; (c) $f_c = 80$ $\omega = 0.06$; (d) $f_c = 80$ $\omega = 0.25$

(c)

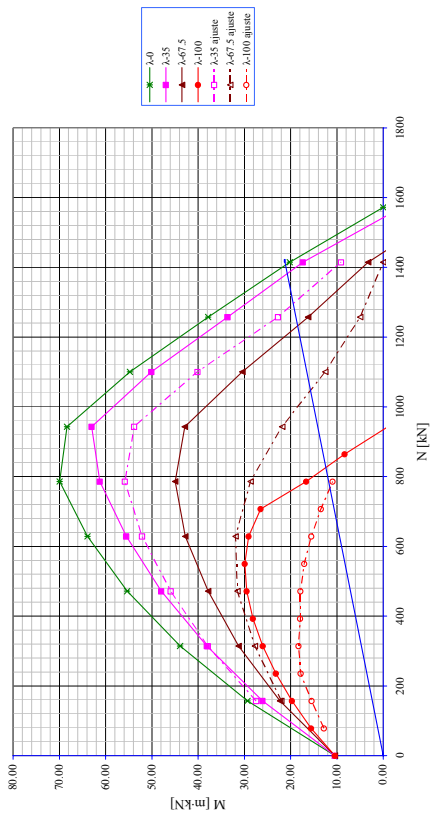
(b)

06 L. :: $\xi^* 30$:: Fluencia - 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.25$

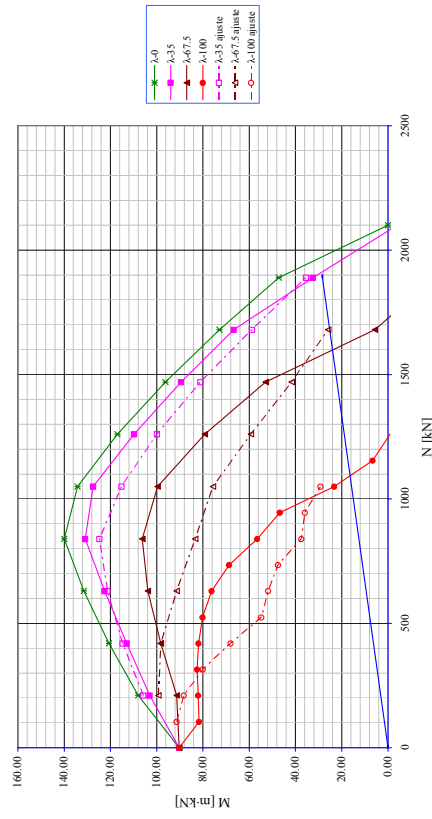


(a)

06 L. :: $\xi^* 30$:: Fluencia - 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$

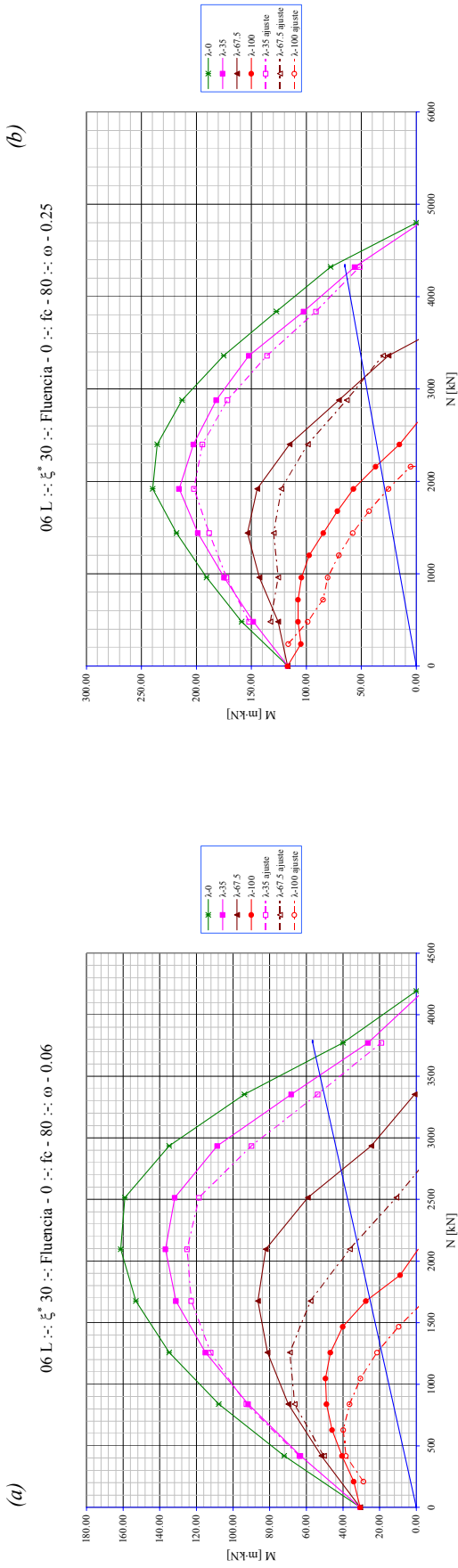


06 L. :: $\xi^* 30$:: Fluencia - 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.50$



(c)

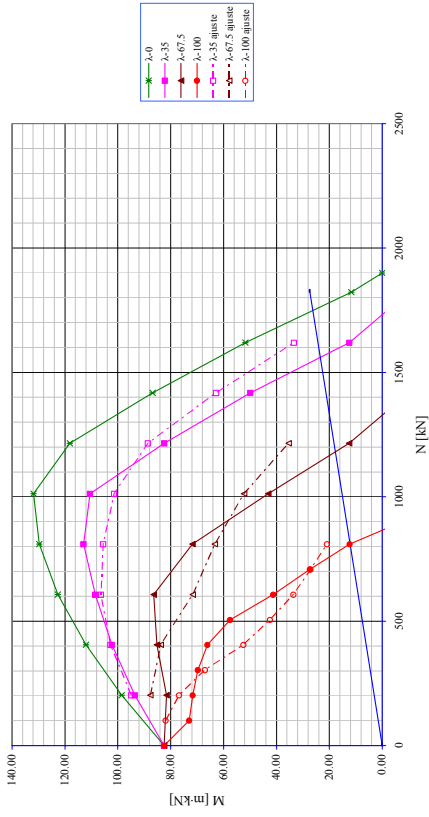
Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^*=30^\circ$ Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=30$ $\omega=0.50$



Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^*=30^\circ$ Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=80$ $\omega=0.25$;

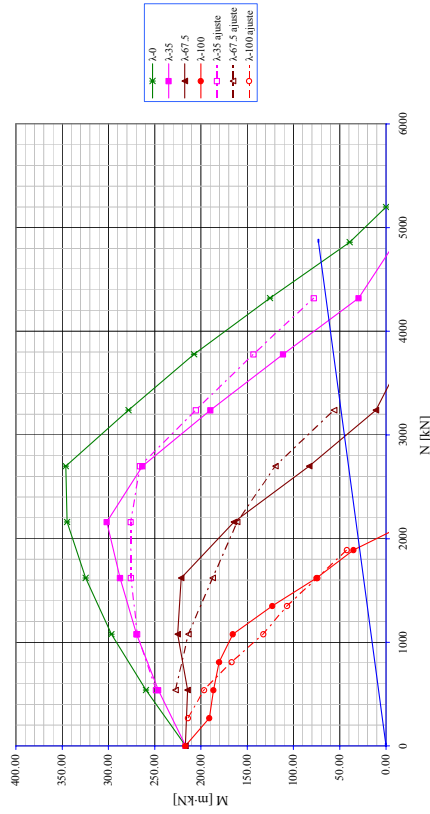
(b)

06 L. :: $\xi^* 30$:: Fluencia - 1 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.50$



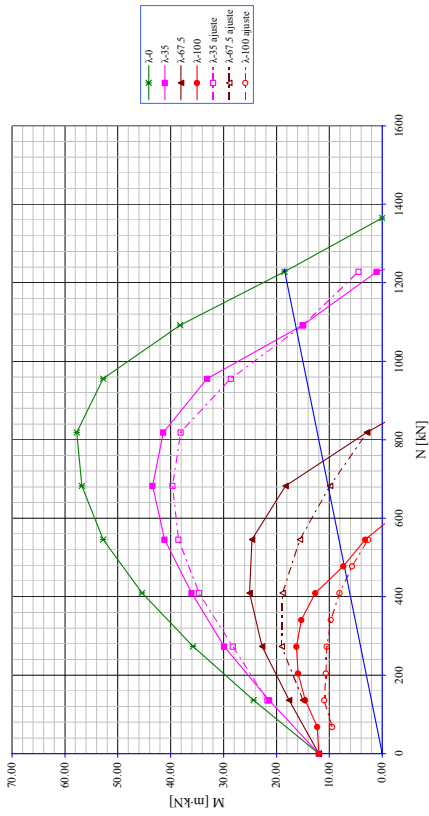
(d)

06 L. :: $\xi^* 30$:: Fluencia - 1 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.50$



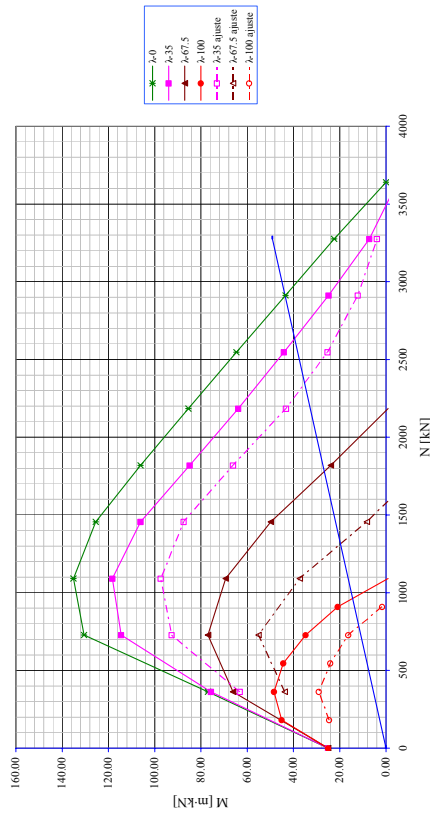
(a)

06 L. :: $\xi^* 30$:: Fluencia - 1 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$

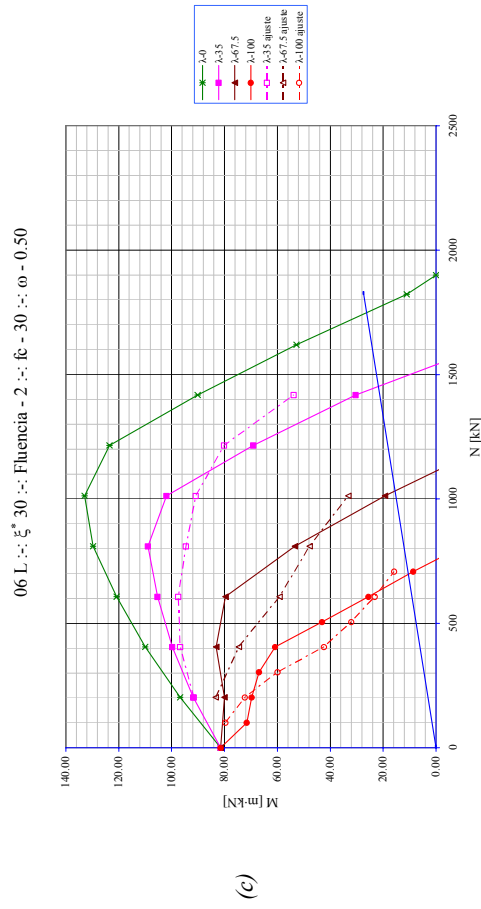
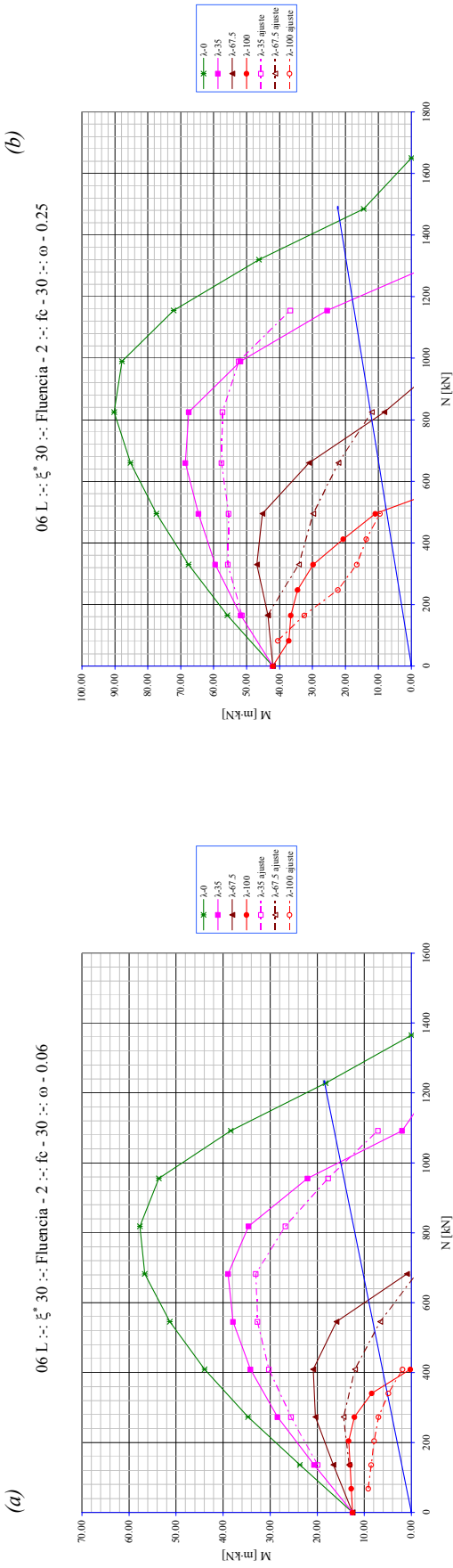


(c)

06 L. :: $\xi^* 30$:: Fluencia - 1 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.06$



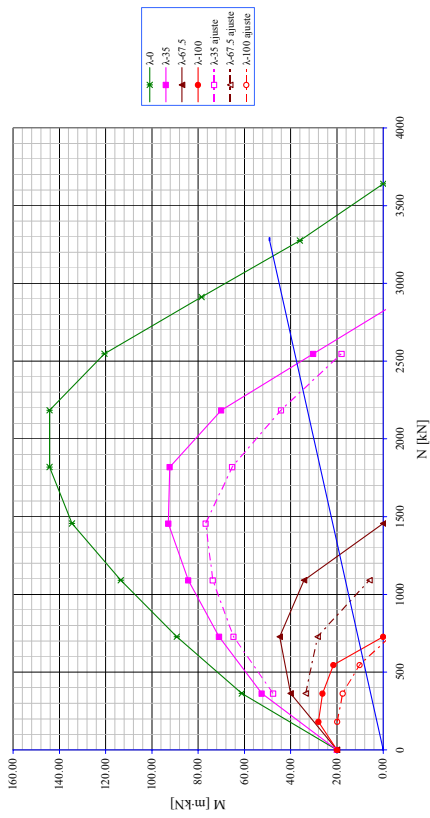
Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^*=30$ Fluencia $\varphi=1$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.50$



Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^*=30^\circ$ Fluencia $\varphi=2$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=30$ $\omega=0.50$

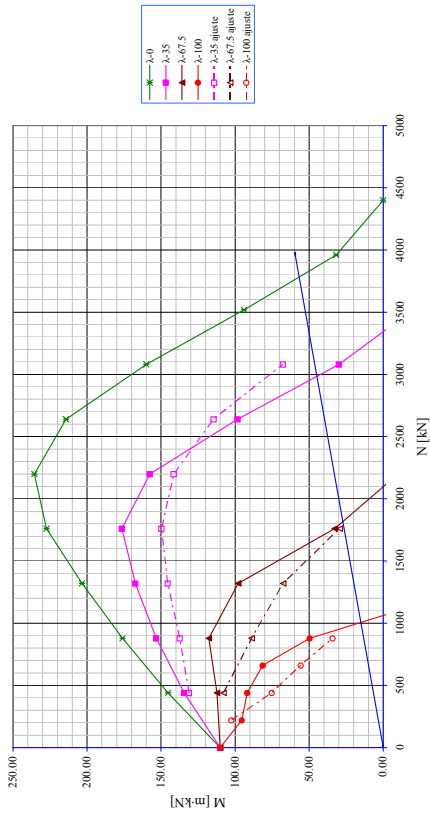
(a)

06 L. : $\xi^* = 30^\circ$: Fluencia - 2. : $f_c = 80$: $\omega = 0.06$



(b)

06 L. : $\xi^* = 30^\circ$: Fluencia - 2. : $f_c = 80$: $\omega = 0.25$

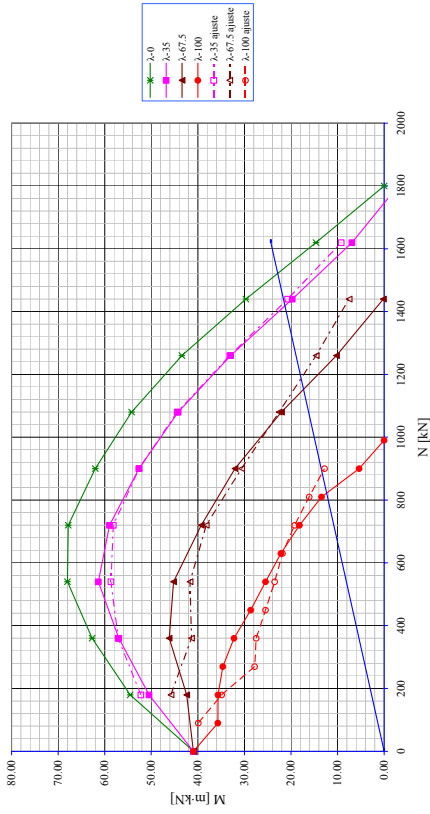


Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^* = 30^\circ$ Fluencia $\varphi = 2$

(a) $f_c = 80$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 80$ $\omega = 0.25$;

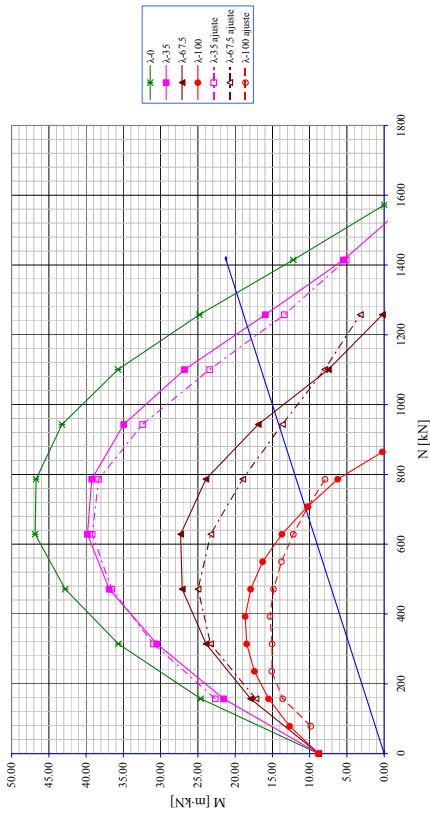
(b)

06 L :: $\xi^* = 60$:: Fluencia = 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.25$

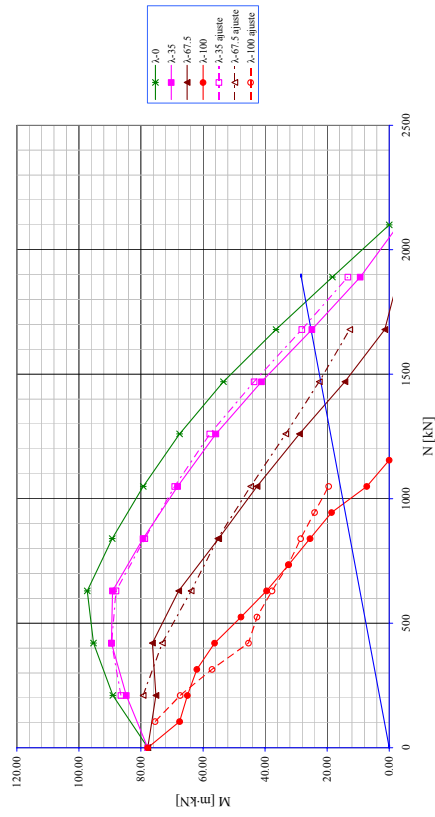


(a)

06 L :: $\xi^* = 60$:: Fluencia = 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$



06 L :: $\xi^* = 60$:: Fluencia = 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.50$

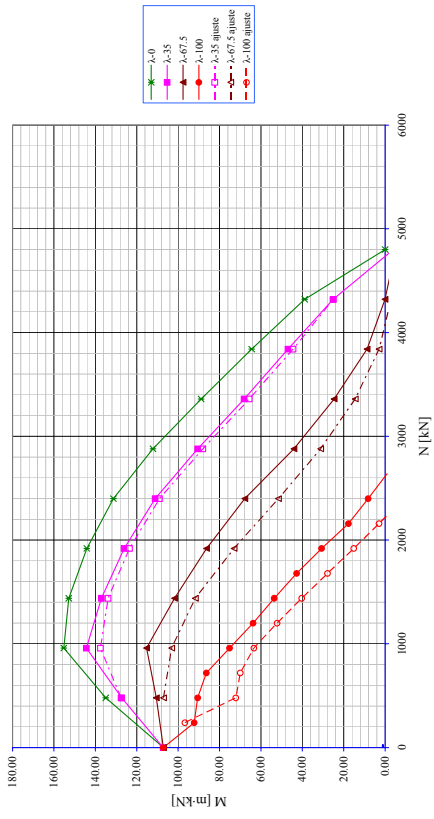


(c)

Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^* = 60^\circ$ Fluencia $\varphi = 0$
 (a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.25$; (c) $f_c = 30$ $\omega = 0.50$;

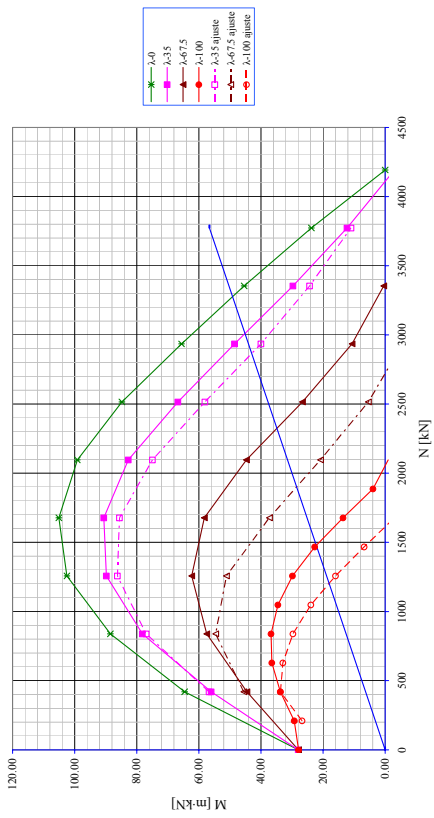
(b)

06 L :: $\xi^* = 60$:: Fluencia - 0 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.25$

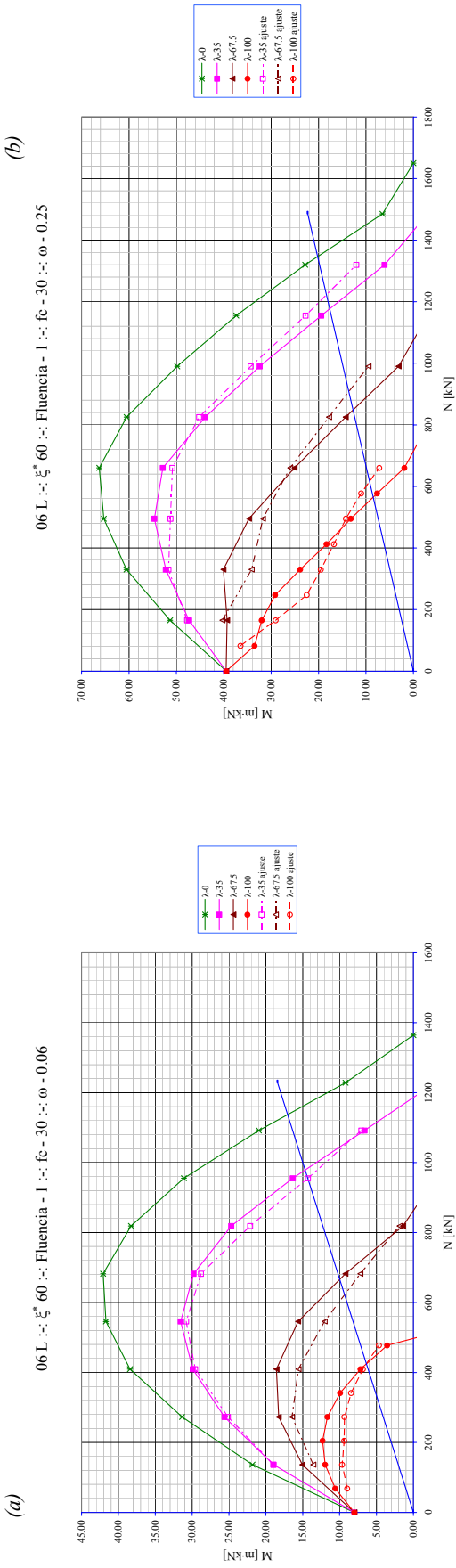


(a)

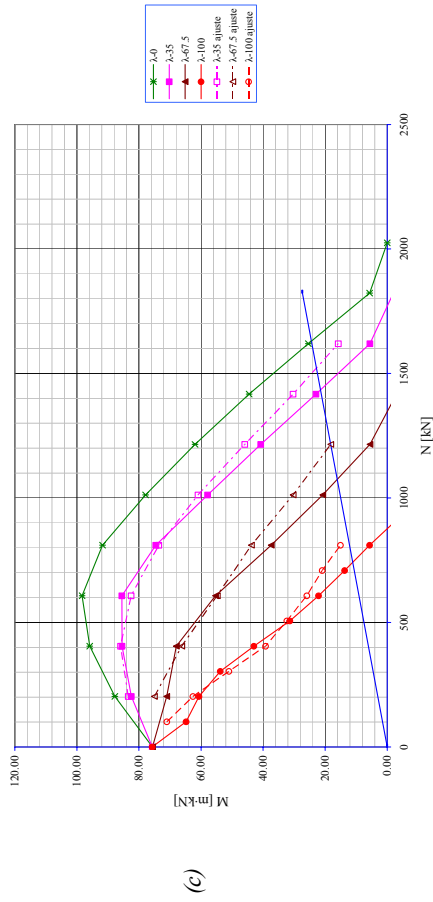
06 L :: $\xi^* = 60$:: Fluencia - 0 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.06$



Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^*=60^\circ$ Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=80$ $\omega=0.25$;



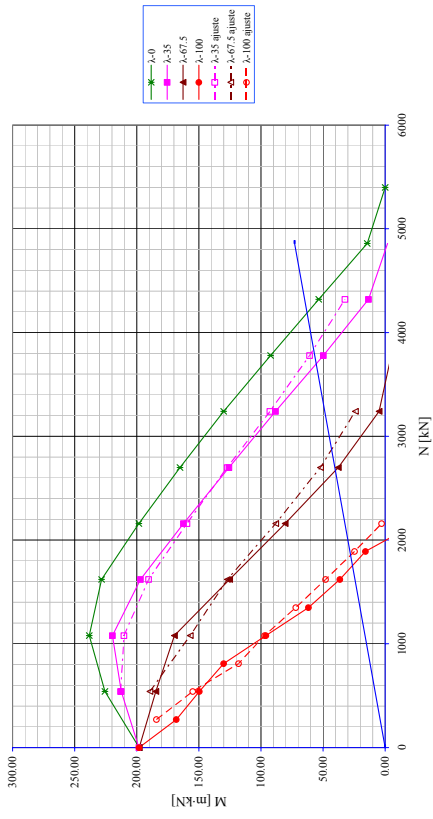
06 L :: $\xi^* = 60$:: Fluencia - 1 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.50$



Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^* = 60^\circ$ Fluencia $\varphi = 1$
 (a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.25$; (c) $f_c = 30$ $\omega = 0.50$;

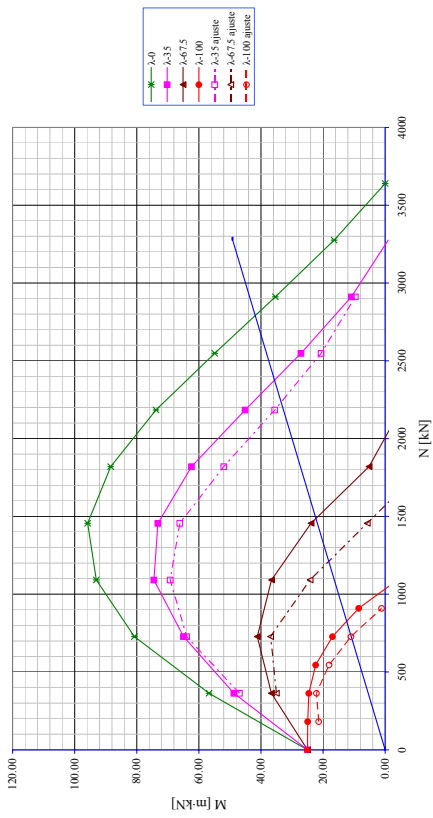
(b)

06 L :: $\xi^* = 60$:: Fluencia = 1 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.50$



(a)

06 L :: $\xi^* = 60$:: Fluencia = 1 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.06$

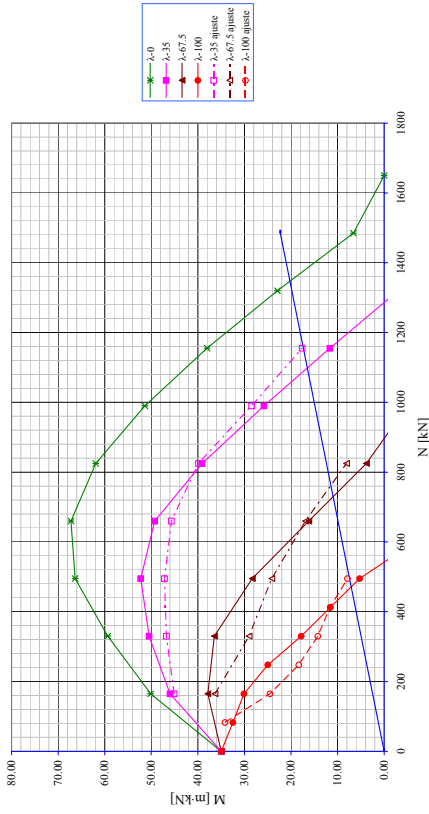


Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^* = 60^\circ$ Fluencia $\varphi = 1$

(a) $f_c = 80$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 80$ $\omega = 0.50$;

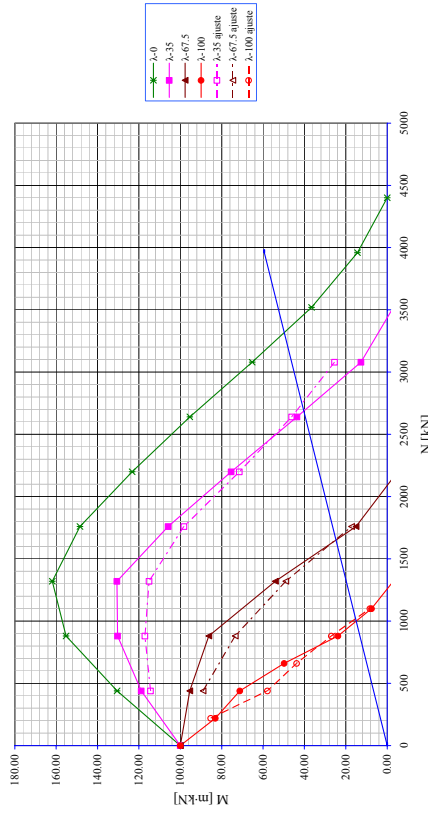
(b)

06 L.: $\xi^* = 60$:: Fluencia - 2 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.25$



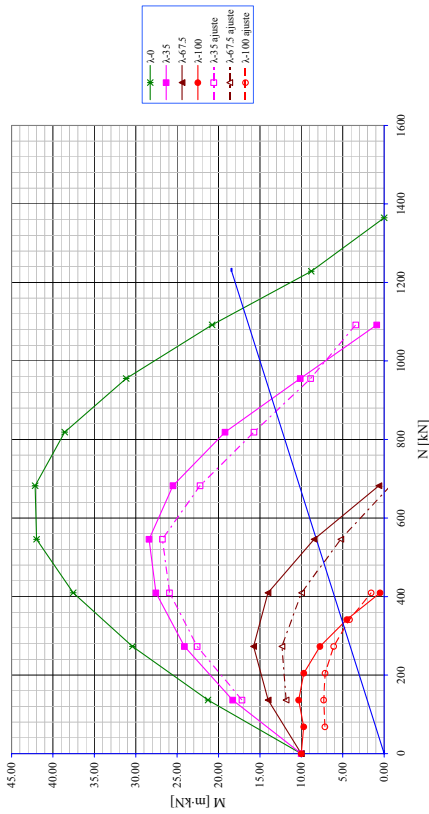
(d)

06 L.: $\xi^* = 60$:: Fluencia - 2 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.25$



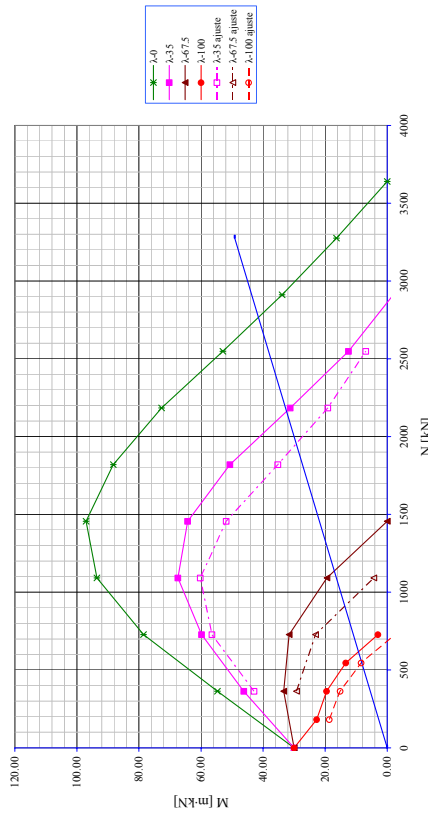
(a)

06 L.: $\xi^* = 60$:: Fluencia - 2 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$

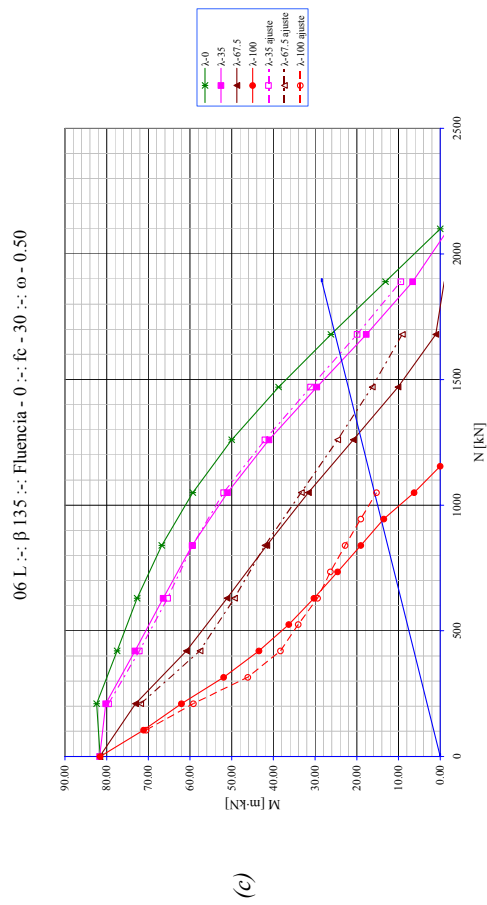
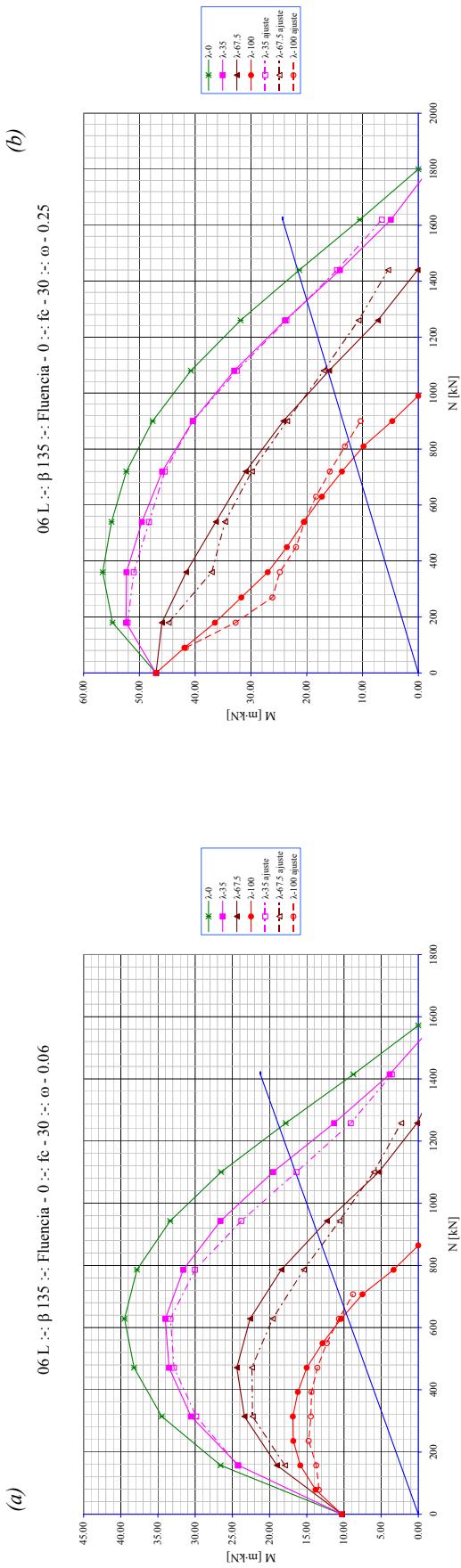


(c)

06 L.: $\xi^* = 60$:: Fluencia - 2 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.06$



Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^* = 60^\circ$ Fluencia $\varphi = 2$
 (a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.25$; (c) $f_c = 80$ $\omega = 0.06$; (d) $f_c = 80$ $\omega = 0.25$;

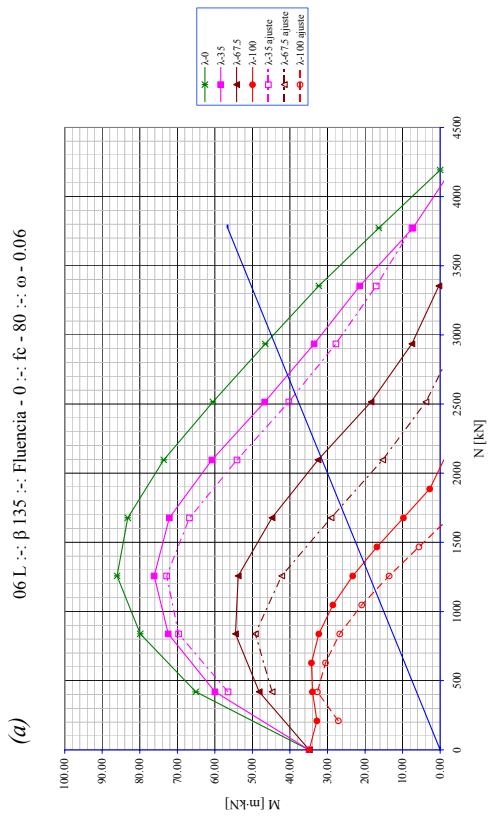
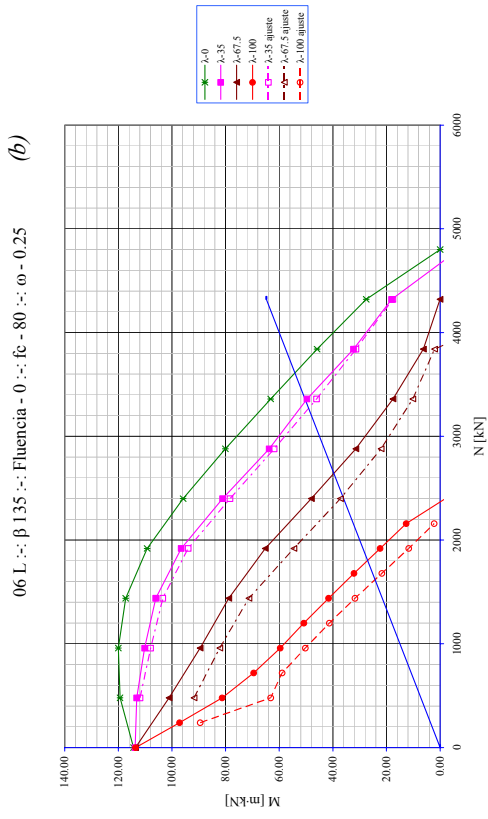


Sección L 06 L: Flexión esviada $\zeta^* = 90^\circ - \beta^* = 135^\circ$ Fluencia $\varphi = 0$

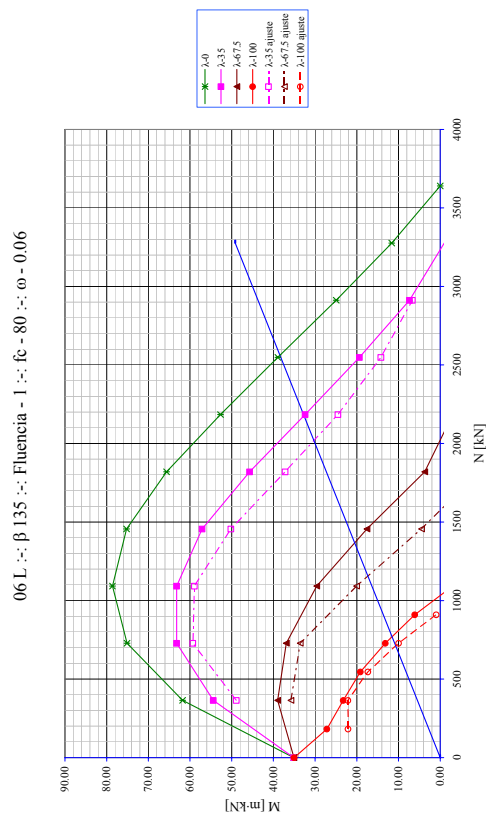
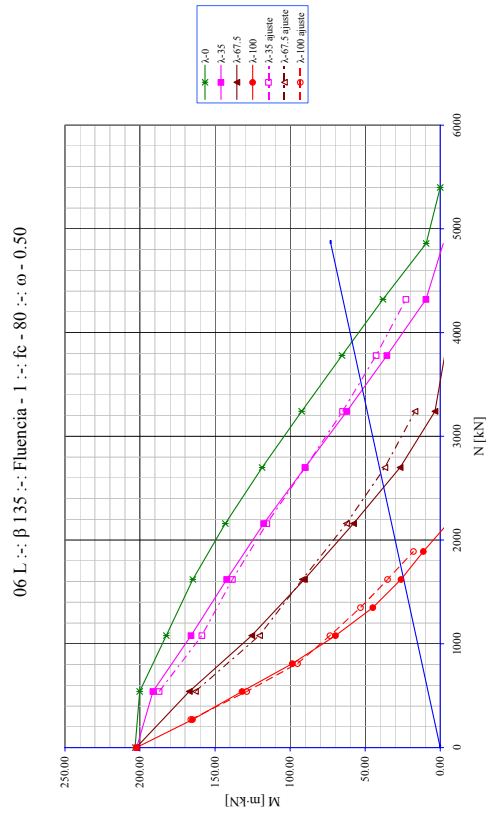
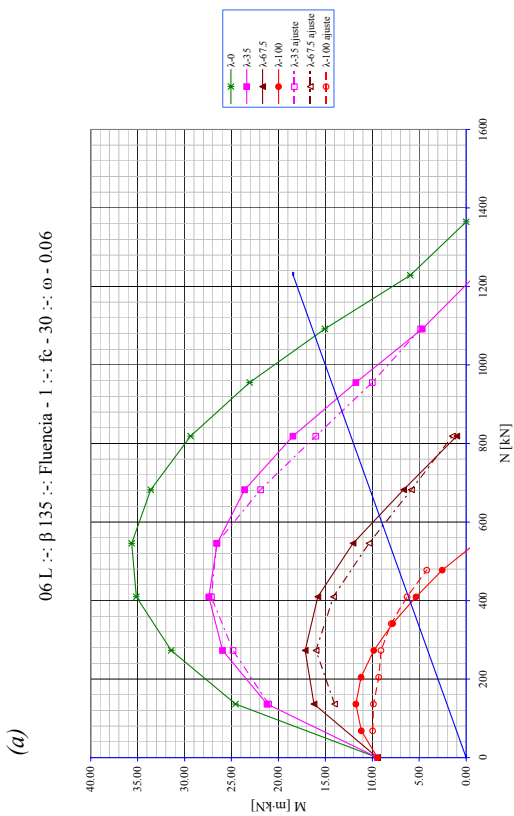
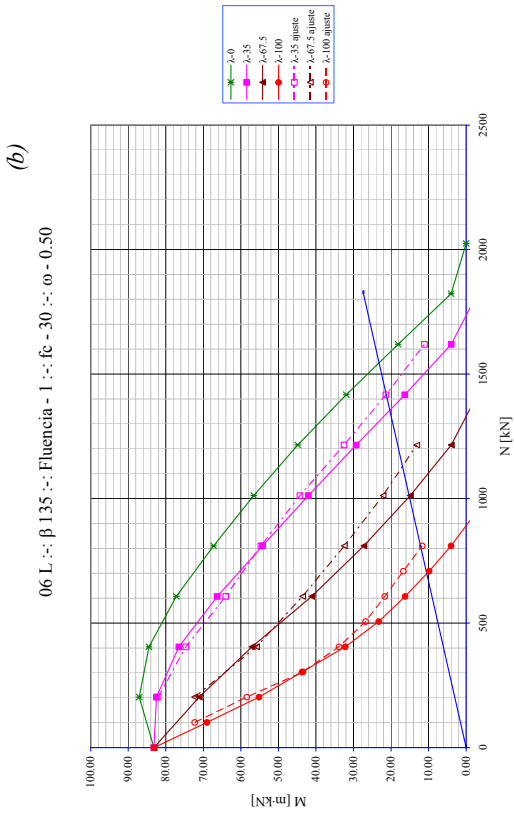
(a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$;

(b) $f_c = 30$ $\omega = 0.25$;

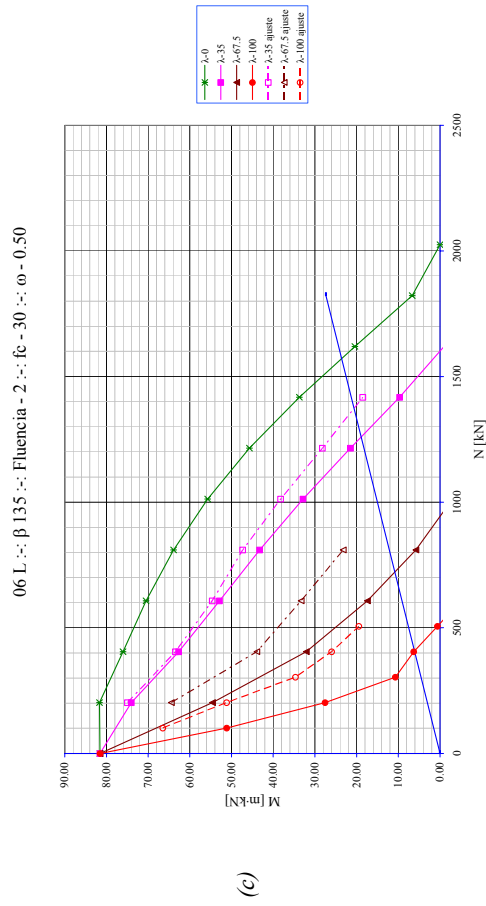
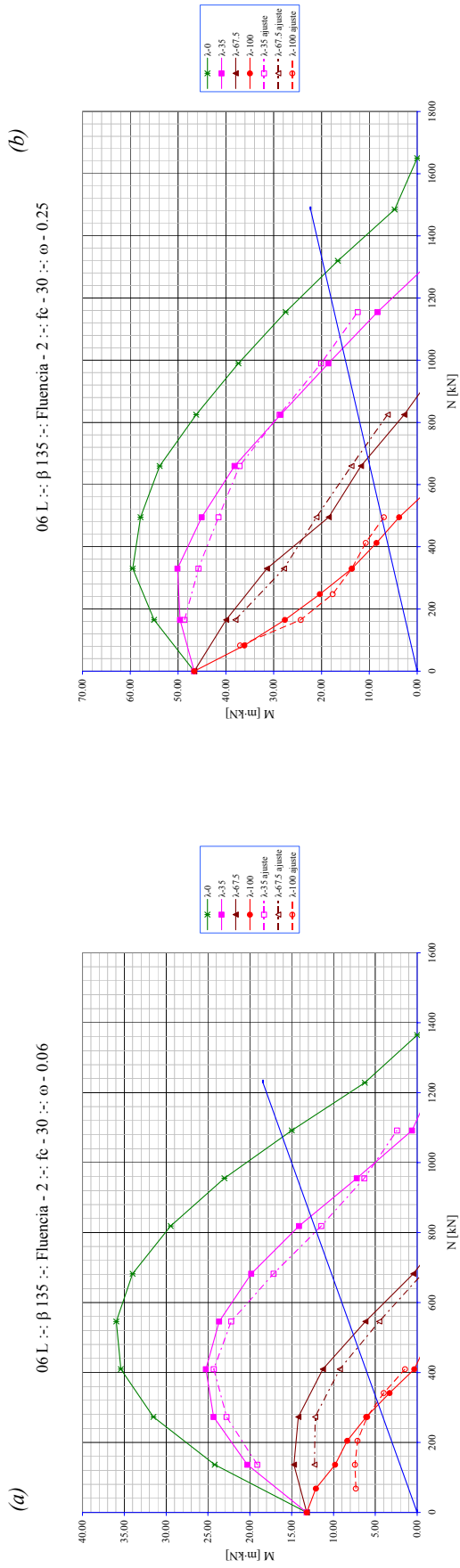
(c) $f_c = 30$ $\omega = 0.50$;



Sección L 06 L: Flexión esviada $\zeta^*=90^\circ - \beta^*=135^\circ$ Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=80$ $\omega=0.25$;



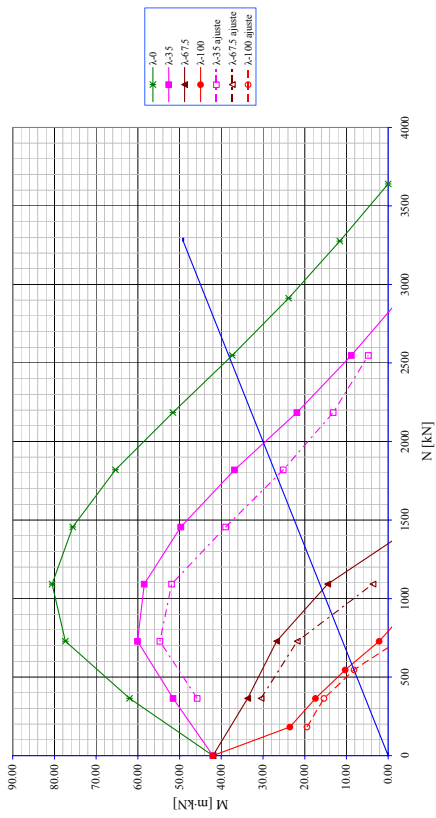
Sección L 06 L: Flexión esviada $\zeta^* = 90^\circ - \beta^* = 135^\circ$ Fluencia $\varphi = 1$
 (a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.50$; (c) $f_c = 80$ $\omega = 0.06$; (d) $f_c = 80$ $\omega = 0.50$;



Sección L 06 L: Flexión esviada $\zeta^* = 90^\circ - \beta^* = 135^\circ$ Fluencia $\varphi = 2$
 (a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.25$; (c) $f_c = 30$ $\omega = 0.50$;

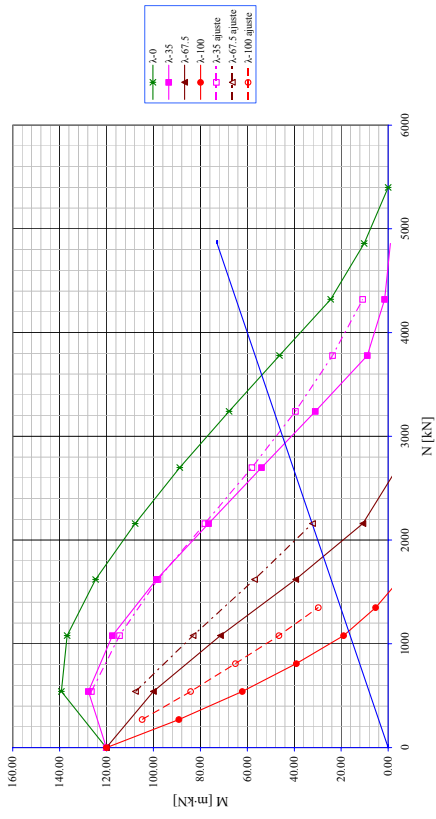
(a)

06 L. : β 135 : : Fluencia - 2 : : f_c - 80 : : ω - 0.06



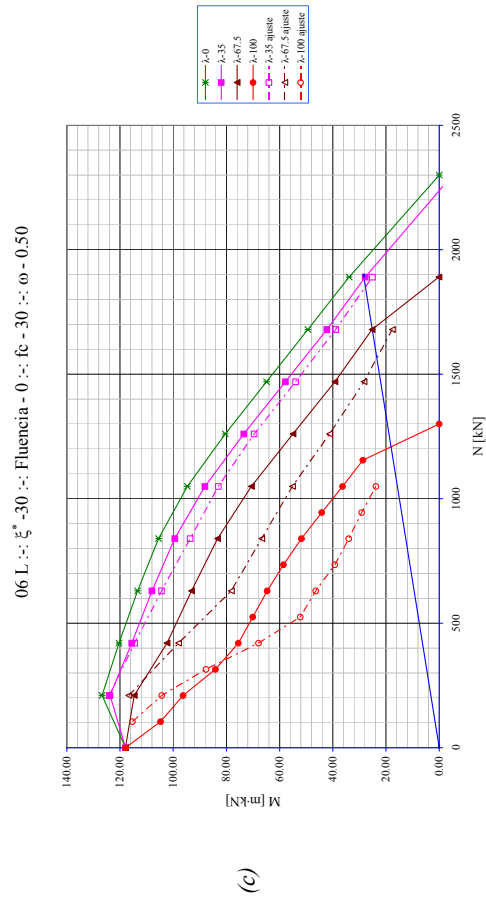
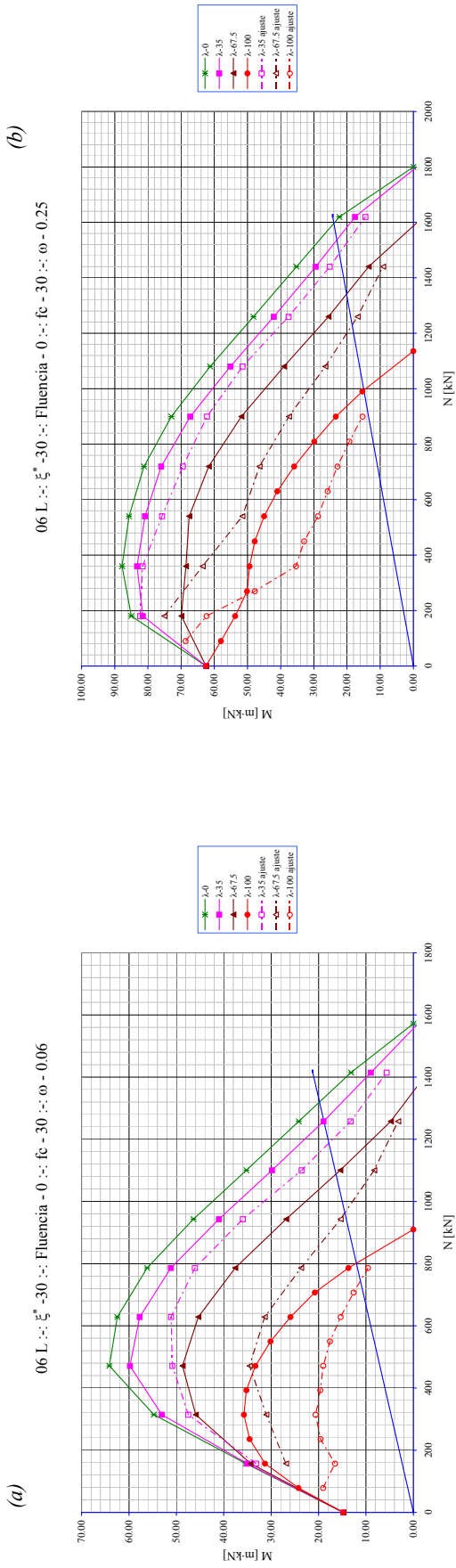
(b)

06 L. : β 135 : : Fluencia - 2 : : f_c - 80 : : ω - 0.50

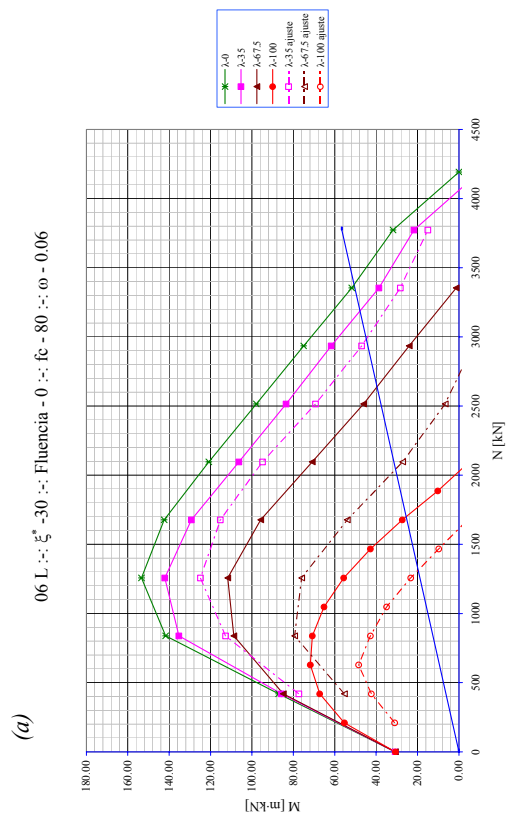
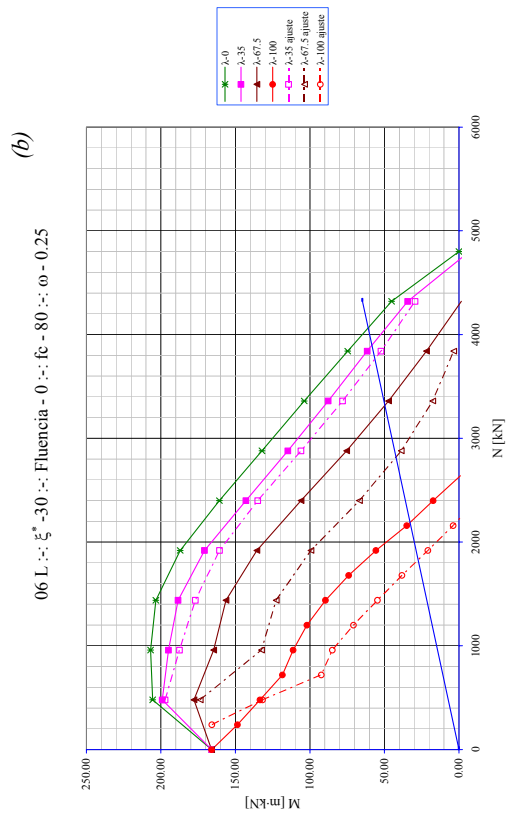


Sección L 06 L: Flexión esviada $\zeta^*=90^\circ - \beta^*=135^\circ$ Fluencia $\varphi=2$

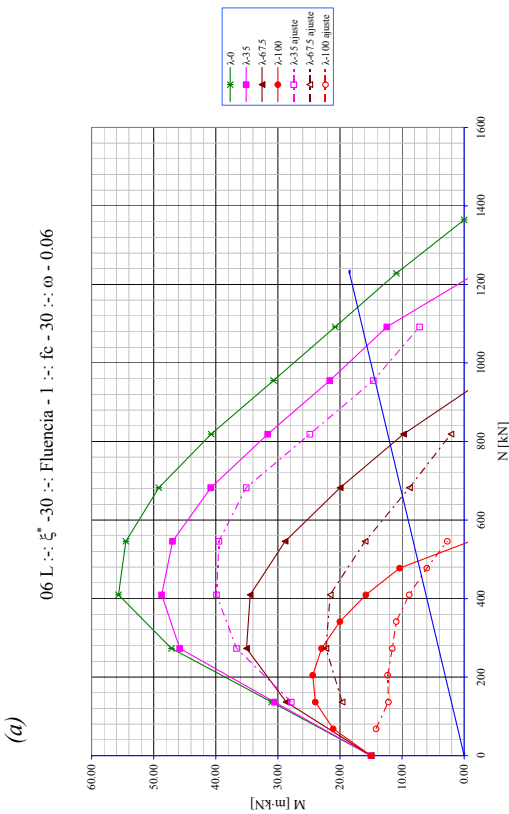
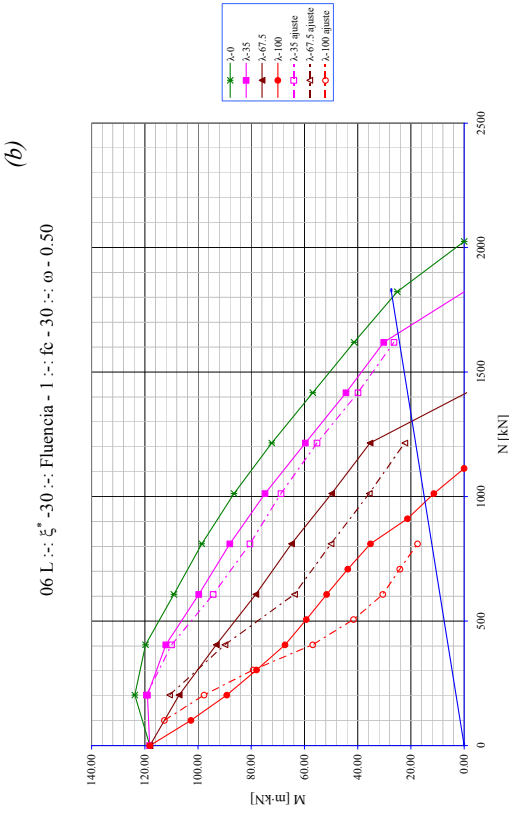
(a) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=80$ $\omega=0.50$;



Sección L.06 L: Flexión esviada $\xi^* = 30^\circ$ Fluencia $\varphi = 0$
 (a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.25$; (c) $f_c = 30$ $\omega = 0.50$;



Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^* = 30^\circ$ Fluencia $\varphi = 0$
 (a) $f_c = 80$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 80$ $\omega = 0.25$;

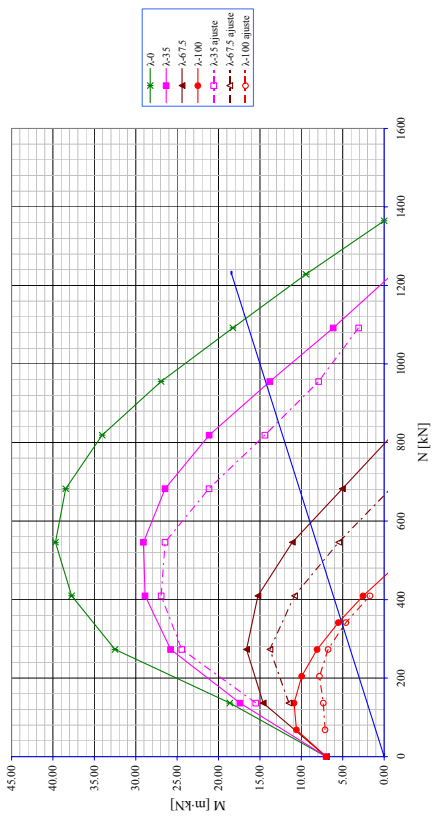


Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^* = 30^\circ$ Fluencia $\varphi = 1$

(a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.50$; (c) $f_c = 80$ $\omega = 0.06$; (d) $f_c = 80$ $\omega = 0.50$;

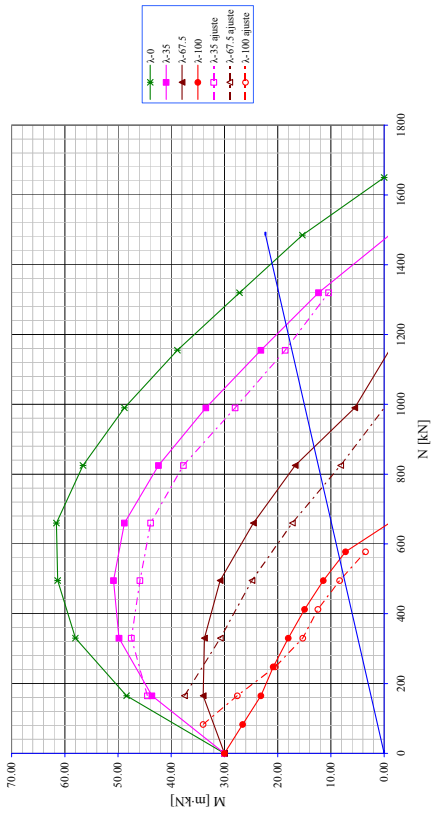
(a)

06 L :: $\xi^* = -30$:: Fluencia - 2 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$



(b)

06 L :: $\xi^* = -30$:: Fluencia - 2 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.25$



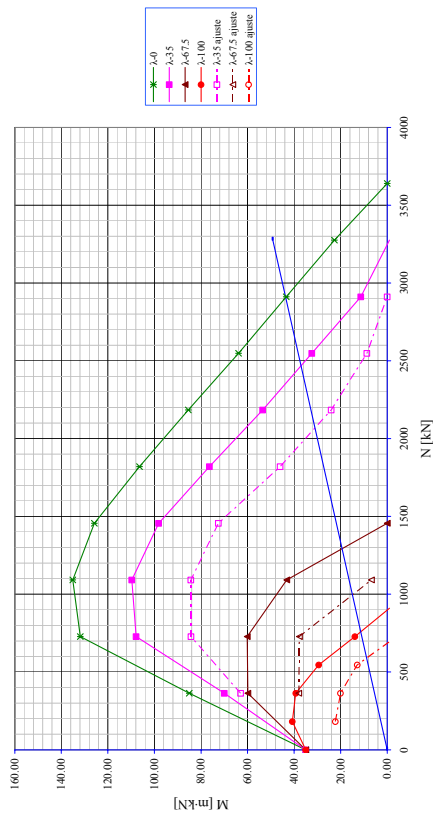
(c)

Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^* = -30$ Fluencia $\varphi = 2$

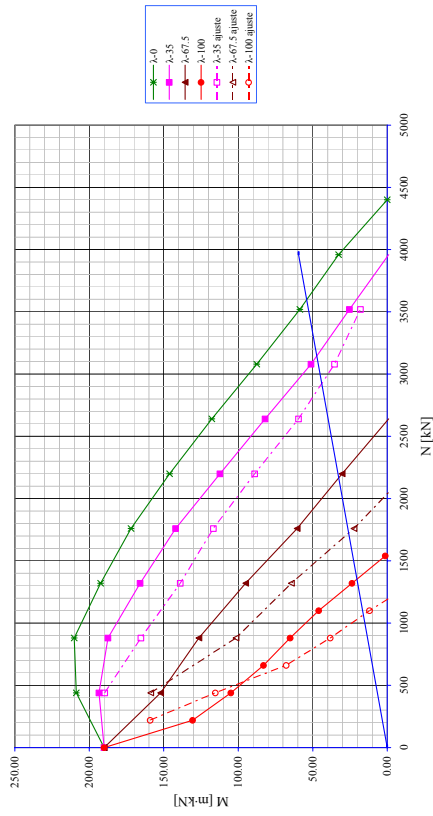
(a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.50$; (c) $f_c = 80$ $\omega = 0.25$;

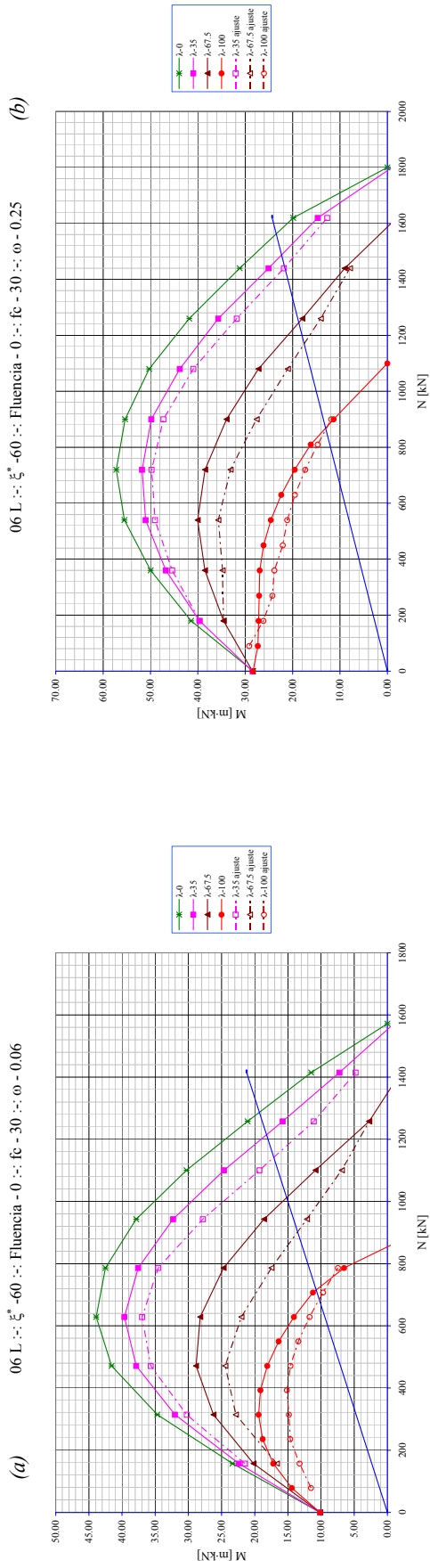
(d)

06 L :: $\xi^* = -30$:: Fluencia - 2 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.06$

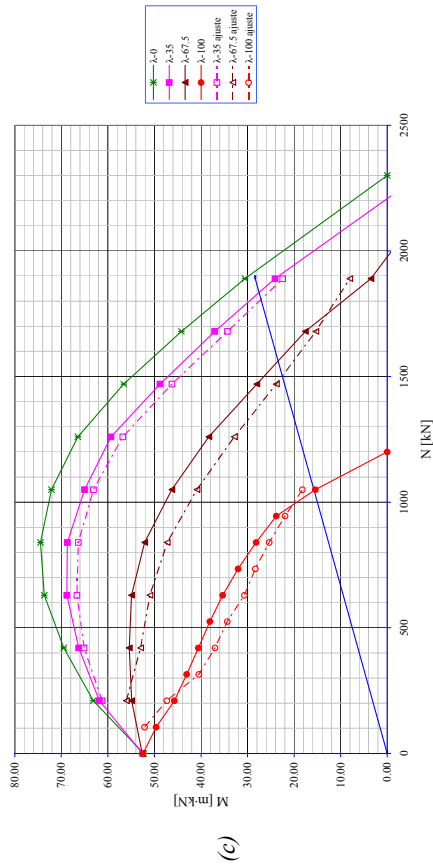


06 L :: $\xi^* = -30$:: Fluencia - 2 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.25$

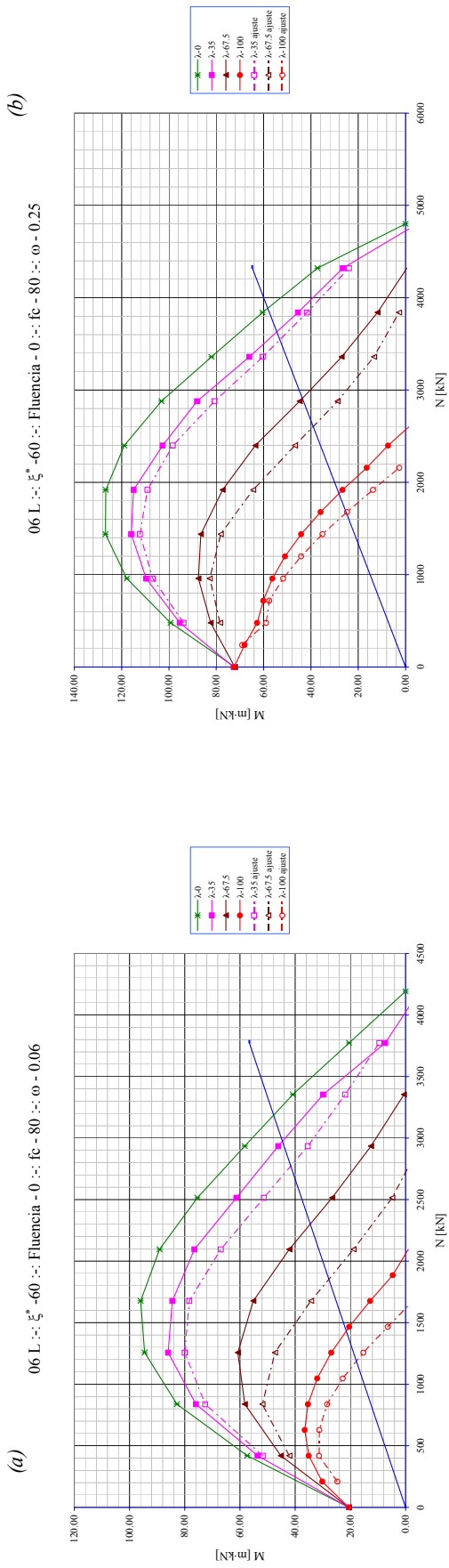




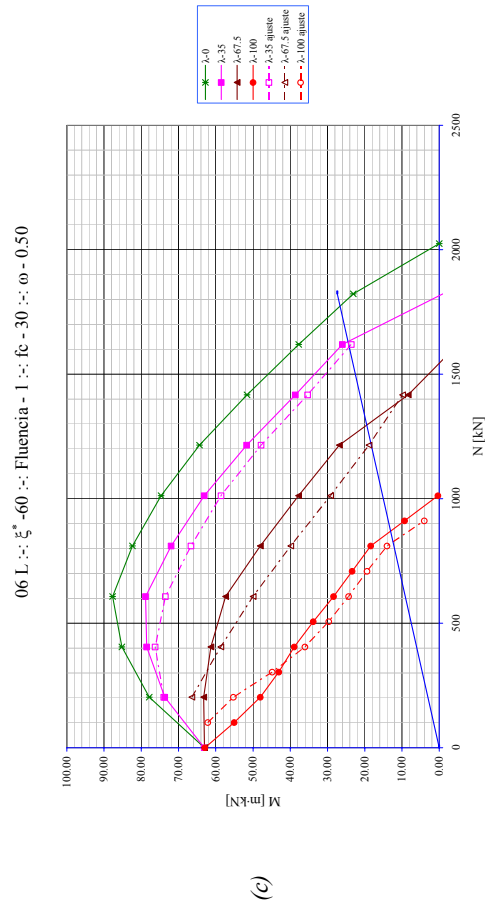
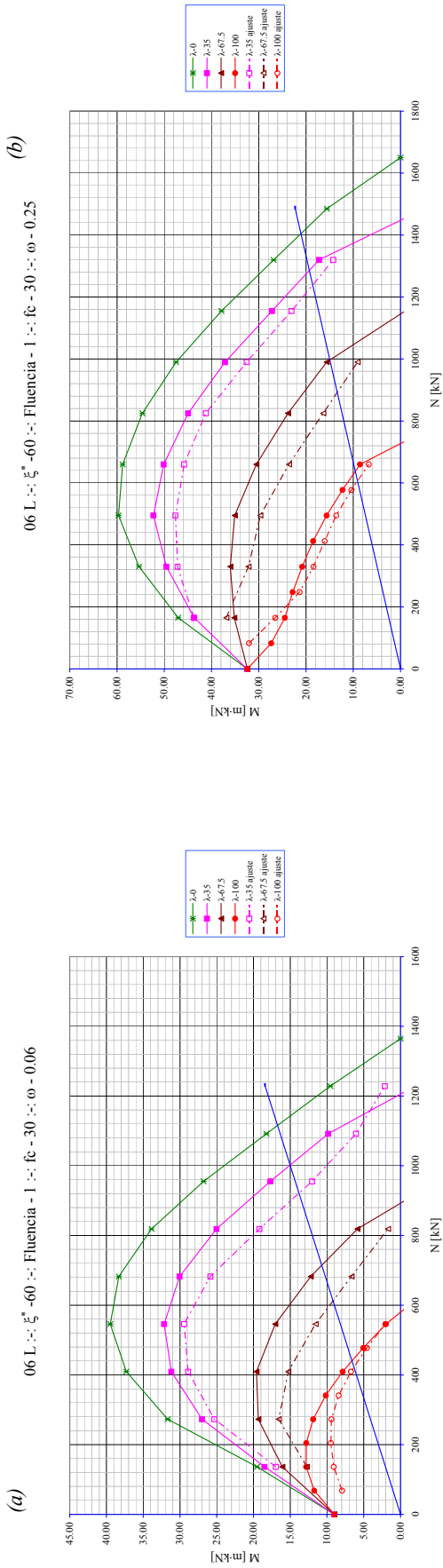
06 L. :: $\xi^* = 60$:: Fluencia = 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.50$



Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^* = -60^\circ$ Fluencia $\varphi = 0$
 (a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.25$; (c) $f_c = 30$ $\omega = 0.50$;



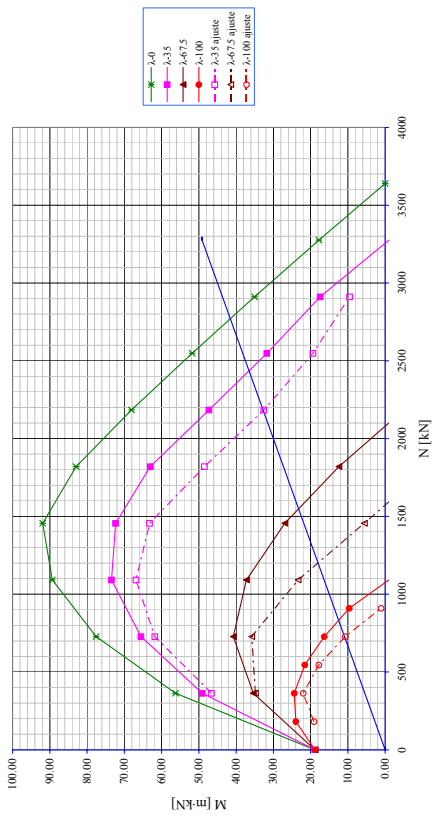
Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^* = -60^\circ$ Fluencia $\varphi = 0$
 (a) $f_c = 80$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 80$ $\omega = 0.25$;



Sección L.06 L.: Flexión esviada $\xi^* = -60^\circ$ Fluencia $\varphi = 1$
 (a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.25$; (c) $f_c = 30$ $\omega = 0.50$;

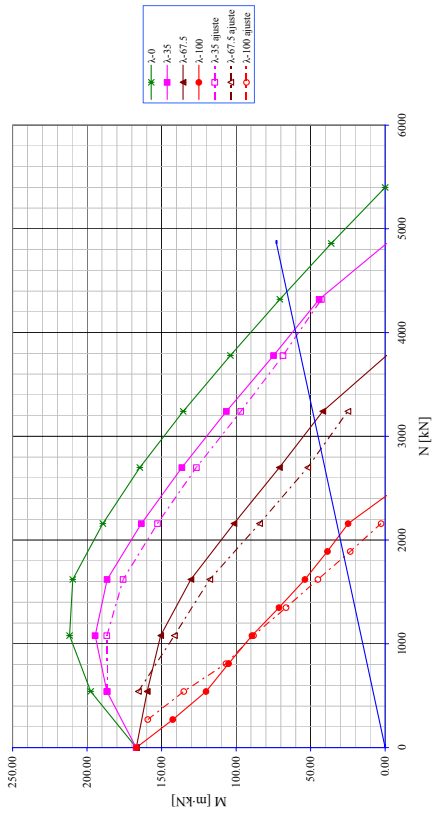
(a)

06 L :: $\xi^* = -60$:: Fluencia - 1 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.06$



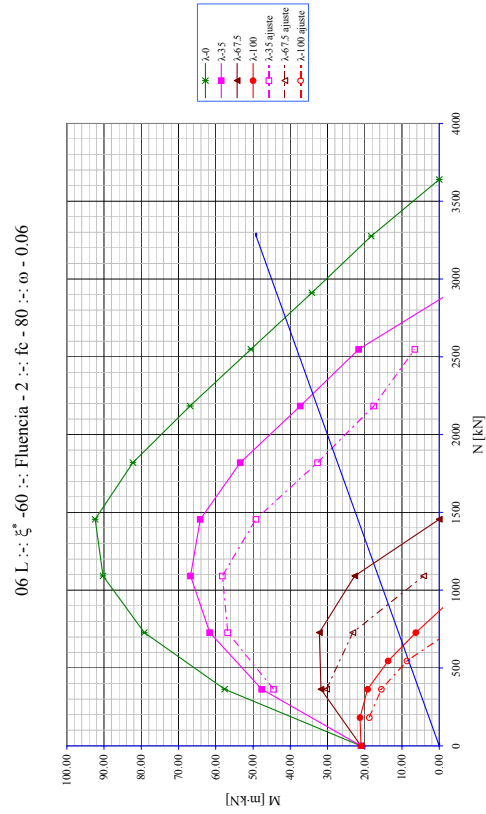
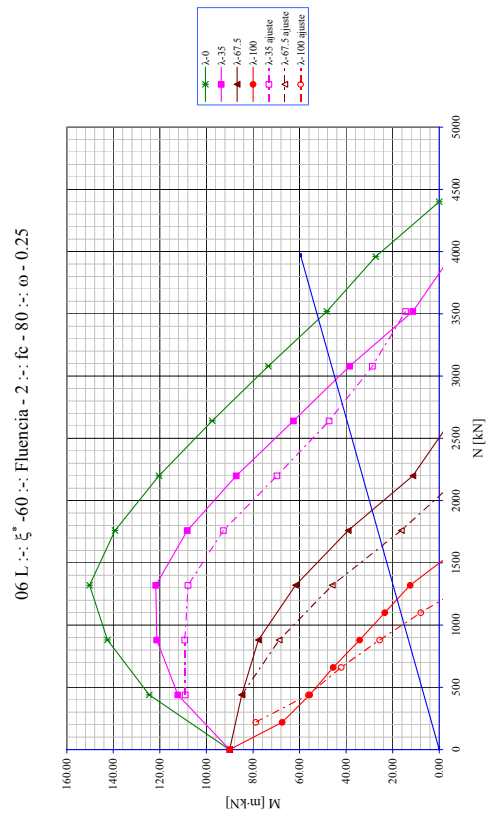
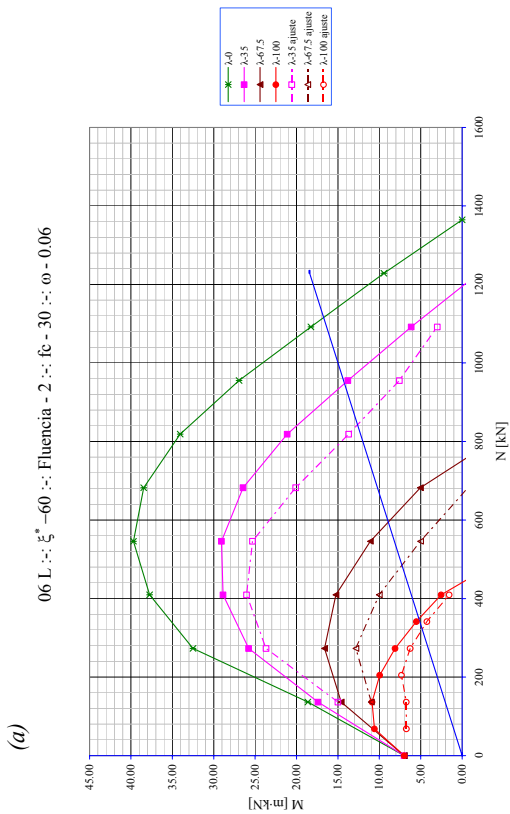
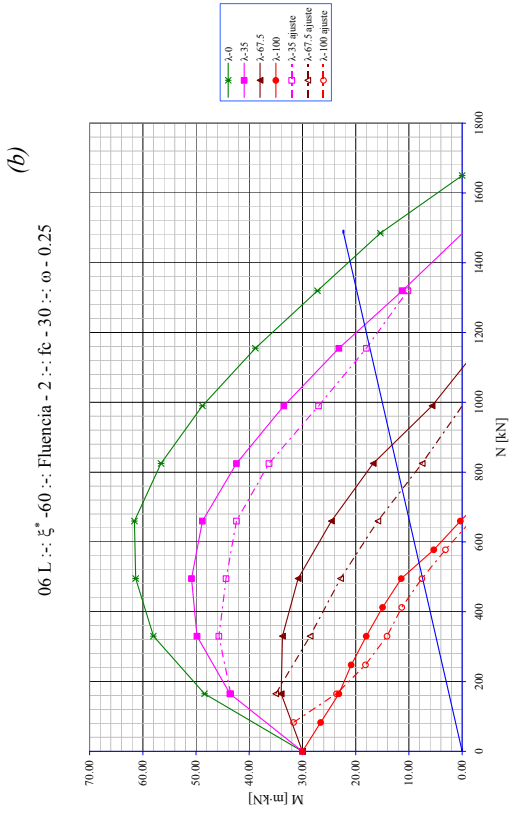
(b)

06 L :: $\xi^* = -60$:: Fluencia - 1 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.50$



Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^* = -60^\circ$ Fluencia $\varphi = 1$

(a) $f_c = 80$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 80$ $\omega = 0.50$;

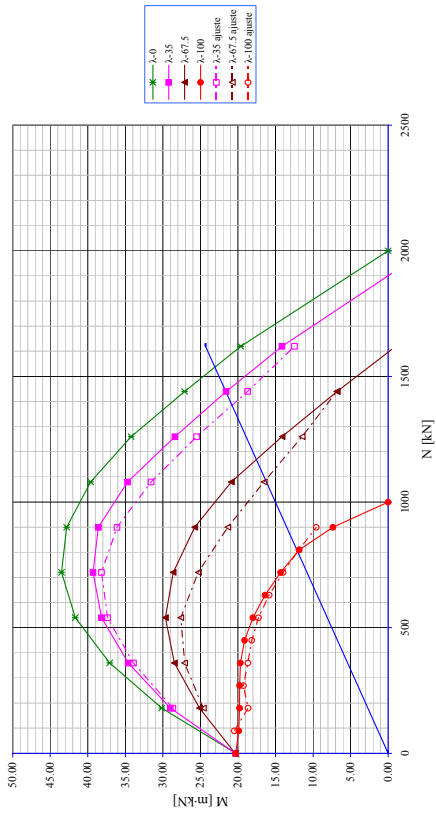


(a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.25$; (c) $f_c = 80$ $\omega = 0.06$; (d) $f_c = 80$ $\omega = 0.25$

Sección L.06 L: Flexión esviada $\xi^* = 60^\circ$ Fluencia $\varphi = 2$

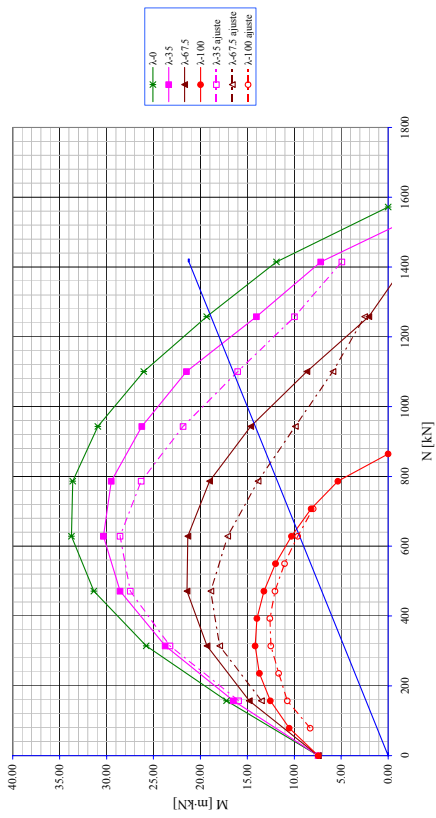
(b)

06 L :: β -45 :: Fluencia - 0 :: f_c - 30 :: ω - 0.25

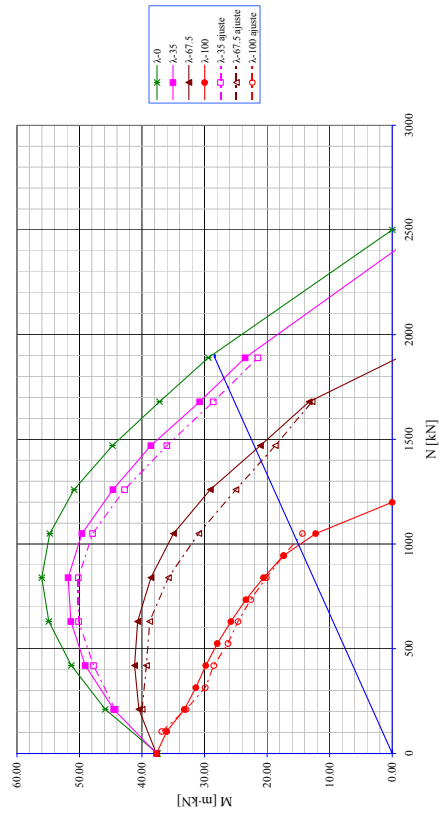


(a)

06 L :: β -45 :: Fluencia - 0 :: f_c - 30 :: ω - 0.06

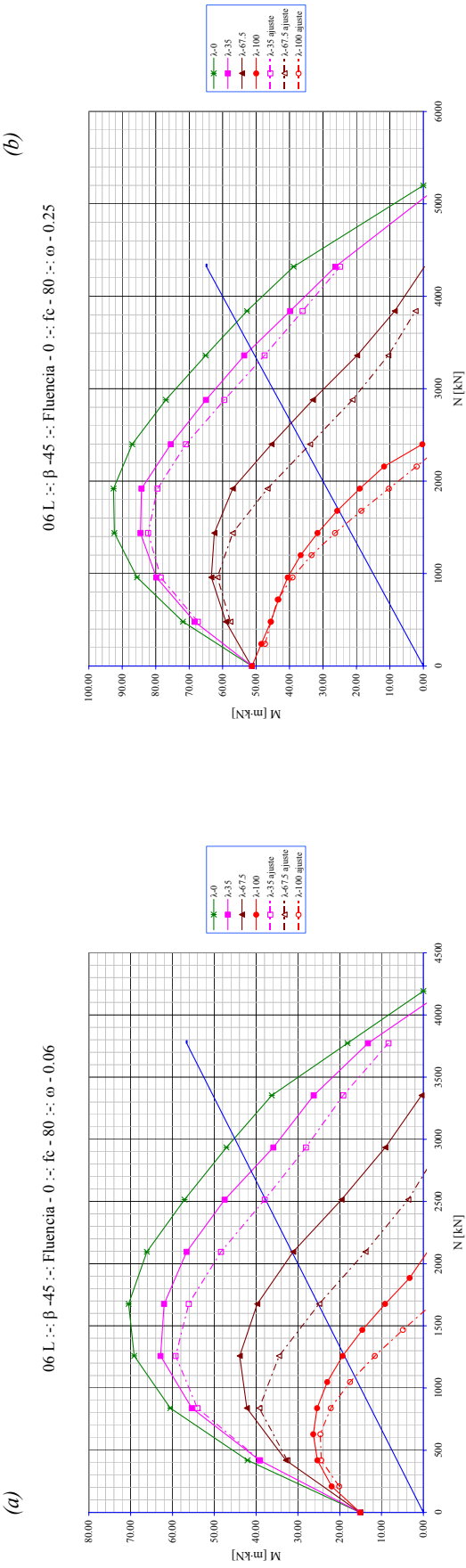


06 L :: β -45 :: Fluencia - 0 :: f_c - 30 :: ω - 0.50



(c)

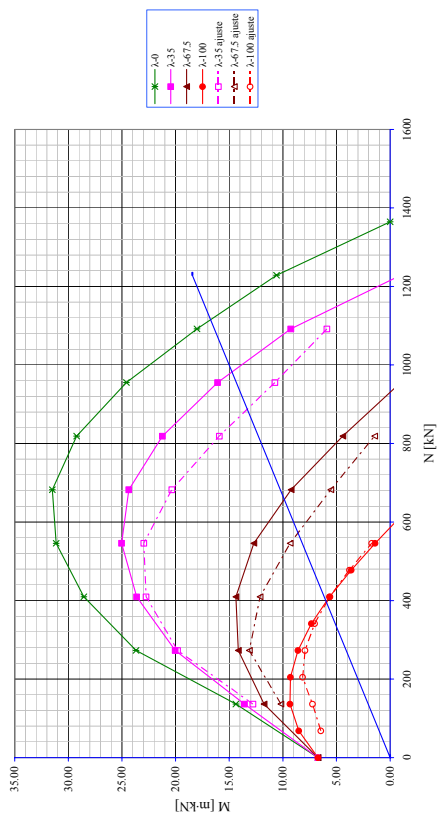
Sección L 06 L: Flexión esviada $\zeta^* = -90^\circ$ $\beta^* = -45^\circ$ Fluencia $\varphi = 0$
 (a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.25$; (c) $f_c = 30$ $\omega = 0.50$;



Sección L 06 L: Flexión esviada $\zeta^* = -90^\circ$ $\beta^* = -45^\circ$ Fluencia $\varphi = 0$
 (a) $f_c = 80$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 80$ $\omega = 0.25$;

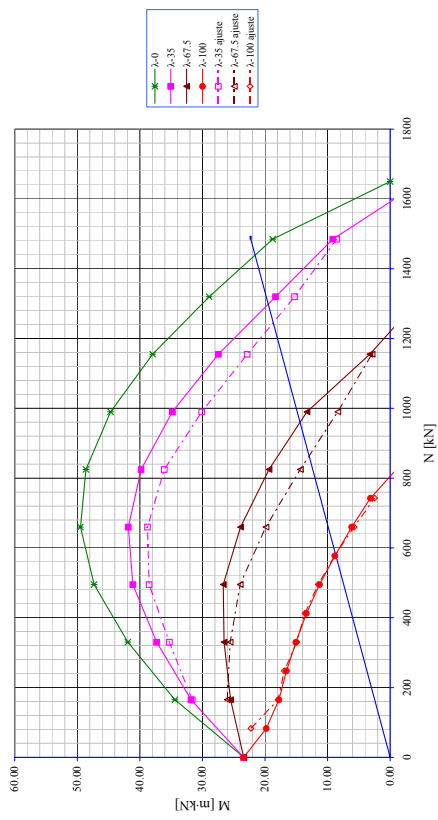
(a)

06 L :: $\beta = 45$:: Fluencia - 1 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$



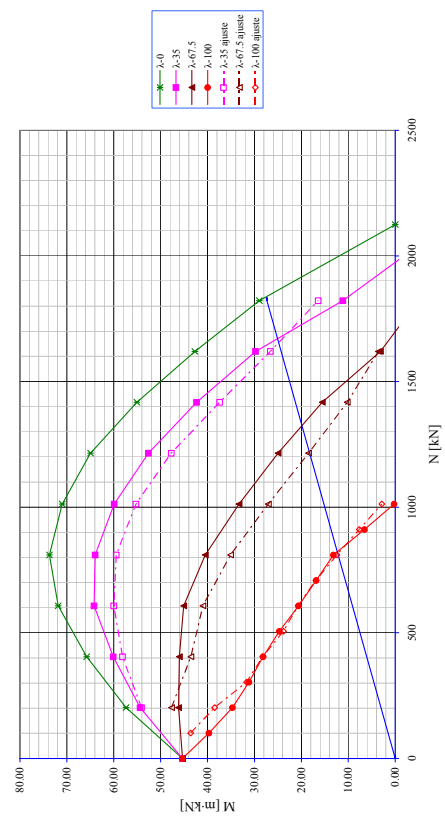
(b)

06 L :: $\beta = 45$:: Fluencia - 1 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.25$

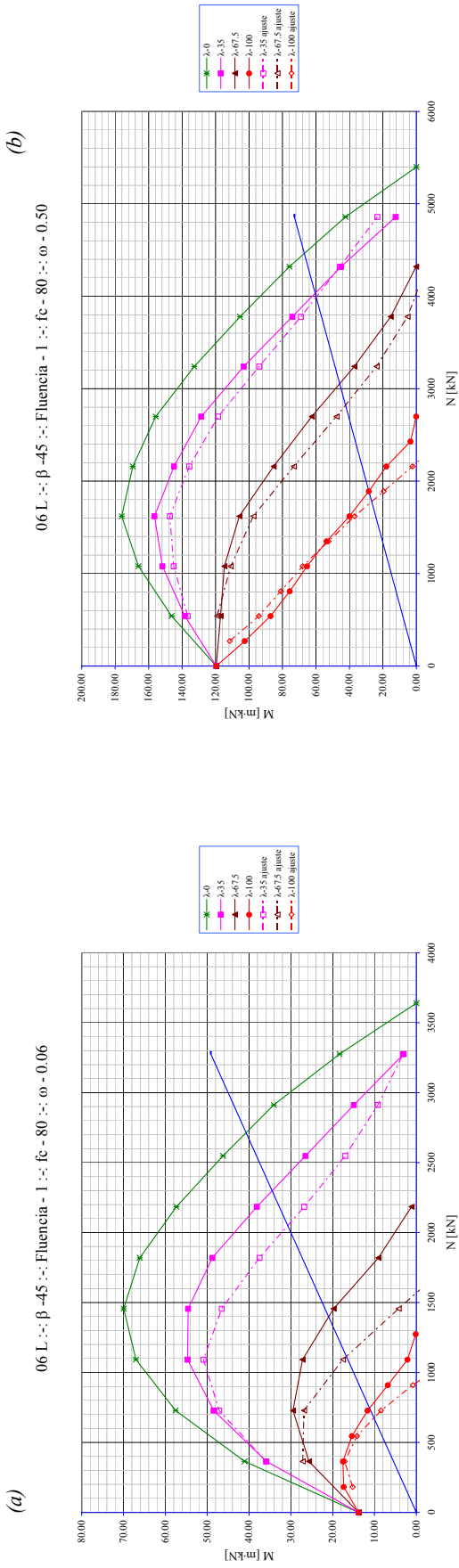


(c)

06 L :: $\beta = 45$:: Fluencia - 1 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.50$



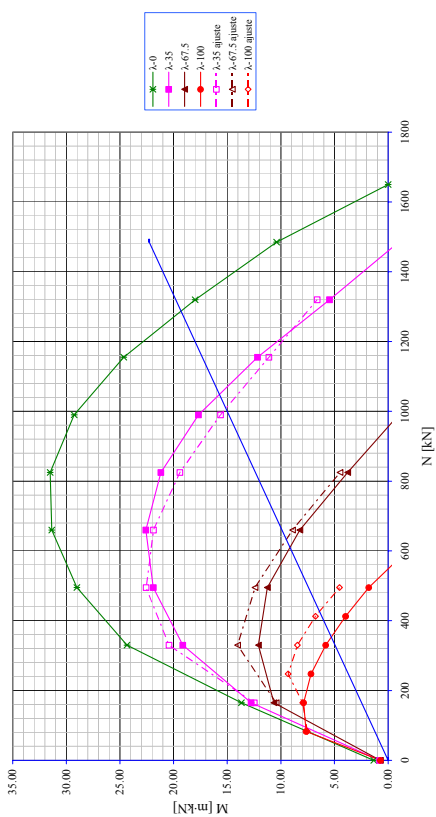
Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^* = -90^\circ$ $\beta^* = -45^\circ$ Fluencia $\varphi = 1$
 (a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.25$; (c) $f_c = 30$ $\omega = 0.50$;



Sección L 06 L: Flexión esviada $\zeta^* = -90^\circ$ $\beta^* = -45^\circ$ Fluencia $\varphi = 1$
 (a) $f_c = 80$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 80$ $\omega = 0.50$;

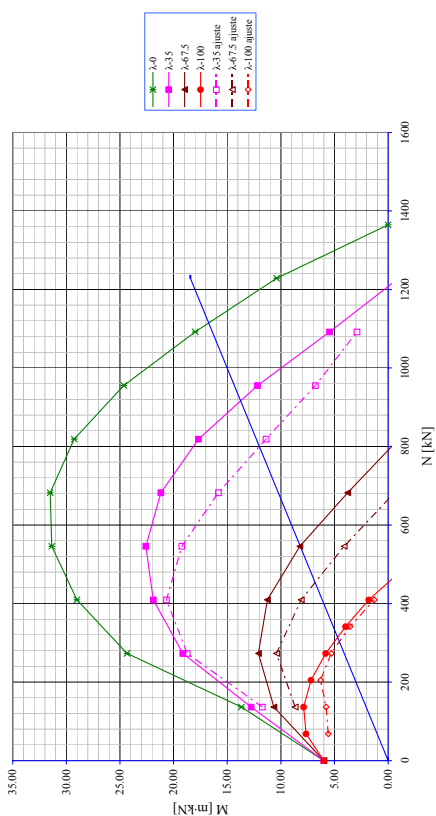
(b)

06 L :: $\beta = 45$:: Fluencia - 2 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.25$

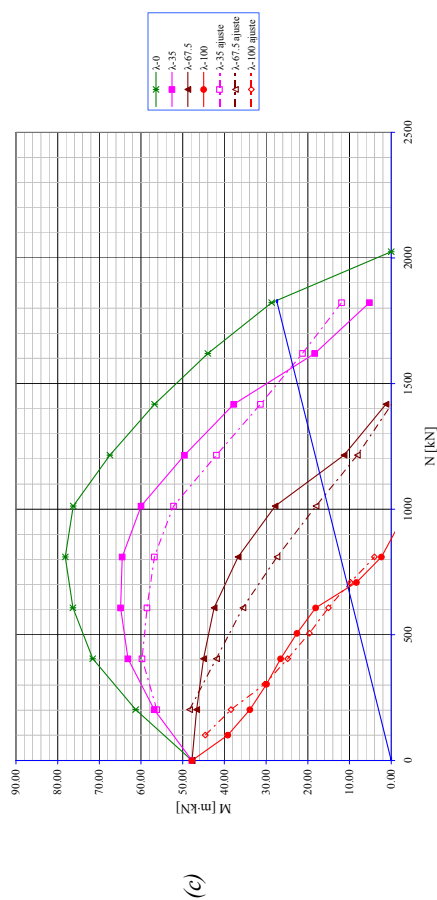


(a)

06 L :: $\beta = 45$:: Fluencia - 2 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$

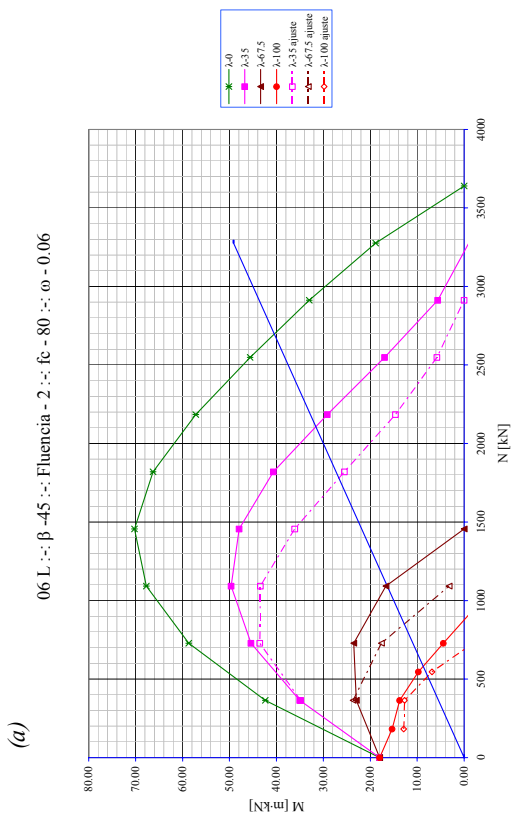
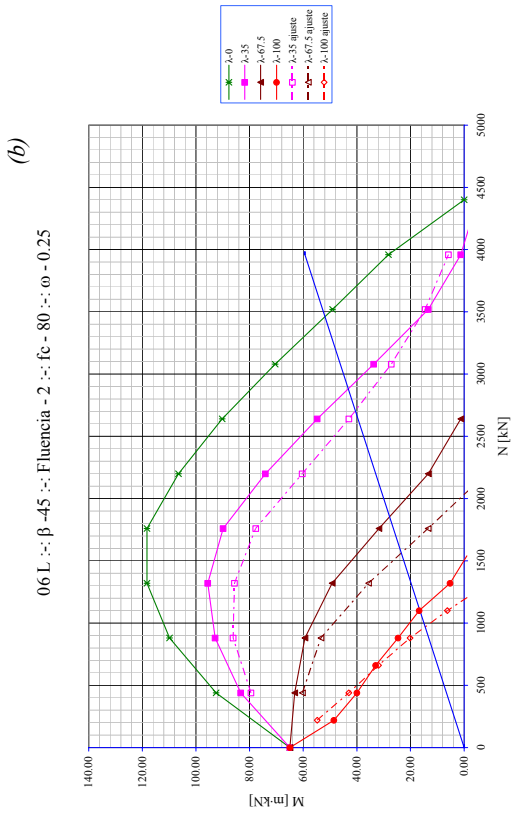


06 L :: $\beta = 45$:: Fluencia - 2 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.50$



(c)

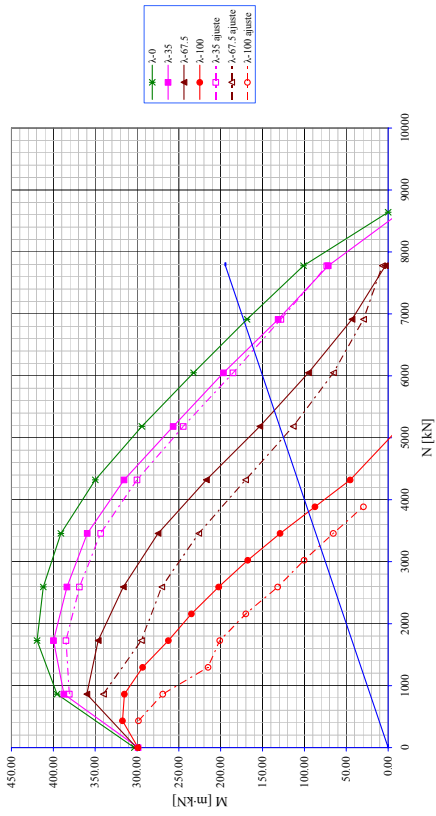
Sección L 06 L: Flexión esviada $\xi^* = -90^\circ$ $\beta^* = -45^\circ$ Fluencia $\varphi = 2$
 (a) $f_c = 30$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 30$ $\omega = 0.25$; (c) $f_c = 30$ $\omega = 0.50$;



Sección L 06 L: Flexión esviada $\zeta^* = -90^\circ$ $\beta^* = -45^\circ$ Fluencia $\varphi = 2$
 (a) $f_c = 80$ $\omega = 0.06$; (b) $f_c = 80$ $\omega = 0.25$;

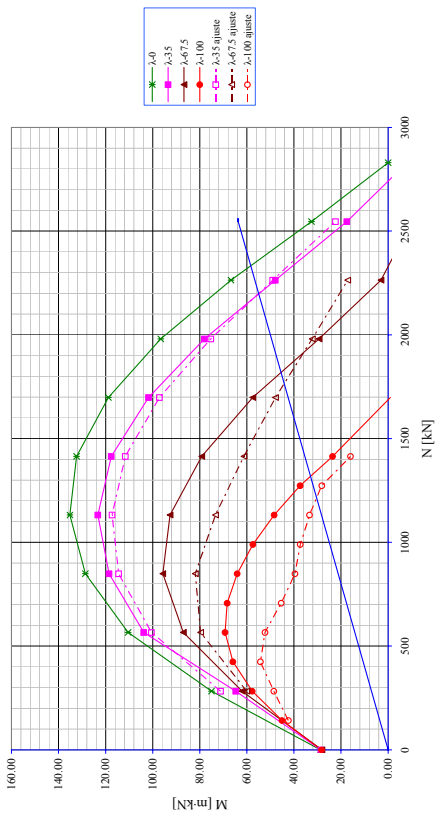
(b)

07 Lm :: ξ 45 :: Fluencia - 0 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.25$



(a)

07 Lm :: ξ 45 :: Fluencia - 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$



(c)

(a) $\varphi = 0; f_c = 30 \omega = 0.06;$

(b) $\varphi = 0; f_c = 80 \omega = 0.25;$

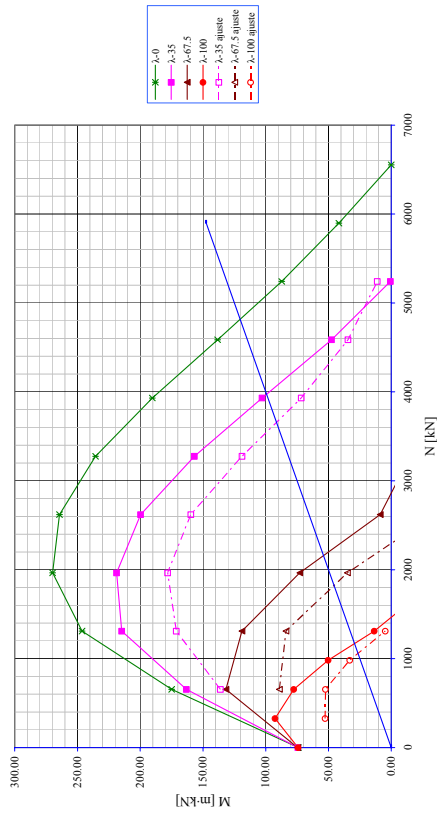
Sección L con 0 ejes de simetría $\xi^* = 45^\circ$

(a) $\varphi = 2; f_c = 30 \omega = 0.50;$

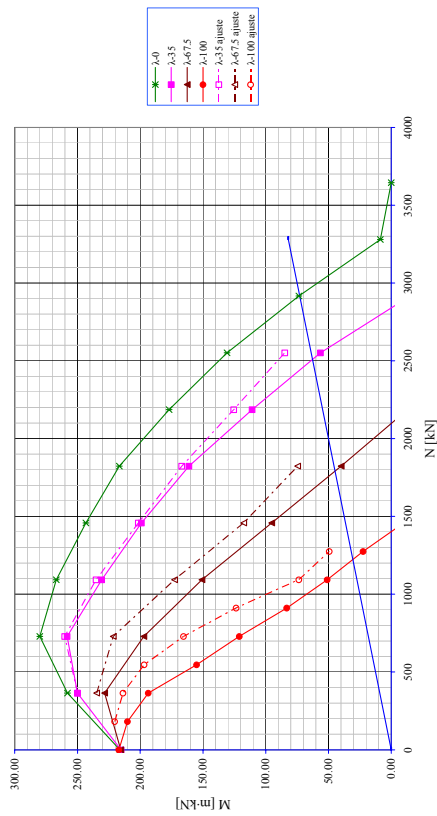
(a) $\varphi = 2; f_c = 80 \omega = 0.06;$

(d)

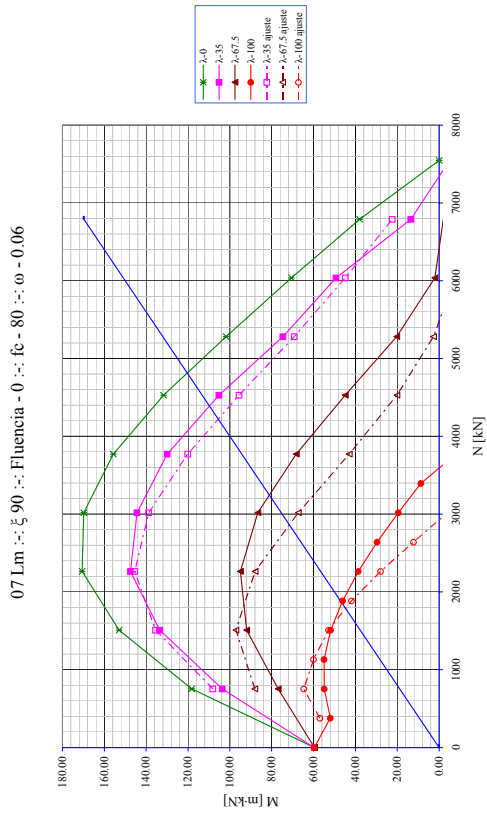
07 Lm :: ξ 45 :: Fluencia - 2 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.06$



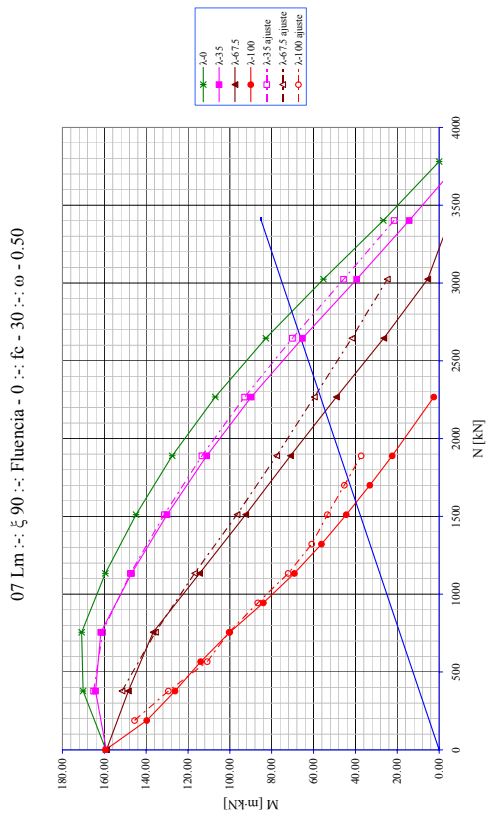
07 Lm :: ξ 45 :: Fluencia - 2 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.50$



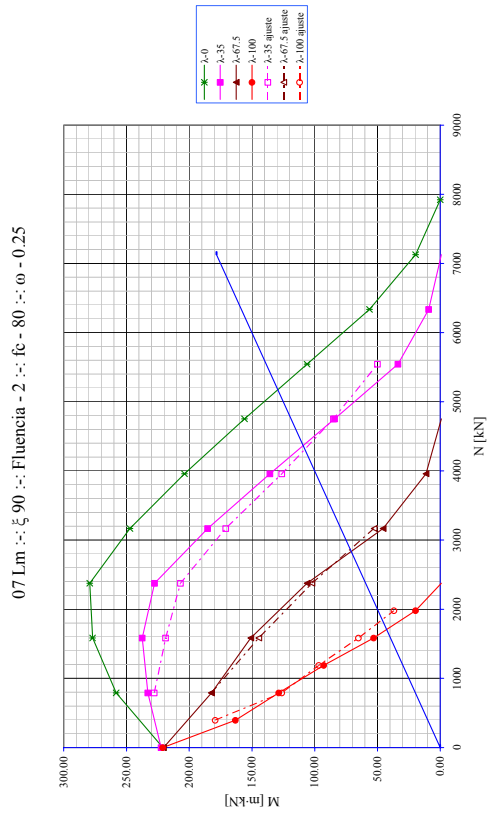
(b)



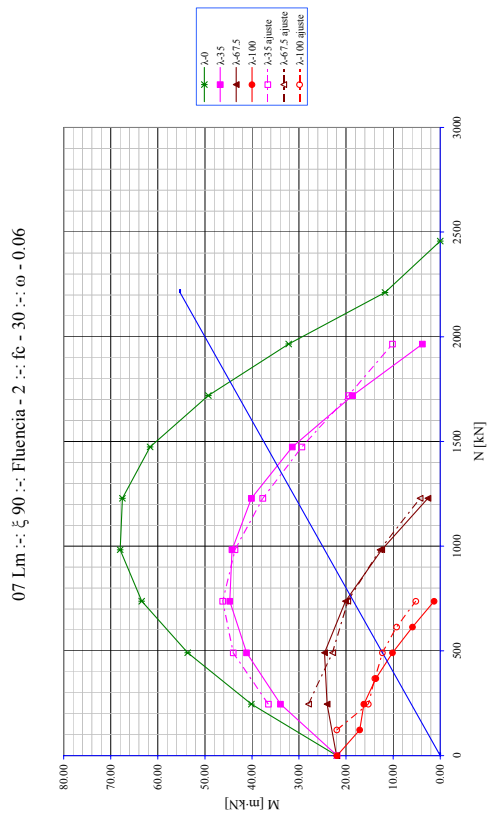
(a)



(d)



(c)



Sección L con 0 ejes de simetría $\xi^*=90^\circ$

(a) $\varphi = 0; f_c = 30 \omega = 0.50;$

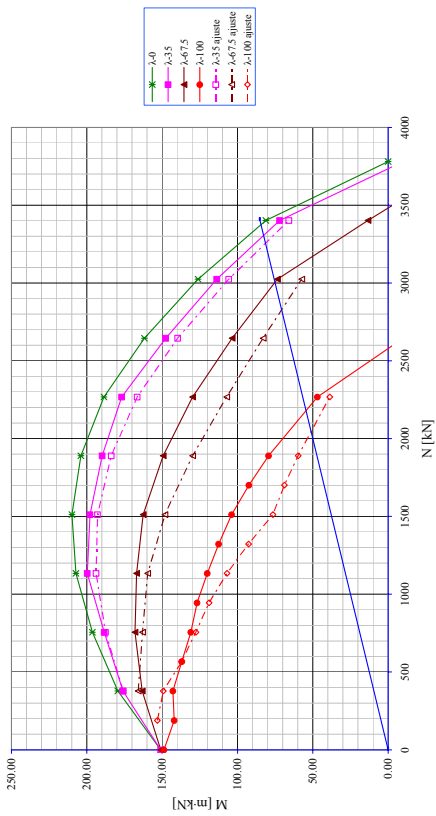
(b) $\varphi = 0; f_c = 80 \omega = 0.06;$

(c) $\varphi = 2; f_c = 30 \omega = 0.06;$

(d) $\varphi = 2; f_c = 80 \omega = 0.25;$

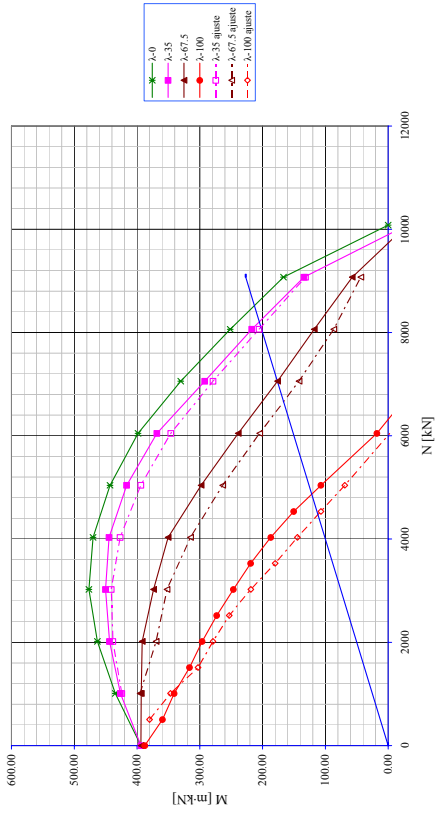
(a)

07 Lm :: ξ 225 :: Fluencia - 0 :: f_c - 30 :: ω - 0.25



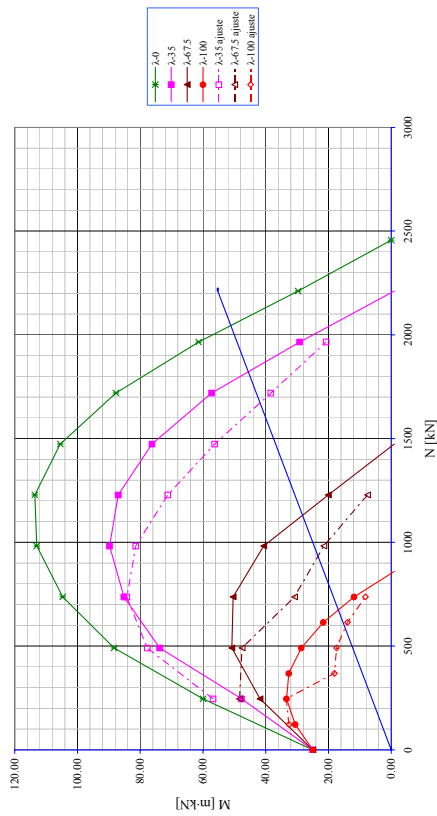
(b)

07 Lm :: ξ 225 :: Fluencia - 0 :: f_c - 80 :: ω - 0.50



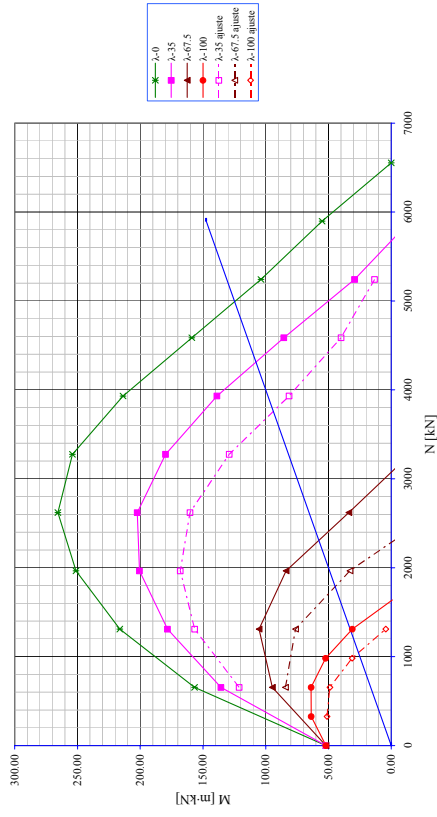
(c)

07 Lm :: ξ 225 :: Fluencia - 2 :: f_c - 30 :: ω - 0.06



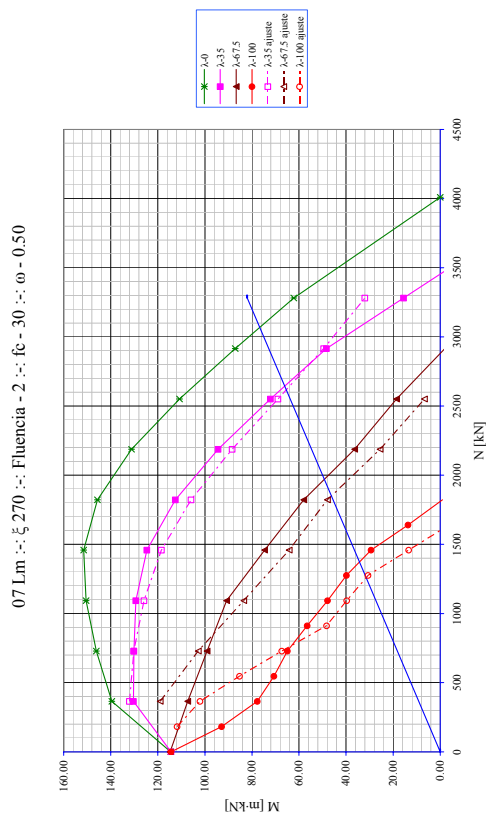
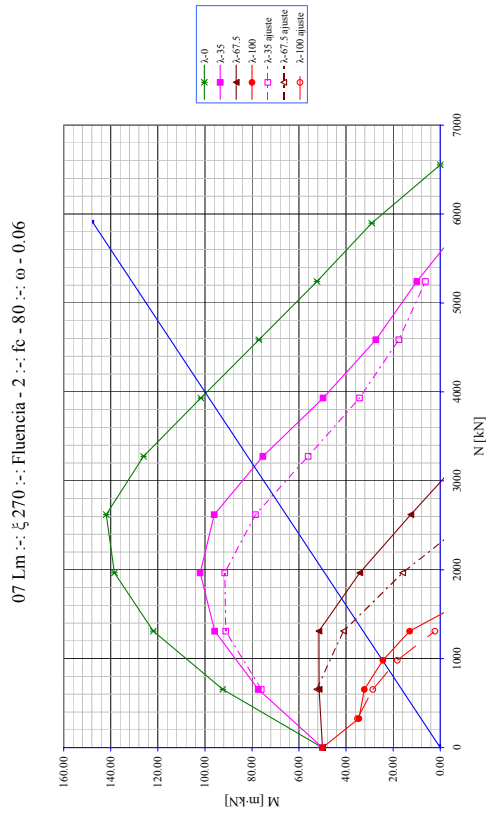
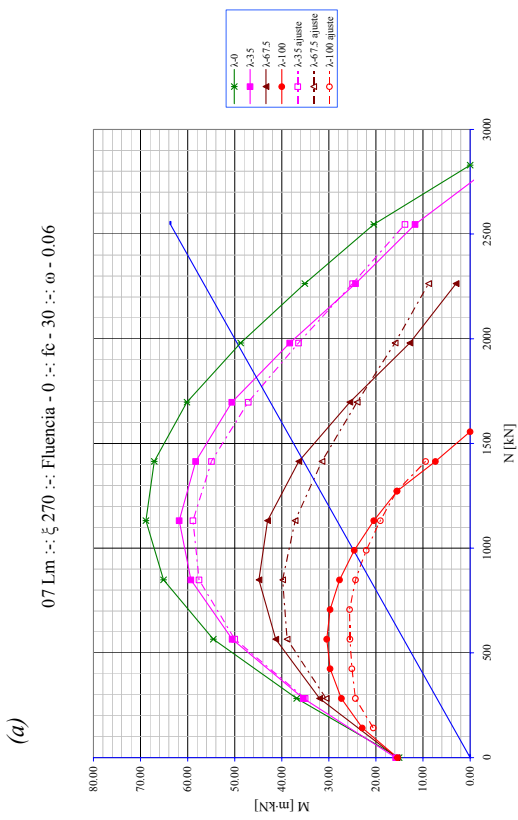
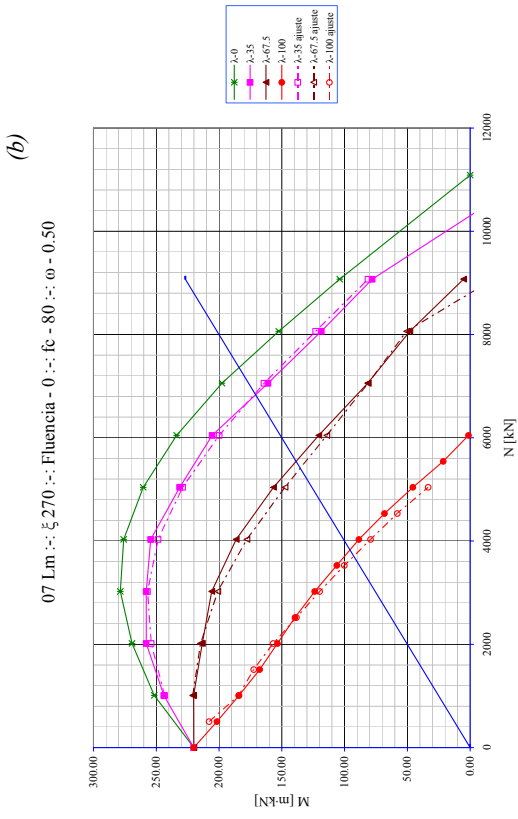
(d)

07 Lm :: ξ 225 :: Fluencia - 2 :: f_c - 80 :: ω - 0.06



Sección L con 0 ejes de simetría 07 Lm: Flexión esviada $\xi^*=225^\circ$

- (a) $\varphi=0; f_c=30 \omega=0.25;$
- (b) $\varphi=0; f_c=80 \omega=0.50;$
- (c) $\varphi=2; f_c=30 \omega=0.06;$
- (d) $\varphi=2; f_c=80 \omega=0.06;$



Sección L con 0 ejes de simetría 07 Lm: Flexión esviada $\xi^*=270^\circ$

(a) $\varphi=2; f_c=80 \omega=0.06;$

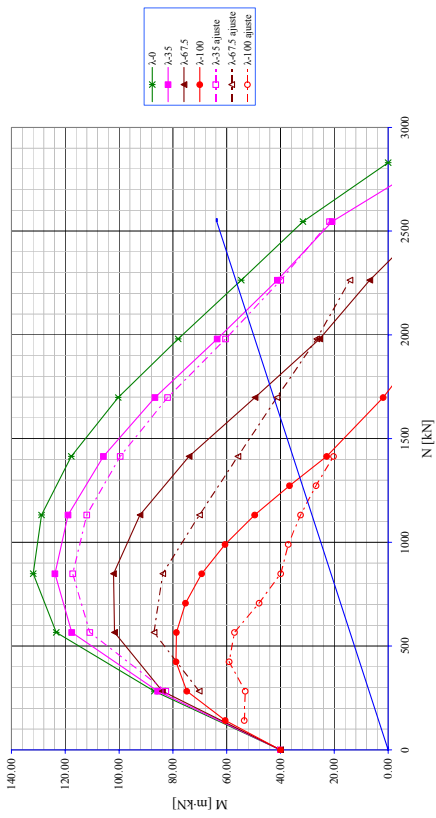
(b) $\varphi=2; f_c=30 \omega=0.50;$

(c) $\varphi=0; f_c=30 \omega=0.06;$

(d) $\varphi=2; f_c=80 \omega=0.06;$

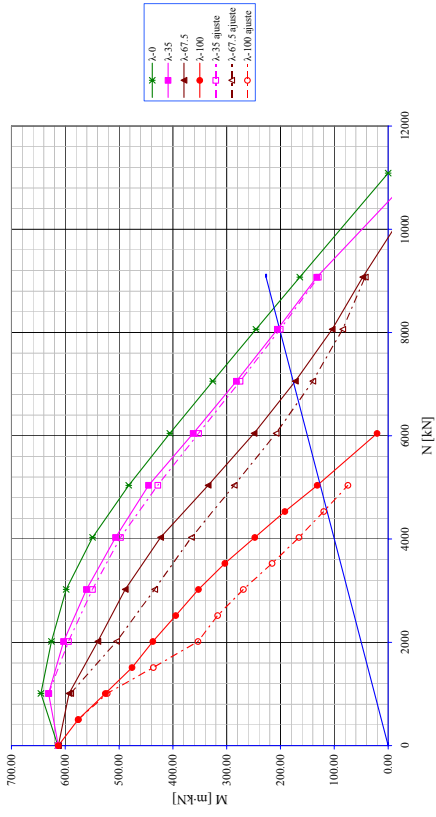
(a)

07 Lm :: ξ 315 :: Fluencia - 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$



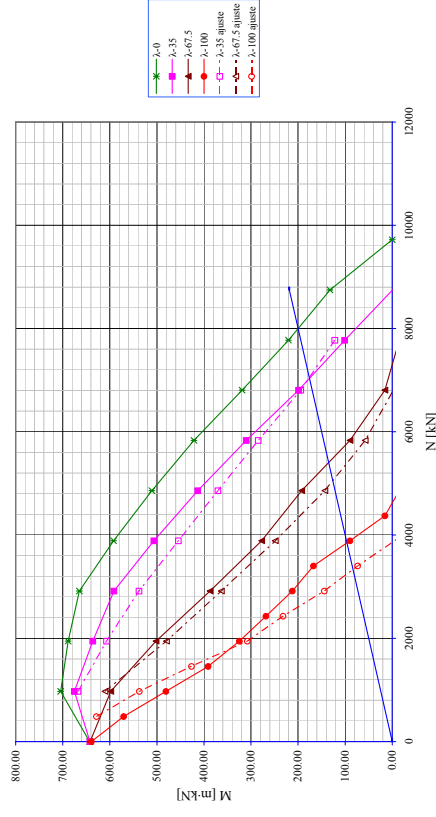
(b)

07 Lm :: ξ 315 :: Fluencia - 0 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.50$



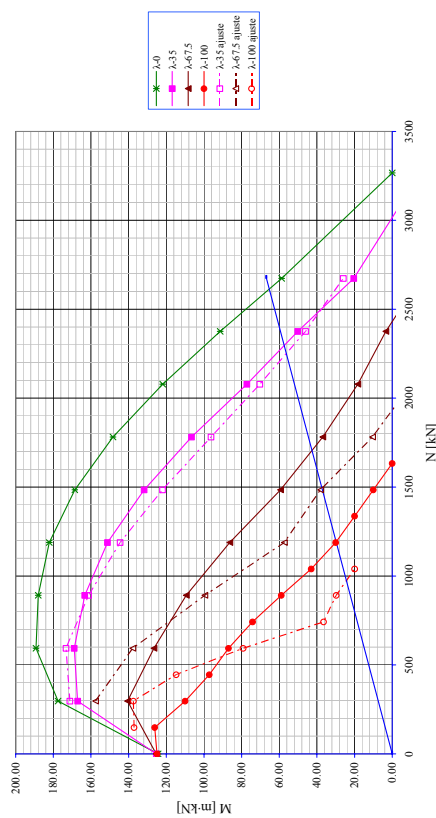
(d)

07 Lm :: ξ 315 :: Fluencia - 2 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.50$



(c)

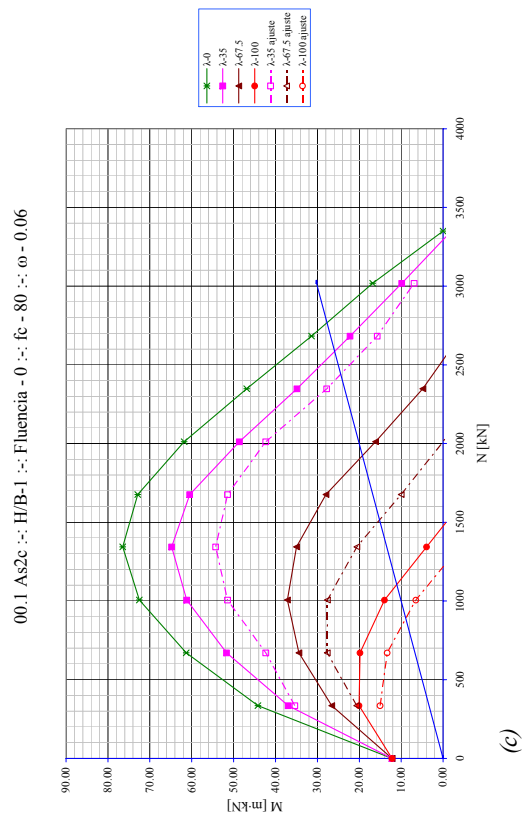
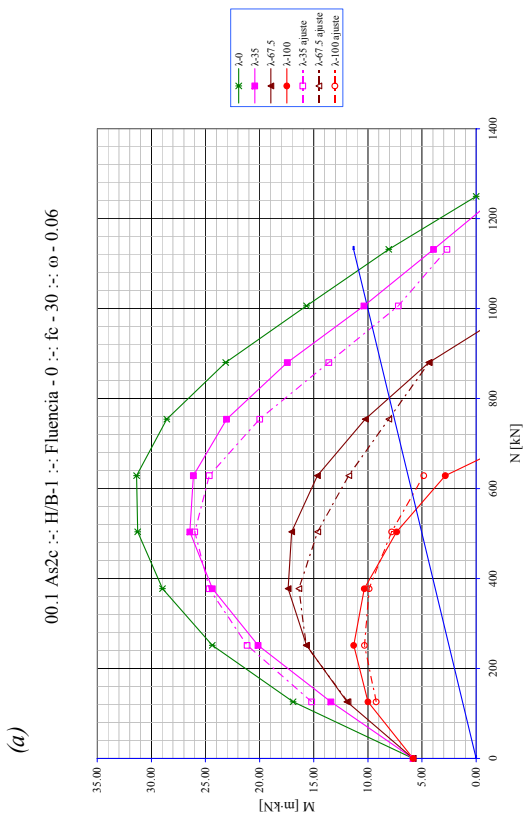
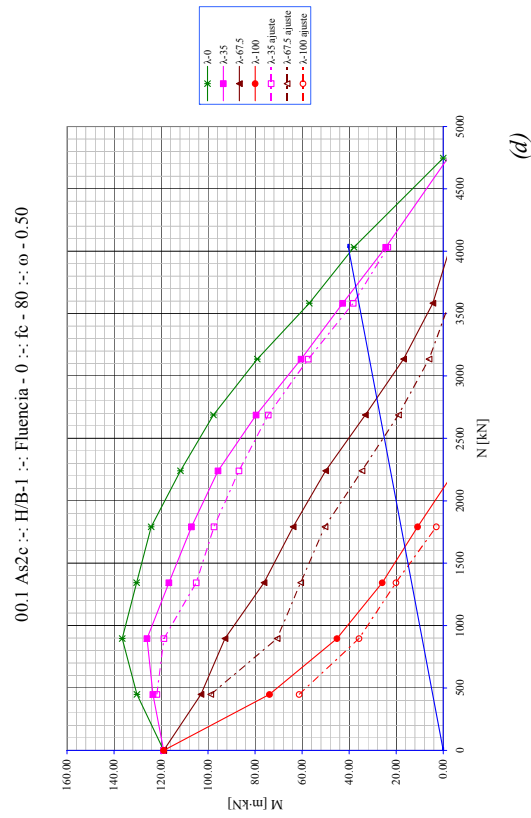
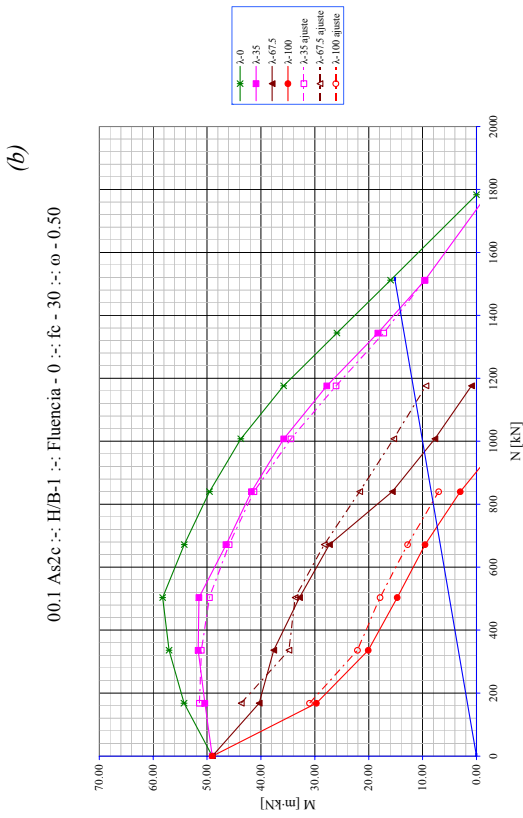
07 Lm :: ξ 315 :: Fluencia - 2 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.25$



Sección L con 0 ejes de simetría 07 Lm: Flexión esviada $\xi^* = 315^\circ$

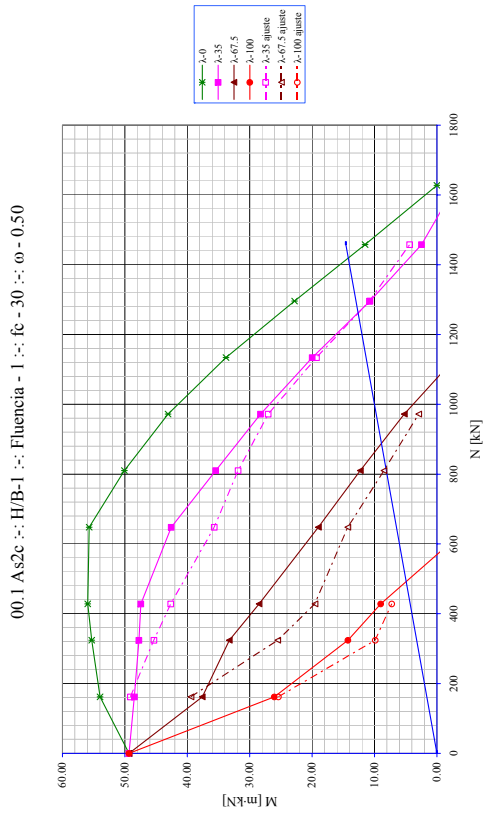
- (a) $\varphi = 0; f_c = 30 \omega = 0.06;$
- (b) $\varphi = 0; f_c = 80 \omega = 0.50;$
- (c) $\varphi = 2; f_c = 30 \omega = 0.25;$
- (d) $\varphi = 2; f_c = 80 \omega = 0.50;$

**B.II Gráficas secciones
rectangulares.**

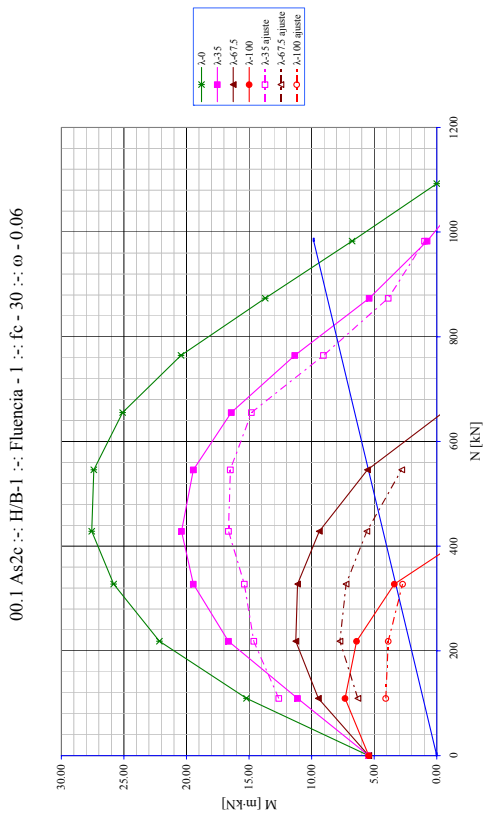


Sección Rectangular 00.1 As2c H/B=1: Flexión recta Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.50$;

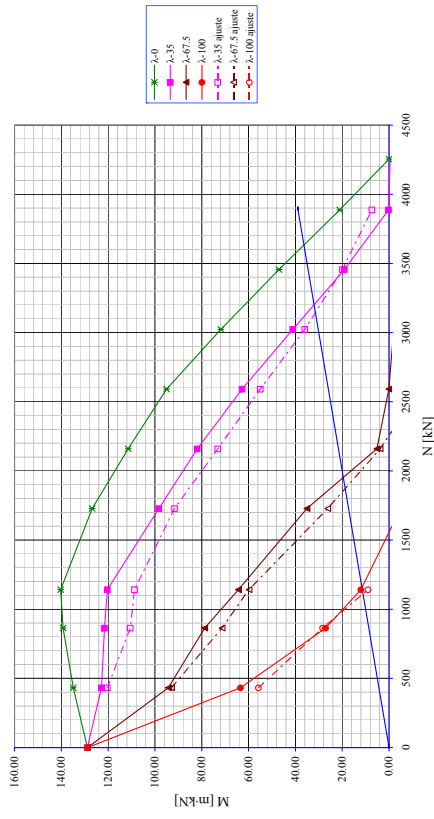
(b)



(a)

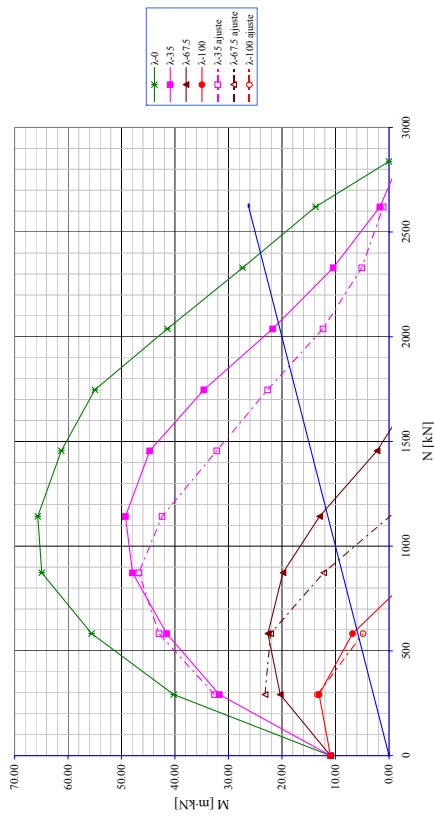


00.1 As2c :: H/B=1 :: Fluencia - 1 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.50$



(d)

00.1 As2c :: H/B=1 :: Fluencia - 1 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.06$

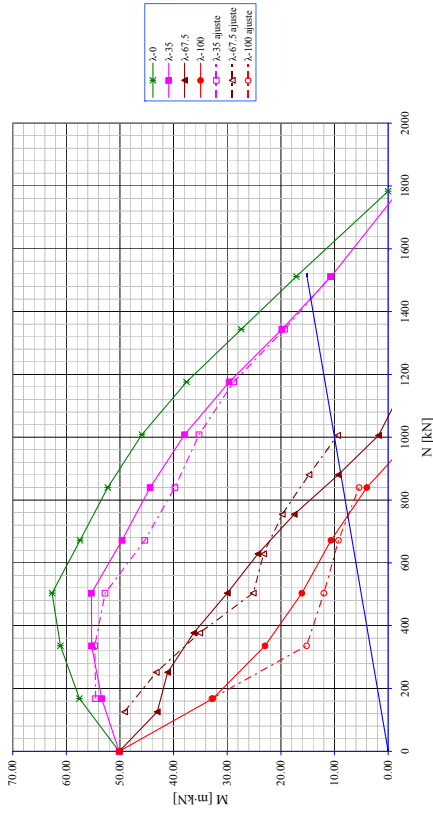


(c)

Sección Rectangular 00.1 As2c H/B=1: Flexión recta Fluencia $\varphi=1$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.50$;

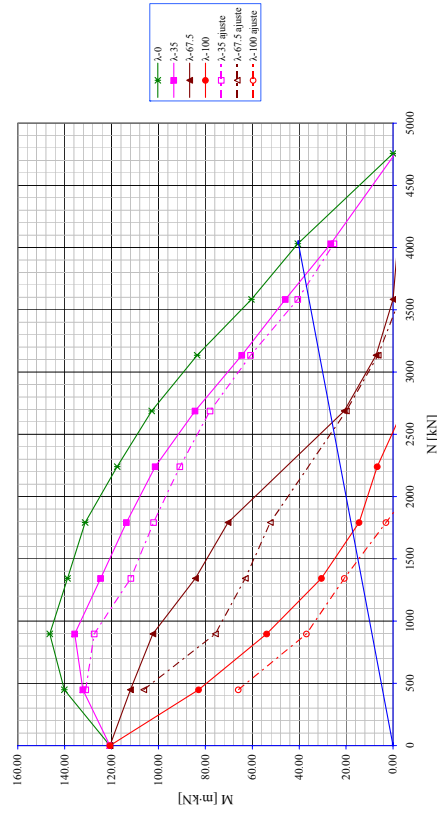
(b)

00.3 As4c Nueva Propuesta :: H/B = 1 :: Fluencia = 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.50$



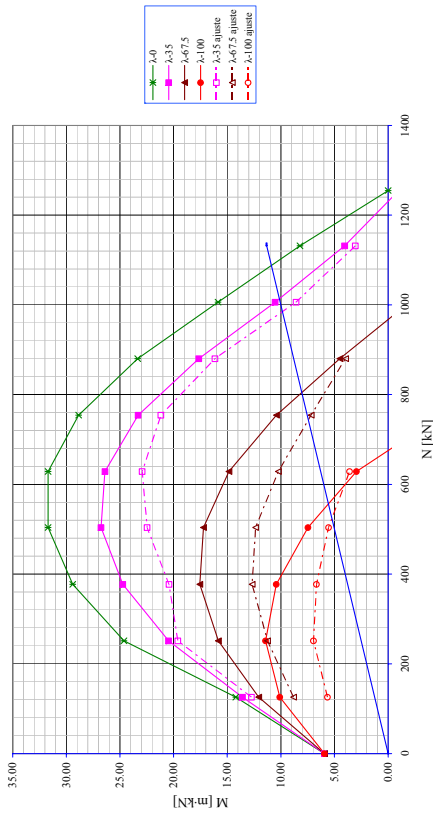
(d)

00.3 As4c Nueva Propuesta :: H/B = 1 :: Fluencia = 0 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.50$



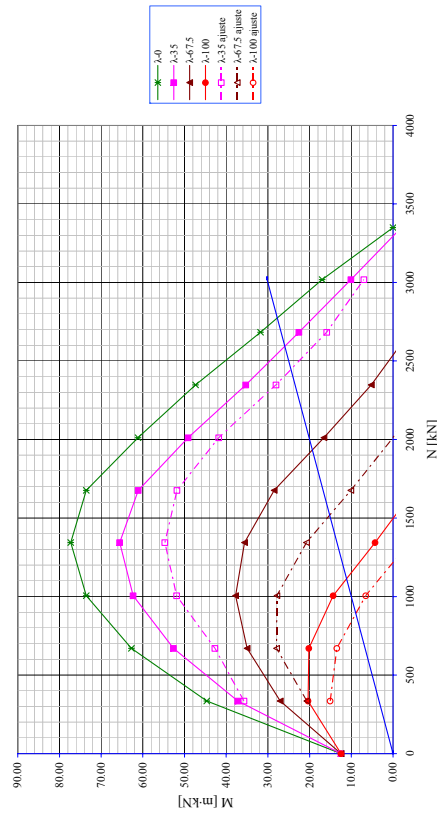
(a)

00.3 As4c Nueva Propuesta :: H/B = 1 :: Fluencia = 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$



(c)

00.3 As4c Nueva Propuesta :: H/B = 1 :: Fluencia = 0 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.06$

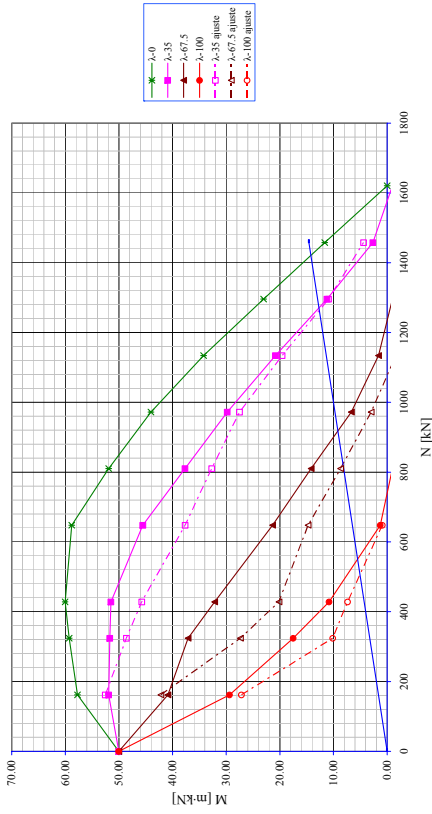


Sección Rectangular 00.3 As4c H/B=1 : Flexión recta Fluencia $\varphi=0$

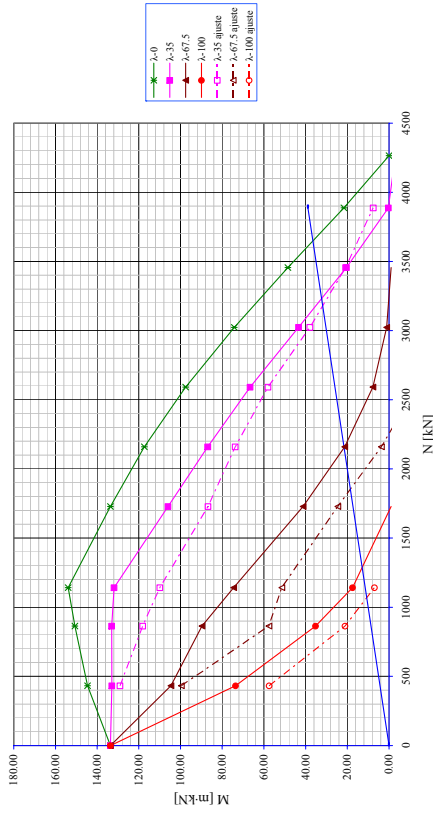
(a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.50$;

(b)

00.3 As4c Nueva Propuesta :: H/B = 1 :: Fluencia = 1 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.50$



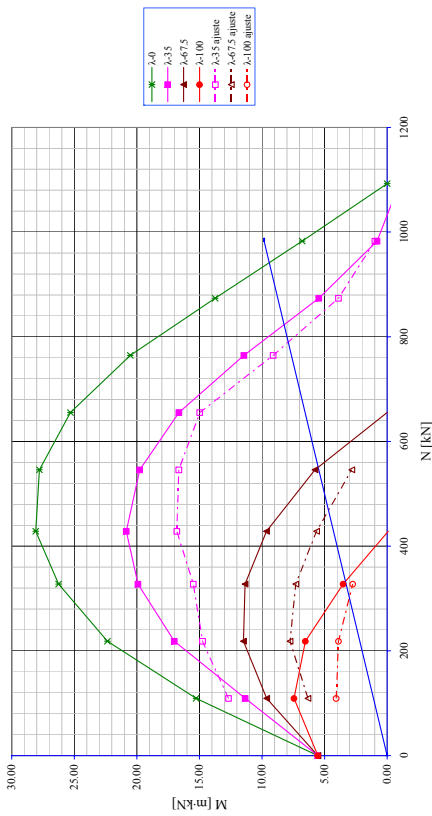
00.3 As4c Nueva Propuesta :: H/B = 1 :: Fluencia = 1 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.50$



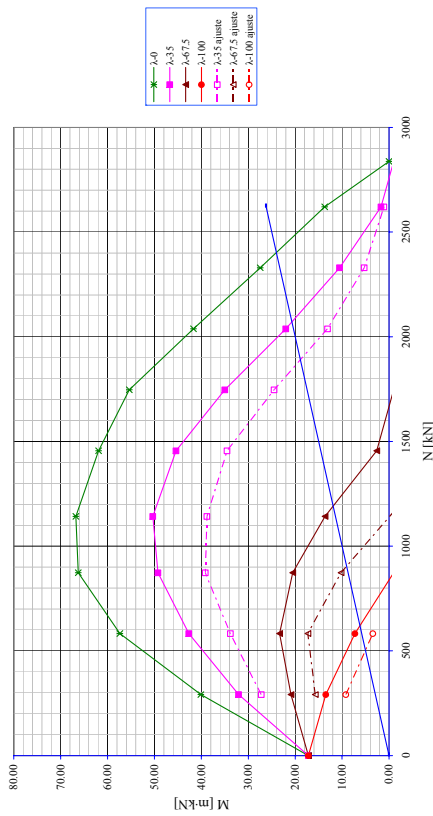
(d)

(a)

00.3 As4c Nueva Propuesta :: H/B = 1 :: Fluencia = 1 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$



00.3 As4c Nueva Propuesta :: H/B = 1 :: Fluencia = 1 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.06$

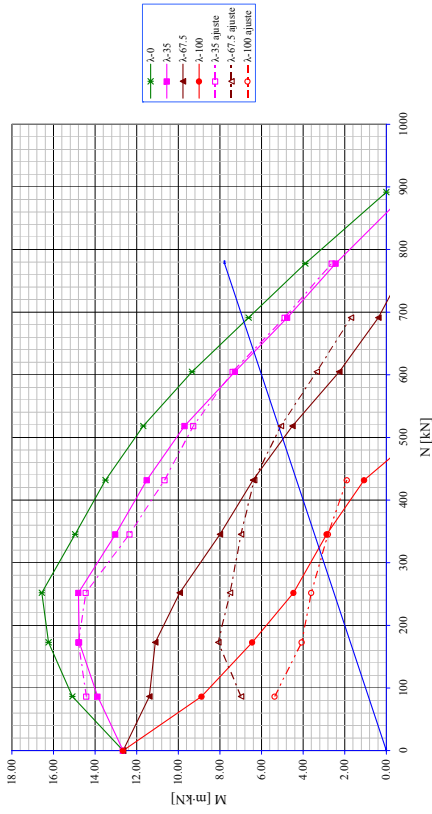


(c)

Sección Rectangular 00.3 As4c H/B=1 : Flexión recta Fluencia $\varphi=1$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.50$;

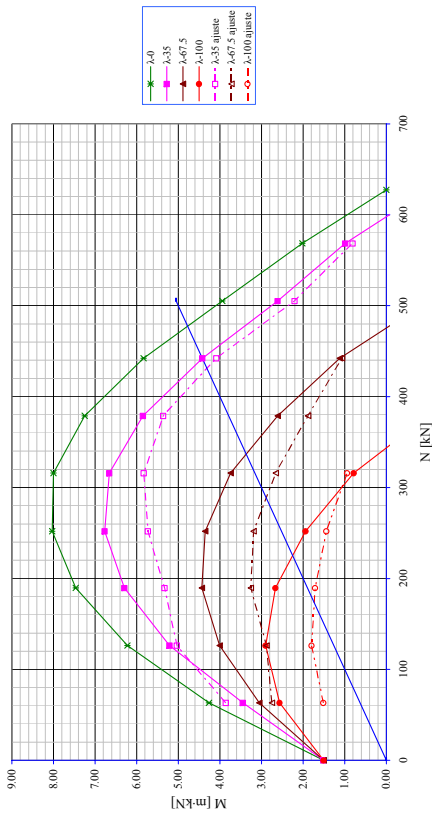
(b)

00.4 As4c Nueva Propuesta :: H/B = 2 :: Fluencia = 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.50$

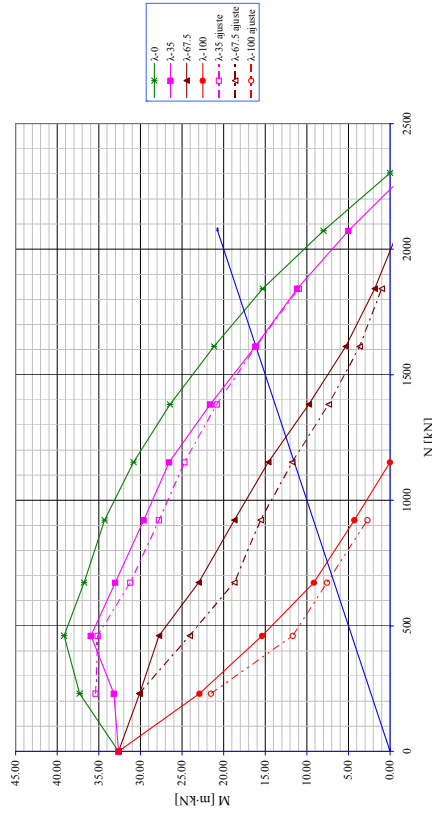


(a)

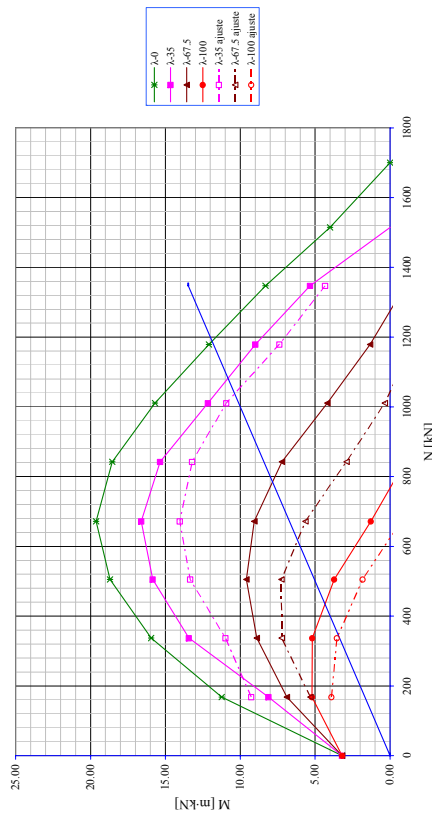
00.4 As4c Nueva Propuesta :: H/B = 2 :: Fluencia = 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$



00.4 As4c Nueva Propuesta :: H/B = 2 :: Fluencia = 0 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.50$



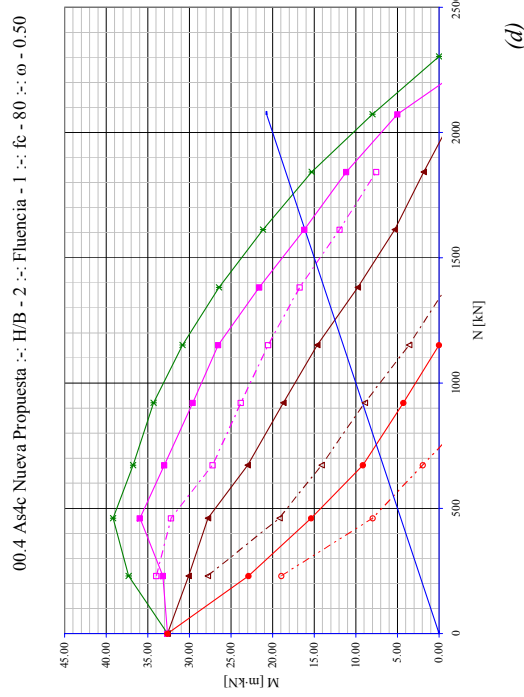
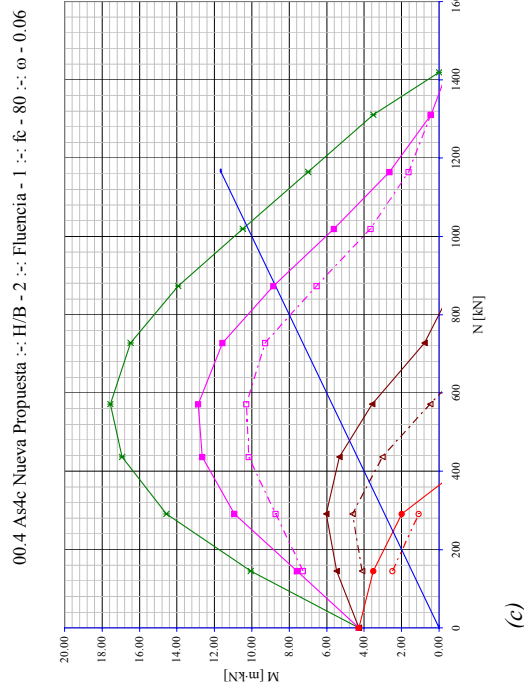
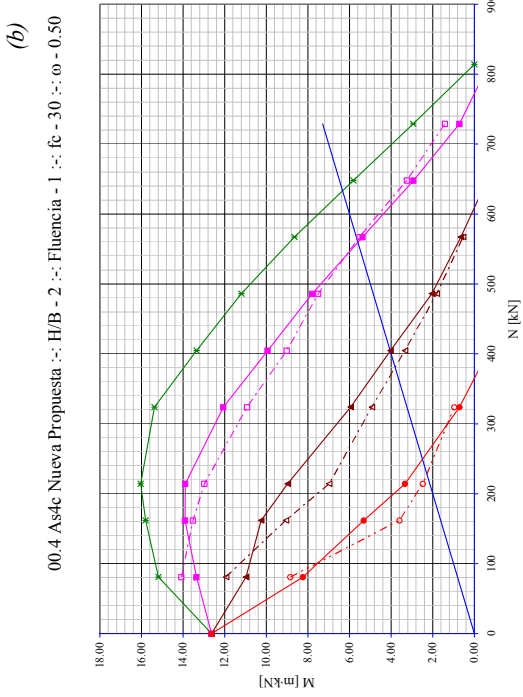
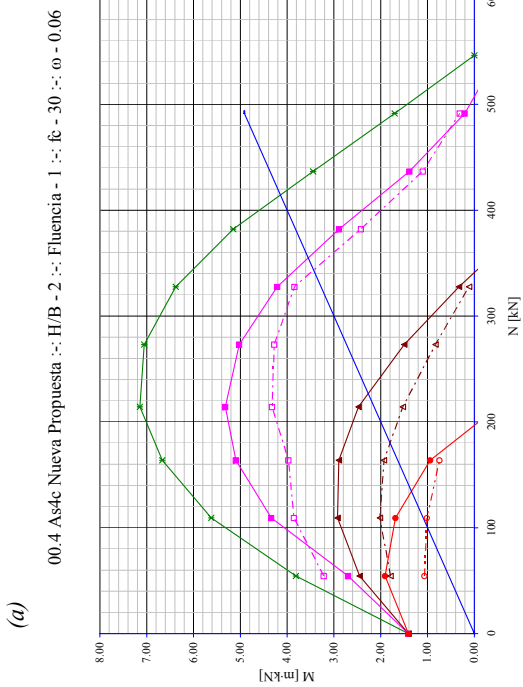
00.4 As4c Nueva Propuesta :: H/B = 2 :: Fluencia = 0 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.06$



(d)

(c)

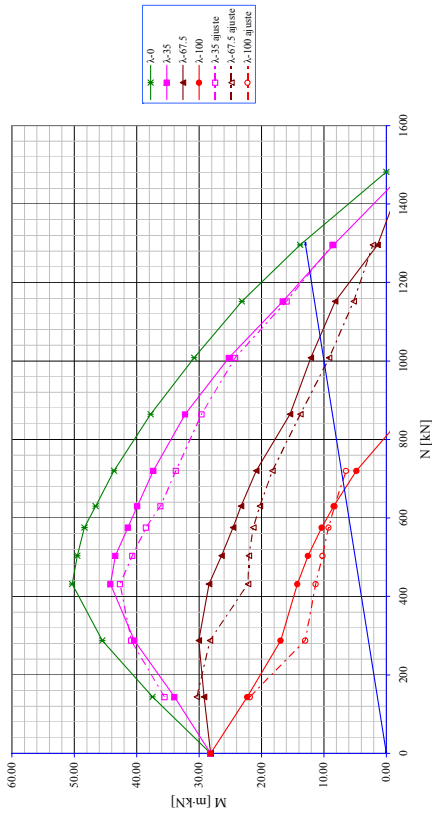
Sección Rectangular 00.4 As4c H/B=2. Flexión recta Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.50$;



Sección Rectangular 00.4 As4c H/B=2. Flexión recta Fluencia $\varphi=1$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.50$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (d) $f_c=80$ $\omega=0.50$;

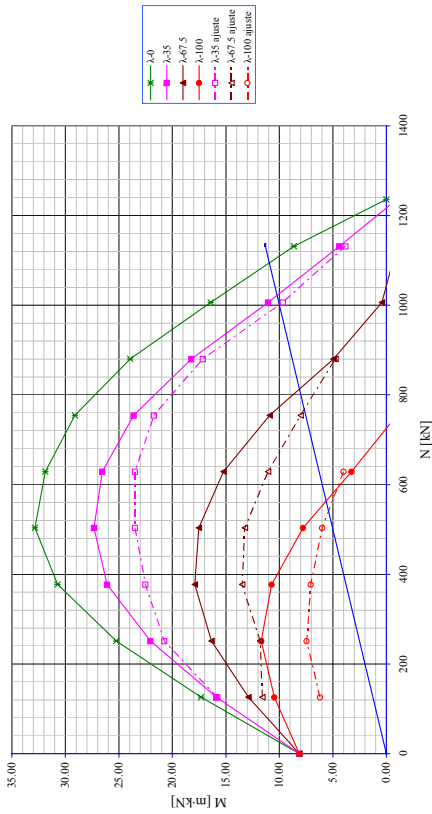
(b)

00.5 As4e Nueva Propuesta :: H/B=1 :: Fluencia - 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.25$

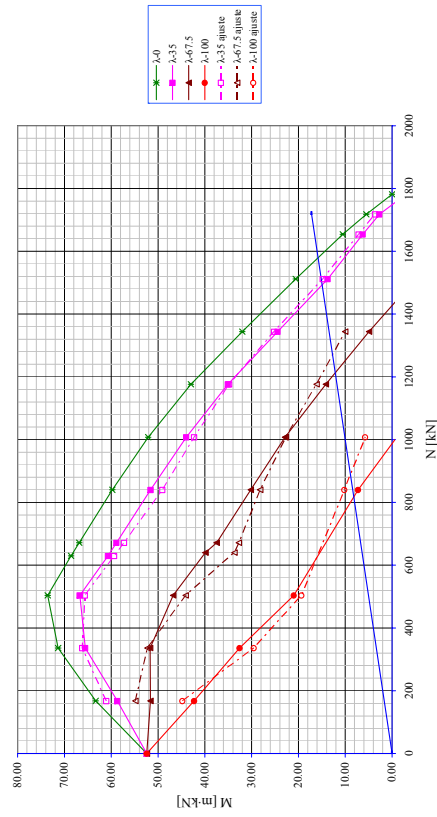


(a)

00.5 As4e Nueva Propuesta :: H/B=1 :: Fluencia - 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$



00.5 As4e Nueva Propuesta :: H/B=1 :: Fluencia - 0 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.50$

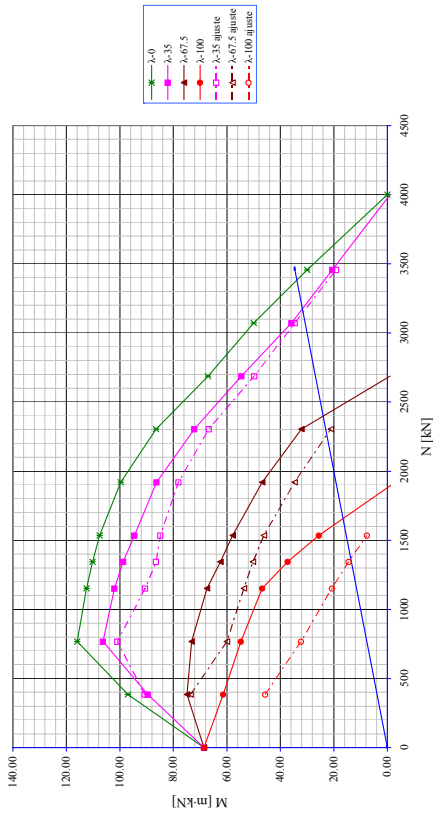


(c)

Sección Rectangular 00.5 As4e H/B=1 : Flexión recta Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=30$ $\omega=0.50$;

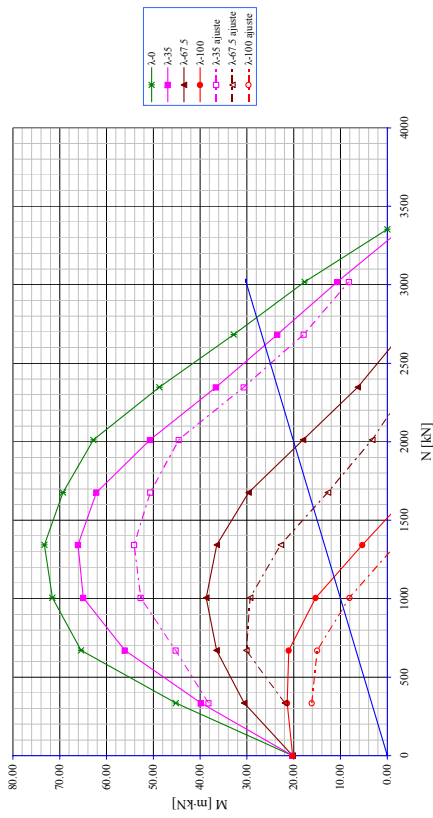
(b)

00.5 As4e Nueva Propuesta :: H/B=1 :: Fluencia - 0 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.25$

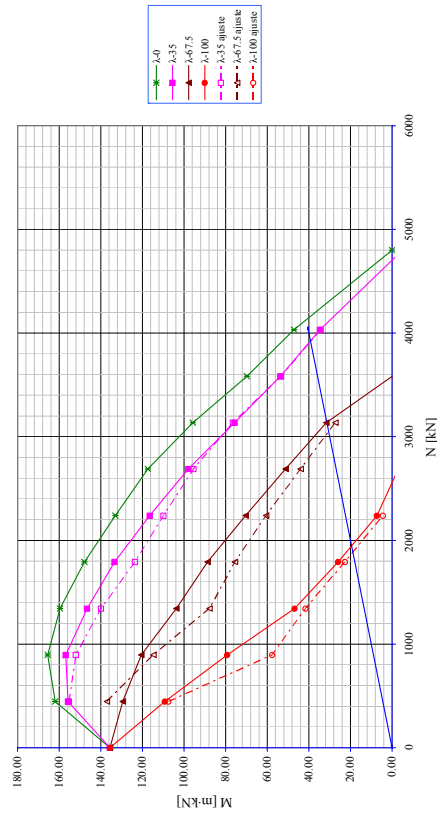


(a)

00.5 As4e Nueva Propuesta :: H/B=1 :: Fluencia - 0 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.06$



00.5 As4e Nueva Propuesta :: H/B=1 :: Fluencia - 0 :: $f_c = 80$:: $\omega = 0.50$

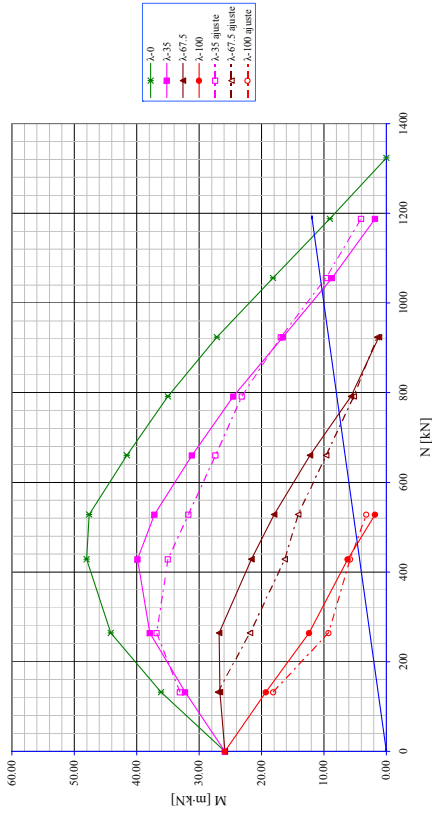


(c)

Sección Rectangular 00.5 As4e H/B=1 : Flexión recta Fluencia $\varphi=0$
 (a) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=80$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.50$;

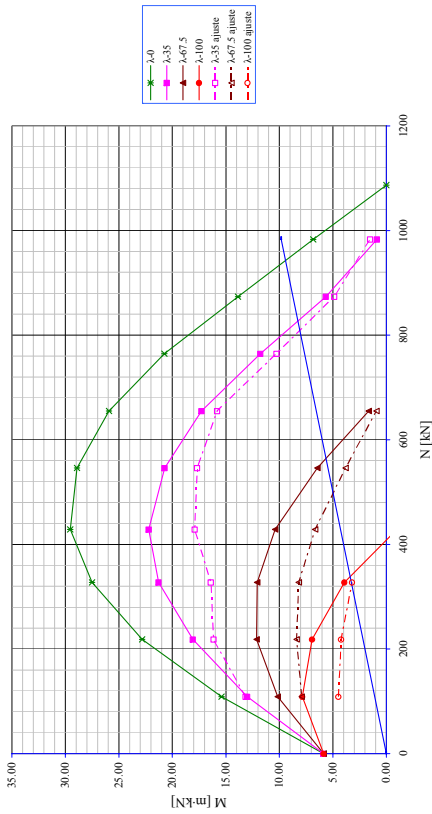
(b)

00.5 As4e Nueva Propuesta :: H/B=1 :: Fluencia - 1 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.25$

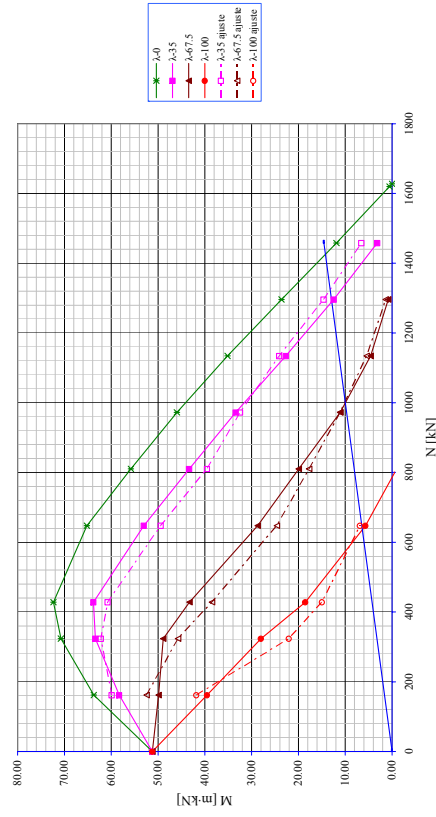


(a)

00.5 As4e Nueva Propuesta :: H/B=1 :: Fluencia - 1 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$

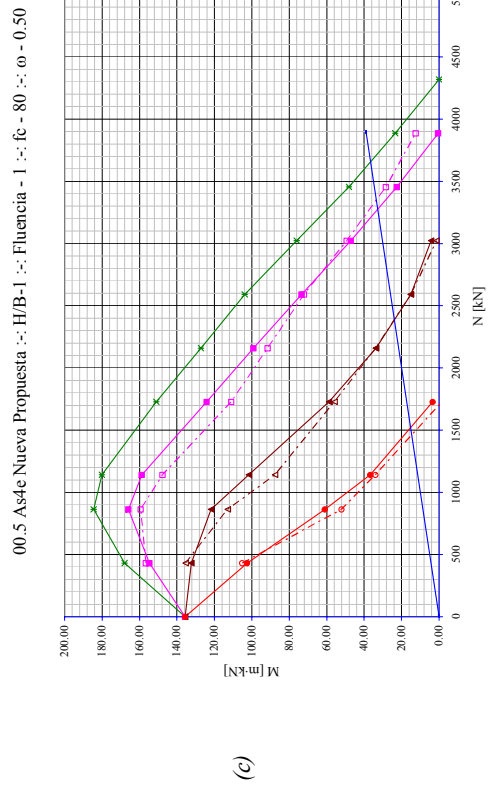
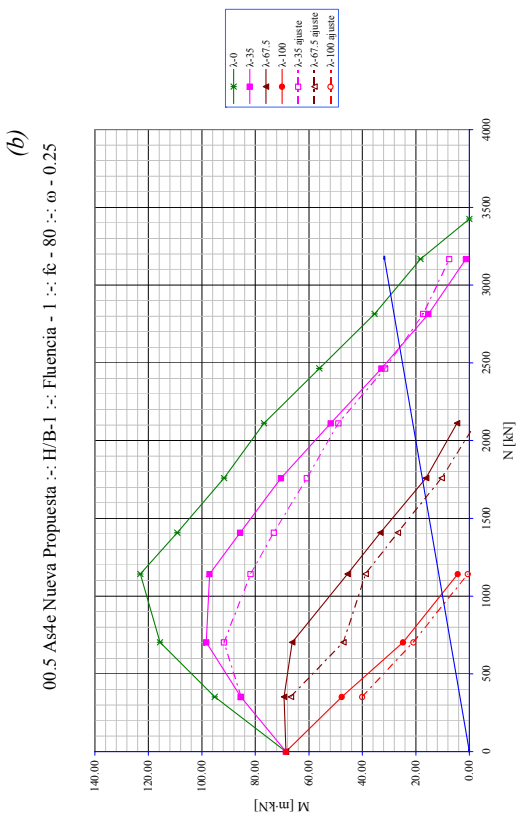
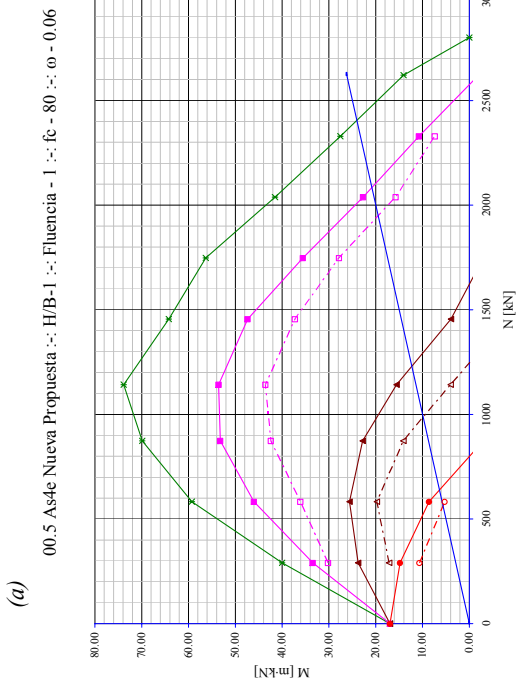


00.5 As4e Nueva Propuesta :: H/B=1 :: Fluencia - 1 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.50$



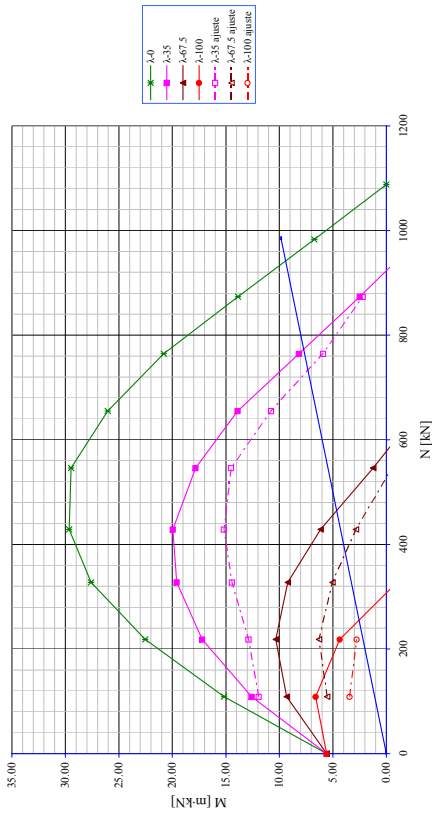
(c)

Sección Rectangular 00.5 As4e H/B=1 : Flexión recta Fluencia $\varphi=1$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=30$ $\omega=0.50$;

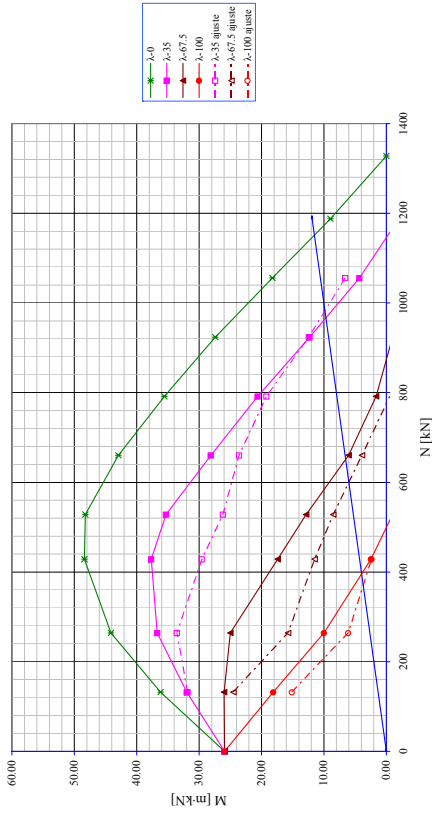


Sección Rectangular 00.5 As4e H/B=1 : Flexión recta Fluencia $\varphi=1$
 (a) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=80$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.50$;

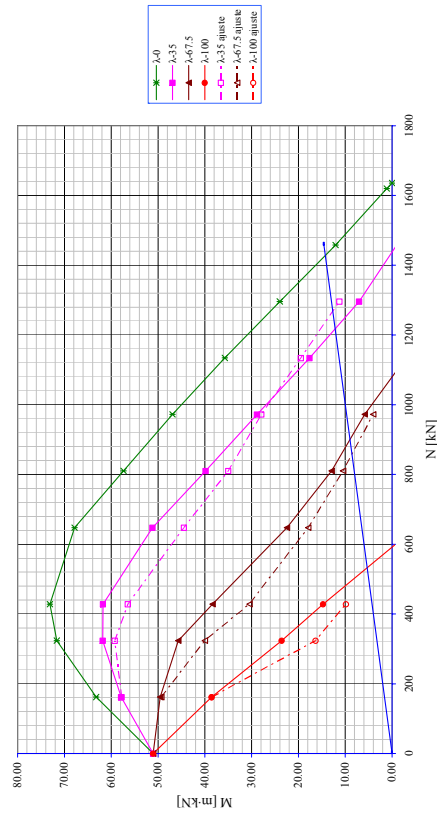
(a) 00.5 As4e Nueva Propuesta :: H/B=1 :: Fluencia - 2 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.06$



(b) 00.5 As4e Nueva Propuesta :: H/B=1 :: Fluencia - 2 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.25$

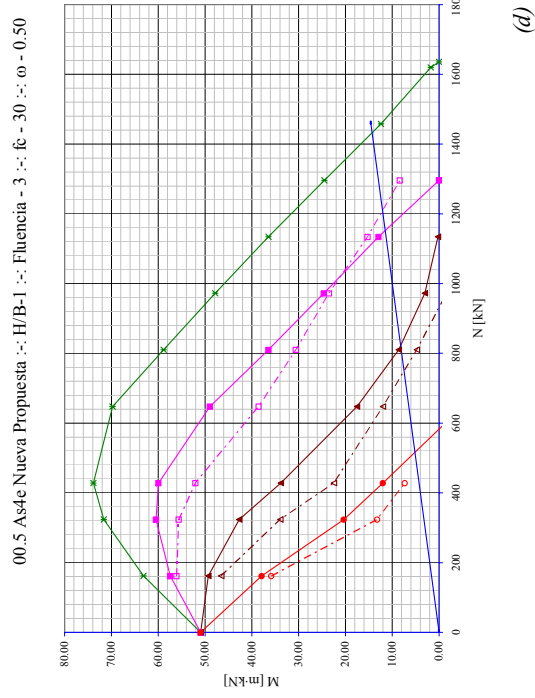
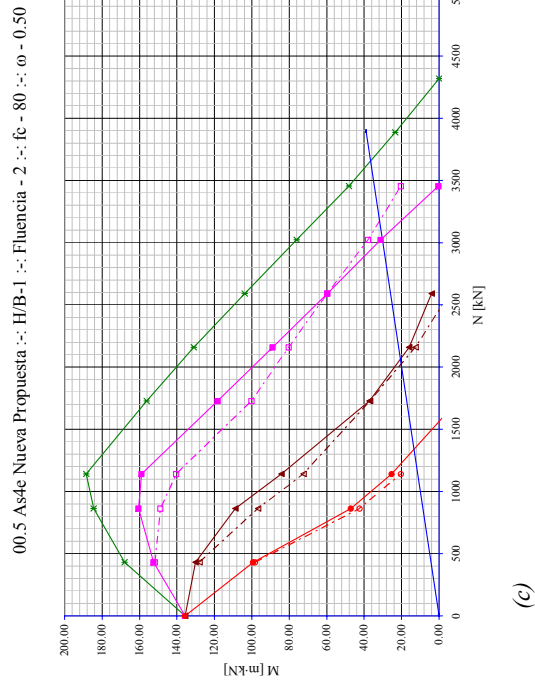
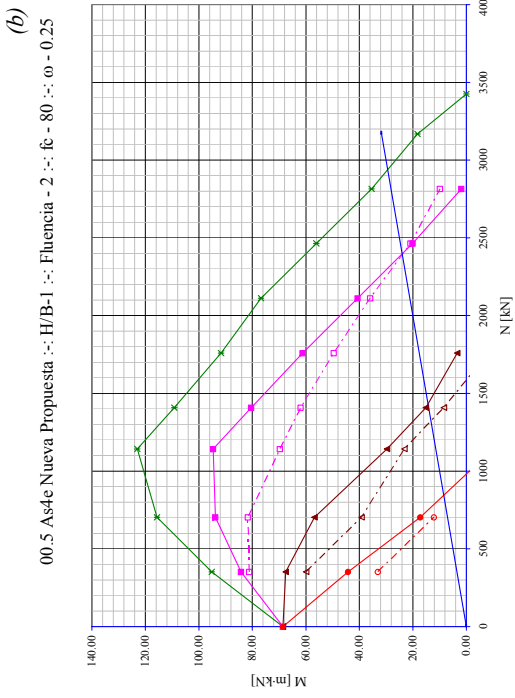
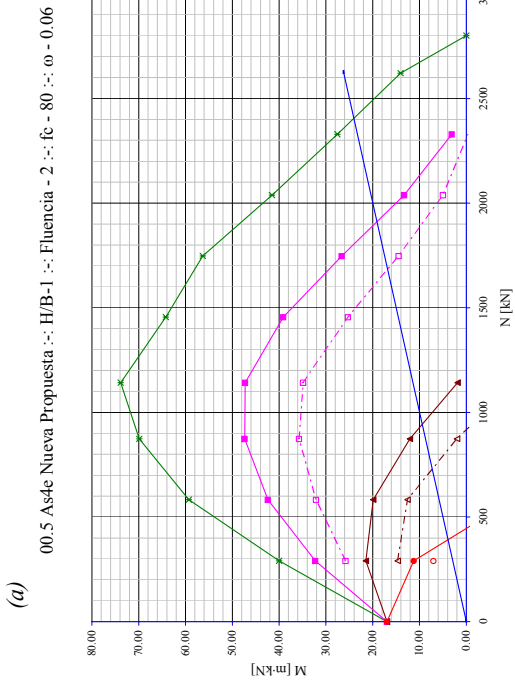


00.5 As4e Nueva Propuesta :: H/B=1 :: Fluencia - 2 :: $f_c = 30$:: $\omega = 0.50$



(c)

Sección Rectangular 00.5 As4e H/B=1 : Flexión recta Fluencia $\varphi=2$
 (a) $f_c=30$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=30$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=30$ $\omega=0.50$;



Sección Rectangular 00.5 As4e H/B=1: Flexión recta Fluencia $\varphi=2$
 (a) $f_c=80$ $\omega=0.06$; (b) $f_c=80$ $\omega=0.25$; (c) $f_c=80$ $\omega=0.50$; (d) $f_c=30$ $\omega=0.50$