



# Problemas resueltos de control automático: tiempo continuo

Vicente Casanova | Antonio Correcher



edUPV

Universitat Politècnica de València

Vicente Casanova Calvo  
Antonio Correcher Salvador

# **Problemas resueltos de control automático: tiempo continuo**

Colección *Académica* [http://tiny.cc/edUPV\\_aca](http://tiny.cc/edUPV_aca)

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita:  
Casanova Calvo, V.; Correcher Salvador; A. (2023). *Problemas resueltos de control automático: tiempo continuo*. Valencia: edUPV

© Vicente Casanova Calvo  
Antonio Correcher Salvador

© 2023, edUPV  
Venta: [www.lalibreria.upv.es](http://www.lalibreria.upv.es) / Ref.: 0354\_03\_01\_01

ISBN: 978-84-1396-033-3  
Depósito Legal: V-321-2023

Imprime: Byprint Percom, S. L.

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a [edicion@editorial.upv.es](mailto:edicion@editorial.upv.es)

edUPV se compromete con la ecoimpresión y utiliza papeles de proveedores que cumplen con los estándares de sostenibilidad medioambiental  
<https://editorialupv.webs.upv.es/compromiso-medioambiental>

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo [edicion@editorial.upv.es](mailto:edicion@editorial.upv.es)

Impreso en España

# Índice

Bloque A. Modelado teórico .....	1
Bloque B. Respuesta temporal.....	49
Bloque C. Lugar de las raíces.....	115
Bloque D. Diseño de reguladores PID .....	155



El presente libro es una colección de problemas de Control Automático. Todos ellos son problemas que han ido apareciendo, a lo largo de 10 años, en los exámenes de la asignatura Automática Básica que se imparte en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño, de la Universidad Politécnica de Valencia. Los problemas están resueltos con detalle y son un buen complemento para preparar dicha asignatura o cualquier otra similar que trate la teoría de control automático de tiempo continuo.

El libro se ha estructurado en cuatro bloques, cada uno de los cuales contiene problemas que tratan partes diferentes del temario de la asignatura:

- Bloque A: Problemas de modelado teórico.
- Bloque B: Problemas de respuesta temporal.
- Bloque C: Problemas del lugar de las raíces.
- Bloque D: Problemas de diseño de reguladores PID.

Se aconseja vivamente no resolver los problemas mirando directamente la solución. Se trata de intentar resolverlos, de una forma más o menos ordenada, y después comprobar solución. Hay una gran diferencia entre entender la solución y resolver el problema. Puede que la principal dificultad de los problemas sea interpretar correctamente el enunciado del problema y saber qué es lo que se está preguntando y esto es algo que se pierde si se va a mirar la solución antes de haber intentado resolverlo sin ayuda.

Esperamos que esta colección de problemas te sea de utilidad en el estudio de la asignatura y para una mejor comprensión de los conceptos involucrados en la teoría de control continuo.

Los autores  
Valencia, diciembre de 2022



# BLOQUE A. Modelado teórico

En este bloque encontraremos problemas de modelado teórico. El objetivo siempre es el mismo: obtener la función de transferencia que modela la relación entrada-salida de un sistema dinámico de tiempo continuo. Se proporciona una descripción del proceso a modelar, incluyendo las ecuaciones diferenciales correspondientes a las distintas partes de este. Algunas de estas ecuaciones son no lineales y será necesario linealizarlas como paso previo a aplicarles la transformada de Laplace. El sistema de ecuaciones, una vez linealizado y convertido al dominio de Laplace, se representa mediante un diagrama de bloques para tener una representación gráfica de la estructura del proceso y de las relaciones entre las señales que en él participan. El diagrama de bloques es, finalmente, reducido para llegar a la función de transferencia que pide en enunciado.

Los aspectos más destacados del temario de la asignatura que se tratan en los problemas de este bloque son:

- Sistema de ecuaciones diferenciales: se trata de obtener un sistema de ecuaciones diferenciales que constituye el modelo matemático del comportamiento dinámico del proceso. El sistema de ecuaciones deberá tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas para que tenga solución única. Las incógnitas del sistema son todas aquellas señales cuya evolución temporal depende de alguna parte del proceso. No se consideran incógnitas las señales externas que son independientes de las distintas partes del proceso y que el enunciado especifica como entradas de este. Una vez completado el sistema de ecuaciones diferenciales será convertido en un sistema de ecuaciones algebraico por aplicación de la transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones.
- Linealización: es habitual que alguno de los elementos que integran el proceso a modelar tenga un comportamiento no lineal. En este caso, su modelo matemático será una ecuación diferencial no lineal. Para poder convertir la ecuación diferencial en una ecuación algebraica, aplicando la transformada de Laplace, es necesario que sea lineal. Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales no lineales deben ser linealizadas antes de llevarlas al dominio de Laplace. La tarea de linealizar las ecuaciones incluye el cálculo de las constantes de linealización, que dependen del punto de funcionamiento que es especificado en el enunciado del problema.
- Diagrama de bloques: el sistema de ecuaciones algebraico que resulta de aplicar la transformada de Laplace al sistema de ecuaciones diferenciales puede ser representado de forma gráfica mediante un diagrama de bloques. De esta forma se tiene una visión más clara de la estructura del proceso a modelar y de las relaciones entre las señales que intervienen.
- Función de transferencia: el último paso en la resolución de los problemas de modelado es reducir el diagrama de bloques para llegar a la función de transferencia que modela la relación entre la transformada de Laplace de la señal de entrada y la transformada de Laplace de la variable de interés, ambas especificadas en el enunciado. Para ello se aplican las reglas del álgebra de bloques al diagrama hasta llegar a un único bloque, lo cual es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones en el dominio de Laplace.

## Índice de problemas

### Sistema de ecuaciones diferenciales

- PA.1 a)
- PA.2 a)
- PA.3 a)
- PA.4 a)
- PA.5 a)
- PA.6 a)
- PA.7 a)
- PA.8 a)
- PA.9 a)
- PA.10 a)

### Linealización

- PA.1 b)
- PA.2 b)
- PA.3 b)
- PA.4 b)
- PA.5 b)
- PA.6 b)
- PA.7 b)
- PA.8 b)
- PA.9 d)
- PA.10 a)

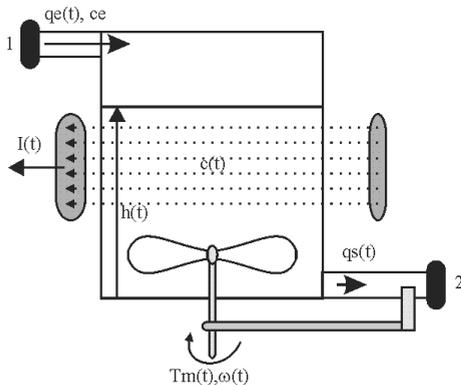
### Diagrama de bloques

- PA.1 b)
- PA.2 d)
- PA.6 c) , d)
- PA.7 c)
- PA.8 b)
- PA.9 b)
- PA.10 b)

### Función de transferencia

- PA.1 c)
- PA.2 c), e)
- PA.3 c), d)
- PA.3 e)
- PA.4 c), d)
- PA.5 c), d)
- PA.6 e)
- PA.7 d)
- PA.8 d)
- PA.9 c), d)
- PA.10 c)

**PA.1)** Se ha diseñado un prototipo de sensor para poder medir on-line una característica de color de un líquido en movimiento mediante infrarrojos.



El sensor, que se intercala en la tubería, consiste en un cilindro de área  $A$ , que tiene una boquilla de entrada de líquido (1), una de boquillas de salida (2), un agitador (3) y un sistema de infrarrojos (4). A través de la boquilla de entrada (1) le entra un caudal de entrada,  $q_e(t)$ , que depende de la presión y velocidad del líquido en la tubería, mientras que por la boquilla de salida (2) sale un caudal,  $q_s(t)$ .

Para evitar que se sedimenten partículas en el interior del sensor, éste debe tener siempre un agitador en marcha. Al agitador (3) se le aplica un par motor  $T_m(t)$  haciendo que gire a una velocidad  $\omega(t)$ . El par motor se puede considerar como una entrada del sistema puesto que el usuario del sensor puede fijar el par para ajustar la estabilidad del color medido. Se sabe que el agitador tiene un momento de inercia  $J$  y un coeficiente de rozamiento viscoso  $B$ .

El motor está conectado con la tubería de salida de manera que ésta se puede abrir o cerrar en función de la velocidad de giro para estabilizar el color. Con ello, el caudal de salida se puede formular como:

$$q_s(t) = K_q \cdot \sqrt{h(t) + K \cdot \omega(t)}$$

El color del líquido mezclado dentro del sensor,  $c(t)$ , depende del color de líquido que le entra, que suponemos de valor constante  $c_e$ , del nivel de líquido almacenado en el sensor  $h(t)$  y de la velocidad de giro del agitador,  $\omega(t)$ , conociéndose la relación (con  $h(t) > 0$ ) siguiente:

$$c(t) = c_e \cdot \frac{K_h}{h(t)} - K_\omega \cdot \omega(t) \cdot \frac{dc(t)}{dt}$$

Por otro lado, el sistema de infrarrojos permite extraer una característica del color,  $I(t)$ , proporcional al color.

$$I(t) = K_c \cdot c(t)$$

a) Determina el **conjunto de ecuaciones diferenciales** que modelan el comportamiento del sistema. Clasificar las **variables** del modelo en entradas **controlables**, **perturbaciones**, **variables internas** y **de salida**.

b) **Linealiza** el sistema y dibuja el **diagrama de bloques**.

c) Calcula las **funciones de transferencia**:

$$G1(s) = \frac{I(s)}{q_e(s)} \quad ; \quad G2(s) = \frac{I(s)}{h(s)}$$

### Solución

a) El enunciado nos da las siguientes ecuaciones:

$$1) c(t) = ce \cdot \frac{K_h}{h(t)} - K_\omega \cdot \omega(t) \cdot \frac{dc(t)}{dt}$$

$$2) I(t) = K_c \cdot c(t)$$

$$3) qs(t) = K_q \sqrt{(h(t) + K \cdot \omega(t))}$$

Queda por definir la dinámica de rotación del eje, puesto que no hay par resistente, se aplica la tercera ley de Newton para obtener:

$$4) Tm(t) - B \cdot \omega(t) = J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt}$$

Por último, el balance de caudales provocará modificaciones en el nivel del depósito:

$$5) qe(t) - qs(t) = A \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

Las entradas del modelo son, el par motor ( $Tm(t)$ ) que es controlable puesto que el usuario lo puede fijar y el caudal de entrada ( $qe(t)$ ) que es una perturbación, puesto que depende de la presión y velocidad del flujo en la tubería externa.

Por otro lado, la salida es  $I(t)$ , puesto que es la medida final del sensor.

El resto de las variables,  $c(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $h(t)$  y  $qs(t)$  son variables internas del modelo.

La suma de variables internas y de salida es 5, que coincide con el número de ecuaciones, por lo que el modelo es correcto.

b) Las ecuaciones 1 y 3 son no lineales, puesto que no están compuestas por sumas de constantes por variables. Así pues, debemos linealizar el modelo.

$$1) \Delta c(t) = K_1 \cdot \Delta h(t) + K_2 \cdot \Delta \omega(t) + K_3 \frac{dc(t)}{dt}$$

Las constantes de linealización son:

$$K_1 = \left. \frac{\partial c(t)}{\partial h(t)} \right|_{pf} = \frac{-ce \cdot K_h}{h_0^2} ; K_2 = \left. \frac{\partial c(t)}{\partial \omega(t)} \right|_{pf} = -K_\omega \cdot \left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{pf} = 0 ; K_3 = \left. \frac{\partial c(t)}{\partial \frac{dc(t)}{dt}} \right|_{pf} = -K_\omega \cdot \omega_0$$

Tiene especial interés el cálculo de  $K_2$ , que resulta ser cero puesto que las derivadas evaluadas en el punto de funcionamiento se anulan.

$$2) \Delta I(t) = K_c \cdot \Delta c(t)$$

$$3) \Delta qs(t) = K_4 \cdot \Delta h(t) + K_5 \cdot \Delta \omega(t)$$

$$K_4 = \left. \frac{\partial qs(t)}{\partial h(t)} \right|_{pf} = \frac{K_q}{2\sqrt{h_0 + K \cdot \omega_0}} ; K_5 = \left. \frac{\partial ps(t)}{\partial \omega(t)} \right|_{pf} = \frac{K \cdot K_q}{2\sqrt{h_0 + K \cdot \omega_0}}$$

$$4) \Delta Tm(t) - B \cdot \Delta \omega(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$5) \Delta qe(t) - \Delta qs(t) = A \frac{dh(t)}{dt}$$

Una vez linealizado el sistema podemos aplicar la transformada de Laplace a las ecuaciones.

$$1) c(s) = K_1 \cdot h(s) + K_2 \cdot \omega(s) + K_3 \cdot s \cdot c(s), \text{ luego, } c(s) \cdot (1 - K_3 \cdot s) = K_1 \cdot h(s) + K_2 \cdot \omega(s)$$

$$2) I(s) = K_c \cdot c(s)$$

$$3) qs(s) = K_4 \cdot h(s) + K_5 \cdot \omega(s)$$

$$4) Tm(s) = (B + J \cdot s) \cdot \omega(s)$$

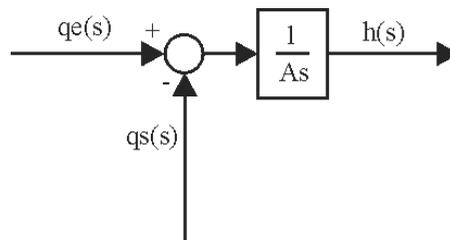
$$5) qe(s) - qs(s) = A \cdot s \cdot h(s)$$

Construyamos el diagrama de bloques a partir de las ecuaciones, para ello comenzaremos por una de las entradas para calcular la salida. Elegimos, por ejemplo,  $qe(s)$ . Esta variable aparece sólo en la ecuación 5, la utilizaremos como dato para calcular una de las dos variables que aparecen en la ecuación ( $q(s)$  y  $h(s)$ ). Parece lógico despejar  $h(s)$ , puesto que el caudal de entrada sirve para modificar el nivel del depósito.

La ecuación despejada queda:

$$h(s) = \frac{1}{A \cdot s} (qe(s) - qs(s))$$

Implementamos la ecuación en bloques:

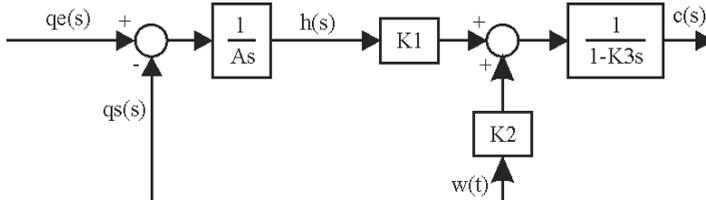


Ahora emplearemos la variable que hemos calculado ( $h(s)$ ) como entrada para la siguiente ecuación.

Elegimos la ecuación 1, donde aparece  $h(s)$  y la empleamos para calcular otra variable. En la ecuación aparecen  $\omega(s)$  y  $c(s)$ , como no parece lógico que a partir del nivel se calcule la velocidad de giro del eje, despejamos  $c(s)$ :

$$c(s) = \frac{1}{(1 - K_3 \cdot s)} (K_1 \cdot h(s) + K_2 \cdot \omega(s))$$

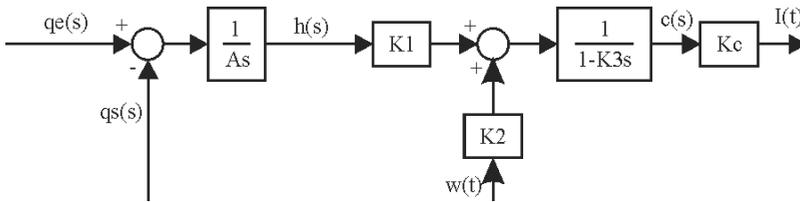
Añadimos la nueva ecuación al diagrama:



Repetimos la operación, empujando  $c(s)$  como entrada en otra ecuación, sólo aparece en la ecuación 2, donde se calcula la salida.

$$I(s) = K_c \cdot c(s)$$

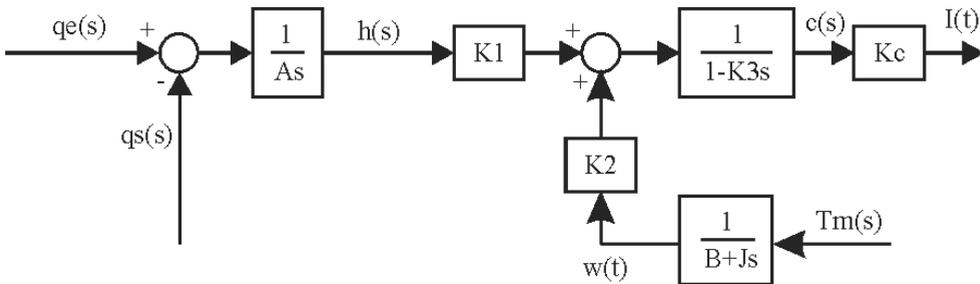
La ponemos en el diagrama de bloques:



Ya hemos calculado la salida. Para comprobar si hemos terminado nos fijamos en las variables que necesita el diagrama para calcular la salida,  $q_e(s)$ ,  $q_s(s)$  y  $\omega(s)$ , como sólo  $q_e(s)$  es una entrada y vendrá fijada desde fuera debemos calcular las otras dos. Comenzamos por  $w(s)$ , se puede calcular desde la ecuación 3 o desde la 4. Si las observamos detenidamente, si la calculamos desde la 3, no nos quedarán ecuaciones para poder calcular  $q_s(s)$ , puesto que en la ecuación 4 no aparece. Así que despejamos  $\omega(s)$  de la ecuación 4:

$$\omega(s) = \frac{1}{(B + J \cdot s)} T_m(s)$$

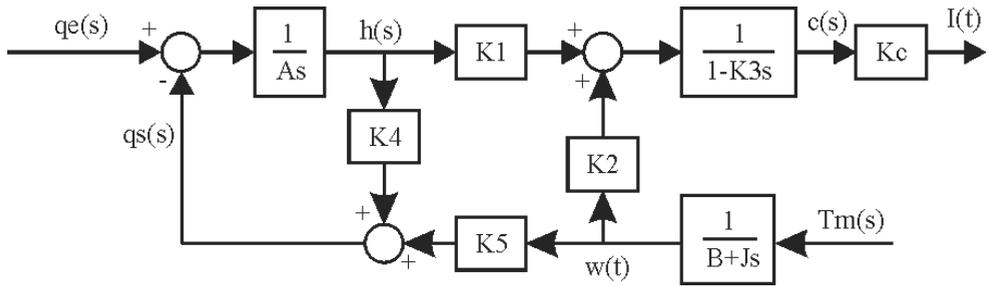
La incluimos en el diagrama.



Por último, debemos calcular  $q(s)$  de la ecuación 3.

$$q_s(s) = K_4 \cdot h(s) + K_5 \cdot \omega(s)$$

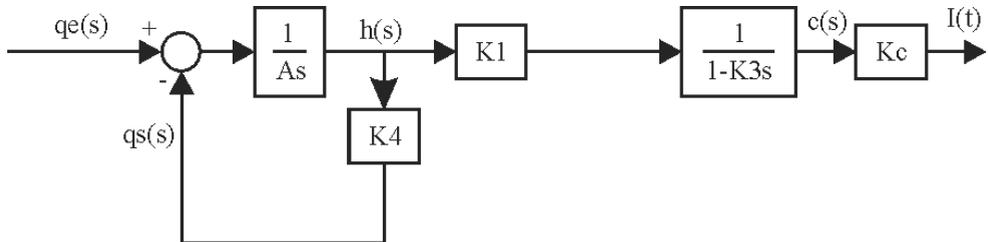
La incluimos en el modelo y ya tenemos terminado el diagrama de bloques:



c) Para calcular las funciones de transferencia aplicaremos el principio de superposición. Además, Anularemos K2, puesto que su valor es cero, para simplificar el diagrama.

Cálculo de  $\frac{I(s)}{qe(s)}$

Eliminamos la entrada Tm(s), por lo que el diagrama de bloques queda:



Que consiste en una realimentación y una serie de bloques en serie. La realimentación se resuelve:

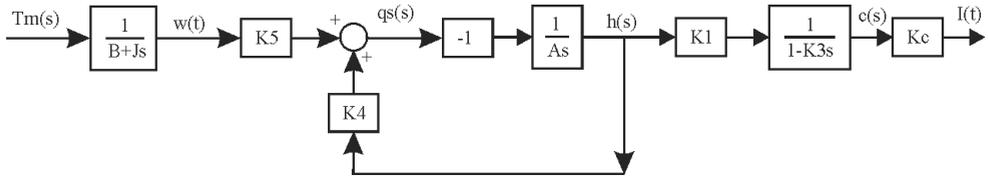
$$Gr1(s) = \frac{1}{A \cdot s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{A \cdot s} K_4} = \frac{1}{As + K_4}$$

Ahora conectamos en serie todos los elementos:

$$\frac{I(s)}{qe(s)} = \frac{1}{(As + K_4)} \cdot K_1 \cdot \frac{1}{(1 - K_3 \cdot s)} K_c = \frac{K_1 \cdot K_c}{(As + K_4)(1 - K_3 \cdot s)}$$

Cálculo de  $\frac{I(s)}{Tm(s)}$

Eliminamos la entrada  $q_e(s)$ , teniendo en cuenta que esa entrada incide sobre un sumador donde se resta  $q_s(s)$ , el diagrama de bloques redibujado quedará:



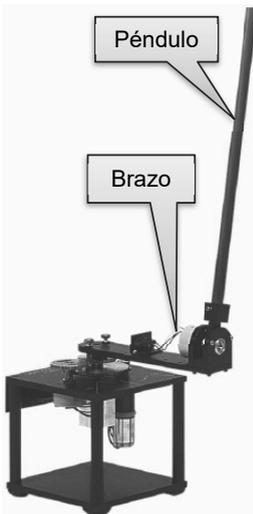
Del mismo modo que en el caso anterior se puede resolver simplificando la realimentación y conectando el resto de los bloques en serie.

$$Gr2(s) = \frac{-1 \frac{1}{A \cdot s}}{1 - (-1) \frac{1}{A \cdot s} K_4} = \frac{-1}{As + K_4}$$

Por lo que la función de transferencia es:

$$\frac{I(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{(Js + B)} \cdot K_5 \cdot \frac{-1}{(As + K_4)} \cdot K_1 \cdot \frac{1}{(1 - K_3 \cdot s)} \cdot K_c = \frac{-K_1 \cdot K_5 \cdot K_c}{(Js + B)(As + K_4)(1 - K_3 \cdot s)}$$

**PA.2)** La figura adjunta muestra el péndulo invertido rotacional (también conocido como péndulo de Furuta). Se pretende obtener un modelo de su comportamiento dinámico. Un motor de continua hace girar un brazo horizontal conectado a su eje. El movimiento del brazo hace girar un péndulo vertical situado en su extremo exterior. El objetivo es mantener en posición vertical (equilibrio inestable) mientras el brazo sigue una determinada trayectoria, determinada por una señal de referencia externa.



Las variables que intervienen son las siguientes:

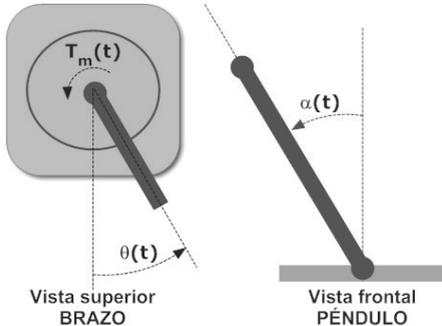
- $V_m(t)$ : Tensión aplicada al motor
- $T_m(t)$ : Par generado por el motor
- $\theta(t)$ : Ángulo del brazo en el plano horizontal
- $\alpha(t)$ : Ángulo del péndulo en el plano vertical

El motor de continua genera un par,  $T_m(t)$ , proporcional a la tensión aplicada,  $V_m(t)$ . La constante de proporcionalidad de esta relación,  $K_m$ , se supone conocida.

El par generado tiene como consecuencia causal el movimiento del brazo, que se pone de manifiesto en un desplazamiento angular,  $\theta(t)$  (ver vista superior), según una dinámica de rotación con momento de inercia  $J_\theta$  y rozamiento viscoso  $B_\theta$ .

El ángulo barrido por el brazo está relacionado con el ángulo del péndulo,  $\alpha(t)$  (ver vista frontal). Una versión simplificada de dicha relación viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$J_\alpha \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + B_\alpha \frac{d\alpha(t)}{dt} = m \cdot l \cdot g \cdot \sin(\alpha(t)) + K_p \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$



En la ecuación anterior  $J_\alpha$  y  $B_\alpha$  son el momento de inercia y el rozamiento viscoso asociados al movimiento rotacional del péndulo. Las constantes  $m$ ,  $l$  y  $g$  son, respectivamente, la masa y longitud del péndulo y la aceleración de la gravedad. Por último,  $K_p$  es la constante asociada a la articulación que une el brazo y el péndulo que, como todas las demás, se supone conocida.

- Determina el **conjunto de ecuaciones diferenciales** que modelan el comportamiento del sistema, tomando  $V_m(t)$  como señal de entrada y  $\alpha(t)$  como señal de salida.
- Linealiza** el sistema de ecuaciones, tomando  $\alpha_0=0$  (posición vertical invertida) como punto de funcionamiento.
- A partir del sistema de ecuaciones linealizado, determina la **función de transferencia**:

$$G_\alpha(s) = \frac{\alpha(s)}{V_m(s)}$$

Dado que se trata de un sistema inestable, es necesaria una estructura de control realimentada para mantener el péndulo en posición vertical invertida mientras el brazo sigue su referencia. Para ello se va a utilizar un controlador cuya dinámica (en el dominio de Laplace) viene descrita por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (R(s) - \theta(s))Ki &= s \cdot U_\theta(s) \\ -\alpha(s) \cdot Kd \cdot s &= U_\alpha(s) \\ V_m(s) &= U_\theta(s) + U_\alpha(s) \end{aligned}$$

- Dibuja el **diagrama de bloques** completo del sistema combinando la estructura de control con el sistema de ecuaciones linealizado correspondiente a la dinámica del proceso.
- Reduce el diagrama de bloques para obtener la **función de transferencia** que relaciona la entrada de referencia,  $R(s)$ , con la posición angular del brazo,  $\theta(s)$ .

### Solución

a) Las ecuaciones que describen la dinámica del proceso propuesto son las tres siguientes. La primera relaciona la tensión aplicada al motor con el par generado. La segunda es la que corresponde a la dinámica de rotación del brazo que relaciona el par motor con el ángulo barrido por el mismo. La tercera es la ecuación que relaciona el ángulo del brazo con el ángulo del péndulo.

$$1) T_m(t) = K_m \cdot V_m(t)$$

$$2) T_m(t) - B_\theta \frac{d\theta(t)}{dt} = J_\theta \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

$$3) J_\alpha \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + B_\alpha \frac{d\alpha(t)}{dt} = m \cdot l \cdot g \cdot \sin(\alpha(t)) + K_p \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

b) La única ecuación no lineal es la tercera y, por lo tanto, es la única a linealizar. La versión linealizada de la misma será:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = K' \alpha(t) + K'' \frac{d\alpha(t)}{dt} + K''' \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2}$$

Las constantes de linealización se obtienen sin más que particularizar en el punto de funcionamiento, la derivada parcial de la ecuación no lineal respecto a la señal que acompaña a la constante de linealización.

$$K' = -m \cdot l \cdot g \cdot \cos(\alpha_0) / K_p \quad \xrightarrow{\alpha_0=0} \quad K' = -m \cdot l \cdot g / K_p$$

$$K'' = B_\alpha / K_p$$

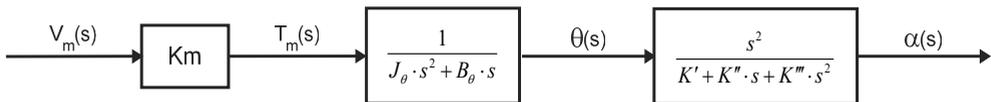
$$K''' = J_\alpha / K_p$$

c) Una vez linealizado el sistema de ecuaciones original se puede transformar al dominio de Laplace para convertirlo en un sistema de ecuaciones algebraico:

$$1) T_m(s) = K_m \cdot V_m(s)$$

$$2) T_m(s) = (J_\theta \cdot s^2 + B_\theta \cdot s) \theta(s)$$

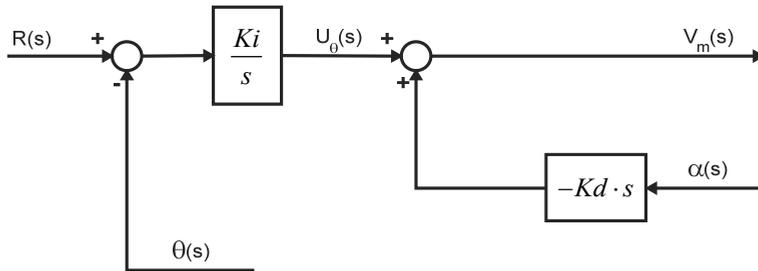
$$3) s^2 \cdot \theta(s) = (K' + K'' \cdot s + K''' \cdot s^2) \alpha(s)$$



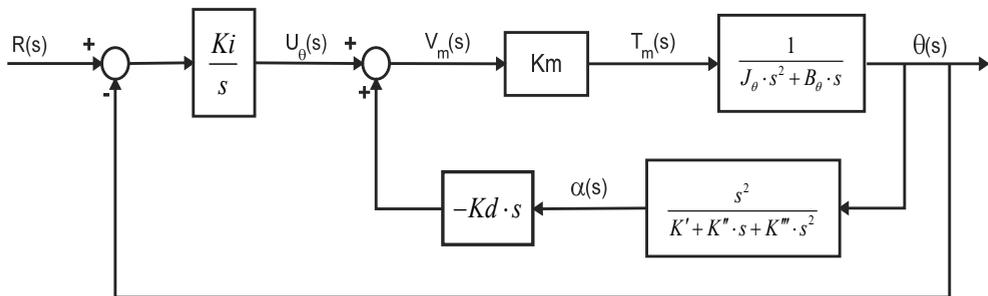
Después de reducir y simplificar el diagrama de bloques, la función de transferencia que solicita el enunciado es:

$$\frac{\alpha(s)}{V_m(s)} = \frac{K_m \cdot s}{(J_\theta \cdot s + B_\theta)(K' + K'' \cdot s + K''' \cdot s^2)}$$

d) A partir de las ecuaciones del controlador se puede obtener el diagrama de bloques. Dicho diagrama tendrá tres entradas: la señal de referencia,  $R(s)$ , la posición angular del brazo,  $\theta(s)$ , y la posición angular del péndulo,  $\alpha(s)$ . La señal de salida será la acción de control aplicada al motor de continua,  $V_m(s)$ .



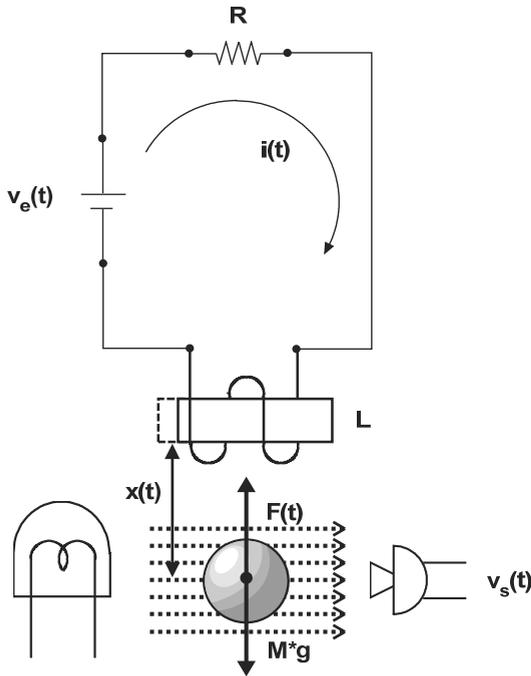
Combinando esta estructura con el diagrama de bloques del apartado anterior se obtiene el sistema de control del péndulo invertido rotacional completo.



e) Reduciendo el diagrama de bloques se llega a la función de transferencia que relaciona la señal de referencia con la posición angular del brazo que transporta el péndulo.

$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{K_m \cdot K_i (K' + K'' \cdot s + K''' \cdot s^2)}{(J_\theta \cdot s + B)(K' + K'' \cdot s + K''' \cdot s^2)s^2 + K_m \cdot K_d \cdot s^4 + K_m \cdot K_i (K' + K'' \cdot s + K''' \cdot s^2)}$$

**PA.3)** La figura adjunta es una representación esquemática de un levitador electromagnético (MagLev). Su funcionamiento es el siguiente:



La tensión de entrada aplicada,  $v_e(t)$ , da lugar a una corriente eléctrica,  $i(t)$ , que atraviesa la bobina del electroimán. La resistencia ( $R$ ) e inductancia ( $L$ ) de este circuito actuador se suponen constantes y conocidas. Dicha corriente genera un campo magnético que da lugar a una fuerza de sustentación,  $F(t)$ , que actúa sobre una bola metálica.

La fuerza ejercida por el electroimán depende, por supuesto, de la corriente que atraviesa la bobina, pero también de la distancia que separa el electroimán de la bola,  $x(t)$ , según la siguiente ecuación, donde  $K_m$  es un parámetro conocido que depende fundamentalmente de la inductancia generada por el objeto levitado:

$$F(t) = K_m \left( \frac{i(t)}{x(t)} \right)^2$$

La fuerza de sustentación provoca, contrarrestando la fuerza ejercida por la gravedad terrestre, el desplazamiento vertical de la bola metálica según una dinámica de traslación en la que no hay rozamiento elástico y el rozamiento viscoso se considera despreciable. La masa de la bola es  $m$  y  $g$  es la aceleración de la gravedad que se suponen valores constantes y conocidos. La posición vertical es medida por un sensor de infrarrojos que proporciona una tensión,  $v_s(t)$ , directamente proporcional a la posición de la bola,  $x(t)$ , siendo  $K_s$  la constante de proporcionalidad. Ésta será la señal que se empleará en la realimentación del sistema de control.

- Determinar el **sistema de ecuaciones** que describe la dinámica del proceso descrito.
- Linealizar** el sistema de ecuaciones suponiendo conocida la distancia vertical en el punto de funcionamiento,  $x_0$ .
- Determinar la **función de transferencia** que relaciona la transformada de Laplace de la tensión de entrada con la transformada de Laplace de la tensión del sensor.

**Para seguir leyendo, inicie el  
proceso de compra, click aquí**