Rendimiento del lanzamiento de un cohete: Etapas

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Índice general

1 Introducción

Cuando se lanza una nave al espacio el motor que le propulsa tiene un rendimiento que depende del impulso específico del motor y de la cantidad de propelente que necesita para generar el empuje. También dependerá de la masa de la carga de pago a situar en órbita y de la masa estructural necesaria para contener y gestionar el combustible.

En este artículo se hace un estudio de ese rendimiento del motor durante su lanzamiento centrándose en la velocidad que puede llegar a alcanzar con una cantidad de propelente determinada y viceversa (¿cuánto propelente se necesita para alcanzar una velocidad deseada?).

Tras el estudio del rendimiento se analiza éste cuando el lanzamiento se puede hacer con un cohete en varias etapas. Este análisis permite obtener los Δv accesibles en función de las etapas y su distribución de masas. También se presenta un método para optimizar esa distibución de masas según las características de los propulsores y de la estructura.

Para la aplicación de nuestras ecuaciones vamos a considerar que la gravedad es constante y que su valor es la estimada a nivel del mar:

$$g_0 = 9.81\, m/s^2 = 0.00981\, km/s^2.$$

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Determinar la cantidad de propelente necesario para alcanzar una determinada velocidad objetivo según la masa de la carga de pago y las características de la estructura y del motor del impulsor.
- Entender y estimar las limitaciones de los lanzamientos de cohetes de una sola etapa.
- Estudiar el rendimiento de un cohete de dos etapas.
- Aplicar un método de optimización de la distibución de masas de un cohete por etapas para poder hallar la mínima cantidad de propelente necesario para conseguir una velocidad determinada.
- Estimar cuál es la máxima velocidad alcanzable de una carga determinada para un cohete de características conocidas haciendo una distribución idónea de las etapas de éste.

3 Rendimiento de los cohetes de alto empuje

A partir del diagrama de fuerzas que actúan sobre un vehículo (ver figura 1) y de la segunda ley de Newton se puede deducir la ecuación del motor cohete (Curtis) que proporciona una expresión del impulso Δv utilizado para efectuar una maniobra

$$\Delta v = I_{sp} g_0 \ln \frac{m_0}{m_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{D}{m}\, dt - \int_{t_0}^{t_f} g \sin\gamma\, dt \tag{1}$$

donde m_0 y m_f son la masa inicial y final del cohete y D, g y γ son el drag, la gravedad y el ángulo de vuelo respectivamente. Estas tres variables dependen del tiempo por lo que las integrales se pueden obtener numéricamente.

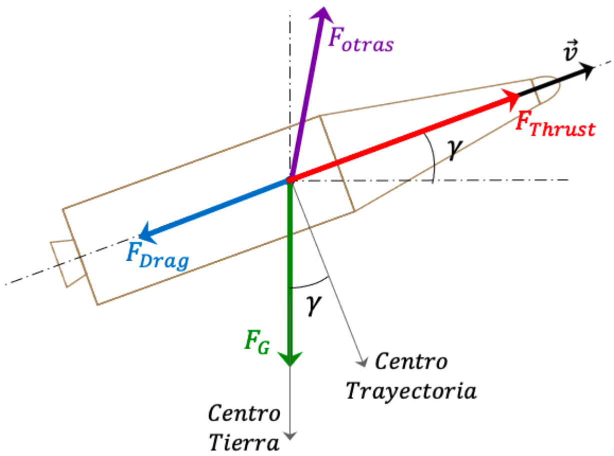

Figura 1: Fuerzas que actúan sobre un vehículo (γ es el ángulo de vuelo).

Los términos $\Delta v_D = \int_{t_0}^{t_f} \frac{D}{m}\, dt$ y $\Delta v_{LG} = \int_{t_0}^{t_f} g \sin\gamma\, dt$ se conocen como **pérdidas por Drag** y **pérdidas gravitatorias** respectivamente. Con algunas simplificaciones la fórmula (1) permite hacer buenas aproximaciones.

Por ejemplo, en los cohetes lanzados verticalmente $\gamma \approx 90°$ y por tanto $\Delta v_{LG} \approx g_0\,(t_f - t_0)$ puesto que a $300\,km$ de altitud $g \approx 90\,\%$ de g_0.

En cambio, en el espacio libre o en el caso de inserción en órbitas circulares ($\gamma = 0$) se pueden considerar nulas tanto las pérdidas gravitatorias como las causadas por el drag y por tanto la expresión (1) quedará reducida a

$$\Delta v = I_{sp} g_0 \ln \frac{m_0}{m_f} \tag{2}$$

Esta expresión es una aproximación del rendimiento de los cohetes de alto empuje que permite entender el porqué se realizan lanzamientos por etapas.

4 Lanzamiento en una sola etapa

En un cohete de una sola etapa podemos considerar que la masa inicial m_0 está formada por la masa de la estructura m_E, la masa del propelente m_p, y la masa de la carga de pago m_{PL}. Una simplificación utilizada habitualmente es considerar que la estructura contenedora del combustible tiene una masa proporcional a la masa del combustible contenido. Denotando esa proporción como

$$r = \frac{m_E}{m_p}$$

la masa total y la masa final del cohete se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m_0 &= m_E + m_p + m_{PL} = (1+r)m_p + m_{PL} \\ m_f &= m_E + m_{PL} = r\, m_p + m_{PL} \end{aligned}$$

pudiendo reescribir la expresión (2) de otra forma

$$\Delta v = I_{sp} g_0 \ln \frac{m_{PL} + (1+r)m_p}{m_{PL} + r\, m_p}. \tag{3}$$

Ejemplo 4.1 *Los datos de un cohete para su lanzamiento son los siguientes:*

$$m_{PL} = 500\, kg;\ I_{sp} = 375\, s;\ r = \tfrac{m_E}{m_p} = 0.1$$

a) *Si queremos que la carga de pago alcance una velocidad $v_{bo} = 10\, km/s$, ¿cuánto propelente será necesario para alcanzarla?*
b) *Si disponemos de $18000\, kg$ de combustible ¿cuál será la velocidad al agotarse?*

Solución: a) Utilizando la fórmula obtenida para el impulso (3) se tiene:

$$\begin{aligned} v_{bo} = I_{sp} g_0 \ln \frac{m_0}{m_f} = I_{sp} g_0 \ln \frac{m_{PL} + (1+r)m_p}{m_{PL} + r \cdot m_p} \ \rightarrow \\ 10 = 375 \cdot 0.00981 \ln \frac{500 + 1.1 m_p}{500 + 0.1 m_p} \quad \rightarrow \quad m_p = -17034.4\, kg \end{aligned}$$

Este resultado indica que con un cohete de esas características no se puede alcanzar esa velocidad utilizando una sola etapa. De hecho, se puede comprobar que la v_{bo} está acotada para ese propulsor:

$$\lim_{m_p \to \infty} \left(375 \cdot 0.00981 \ln \frac{500 + 1.1 m_p}{500 + 0.1 m_p} \right) = 8.821\, km/s$$

b) Para estimar la velocidad ganada (sin considerar ni pérdidas gravitatorias ni por drag) y disponiendo de $18000\, kg$ de propelente, lo que suponen más de $20\, tm$ de cohete, se usa también la expresión (3) resultando

$$v_{bo} = I_{sp} g_0 \ln \frac{m_{PL} + (1+r)m_p}{m_{PL} + r \cdot m_p} = 375 \cdot 0.00981 \ln \frac{500 + 1.1 \cdot 18000}{500 + 0.1 \cdot 18000} = 8.82\, km/s$$

En consecuencia, es difícil insertar en órbita una carga utilizando los propulsores actuales con una sola etapa. Esto obliga a dividir el cohete en segmentos que reduzcan su masa estructural una o más veces antes de la inserción. Esta división es lo que se conoce como lanzamiento multietapas.

5 Lanzamiento en dos etapas

Al dividir el vehículo en etapas la masa total se distribuye entre cada una de las etapas teniendo cada una su carga de pago, su masa estructural y su masa de propelente (ver figura 2). La configuración mostrada en la figura se denomina configuración en **tándem** porque cada etapa está situada encima de la etapa anterior. Otra configuración posible es **en paralelo** como por ejemplo, el Shuttle.

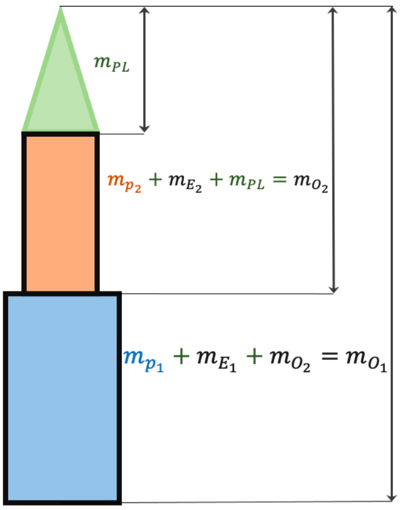

Figura 2: Cohete de dos etapas y carga de pago

En tándem cada etapa tiene su propio motor y su propio depósito de combustible y la carga de pago se puede considerar como una etapa extra (tercera).

Para analizar un lanzamiento en 2 etapas se puede considerar que la cantidad de propelente de cada una de ellas es m_{p_i} con $i = 1, 2$. Además para la primera fase se puede considerar que su carga es la masa inicial de la segunda fase completa

$$m_{0_2} = m_{p_2} + m_{E_2} + m_{PL}$$

y por tanto

$$m_0 = m_{0_1} = m_{p_1} + m_{E_1} + m_{0_2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} m_{0_2} &= m_{PL} + m_{p_2}(1+r) \\ m_0 = m_{0_1} &= m_{0_2} + m_{p_1}(1+r) = m_{PL} + (m_{p_1} + m_{p_2})(1+r) \end{aligned}$$

En este caso, las velocidades alcanzadas al terminar la combustión en cada etapa serán

$$\begin{aligned} v_{bo_1} &= \Delta v_1 = I_{sp} g_0 \ln\left(\frac{m_{0_1}}{m_{0_1} - m_{p_1}}\right) \\ v_{bo_2} &= v_{bo_1} + \Delta v_2 = I_{sp} g_0 \ln\left(\frac{m_{0_1}}{m_{0_1} - m_{p_1}}\right) + I_{sp} g_0 \ln\left(\frac{m_{0_2}}{m_{0_2} - m_{p_2}}\right) \\ &= I_{sp} g_0 \ln\left(\frac{m_{0_1}}{m_{0_1} - m_{p_1}} \frac{m_{0_2}}{m_{0_2} - m_{p_2}}\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.1 *Con los datos del propulsor del ejemplo 4.1 si diseñamos un cohete de dos etapas cuya masa es de $15200\,kg$ incluyendo $2800\,kg$ de la segunda etapa, ¿qué velocidad puede alcanzar? ¿qué velocidad lleva cuando se desprende la estructura de la primera fase?*

Solución: Para calcular v_{bo_2} con la última expresión primero hay que hallar m_{p_1} y m_{p_2}. Como

$$\begin{aligned} m_{0_1} &= m_{0_2} + m_{p_1}(1+r) \rightarrow 15200 = 2800 + 1.1 m_{p_1} \rightarrow m_{p_1} = 11272.7\,kg \\ m_{0_2} &= m_{PL} + m_{p_2}(1+r) \rightarrow 2800 = 500 + 1.1 m_{p_2} \rightarrow m_{p_2} = 2090.91\,kg \end{aligned}$$

Esto indica que la masa total de propelente es de $13363.61\,kg$, bastantes menos que en el apartado b) del ejemplo anterior. Ahora ya se puede calcular la velocidad al final de la segunda etapa

$$\begin{aligned} v_{bo_2} &= I_{sp} g_0 \ln\left(\frac{m_{0_1}}{m_{0_1}-m_{p_1}}\frac{m_{0_2}}{m_{0_2}-m_{p_2}}\right) \\ &= 375\cdot 0.00981 \ln\left(\frac{15200}{15200-11272.7}\frac{2800}{2800-2090.91}\right) = 10.31\,km/s \end{aligned}$$

También se puede conocer la velocidad alcanzada al final de la primera etapa

$$v_{bo_1} = I_{sp} g_0 \ln\left(\frac{m_{0_1}}{m_{0_1}-m_{p_1}}\right) = 375\cdot 0.00981 \ln\left(\frac{2800}{2800-2090.91}\right) = 4.98\,km/s$$

Con los resultados de este ejemplo vemos que dividir el cohete en 2 etapas es rentable aunque también depende del reparto entre las dos etapas. Por ello, se hace necesario tener un método para conocer cuál es el reparto óptimo entre las dos etapas del lanzador.

5.1 Optimización del reparto por etapas

Volviendo a la expresión de la división del cohete en dos etapas

$$m_0 = m_{0_1} = m_{0_2} + (1+r)\,m_{p_1} = m_{PL} + (1+r)\,m_{p_2} + (1+r)\,m_{p_1}$$

Vamos a llamar f_i a la proporción entre carga útil y la carga total de la i-ésima etapa. Así

$$f_1 = \frac{m_{0_2}}{m_{0_1}} \qquad f_2 = \frac{m_{PL}}{m_{0_2}} \tag{4}$$

Se pueden comprobar entonces las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} m_{0_2} &= m_{PL} + m_{p_2}(1+r) \rightarrow m_{p_2} = \frac{m_{0_2}-m_{PL}}{1+r} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{m_{0_2}}{m_{0_2}-m_{p_2}} = \frac{m_{0_2}}{m_{0_2}-\left(\frac{m_{0_2}-m_{PL}}{1+r}\right)} = \frac{1+r}{r+\frac{m_{PL}}{m_{0_2}}} = \frac{1+r}{r+f_2} \\ m_{0_1} &= m_{0_2} + m_{p_1}(1+r) \rightarrow m_{p_1} = \frac{m_{0_1}-m_{0_2}}{1+r} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{m_{0_1}}{m_{0_1}-m_{p_1}} = \frac{m_{0_1}}{m_{0_1}-\left(\frac{m_{0_1}-m_{0_2}}{1+r}\right)} = \frac{1+r}{r+\frac{m_{0_2}}{m_{0_1}}} = \frac{1+r}{r+f_1} \end{aligned}$$

obteniendo las expresiones

$$\begin{aligned} f_1\cdot f_2 &= \frac{m_{PL}}{m_{0_1}} = \frac{m_{PL}}{m_0} \\ v_{bo_2} &= I_{sp} g_0 \ln\left(\frac{(1+r)^2}{(r+f_1)(r+f_2)}\right) \end{aligned}$$

Nos encontramos ahora con dos tipos de problemas a resolver según la información que tengamos disponible.

5.1.1 Mínima masa para obtener una velocidad concreta

Si se conoce la velocidad v_{bo_2} que se pretende alcanzar y se quiere minimizar el consumo, y por tanto el peso, el problema es: hallar el valor mínimo de m_0 $(= m_{0_1})$ necesario para poder llevar una carga útil prefijada, m_{PL}, a una velocidad determinada, v_{bo_2}, haciendo un reparto óptimo del combustible entre las dos etapas. Como $f_1 \cdot f_2 = \frac{m_{PL}}{m_0}$ esta minimización es equivalente a maximizar el producto $f_1 \cdot f_2$ sabiendo que la velocidad v_{bo_2} es conocida.

Como es un problema de extremos condicionados se puede aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange. Reescribiendo la condición, el problema de optimización queda

$$\left.\begin{array}{r} max \quad f_1 \cdot f_2 \\ (r + f_1)(r + f_2) - \dfrac{(1+r)^2}{e^{\frac{v_{bo_2}}{I_{sp} g_0}}} = 0 \end{array}\right\}$$

Definiendo $$L(f_1, f_2, \lambda) = f_1 \cdot f_2 + \lambda \left((r + f_1)(r + f_2) - \frac{(1+r)^2}{e^{\frac{v_{bo_2}}{I_{sp} g_0}}} \right)$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial f_1} &= f_2 + \lambda (r + f_2) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial f_2} &= f_1 + \lambda (r + f_1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= (r + f_1)(r + f_2) - \frac{(1+r)^2}{e^{\frac{v_{bo_2}}{I_{sp} g_0}}} = 0 \end{aligned}$$

de las dos primeras ecuaciones se obtiene

$$-\lambda = \frac{f_2}{r + f_2} = \frac{f_1}{r + f_1} \rightarrow f_2(r + f_1) = f_1(r + f_2) \rightarrow \cdots \rightarrow f_2 r = f_1 r \rightarrow f_2 = f_1$$

Por tanto, la distribución por etapas que utiliza la masa mínima de cohete m_0 ocurre cuando $f_2 = f_1$. Renombrando $f = f_1 = f_2$ se sustituye su valor en la última ecuación obteniendo el valor de f

$$(r + f)^2 - \frac{(1+r)^2}{e^{\frac{v_{bo_2}}{I_{sp} g_0}}} = 0 \quad \rightarrow \quad r + f = \frac{1+r}{e^{\frac{v_{bo_2}}{2 I_{sp} g_0}}} \quad \rightarrow \quad \boxed{f = \frac{1+r}{e^{\frac{v_{bo_2}}{2 I_{sp} g_0}}} - r} \tag{5}$$

Una vez conocida f deducir m_{0_1} y m_{0_2} es fácil

$$\begin{aligned} f_1 \cdot f_2 = \frac{m_{PL}}{m_{0_1}} \rightarrow m_0 = m_{0_1} &= \frac{m_{PL}}{f^2} \\ m_{0_2} &= \frac{m_{PL}}{f} \end{aligned} \tag{6}$$

Conociendo la masa de cada etapa se puede deducir el combustible destinado a cada una:

$$\begin{aligned} m_{0_2} &= m_{PL} + m_{p_2}(1+r) \rightarrow \boxed{m_{p_2}} = \frac{m_{0_2} - m_{PL}}{1+r} = \frac{\frac{m_{PL}}{f} - m_{PL}}{1+r} = \boxed{\frac{m_{PL}(1-f)}{f(1+r)}} \\ m_{0_1} &= m_{0_2} + m_{p_1}(1+r) \rightarrow \boxed{m_{p_1}} = \frac{m_{0_1} - m_{0_2}}{1+r} = \frac{\frac{m_{PL}}{f^2} - \frac{m_{PL}}{f}}{1+r} = \boxed{\frac{m_{PL}(1-f)}{f^2(1+r)}} \end{aligned} \tag{7}$$

Ejemplo 5.2 *Con los datos del ejemplo anterior 4.1 y si se pretende que la carga alcance la velocidad de ese ejemplo,* $v_{bo} = 10\,km/s$. *¿Cuánto propelente será necesario y cuál es su mejor distribución si se puede ejecutar el lanzamiento en dos fases?*

Solución:
Ya vimos que con una sola fase no era posible alcanzar esa velocidad y que con $15200\,kg$ dejando $2800\,kg$ para la segunda si que era posible consumiendo un total de $13363.6\,kg$ de propelente. Ahora conociendo el resultado anterior es posible mejorar este resultado.

El óptimo se obtiene cuando $f_1 = f_2 = f$ cuyo valor se obtiene mediante la expresión (5)

$$f = \frac{1+r}{e^{\frac{v_{bo_2}}{2I_{sp}g_0}}} - r = \frac{1.1}{e^{\frac{10}{2\cdot 375\cdot 0.00981}}} - 0.1 = 0.182565$$

Con ese valor y las igualdades (7) se obtienen las cantidades de combustible de las dos fases

$$\begin{aligned} m_{p_2} &= \frac{m_{PL}(1-f)}{f(1+r)} = \frac{500(1-0.182565)}{0.182565 \cdot 1.1} = 2035.23\,kg \\ m_{p_1} &= \frac{m_{PL}(1-f)}{f^2(1+r)} = \frac{500(1-0.182565)}{0.182565^2 \cdot 1.1} = 11148.0\,kg \end{aligned}$$

lo que nos da un total de combustible de $13183.2\,kg$ cantidad inferior al último ejemplo. Para hallar la masa total de cada etapa basta utilizar la definición de f_i:

$$\begin{aligned} f_2 &\overset{(4)}{=} \frac{m_{PL}}{m_{0_2}} &\rightarrow \quad m_{0_2} = \frac{m_{PL}}{f_2} = \frac{500}{0.182565} = 2738.75\,kg \\ f_1 &\overset{(4)}{=} \frac{m_{0_2}}{m_{0_1}} &\rightarrow \quad m_{0_1} = \frac{m_{0_2}}{f_1} = \frac{2738.75}{0.182565} = 15001\,kg \end{aligned}$$

5.1.2 Maximizar la velocidad final para una masa conocida

Si se conoce el peso del lanzamiento $m_0 = m_{0_1}$ y se quiere maximizar la velocidad a alcanzar. En este caso, el problema de extremos condicionados es

$$\left.\begin{aligned} max \quad & v_{bo}(f_1, f_2) \\ f_1 \cdot f_2 - & \frac{m_PL}{m_0} = 0 \end{aligned}\right\}$$

que como en el caso anterior nos da la máxima v_{bo} cuando $f_1 = f_2$ y por tanto

$$f_1 = \frac{m_{0_2}}{m_{0_1}} = \frac{m_{PL} + (1+r)m_{p_2}}{m_{PL} + (1+r)\left(m_{p_1} + m_{p_2}\right)} = \frac{m_{PL}}{m_{PL} + (1+r)m_{p_2}} = \frac{m_{PL}}{m_{0_2}} = f_2$$

multiplicando en cruz resulta

$$m_{PL}^2 + 2(1+r)m_{p_2}m_{PL} + (1+r)^2 m_{p_2}^2 = m_{PL}^2 + m_{PL}(1+r)\left(m_{p_1} + m_{p_2}\right)$$

Llamando q a la proporción de combustible que se carga en la segunda etapa,

$$\boxed{q = \frac{m_{p_2}}{m_{p_1} + m_{p_2}}}$$

y por tanto $m_{p_2} = q \cdot (m_{p_1} + m_{p_2})$, entonces la expresión anterior se puede reescribir como

$$2(1+r)q\left(m_{p_1} + m_{p_2}\right)m_{PL} + (1+r)^2 q^2 \left(m_{p_1} + m_{p_2}\right)^2 = m_{PL}(1+r)\left(m_{p_1} + m_{p_2}\right)$$

Dividiendo entre $(1+r)^2\left(m_{p_1} + m_{p_2}\right)^2$ y reordenando se obtiene la ecuación de 2º grado

$$q^2 + 2\frac{m_{PL}}{(1+r)\left(m_{p_1} + m_{p_2}\right)}q - \frac{m_{PL}}{(1+r)\left(m_{p_1} + m_{p_2}\right)} = 0$$

Si se denota $\boxed{k = \frac{m_{PL}}{(1+r)\left(m_{p_1} + m_{p_2}\right)}}$, la ecuación queda $q^2 + 2kq - k = 0$ de donde

$$\boxed{q} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 + 4k}}{2} = \boxed{\sqrt{k^2 + k} - k} \tag{8}$$

siendo entonces la distribución de combustible:

$$m_{p_1} = (1-q)\ \left(m_{p_1} + m_{p_2}\right) \qquad ; \qquad m_{p_2} = q\ \left(m_{p_1} + m_{p_2}\right)$$

Ejemplo 5.3 *Con los datos del ejemplo anterior 4.1 y teniendo disponibles $m_p = 13183.2\,kg$ de propelente*
a) ¿cuál será la velocidad más alta que se puede alcanzar v_{bo} con una sola etapa?
b) y, si se puede lanzar en dos etapas ¿cuál será la velocidad más alta alcanzable y con qué distribución de combustible?

Solución: a) Si solo hay una fase se utiliza la fórmula general del impulso (2) resultando

$$\begin{aligned} v_{bo} = I_{sp}g_0 \ln\frac{m_0}{m_f} &= I_{sp}g_0 \ln\frac{m_{PL} + (1+r)m_p}{m_{PL} + r \cdot m_p} = \\ &= 375 \cdot 0.00981 \ln\frac{500 + 1.1 \cdot 13183.2}{500 + 0.1 \cdot 13183.2} = 7.763\,km/s \end{aligned}$$

Esta velocidad es la máxima que se puede conseguir con estas características. Queda muy lejos de poder alcanzar los $10\,km/s$ exigidos en el ejemplo anterior.

b) Si es posible lanzar en dos etapas se utilizarán las expresiones de (8)

$$\begin{aligned} k &= \frac{m_{PL}}{(1+r)\left(m_{p_1} + m_{p_2}\right)} = \frac{500}{1.1 \cdot 13183.2} = 0.03448 \\ q &= \sqrt{k^2 + k} - k = \sqrt{0.03448^2 + 0.03448} - 0.03448 = 0.1544 \sim 15.44\,\% \end{aligned}$$

por lo tanto los porcentajes de la 1ª y 2ª etapa son respectivamente

$$m_{p_1} = (1-q)\,m_p = (1-0.1544)\cdot 13183.2 = 11148\,kg$$
$$m_{p_2} = q\,m_p = 0.1544\cdot 13183.2 = 2035.2\,kg$$

La velocidad alcanzada con ese reparto es

$$v_{bo} = I_{sp}g_0 \ln\left(\frac{m_{PL}+(1+r)m_p}{m_{PL}+(1+r)m_p-m_{p_1}}\frac{m_{PL}+(1+r)m_{p_2}}{m_{PL}+r\cdot m_{p_2}}\right) =$$
$$= 375\cdot 0.00981 \ln\left(\frac{500+1.1\cdot 13183.2}{500+1.1\cdot 13183.2-11148}\frac{500+1.1\cdot 2035.2}{500+0.1\cdot 2035.2}\right) = 10\,km/s$$

6 Lanzamiento en tres o más etapas

El estudio realizado para lanzamientos de dos etapas puede extenderse a más etapas. Supongamos que el lanzamiento se puede realizar en n etapas siendo $n \geq 1$. Extendiendo el caso anterior se tiene que la distribución óptima para n etapas también verificará que todas sus f_i son iguales y seguirá las siguientes fórmulas

$$\boxed{f = \frac{1+r}{e^{\frac{v_{bo}}{n\cdot I_{sp}g_0}}} - r}$$

y

$$\boxed{m_{p_i} = \frac{m_{PL}\,(1-f)}{f^{n-i+1}\,(1+r)} \qquad i = 1,\ldots,n.}$$

Recordemos que $m_0 = m_{0_1}$ y $m_{0_i} = m_{p_i}\,(1+r) + m_{0_{i+1}}$ $\;i = 1,\ldots,n$ siendo $m_{0_{n+1}} = m_{PL}$.

Ejemplo 6.1 *Con los datos del ejemplo 4.1, calcular el combustible mínimo necesario para hacer la inserción en órbita utilizando un lanzador de tres etapas.*
Solución: Aplicando las dos expresiones de arriba se obtienen

$$f = 0.344505 \qquad\qquad m_{p_1} + m_{p_2} + m_{p_3} = 10662.6\,kg$$

7 Cierre

En este artículo se ha deducido las expresiones que permiten determinar la cantidad de propelente necesario para alcanzar una determinada velocidad objetivo según la masa de la carga y las características del lanzador entendiendo y encontrando las limitaciones de lanzar cohetes de una etapa.

Se ha estudiado el rendimiento y posibilidades de los cohetes de dos etapas y se ha presentado un método de optimización de la distibución de masas de las etapas para hallar la mínima cantidad de propelente necesario para conseguir una velocidad determinada o para estimar la máxima velocidad alcanzable por un cohete según sus características conocidas, todo ello haciendo una distribución idónea de las etapas del cohete.

Estos contenidos han sido apoyados con ejemplos que muestran su aplicación a posibles situaciones reales.

Referencias

[1] Bate, Roger R. et al.,*Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.

[2] Brown, Charles D.,*Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.

[3] Chobotov, Vladimir A.,*Orbital Mechanics Third Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 2002.

[4] Curtis, Howard D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.

[5] Prussing, John E. and Conway, Bruce A.,*Orbital Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1993.

[6] Sellers, Jerry J. ,*Understanding space, an introduction to astronautics. Third Edition*, Space Technology Series, McGraw-Hill Higher Education, 2005.