UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

LEYES DE KIRCHHOFF MATRICIALES Y ESPACIOS FUNDAMENTALES DE UNA MATRIZ

Asomándote a la teoría matemática de sistemas

Apellidos, Nombre	Carpitella, Silvia[1] (silvia.carpitella@csun.edu) Izquierdo Sebastián, Joaquín[2] (jizquier@upv.es)
Departamento	[1] Dept. Manufacturing Systems Engineering and Management [2] Departamento de Matemática Aplicada
Centro	[1] California State University [2] Universitat Politècnica de València

1 Resumen

Con origen en la ingeniería eléctrica, la teoría de redes utiliza conceptos que constituyen una de las bases de la denominada teoría matemática de sistemas. Actualmente, el análisis de sistemas físicos trasciende el clásico marco hamiltoniano, y para modelar y simular sistemas físicos complejos, los conceptos de la teoría de redes son imprescindibles. Aunque estas frases introductorias pueden producir un enorme respeto, por su conexión inherente con el concepto de *complejidad*, en este artículo abrimos al alumno de un Grado de Ingeniería, especialmente aquellos que incluyen asignaturas como Teoría de circuitos) una pequeña ventana al campo de la teoría de redes utilizando: i) las leyes de Kirchhoff mediante sus ecuaciones de la Mecánica clásica, que, posiblemente, el alumno conoce, y ii) presentamos técnicas algebraicas sencillas que son el principio del camino hacia la estructura geométrica subyacente a la teoría de redes. Este artículo está pensado como una clase motivadora para el Álgebra Matricial, asignatura que forma parte del currículo en las Escuelas y Facultades universitarias. En el desarrollo, se muestra la necesidad de determinadas herramientas avanzadas (que forman parte esencial de una asignatura de Álgebra), lo que estimula el interés de aprender tales herramientas.

2 Introducción

La teoría de redes es el estudio de gráficos que representan relaciones simétricas o asimétricas entre objetos de un conjunto discreto. Modelar las interrelaciones entre un conjunto finito de objetos es de gran interés en muchos problemas de diversos tipos. La teoría de redes tiene aplicaciones en muchas disciplinas: física estadística, física de partículas, redes eléctricas, hidráulicas y de comunicaciones (con las leyes de Kirchhoff como elemento fundamental), pero también en informática (internet), economía (modelos económicos), finanzas (transacciones financieras), investigación operativa (redes logísticas), climatología, ecología (redes metabólicas), salud pública (redes de regulación genética), sociología (redes sociales), y un largo etcétera.

En la teoría de redes, los grafos juegan un papel fundamental. Los grafos son herramientas adecuados para modelar redes y relaciones, y las matrices son una herramienta imprescindible en su estudio.

El origen de la teoría de grafos como ciencia se sitúa en el siglo XVIII. Leonard Euler, publicó un documento en el que daba solución al llamado *Problema de Könisberg*, que trataba de encontrar una forma de recorrer los siete puentes de dicha ciudad pasando por cada uno de ellos una sola vez. Posteriormente, en el año 1847, Gustav Kirchhoff, utilizando la teoría de grafos, estableció sus ampliamente conocidas leyes para el cálculo de corriente, voltaje y resistencia en los circuitos eléctricos.

Como se deduce de esta ligera introducción, la teoría de grafos es actualmente esencial en la denominada teoría matemática de sistemas, de especial interés en la moderna rama de la Física que se ha venido en denominar *Redes complejas*.

En este documento encontrarás conceptos que quizá no conozcas y que vas a ver en la asignatura de Álgebra; y encontrarás conceptos que seguramente ya conoces, pero que deberías refrescar (algunos también se ven en una asignatura típica de Álgebra).

3 Objetivos

Tras concluir con la lectura/estudio de este documento, serás capaz de:

- Describir la relación entre las leyes de Kirchhoff y los espacios fundamentales de una matriz
- Explicar el encaje de los circuitos eléctricos dentro de la teoría de grafos
- Obtener las soluciones de los problemas planteados y otros semejantes

4 Desarrollo

Para leer este artículo deberás tener nociones de:

Requisitos
1. Álgebra matricial elemental
2. Solución de sistemas de ecuaciones lineales
3. Operaciones simples en algún entorno computacional

Tabla 1. Requisitos básicos

5 El teorema de Tellegen

El teorema de Tellegen (1952) es uno de los teoremas más potentes de la teoría de redes, ya que de él se derivan la mayoría de los teoremas de distribución de energía y otros principios de la teoría de redes. En esencia, el teorema de Tellegen da una relación simple entre las magnitudes que satisfacen las leyes de Kirchhoff de la teoría de circuitos eléctricos. Las dos leyes de Kirchhoff definen los aspectos topológicos de la teoría de circuitos, es decir, aquellos que sólo dependen de cómo las líneas del circuito están conectadas entre sí y no de los elementos que integran tales líneas. La ley de Kirchhoff de las corrientes (LKC) expresa la conservación de la carga eléctrica, y la ley de Kirchhoff de los voltajes (LKV) se deriva de que el campo electrostático es conservativo. El teorema de Tellegen es aplicable a una multitud de sistemas de red y proporciona una herramienta útil para analizar sistemas de redes complejas, como los citados en la Introducción.

5.1 Notación y matriz de incidencia

La estructura topológica de un circuito eléctrico puede caracterizarse mediante la teoría de grafos.

Un grafo es una pareja de conjuntos $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$; siendo $\mathcal{V}$ un conjunto finito, $\mathcal{V} \neq \emptyset$, de elementos, y $\mathcal{E}$ un conjunto de pares ordenados (o no ordenados) de elementos de $\mathcal{V}$. Los elementos de $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ son denominados vértices o nodos de $\mathcal{G}$, mientras que los elementos de $\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_m\}$ son los arcos o aristas o líneas (u otros nombres específicos usuales en la disciplina donde se aplica la teoría de grafos).

En el caso de las redes eléctricas, por cada línea circula una corriente eléctrica. De manera arbitraria se asigna un sentido positivo en cada arista lo que proporciona una orientación para cada arista. De esta forma el grafo se llama dirigido u orientado.

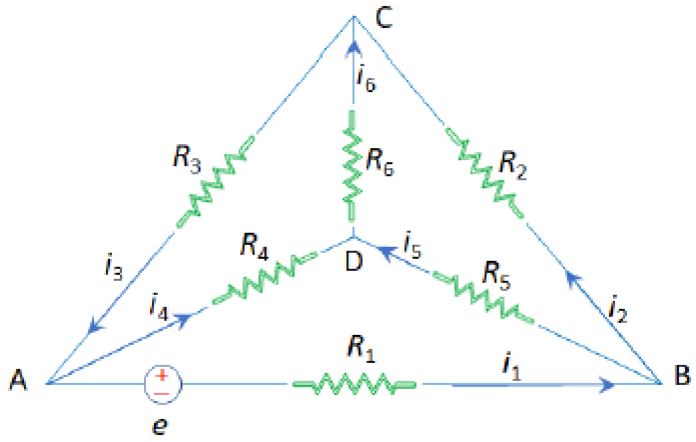

Figura 1. Grafo dirigido correspondiente a un circuito eléctrico acoplado con resistencias y fuentes de alimentación en las líneas

En el ejemplo de la Figura 1, $\mathcal{V} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\}$, por lo que tiene 4 vértices o nodos. A su vez, $\mathcal{E} = \{1,2,3,4,5,6\}$ ya que existen 6 líneas o ramas uniendo distintos nodos.

Denotemos los números de elementos en $\mathcal{V}$ y $\mathcal{E}$ por n y m, respectivamente. En general, los nodos se representan por su numeración $k = 1, \cdots, n$, dentro del conjunto $\mathcal{V}$; y las líneas se representan por su numeración $j = 1, \cdots, m$.

A cada arista se le asigna una diferencia de potencial (o voltaje) E_j y una corriente $i_j, j = 1, \cdots, m$. A su vez, a cada nodo se le asigna un potencial $p_k, k = 1, \cdots, n$. El sentido positivo de la corriente viene definido por la orientación (arbitraria) dada a la arista, y la diferencia de potencial entre sus vértices se calcula como $E_j = p_{k_1} - p_{k_2}$, definida en el sentido contrario al marcado por la orientación, lo que permite una notación posterior más simplificada en cuanto a signos.

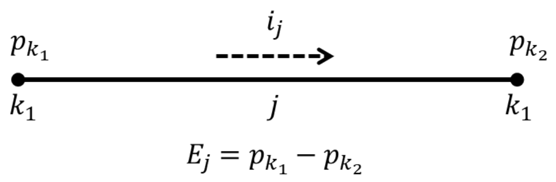

Figura 2. Variables en un grafo dirigido correspondiente a un circuito eléctrico

La denominada matriz de incidencia de un grafo lleva la 'contabilidad' de las conexiones orientadas de los elementos del grafo, por lo que define completamente al mismo. Se trata de una matriz M de tamaño $n \times m$, cuyos elementos se definen así:

$$m_{kj} = \begin{cases} +1 & \text{si la línea } j \text{ parte del nodo } k, \\ -1 & \text{si la línea } j \text{ llega al nodo } k, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Así, la matriz M tiene tantas filas como nodos tiene $\mathcal{V}$ y tantas columnas como líneas tiene $\mathcal{E}$.

Ejemplo 1. La matriz de incidencia del grafo de la figura 1 es, por tanto, de tamaño 4×6

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5.1. Comprueba con detalle la correspondencia entre las aristas dirigidas del grafo y las entradas o elementos de la matriz de incidencia.

Observa que, en el grafo asociado a un circuito, dos vértices dados pueden estar conectados por más de una arista (con misma u opuesta orientación). Sin embargo, los vértices de salida y de llegada de una arista deben ser distintos.

5.2 Primera ley de Kirchhoff (LKC)

La ley de Kirchhoff de las corrientes (LKC) establece que la suma algebraica (cada una con su signo) de las corrientes confluentes en un vértice es 0. Es decir, no se pierde ni se gana corriente en ninguno de los vértices. Matemáticamente, se expresa

$$\sum_j m_{kj} i_k = 0, \forall k = 1, \cdots, n,$$

que expresa la conservación de carga eléctrica que hemos dicho.

Matricialmente (utilizando la matriz de incidencia) esta ley se escribe

$$M\mathbf{i} = \mathbf{0}.$$

Siendo $\mathbf{i} = (i_1, \cdots, i_n)^T$ el vector de las corrientes (intensidades) de las líneas. En términos de los espacios fundamentales de una matriz, se expresa (Izquierdo y Torregrosa, 1997)

$$\mathbf{i} \in \mathcal{N}(M),$$

es decir, el vector de intensidades $\mathbf{i}$ está en el espacio nulo de la matriz M.

Ejercicio 5.2. Comprueba esta circunstancia con el ejemplo dado.

5.3 Segunda ley de Kirchhoff (LKV)

La ley de Kirchhoff de los voltajes (LKV) establece que el potencial eléctrico de cualquier nodo queda bien definido una vez que se ha asignado un valor arbitrario al potencial de uno de ellos. Es una consecuencia de la naturaleza conservativa del campo eléctrico, que es equivalente a la relación entre los potenciales de nodo y las diferencias de potencial en las ramas. Utilizando la matriz de incidencia, esta ley se escribe

$$\sum_k m_{kj} p_k = E_j, \forall j = 1, \cdots, m,$$

pues, para cada rama j, solo contribuyen a la suma los dos nodos conectados por ella, y se obtiene la relación $E_j = p_{i_1} - p_{i_2}$ vista anteriormente.

Matricialmente, siendo $\mathbf{p}, \mathbf{E}$ respectivamente los vectores columna con elementos p_k, E_j, utilizando la matriz de incidencia, esta ley se escribe

$$M^T \mathbf{p} = \mathbf{E}.$$

En términos de los espacios fundamentales de una matriz, se expresa (Izquierdo y Torregrosa, 1997)

$$\mathbf{E} \in \mathcal{C}(M^t) = \mathcal{F}(M),$$

es decir, el vector de voltajes está en el espacio columna de M^T, es decir en el espacio fila de M.

Ejercicio 5.3. Comprueba la ley LKV con el ejemplo dado.

Así, las leyes de Kirchhoff adquieren, en forma matricial las siguientes expresiones:

- 1ª ley de Kirchhoff: $M\mathbf{i} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{i} \in \mathcal{N}(M)$.
- 2ª ley de Kirchhoff: $\mathbf{E} = M^T\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{E} \in \mathcal{C}(M^T) \Leftrightarrow \mathbf{E} \in \mathcal{F}(M)$.

6 Teorema de Tellegen

Sea M la matriz de incidencia de un circuito. Sea E el conjunto de sus aristas (líneas).

Sean $\mathbf{i}, \mathbf{E}, \mathbf{p}$ vectores de corrientes, voltajes y potenciales admisibles del circuito, es decir, vectores que satisfacen las dos leyes de Kirchhoff.

Entonces,

$$\sum_{j \in E} E_j i_j = 0.$$

Demostración:

$$\sum_{j \in E} E_j i_j = \mathbf{E}^T \mathbf{i} \overbrace{=}^{\mathbf{E} \in \mathcal{C}(M^T)} (M^T \mathbf{p})^T \mathbf{i} = \mathbf{p}^T M \mathbf{i} \overbrace{=}^{\mathbf{i} \in \mathcal{N}(M)} \mathbf{p}^T \mathbf{0} = \mathbf{0}. \qquad \square$$

El teorema establece, pues, que la suma total de las potencias eléctricas (los productos de corriente y voltaje) que entran o salen de las ramas de un circuito es nula.

Los elementos en las ramas pueden ser de cualquier tipo, incluyendo fuentes, elementos resistivos y elementos almacenadores de energía (condensadores e inductores), y pueden ser lineales o no. Las leyes de Kirchhoff establecen unas relaciones entre voltajes y corrientes de manera que la energía se conserva en el proceso de intercambio de la misma entre las ramas del circuito.

6.1 Aspectos prácticos

Observamos que las filas de M son linealmente dependientes por la ley de continuidad global. Asimismo, los potenciales en los nodos no quedan únicamente definidos a partir de las caídas en las líneas. Para evitar esta ambigüedad, se elige un nodo cuyo potencial se fija, por ejemplo, a 0. Sin pérdida de generalidad, elijamos $p_1 = 0$. Entonces, es posible ignorar la fila correspondiente de la matriz M. A tal matriz, que llamamos matriz de incidencia reducida, se la puede seguir denominando, sin lugar a confusión, como M. También se considera $\mathbf{p} = (p_2, \cdots)$. Obsérvese que:

1. $M\mathbf{i} = 0$ sigue siendo, obviamente, válida, y
2. también lo es $\mathbf{E} = M^T\mathbf{p}$.

Por la ley de Ohm, las caídas de potencial son $\mathbf{E} = R\mathbf{i} - \mathbf{e}$, siendo R la matriz diagonal de las resistencias de las líneas (supuestas no nulas todas), y $\mathbf{e}$ el vector de potenciales generados en cada una de las líneas (por ejemplo, las baterías de las líneas).

Multiplicando, ahora $\mathbf{E}$ por MR^{-1}, se tiene

$$MR^{-1}\mathbf{E} = MR^{-1}M^T\mathbf{p} = M\mathbf{i} - MR^{-1}\mathbf{e} = -MR^{-1}\mathbf{e},$$

ya que $M\mathbf{i} = 0$.

Al ser la matriz de incidencia reducida, M, de rango completo, $MR^{-1}M^T$ es invertible, por lo que el sistema proporciona una única solución para $\mathbf{p}$.

Finalmente, conociendo $\mathbf{p}$ de obtiene $\mathbf{E}$, utilizando 2. Y, así, finalmente, $\mathbf{i} = R^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{e})$.

La matriz $MR^{-1}M^T$ es de gran importancia en la Física, en general. En circuitos eléctricos se corresponde con la ley de Ohm, en elasticidad con la ley de Hooke (matriz de rigidez de la estructura). También en teoría de la relatividad, en Mecánica de fluidos e, incluso, en la descripción del flujo del tráfico, entre otros campos, es de gran interés.

6.2 Ejemplo

Continuamos con el circuito de la Figura 1, para el que la matriz de incidencia ya se ha dado en el Ejemplo 1. En el siguiente snipet en Python se construyen las matrices necesarias. La última línea de código da la matriz de incidencia reducida.

```
M = np.array([[1, 0, -1, 1, 0, 0], [-1, 1, 0, 0, 1, 0], [0, -1, 1, 0, 0, -1], [0, 0, 0, -1, -1, 1]])
R = np.diag([5, 2, 1, 3, 1, 4])
e = np.zeros(6)
e[0] = 120
# Fijamos el potencial del último nodo e ignoramos la última fila.
M = M[0:3, :]
```

Los cálculos se recogen en este otro snipet

```
p = LA.solve(M @ LA.inv(R) @ M.T, -M @ LA.inv(R) @ e)
E = M.T @ p
i = LA.inv(R) @ (E + e)
```

Esto proporciona la solución del problema:

```
p = array([-20.37735849,   9.05660377,  -9.05660377])
E = array([-29.43396226,  18.11320755,  11.32075472, -20.37735849,   9.05660377,   9.05660377])
i = array([18.11320755,  9.05660377, 11.32075472, -6.79245283,  9.05660377,  2.26415094])
```

6.3 Ejercicio

Utiliza el modelo dado y resuelve el circuito de la Figura 3, siendo $R_1, R_2, R_3 = 1, 5, 3\ \Omega$, respectivamente, y $e_1, e_2, e_3 = 12, 18, 0\ V$, respectivamente.

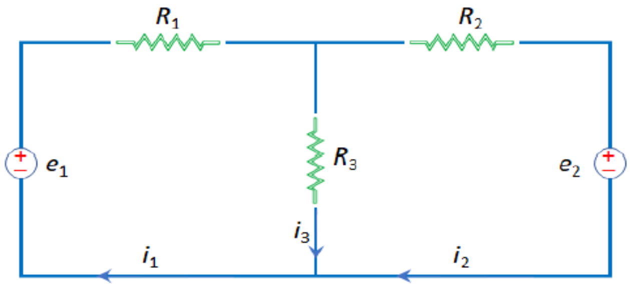

Figura 3. Otro circuito eléctrico sencillo

Nota: debes obtener `i = array([6.52173913, 4.69565217, 1.82608696])`.

Discusión y trabajo a desarrollar

La teoría de grafos juega un papel clave en la moderna rama de la Ciencia, en particular de la Física, denominada Sistemas complejos. A su vez, las matrices del Álgebra y sus propiedades son esenciales en dicha teoría. En este artículo te he presentado el Teorema de Tellegen y las leyes de Kirchhoff, y hemos resuelto utilizando Python, un circuito, aunque de tamaño reducido, que ejemplifica el análisis realizado.

Tarea

1. Realiza con detalle todos los cálculos indicados y el ejercicio propuesto en 6.3.
2. Busca tú en la bibliografía (quizá en la asignatura de Teoría de circuitos) otros ejemplos y resuélvelos utilizando lo visto aquí.
3. Quizá necesites implementar algún programa en Python para automatizar los cálculos.

7 Cierre

La teoría de grafos es esencial en el estudio de redes complejas. Las matrices son una herramienta clave en dicha teoría. El Álgebra proporciona las herramientas clave en la teoría de grafos. El contenido de este artículo puede ser impartido en una clase típica de Álgebra al abordar el tema de rango matricial y espacios fundamentales de una matriz, y puede proponerse, a su vez, como trabajo académico, que será de gran interés para el alumnado y que debe producir excelentes resultados. También, proporcionará un apoyo enriquecedor a una asignatura de Teoría de circuitos.

8 Bibliografía

Izquierdo Sebastián, Joaquín, Torregrosa Sánchez, Juan Ramón, Álgebra y ecuaciones diferenciales. Tomos I y II. Universitat Politècnica de València, Valencia, 1997, SPUPV 97.669.

*Tellegen, BDH (1952). "Un teorema general de redes con aplicaciones". Informes de investigación de Philips, **7** : 259-269.*