Impulso requerido para una inserción en órbita

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

Índice general

1 Introducción

Además de la localización, dirección y ventanas de lanzamiento, para que un satélite quede insertado en la órbita adecuada hay unos requisitos de velocidad que obligan a que un lanzador disponga de una reserva de maniobra (Δv) suficiente como para que la inserción se pueda lograr con éxito.
Este artículo presenta una estimación de esta reserva de maniobra considerándola como la suma de diversos Δv que intervienen desde el lanzamiento hasta que la inserción se ha completado. Los Δv más relevantes que se estudiarán son:

- La velocidad subyacente disponible por el hecho de lanzar mientras la Tierra está girando.
- Las pérdidas gravitatorias que miden la pérdida de rendimiento neto de un cohete mientras se impulsa en un campo gravitatorio.
- La velocidad que debe alcanzar para insertarse en la órbita deseada cuando llega el momento del 'burnout'.
- Otras pérdidas extra debidas a 'drag', contrapresión o 'steering'.

Para poder estimar estos impulsos vamos a utilizar el sistema de referencia topocéntrico-horizontal o Local-Horizontal que se caracteriza por considerar como origen el lugar de la superficie terrestre desde el que se efectúa el lanzamiento, como plano de referencia el del Horizonte celeste y como dirección principal la Sur-horizontal que apunta a la intersección entre el meridiano del lugar y el Horizonte. Así, se considera como eje X la dirección Sur sobre el horizonte, como eje Z la dirección del Zenit y, en consecuencia, el eje Y apunta al Este, (X_T, Y_T, Z_T) en figura 1.

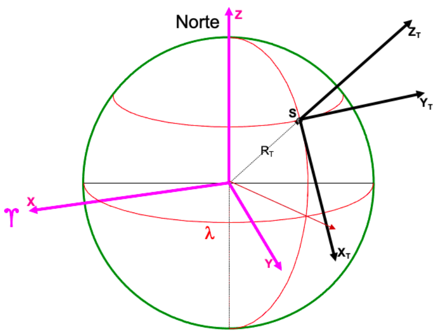

Figura 1: En el sistema topocéntrico-horizontal (TH), las coordenadas (x_T, y_T, z_T) tienen como origen un punto en la superficie terrestre, como plano principal el tangente en ese punto (Horizonte) y como dirección principal la del meridiano local (dirección Sur). Estos ejes NO se consideran fijos respecto a las estrellas (giran con el giro de la Tierra) y por tanto este sistema no es inercial.

Para la aplicación de nuestras ecuaciones vamos a considerar algunas constantes:

- La Tierra no es esférica pero cuando, por aproximación se considere que tiene esa forma, se utiliza como radio terrestre el radio ecuatorial y, por otra parte, en su movimiento de rotación consideraremos que su velocidad angular es constante. Por tanto supondremos

$$R_T = 6378\ km \qquad \omega = 7.29217 \cdot 10^{-5}\ rad/s$$

- Cualquier nave o satélite tiene una masa insignificante comparada con la Tierra por lo que el parámetro gravitacional es considerado constante

$$\mu = G(M + m) = G\,M = 398600.5\ km^3/s^2$$

- Para un triángulo rectángulo esférico se verifican las leyes de Napier y por tanto

$$\cos i = \sin(Az)\,\cos\phi \qquad (1)$$

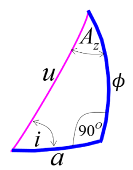

Figura 2: Triágulo de lanzamiento.

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Saber calcular el impulso adicional que gracias al movimiento de rotación de la Tierra se tiene desde cada lugar de lanzamiento.
- Estimar las pérdidas gravitatorias que se tienen cuando se realiza un lanzamiento a una órbita de una determinada altitud.
- Obtener el vector velocidad, en coordenadas topocéntrico-horizontales, necesario para realizar una inserción en una órbita concreta.
- Hallar la reserva de maniobra que se necesita para que un lanzamiento pueda llegar a insertar una nave en una órbita determinada.

3 Velocidad subyacente de un lanzamiento

Los lanzamientos efectuados desde la superficie terrestre se hacen incluyendo una velocidad subyacente o inicial debida al movimiento de rotación de la Tierra. Es evidente que esta velocidad es máxima en el Ecuador y que se va a ir reduciendo a medida que aumenta la latitud llegando a cero en los polos (ver figura 3). Además, si el lanzamiento no es exactamente hacia el Este, esta velocidad subyacente será aún más reducida.

Consideremos un lanzamiento con una dirección determinada Az, denotamos por $\boldsymbol{v_{0,\phi}}$ a la **velocidad hacia el Este** proporcionada por la rotación terrestre. Según esto, la velocidad de rotación de la Tierra en el Ecuador es aproximadamente

$$v_{0,Eq} = \omega\, R_T = 7.29217 \cdot 10^{-5}\, rad/s \cdot 6378\, km = 0.4651\, km/s$$

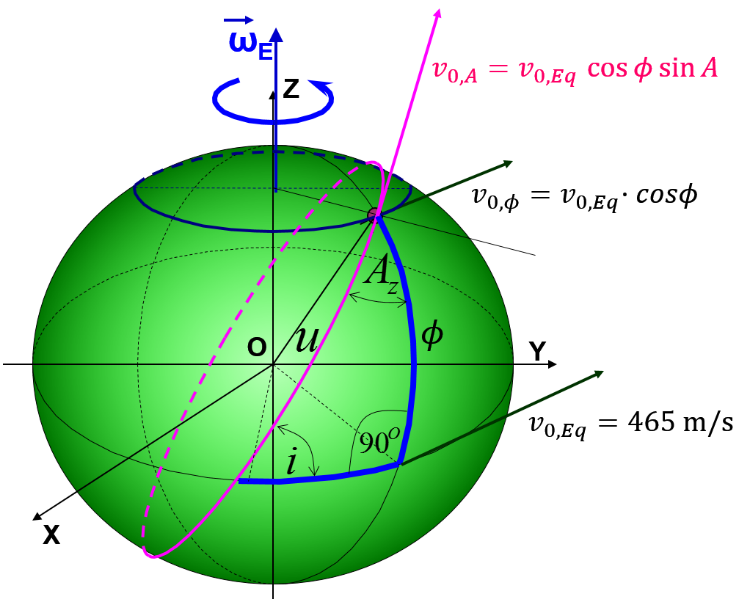

Figura 3: La rotación terrestre aporta una velocidad inicial al lanzamiento, $v_{0,A}$.

A medida que aumenta la latitud ϕ, esta velocidad va disminuyendo (ver figura 3):

$$v_{0,\phi} = v_{0,Eq} \cdot \cos\phi$$

Si queremos considerar una expresón vectorial de esta velocidad subyacente en un sistema topocéntrico-horizontal (figura 1) la contribución por rotación solo tendrá componente Este y por tanto

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{0,\phi} = (0, v_{0,Eq}\cos\phi, 0)}. \tag{2}$$

Ejemplo 3.1 *Calcula la velocidad inicial de un cohete lanzado hacia el Este desde:*

a) *Kourou:* $\phi = 5.5^o\,N$ b) *Cabo Cañaveral:* $\phi = 28.5^o\,N$ c) *Baikonur:* $\phi = 46^o\,N$

Solución:

a) Kourou: $v_{0,\phi} = 0.4651 \cdot \cos(5.5^o) = 0.463\,km/s$, ligeramente inferior a la ecuatorial.

b) Cabo Cañaveral: $v_{0,\phi} = 0.4651 \cdot \cos(28.5^o) = 0.408\,km/s$, más pequeña todavía

c) Baikonur: $v_{0,\phi} = 0.4651 \cdot \cos(46^o) = 0.323\,km/s$, la más reducida.

Nota 3.1 *Si en vez de lanzar hacia el Este, el lanzamiento se produce con determinado Azimut* $Az \neq 90^o$*, la expresión de la velocidad aún se reducirá más* (ver figura 3)*:*

$$v_{0,Az} = v_{0,Eq} \cdot \cos\phi \cdot \sin(Az) \overset{(1)}{=} v_{0,Eq} \cdot \cos i$$

Esto nos indica que la velocidad subyacente de un lanzamiento depende solamente de la inclinación deseada y no de la latitud. Lo que sí varía con la latitud es el azimut con el que lanzar.

Ejemplo 3.2 *Determina la velocidad inicial de un lanzamiento para cada uno de los tres emplazamientos anteriores si se pretende insertar directamente en:*

a) *la órbita de la ISS* $(i = 51.6^o)$

b) *la órbita del satélite Lageos-1* $(i = 109.8^o)$

Solución:

a) Para la ISS: $v_{0,Az} = 0.4651 \cdot \cos(51.6^o) = 0.289\,km/s$, sea cual sea su latitud y por tanto el emplazamiento (lo que sí varía es el azimut del lanzamiento).

b) Para Lageos-1: $v_{0,Az} = 0.4651 \cdot \cos(109.8^o) = -0.151\,km/s$, al ser una órbita retrógrada el lanzamiento debe ser hacia el Oeste $(Az > 180^o)$ por lo que, el movimiento de rotación de la Tierra trabaja en nuestra contra.

4 Velocidad para compensar las pérdidas gravitatorias

Para que la nave alcance la órbita objetivo hay que ganar altitud. En ese proceso se transforma la velocidad (energía cinética) en altitud (energía potencial). A esta pérdida de velocidad de ascenso se le llama **pérdidas gravitatorias** y la vamos a representar por $\boldsymbol{v_{LG}}$.

Cuando el vehículo lanzado alcanza la altura objetivo ya no queremos subir ni bajar más, por lo que la velocidad vertical es nula (ver figura 4).

Para estimar la velocidad necesaria para llegar a una determinada altitud vamos a igualar las expresiones de la energía mecánica del vehículo en el momento del despegue y cuando llega arriba:

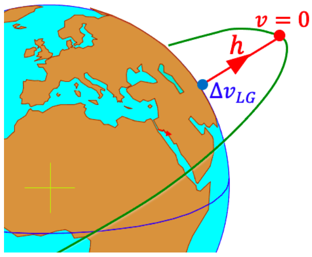

Figura 4: Pérdidas gravitatorias. Velocidad necesaria para elevar una altura h llegando con velocidad nula.

$$\frac{v_{LG}^2}{2} - \frac{\mu}{R_T} = \frac{0^2}{2} - \frac{\mu}{R_T + h} \quad \rightarrow \quad v_{LG} = \sqrt{2\mu \frac{h}{R_T(R_T + h)}}$$

La expresión en coordenadas topocéntrico-horizontales de esta velocidad solo tendrá componente zenital y por tanto

$$\vec{v}_{LG} = \left(0, 0, \sqrt{\frac{2\mu h}{R_T(R_T + h)}}\right) \tag{3}$$

Ejemplo 4.1 *Halla las pérdidas gravitatorias de velocidad acumuladas en un lanzamiento realizado para alcanzar la órbita de la* ISS *(altitud $h = 400\,km$) a la del satélite* Lageos-1 *($h = 5700\,km$).*

Solución: Para llegar a las órbitas de la *ISS* y de *Lageos-1* aplicamos (3)

$$\vec{v}_{LG} = \left(0, 0, \sqrt{\frac{2 \cdot 398600.5 \cdot 400}{6378 \cdot 6678}}\right) = (0, 0, 2.716)\ km/s$$

$$\vec{v}_{LG} = \left(0, 0, \sqrt{\frac{2 \cdot 398600.5 \cdot 5700}{6378 \cdot 12078}}\right) = (0, 0, 7.68)\ km/s$$

5 Velocidad de inserción en órbita

La parte más importante de la velocidad de un lanzamiento es la velocidad de inserción en órbita que debe ser alcanzada cuando se apagan los motores por eso también se le llama **velocidad de burnout**, denotada por $\overrightarrow{v}_{bo}$.

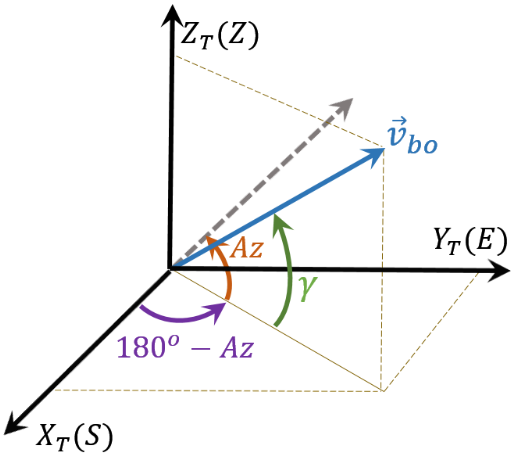

Figura 5: Geometría de la inserción en órbita en un sistema topocéntrico-horizontal (SEZ) mostrando el vector velocidad de inserción $\vec{v}_{bo}$, el ángulo de vuelo γ y el azimut Az.

De la figura 5 se deduce que las componentes topocéntrico-horizontales de esta velocidad están determinadas por el módulo de esa velocidad v_{bo}, que debe coincidir con la velocidad necesaria en ese punto para describir la órbita objetivo, por el ángulo de vuelo γ y por el azimut Az del lanzamiento.

$$\begin{aligned} v_{bo,x} &= v_{bo}\cos\gamma\cos(180^o - Az) = -v_{bo}\cos\gamma\cos Az \\ v_{bo,y} &= v_{bo}\cos\gamma\sin(180^o - Az) = v_{bo}\cos\gamma\sin Az \\ v_{bo,z} &= v_{bo}\sin\gamma \end{aligned}$$

lo que nos da la expresión del vector de inserción

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{bo} = (-v_{bo}\cos\gamma\cos Az, v_{bo}\cos\gamma\sin Az, v_{bo}\sin\gamma)} \tag{4}$$

Nota 5.1 *Si la inserción se hace en una órbita circular o en el perigeo/apogeo de una elíptica el ángulo de vuelo debe ser nulo y por tanto la expresión (4) se reduce*

$$\overrightarrow{v}_{bo} = (-v_{bo}\cos Az, v_{bo}\sin Az, 0)$$

Ejemplo 5.1 *La ESA planea hacer un lanzamiento desde su base en La Guayana Francesa ($\phi = 5.5^o$) para situar un satélite en una órbita circular de $535\,km$ de altura sobre la superficie de la Tierra con una inclinación de $i = 5.5^o$. ¿Cuál es el vector velocidad para una inserción adecuada?*

Solución: Como la inclinación de la órbita deseada coincide con la latitud del lugar de lanzamiento, éste debe realizarse hacia el Este y por tanto $Az = 90^o$. Además como la órbita debe ser circular el ángulo de vuelo debe ser nulo $\gamma = 0^o$ y la velocidad de inserción será

$$v_{bo} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{bo}}} = \sqrt{\frac{398600.5}{6378 + 535}} = 7.59\,km$$

y por tanto

$$\vec{v}_{bo} = (-v_{bo}\cos Az, v_{bo}\sin Az, 0) = (0, 7.59, 0)$$

Ejemplo 5.2 *Calcula las posibles velocidades de inserción necesarias para alcanzar las órbitas circulares de la ISS y de Lageos-1 cuyas alturas son $h_{ISS} = 400\,km$ y $h_{Lag} = 5700\,km$ y sus inclinaciones $i_{ISS} = 51.6^o$ e $i_{Lag} = 109.8^o$ respectivamente. Los lanzamientos se realizan desde los emplazamientos del ejemplo 3.1.*

Solución: La latitud de los tres lugares de lanzamiento $\phi = 5.5^o, 28.5^o, 46^o$ es inferior a la inclinación $i = 51.6^o$ para el caso de la *ISS* o al de su suplementario $180^o - 109.8^o = 70.2^o$ en el caso órbita retrógrada de *Lageos-1*, por lo que, en ambas situaciones habrá dos posibles azimuts para cada lugar.

En el caso de Kourou $\phi = 5.5^o$: Los azimuts posibles pueden estimarse con la expresión (1).

$$\sin Az = \frac{\cos 51.6^o}{\cos 5.5^o} = 0.624 \quad \rightarrow \quad Az = \begin{cases} 38.61^o \\ 141.39^o \end{cases}$$
$$\sin Az = \frac{\cos 109.6^o}{\cos 5.5^o} = -0.337 \quad \rightarrow \quad Az = \begin{cases} -19.69^o \rightarrow 340.31^o \\ 199.69^o \end{cases}$$

En todos los casos la órbita de inserción es circular por lo que el ángulo de vuelo es nulo y además la magnitud de la velocidad de inserción será la misma para los tres lugares de lanzamiento obtiéndose mediante

$$v_{bo} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{bo}}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} v_{bo,ISS} = \sqrt{\frac{398600.5}{6378+400}} = 7.67\,km/s \\ v_{bo,Lageos} = \sqrt{\frac{398600.5}{6378+5700}} = 5.74\,km/s \end{cases}$$

Ahora, ya se puede obtener el vector de burnout con la expresión (4)

$$\vec{v}_{bo} = (-v_{bo}\cos\gamma\cos Az, v_{bo}\cos\gamma\sin Az, v_{bo}\sin\gamma) \quad \rightarrow$$
$$\vec{v}_{bo,ISS} = \begin{cases} 7.67\,(-\cos 0\cos 38.61, \cos 0\sin 38.61, \sin 0) = (-5.99, 4.79, 0)\ km/s \\ 7.67\,(-\cos 0\cos 141.39, \cos 0\sin 141.39, \sin 0) = (5.99, 4.79, 0)\ km/s \end{cases}$$
$$\vec{v}_{bo,Lag} = \begin{cases} 5.74\,(-\cos 0\cos 340.31, \cos 0\sin 340.31, \sin 0) = (-5.41, -1.94, 0)\ km/s \\ 5.74\,(-\cos 0\cos 199.69, \cos 0\sin 199.69, \sin 0) = (5.41, -1.94, 0)\ km/s \end{cases}$$

En el caso de Cabo Cañaveral $\phi = 28.5^o$:

$$ISS \rightarrow Az = \begin{cases} 44.98^o \\ 135.03^o \end{cases} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{bo,ISS} = \begin{cases} (-5.425, 5.42, 0)\ km/s \\ (5.425, 5.42, 0)\ km/s \end{cases}$$
$$\textit{Lageos-1} \rightarrow Az = \begin{cases} 337.56^o \\ 202.44^o \end{cases} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{bo,Lag} = \begin{cases} (-5.31, -2.19, 0)\ km/s \\ (5.31, -2.19, 0)\ km/s \end{cases}$$

En el caso de Baikonur $\phi = 46^o$:

$$ISS \rightarrow Az = \begin{cases} 63.4^o \\ 116.6^o \end{cases} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{bo,ISS} = \begin{cases} (-3.43, 6.86, 0)\ km/s \\ (3.43, 6.86, 0)\ km/s \end{cases}$$
$$\textit{Lageos-1} \rightarrow Az = \begin{cases} 331.13^o \\ 208.88^o \end{cases} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{bo,Lag} = \begin{cases} (-5.03, -2.77, 0)\ km/s \\ (5.03, -2.77, 0)\ km/s \end{cases}$$

6 Impulso requerido para el lanzamiento

Teniendo en cuenta todas las velocidades vistas en las secciones anteriores, el impulso necesario para un lanzamiento debe tener en cuenta todas ellas.

Además al realizar un lanzamiento se producen otras **Pérdidas Extra** de velocidad debidas a otros efectos como *'drag'*, *'back pressure'* o *'steering losses'*. Estas pérdidas extra se estiman habitualmente en torno a $1\,km/s$ y las vamos a denotar por $\boldsymbol{\Delta v_{Extra}}$.

De esta forma la magnitud del **impulso requerido para un lanzamiento**, $\boldsymbol{\Delta v_{Lanz}}$ es

$$\boxed{\Delta v_{Lanz} = \|\vec{v}_{bo} + \vec{v}_{LG} - \vec{v}_{0,\phi}\| + \Delta v_{Extra}} \qquad (5)$$

Ejemplo 6.1 *Utilizando los datos de los ejemplos anteriores estima la velocidad necesaria para hacer la inserción en la órbita de la ISS y en la de Lageos-1 cuando el lanzamiento se puede hacer desde cualquiera de los tres emplazamientos del ejemplo 3.1 y las pérdidas extra de velocidad se consideran de* $1\,km/s$.

Solución: Utilizando los cálculos ya realizados en los ejemplos (5.2, 4.1 y 3.1) y aplicando la expresión (5) se obtienen los diferentes Δv_{Lanz} obtenidos para la *ISS* (ver tabla 1) y para alcanzar la órbita de *Lageos-1* (ver tabla 2):

ISS	$\vec{v}_{bo}$ (Ejemplo 5.2)	$\vec{v}_{LG}$ (Ejemplo 4.1)	$\vec{v}_{0,\phi}$ (Ejemplo 3.1)	$\|\vec{v}_{bo} + \vec{v}_{LG} - \vec{v}_{0,\phi}\|$	Δv_{Extra}	Δv_{Lanz}
Kourou	$(-5.99, 4.79, 0)$ $(5.99, 4.79, 0)$		$(0, 0.463, 0)$	7.872		8.872
Cabo C.	$(-5.425, 5.42, 0)$ $(5.425, 5.42, 0)$	$(0, 0, 2.716)$	$(0, 0.408, 0)$	7.869	1.0	8.869
Baikonur	$(-3.43, 6.86, 0)$ $(3.43, 6.86, 0)$		$(0, 0.323, 0)$	7.865		8.865

Tabla 1: Impulso requerido para el lanzamiento a la órbita de *ISS*

Lageos-1	$\vec{v}_{bo}$ (Ejemplo 5.2)	$\vec{v}_{LG}$ (Ejemplo 4.1)	$\vec{v}_{0,\phi}$ (Ejemplo 3.1)	$\|\vec{v}_{bo} + \vec{v}_{LG} - \vec{v}_{0,\phi}\|$	Δv_{Extra}	Δv_{Lanz}
Kourou	$(-5.41, -1.94, 0)$ $(5.41, -1.94, 0)$		$(0, 0.463, 0)$	9.695		10.695
Cabo C.	$(-5.31, -2.19, 0)$ $(5.31, -2.19, 0)$	$(0, 0, 7.68)$	$(0, 0.408, 0)$	9.693	1.0	10.693
Baikonur	$(-5.03, -2.77, 0)$ $(5.03, -2.77, 0)$		$(0, 0.323, 0)$	9.689		10.689

Tabla 2: Impulso requerido para el lanzamiento a la órbita de *Lageos-1*

7 Cierre

En este artículo se han presentado las diversas partes de la velocidad que intervienen en el cálculo del **impulso requerido para efectuar el lanzamiento** de una nave a una órbita determinada. En este proceso:

- Se ha detallado cómo se estima la velocidad subyacente proporcionada por la Tierra en su movimiento de rotación.
- Se ha mostrado cómo valorar las pérdidas gravitatorias que se generan en un lanzamiento.
- Hemos obtenido la expresión que permite hallar la velocidad necesaria para hacer la inserción en una órbita concreta.
- Finalmente, tras mencionar otras pérdidas de velocidad extra que se producen en un lanzamiento, se ha dado la expresión que permite agrupar todos esos valores y evaluar la reserva de maniobra necesaria para llevar a cabo un lanzamiento.

Estos contenidos han sido apoyados con ejemplos que muestran su aplicación a posibles situaciones reales.

Referencias

[1] Sellers, Jerry J. ,*Understanding space, an introduction to astronautics. Third Edition*, Space Technology Series, McGraw-Hill Higher Education, 2005.

[2] Curtis, Howard D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.

[3] Bate, Roger R. et al.,*Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.

[4] Brown, Charles D.,*Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.

[5] Prussing, John E. and Conway, Bruce A.,*Orbital Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1993.

[6] Chobotov, Vladimir A.,*Orbital Mechanics Third Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 2002.