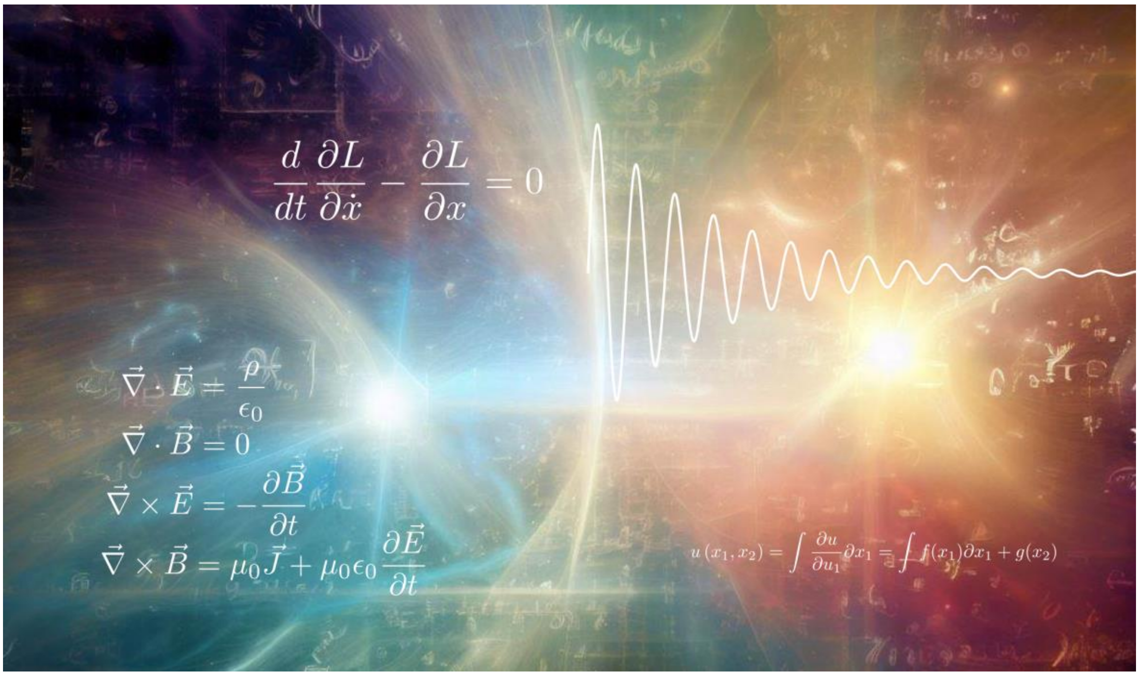
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

ECUACIONES DIFERENCIALES EN FÍSICA

Emilio Sánchez Ortiga
Vicente Ferrando Martín



EDITORIAL
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL DISEÑO
ISBN: 978-84-09-51855-5

Ecuaciones diferenciales en Física

Emilio Sánchez Ortiga
Vicente Ferrando Martín

2023
EDITORIAL
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL DISEÑO
ISBN: 978-84-09-51855-5

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Sánchez-Ortiga, Emilio; Ferrando, Vicente. (2023). *Ecuaciones diferenciales en Física*. Valencia: Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño.

ISBN: 978-84-09-51855-5

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo introduciremos los conceptos básicos y definiciones que sientan la base para el desarrollo de la asignatura.

1.1. Ecuaciones diferenciales en Física

Las ecuaciones diferenciales son fundamentales a la hora de describir y estudiar la dinámica de sistemas físicos. Existen diversos tipos de ecuaciones diferenciales, algunas de ellas pueden ser resueltas análiticamente de forma que conducen a una solución general (o particular) del problema planteado mientras que otras requieren la aplicación de métodos numéricos.

Sin entrar en la definición formal por el momento, podemos decir que una ecuación diferencial es aquella que describe como es la variación de una (o varias variables) con respecto a otra (u otras) de forma que dicha ecuación presenta derivadas de al menos una de las variables. Un ejemplo sencillo del empleo de ecuaciones diferenciales en un sistema físico serían las ecuaciones de cinemática. Como sabemos, la velocidad de un cierto objeto se puede describir como la variación de la posición con respecto al tiempo. Del mismo modo, la aceleración es la variación de la velocidad con respecto al tiempo, esto es

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{dx}{dt} \\
a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}
\end{aligned}
$$

siento x, v, a y t la posición, la velocidad, la aceleración y el tiempo, respectivamente. Como vemos, la aceleración puede expresarse en términos de la derivada de la velocidad con respecto al tiempo (ecuación diferencial de primer orden) o de la derivada segunda de la posición con respecto al tiempo (ecuación diferencial de segundo orden). Resolver el problema implica conocer $a(t)$, $x(t)$ y $a(t)$. En este caso concreto, la solución es trivial ya que basta con integrar ambas ecuaciones para encontrar dicha dependencia. Obviamente, al resolver cada una de las integrales aparecerán constantes de integración que solo podrán conocerse si se tienen las condiciones iniciales del sistema, es decir, la aceleración (a_0), la velocidad (v_0) y la posición iniciales (x_0), en el instante ($t = 0$) o en un determinado instante ($t = t_0$). Sin embargo, si suponemos que la aceleración es constante y que, por tanto, no depende de la variable temporal, podemos escribir una solución general del problema:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 \\ v(t) &= v_0 + a_0 t \\ x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2 \end{aligned}$$

que llevará a distintas soluciones dependiendo las condiciones que se impongan.

Si bien el ejemplo anterior es un caso sencillo, nos sirve para ilustrar la importancia de las ecuaciones diferenciales en Física. Existen ejemplos más complejos como por ejemplo las ecuaciones de Maxwell, que son un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas que permiten describir como es la variación de los campos eléctrico ($\vec{E}$) y magnético ($\vec{B}$) tanto en el tiempo como en el espacio, así como su interacción con la materia dentro del marco de la Física clásica. Éstas pueden ser escritas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

donde el operador nabla (∇) incluye derivadas parciales con respecto a las coordenadas espaciales.

Las ecuaciones diferenciales aparecerán de manera recurrente en las distintas materias del grado en Física y, por tanto, es fundamental conocer sus tipos, sus propiedades así como la forma de resolverlas en los distintos casos. Este curso pretende dotar de las herramientas y métodos de resolución de la gran mayoría de las ecuaciones diferenciales que se puedan presentar.

1.2. Derivadas

Como hemos comentado, una ecuación diferencial no es más que una ecuación en la que una de las variables aparece diferenciada (una o múltiples veces) con respecto a otra (variable independiente) u otras. Para este curso, por tanto, se deberán conocer las propiedades y características fundamentales de las derivadas. Recordemos la definición de derivada de una cierta función $f(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.1}$$

Como sabemos, conocer la función $f'(x)$ implica conocer como es la variación de la función primitiva $f(x)$ en cualquier posición x de la misma. Para ello, la función $f(x)$ ha de ser derivable en todo el espacio. Si esta condición se cumple, podemos asegurar que la función es continua en todo el espacio. Sin embargo, una función contínua puede ser no derivable en todo el espacio (por ejemplo, una función a trozos). En este caso, la función puede ser derivable en una cierta región y, por tanto, deberíamos definir su dominio de derivabilidad.

Veamos la definición formal de derivada parcial:

Sea $f(x, y, ...)$ una función continua es una cierta región del espacio coordenado de variables $(x, y, ...)$. La derivada parcial de dicha función con respecto a la variable x puede escribirse de distintas maneras. En este curso, emplearemos indistintamente la notación a ambos lados de la siguiente igualdad para la derivada parcial de n-ésimo orden

$$\frac{\partial^n f(x, y, ..)}{\partial x^n} = f^{(n)}$$

donde los primeros órdenes de la derivada parcial, en la notación simplificada $f^{(n)}$, los escribiremos como f', f'', f''' . A partir de la derivada cuarta usaremos, por ejemplo para ese caso, la notación $f^{(4)}$.

1.3. Definiciones fundamentales

Se denomina ecuación diferencial de n-ésimo orden a toda ecuación que cumpla la siguiente condición:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.2}$$

donde F es una función conocida y definida en una cierta región D del espacio coordenado de variables $x, y, y', y'', ..., y^{(n)}$. En este caso, x es la variable independiente definida dentro de dicha región D del espacio $x \in (x_0, x_1)$. Por otro lado, $y(x)$ es la función incógnita e $y', y'', ..., y^{(n)}$ las respectivas derivadas de dicha función hasta n-ésimo orden.

La solución de la ecuación (1.2) implica encontrar la dependencia $y = f(x)$, para lo cual se deben cumplir las siguientes condiciones:

i) $f(x)$ es derivable en el intervalo (x_0, x_1), cumpliéndose que:

$$\forall\ x \in (x_0, x_1)\ \ (x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)) \in D$$

ii) $f(x)$ safisface la ecuación (1.2), es decir, la transforma en una identidad:

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), ..., f^{(n)}(x)) \equiv 0\ \ \forall\ x \in (x_0, x_1)$$

Para poder resolver la ecuación (1.2), es decir, hallar todas sus soluciones, ésta se debe integrar. Por otro lado, se dice que la ecuación diferencial está escrita de forma canónica o explícita si la escribimos con respecto su derivada de orden superior $y^{(n)}$, es decir,

$$y^{(n)} = \phi(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}). \tag{1.3}$$

1.4. Problema de Cauchy

El problema de Cauchy, también llamado problema de valor inicial en ocasiones, consiste en resolver una ecuación diferencial sujeta a unas ciertas condiciones de frontera o valores iniciales sobre la solución cuando una de las variables que la definen toma un valor determinado. Veamos su definición estricta:

Supongamos que $\phi(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ es una función continua en una región D del espacio coordenado de variables $x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$. El problema de Cauchy consiste en hallar una función n veces diferenciable y continua, $y = f(x)$, y un intervalo X que contenga cierto punto x_0, de modo que $(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n-1)}(x)) \in D$ para $x \in D$ y que se cumplan las siguientes condiciones:

i) $\forall\ x \in X \quad f^{(n)}(x) \equiv \phi(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n-1)}(x))$

ii) $f(x_0) = y_0,\ f'(x_0) = y'_o, ..., f^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, donde $(x_{,0}, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in D$.

Para la ecuación (1.3) el problema de Cauchy se puede escribir de manera formal como sigue:

$$\begin{cases} y^{(n)} = \phi(x, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \\ \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{1.4}$$

siendo $y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ valores conocidos.

A toda solución del problema descrito en (1.4) se le denomina solución particular del problema de Cauchy. El conjunto de soluciones particulares representa la solución general del problema de Cauchy.

1.5. Familias de curvas y ecuaciones diferenciales

Una familia de curvas es un conjunto de curvas, cada una de las cuales está dada por una función o parametrización en la que uno o más de los parámetros (constantes arbitrarias) son variables. Dicho de otra forma, una familia de curvas es la ecuación que representa todas las posibles curvas que vienen dadas por la misma función fundamental. Por ejemplo, cualquier recta en el espacio de variables (x, y) puede ser escrita en la forma $y = C_1x + C_2$, donde los distintos valores que pueda tomar C_1 se corresponderán con distintas pendientes de la recta mientras que los valores de C_2 indican los posibles cortes de la función con el eje y.

En general, cualquier curva puede escribirse como la función $f(x, y) = 0$. Al considerar que los parámetros de las curvas pueden tomar cualquier valor, escribimos la familia de curvas de la siguiente manera:

$$\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0, \tag{1.5}$$

donde C_i, con $i = 1, .., n$ son las constantes arbitrarias.

Si y es función de x y es n veces derivable, entonces es posible encontrar una ecuación diferencial que describa a dicha familia de curvas. Para encontrar dicha ecuación diferencial se deben seguir los siguientes pasos:

i) Diferenciar la igualdad (1.5) n veces, esto es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} y' + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} y'^2 + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} y'' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} y(n) = 0 \end{cases}$$

ii) Hallar las constantes arbitrarias. Al diferenciar n veces podremos realizar un sistema de ecuaciones (la ecuación original y sus derivadas) de n ecuaciones de manera que podamos hallar las n incógnitas, es decir, cada una de las constantes arbitrarias.

Para asentar estos conceptos, veamos algunos ejemplos prácticos en los cuales queremos encontrar las ecuaciones diferenciales que describen a distintas familias de curvas.

Ejemplos:

1. $x^2 + Cy^2 - 2y = 0$.

   Sea $y = y(x)$ una solución diferenciable con continuidad de la ecuación dada, donde C es un parámetro que no depende de x. Entonces, se debe cumplir

$$\Phi(x, C) = x^2 + Cy^2(x) - 2y(x) \equiv 0,$$

   donde $x \in X \subset \mathbb{R}$, siendo X cierto conjunto. La función Φ es diferenciable con respecto a x, su derivada será

$$\frac{\partial \Phi(x, C)}{\partial x} \equiv 2x + 2y'(x)y(x)C - 2y'(x) \equiv 0.$$

   Simplificando y obviando la dependencia en x llegamos a

$$\begin{aligned} x + y'y\, C - y' &= 0 \\ C &= \frac{y' - x}{yy'}, \end{aligned}$$

   que podemos sustituir en la ecuación dada y simplificar

$$\begin{aligned} x^2 + (\frac{y'-x}{yy'})y^2 - 2y &= 0, \\ x^2yy' + (y'-x)y^2 - 2y^2y' &= 0, \\ x^2y' + (y'-x)y - 2yy' &= 0, \\ x^2y' - xy - yy' &= 0, \end{aligned}$$

que finalmente queda como

$$(x^2 - y)y' - xy = 0$$

que es la ecuación diferencial buscada.

2. $(x - C_1)^2 + C_2y^2 = 1$.

   En primer lugar escribimos la ecuación en forma canónica:

$$(x - C_1)^2 + C_2y(x)^2 - 1 \equiv 0$$

Dado que el número de parámetros es $n = 2$, derivamos dos veces con respecto a x. La primera derivada será

$$\frac{\partial F(x, C_1, C_2)}{\partial x} = 2(x - C_1) + 2C_2y(x)y'(x) \equiv 0.$$

y la segunda:

$$\frac{\partial^2 F(x, C_1, C_2)}{\partial x^2} = 2 + 2C_2(y'(x))^2 + 2C_2y(x)y''(x) \equiv 0$$

A continuación, despejamos sucesivamente cada una de las constantes arbitrarias. Obviando nuevamente la dependencia de y con respecto a x y empezando por la segunda derivada, obtenemos:

$$C_2 = -\frac{1}{y'^2 + yy''} \tag{1.6}$$

Sustituimos en la primera derivada

$$(x - C_1) - \frac{yy'}{y'^2 + yy''} \equiv 0.$$

de forma que obtenemos la constante C_1

$$C_1 = \frac{yy'}{y'^2 + yy''} - x.$$

Sustituyendo ambas constantes en la ecuación canónica de la curva, obtenemos la ecuación diferencial de la familia de curvas

$$(x - \frac{yy'}{y'^2 + yy''} - x)^2 - \frac{1}{y'^2 + yy''}y^2 - 1 = 0$$

la cual simplificamos en varios pasos

$$\begin{aligned}
(\frac{yy'}{y'^2 + yy''})^2 - \frac{y^2}{y'^2 + yy''} - 1 &= 0 \\
(yy')^2 - y^2(y'^2 + yy'') - (y'^2 + yy'')^2 &= 0 \\
y^3y'' + (y'^2 + yy'')^2 &= 0.
\end{aligned}$$

3. $y = e^{Cx}$.

   Encontrar la ecuación diferencial de esta familia de curvas representa un caso particularmente sencillo. Si realizamos la primera derivada obtenemos

$$y'(x) = Ce^{Cx} = Cy(x). \tag{1.7}$$

   Por tanto, la constante podrá expresarse como $C = y'/y$ y la ecuación diferencial será

$$y = e^{(y'/y)x} \tag{1.8}$$

1.5.1. Equivalencia

Como hemos visto, es equivalente expresar una cierta familia de curvas a partir de su ecuación general o de la ecuación diferencial que la representa. Por tanto, si se presentase el problema inverso, esto es, una cierta ecuación diferencial de dos variables que queremos resolver, la solución general será una familia de curvas.

Si pensamos nuevamente en el caso de una recta, la familia de curvas viene dada por la ecuación $y = C_1x + C_2$. Su primera derivada es $y' = C_1$ que, obviamente, muestra la relación entre la derivada primera y la pendiente. Por otro lado, la derivada segunda será $y'' = 0$. Podemos decir que esta última es la ecuación diferencial que presenta cualquier recta [1]. Lógicamente, si integramos dos veces llegamos a la ecuación de partida. Intuitivamente podríamos llegar a la misma conclusión: si la derivada segunda es la primera derivada nula, necesariamente la dependencia con la variable independiente ha de ser lineal.

A lo largo de la asignatura plantearemos el problema inverso, esto es, tendremos una cierta ecuación diferencial de la cual queremos conocer su solución general (en función de las constantes de integración) y, en algunos casos, su solución particular (determinar el valor de las constantes para unas ciertas condiciones dadas). Para ello no bastará con integrar como en los ejemplos vistos hasta ahora, si no que habrá que aplicar una serie de métodos que dependerán del tipo de ecuación diferencial que se presente.

[1] Estaríamos en este caso suponiendo que la primera derivada no nula es y'.

1.6. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Definamos un primer tipo de ecuaciones diferenciales que, por otra parte, será el tipo de ecuaciones que trataremos de manera mayoritaria a lo largo del curso, salvo en contadas excepciones. Una ecuación diferencial se dice *ordinaria* si existe únicamente una variable independiente. En algunos textos se suele usar el acrónimo EDO para referirse a este tipo de ecuación. Podemos de manera equivalente decir que, por lo tanto, una ecuación diferencial es ordinaria si no presenta derivadas parciales. De hecho, si la ecuación diferencial no es ordinaria se le llama ecuación diferencial en derivadas parciales. Este otro tipo de ecuación diferencial se verá en el último capítulo y simplemente representa una generalización de los métodos empleados en las EDOs. Manténgase en mente que, a partir de ahora, aunque no se mencione explícitamente estaremos tratando ecuaciones diferenciales ordinarias salvo en el caso de la excepción mencionada.

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales de primer orden

En general, llamaremos ecuación diferencial de n-ésimo orden a la ecuación diferencial en la cual el mayor orden de derivación es n. Por tanto, las ecuaciones diferenciales de primer orden serán aquellas que presenten exclusivamente derivadas de primer orden. En este capítulo, veremos distintos casos particulares de este tipo de ecuaciones diferenciales.

2.1. Ecuaciones diferenciales de variables separables

Toda ecuación que presente la siguiente forma

$$y' = f(y)g(x), \tag{2.1}$$

siendo f y g, dos funciones continuas en $x \in (a, b)$ e $y \in (c, d)$, se denomina ecuación diferencial de variables separables. Bajo la condición de que $f(y) \neq 0$ en el dominio en el que hemos definido al función, es posible escribir la ecuación (2.1) de la siguiente manera:

$$\frac{y'}{f(y)} = g(x),$$

es decir, hemos separado la ecuación de tal forma que cada una de variables aparece a un lado de la igualdad. Con ello, es posible encontrar la solución a la ecuación diferencial sin más que integrar a ambos lados de la igualdad (recordando la dependencia de y con la variable independiente x, esto es

$$\int \frac{y'(x)}{f(y(x))} dx = \int g(x) dx.$$

Veamos algunos ejemplos sencillos de este tipo de ecuaciones diferenciales.

Ejemplos:

1. $y' = xy$

En este caso es directo realizar la separación de variables ya que $f(y) = y$ y $g(x) = x$. Aplicando el procedimiento anterior, tendríamos que

$$\frac{y'}{y} = x, \quad \text{con} \;\; y \neq 0.$$

Integrando a ambos lados de la igualdad, se obtiene

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int xdx.$$
$$\ln y(x) = x^2/2 + c_0$$

siendo c_0 una constante de integración. Como vemos, la condición $y(x) \neq 0$ sigue siendo consistente. Por último, despejamos para obtener la dependencia explicita de y con la variable x,

$$y(x) = e^{x^2/2+c_0}$$

que podemos escribir como

$$y(x) = Ce^{x^2/2}$$

donde $C = e^{c_0}$. La anterior es la solución general de la ecuación diferencial.

2. $y' = xy$ con $y(0) = 1$

   Este caso es igual al ejemplo anterior, con la salvedad que se nos plantea la condición inicial $y(0) = 1$. Si imponemos dicha condición tenemos que

   $$y(0) = Ce^0 = 1,$$

   y, por tanto, encontramos la solución única para la cual $C = 1$.

3. $y' = xy$ con $y(0) = 0$

   En este caso, la solución que obtenemos es una solución singular ya que para que $y(0) = 0$, necesariamente $y(x) = 0$ y, por tanto, $C = 0$.

2.2. Ecuaciones homogéneas y ecuaciones reducibles a homogéneas

En primer lugar, recordemos la definición de función homogénea. Se dice que una función $f(x, y)$ es homogénea de grado k, con $k \in \mathbb{R}$, si $\forall t \in (a, b)$ se cumple que

$$f(tx, ty) \equiv t^k \; f(x, y)$$

con $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Teniendo en mente esta definición, diremos que toda ecuación diferencial que presente la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{2.2}$$

es una ecuación diferencial homogénea si las funciones M y N son continuas en un cierto dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ y homogéneas de un mismo grado. Es decir, debe cumplirse que

$$M(tx, ty) = t^k M(x, y), \tag{2.3}$$

y que

$$N(rx, ry) = r^l N(x, y), \tag{2.4}$$

$\forall r \in (a, b)$ y con $l \in \mathbb{R}$. Además, se debe dar que $k = r$, es decir, ambas funciones deben ser homogéneas y del mismo grado.

Toda ecuación homogénea se puede transformar en una ecuación de variables separables tras aplicar un cambio de variable. Reformulemos la ecuación 2.2 de la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} \equiv y' = \frac{G(x, y)}{N(x, y)},$$

donde una de las funciones homogéneas se ha renombrado como $G(x, y) = -M(x, y)$. Es posible introducir la nueva variable independiente $v = y/x$ que transforma la ecuación en una ecuación de variables separables (ver los ejemplos de esta sección).

Además, se dice que la ecuación 2.2 es una ecuación diferencial homogénea generalizada si existe una constante α que, tras hacer el cambio de variable $y = z^\alpha$, la ecuación se reduce a una homogénea.

Ejemplos:

1. $\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right) dx - xdy = 0$

   Comprobemos si la ecuación anterior es homogénea. Siguiendo la notación empleada en esta sección, tenemos que $M(x, y) = (y + \sqrt{x^2 - y^2})$ y $N(x, y) = -x$, ambas funciones continuas. Aplicamos la condición de homogeneidad a $M(x, y)$

   $$M(tx, ty) = \left(ty + \sqrt{t^2(x^2 - y^2)}\right) = t(y + \sqrt{x^2 - y^2}) = tM(x, y),$$

   que se cumple siempre que $t \geq 0$, es decir, $\forall t \in (a = 0, b = \infty)$. Por otro lado, para la función $N(x, y)$ tenemos que

   $$N(tx, ty) = -tx = tN(x, y),$$

   que se cumple para todo valor de t.

   Por tanto, ambas cumplen la condición y son funciones homogéneas. Además, otra de las condiciones para que la ecuación diferencial sea homogénea es que deben tener el mismo grado y, en este caso, ambas son de primer grado.

   Podemos, por tanto, realizar el cambio de variable $v = y/x$ para obtener una ecuación de variables separables. Comprobémoslo

   $$\begin{aligned} u &= \frac{y}{x} \\ dy &= x\ du + u\ dx \\ 0 &= \left(ux + \sqrt{x^2 - (ux)^2}\right) dx - x(x\ du + u\ dx) \end{aligned}$$

que, tras simplificar, se puede escribir como

$$\begin{aligned} |x|\sqrt{1-u^2}dx - x^2\ du &= 0, \\ x\left(\mathrm{sgn}(x)\sqrt{1-u^2}dx - x^2\ du\right) &= 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde sgn es la función signo definida como

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ \\ -1 & si \quad x < 0. \end{cases}$$

De la ecuación 2.5 obtenemos una de las soluciones trivial $x = 0$. Por otro lado, para $x \neq 0$, podemos comprobar que hemos obtenido una ecuación de variables separables tras realizar el cambio de variable, esto es

$$\frac{dx}{|x|} = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

donde hemos aplicado la propiedad de la función signo que permite escribir cualquier número real como $x = \mathrm{sgn}(x) \cdot |x|$. Como tenemos una ecuación de variables separables, podemos resolver la ecuación sin más que integrar a ambos lados de la igualdad, es decir:

$$\int \frac{dx}{|x|} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

de donde obtenemos la solución

$$\mathrm{sgn}(x) \ln|x| = \arcsin(u) + C.$$

Si deshacemos el cambio de variable y, considerando que los valores particulares $u = \pm 1$ conducen a las soluciones triviales $y = \pm x$, podemos escribir todas las soluciones como

$$\mathrm{sgn}(x) \ln|x| = \arcsin(y/x) + C,\ \ y = \pm x,\ \ x = 0.$$

2. $xy' = y\,(1 + \ln y - \ln x)$

La homogeneidad de las funciones no siempre resulta trivial como en el caso anterior. A primera vista, podríamos pensar que en este caso no existe homogeneidad debido a la presencia de logaritmos neperianos. Reescribamos la función dada de la siguiente forma

$$x\frac{dy}{dx} - y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right) = 0,$$

que, si la expresamos en la forma de la ecuación 2.2 queda como

$$xdy - y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)dx = 0.$$

Identificamos ambas funciones y comprobamos su homogeneidad

$$\begin{aligned}
M(tx,ty) &= -ty\left(1 + \ln\frac{ty}{tx}\right) = tM(x.y) \text{ para } (x > 0, y > o) \\
N(tx,ty) &= tx = tN(x,y),
\end{aligned}$$

es decir, ambas funciones son homogéneas de primer grado y, por tanto, la ecuación diferencial se podrá escribir como una ecuación de variables separables. Para ello, realizamos nuevamente el cambio de variable

$$\begin{aligned}
u &= \frac{y}{x} \\
dy &= x\ du + u\ dx \\
0 &= x(xdu + udx) - ux\left(1 + \ln u\right)dx
\end{aligned}$$

que, despues de simplificar, queda de la siguiente manera

$$x^2du - xu\ln udx = 0,$$

de donde obtenemos la solución trivial $x = 0$. Para $x \neq 0$, separamos las variables a cada lado de la igualdad:

$$\frac{udu}{\ln u} = \frac{dx}{x}.$$

Obtenemos la solución integrando a ambos lados

$$\ln(\ln u) + c_1 = \ln x + c_2.$$

Agrupamos las constantes ($c_3 = c_2 - c_1$), deshacemos el cambio de variable y operamos a ambos lados de la igualdad

$$\begin{aligned}
\ln(\ln y - \ln x) &= \ln x + c_3, \\
(\ln y - \ln x) &= xe^{c_3}, \\
y &= \exp(\ln x + Cx) \qquad (\text{con } C = e^{c_3})
\end{aligned}$$

que simplificamos finalmente en la forma

$$y = xe^{Cx}.$$

Recordemos que, al hacer el cambio de variable en las ecuaciones diferenciales homogéneas, obtenemos otra solución trivial para $u = 1$, esto es, $y = x$. En este caso, es fácil ver que dicha solución trivial está incluida en el caso anterior y se da para $C = 0$.

2.3. Ecuaciones lineales y reducibles a lineales

2.3.1. Ecuaciones lineales de primer orden

De manera general, una ecuación lineal de primer orden tendrá la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y + a_3(x) = 0, \tag{2.6}$$

donde $a_i(x)$, con $i = 1, 2, 3$, son funciones conocidas. Como vemos, el término lineal hace referencia a que no existen potencias sobre la variable y ni su derivada. Es fácil ver que se puede reescribir la ecuación anterior de manera que digamos que una ecuación diferencial lineal de primer orden es toda ecuación que pueda escribirse de la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{2.7}$$

El método más comúnmente empleado para resolver este tipo de ecuaciones es el conocido como método de variación de constantes.

Nota: Este método se suele emplear para resolver ecuaciones diferenciales que no son homogéneas, en el caso de que sean homogéneas aplicaremos la transformación a una ecuación de variables separables que vimos en la sección anterior.

Veamos como proceder para emplear el método de variación de constantes. Una vez escrita la ecuación diferencial en la forma mostrada en la Ec.(2.7), se iguala a cero la parte izquierda de la ecuación, es decir, se considera que $Q(x) = 0$,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \tag{2.8}$$

de forma que se tiene una ecuación homogénea y, por tanto, se puede resolver una vez separadas las variables

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx.$$

que resulta en

$$\begin{aligned} \ln y &= G(x) + C, \\ y &= Ke^{G(x)}, \end{aligned}$$

donde $G(x) = -\int P(x)dx$ y C es la constante de integración. Esta es la solución general de la Ec.(2.8) o, dicho de otro modo, de la Ec.(2.7) cuando $Q(x) = 0$. Como el propio nombre del método indica, el procedimiento se basa en considerar que la constante de integración obtenida es función de la variable independiente, es decir, que $C = C(x)$ o, lo que es lo mismo, que $K = K(x)$. Con esto, suponemos que las soluciones de la ecuación no homogénea son del tipo

$$y = K(x)e^{G(x)},$$

y que, además, $K(x)$ es una función derivable. Bajo estas condiciones, el método se basa simplemente en suponer la forma de la solución, hallar su derivada y sustituirla en la ecuación inicial. Es decir, derivamos la solución supuesta

$$y' = K'(x)e^{G(x)} + K(x)G'(x)e^{G(x)},$$

donde recordemos que $G'(x) = -P(x)$. De esta forma, podemos sustuir la solución supuesta, $y = K(x)e^{G(x)}$, y su derivada , y', en la ecuación de partida, es decir, en la Ec. (2.7). Llevemos a cabo dicho procedimiento

$$\begin{aligned} y' + P(x)y &= Q(x), \\ K'(x)e^{G(x)} - P(x)K(x)e^{G(x)} + P(x)K(x)e^{G(x)} &= Q(x), \\ K'(x)e^{G(x)} &= Q(x). \end{aligned}$$

De esta forma, podemos obtener la forma de la *constante de integración*[1]. que supusimos dependiente de la variable x, $K(x)$, y su dependencia con la función original $Q(x)$:

$$K(x) = \int Q(x)e^{-G(x)}dx,$$

o, lo que es lo mismo

$$K(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = H(x) + L.$$

donde, ahora sí, L es una constante de integración indeterminada. Con esto, el método de variación de constantes nos dice que la solución a la ecuación lineal de primer orden (no homogénea) de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

tendrá la forma

$$y(x) = Le^{G(x)} + H(x)e^{G(x)}.$$

donde las funciones de la soluciones se relaciones con $P(x)$ y $Q(x)$ de la siguiente forma

$$G(x) = \int P(x)dx, \quad H(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

[1]Obviamente, deja de ser constante una vez supongamos que existe dependencia con la variable independiente. Permitan la imprecisión en el lenguaje para que el procedimiento sea más claro

Veamos algún ejemplo del empleo de este método en la obtención de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Ejemplo:

1. $xy' + 2y = \sin x$

   En primer lugar, tratamos de escribir la ecuación en la forma de la Ec. (2.7):

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{\sin x}{x},$$

   donde, en este caso, las funciones que componen la ecuación lineal de primer orden son $P(x) = 2/x$ y $Q(x) = \sin x/x$. Buscamos la solución para $Q(x) = 0$, es decir, para la ecuación homogénea

$$y' + \frac{2y}{x} = 0,$$

   que podemos reescribir como

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{2dx}{x},$$

   de forma que

$$\ln y = -2\ln x + c.$$

   donde, aplicando la propiedad del logaritmo $n \cdot \ln A = \ln A^n$, se obtiene

$$\ln y = \ln x^{-2} + c.$$

   Por tanto, la solución a la parte homogénea de la ecuación diferencial es

$$y(x) = \frac{K}{x^2},$$

   con $K = e^c$.

   Aplicamos ahora el *método de variación de constantes* para resolver la ecuación lineal, es decir, consideramos que $K = K(x)$ y que, además, es derivable. Derivando la ecuación de la solución homogénea obtenemos

$$y'(x) = \frac{K'(x)}{x^2} - 2\frac{K(x)}{x^3},$$

   que introducimos en la ecuación original junto con la solución a la ecuación homogénea

$$\frac{K'(x)}{x^2} - 2\frac{K(x)}{x^3} + 2\frac{K(x)}{x^3} = \frac{\sin x}{x},$$

que, simplificando, queda como

$$K'(x) = x \sin x.$$

Con esto, podemos obtener la función desconocida que supusimos en la solución al aplicar la variación de constantes sin más que integrar por partes [2]:

$$K(x) = \int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Por último, podemos introducir esta función en la solución obtenida anteriormente para obtener la solución a la ecuación diferencial lineal propuesta

$$y(x) = \frac{(\sin x - x \cos x + C)}{x^2}.$$

2.3.2. Ecuaciones reducibles a ecuaciones lineales

En general, las ecuaciones lineales de primer orden no se van a presentar directamente en la forma dada por la Ec. (2.7) y habrá que realizar algunas transformaciones para lograr esa forma explícita. Las siguientes son ecuaciones que se pueden reducir a ecuaciones lineales:

A) $f'(y)y' + P(x)f(y) = Q(x)$

Para reducir esta ecuación a lineal basta con considerar que el primer término es una cierta función derivada con respecto a x, es decir, que $f'(y)y' = z'(x)$. Que podemos reescribir como $\int f'(y)dy = \int z'(x)dx$, con lo cual $f(y) = z(x)$. Mediante esta transformación, la ecuación quedaría en la forma deseada:

$$z' + P(x)z = Q(x)$$

B) $y' + P(x) = Q(x)e^{ny}$

Para identificar la transformación necesaria, resulta útil pasar la función exponencial al otro lado de la igualdad, esto es:

$$(y' + P(x))e^{-ny} = Q(x).$$

Es fácil identificar el siguiente cambio de variable $z(x) = e^{-ny}$ y, por tanto, $z'(x) = -ny'e^{-ny}$. Es decir, $y' = -\frac{z'}{n}e^{ny}$. Sustituyendo en la ecuación nos queda

$$-\frac{z'}{n} + P(x)z = Q(x).$$

[2] Recordemos que las integrales por partes se calculan empleando la fórmula $\int udv = uv - \int vdu$. En este caso, $u = x, dv = sinx$.

que tendría la forma deseada (el factor $-1/n$ se puede absorber redefiniendo las funciones $P(x)$ y $Q(x)$). Se excluye el valor $n = 0$ que, por otro lado, simplificaría la ecuación a una de variables separables.

C) $y' + P(x)y = Q(x)y^m$ (Ecuación de Bernoulli)

Para identificar este cambio, al igual que en el caso B, resulta útil escribir la ecuación de la siguiente manera:

$$y'y^{-m} + P(x)y^{1-m} = Q(x).$$

En este caso, para reducir la ecuación a una lineal se emplea el cambio de variable $z(x) = y^{1-m}$. Por tanto, tendremos que $z'(x) = (1-m)y^{-m}y'$. Despejamos la primera derivada de la variable y:

$$y' = \frac{z'y^m}{1-m}$$

y, sustituyendo en la ecuación original

$$\frac{z'y^m}{1-m}y^{-m} + P(x)z = Q(x),$$

que quedaría como

$$z' + \hat{P}(x)z = \hat{Q}(x),$$

donde hemos introducido el factor constante en las funciones $\hat{Q}(x) = (1-m)Q(x)$ y $\hat{P}(x) = (1-m)P(x)$. Obviamente, de excluyen los valores $m = 0$ y $m = 1$ ya que, como es fácil ver, ambos conducen a ecuaciones lineales de manera directa.

2.4. Ecuaciones diferenciales exactas

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden es exacta si presenta la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.9}$$

y además

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{2.10}$$

Fijémonos que esto es equivalente a decir que la ecuación diferencial proviene del diferencial de una cierta función $F(x,y)$:

$$dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy,$$

donde podemos identificar las funciones que definen a la ecuación diferencial exacta

$$M(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x},$$
$$N(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}.$$

De esta forma, al realizar las derivadas parciales de la Ec. (2.10) implícitamente se estarían calculando las derivadas parciales cruzadas de la función $F(x, y)$, esto es

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

El teorema de Clairaut (también conocido como teorema de Schwarz) garantiza que, si una función definida en un cierto dominio tiene derivadas cruzadas y estas son continuas, entonces las derivadas cruzadas son iguales.

Dicho de manera sencilla, la condición de la Ec. (2.10) no es más que la manera de asegurar que las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ provienen de diferenciar la misma función y que, por tanto, existirá una solución exacta de la ecuación diferencial (la propia función $F(x, y)$).

Veamos un ejemplo de este tipo de ecuaciones diferenciales

Ejemplo:

1. $3x^2 + 4xy + (2x^2 + 2y)y' = 0$

   Reescribimos la función en la forma de la Ec. (2.9) e identificamos las funciones

$$(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0 \tag{2.11}$$

   donde $M(x, y) = 3x^2 + 4xy$ y $N(x, y) = 2x^2 + 2y$. Calculamos sus derivades parciales

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 4x, \tag{2.12}$$

   por lo que la ecuación diferencial es exacta. Esto implica que debe existir una función $F(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 4xy, \\ N(x,y) &= \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2x^2 + 2y. \end{aligned}$$

   Para obtener la solución basta con integrar $M(x, y)$ con respecto a x o $N(x, y)$ con respecto a la variable y. Ambas presentarán constantes de integración que serán distintas (y que podrían depender de la otra variable). Para que este caso sea más ilustrativo, calculemos ambas integrales

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int 3x^2 + 4xy \; dx = x^3 + 2x^2 y + g(y), \\ F(x,y) &= \int 2x^2 + 2y \; dy = 2x^2 y + y^2 + h(x). \end{aligned}$$

Como vemos, en ambos casos deberíamos hallar las posibles funciones dependientes de la otra variable (bien ($g(y)$ o $h(x)$). Nuevamente, aunque bastaría hacerlo con una de ellas, resolvamos para ambos casos y comprobemos que, efectivamente, llegamos a la misma solución.

(a) Para hallar $g(y)$ derivamos la función obtenida con respecto a y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2 + g'(y)$$

que, obviamente, debe ser igual a $N(x, y)$. Esto es

$$2x^2 + g'(y) = 2x^2 + 2y.$$

Por tanto, $g'(y) = 2y$ y, tras integrar, se obtiene que $g(y) = y^2 + C$, siendo C una constante de integración que podríamos determinar si se dan condiciones iniciales. La solución a la ecuación diferencial será por tanto

$$F(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2 + C,$$

(b) Procedemos de la misma manera para hallar $h(x)$, en este caso, derivamos la función obtenida con respecto a x

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4xy + h'(x)$$

que debe ser igual a $M(x, y)$,

$$4xy + h'(x) = 4xy + 3x^2.$$

Por tanto, $h'(x) = 3x^2$ y, tras integrar, se obtiene que $h(x) = x^3 + C$, siendo C una constante de integración. Como vemos, llegamos exactamente a la misma solución que en el caso (a):

$$F(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2 + C,$$

Cabe decir que este ejemplo es un caso particularmente sencillo de ecuación diferencial exacta y que la podríamos haber resuelto por simple comparación de las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$. Sin embargo, este tipo de ecuaciones pueden tener gran complejidad por lo que es aconsejable seguir todos los pasos a la hora de resolverlas.

2.5. Factores integrantes

En algunos casos, aunque las ecuaciones no sean exactas existe la posibilidad de transformarlas en ecuaciones exactas. Para ello, introducimos el llamado factor integrante. Dicho factor integrante es una cierta función $\mu(x,y)$ que cumple la siguiente condición:

$$\mu(x,y) \neq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

de forma que la ecuación

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{2.13}$$

es exacta.

Dado que $\mu(x,y) \neq 0$, esta función no introduce ninguna solución adicional a la ecuación diferencial original.

Ahora, teniendo en cuenta el factor integrante, planteamos la condición para que la ecuación diferencial sea exacta, es decir

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)M(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)N(x,y)\right), \tag{2.14}$$

que desarrollando las derivadas parciales nos lleva a

$$\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y}M(x,y) + \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\mu(x,y) = \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x}N(x,y) + \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\mu(x,y). \tag{2.15}$$

Para simplificar el cálculo del factor integrante se suelen hacer suposiciones adicionales sobre éste como, por ejemplo, que depende exclusivamente de una de las dos variables (x o y). De esta forma, se consigue eliminar uno de los términos de la ecuación anterior. Veamos un ejemplo.

Ejemplos:

1. $y + (2x - ye^y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

   Es fácil comprobar que la ecuación diferencial anterior no es exacta. Identificamos las funciones como $M(x,y) = y$ y $N(x,y) = 2x - ye^y$. Si escribimos la ecuación para el factor integrante tendremos que

   $$\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y}y + \mu(x,y) = \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x}(2x - ye^y) + 2\mu(x,y).$$

   Fijándonos en la ecuación anterior, vemos que simplifica mucho si consideramos que el factor integrante depende exclusivamente de y, es decir, que $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$. La ecuación en ese caso quedaría de la siguiente forma

   $$\frac{d\mu(y)}{dy}y + \mu(x,y) = 2\mu(y).$$

   es decir,

   $$\frac{d\mu(y)}{dy}y = \mu(y).$$

que es una ecuación de variables separadas, de forma que podemos obtener el factor integrante:

$$\int \frac{d\mu(y)}{\mu(y)} y = \frac{dy}{y}.$$

y, por tanto

$$\ln \mu(y) + C_1 = \ln y + C_2$$

con lo que cualquier factor integrante de la forma

$$\mu(y) = y + C$$

donde $C = \exp(C_2 - C_1)$ haría que la ecuación diferencial inicial fuera exacta. Por simplicidad tomamos $C = 0$ y, por tanto, $\mu(y) = y$. Si insertamos dicho factor integrante en la ecuación inicial obtenemos

$$y^2 + \left(2xy - y^2 e^y\right) \frac{dy}{dx} = 0$$

que es una ecuación exacta. Ahora, para resolver la ecuación, procedemos con el método de resolución de las ecuaciones diferenciales exactas, esto es, encontrar la función $F(x, y)$ que satisface que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= y^2, \\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= 2xy - y^2 e^y. \end{aligned}$$

Por un lado, tenemos que

$$F(x, y) = \int y^2 dx = xy^2 + g(y),$$

y, por otro, que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2xy + \frac{dg(y)}{dy} = 2xy - y^2 e^y,$$

donde idenficamos $g'(y) = -y^2 e^y$. Para obtener $g(y)$ simplemente integramos

$$g(y) = \int -y^2 e^y \; dy.$$

En esta integral debemos resolverla por partes. Llamamos $u = -y^2$ y $dv = e^y$. Por tanto, $du = -2ydy$ y $v = e^y$. Aplicamos la regla de integración por partes y obtenemos

$$g(y) = -y^2 e^y + 2\int y e^y dy.$$

Resolviendo nuevamente la integral restante por partes ($u = y, du = dy, v = dv = e^y$), obtenemos

$$g(y) = -y^2 e^y + 2\left(ye^y - e^y\right) + K.$$

siendo K una constante de integración. La solución a la ecuación diferencial empleando el método del factor integrante es, por tanto, la siguiente

$$xy^2 - y^2 e^y + 2\left(ye^y - e^y\right) + K = 0$$

2. $\left(1 + \dfrac{y}{x^2}\right) dx + \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2y}{x^2}\right) dy = 0$

Como siempre, procedemos identificando las funciones que componen la ecuación diferencial:

$$M(x, y) = 1 + \frac{y}{x^2}$$
$$N(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}$$

Aplicamos la Ec. (2.15) para obtener la condición de ecuación exacta, es decir

$$\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y}\left(1 + \frac{y}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x^2}\right)\mu(x, y) = \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x}\left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right) - \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4y}{x^3}\right)\mu(x, y).$$

Supongamos ahora que el factor integrante depende exclusivamente de x. En tal caso, se obtiene

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)\mu(x, y) = \frac{d\mu(x)}{dx}\left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right) - \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4y}{x^3}\right)\mu(x).$$

y, por tanto

$$\left(\frac{2}{x^2} + \frac{4y}{x^3}\right)\mu(x) = \frac{d\mu(x)}{dx}\left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right).$$

Simplificamos la ecuación anterior

$$\left(\frac{x + 2y}{x^3}\right) 2\mu(x) = \frac{d\mu(x)}{dx}\left(\frac{2y + x}{x^2}\right).$$

de forma que llegamos a

$$2\mu(x)\frac{1}{x} = \frac{d\mu(x)}{dx}.$$

Esta ecuación, al igual que en el caso anterior, es de variables separadas y, por tanto, podemos obtener su solución sin más que integrar. Tendríamos que

$$\int dx\frac{2}{x} = \int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)},$$

con lo que

$$\ln \mu(x) = 2\ln x + C,$$

y se llega a que $\mu(x) = x^2$, donde hemos anulado el término de la constante de integración.

Sustituimos el factor integrante en la ecuación inicial para obtener una ecuación diferencial exacta

$$\left(x^2 + y\right) dx + (x + 2y)\, dy = 0,$$

Por último, aplicamos el método de resolución de ecuaciones diferenciales exactas

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = x^2 + y.$$

Por tanto, $F(x,y) = x^3/3 + yx + g(y)$. Sustituyendo

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x + g'(y) = x + 2y.$$

Por lo tanto, $g(y) =$. De esta forma, la solución a la ecuación diferencial empleando el método del factor integrante quedaría como

$$x^3 + 3yx + 3y^2 + C = 0.$$

2.6. Ejemplos de ecuaciones diferenciales en Física

2.6.1. Descomposición radiactiva

Supongamos que tenemos un isótopo radiactivo. Este se descompone progresivamente y deseamos conocer como varía la cantidad de dicho isótopo con el tiempo. Si llamamos y a dicha cantidad, entonces debemos suponer que será función del tiempo, es decir, $y(t)$. Experimentalmente se comprueba que la velocidad de descomposición es directamente proporcional a la cantidad de dicha sustancia en cada instante. Por tanto, podremos expresar dicha velocidad de descomposición como la siguiente ecuación diferencial

$$y' = Ky,$$

donde K es una cierta constante que se puede determinar experimentalmente y que dependerá del tipo de isótopo. Podemos escribir la ecuación en forma de variables separadas

$$\frac{dy}{y} = Kdt,$$

que, tras integrar, queda como

$$\ln y = Kt + C_1,$$

siendo C_1 la constante de integración. Despejamos la cantidad de sustancia para obtener

$$y = Ce^{Kt}$$

donde $C = e^{C_1}$. De esta forma, obtenemos la ecuación de la variación temporal de sustancia con el tiempo. Obviamente, la constante K tendrá un valor negativo ya que, en caso contrario supondríamos que la sustancia aumenta con el tiempo.

Una vez obtenida esta ecuación, podemos, por ejemplo, calcular el tiempo de vida medio de dicha sustancia. El tiempo de vida medio se define como el tiempo necesario para que la cantidad de sustancia en un determinado instante se reduzca a la mitad. Supongamos que en el instante $t = 0$ la cantidad de sustancia es A_0, es decir

$$y(0) = A_0, \quad y(t) = A_0 e^{Kt}.$$

Calculamos el tiempo de vida medio. tm, suponiendo que para dicho instante la cantidad de sustancia se ha reducido a la mitad, es decir, $y(tm) = A_0/2$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$y(t_m) = \frac{A_0}{2} = A_0 e^{Kt_m}.$$

y, tras despejar, obtenemos la ecuación para el tiempo de vida medio

$$t_m = -\frac{\ln 2}{K}.$$

2.7. Resumen

Recopilemos los distintos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden y métodos de resolución vistos en una tabla.

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden	
Tipo	**Método de resolución**
Variables separables $f(y,y')=g(x)$	Integrable $\int f(y)dy=\int g(x)dx$
Homogéneas $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ con $M(tx,ty)=t^{\alpha}M(x,y)$ y $N(tx,ty)=t^{\alpha}N(x,y)$	Cambio de variable ($u=y/x$) que transforma a variables separables y, por tanto, hace que la ecuación sea directamente integrable.
Lineales no homogéneas $y'+P(x)y=Q(x)$	Cálculo de la solución homogénea $y=f(C,x)$ siendo C una constante de integración y aplicación del método de la variación de constantes suponiendo $C(x)$
Exactas (y transformables a exactas) $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ con $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.	Encontrar la función primitiva que cumple $dF(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ con $M(x,y)\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$; $N(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$. Aplicar el método del factor integrante si fuese necesario: $\mu(x,y)(M(x,y)dx+N(x,y)dy)=0$

2.8. Problemas

Ecuaciones diferenciales homogéneas

I. $2xyy' + x^2 + y^2 = 0;$ *Solución:* $y = \left(\frac{C - x^3}{3x}\right)^{1/2}$

II. $x^2\frac{dy}{dx} = xy - y^2;$ *Solución:* $y = \frac{x}{\ln(Cx)}$

III. $\frac{dy}{dx}(x+y) = x - y;$ *Solución:* $x^2 - 2xy - y^2 + C = 0.$

IV. $(x^2-y^2)dx+xydy = 0;$ *Solución:* $y = x\left(2\ln C - \ln|x|\right)^{1/2}.$

V. $2(x+2y)dx+(y-x)dy = 0;$ *Solución:* $(2x+y)^3-8(x+y)^2 = 0.$

Ecuaciones diferenciales exactas y factor integrante

Determina si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y, si es así, obtén la solución. En caso de que no lo sean, encuentra el factor integrante que las transforma en exactas y resuélvelas.

I. $2xy + 3 + (x^2-1)y' = 0;$ *Solución:* $y = \left(\frac{C - 3x}{x^2 - 1}\right)^{1/2}.$

II. $\cos y - (x\sin y - e^y)\, y' = 0;$ *Solución:* $x\cos y + e^y + C = 0.$

III. $(y^2 + 2xy)\,dx - x^2dy;$ *Solución:* $y = \frac{-x^2}{x+C}.$

IV. $xy'(y-1) - y = 0;$ *Solución:* $xye^{-y} + C = 0.$

V. $(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2+y^2)dy = 0;$ *Solución:* $ye^x\left(x^2 + \frac{y^3}{3}\right) + C = 0.$

Ecuaciones diferenciales lineales

I. $y' - y - e^{3x} = 0;$ *Solución:* $y = \frac{e^{3x}}{2} + Ce^x.$

II. $y' + 4y - x^2e^{-4x} = 0;$ *Solución:* $y = e^{-4x}\left(\frac{x^3}{3} + C\right).$

III. $y' - xy - 3x = 0;$ *Solución:* $y = -3 + Ce^{x^2/2}.$

IV. $y' = \cos x + 5y;$ *Solución:* $y = \frac{1}{26}\left(\sin x - 5\cos x\right) + Ce^{5x}.$

V. $y' = \tan x\cdot y + \cos x;$ *Solución:* $y = \frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\right).$

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales de orden superior

En el capítulo anterior hemos hecho un repaso de algunos de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden. En este capítulo introduciremos las ecuaciones diferenciales de orden superior y los métodos generales para su resolución. Como veremos, en este capítulo haremos una generalización de lo visto en el capítulo anterior por lo que los tipos de ecuaciones y la forma de resolverlas serán similares a las vistas anteriormente.

En Física este tipo de ecuaciones diferenciales aparecerán de manera recurrente, de forma que tendremos una ecuación que relaciona al menos dos derivadas de distinto orden de la función incógnita.

3.1. Definición

Una ecuación diferencial de orden superior puede escribirse de manera general de la siguiente forma

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{3.1}$$

donde F es una función conocida y definida en una cierta región D del espacio coordenado de variables $x, y, y', y'', ..., y^{(n)}$. Encontrar la solución de la ecuación implica conocer la función $y(x) = f(x)$.

Si bien la Ec.(3.1) es la forma general, cualquier ecuación diferencial que presente al menos una derivada de orden distinto a uno será de orden superior. En el caso de que solo exista dependencia con una derivada de orden superior, de orden n, la solución es trivial ya que basta con integrar n veces para encontrar la solución. Recordemos que escribiremos en general la derivada de orden n de la variable y como $y^{(n)}$ de manera que

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Si solo existe dependencia con una derivada de orden superior, es decir, si

$$y^{(n)} = f(x), \tag{3.2}$$

la solución se obtiene integrando n veces de manera que se obtiene la solución del tipo

$$y = g(x, C_{n-1}) + C_n, \tag{3.3}$$

donde $g(x)$ será resultado de integrar n veces la función inicial y C_i con $i = (\overline{1, n})$ son las sucesivas constantes de integración que se podrán determinar si se tienen las condiciones iniciales necesarias.

3.2. Clasificación de las ecuaciones no lineales integrables

A parte del caso trivial visto en el apartado anterior, existen una serie de ecuaciones diferenciales de orden superior cuya forma permite resolverlas por integración directa. Veamos los distintos casos posibles según su forma:

- Ecuación del tipo $F(x, y^{(n)}) = 0$ con dependencia no lineal

  En este caso, tenemos que la ecuación diferencial depende tanto de la variable x como de la derivada enésima de la variable y con respecto a x. Además, dicha dependencia será no lineal [1], si no estaríamos en el caso en el que la solución se obtiene por integración directa.

  Este tipo de ecuación será integrable siempre y cuando, tras aplicar un cambio de variable hacemos el cambio $y^{(n)} = t$. De esta forma, $x = \psi(t)$, es decir, la solución la obtendremos en forma paramétrica. Podemos obtener la relación entre los diferenciales de cada variable

  $$d(y^{(n-1)}) = tdx = t\psi'(t)dt.$$

  donde hemos aplicado la relación entre las derivadas tras parametrizar:

  $$\frac{dx}{dt} = \psi(t) \to dx = \psi(t)dt$$

  Podemos obtener de esta forma

  $$y^{(n-1)} = \int t\psi'(t)dt + C_1.$$

  Aplicando este método, iríamos reduciendo el orden de la derivada de y, calculando sucesivamente $y^{(n-2)}, y^{(n-3)}, ..., y$. En general, la solución de la ecuación diferencial se podrá expresar de forma paramétrica como

  $$\begin{aligned} x &= \psi(t) \\ y &= g(t) + \omega(t, C_1, C_2, ..., C_n) \end{aligned} \tag{3.4}$$

[1] Por poner un ejemplo, podríamos tener una dependencia del tipo $(y^{(n)})^2 + y^{(n)}x + 3 = 0$

- Ecuación del tipo $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

  Si haciendo el cambio $F(u, v) = 0$, resulta que dicha ecuación diferencial tiene soluciones paramétricas del tipo $u = \alpha(t)$ y $v = \beta(t)$, entonces la ecuación de partida es integrable ya que

$$y^{(n-1)} = \alpha(t), \quad y^{(n)} = \beta(t).$$

  Tendríamos por tanto que

$$dy^{n-1} = \beta(t)dx$$

  o, lo que es lo mismo

$$\alpha'(t)dt = \beta(t)dx.$$

  De donde podemos obtener la relación entre la variable x y las ecuaciones paramétricas sin más que integrar

$$\int dx = \int \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)}dt$$

  es decir,

$$x + C_1 = \int \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)}dt \tag{3.5}$$

  Ahora podríamos obtener la solución y a partir de la ecuación $y^{(n-1)} = \alpha(t)$ de la misma forma que hicimos en el caso anterior.

- Ecuación del tipo $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

  En este caso, vemos que las derivadas están separadas por dos órdenes. Al igual que en el caso anterior, hacemos el siguiente cambio para obtener ecuaciones paramétricas $y^{(n-2)} = \alpha(t)$ y $y^{(n)} = \beta(t)$. Ahora bien, sabemos que ambas derivadas serán funciones de la variable x y, como hemos dicho, una será la derivada segunda de la otra. Por tanto, podemos hacer el siguiente cambio adicional

$$z(x) = \alpha(t), \quad z''(x) = \beta(t). \tag{3.6}$$

  Hallando la derivada segunda de la función z se obtiene

$$z'(x) = \frac{d}{dx}\alpha,$$

  donde tenemos que tener en cuenta la parametrización, es decir

$$z'(x) = \frac{d}{dt}\frac{dt}{dx}\alpha(t).$$

Si llamamos $x' = \frac{dx}{dt}$, nos quedaría

$$z'(x) = \frac{\alpha'(t)}{x'(t)}.$$

Por tanto, la derivada segunda será

$$z''(x) = \frac{d}{dt}\frac{dt}{dx}z'(x)$$

que quedaría como

$$z''(x) = \frac{1}{x'}\left(\frac{\alpha''}{x'} - \frac{x''\alpha'}{x'^2}\right),$$

o, agrupando términos,

$$z''(x) = \frac{x'\alpha'' - x''\alpha'}{x'^3}$$

Ahora, como $z''(x) = \beta(t)$, simplemente igualamos términos para obtener

$$x'\alpha'' - x''\alpha' = x'^3\beta$$

Si ahora hacemos un nuevo cambio de variable, de manera que $g = x'$, obtenemos la ecuación diferencial

$$g\alpha'' - g'\alpha' = g^3\beta$$

que es una ecuación diferencial de primer orden reducible a ecuación lineal que vimos en el capítulo anterior (se conoce como ecuación de Bernoulli). De esta forma se obtiene la solución del tipo

$$x = \int \psi(C,t)dt + C_2 \tag{3.7}$$

de forma que obtenemos la dependencia de la variable x con respecto a t. Por último, para hallar $y = y(t)$ se integra $n-2$ veces la ecuación $y^{(n-2)} = \alpha(t)$ empleando los métodos explicados anteriormente.

3.2.1. Ejemplos de ecuaciones diferenciales no lineales integrables

Aunque lo visto hasta ahora en este capítulo pueda parecer demasiado abstracto, veamos que los métodos de resolución son realmente sencillos una vez empleamos un ejemplo práctico.

1. $y''' = x + \cos x$

   Esta ecuación diferencial es directamente integrable ya que las variables están separadas. Nótese que la podríamos escribir como

$$F(x, y''') = \frac{d^3y}{dx^3} - (x + \cos x) = 0.$$

   Este es el caso más sencillo ya que, si la ecuación es directamente integrable, basta con integrar 3 veces consecutivas para obtener la solución. Hagamos dicho proceso

$$y'' = \int (x + \cos x)dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C_1.$$

   Ahora integramos el resultado obtenido para calcular la derivada de primer orden

$$y' = \int \left(\frac{x^2}{2} + \sin x + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} - \cos x + C_1 x + C_2.$$

   Y, mediante una última integral, obtenemos la solución general

$$y = \int \left(\frac{x^3}{6} - \cos x + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{x^4}{24} - \sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

2. $y^{(4)} = e^x - 1$, para $x_0 = 0, y_0 = 2, y_0' = 1, y_0'' = 1$

   En este caso, al igual que en el anterior, se puede obtener la solución general sin más que integrar tantas veces como el orden de la ecuación diferencial. Por tanto

$$\begin{aligned} y''' &= \int (e^x - 1)dx = e^x - x + C_1, \\ y'' &= e^x - \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \\ y' &= e^x - \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ y &= e^x - \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4. \end{aligned}$$

   Esta es la solución general. Si ahora empleamos las condiciones iniciales, podemos calcular las constantes una por una. Por ejemplo, en y''' sustituimos $y'''(x_0) = 1$ y $x_0 = 0$ para obtener

$$\begin{aligned} y'''(x_0) &= e_0^x - x_0 + C_1, \\ 1 &= 1 + C_1 \\ C_1 &= 0. \end{aligned}$$

Empleando el mismo procedimiento, obtenemos que $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Ahora bien, en la solución general tenemos que $y(x_0) = 2$, por lo que se obtiene $C_4 = 1$. Por tanto, la solución particular de la ecuación diferencial es

$$y = e^x - \frac{x^4}{24} + 1.$$

3. $y''^3 - 2y'' - x = 0$

   Este caso se corresponde con el tipo $F(x, y^{(n)}) = 0$, es decir, tenemos una cierta función que depende de x y, en este caso, la derivada de la variable y con respecto a x de orden $n = 2$. Es fácil ver que no se puede obtener la solución por integración directa y, por tanto, se debe buscar otro método.

   Parece claro que la solución para x es directa, es decir, tendríamos que

$$x = y''^3 - 2y''.$$

   Ahora, podemos entender de manera más clara el método en el cual parametrizamos las ecuaciones. Tenemos directamente la solución en x, pero necesitamos conocer la solución en y. Si cambiamos la derivada segunda por el parámetro t, es decir, $y'' = t$, entonces

$$\frac{d(y')}{dx} = t$$

   de manera que obtenemos la relación entre los diferenciales $d(y') = tdx$. Por otro lado, tenemos que

$$x = t^3 - 2t,$$

   de forma que

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 2,$$

   o, lo que es lo mismo,

$$dx = \left(3t^2 - 2\right) dt.$$

   Ahora, si sustituimos, obtenemos la relación directa de y' con t, es decir

$$d(y') = t\left(3t^2 - 2\right) dt.$$

   Por consiguiente, basta con integrar a ambos lados de la ecuación anterior para obtener $y'(t)$

$$y' = \int \left(3t^3 - 2t\right) dt = \frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1.$$

Para obtener la solución general en forma paramétrica $(x(t), y(t))$ simplemente volvemos a aplicar el mismo procedimiento. Tenemos por un lado que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1, \rightarrow dy = \left(\frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1\right) dx$$

Sustituyendo nuevamente $dx = (3t^2 - t)dt$ e integrando, nos queda

$$y = \int \left(\frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1\right) \left(3t^2 - 2\right) dt$$

que desarrollando y agrupando términos resulta en

$$y = \int \left(\frac{9}{4}t^6 - \frac{9}{2}t^4 + (3C_1 - 2)t^2 - 2C_1\right) dt,$$

Resolvemos la integral

$$y = \frac{9}{28}t^7 - \frac{9}{10}t^5 + (C_1 - \frac{2}{3})t^3 - 2C_1 t + C_2$$

Y, por tanto, la solución general en forma paramétrica se puede escribir como

$$\begin{aligned} x &= t^3 - 2t, \\ y &= \frac{9}{28}t^7 - \frac{9}{10}t^5 + (C_1 - \frac{2}{3})t^3 - 2C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

4. $y'' + \ln y'' - x = 0$, para $x_0 = 1, y(x_0) = 1, y'(x_0) = 2$.

   Nos encontramos en el mismo caso que el anterior, es decir, tenemos una dependencia no lineal entre la derivada de la variable y con respecto a x. Realizamos el mismo procedimiento para resolver la ecuación, es decir, parametrizamos en la forma $x = t + \ln t$, donde $t = y''$. Tenemos nuevamente que $d(y') = tdx$. Calculamos el valor del diferencial de la variable x,

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{t}, \quad \rightarrow dx = \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt$$

   De esta forma, obtenemos que

$$y' = \int (t+1)dt = \frac{t^2}{2} + t + C_1$$

   Repetimos el procedimiento para obtener $y(t)$, esto es,

$$y = \int \left(\frac{t^2}{2} + t + C_1\right) dx = \int \left(\frac{t^2}{2} + t + C_1\right) \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt,$$

que, desarrollando el producto y agrupando términos queda como

$$y = \int \left(\frac{t^2}{2} + \frac{3t}{2} + 1 + C_1 + C_1 \frac{1}{t} \right) dt,$$

que, calculando la integral, da lugar a

$$y = \frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{4} + (1 + C_1)t + C_1 \ln t + C_2.$$

que sería la solución general en forma paramétrica junto con $x = t + \ln t$.

Por último, buscamos la solución particular para las condiciones iniciales. Si $x_0 = 1$, podemos ver que $t_0 = 1$. Aplicamos la condición $y_0' = 2$

$$\begin{aligned} \frac{t_0^2}{2} + t_0 + C_1 &= 2, \\ \frac{3}{2} + C_1 &= 2, \\ C_1 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Hacemos lo propio para $y_0 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{4} + (1 + C_1)t + C_1 \ln t + C_2 &= 1, \\ \frac{1}{6} + \frac{3}{4} + (1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \ln 1 + C_2 &= 1, \\ C_2 &= -\frac{17}{12} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución particular es

$$\begin{aligned} x &= t + \ln t, \\ y &= \frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{4} + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \ln t - \frac{17}{12}. \end{aligned}$$

5. $y''' - e^{-y''} = 0$

   Esta ecuación diferencial es un ejemplo del segundo caso de ecuaciones integrables no lineales, es decir, $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, con $n = 3$. Mediante la parametrización, podemos relacionar ambas derivadas e integrar de manera similar a los ejemplos 3 y 4. En este caso, hacemos el siguiente cambio

   $$y'' = t, \quad y''' = e^{-t}.$$

   De este modo, podemos relacionar los diferenciales

$$\frac{d(y'')}{dx} = e^{-t}, \quad \to d(y'') = e^{-t}dx.$$

Ahora bien, tal como hemos parametrizado, $d(y'') = dt$ y, por tanto, se obtiene que

$$dx = e^t dt.$$

De esta forma encontramos la ecuación paramétrica para x sin más que integrar la expresión anterior

$$x = e^t + C_1.$$

Por otro lado, a partir de la ecuación $y'' = t$ obtenemos que

$$d(y') = tdx = te^t dt.$$

Por consiguiente, podemos obtener la ecuación de la derivada de primer orden integrando la expresión anterior, esto es [2]

$$y' = \int te^t dt = te^t - \int e^t dt = e^t(t-1) + C_2.$$

A continuación, aplicamos el mismo procedimiento con el fin de encontrar la ecuación paramétrica de y. Tenemos que

$$d(y) = \left(e^t(t-1) + C_2.\right) dx = \left(e^t(t-1) + C_2\right) e^t dt.$$

Integramos para obtener la solución general

$$y = \int \left(e^{2t}(t-1) + C_2 e^t\right) dt,$$

y, por tanto, después de integrar podemos expresar la solución general como

$$\begin{aligned} x &= e^t + C_1, \\ y &= \frac{e^{2t}}{2}\left(t - \frac{3}{2}\right) + C_2 e^t + C_3. \end{aligned}$$

6. $y''' - y'' = 0$

   Si bien tenemos una ecuación diferencial del mismo tipo que en el caso anterior, dado que no existe dependencia explícita en x, la manera de resolverla se simplifica. Si suponemos que la derivada de segundo orden es una cierta función de la variable x, es decir, $y'' = z(x)$, entonces obtenemos la siguiente relación

[2] Nótese que agrupamos todas las constantes de integración en una constante final. Para ahorrar notación no incluimos dichas constantes en todos los pasos.

$$z' = z.$$

que podemos resolver como una ecuación de variables separadas. Hagámoslo

$$\frac{dz}{dx} = z, \quad \rightarrow \frac{dz}{z} = dx$$

que, tras integrar resulta

$$\ln z = x + C_x$$

y, por tanto,

$$z = C_1 e^x.$$

De esta forma obtenemos una primera relación explícita de las variables x e y, ya que $z = y'' = C_1 e^x$. Si ahora integramos directamente dos veces, obtendremos la solución $y(x)$, esto es

$$y = C_1 e^x + C_2 x + C_3.$$

7. $y'''^2 + y''^2 - 1 = 0$ Este caso es similar al anterior, no existe relación explícita entre las derivadas y la variable x y, por tanto, lo único que debemos hacer es encontrar dicha relación. Procedemos de igual modo, suponemos que la derivada de menor orden es una cierta función $z(x)$, de modo que la ecuación queda en la forma

$$y = z'^2 + z - 1 = 0.$$

Nuevamente, tenemos una ecuación diferencial de variables separadas. Aplicamos el método general para su resolución:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx}^2 + z - 1 &= 0, \\ \frac{dz}{\pm\sqrt{1-z}} &= dx. \end{aligned}$$

Cabe recordar que, siempre que tomemos una raíz cuadrada, hay que preservar los posibles signos para así obtener la solución general. Realizando la integral se obtiene

$$\pm \arcsin z = x + C_1$$

y, por tanto, la función $z(x)$ y, por tanto, la derivada segunda de y viene dada por

$$z = y'' = \pm \sin(x + C_1).$$

Integrando dos veces obtenemos

$$y = \pm \sin(x + C_1) + C_2 x + C_3,$$

o, si queremos deshacernos del signo, podemos escribirla en la forma

$$(y - C_2 x - C_3)^2 = \sin^2(x + C_1).$$

8. $y'' - e^y = 0$

   Esta ecuación presenta la forma del último de los casos vistos, en el que las derivadas están separadas dos órdenes, $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$. Por tanto, hay que encontrar una parametrización $y'' = \beta(t), y = \alpha(t)$ que simplifique la ecuación. Además, podemos suponer que y dependerá de x y, por tanto, llamamos $z(x) = \alpha(t)$ [3]. Tendremos que

$$z''(x) = \beta(t)$$

   Aplicamos el método general en el que derivamos dos veces la función $z(x)$

$$\begin{aligned} z'(x) &= \frac{\alpha(t)}{dx} = \frac{\alpha(t)}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\alpha'}{x'} \\ z''(x) &= \frac{\alpha'' x' - x'' \alpha'}{x'^3} \end{aligned}$$

   Para simplificar, podemos elegir $\alpha(t) = \ln t$, $\beta(t) = t$. Dado que ya tenemos la solución paramétrica de y, falta calcular la de la variable x. Empleamos la ecuación explícita de $z''(x)$ para llevar a cabo esta tarea, que nos lleva a

$$z''(x) = \beta(t) = t = \frac{\frac{-x'}{t^2} - \frac{x''}{t}}{x'^3}$$

   o, lo que es lo mismo,

$$\frac{x'}{t^2} + \frac{x''}{t} + t x'^3 = 0$$

   o bien

$$x' + t x'' + t^3 x'^3 = 0$$

   que es, como cabía esperar, una ecuación diferencial de Bernoulli [4].

[3] Empleamos la función z ya que, en general, podría referirse a derivadas de orden superior del tipo $y^{(n-2)}$

[4] No nos detendremos en la resolución de este tipo de ecuación ya que resulta bastante tedioso.

Aunque podríamos pensar que ésta es la única forma de resolver este tipo de ecuaciones diferenciales y que, por lo tanto, debemos resolver necesariamente una ecuación de Bernoulli, en algunos casos se puede simplificar el problema de manera notable (eso sí, se requiere de una ïdea feliz"). El caso anterior es uno de ellos. Podemos ver que si multiplicamos a ambos lados de la ecuación diferencial inicial por la derivada primera con respecto a y, la ecuación diferencial se simplifica notoriamente. Hagámoslo:

$$y''y' = y'e^y$$

La idea feliz se encuentra en la aparición, por un lado, de la derivada de la propia función de partida ($(e^y)' = y'e^y$). Por otro, si derivamos el cuadrado de y', obtenemos la siguiente expresión

$$(y'^2)' = 2y''y'.$$

Por tanto, la ecuación inicial se simplifica a

$$\left(\frac{y'^2}{2}\right)' = (e^y)'$$

Integrando la expresión anterior se llega a la expresión

$$y'^2 = 2e^y + C_1$$

Esta ecuación es de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2e^y + C_1}$$

que lleva a

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{2e^y + C_1}} = dx.$$

Si resolvemos lleva a [5]

$$\begin{aligned} x &= \pm\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{C_1}+\sqrt{2t+C_1}}{\sqrt{C_1}-\sqrt{2t+C_1}}\right| + C_2, \quad \text{si } C_1 > 0 \\ x &= \pm\frac{2}{\sqrt{C_1}}\arctan\sqrt{-1-\frac{2t}{C_1}} + C_2, \text{si} \quad C_1 < 0 \\ x &= -\sqrt{\frac{2}{t}} + C_2, \text{si } C_1 = 0. \end{aligned}$$

[5] Aunque la solución se puede obtener analíticamente, se recomienda el uso de un software de integración para este caso.

3.3. Reducción del orden de la ecuación

En ocasiones, la ecuación diferencial de orden superior tiene una forma tal que es posible reducir su orden mediante un cambio de variable. En alguno de los ejemplos anteriores ya hemos empleado uno de los métodos. Veamos los distintos casos generales.

1. **Ecuación de la forma $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, .., y^{(n)}) = 0$, con $k \neq n$**

   Nótese que, en este caso, no hay dependencia explícita con la variable y, si no que la dependencia es con sus derivadas. Si la ecuación presenta esta forma, entonces es posible reducir el orden de la ecuación mediante el cambio de variable $y^{(k)} = z(x)$, cuyo orden será k veces menor al de la ecuación inicial:

   $$F(x, z, z', z'', ..., z^{(n-k)}) = 0 \tag{3.8}$$

   Una vez se tenga la función $z(x)$ basta con integrar k veces para obtener $y(x)$.

2. **Ecuación de la forma $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$**

   En este caso, se puede sustituir y' por una cierta función que dependa implícitamente de y, es decir, $y' = p(y)$. Ahora p será la nueva incógnita y se habrá reducido el orden en una unidad. Podemos ver que

   $$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} \\ y''' &= \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\frac{dy}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \\ &= p\left(p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p\frac{d^2p}{dp}\right) \end{aligned}$$

3. **Ecuación diferencial homogénea**

   Cuando se trata de una ecuación de orden superior, la definición de ecuación homogénea no es exactamente igual a la del capítulo anterior, En este caso, para que la ecuación diferencial sea homogénea debe cumplir la identidad

   $$F(x, ty, ty', ty''..., ty^{(n)}) = t^{\alpha}F(x, y, y', y''..., y^{(n)}). \tag{3.9}$$

   En este caso, es posible reducir el orden de la ecuación diferencial mediante el cambio $y' = yz(x)$, donde $z(x)$ es la nueva incógnita. Esto es así ya que, si realizamos las sucesivas derivadas tenemos que

   $$y'' = (yz(x))' = y'z + yz' = y(z^2 + z'),$$
   $$y''' = y(z^2 + z') = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'').$$

   y así sucesivamente. De esta forma, la derivada enésima se puede expresar como

$$y^{(n)} = y\psi(z, z', ..., z^{(n-1)}) \tag{3.10}$$

donde ψ es una función conocida. Aplicando la homogeneidad de la función tenemos que

$$F(, x, y, yz, y(z^2+z'), ..., y\psi(z, z', ..., z^{(n-1)}) = y^\alpha F(x, 1, z, z^2+z', ..., , \psi(z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0.$$

4. **Ecuación diferencial homogénea generalizada**

   Una ecuación diferencial es homogénea generalizada si cumple la siguiente identidad

$$F(tx, t^m y, t^{m-1}y', t^{m-2}y''..., t^{m-n}y^{(n)}) = t^\alpha F(x, y, y', y''..., y^{(n)}) = t^\alpha F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}).$$

   Aunque incluyamos este caso en *reducción del orden*, lo que querremos será reducir la complejidad de la ecuación eliminando la dependencia explícita con respecto al parámetro t (y cualquiera de sus potencias). Para ello, empleamos el siguiente cambio de variable

$$x = e^t, \quad y =^{mt} z(t),$$

   de donde obtenemos que $dx = e^t dt$. Calculemos las derivadas de la variable y

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d(e^{mt}z)}{dx} = \frac{d}{dt}\frac{dt}{dx}(e^{mt}z) = e^{-t}\left(e^{mt}z' + me^{mt}z)\right) = e^{t(m-1)}\left(z' + mz\right) \\ y'' &= e^{-t}\frac{d}{dt}e^{t(m-1)}\left(z' + mz\right) = e^{(m-2)t}\left(z'' + (2m-1)z' + (m-1)z\right). \end{aligned}$$

   Se puede demostrar que la derivada enésima se puede expresar de la siguiente manera

$$y^{(n)} = e^{(m-n)t}\psi(z, z', ..., z^{(n)})$$

   donde ψ es una cierta función conocida. Ahora bien, si aplicamos la condición de homogeneidad de la función F tras aplicar los cambios de variable, tenemos que

$$\begin{aligned} &F(e^t, e^{mt}z, e^{(m-1)t}(mz + z'), ..., e^{(m-n)t}\psi(z, z', ..., z^{(n)})) = \\ &\qquad = e^{\alpha t}F(1, z, (mz + z'), ..., \psi(z, z', ..., z^{(n)}) = 0 \end{aligned}$$

   Como vemos, en la ecuación resultante desaparece cualquier dependencia con el parámetro t dentro de la función F.

5. **Ecuaciones del tipo** $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = (\phi(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}))' = 0$

   Éste es, al menos en el concepto, el caso más sencillo de reducción de orden. Si la ecuación diferencial resulta ser la derivada de una ecuación que es un orden (o, en general, m órdenes menor), se podrá reducir su orden sin más que realizar la integral con respecto a la variable x. Tras integrar, se tendrá la nueva ecuación diferencial

   $$\phi((x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) = C_1$$

   siendo C_1 la constante de integración.

3.3.1. Ejemplos de reducción del orden de la ecuación diferencial

Resolvamos algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales cuyo orden puede ser reducido.

1. $x^2 y'' = y'^2$

   Como vemos, en este caso la variable $y(x)$ no aparece explícitamente y, por tanto, estamos ante el primer caso. Hagamos el cambio sugerido para este tipo de ecuaciones, $y' = z(x)$. La ecuación diferencial queda como

   $$x^2 z' = z^2$$

   De esta forma, se obtiene una ecuación diferencial de primer orden que, además, es de variables separadas:

   $$x^2 \frac{dz}{dx} = z^2, \quad \rightarrow \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}$$

   que podemos resolver integrando a ambos lados,

   $$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2},$$

   y, por tanto,

   $$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + C_1.$$

   Despejamos en la ecuación anterior para obtener la función $z(x)$, o, lo que es lo mismo, $y'(x)$

   $$z(x) = y' = \frac{x}{1 - C_1 x}.$$

   Para obtener la solución, simplemente integramos la solución de la ecuación diferencial de orden reducido:

   $$y = \int \frac{x}{1 - C_1 x} dx.$$

Resolvamos la integral. Para ello, buscamos un cambio de variable que invierta el numerado y el denominador, de forma que la integral resultante sea más sencilla. Por ejemplo, aplicamos el siguiente cambio

$$u = C_1x - 1, \quad \rightarrow \frac{du}{dx} = C_1.$$

y, por tanto, $dx = \frac{du}{C_1}$ Por otro lado, vemos que $x = \frac{u+1}{C_1}$, por lo que $xdx = \frac{u+1}{C_1^2}du$. En efecto, empleando este cambio hemos conseguido simplificar notablemente la integral

$$y(u) = -\frac{1}{C_1^2}\int \frac{u+1}{u}du = -\frac{1}{C_1^2}\int \left(1 + \frac{1}{u}\right) du = -\frac{1}{C_1^2}\left(u + \ln(u)\right) + C_2$$

Deshagamos el cambio de variable para obtener la solución general

$$y(x) = -\frac{1}{C_1^2}\left(C_1x - 1 + \ln(C_1x - 1)\right) + C_2$$

para $C_1 \neq 0, C_1 \neq \infty$. La solución para estos valores particulares se obtienen haciendo el límite de la expresión inicial, lo que nos lleva a

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C_2, & \text{si} \quad C_1 = 0; \\ C_2 & \text{si} \quad C_1 = \infty. \end{cases}$$

2. $y''' = y''^2$

   Esta ecuación diferencial es similar al caso anterior pero, en esta ocasión, la derivada de menor orden es $k = 2$. Por lo tanto, una vez tengamos la solución para nuestro cambio de variable, deberemos integrar dos veces para encontrar la solución general $y(x)$. Empecemos por el cambio $z(x) = y''$. Con esto, la ecuación se simplifica a una ecuación de primer grado

$$z' - z^2 = 0.$$

   Nuevamente es posible separar las variables de manera que queda la siguiente integral

$$\frac{dz}{z^2} = \int dx,$$

   que resulta en

$$z(x) = y'' = \frac{1}{C_1 + x}.$$

   Calculamos mediante dos integrales la solución general

$$y' = -\ln|C_1 - x| + C_2,$$
$$y = (C_1 - x)\ln|C_1 - x| + C_2x + C_3.$$

3. $y'^2 + 2yy'' = 0$

   En esta ecuación no aparece de manera explicita la variable x, por tanto, estaremos ante una ecuación diferencial reducible del segundo tipo. Por tanto, para poder resolverla ecuación, aplicamos el cambio de variable sugerido $y' = p(y)$, de forma que $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Sustituimos estos cambios en la ecuación diferencial

$$p^2 + 2yp\frac{dp}{dy} = 0,$$

   que podemos simplificar como

$$p(p + 2y\frac{dp}{dy}) = 0,$$

   de manera que una de las soluciones es $p = 0$. Tras deshacer el cambio, se obtiene una primera solución $y = C$, siendo C una cierta constante. La otra solución se obtiene de resolver la ecuación diferencial de primer orden:

$$p + 2y\frac{dp}{dy} = 0.$$

   Podemos ver que es una ecuación diferencial de variables separadas que puede resolverse integrando a ambos lados

$$\int \frac{2}{p}dp = -\int \frac{dy}{y},$$

   de forma que

$$\ln p^2 = -\ln y + C,$$

   que da lugar a

$$p^2 = \frac{C_1}{y}$$

   A continuación, deshacemos el cambio de variable

$$y' = \pm\sqrt{\frac{C_1}{y}},$$

   de manera que podemos obtener la solución integrando, ya que la ecuación resultante vuelve a ser de variables separadas

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{C_1}{y}},$$

   de donde

$$\int \pm\sqrt{\frac{y}{C_1}}dy = \int dx,$$

que resulta en

$$\pm\frac{2y^{3/2}}{3\sqrt{C_1}}dy = x + C_2.$$

Para obtener la solución explícita despejamos la variable y

$$y = \left(\frac{3(x+C_2)\sqrt{C_1}}{2}\right)^{2/3}$$

o bien, definiendo una nueva constante $\hat{C}$ queda como

$$y = (x + C_2)^{2/3}\,\hat{C}.$$

La solución general incluye también la solución anterior $y = C$.

4. $yy'' = y'^2 - y'^3$

   Al igual que en el caso anterior, no existe dependencia explícita con la variable x. Podemos, por tanto, hacer de nuevo el cambio de variable $y' = p(y)$, de forma que $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Se obtiene la siguiente ecuación

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2 - p^3.$$

   Nuevamente, tenemos la solución para $p = 0$ que sería $y = C$. Por otro lado, debemos resolver la ecuación de primer orden

$$y\frac{dp}{dy} = p - p^2.$$

   que, nuevamente, es de variables separadas. Integramos la ecuación

$$\int \frac{dp}{p - p^2} = \int \frac{dy}{y}.$$

   Para resolver la integral de la parte izquierda empleamos el siguiente cambio. Si factorizamos el denominador de forma que $(1 - 1/p)p^2$, podemos hacer el cambio $u = 1 - 1/p$. De esta manera $du = 1/p^2 dx$ o, lo que es lo mismo, $udu = dx$. La integral se simplifica a

$$\int \frac{1}{u}du = \ln u + C = -\ln(1 - \frac{1}{p}) + C.$$

   Teniendo esto en cuenta, nos queda que

$$\ln(1 - \frac{1}{p}) = -\ln y + C,$$

y, por tanto,

$$(1-\frac{1}{p})=\frac{1}{y}+C',$$

Despejamos para obtener

$$p=y'=\frac{y}{y-1+C'}=\frac{y}{y+C_1}.$$

Por último, integramos para obtener la solución general (donde x aparece de forma explícita

$$\int dx=\int\frac{y+C1}{y}dy.$$

Esta ecuación se puede resolver por integración directa de donde se obtiene

$$x=C_1'\ln|y|+y+C_2.$$

5. $xyy''-xy'^2-yy'+\dfrac{xy'^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Comprobamos que la función es homogénea, es decir, se cumple que

$$F(tx,t^my,t^{m-1}y',t^{m-2}y''...,t^{m-n}y^{(n)})=t^\alpha F(x,y,y',y''...,y^{(n)})=t^\alpha F(x,y,y',y'',...,y^{(n)}).$$

ya que

$$x(ty)(ty'')-x(ty')^2-(ty)(ty')+\frac{x(ty')^2}{\sqrt{1-x^2}}=t^2(xyy''-xy'^2-yy'+\frac{xy'^2}{\sqrt{1-x^2}})$$

con lo que, efectivamente, la ecuación diferencial es homogénea. Aplicamos el cambio de variable $y'=yz(x)$, de forma que se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$xz'-z+\frac{xz^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Podemos reescribir la ecuación en la siguiente forma

$$\left(\frac{x}{z}\right)'=\frac{x}{1-x^2}$$

que, tras integrar, queda como

$$\frac{x}{z}=-\sqrt{1-x^2}+C_1,$$

y, por tanto,

$$z = \frac{x}{C_1 - \sqrt{1-x^2}}.$$

Deshacemos el cambio de variable

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{C_1 - \sqrt{1-x^2}},$$

y, tras volver a integrar, se llega a

$$\ln|y| = \sqrt{1-x^2} + C_1 \ln|C_1 - \sqrt{1-x^2} + C_2.$$

6. $y(xy'' + y') = xy'^2(1-x)$

   Esta ecuación diferencial nuevamente es homogénea. Hacemos por tanto el cambio de variable $y' = yz(x)$, con lo que se obtiene

$$(xz)' + (xz)^2 = 0.$$

   que podemos reescribir como

$$\frac{(xz)'}{(xz)^2} = -1.$$

   Realizando la integral a ambos lados queda

$$\frac{1}{xz} = x + C_1.$$

   Despejando la función $z(x)$

$$z = \frac{1}{x(x+C_1)},$$

   y deshaciendo le cambio de variable

$$\left(\frac{y'}{y}\right) = \frac{1}{x(x+C_1)}.$$

   Por último, integramos para obtener la solución general

$$y = C_2 |\frac{x}{x+C_1}|^{1/C_1}$$

3.4. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

La forma general de una ecuación diferencial lineal de orden superior es

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = \psi(x) \tag{3.11}$$

donde los coeficientes $a_i(x)$ son valores conocidos. Si dichos coeficientes dependen de la variable x, llamaremos a la ecuación diferencial como lineal con coeficientes variables. Si no dependen de dicha variable, entonces la ecuación diferencial será lineal con coeficientes constantes. Al igual que ocurría con las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, si la función $\psi(x) = 0$, entonces diremos que la ecuación es homogénea.

Antes de introducir los métodos de resolución de los distintos casos haremos un inciso sobre la independencia lineal de las posibles soluciones. Como veremos, una ecuación diferencial de n-ésimo orden dará lugar a un conjunto de n soluciones particulares. Si dichas soluciones son linealmente independientes, la solución general será la suma de las soluciones particulares. [6]

3.5. Independencia lineal de las soluciones

Consideremos que tenemos un conjunto de soluciones particulares de una ecuación diferencial de n-ésimo orden (cuyos coeficientes pueden ser constantes o variables), y_i con $i = \overline{1, n}$. Considerando α_i un conjunto de constantes arbitrarias, se dice que dichas soluciones (o en general cualquier conjunto de funciones) son linealmente independientes si se cumple que

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0 \tag{3.12}$$

si y solo si $\alpha_i = 0$. Si la Ec.(3.12 se cumple para cualquier valor de las constantes distinto de cero, entonces el conjunto de funciones (o soluciones particulares $[y_n]$ es linealmente dependiente. Esta forma de determinar la dependencia lineal o no de un conjunto de funciones parte de la propia definición de función linealmente independiente. Existen otras formas especialmente útiles si el conjunto de funciones tiene un valor de n relativamente grande:

Una herramienta matemática útil para determinar de forma más sencilla la dependencia lineal o no de las soluciones, es el denominado determinante de Wronski o Wronskiano.

Determinante de Wronski y criterio de independencia lineal

Si se tiene el conjunto de soluciones $y_1, y_2, ..., y_n$ y éstas son $(n-1)$ veces diferenciables, entonces podemos construir el llamado determinante de Wronski como

[6] Este procedimiento lo hemos venido aplicando asumiendo la independencia lineal de las soluciones. Sin embargo, en el caso de las ecuaciones lineales y, como veremos en el siguiente capítulo, los sistemas de ecuaciones diferenciales, resulta útil emplear un criterio sencillo para determinar si las soluciones obtenidas son o no linealmente independientes.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Se cumple que:

- Si $W = 0$, entonces las funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ son linealmente dependientes.
- Si $W \neq 0$, las funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ son linealmente independientes.

El criterio anterior es válido para cualquier conjunto de funciones. Ahora bien, si las funciones son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, es decir, del tipo

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y = 0,$$

entonces la solución general de dicha ecuación será la suma de cada una de las soluciones linealmente independientes

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x).$$

Ejemplos Determina si las funciones dadas son o no linealmente independientes

1. $y_1 = x + 2$, $y_2 = x - 2$

   En primer lugar, hagámoslo mediante la multiplicación por constantes. Para que sean linealmente independientes se debe cumplir que

   $$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0.$$

   Sustituyendo las funciones obtenemos

   $$\alpha_1(x + 2) + \alpha_2(x - 2) = 0.$$

   que podemos reescribir como

   $$x(\alpha_1 + \alpha_2) + 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0.$$

   Como vemos, obtenemos que se debe cumplir que $\alpha_1 = -\alpha_2$ y que $\alpha_1 = \alpha_2$ simultáneamente y, por tanto, solo se cumplirá dicha condición si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Podemos deducir que las funciones son linealmente independientes.

   Apliquemos ahora el Wronskiano. Para ello, dado que $n = 2$, debemos calcular únicamente la primera derivada. Tenemos que $y_1' = y_2' = 1$. Construyamos el determinante de Wronski

   $$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & x-2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x + 2 - x + 2 - = 4$$

   Como vemos, $W \neq 0$ y, por tanto, las funciones son linealmente independientes.

2. $y_1 = 6x + 9$, $y_2 = 8x + 12$

   Apliquemos en primer lugar el método estándar para saber si son linealmente independientes
$$\alpha_1(6x + 9) + \alpha_2(8x + 12) = 0.$$
   que podemos reescribir en la forma
$$2x(3\alpha_1 + 4\alpha_2) + 3(3\alpha_1 + 4\alpha_2) = 0.$$
   Como vemos, obtenemos una única condición
$$\alpha_1 = -\frac{4}{3}\alpha_2,$$
   la cual se cumple para valores $\alpha_i \neq 0$ y, por tanto, las funciones son linealmente dependientes. De hecho, es fácil ver que, en este caso, $\frac{y_1}{3} = \frac{y_2}{4}$. Como una se puede obtener a partir de la otra, las soluciones no son linealmente independientes.

   Hagamos ahora el cálculo del Wronskiano y comprobemos si, como debe ser, es igual a cero
$$W(x) = \begin{vmatrix} 6x + 9 & 8x + 12 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 8(6x + 9) - 6(8x + 12) = 48x + 72 - 48x - 72 = 0$$
   como vemos se cumple que, si las funciones son linealmente dependientes,

3.6. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Si se tiene una ecuación diferencial que presenta la forma
$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{3.13}$$
siendo a_i, con $i = (\overline{1, n})$, valores constantes, se dice que la ecuación diferencial de enésimo orden es lineal con coeficientes constantes. Además, se dice que

- Si $f(x) = 0$

  La ecuación diferencial es lineal homogénea

- Si $f(x) \neq 0$

  La ecuación diferencial es lineal no homogénea (o completa).

En general, si $f(x)$ es una función continua en un cierto intervalo $I \in \mathbb{R}$, entonces la solución general de la Ec. (3.13) se puede expresar como la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada y una solución particular de la ecuación no homogénea.

Para hallar la solución de la ecuación homogénea escribimos la llamada ecuación característica de la ecuación diferencial lineal

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{3.14}$$

Si λ_i, con $i = (\overline{1,n})$ son raíces de la ecuación anterior, entonces a cada $lambda_i$ le corresponde una solución particular de la ecuación homogénea (Ec.(3.13) con $f(x) = 0$) de la forma $y_i = e^{\lambda_i x}$. Nótese que la única forma de relacionar una función y sus derivadas de forma lineal y con coeficientes constantes es mediante una función de partida que sea una combinación lineal de exponenciales. Por tanto, la combinación lineal de las soluciones particulares es la solución general de la ecuación homogénea, es decir

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i. \tag{3.15}$$

Además, si las raíces se repiten, es decir, si existe un raíz múltiple λ_r que se repite l veces, entonces a cada raíz múltiple le corresponde una solución del tipo

$$y_r = e^{\lambda_r x}, y_{r+1} = xe^{\lambda_r x}, ..., y_{r+l-1} = x^{l-1}e^{\lambda_r x}$$

Estas soluciones se sumarán a la solución general de la ecuación homogénea.

Pongamos un ejemplo sencillo. Si se se diese el caso en que las raíces son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, entonces $l = 3$. La suma de las soluciones particulares de la ecuación homogénea quedaría como

$$y(x) = C_1 e^x + xC_2 e^x + x^2 C_3 e^x.$$

Veamos un ejemplo sencillo para ilustrar este caso.

Ejemplo:

Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Como vemos, la ecuación es homogénea ya que $f(x) = 0$ y, además, los coeficientes son constantes $(a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = -2)$. La ecuación característica es la siguiente

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Podemos encontrar las raíces sin más que resolver una ecuación cuadrática. Las raíces serán

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2},$$

de donde obtenemos las raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$. Como hemos visto, a cada raíz le corresponde una solución particular, es decir,

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-2x}.$$

y, por tanto, la solución general será

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Si introducimos esta ecuación en la ecuación diferencial vemos que, efectivamente, es solución de la misma.

3.6.1. Método de los coeficientes indeterminados

Para encontrar la solución particular cuando la ecuación diferencial lineal es no homogénea, es decir, cuando $f(x) \neq 0$, existen distintos métodos. Por un lado, tenemos el método conocido como método de los coeficientes indeterminados. Este método se emplea si la función presenta la forma

$$f(x) = P_m(x) e^{\gamma x},$$

siendo $P_m(x)$ un polinomio de grado m. En tal caso, la solución particular de la ecuación no homogénea vendrá dada por

$$\hat{y} = x^s Q_m(x) e^{\gamma x}, \tag{3.16}$$

donde $Q_m(x)$ es un polinomio de grado m y se cumplen las siguientes condiciones

- $s = 0$ si γ no coincide con ninguna de las raíces de la solución de la ecuación homogénea.

- Si alguna raíz se repite, entonces s es igual a la multiplicidad de la raíz si γ es igual a dicha raíz.

  Es decir, si algunas de las raíces de la ecuación característica son iguales, por ejemplo, si $\lambda_i = \lambda_j$ con $i \neq j$ y, además, $\lambda_i = \gamma$, entonces el parámetro s será igual a la multiplicidad de la raíz correspondiente.

  Sabiendo esto, la primera condición estaría incluida en ésta ya que, si ninguna raíz se repite, entonces la multiplicidad es cero y, consecuentemente, $s = 0$.

- Si $P_m(x)$ es una cierta constante, $Q_m(x)$ también será constante.

- Si $\gamma = 0$ y $P_m(x)$ es un polinomio del tipo $P_m = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, entonces $Q_m(x)$ será también un polinomio en la forma $Q_m = A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0$, donde a_i y A_i son ciertas constantes que no tienen por qué ser iguales.

Además, si $f(x)$ es una combinación de funciones del tipo anterior, ($f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$), entonces la solución particular de la ecuación no homogénea es igual a la suma de las soluciones particulares $\hat{y}_i$.

Veamos un ejemplo para ilustrar este método.

Ejemplo:
$y'' - 3y' + 2y = \sin x$

Tenemos una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden. En primer lugar, debemos encontrar la solución general de la ecuación homogénea, es decir, hacemos $f(x) = 0$, escribimos la ecuación característica y buscamos las raíces:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial homogénea se puede escribir como

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Sin embargo, la ecuación diferencial es completa y, por tanto, debemos encontrar la solución particular para $f(x) = \sin x$. Para poder emplear el método de los coeficientes indeterminados, recordemos que la función debe presentar la forma $f(x) = P_m(x)e^{\gamma x}$. En primera instancia podría parecer que la función no cumple este requisito, sin embargo, si empleamos la fórmula de Euler [7] podemos escribir la función seno de la siguiente manera

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

Es decir, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$,y, por tanto, se pueden encontrar las soluciones particulares por separado ya que además presentan la forma deseada, con $P_m(x) = \frac{1}{2i}$ y $\gamma_1 = i$, $\gamma_2 = -i$. Como vemos, $\gamma_i \neq \lambda_j$, es decir, los factores γ_i no coinciden con las raíces de la ecuación homogénea. Por lo tanto, $s = 0$. La solución particular será la suma de las soluciones particulares por separado

$$\hat{y} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2.$$

donde

$$\hat{y}_i = x^s Q_m(x) e^{\gamma_i x}.$$

Sustituyendo $s = 0$ y teniendo em cuenta que $P_m(x)$ es constante y, por tanto, $Q_m(x)$ también lo será, nos queda

$$\hat{y}_i = a_i e^{\gamma_i x}.$$

De esta forma obtenemos las soluciones particulares $\hat{y}_1 = a_1 e^{ix}$ y $\hat{y}_1 = a_2 e^{-ix}$ de manera que la solución particular de la ecuación no homogénea es

$$\hat{y} = a_1 e^{ix} + a_2 e^{-ix}$$

Los coeficientes a_i se pueden calcular sustituyendo la solución particular en la ecuación homogénea, esto es

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(a_1 e^{ix} + a_2 e^{-ix}\right) - 3\frac{d}{dx}\left(a_1 e^{ix} + a_2 e^{-ix}\right) + 2\left(a_1 e^{ix} + a_2 e^{-ix}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

En realidad, este proceso se podría realizar por separado, es decir, primero obtener el coeficiente sustituyendo la solución $\hat{y}_1$ y hacer el mismo proceso para $\hat{y}_2$. Querremos sacar factor común tanto e^{ix} como e^{-ix} y, para obtener los coeficientes, simplemente igualaremos las partes que multipliquen a dichas exponenciales a ambos lados de la ecuación. Si realizamos las derivadas pertinentes y factorizamos se obtiene

[7] Fórmula de Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$(a_1 - 3ia_1)\, e^{ix} + (a_2 + 3ia_2)\, e^{-ix} = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

Como vemos, para que las soluciones particulares cumplan la ecuación diferencial, los factores constantes deben cumplir que

$$a_1(1-3i) = \frac{1}{2i}$$
$$a_2(1+3i) = \frac{1}{2i}$$

En este punto, despejando los coeficientes, podríamos obtener directamente la solución de la ecuación no homogénea. Para presentar la solución de manera elegante haremos alguna operación extra. Por un lado, separamos la parte real y la parte imaginaria

$$a_1 = \frac{1}{2i+6} = \frac{6-2i}{(6+2i)(6-2i)} = \frac{3}{20} - \frac{i}{20}. \tag{3.17}$$

El mismo proceso lleva a $a_2 = \frac{3}{20} + \frac{i}{20}$. Y ahora sustituimos en la solución particular

$$\hat{y} = a_1 e^{ix} + a_2 e^{-ix} = (a_1 + a_2)\cos x + i(a_1 - a_2)\sin x = \frac{1}{10}(3\cos x + \sin x).$$

Por último, la solución general de la ecuación diferencial completa será la suma de la solución general de la parte homogénea junto con la suma de las soluciones particulares, es decir

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10}(3\cos x + \sin x).$$

3.6.2. Método de la variación de las constantes

Los primeros pasos de este método son exactamente los mismos que en el caso anterior, a saber, hallar la solución general de la ecuación homogénea construyendo la ecuación característica de manera que se obtienen las raíces correspondientes. Hecho esto, para obtener la solución particular dada por la existencia de la función $f(x)$ (continua en un cierto intervalo de x), el método de variación de constantes es similar al visto en el capítulo anterior para ecuaciones de primer orden. Los pasos son los siguientes:

- Suponemos que la solución particular de la ecuación homogénea presenta la forma

  $$\hat{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i. \tag{3.18}$$

  es decir, que los coeficientes de la solución no son constantes si no que dependen de la variable x.

- Las derivadas de las funciones $C_i(x)$, es decir, las funciones $C_i'(x)$ se pueden determinar a partir del sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(m)} = \frac{f(x)}{a_0} \delta_{n-1,m}, \quad \text{con } m = \overline{0, n-1}. \tag{3.19}$$

donde δ es la delta de Kronecker.

$$\delta_i, j = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j. \end{cases} \tag{3.20}$$

Nótese que el resultado de la Ec.(3.19) es un sistema de ecuaciones con tantas ecuaciones como incógnitas $C_i'(x)$ a determinar. Por ejemplo, si $n = 2$, entonces tendremos una primera ecuación para $m = 0$ y otra para $m = 1$. En la primera, $n - 1 \neq m$ y, por tanto, $\delta_{1,0} = 0$. En la segunda ecuación los índices coinciden y, consecuentemente, $\delta_{1,1} = 1$

- Se integran las ecuaciones anteriores para obtener los coeficientes $C_i(x)$

$$C_i(x) = \int C_i'(x) dx + a_i$$

donde a_i son las constantes de integración.

- Por último, sustituimos los coeficientes en la solución particular dada por la Ec. (3.18), es decir

$$\hat{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\int C_i'(x) dx + a_i \right).$$

Nuevamente, es más fácil comprender el método a través de un ejemplo.

Ejemplo:
$y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$
En primer lugar hallamos la solución general de la ecuación homogénea, calculando las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

que da lugar a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, es decir, la raíz tiene multiplicidad uno. Además, la raíz coincide con el factor que multiplica a la variable x en la exponencial de $f(x)$ y, por tanto, emplearemos $l = 2$ para obtener las soluciones de la ecuación homogénea dada por la suma de la Ec.(3.16). Por lo tanto, la solución general será

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Ahora, suponemos que los coeficientes dependen de la variable x de forma que nos queda

$$y(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x.$$

Para obtener los coeficientes aplicamos la Ec.(3.19), que nos dará un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas tengamos. En este caso, las incógnitas son dos, $C_1(x)$ y $C_2(x)$. En la primera ecuación, para $m = 0$, la delta de Kronecker es nula y, por tanto, obtenemos

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0.$$

La segunda, es decir, para $m = 1$, tenemos que

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

que da como resultado

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)(x+1)e^x = \frac{e^x}{x}.$$

Resolvemos el sistema, por ejemplo, por substitución. De la primera ecuación se obtiene

$$C_1'(x) + = -xC_2'(x)$$

Sustituimos en la segunda

$$-xC_2'(x) + C_2'(x)(x+1) = \frac{1}{x}.$$

de donde obtenemos la derivada del segundo coeficiente

$$C_2'(x) = \frac{1}{x}$$

Se obtiene por tanto que

$$C_2(x) = \ln|x| + C_2.$$

donde ahora C_2 es una constante de integración. Por otro lado, calculamos $C_1'(x)$ a partir de la primera ecuación

$$C_1'(x) = -1,$$

que. tras integrar, nos lleva a

$$C_1(x) = -x + C_1.$$

Finalmente, sustituimos las *constantes* obtenidas en la solución general donde supusimos que éstas podían depender de x para obtener la solución particular de la ecuación no homogénea.

$$y(x) = (-x + C_1)e^x + (\ln|x| + C_2)xe^x.$$

3.7. Ejemplos de ecuaciones diferenciales de orden superior en Física

En esta sección emplearemos alguno de los métodos introducidos en esta sección para resolver el caso general del movimiento armónico. Para ello, empecemos por el caso sencillo de un movimiento armónico libre no amortiguado.

3.7.1. Movimiento armónico libre no amortiguado

Supongamos una cierta masa m esta ligada a un muelle colocado en vertical de tal forma que, si la masa se deja caer, ésta oscila generando un movimiento armónico en la coordenada y. Si suponemos que no existe ningún tipo de amortiguación ni fuerza externa, entonces la ecuación diferencial que describe este sistema es

$$my''(t) + ky(t) = 0.$$

Como vemos, tenemos una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea. En ocasiones esta ecuación se resuelve de manera *textitintuitiva*. Sin embargo, veamos que podemos aplicar el método general. Podemos resolver hallando las raíces de la ecuación homogénea

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0.$$

que resulta en las raíces $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Podemos escribir la ecuación de movimiento como

$$y(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}.$$

o, lo que es lo mismo

$$y(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t},$$

siendo $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Supongamos que en el instante $t_0 = 0$ la masa se encuentra en la $y = 0$ (esto lo podemos hacer ya que tanto la elección del instante inicial como del sistema de coordenadas son arbitrarias), entonces tenemos que necesariamente $C_1 = -C_2$. De esta forma obtenemos que

$$y(t) = C(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}).$$

y, por tanto,

$$y(t) = 2iC\sin(\omega t).$$

Como vemos, tenemos un movimiento armónico pero podría parece que la amplitud es compleja. Si suponemos que en un determinado instante t_m la amplitud es máxima, es decir, $\sin\omega t = 1$, podemos calcular el valor de la constante en función de dicha amplitud máxima A_m, esto es

$$y(t_m) = A_m = 2iC,$$

de donde se obtiene $C = \frac{A_m}{2i}$. Si sustituimos el valor de la constante obtenemos la fórmula bien conocida del oscilador armónico simple no amortiguado

$$y(t_m) = A_m \sin(\omega t).$$

3.7.2. Movimiento armónico libre amortiguado

En este caso se supone que existe una cierta fuerza externa que hace que la velocidad del movimiento varíe con el tiempo. Podemos escribir la ecuación diferencial de este tipo de movimiento como

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0.$$

Nuevamente tenemos una ecuación homogénea y, por tanto, la ecuación característica será

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0.$$

de donde se obtienen las raíces

$$\lambda_{\pm} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$

Se pueden, por tanto, distinguir tres casos

1. Si $c^2 - 4km > 0$: En ese caso se tienen dos raíces reales y la solución general vendría dada por

   $$y(t) = C_1 e^{\lambda_+ t} + C_2 e^{\lambda_- t}$$

   Este caso se conoce como sistema sobre sobreamortiguado ya que el sistema se amortigua antes de realizar ninguna oscilación.

2. Si $c^2 - 4km < 0$:

   Entonces las raíces tienen una parte compleja y se pueden expresar en la forma

   $$\lambda_{\pm} = \frac{-c \pm i\sqrt{4m - c^2}}{2m}.$$

   Si llamamos $K = \dfrac{c}{2m}$ a la parte real y llamamos $\omega = \dfrac{\sqrt{c^2 - km}}{2m}$ a la parte imaginaria, la solución general puede expresarse como

   $$y(t) = C_1 e^{-Kt} e^{i\omega t} + C_2 e^{-Kt} e^{-i\omega t}$$

Realizando el mismo procedimiento que en el caso no amortiguado, determinamos que $C_1 = -C_2 = C$. De esta forma, la ecuación queda como

$$y(t) = Ce^{Kt}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right).$$

Al igual que en el caso no amortiguado, tenemos una función seno. Se puede determinar la máxima amplitud independiente de la amortiguación para determinar la constante C de manera que se llega a la ecuación

$$y(t) = A_m e^{-Kt}\sin\omega t.$$

Este caso se conoce como subamortiguado ya que permite un cierto número de oscilación antes de detenerse por completo.

3. Si $c^2 - 4km > 0$: Este caso se conoce como críticamente amortiguado. En este caso tenemos una raíz doble ya que $\lambda_\pm = \frac{-c}{2m}$. Aplicamos la solución general de este tipo de una ecuación diferencial lineal homogénea con raíces multiples para obtener

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-Kt}$$

siendo K la misma del caso subamortiguado.

3.8. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables

En esta sección veremos algunos casos que permiten simplificar una ecuación diferencial de orden superior en que los coeficientes que multiplican a cada una de las derivadas en la ecuación diferencial lineal dependen también de la variable x. Es decir, ecuaciones del tipo

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = \psi(x) \tag{3.21}$$

donde tanto a_i, con $i = (\overline{1,n})$, como ψ son funciones conocidas.

Sea una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables, tal como expresa la Ec.(3.21). Si consideramos que $y_1(x)$ es una cierta solución particular de la ecuación diferencial para $\psi = 0$, entonces es posible reducir el orden de la ecuación diferencial mediante un simple cambio de variable. Si hacemos

$$y = y_1 z(x), \quad z'(x) = u(x),$$

entonces se puede reducir el orden de la ecuación diferencial.

3.8.1. Ecuaciones de Euler y de Euler-Cauchy

La llamada ecuación de Euler es un caso particular de una ecuación diferencial de orden superior con coeficientes variables que presenta la siguiente forma:

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = 0 \tag{3.22}$$

donde tanto los coeficientes a_i, con $i = \overline{1,n}$ como a y b son constantes. Además, $\psi(x) = 0$ por lo que la ecuación lineal es homogénea.

Es posible transformar la ecuación de Euler en una ecuaciones lineal de coeficientes constantes. Dada la forma de la ecuación diferencial, suponemos que la solución es de la forma

$$y = (ax+b)^m$$

con m una constante a determinar y calculamos sus correspondientes derivadas

$$\begin{aligned} y' &= m(ax+b)^{m-1} \\ y'' &= m(m-1)(ax+b)^{m-2} \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= (\ldots/\ldots)(ax+b)^{m-n}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Es fácil ver que, al sustituir los valores de las derivadas todos los coeficientes quedarán en la forma $c_i(ax+b)^m$, donde los coeficientes c_i son funciones polinómicas de la constante m. Por tanto, podremos sacar factor común el término $(ax+b)^m$ de manera que la ecuación queda como

$$(ax+b)^m \sum_i^n c_i(m) = 0. \tag{3.24}$$

Finalmente, si se encuentran las raíces de $\sum_i^n c_i(m)$ tendremos la solución general $y(x)$. Dependiendo del tipo de raíces (al igual que pasaba en el caso de coeficientes constantes) la solución presenta distintas formas:

I. **Raíces reales y distintas**

Si los valores obtenidos para m_i, con $i = \overline{1,n}$ son reales y distintos, entonces la solución de la ecuación diferencial presenta la forma

$$y(x) = C_1(ax+b)^{m_1} + C_2(ax+b)^{m_2} + \ldots + C_n(ax+b)^{m_n}$$

II. **Raíces reales e iguales**

Si los valores obtenidos para m_i, con $i = \overline{1,n}$ son reales y, todos ellos repetidos, entonces la solución de la ecuación diferencial presenta la forma

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1(ax+b)^{m_1} + C_2(ax+b)^{m_2}\ln(ax+b) + C_3(ax+b)^{m_3}(\ln(ax+b))^2 + \\ \ldots &+ C_n(ax+b)^{m_n}(\ln(ax+b))^{n-1} \end{aligned}$$

III. **Raices complejo conjugadas**

Es bastante corriente tener soluciones complejo conjugadas. Por ejemplo, si la ecuación auxiliar para determinar las raíces m_i es cuadrática, es común que los factores de la raíz cuadrada sean negativos. [8]. En ese caso las raíces sería de la forma $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$. En este caso, las soluciones se pueden escribir en términos de funciones reales (empleando la fórmula de Euler) de tal manera que queda

$$y(x) = x^{\alpha}(C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x))$$

Un caso particular de este tipo de ecuaciones es la llamada ecuación de Euler-Cauchy, en la que las constantes toman los valores $a = 1$ y $b = 0$. Por tanto, la ecuación diferencial de partida toma la siguiente forma

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \tag{3.25}$$

y cuya solución se obtiene aplicando el mismo método anteriormente descrito. Veamos algún ejemplo de este tipo de ecuación diferencial:

Ejemplos:

1. $x^2 y'' - xy' + y = 0$

   En este caso, tenemos una ecuación de Euler-Cauchy. Si empleamos la misma notación usada en la sección, identificaríamos los coeficientes $a_1 = -1, a_2 = 1$. Empleamos el método de resolución que sugiere que la solución ha de ser del tipo

$$y(x) = x^m \tag{3.26}$$

   cuyas derivadas hasta orden 2 son

$$\begin{aligned} y'(x) &= mx^{m-1} \\ y''(x) &= m(m-1)x^{m-2} \end{aligned}$$

   Ahora insertamos tanto la solución sugerida como sus derivadas en la ecuación diferencial de partida

$$x^2(m(m-1)x^{m-2}) - x(mx^{m-1}) + x^m = 0,$$

   que, sacando factor común x^m queda en la forma

$$x^m\,(m(m-1) - m + 1) = 0,$$

   De esta forma, para que $y = x^m$ sea solución, debe necesariamente de anularse el polinomio en m. Es decir, calculamos las raíces a partir de la ecuación

[8] Al aplicar la fórmula típica $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, si $4ac > b^2$, entonces las raíces son complejo conjugadas

$$m(m-1) - m + 1 = 0,$$

que podemos reescribir como $m^2 - 2m + 1 = 0$. Vemos que las raíces en este caso son $m_1 = m_2 = 1$, es decir, son reales e iguales. La solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x.$$

2. $(x+1)^3 y''' - 3(x+1)^2 y'' + 4(x+1)y' - 4y = 0$

   Esta ecuación presenta la forma de la ecuación de Euler con $a = 1$ y $b = 1$. En este caso, los coeficientes son $a_1 = -3, a_2 = 4, a_3 = -4$. Teniendo en cuenta la forma de la ecuación diferencial, probamos la solución

$$y(x) = (x+1)^m \tag{3.27}$$

cuyas derivadas hasta tercer orden son

$$\begin{aligned} y'(x) &= m(x+1)^{m-1} \\ y''(x) &= m(m-1)(x+1)^{m-2} \\ y'''(x) &= m(m-1)(m-2)(x+1)^{m-3}. \end{aligned}$$

Insertamos tanto las derivadas como la propia solución en la ecuación de partida

$$(x+1)^3(m(m-1)(m-2)(x+1)^{m-3}) - 3(x+1)^2(m(m-1)(x+1)^{m-2} + 4m(x+1)^{m-1} - 4(x+1)^m = 0$$

que, tras factorizar, queda como

$$(x+1)^m\,(m(m-1)(m-2) - 3(m(m-1) + 4m - 4) = 0$$

Desarrollamos la expresión para obtener

$$m^3 - 6m^2 + 9m - 4 = 0.$$

Tenemos una ecuación cúbica. Las posibles raíces se pueden obtener mediante el teorema del factor y la regla de Ruffini. En este caso, la ecuación se puede factorizar de la siguiente forma

$$(m-4)(m-1)^2 = 0.$$

De esta forma, obtenemos tres raíces reales, dos de ellas repetidas, es decir, $m_1 = m_2 = 1$ y m_3. En este caso la solución general queda como

$$y(x) = C_1(x+1) + C_2(x+1)\ln(x+1) + C_3(x+1)^4.$$

3.9. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes variables

Un caso particular de las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes variables es el de las de segundo orden homogéneas. Como vamos a ver, mediante un cambio de variable es posible transformar la ecuación en una que podemos resolver de manera analítica. Sea una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, con coeficientes variables y homogénea del tipo

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0,$$

siendo P_1 y P_2 funciones conocidas y continuas en una cierta región del espacio de coordenadas (x,y). Si aplicamos el cambio de variable

$$y = e^{\left(\frac{1}{2}\int P_1(x)dx\right)} z(x) \tag{3.28}$$

entonces la ecuación diferencial se reduce a

$$\frac{d^2z}{dx^2} + J(x)z = 0,$$

que es de variables separables y, por tanto, bastaría con integrar dos veces a ambos lados para obtener la solución. La función $J(x)$ se conoce como el invariante de la ecuación diferencial y viene dado por

$$J(x) = P_2(x) - \frac{1}{2}P_1'(x) - \frac{1}{4}P_1^2(x).$$

- **Ejemplo:** $(x^2+1)y'' + 5xy' + 4y = 0$

  Aplicamos el cambio sugerido en este tipo de ecuaciones, dado por la Ec. (3.28):

  $$y = \exp\left(-\frac{1}{2}\int \frac{5xdx}{x^2+1}\right) z(x) = \frac{z(x)}{(x^2+1)^{5/4}}.$$

  De esta forma, se obtiene

  $$\frac{d^2z}{dx^2} + J(x)z = 0,$$

  con

  $$J(x) = \frac{x^2+6}{4(x^2+1)^2}$$

Problemas

3.1 $y^{(4)} + 4y = 0$

Solución:

Tenemos una ecuación lineal homogénea de cuarto orden. Buscamos las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^4 + 4 = 0$$

Por tanto, las raíces vendrán dadas por $\lambda_k = \sqrt[4]{-4}$

Recordemos como hallar este tipo de raíces a partir empleando una exponencial compleja

$$\sqrt[4]{-a} = \sqrt[4]{a}\ e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{4}}, \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Particularizamos a nuestro caso

$$\lambda_k = \sqrt{2}\ e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{4}}, \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

de donde obtenemos las siguentes raíces $\lambda_0 = 1 + i$, $\lambda_1 = 1 - i$, $\lambda_2 = -1 + i$, $\lambda_3 = -1 - i$. Como vemos, la ecuación característica tiene cuatro raíces distintas. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = \left(C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}\right) e^{x} + \left(C_3 e^{ix} + C_4 e^{-ix}\right) e^{-x}$$

3.2 $y^{(6)} + 64y = 0$

Solución:

Esta ecuación es similar a la anterior. Escribamos en primer lugar la ecuación característica

$$\lambda^6 + 64 = 0$$

de donde las raíces deben ser $\lambda_k = \sqrt[6]{-64}$. Aplicando la fórmula para el cálculo de la raíz tenemos que

$$\lambda_k = \sqrt[6]{64}\ e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{6}}, \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

donde se puede simplificar $\sqrt[6]{64} = 2$. Sustituyendo los valores de k se obtiene cada una de las raíces siguientes: $\lambda_0 = \sqrt{3} + i$, $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -\sqrt{3} + i$, $\lambda_3 = -\sqrt{3} - i$, $\lambda_4 = -2i$, $\lambda_5 = \sqrt{3} - i$.

Por tanto, la solución general se puede expresar como

$$y = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix} + \left(C_3 e^{ix} + C_4 e^{-ix}\right) e^{\sqrt{3}x} + + \left(C_4 e^{ix} + C_6 e^{-ix}\right) e^{-\sqrt{3}x}$$

3.3 $y'' + 2iy' - y = 8\cos x$

La ecuación diferencial anterior es lineal, de segundo orden, con coeficientes constantes y completa. Buscaremos, en primer lugar, la solución de la ecuación homogénea a partir de la ecuación característica

$$\lambda^2 + 2i\lambda - 1 = 0.$$

Resolviendo la ecuación característica da lugar a dos raíces iguales e imaginarias, $\lambda_1 = \lambda_2 = -i$. Por tanto, la solución general de ecuación homogénea es

$$y = C_1 e^{-ix} + C_2 x e^{-ix}.$$

Por otro lado, la función que hace que la ecuación sea completa es el coseno, que podemmos escribir como

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial completa se obtiene

$$y'' + 2iy' - y = 4(e^{ix} + e^{-ix}).$$

Como vemos, la ecuación reescrita en la forma anterior cumple las condiciones para emplear el métodos de los coeficientes indeterminados. La raíz $\lambda_i = -i$, con $i = 1, 2$, tiene multiplicidad 2 y, además, aparece su forma una vez más en la ecuación completa. Por tanto, buscaremos soluciones particulares del tipo

$$\hat{y} = ae^{ix} + bx^2 e^{-ix}.$$

Introduciendo la solución anterior en la ecuación diferencial completa e igualando los coeficientes se obtiene $a = -1$ y $b = 2$. La solución general de la ecuación completa será, por tanto,

$$y = \left(C_1 + C_2 + 2x^2\right) e^{-ix} - e^{ix}.$$

3.4 $y'' + 10y' + 21y = 0$

La ecuación anterior es lineal y homogénea de segundo orden. Podemos resolver simplemente encontrando las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 + 10\lambda + 21 = 0.$$

De donde se obtienen las raíces $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -7$. Por tanto, la solución se puede escribir como

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-7x}.$$

3.5 $y'' + 4y' + 5y = 0$.

La ecuación característica de la ecuación diferencial lineal y homogénea es

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

Resolviendo mediante la fórmula de una ecuación cuadrática se obtienen las raíces $\lambda_1 = -2 + i$ y $\lambda_2 = -2 - i$. Por tanto, la solución general será

$$y = C_1 e^{-2x+ix} + C_2 e^{-2x-ix}.$$

En general, este tipo de solución se puede escribir en términos de funciones trigonométricas empleando la fórmula de Euler. Es decir, tendremos que

$$y = e^{-2x}(C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}) = e^{-2x}(C_1(\cos x + i \sin x) + C_2(\cos x - i \sin x)),$$

que, agrupando los términos comunes, queda como

$$y = e^{-2x}((C_1 + C_2)\cos x + (C_1 - C_2) i \sin x) = (\hat{C}_1 \cos x + \hat{C}_2 \sin x) e^{-2x}$$

donde hemos definido las constantes $\hat{C}_i$.

3.6 $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$

Solución:

En primer lugar, escribimos la ecuación como

$$y'' - y = \frac{x^2 - 2}{x^3}.$$

Por tanto, la ecuación característica de la ecuación homogénea es

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

y, por tanto, las raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Construimos la solución general de la ecuación diferencial homogénea

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

Para obtener la solución de la ecuación no homogénea, aplicamos el método de la variación de constantes, es decir, empleamos la fórmula 3.19 para obtener

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^{x} + C_2'(x)e^{-x} &= 0, \\ C_1'(x)e^{x} - C_2'(x)e^{-x} &= \frac{x^2 - 2}{x^3} \end{aligned}$$

Podemos resolver el sistema de ecuaciones anterior, por ejemplo, por sustitución. De la primera ecuación obtenemos

$$C_1'(x) = -C_2'(x)e^{-2x},$$

y, sustituyendo en la segunda, nos queda que

$$(-C_2'(x)e^{-2x})e^{x} - C_2'(x)e^{-x} = \frac{x^2-2}{x^3},$$

que lleva a

$$-2C_2'(x)e^{-x} = \frac{x^2-2}{x^3},$$

y, por tanto

$$C_2'(x) = \frac{2-x^2}{2x^3}e^{x},$$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos la derivada del primer coeficiente

$$C_1'(x) = \frac{x^2-2}{2x^3}e^{-x}.$$

El siguiente y último paso será integrar los valores obtenidos, para lo cual es conveniente escribirlos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= \frac{1}{2x}e^{-x} - \frac{1}{x^2}e^{-x} \\ C_2'(x) &= \frac{1}{x^2}e^{x} - \frac{1}{2x}e^{x} \end{aligned}$$

Ambas integrales se resuelven igual (a excepción del signo) empleando la integración por partes en los dos términos, lo que resulta en

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) + C_1 \\ C_2(x) &= \frac{e^{x}}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) + C_2 \end{aligned}$$

donde C_1 y C_2 son dos constantes nuevas. [9] Sustituyendo en la solución general de la ecuación homogénea obtenemos la solución completa

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{x}.$$

[9] Nótese que, si llamamos a dichas constantes de esta forma, cuando sustituyamos los coeficientes en la solución de la ecuación homogénea se obtendrá directamente la solución completa de la ecuación diferencial

3.7 $y'' + 2y' + y = \cos(ix)$

Solución:

Nuevamente, buscamos la raíces de la ecuación homogénea

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

de donde se obtiene una raíz múltiple, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. De forma que la solución general de la ecuación homogénea es

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Ahora bien, fijémonos la forma de la función a la derecha de la igualdad de la ecuación diferencial propuesta. Podemos aplicar la fórmula de Euler para expresar el coseno como

$$cos(ix) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Por tanto, la ecuación diferencial presenta la forma necesaria para aplicar el método de los coeficientes indeterminados, es decir, aplicamos la Ec.(3.16). Como una de las raíces es repetida y, además, se vuelve a repetir en la función de la ecuación completa (e^{-x}) buscaremos la solución particular de la forma

$$\hat{y} = ae^x + bx^2 e^{-x}.$$

Sustituimos esta solución en la ecuación diferencial de partida para hallar los valores de a y b

$$(ae^x + bx^2e^{-x})'' + 2(ae^x + bx^2e^{-x})' + ae^x + bx^2e^{-x} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

de donde, después de realizar algunas operaciones se infiere que $a = 1/8$ y $b = 1/4$. Por tanto, la solución general completa es

$$y = \frac{1}{8}e^x + \frac{x^2}{4}e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

3.8 $y'' + 2iy = 8e^x \sin x$

Solución:

En primer lugar, buscamos la solución general de la ecuación homogénea a través de la ecuación característica

$$\lambda^2 + 2i\lambda = 0.$$

Para obtener las raíces, dado que tenemos un número complejo, empleamos la fórmula

$$\lambda_k = \sqrt{-2i} = \sqrt{2}e^{\dfrac{i(-\pi/2+2k\pi)}{2}} = \sqrt{2}e^{i(-\pi/2+k\pi)}, \quad k = 0, 1.$$

que da lugar a

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4) = 1 - i, \\
\lambda_1 &= \sqrt{2}(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4) = -1 + i.
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea será

$$y = C_1 e^{(1-i)x} + C_2 e^{(-1+i)x}$$

Para encontrar la solución completa reescribimos en primer lugar la función $f(x)$ como

$$8e^x \sin x = \frac{4}{i}\left(e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x}\right),$$

que, como vemos, presenta la forma necesaria para aplicar el métodos de los coeficientes indeterminados. Como vemos, el argumento de una de las exponenciales coincide con una de las raíces ($\lambda_1 = 1 - i$) por lo que buscaremos la solución particular del tipo

$$\hat{y} = ae^{(1+i)x} + bxe^{(1-i)x}.$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación diferencial de partida

$$\hat{y}'' + 2i\hat{y} = \frac{4}{i}\left(e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x}\right),$$

y tras realizar algunas operaciones, se llega a que $a = -1$ y $b = -1 + i$. Por tanto, la solución general de la ecuación completa viene dada por

$$y = (C_1 + (i-1)x)e^{(1-i)x} + C_2 e^{(i-1)x} - e^{(1+i)x}$$

3.9 Escribe el Wronskiano de los siguientes conjuntos de soluciones y comprueba si son linealmente independientes:

a) (e^x, e^{-x})

Escribimos el Wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

que, como vemos, es distinto de cero y por tanto las soluciones son linealmente independientes.

b) (x, x^2, x^3)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3$$

Dado que $W \neq 0$, las soluciones son linealmente independientes.

c) $(\sin x, \cos x)$

Escribimos el Wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1$$

d) $(1 - x, 1 + x, 1 - 3x)$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 1-3x \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

por tanto, las soluciones son linealmente dependientes.

3.10 $y'' - y' - 2y = e^{3x}$

Solución:

La ecuación diferencial es lineal y completa. Por tanto, en primer lugar, hallaremos las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$

que tiene como raíces $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

Podemos resolver la ecuación completa aplicando el método de los coeficientes indeterminados. La solución particular de la ecuación completa ha de ser del tipo

$$\hat{y} = a e^{3x}.$$

Insertando esta solución en la ecuación diferencial se obtiene

$$9ae^{3x} - 3ae^{3x} - 2ae^{3x} = e^{3x}$$

de donde se deduce que $a = \dfrac{1}{4}$. Por tanto, la solución general de la ecuación completa es

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4} e^{3x}.$$

3.11 $y'' - y' - 2y = \sin x$

Como vemos, la ecuación homogénea es igual a la del anterior ejercicio y, por tanto, la solución general de dicha ecuación es

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Escribimos la función de la ecuación completa en la forma

$$\sin 2x = \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}$$

y aplicamos el método de los coeficientes indeterminados. Dado que las raíces no se repiten, la solución particular tendra la forma

$$\hat{y} = ae^{2ix} + be^{-2ix},$$

que introducimos en la ecuación de partida

$$\frac{d^2}{dx^2}(ae^{2ix} + be^{-2ix}) - \frac{d}{dx}(ae^{2ix} + be^{-2ix}) - 2(ae^{2ix} + be^{-2ix}) = \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}$$

de donde se obtiene que $a = \dfrac{1}{12i - 4}$ y $b = \dfrac{1}{12i + 4}$.

y, por tanto, la solución general de la ecuación completa quedaría en la forma

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{12i - 4} e^{2ix} + \frac{1}{12i + 4} e^{-2ix}.$$

3.12 Resuelve la siguiente ecuación diferencial empleando el método de la variación de constantes

$y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

Solución:

Calculamos las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - 2\lambda + y = 0,$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$, es decir, tenemos dos raíces iguales. La solución general de la ecuación homogénea será

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Para aplicar el método de la variación de constantes empleamos la fórmula que nos da el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} C_1' e^x + C_2' x e^x &= 0 \\ C_1' e^x + C_2'(x e^x + e^x) &= \frac{e^x}{x}. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se llega a

$$C_1' = -1 \quad C_2' = \frac{1}{x},$$

y, por tanto, tras integrar obtenemos los coeficientes

$$C_1 = -x + K_1, \quad C_2 = \ln|x| + K_2.$$

Sustituyendo e incluyendo la solución de la ecuación homogénea nos queda la solución general de la ecuación completa es

$$y = -x e^x + x e^x \ln|x| + C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Capítulo 4

Sistemas de ecuaciones diferenciales

En este capítulo estudiaremos los sistemas de ecuaciones diferenciales. Por conveniencia, haremos un cambio en la notación general que hemos seguido hasta ahora. Llamaremos t a la variable independiente y, en general, las variables x, y y z van a depender de dicha variable independiente. Además, usaremos indistintamente la notación empleada hasta ahora para las derivadas o, en ocasiones, emplearemos la siguiente forma

$$x' = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}.$$

En general, emplearemos la forma $\dot{x}$ cuando, como veremos, entendamos que x representa una componente de un vector de variables.

Digamos que, en un sistema de ecuaciones diferenciales, se tienen en general n variables ligadas a través de sus derivadas con respecto a la misma variable independiente. Como vemos, la notación que emplearemos no es aleatoria ya que, cuando se estudian sistemas dinámicos en un espacio tridimensional, es típico obtener ecuaciones diferenciales de las variables espaciales (x, y, z) y la variable tiempo, t. Para referirnos a un sistema general de n variables dependientes emplearemos la notación $x_1, x_2, ..., x_n$, donde cabe tener en mente que, volviendo al caso de un espacio tridimensional, podríamos emplear la notación estándar $x_1 = x, x_2 = y$ y $x_3 = z$.

Para comprender la importancia de los sistemas de ecuaciones diferenciales en Física pongamos el siguiente ejemplo. La posición de una partícula moviéndose en un espacio tridimensional vendrá dada por un vector que cambia con el tiempo, es decir $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. La velocidad de la partícula será otro vector que presentará la forma $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. En general, la velocidad será función de todas las componentes del vector de posición y del tiempo de manera que representan un sistema de ecuaciones de la forma $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t)$. La solución del sistema de ecuaciones permite, por tanto, predecir la posición de la partícula en cada instante.

4.1. Sistemas lineales

En esta estudiaremos el caso general en el que tenemos un cierto sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Comenzaremos estudiando los sistemas no homogéneo con coeficientes variables.

4.1.1. Sistemas no homogéneos con coeficientes variables

Podemos escribir este tipo de sistema de ecuaciones diferenciales lineales de la siguiente forma

$$\frac{dx_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)x_j + f_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.1}$$

donde ahora los coeficientes son una cierta matriz a_{ij} y la variable dependiente y sus derivadas se pueden representar como un cierto vector.

Al igual que vimos en el capítulo anterior, si $f_i(t) = 0$, entonces el sistema de ecuaciones será homogéneo. En ese caso, el sistema de ecuaciones diferenciales quedará en la forma

$$\frac{dx_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)x_j.$$

4.2. Notación vectorial, matriz fundamental y determinante de Wronski

Para aligerar la notación y, además, encontrar de manera más intuitiva la solución de los sistemas de ecuaciones, se suele emplear una notación vectorial de manera que es posible relacionar las soluciones y las variables mediante una cierta matriz. Comencemos introduciendo un vector para la variable independiente

$$\vec{x} = (x_1(t), x_2(t), , ..., x_n(t))$$

y otro para las funciones del sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo

$$\vec{f} = (f_1(t), f_2(t), , ..., f_n(t)).$$

De esta forma, las derivadas y las variables dependientes quedan ligadas a través de una matriz de coeficientes

$$A = (a_{ij}(x)), \tag{4.2}$$

de manera que podemos expresar el sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas como

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}$$

y, si las ecuaciones fuesen homogéneas tendríamos

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

Las soluciones particulares linealmente independientes del sistema de ecuaciones serán a su vez vectores que tendrán n componentes. Por ejemplo, la solución x_1 se podrá expresar como un vector de la forma $\vec{x}_1 = (x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1})$. De la misma forma, existirán n soluciones de este tipo. En este caso, podemos construir una matriz, que contenga de manera ordenada cada una de las soluciones así como sus componentes, es decir

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior se denomina matriz fundamental si se garantiza que cada una de las soluciones particulares del sistema es linealmente independiente. Es por ello que, para comprobar si son linealmente independientes, se hace el determinante de la matriz de soluciones. A pesar de que su forma no es la misma a la vista en el capítulo anterior, el determinante de la matriz de soluciones se le denomina igualmente wronskiano y, si es distinto de cero, entonces las soluciones serán linealmente independientes. Es decir

$$W(x) = \det|X(t)| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

Si $W(x) \neq 0$, entonces las soluciones son linealmente independientes y, por tanto, $X(t)$ es la matriz fundamental del sistema. En tal caso, la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneo se puede expresar como

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} + \hat{x}(t) \tag{4.3}$$

donde $\vec{c} = (C_1, C_1, \dots, C_n)$ son cada una de las constantes de integración y $\hat{x}$ es un vector que contiene las soluciones particulares de la ecuación no homogénea. Por tanto, en el caso de que la ecuación sea homogénea, la solución general viene dada por

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} \tag{4.4}$$

4.2.1. Método de la variación del vector de coeficientes

Al igual que hicimos en la resolución de una ecuación diferencial de orden superior, se puede realizar una aproximación similar para obtener el vector de constantes de integración así como el vector de soluciones particulares. Empleamos el mismo procedimiento, suponiendo que el vector $\vec{c}(t)$ y que, además, satisface la ecuación

$$X(t)\frac{d\vec{c}(t)}{dt} = \vec{f}(t).$$

Si $X(t)$ es la matriz fundamental, su determinante es distinto de cero y, por tanto, existe la matriz inversa $X^{-1}(t)$ [1]. y es posible calcular

$$\frac{d\vec{c}(t)}{dt} = X(t)^{-1}\vec{f}(t).$$

[1] Recordar que solo es posible calcular la matriz inversa si es el determinante es distinto de cero ya que $X^{-1} = \dfrac{adj(X^\top)}{|X|}$, donde $adj()$ significa matriz adjunta y $\top$ matriz traspuesta.

Por tanto, se hallará el vector de constantes a partir de la integración del sistema anterior

$$\vec{c}(t) = \int X(t)^{-1}\vec{f}(t)dt + C_0.$$

Hecho esto, sustituimos el vector obtenido de la variación de *constantes* en la ecuación de la solución homogénea del sistema, Ec.(4.4), es decir

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} = X(t)C_0 + X(t)\int X^{-1}(t)\vec{f}(t)dt$$

Si comparamos con la solución no homogénea, Ec.(4.3), es fácil ver que la solución particular viene dada por

$$\hat{x}(t) = X(t)\int X^{-1}(t)f(t)dt.$$

4.2.2. Sistema lineal no homogéneo con coeficientes constantes. El método de Euler

Si es sistema es lineal no homogéneo con coeficientes constantes, entonces la matriz de coeficientes será una matriz de constantes tal que $A = (a_{ij}) = constante$, con $i, j = \overline{1,n}$. Para resolver este tipo de sistema se emplea el método de Euler que, en el fondo, es exactamente igual que el método que introdujimos en capítulos anteriores para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes no homogéneos. En primer lugar, debemos buscar la solución del sistema homogéneo, es decir, encontrar las soluciones del sistema

$$\frac{dx_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)x_j.$$

Es fácil ver que, por analogía con lo visto anteriormente, las soluciones de este tipo de ecuación deben ser necesariamente exponenciales en el número e. Recuérdese que esto es así ya que tenemos que la variable y su derivada están relacionadas linealmente a través de una cierta constante y, en general, esto solo sucederá con funciones del tipo $e^{\lambda t}$. Por tanto, si empleamos este método teniendo en cuenta que ahora la relación es vectorial, las soluciones serán del tipo

$$\vec{x}(t) = \vec{b}\, e^{\lambda_i t}$$

donde $\vec{b}$ es un vector de constantes y λ_i una cierta constante. De manera análoga a lo que ocurría en el capítulo anterior, si introducimos este tipo de soluciones en el sistema de ecuaciones diferenciales nos quedará

$$F(\lambda)\vec{b} = 0$$

donde ahora $F(\lambda)$ es una matriz que contiene las posibles raíces del sistema de ecuaciones diferenciales. De esta forma, la ecuación característica queda como

$$\mathbf{det} F(\lambda) = 0,$$

de donde se obtienes las posibles raíces λ_i, con $i = \overline{1,n}$. Es posible, por tanto, expresar las soluciones del sistema como

$$\vec{x}_1 = \vec{b}_1 e^{\lambda_1 t},\ \vec{x}_2 = \vec{b}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots,\ \vec{x}_n = \vec{b}_n e^{\lambda_n t}$$

Por tanto, la solución general del sistema se puede expresar como la combinación lineal de los vectores solución del sistema, es decir

$$\vec{x} = \sum_i^n C_i \vec{b}_i e^{\lambda_i t}.$$

Si existen raíces repetidas, llamémosles λ_s, el vector de solución correspondiente será

$$\vec{x}_s = \frac{1}{(r-1)!} F^{r-1}(\lambda_s) t^{r-1} \vec{a}_s e^{\lambda_s t}$$

donde r es la multiplicidad de la raíz y $\vec{a}_s$ un vector que satisface que $F^r(\lambda_s)\vec{a}_s = 0$.

4.3. Sistemas de ecuaciones diferenciales resolubles por el método de eliminación

Si bien en este capítulo hemos presentado los conceptos generales que permiten la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales genéricos, en algunos casos encontrar la solución del sistema no requiere tanta complejidad. Como veremos en esta sección, en ocasiones ni siquiera es necesario emplear la notación vectorial. Si, por ejemplo, el vector de variables es $\vec{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ y el sistema es lineal con coeficientes constantes, podremos, en general, resolver el sistema por el método de eliminación. Veamos los siguientes ejemplos

1. $\dot{x} = 2x + y,\ \dot{y} = 3x + 4y.$

   Para asentar conceptos, identifiquemos las variables $x_1 = x$ y $x_2 = y$. Las derivadas serán, en este caso, con respecto a una variable independiente que llamaremos t. Por tanto, si escribiésemos el sistema en forma vectorial tendríamos

   $$(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}) = (2x_1 + x_2, 3x_1 + 4x_2).$$

   o, identificando la matriz de coeficientes

   $$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}$$

   Resolvamos el sistema por el método de eliminación, es decir, despejamos una de las variables ecuación y sustituimos en la otra. Por ejemplo, despejamos

   $$y = \dot{x} - 2x,$$

   y, sustituyendo, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} - 2x) = 3x + 4(\dot{x} - 2x),$$

que resulta en

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 5x = 0.$$

La ecuación anterior es lineal, de segundo orden, con coeficientes constantes y homogénea. Buscamos la solución a partir de la ecuación característica

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0,$$

que da lugar a las raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$. La solución general para la variable x será por tanto

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$$

Sustituimos para obtener la solución de la otra variable

$$y = \frac{d}{dt}(C_1 e^t + C_2 e^{5t}) - 2(C_1 e^t + C_2 e^{5t}) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$

Podríamos, por tanto, escribir la solución general en forma vectorial

$$\vec{x} = (C_1 e^t + C_2 e^{5t}, -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t})$$

o, lo que es lo mismo, escribir la matriz fundamental del sistema

$$X(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^t & C_2 e^{5t} \\ -C_1 e^t & 3C_2 e^{5t} \end{pmatrix}$$

Podemos escribir las soluciones en la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Si calculamos el determinante de dicha matriz da como resultado

$$\mathbf{det} X(t) = 3C_1 C_2 e^{6t} + C_1 C_2 e^{6t} = 4C_1 C_2 e^{6t}$$

que, como vemos, es distinto de cero y, por lo tanto, la matriz es efectivamente fundamental.

2. $\dot{x} + y = t^2 + 6t + 1,\ \dot{y} - x = -3t^2 + 3t + 1$

   Como vemos, en este caso tenemos un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo. Sin embargo, el sistema se puede resolver por el método de eliminación. Despejamos en la primera ecuación

   $$y = t^2 + 6t + 1 + \dot{x},$$

   y sustituimos en la segunda

   $$t^2 + 6t + 1 + \dot{x} - x = -3t^2 + 3t + 1$$

   que se simplica a la siguiente forma

   $$\ddot{x} + x = 3t^2 - t + 5.$$

   Resolvemos, por ejemplo, por el método de la variación de constantes. Obtenemos las raíces de la ecuación homogénea

   $$\lambda^2 + 1 = 0$$

   y, por tanto, las raíces son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$. La solución general de la ecuación homogénea es, por tanto

   $$x = C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}.$$

   que, recordando los visto en el capítulo anterior, podemos simplificar si redefinimos las constantes a

   $$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

   La solución particular de la ecuación completa, aplicando el método de los coeficientes indeterminados, es

   $$\hat{x} = -3t^2 + 3t + 1.$$

   y, por tanto, la solución general para la variable x se puede escribir como

   $$x = C_1 \sin t + C_2 \cos t + 3t^2 - 1.$$

   Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos la solución completa del sistema de ecuaciones diferenciales

   $$y = C_2 \sin t - C_1 \cos t + t^2 + 2.$$

   Nuevamente, el sistema que acabamos de resolver lo podíamos haber escrito en notación vectorial, teniendo en cuenta que $x_1 = x$ y $x_2 = y$ y que, ahora, la función es no homogénea por lo que tendríamos que considerar la función vectorial $\vec{f}(t) = (t^2 + 6t + 1, -3t^2 + 3t + 1)$.

3. $\dot{x} = y - z,\ \dot{y} = x + y,\ \dot{z} = x + z.$

   Como vemos, en este caso, tenemos un sistema de tres ecuaciones donde las variables son $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Podemos proceder de distintas formas para resolver el sistema. Por ejemplo, hagamos la derivada de la primera ecuación

$$\ddot{x} = \dot{y} - \dot{z}.$$

   Sustituimos en la ecuación anterior la forma dada en el sistema de $\dot{y}$ y $\dot{z}$, es decir

$$\ddot{x} = (x + y) - (x + z) = y - z.$$

   Como vemos, el resultado de la sustitución es igual a la primera ecuación, es decir, $y - z = \dot{x}$. Por tanto, nos queda la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea

$$\ddot{x} - \dot{x} = 0.$$

   La ecuación característica de la ecuación diferencial anterior es $\lambda(\lambda - 1) = 0$ y, por tanto, las raíces son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$. La solución general de la primera ecuación del sistema es

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t.$$

   Ahora podemos sustituir esta solución en, por ejemplo, la tercera ecuación diferencial

$$\dot{z} = x + z = C_1 + C_2 e^t + z.$$

   Reescribimos la ecuación en la forma 1

$$\dot{z} - z = C_1 + C_2 e^t,$$

   que podemos resolver, por ejemplo, por el método de los coeficientes indeterminados. Las raíces de la ecuación homogénea son nuevamente $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$, de manera que la solución debe ser del tipo

$$\hat{z} = a + bte^t.$$

   Sustituyendo en la ecuación inicial tenemos que

$$(bte^t + be^t) - a - bte^t = C_1 + C_2 e^t.$$

   Ahora simplemente igualamos los términos que multiplican a e^t y los términos independientes, de manera que podemos identificar que $a = -C_1$ y $b = C_2$. Por tanto, la solución general de la ecuación completa será

$$z = (C_3 + C_2 t)e^t - C_1$$

donde la constante C_3 se corresponde con la solución de la ecuación homogénea. Sustituyendo tanto $x(t)$ como $z(t)$ en la segunda ecuación obtenemos la última solución del sistema de ecuaciones

$$y = e^t(C_3 + C_2(t+1)) - C_1.$$

4.4. Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales por el método de Euler

Teniendo en mente que algunos de los casos que veremos se pueden resolver de manera directa empleando el método de eliminación, apliquemos el método de Euler en los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales. Como veremos, el método de Euler nos permite generalizar el método de resolución sin necesidad de tener que tratar de hallar relaciones que simplifiquen el sistema.

1. $\dot{x} = x - y,\ \dot{y} = y - 4x$

   Según el método de Euler, las soluciones al sistema de ecuaciones lineal de coeficientes constantes deben ser del tipo

   $$x = Ae^{\lambda t},\ y = Be^{\lambda t}$$

   donde A, B y λ son constantes. Si sustituimos la forma de las solución propuestas en el sistema de ecuaciones diferenciales, tenemos que

   $$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Ae^{\lambda t}) &= Ae^{\lambda t} - Be^{\lambda t} \\ \frac{d}{dt}(Be^{\lambda t}) &= Be^{\lambda t} - 4Ae^{\lambda t} \end{aligned}$$

   que queda como el siguiente sistema de ecuaciones

   $$\begin{aligned} \lambda A &= A - B \\ \lambda B &= B - 4A \end{aligned} \tag{4.5}$$

   Podemos reescribir el sistema como

   $$\begin{aligned} (\lambda - 1)A + B &= 0 \\ 4A + (\lambda - 1)B &= 0 \end{aligned}$$

   que es precisamente la ecuación característica del sistema. Nótese que, en notación vectorial, tendríamos

   $$F(\lambda)\vec{b} = 0,$$

donde $\vec{b} = (A, B)$ y la matriz de la ecuación característica es

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 4 & \lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

Las raíces de la ecuación característica se obtienen igualando a cero el determinante de $F(\lambda)$, es decir,

$$\mathbf{det} F(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - 4 = 0.$$

que da lugar a las raíces $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. Por tanto, tenemos el siguiente conjunto de soluciones

$$x_1 = A_1 e^{3t}, \quad x_2 = A_2 e^{-t},$$

$$y_1 = B_1 e^{3t}, \quad y_2 = B_2 e^{-t}.$$

El siguiente paso es hallar la relación entre las constantes. Para ello, basta con sustituir las soluciones equivalentes de cada raíz en las Ecs. (4.5). Por ejemplo, empleando la primera ecuación y sustituyendo la primera raíz tenemos

$$\lambda_1 A_1 = A_1 - B_1$$

y, por tanto,

$$3A_1 = A_1 - B_1 \quad \to \quad 2A_1 = -B_1.$$

De la misma forma, para la segunda raíz tenemos

$$-A_2 = A_2 - B_2 \quad \to \quad 2A_2 = B_2.$$

Tenemos, por lo tanto, que $B_1 = -2A_1$ y $B_2 = 2A_2$. En realidad, los coeficientes A_i y B_i son totalmente arbitrario y las constantes se pueden tener en cuenta más tarde. Dicho de otra forma, solo nos importa el peso relativo de las soluciones de x e y por lo que, en general, podemos tomar los valores $A_1 = A_2 = 1$ que da lugar a $B_1 = -2$ y $B_2 = 2$. Por tanto, la matriz fundamental del sistema vendrá dada por

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -2e^{3t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Podemos expresar la solución general en notación vectorial como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -2e^{3t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

o, lo que es lo mismo

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \quad y = -2C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-t}.$$

2. $\dot{x} = x - y + z,\ \dot{y} = x + y - z,\ \dot{z} = 2x - y.$

   Nuevamente, buscamos soluciones del tipo

$$x = Ae^{\lambda t},\ y = Be^{\lambda t},\ z = Ce^{\lambda t}$$

   Sustituimos estas soluciones en las tres ecuaciones diferenciales del sistema:

$$\begin{array}{rcl} A(\lambda - 1) + B - C & = & 0, \\ -A + (\lambda - 1)B + C & = & 0, \\ -2A + B + \lambda C & = & 0. \end{array}$$

   de manera que el determinante de la ecuación característica queda como

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & 1, \\ -2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

   Factorizando el determinante se obtiene que

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0,$$

   y, por tanto, las raíces del sistema de ecuaciones diferenciales son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -1$. Por tanto, el conjunto de soluciones del sistema tendrá la siguiente forma

$$\begin{array}{lll} x_1 = A_1 e^{t}, & x_2 = A_2 e^{2t}, & x_3 = A_3 e^{-t}, \\ y_1 = B_1 e^{t}, & y_2 = B_2 e^{2t}, & y_3 = B_3 e^{-t}, \\ z_1 = C_1 e^{t}, & z_1 = C_2 e^{2t}, & z_3 = C_3 e^{-t}. \end{array}$$

   Para obtener la relación entre los coeficientes A_i, B_i, C_i, con $i = 1, 2, 3$, basta con emplear el sistema de ecuaciones que lleva a la ecuación característica, sustituyendo para cada una de las raíces. Es decir

$$\begin{array}{rcl} A_i(\lambda_i - 1) + B_i - C_i & = & 0, \\ -A_i + (\lambda_i - 1)B_i + C_i & = & 0, \\ -2A_i + B_i + \lambda_i C_i & = & 0. \end{array}$$

   Sustituyendo para cada valor de i, se llega a las siguientes relaciones

$$A_1 = B_1 = C_1, \quad A_2 = C_2, B_2 = 0, \quad B_3 = -3A_3, C_3 = -5A_3.$$

   Nuevamente, nos interesa el peso de cada una de las soluciones y, por tanto, los valores de las constantes se pueden escoger de forma arbitraria siempre que cumplan las relaciones anteriores. Podemos elegir, por ejemplo, $A_1 = A_2 = A_3 = 1$, de forma que $B_1 = 1, B_2 = 0, B_3 = -3$ y $C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = -5$. Por tanto, la matriz fundamental del sistema es

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-t} \\ e^t & 0 & -3e^{-t} \\ e^t & e^{2t} & -5e^{-t} \end{pmatrix},$$

y, por tanto, la solución general del sistema en forma vectorial se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-t} \\ e^t & 0 & -3e^{-t} \\ e^t & e^{2t} & -5e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-t} \\ C_1e^t + -3C_3e^{-t} \\ C_1e^t + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t} \end{pmatrix}$$

3. $\ddot{x} - x + 2\ddot{y} - 2y = 0,\ \dot{x} - x + \dot{y} + y = 0$

   En este caso, tenemos un sistema de ecuaciones de orden superior, en concreto, de segundo orden. Como veremos, la manera de proceder para hallar las soluciones es exactamente la misma a la realizada para los casos de primer orden. Consecuentemente, buscaremos soluciones del tipo

$$x = Ae^{\lambda t},\ y = Be^{\lambda t}$$

   Sustituimos este tipo de soluciones en el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - 1)A + 2(\lambda^2 - 1)B &= 0, \\ (\lambda - 1)A + (\lambda + 1)B &= 0. \end{aligned}$$

   Con esto, podemos escribir el determinante de la ecuación característica

$$\mathbf{det}(F(\lambda)) = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & 2(\lambda^2 - 1) \\ \lambda - 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)(3 - \lambda) = 0$$

   de donde se obtienen las raíces

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1e^t, \quad x_2 = A_2e^{-t}, \quad x_3 = A_3e^{3t}, \\ y_1 &= B_1e^t, \quad y_2 = B_2e^{-t}, \quad y_3 = B_3e^{3t}. \end{aligned}$$

   Procediendo de la misma manera que en los ejercicios anteriores, podemos hallar la relación entre los coeficientes A_i y B_i, con $i = 1, 2, 3$. Se llega a que $B_1 = 0$ y, por tanto, A_1 puede tomar cualquier valor. De la misma forma $A_2 = 0$ y B_2 puede tomar cualquier valor. Tomaremos, por simplicidad, que $A_1 = B_2 = 1$. Por último se obtiene que $A_3 = 2$ y $B_3 = -1$. Con esto, la matriz fundamental del sistema viene dada por

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 2e^{3t}, \\ 0 & e^{-t} & -e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Por último, escribimos la solución general del sistema de ecuaciones en forma vectorial como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 2e^{3t}, \\ 0 & e^{-t} & -e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^t + 2C_3e^{3t} \\ C_2e^{-t} - C_3e^{3t} \end{pmatrix}$$

4. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{y} + y = 0, \quad 3\ddot{x} + 5x + \dot{y} + 3y = 0.$

   Tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Nuevamente, ensayaremos soluciones del tipo

   $$x = Ae^{\lambda t}, \ y = Be^{\lambda t},$$

   que, al introducirlas en el sistema de ecuaciones, dan lugar a

   $$\begin{aligned} (\lambda^2 + 5\lambda)A + (2\lambda + 1)B &= 0, \\ (3\lambda^2 + 5)A + (\lambda + 3)B &= 0. \end{aligned}$$

   El determinante de la ecuación característica será

   $$\mathbf{det}(F(\lambda)) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 5 & 2\lambda + 1 \\ 3\lambda^2 + 5 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = -5\lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda - 5 = 0,$$

   de donde se obtienen las raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$. Como vemos, una de las raíces es repetida. Para la raíz simple la solución será

   $$x_3 = A_3e^{-t}, \quad y_3 = B_3e^{-t}$$

   Sustituyendo estas soluciones en la ecuación de los coeficientes tenemos que

   $$\begin{aligned} ((-1)^2 - 5)A_3 + (1 - 2)B_3 &= 0, \\ (3(-1)^2 + 5)A_3 + (-1 + 3)B_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

   que, simplificando queda como

   $$\begin{aligned} -4A_3 - B_3 &= 0, \\ 8A_3 + 2B_3 &= 0. \end{aligned}$$

   de manera que, lógicamente, ambas conducen a la misma condición: $B_3 = -4A_3$. Podemos, por ejemplo, tomar $A_3 = -1$ de manera que $B_3 = 4$.

   Ahora bien, nos faltan por determinar las soluciones correspondientes a las raíces repetidas. En este caso, dado que la ecuación de los coeficientes se construye a partir del valor de la raíz (ver Ec.(4.6), deben tenerse en cuenta los dos términos de la raíz repetida. Es decir, las soluciones de la raíz repetida son del tipo

$$x_{1,2} = (A_1 + A_2 t)e^t, \quad y_{1,2} = (B_1 + B_2 t)e^t.$$

Tras introducir estas soluciones en el sistema de ecuaciones inicial y, tras realizar algunas simplificaciones, se llega al siguiente conjunto de condiciones (se igualan términos libres y términos en t)

$$6A_1 + 7A_2 + 3B_1 + 2B_2 = 0, \ 2A_2 + B_2 = 0, \ 8A_1 + 6A_2 + 4B_1 + 4 = 0.$$

de donde obtenemos las condiciones que deben cumplir los coeficientes

$$B_2 = -A_2, \ B_1 = -A_1 - A_2.$$

Si hacemos, por ejemplo, $A_2 = 1$, obtenemos que $B_2 = -1$. Si, además, tomamos $B_1 = 1$, nos queda que $A_1 = 2$. Podemos escribir la matriz fundamental del sistema como

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & te^t & -e^{-t}, \\ e^t & -te^t & 4e^{-t} \end{pmatrix},$$

de manera que la solución general del sistema en notación vectorial será

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t & te^t & -e^{-t}, \\ e^t & -te^t & 4e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2C_1 + tC_2)e^t - C_3 e^{-t} \\ (1 - tC_2)e^t + 4C_3 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

4.5. Ejemplos del método de variación del vector constante

Veamos algunos ejemplos en los que el sistema de ecuaciones es no homogéneo. En general, emplearemos el método de Euler en primer lugar para hallar la solución del sistema homogéneo y, posteriormente, se aplicará el método de variación de constantes para hallar la solución completa.

1. $\dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}.$

   Como vemos, el sistema de ecuaciones es no homogénea ya que presenta el siguiente vector de funciones

   $$\vec{f}(t) = (\frac{2}{e^t - 1}, \frac{3}{e^t - 1})$$

   Para resolver el sistema, procedemos hallando en primer lugar la solución del sistema homogéneo, es decir, cuando $\vec{f}(t) = \vec{0}$. En ese caso, nos queda el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -4x - 2y,\\ \dot{y} &= 6x + 3y.\end{aligned}$$

Suponemos soluciones del tipo $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$ y las introducimos en el sistema

$$\begin{aligned}(\lambda+4)A + 2B &= 0,\\ (\lambda-3)B - 6A &= 0.\end{aligned}$$

De donde obtenemos la ecuación característica

$$\mathbf{det}(F(\lambda)) = \begin{vmatrix}\lambda+4 & 2\\ -6 & \lambda-3\end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 4\lambda - 12 + 12 = \lambda^2 + \lambda = 0.$$

Por tanto, las raíces son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$, de donde se infiere que las soluciones tendrán la forma

$$x = A_1 + A_2e^{-t}, \quad y = B_1 + B_2e^{-t}.$$

Sustituimos el valor de la primera raíz ($\lambda_1 = 0$) para obtener

$$\begin{aligned}4A_1 + 2B_1 &= 0,\\ -3B_1 - 6A_1 &= 0,\end{aligned}$$

y, por tanto, $B_1 = -2A_1$. Hacemos lo mismo con la segunda raíz

$$\begin{aligned}3A_2 + 2B_2 &= 0,\\ -4B_2 - 6A_2 &= 0,\end{aligned}$$

que da lugar a $B_2 = -\dfrac{3}{2}A_2$. Con esto, considerando $A_1 = A_2 = 1$, nos queda la solución general de la ecuación homogénea como

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & e^{-t}\\ -2 & -3/2e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_1 + C_2e^{-t}\\ -2C_1 - 3/2C_2e^{-t}\end{pmatrix}.$$

Ahora, apliquemos el método de la variación de constantes. Como se trata de ecuaciones diferenciales de primer orden, podemos aplicar la versión simplificada del método. Es decir, suponemos que el vector de constantes ahora depende de la variable independiente de manera que $C_1(t)$ y $C_2(t)$. A continuación, buscamos hallar las soluciones particulares $\hat{x}$ y $\hat{y}$ en las que el vector de constantes ahora depende de la variable t, es decir

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(t) + C_2(t)e^{-t} \\ -2C_1(t) - 3/2C_2(t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

en el sistema de ecuaciones diferenciales completo, de manera que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(C_1(t) + C_2(t)e^{-t}) + 4(C_1(t) + C_2(t)e^{-t}) + 2(-2C_1(t) - 3/2C_2(t)e^{-t}) &= \frac{2}{e^t - 1}, \\ \frac{d}{dt}(-2C_1(t) - 3/2C_2(t)e^{-t}) - 6(C_1(t) + C_2(t)e^{-t}) - 3(-2C_1(t) - 3/2C_2(t)e^{-t}) &= -\frac{3}{e^t - 1}. \end{aligned}$$

Tras realizar algunos cálculos el sistema se simplifica a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 + \dot{C}_2 &= \frac{2}{e^t - 1}, \\ -2\dot{C}_1 - \frac{3}{2}\dot{C}_2 e^{-t} &= -\frac{3}{e^t - 1}. \end{aligned}$$

De manera que resulta sencillo obtener que

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= 0. \\ \dot{C}_2 &= \frac{2e^t}{e^t - 1}, \end{aligned}$$

Tras integrar ambas ecuaciones, se llega a

$$\begin{aligned} C_1 &= K_1, \\ C_2 &= 2\ln|e^t - 1| + K_2, \end{aligned}$$

donde K_1 y K_2 son constantes arbitrarias que se pueden ser absorbidas por C_1 y C_2 cuando expresemos la solución general al sistema completo. Dicha solución será por lo tanto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + (C_2 + 2\ln|e^t - 1|)e^{-t} \\ -2C_1 - (3/2C_2 + 3\ln|e^t - 1|)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

2. $\dot{x} = x - y - \dfrac{1}{\cos t}$, $\dot{y} = 2x - y$

   Como vemos, tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en la que al menos una de ellas es no homogénea. Procederemos de igual manera al caso anterior. En primer lugar, hallamos la solución del sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{aligned}\dot{x} - x + y &= 0,\\ \dot{y} - 2x + y &= 0,\end{aligned}$$

para lo que, nuevamente, suponemos soluciones del tipo $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$. Tras sustituir en el sistema se obtiene

$$\begin{aligned}(\lambda - 1)A + B &= 0,\\ -2A + (\lambda + 1)B &= 0.\end{aligned}$$

Escribimos el determinante de la ecuación característica

$$\mathbf{det}(F(\lambda)) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 1 = 0.$$

Por tanto, las raíces del sistema de ecuaciones son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$. Las soluciones serán del tipo

$$x = a_1 e^{ix} + a_2 e^{-ix}, \quad y = b_1 e^{ix} + b_2 e^{-ix}$$

donde, por conveniencia, hemos llamados a_i y b_i a las constantes. Si recordamos lo visto en capítulos anteriores, empleando la fórmula de Euler para el número e con argumento complejo, es posible reescribir las soluciones en la forma

$$x = A_1 \sin t + A_2 \cos t, \quad y = B_1 \sin t + B_2 \cos t.$$

Sustituyendo en la primera ecuación el sistema homogéneo se obtiene

$$(B_1 - A_2 - A_1)\sin t + (A_1 - A_2 + B_2)\cos t = 0,$$

de donde se deduce que $B_1 = A_1 + A_2$ y $B_2 = A_2 - A_1$. De lo visto anteriormente es fácil ver que, por ejemplo, podemos directamente llamar $A_1 = C_1$ y $A_2 = C_2$ para obtener la solución general del sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \sin t + C_2 \cos t \\ (C_1 + C_2)\sin t + (C_2 - C_1)\cos t \end{pmatrix}.$$

A continuación, buscamos la solución completa aplicando el método de la variación del vector constante. Sustituyendo en la primera ecuación del sistema se obtiene[2]

$$\dot{C}_1 - \dot{C}_2 \sin t = \frac{1}{\cos t}$$

[2]Dado que puede resultar tedioso se recomienda el uso de software, por ejemplo, Wolfram Mathematica para simplificar este cálculo. Se puede calcular mediante la siguientes líneas,
Simplify[D[A[t]*Sin[t]+B[t]*Cos[t],t]-A[t]*Sin[t]-B[t]*Cos[t]+(A[t]+B[t])*Sin[t]+(B[t]-A[t])*Cos[t]]

4.6. Sistemas de ecuaciones diferenciales resolubles con cambio de variable

No siempre se van a presentar los sistemas de ecuaciones diferenciales de manera que sea directamente resoluble. En ocasiones, es posible aplicar un cierto cambio de variable que hace que el sistema se pueda resolver por los métodos vistos en este capítulo. Pensemos por ejemplo en un sistema de ecuaciones diferenciales que tenga la siguiente forma

$$\dot{x}_i = f(t)A\vec{x},$$

es decir, que presenta una cierta función de la variable independiente que multiplica a todas las ecuaciones. En este caso, buscaremos un cambio de variable de forma que dicha función quede dentro del cambio. Es decir, buscamos

$$\frac{1}{f(t)}\frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{dr}$$

donde r será la nueva variable. De la ecuación anterior es directo obtener

$$dr = f(t)dt$$

y, por tanto, la relación entre ambas variables será

$$r = \int f(t)dt.$$

Nótese que, en este caso, la constante de integración es irrelevante y, por tanto, la omitiremos. Una vez hecho el cambio, resolveremos el sistema por los métodos convencionales y, posteriormente, desharemos el cambio de la variable en la solución.

Veamos algún ejemplo de resolución mediante cambio de variable.

1. $t\dot{x} + 6x - y - 3z = 0$; $t\dot{y} + 23x - 6y - 9z = 0$; $t\dot{z} + x + y - 2x = 0$

   Como vemos, en este caso la función que tenemos es $f(t) = 1/t$. Veamos el cambio de variable

   $$r = \int f(t)dt = ln|t|.$$

   Tras hacer el cambio, el sistema queda como

   $$\begin{aligned} \frac{dx}{dr} + 6x - y - 3z &= 0, \\ \frac{dy}{dr} + 23x - 6y - 9z &= 0, \\ \frac{dz}{dr} + x + y - 2x &= 0. \end{aligned}$$

   Empleamos el método de Euler para obtener las siguientes ecuaciones

$$
\begin{aligned}
(6+\lambda)A - B - 3C &= 0, & (4.7)\\
23A + (\lambda-6)B - 9C &= 0, & (4.8)\\
A + B + (\lambda-2)C &= 0. & (4.9)
\end{aligned}
$$

Escribimos el determinante de la matriz característica

$$
\mathbf{det}(F(\lambda)) = \begin{vmatrix} 6+\lambda & -1 & -3 \\ 23 & \lambda-6 & -9 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0.
$$

De la ecuación anterior, obtenemos las raíces $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$.

Las soluciones serán, por tanto

$$
\begin{aligned}
x &= A_1 e^{2r} + A_2 e^{-r} + A_3 e^{r},\\
y &= B_1 e^{2r} + B_2 e^{-r} + B_3 e^{r},\\
z &= C_1 e^{2r} + C_2 e^{-r} + C_3 e^{r}.
\end{aligned}
$$

A partir de las raíces y de la Ec.(4.7), obtenemos las relaciones entre constantes

$$
A1 = -B_1; C_1 = 3A_1; \quad 2A_2 = B_2, A_2 = C_2 \quad A_3 = B_3, C_3 = 2A_3.
$$

Por tanto, la solución en forma matricial será

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2r} & e^{-r} & e^{r} \\ -e^{2r} & 2e^{-r} & e^{r} \\ 3e^{2r} & e^{-r} & 2e^{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}
$$

Tras deshacer el cambio llegamos a

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & \dfrac{1}{|t|} & |t| \\ -t^2 & \dfrac{1}{|t|} & |t| \\ 3t^2 & \dfrac{1}{|t|} & 2|t| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}
$$

2. Resuelve el siguiente sistema

   $t\dot{x} + 2(x-y) = t; \quad t\dot{y} + x + 5y = t^2.$

4.7. Sistemas de ecuaciones diferenciales escritos en forma normal y en forma simétrica.

Se dice que un sistema de n variables y, por tanto, n ecuaciones diferenciales está escrito en forma normal si presenta la estructura

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \\
\dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \\
\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots x_n)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

donde f_i con $i = \overline{1, n}$ son una serie de funciones conocidas.

Cualquier sistema de ecuaciones diferenciales como el de la Ec.(4.10) se puede escribir de forma simétrica haciendo lo siguiente

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

y, por tanto,

$$\frac{dx_i}{f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = dt.$$

Es decir, basta con escribir

$$\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{4.11}$$

para entender que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales.

4.8. Sobre los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales

Si bien algunos sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales se pueden resolver de manera analítica, no existe un método generalizado para su resolución. En general, su resolución depende del tipo de problema y de que presente una forma tal que pueda ser reducido a un problema más simple (recordemos las ecuaciones diferenciales de orden superior no lineales integrables y aquellas reducibles a lineales).

En bastantes casos se recurre a métodos de linealización del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. Esto implica realizar algún tipo de aproximación sobre las variables que transforma el sistema de ecuaciones en un sistema lineal. En otros, se recurre a métodos numéricos para explorar las soluciones del sistema.

4.9. Sistemas de ecuaciones diferenciales en Física

Existen numerosos ejemplos de sistemas físicos que se resuelven a través de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Veamos algunos ejemplos

4.9.1. Ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales en mecánica y ondas.

Para familiarizarnos con la notación, empecemos por un ejemplo sencillo y que no requiere del método general de resolución ya que las variables no están acopladas.

1. Una partícula de masa m se mueve en la superficie interior de un cilindro de radio r cuyo eje está alineado en dirección vertical. Teniendo en cuenta que sobre la partícula actúa la fuerza de la gravedad, halla las ecuaciones que describen su trayectoria.

   Solución:

   Este es un problema típico de mecánica y ondas. Para resolver este problema debemos recurrir a las ecuaciones clásicas de la energía cinética (K) y la energía potencial U, que quedan ligadas a través del lagrangiano

   $$L = K - L,$$

   donde

   $$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

   y, en este caso,

   $$U = mgz.$$

   Resulta evidente que, dada la simetría del problema, será conveniente reescribir la energía cinética en coordenadas cilíndricas. Aplicamos los cambios pertinentes:

   $$K = \frac{m}{2}((\frac{d(r\cos\phi)}{dt})^2 + (\frac{d(r\sin\phi)}{dt})^2 + \dot{z}^2),$$

   que resulta en

   $$K = \frac{m}{2}(((\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin)^2 + (\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi)^2 + \dot{z}^2).$$

   Tras desarrollar los términos cuadráticos y agrupar, la energía potencial en coordenadas cilíndricas se reduce a

   $$K = \frac{m}{2}((\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2).$$

Ahora bien, en este problema particular, la distancia r es una constante ya que la partícula queda límitada en la superficie lateral del cilindro y, por tanto, $\dot{r} = 0$. La energía cinética queda finalmente como

$$K = \frac{m}{2}(r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2).$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento se emplea la ecuación de Lagrange, que tiene en cuenta la presencia de posibles fuerzas externas F_i,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i.$$

donde x_i son cada una de las variables de nuestro sistema. En este caso, dado que r es constante, el sistema de ecuaciones diferenciales se reduce a dos variables, $x_1 = \phi$ y $x_2 = z$.

Calculemos la ecuación de Lagrange para la variable ϕ, es decir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0.$$

que da lugar a

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = mr^2\ddot{\phi} = 0.$$

Por otro lado, para la variable z tenemos

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) + mg = m\ddot{z} + mg = 0.$$

Por tanto, las ecuaciones se pueden hallar simplemente resolviendo el sistema de ecuaciones

$$mr^2\ddot{\phi} = 0, \quad m\ddot{z} + mg = 0.$$

Este sistema es muy sencillo ya que ambas ecuaciones son directamente integrables ya que no hay ninguna ligadura entre las variables. De manera que la solución es

$$\phi(t) = C_1 t + C_2, \quad z(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

Si se quiere determinar el valor de las constantes se deben aplicar condiciones iniciales. Por ejemplo, si suponemos que $\phi(0) = 0$, entonces $C_2 = 0$. Si suponemos que en el instante inicial la partícula está localizada a una cierta altura $z(0) = z_0$, entonces $C_4 = z_0$. Es fácil ver que las otras dos constantes están relacionadas con la velocidad inicial de la partícula.

2. Considera dos péndulos de igual longitud l y masa m unidos por un resorte a una distancia a del punto de suspensión. Considera que los péndulos son rígidos, es decir, que están sujetos por varillas sólidas. Obtén las ecuaciones de movimiento.

   Es fácil ver que, si expresamos la posición de cada péndulo con respecto al punto de fijación en coordenadas polares, la energía cinética de cada uno de ellos dependerá exclusivamente del ángulo que formen con la vertical, teniendo en cuenta que el radio es fijo ($r = l$). Si sustituimos en la ecuación de la energía cinética del ejercicio anterior, considerando ϕ_1 y ϕ_2 los ángulos de cada péndulo con respecto a la vertical, se tiene que la energía cinética del sistema viene dada por

$$K = \frac{ml^2}{2}(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2).$$

   En este caso, despreciamos la energía cinética del resorte.

   Por otro lado, la energía potencial se puede expresar igualmente con respecto a cada uno de los ángulos. Si expresamos la posición del péndulo con respecto al eje z, para una posición cualquiera tendrémos que $z_i = l\cos\phi_i$. Ahora bien, la energía potencial la debemos medir con respecto a la posición de reposo, que será cuando el péndulo esté alineado con la vertical, es decir, para $\phi_i = 0$, y por tanto, $z_{i,U=0} = l$. De esta forma, para un ángulo cualquiera la energía potencial de cada péndulo será $mg(l - l\cos\phi_i)$. Por tanto, la energía potencial de los péndulos será

$$U_1 = mgl(1 - \cos\phi_1) + mgl(1 - \cos\phi_2).$$

   Por otro lado, el resorte que une ambos péndulos tendrá una cierta energía potencial elástica, que depende de la elongación del muelle. Si consideramos x la dirección en la cual el resorte puede ser deformado, dicha energía potencial es $U_2 = 1/2kx^2$, donde k es la constante de elasticidad. Si expresamos la elongación de muelle en función de los ángulos de cada péndulo tenemos que su energía potencial es

$$U_2 = \frac{ka^2}{2}(\sin\phi_1 - \sin\phi_2)^2,$$

   donde, obviamente, la expresión anterior depende del criterio de signos empleado para los ángulos. Con esto, tenemos todas las expresiones que necesitamos para escribir el lagrangiano:

$$L = K - U = \frac{ml^2}{2}(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) - mgl(2 - \cos\phi_1 - \cos\phi_2) - \frac{ka^2}{2}(\sin\phi_1 - \sin\phi_2).$$

   Es fácil ver que, si aplicamos la ecuación de Lagrange para obtener las ecuaciones diferenciales de movimiento, están serán no lineales y el problema será difícilmente resoluble analíticamente. Una forma bastante usual de convertir este tipo de ecuaciones en resolubles es aplicar alguna forma de linealización. En este caso, si aplicamos la aproximación de ángulos pequeños el sistema se simplifica enormemente. En dicho caso tenemos que $\sin\phi_i = \phi_i$ y que $\cos\phi_i = 1$. Además, despreciamos las potencias ϕ_i^2 y términos cruzados $\phi_1\phi_2$. Obviamente, si consideramos ángulos progresivamente más grandes, la aproximación realizada llevará a soluciones cada vez más inexactas. Aplicando la aproximación anterior se llega fácilmente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\ddot{\phi}_1 + p\phi_1 - r\phi_2 = 0$$
$$\ddot{\phi}_2 + p\phi_2 - r\phi_1 = 0.$$

donde $p = \dfrac{g}{l} + \dfrac{ka^2}{ml^2}$ y $r = \dfrac{ka^2}{ml^2}$.

Como vemos, tenemos un sistema lineal de ecuaciones diferenciales homogéneas de dos variables acopladas ($x_1 = \phi_1$ y $x_2 = \phi_2$). Podemos resolverlo aplicando el método de Euler. Dado que las EDOs del sistema son homogéneas, podemos directamente suponer que las soluciones serán del tipo

$$\phi_1 = Ae^{\lambda t}, \quad \phi_1 = Be^{\lambda t}.$$

Introducimos las soluciones en el sistema para obtener

$$(\lambda^2 + p)A - rB = 0$$
$$-rA + (\lambda^2 + p)B = 0.$$

Escribimos el determinante que da lugar a la ecuación característica

$$\mathbf{det}(F(\lambda)) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + p & r \\ -r & \lambda^2 + p \end{vmatrix} = \lambda^4 + 2p\lambda^2 - r^2 - p^2 = 0.$$

que da lugar a las raíces

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{p+r}, \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{r-p}$$

Sustituyendo las constantes se tiene que

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Como vemos, se tienen cuatro raíces distintas y, por tanto, se tienen cuatro soluciones para cada variable angular, es decir, para cada péndulo. Si identificamos las frecuencias

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

podemos escribir las soluciones como

$$
\begin{aligned}
\phi_{1,1} &= A_1 e^{i\omega_1 t}, \quad \phi_{2,1} = B_1 e^{i\omega_1 t}, \\
\phi_{1,2} &= A_2 e^{-i\omega_1 t}, \quad \phi_{2,2} = B_2 e^{-i\omega_1 t}, \\
\phi_{1,3} &= A_3 e^{i\omega_2 t}, \quad \phi_{2,3} = B_3 e^{i\omega_2 t}, \\
\phi_{1,4} &= A_4 e^{-i\omega_2 t}, \quad \phi_{2,4} = B_4 e^{-i\omega_2 t}.
\end{aligned}
$$

A continuación, buscamos la relación entre las constantes de las soluciones del sistema. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
(\omega_1^2 + p)A_1 - rB_1 = 0 \\
-rA_1 + (\omega_1^2 + p)B_1 = 0,
\end{aligned}
$$

Que lleva a $A_1 = -B_1$. Nótese que esta condición es exactamente la misma para todas las constantes, exceptuando el signo. Se obtiene que $A_2 = -B_2$, $A_{3,4} = B_{3,4}$. Podemos, por tanto, escribir la solución en forma matricial como

$$
\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega_1 t} & e^{-i\omega_1 t} & e^{i\omega_2 t} & e^{-i\omega_2 t} \\ -e^{i\omega_1 t} & -e^{-i\omega_1 t} & e^{i\omega_2 t} & e^{-i\omega_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}.
$$

4.10. Oscilador armónico electromagnético

Veamos un ejemplo en el cual se tiene una carga eléctrica q que oscila armónicamente bajo la acción de un campo magnético $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ estacionario perpendicular a la dirección de oscilación (efecto Zeeman). Si aplicamos la ecuación de la fuerza de Lorentz a dicha carga, despreciando el campo eléctrico, tenemos que

$$
\mathbf{F} = \mu_0 q(\vec{v} \times \mathbf{H}).
$$

Si consideramos que la partícula oscila en dirección del eje x y suponiendo que el campo magnético va en dirección del eje z, obtenemos

$$
\mathbf{F} = \mu_0 H q(\dot{x} \times \hat{k}).
$$

que da lugar a

$$
\mathbf{F} = \mu_0 q \dot{y}\ H.
$$

Ahora bien, debido a dicha fuerza, si consideramos que la partícula no esta ligada a una determinada dirección, ya no podemos considerar que la carga se mantiene oscilando en una línea. En su lugar, la oscilación se producirá en el plano XY. Por tanto, tenemos que suponer que la partícula llevará también una cierta velocidad en el eje y y, por tanto, el campo magnético también actuará sobre dicha componente. Es fácil ver que se obtiene una ecuación equivalente a la anterior pero, en este caso, en la dirección x, es decir,

$$\mathbf{F} = -\mu_0 q \dot{x}\ H.$$

Si recordamos la ecuación diferencial que define al oscilador armónico y añadiendo la fuerza externa debida a la acción del campo magnético, tenemos que, para una variable genérica r la ecuación diferencial que define el movimiento es

$$m\ddot{r} + kr = \mathbf{F},$$

donde, como vimos en el capítulo anterior, el tipo de oscilación depende del valor de la constante k y m es la masa de la partícula.

Dado que hemos elegido el sistema de coordenadas cartesianas de forma que la partícula oscile en el plano XY, tenemos un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales con variables acopladas

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= \mu_0 q H \dot{y}, \\ m\ddot{y} + ky &= -\mu_0 q H \dot{x}, \end{aligned}$$

Aplicamos el método de Euler para resolver el sistema, es decir, suponemos soluciones del tipo $x = Ae^{\lambda t}$ e $y = Be^{\lambda t}$ para obtener

$$\begin{aligned} (m\lambda^2 + k)A - q\mu_0 H\lambda B &= 0 \\ q\mu_0 H\lambda A + (m\lambda^2 + k)B &= 0. \end{aligned}$$

Calculamos la ecuación característica del sistema

$$\mathbf{det}(F(\lambda)) = \begin{vmatrix} m\lambda^2 + k & -q\mu_0 H\lambda \\ q\mu_0 H\lambda & m\lambda^2 + k \end{vmatrix} = m^2\lambda^4 + ((q\mu_0 H)^2 + 2km)\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Resolviendo se obtienen las raíces

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2,$$

donde

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{4}\omega_H^2 + \omega_0} \pm \frac{\omega_H}{2},$$

siendo

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

y

$$\omega_H = \frac{q\mu_0 H}{m}.$$

La relación entre las constantes se puede obtener de la ecuación

$$A_i(\lambda_i^2 + \omega_0^2) = \lambda_i \omega_H B_i.$$

Por tanto, se tiene que

$$A_i = \frac{\lambda_i \omega_H}{\lambda_i^2 + \omega_0^2}$$

Podemos, por último, expresar la solución general del sistema, suponiendo que $B_i = 1$, como

$$\begin{aligned} x &= \frac{i\omega_1\omega_H}{\omega_0^2 - \omega_1^2} e^{i\omega_1 t} - \frac{i\omega_1\omega_H}{\omega_0^2 - \omega_1^2} e^{-i\omega_1 t} + \frac{i\omega_2\omega_H}{\omega_0^2 - \omega_2^2} e^{i\omega_2 t} - \frac{i\omega_2\omega_H}{\omega_0^2 - \omega_2^2} e^{-i\omega_2 t}, \\ y &= e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t}. \end{aligned}$$

Capítulo 5

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Durante todo el curso nos hemos centrado en las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) (y sistemas de dicho tipo de ecuaciones). Recordemos que eran aquellas en las que una sola variable (o un vector de variables) depende de una única variable independiente. Por tanto, siempre que tengamos una ecuación diferencial en la que aparezcan derivadas parciales estaremos ante a una ecuación diferencial no ordinaria. En realidad, a este tipo de ecuaciones diferenciales se les denomina ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP). Veamos su definición formal.

5.1. Definición de ecuación diferencial en derivadas parciales

Sea u una cierta variable que depende de otras n variables, $x_1, x_2, .., x_n$. Se dice que una ecuación diferencial es en derivadas parciales si presenta la forma

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \ldots) = 0, \quad (5.1)$$

donde, en general, la función F puede depender de cualquier combinación posible de las derivadas parciales.

5.2. Resumen de los tipos y métodos de resolución

Al igual que ocurría en las EDOs, las EDPs pueden ser de distintos tipos según la forma que presenten.

- Según el orden n de derivación, las llamaremos EDPs de n**-ésimo orden**.
- Una EDP será **lineal** en la variable u y sus derivadas si cumple que

  $$F(\alpha u + \beta \partial_i) = \alpha F(u) + \beta F(\partial_i)$$

  donde ∂_i representa cada una de las derivadas parciales de u en la ecuación.

Para resolver este tipo de ecuaciones existen dos métodos: por integración básica y por separación de variables. Como veremos, no se debe confundir este segundo método con lo que denominamos en capítulos anteriores EDO de variables separadas. En este caso, casumiremos que la solución de la EDP se puede escribir como el producto de funciones de cada una de las variables. Veamos el primer método.

5.3. Resolución por integración básica

Este método sirve para conseguir soluciones generales y, además, no permite hallar las soluciones completas. Como su propio nombre indica se basta en integrar la ecuación diferencial por ello su rango de aplicación es muy limitado. Se aplicará normalmente cuando aparezca exclusivamente una derivada parcial en la ecuación. En el fondo, este método ya lo aplicamos cuando vimos las EDOs exactas.

Por simplicidad, pensemos en una EDP de dos variables que se pueda resolver por este método. Tenemos por ejemplo una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f(x_1). \tag{5.2}$$

donde $f(x_1)$ es una función conocida. [1] En tal caso, podríamos hallar la solución general por simple integración parcial

$$u(x_1, x_2) = \int \frac{\partial u}{\partial x_1} \partial x_1 = \int f(x_1) \partial x_1 + g(x_2).$$

La ecuación anterior es la solución general de la Ec.(5.2), donde $g(x_2)$ es una función arbitraria en la variable x_2. No debería extrañarnos este tipo de solución ya que, en el fondo, es similar a las obtenidas con las EDOs cuando aparecían constantes de integración. En este caso, cualquier función de x_2, al ser derivada con respecto a x_1 resultará en un valor nulo. Solo se podrá encontrar el valor de la función $g(x_1)$ si se tiene un sistema de EDPs que lo permita o si se dan las condiciones iniciales necesarias para obtener dicha dependencia.

Si recordamos el método de resolución de las ecuaciones diferenciales exactas, en ese caso la función $g(x_2)$ podía ser hallada ya que, básicamente, disponíamos de un sistema de dos ecuaciones.

Es decir, si se tiene un sistema de EDPs las funciones que resultan de la integración po

Obviamente, el rango de aplicación del método es muy limitado. Veamos algún ejemplo

Ejemplos:

1. $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x$

   Es fácil ver que la solución general es

$$u(x, y) = x^2 + g(y)$$

[1] Nótese que la ecuación tiene dependencia implícita de dos variables, es decir, no es una EDO. Además, podría ser parte de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales por lo que no podemos obviar la dependencia con la variable x_2.

2. Aplica la condición inicial $u(0,y) = \sin y$.

   Como vemos, al darnos la condición inicial y ser esta una función de y, podemos directamente hallar que

   $$u(0,y) = 0^2 + g(y) = \sin y$$

   y, por tanto, $g(y) = \sin y$. La solución particular para dichas condiciones iniciales será

   $$u(x,y) = x^2 + \sin y.$$

5.4. Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

Veamos ahora algunos métodos de resolución generales de EDPs de primer orden.

5.4.1. EDPs lineales y cuasilineales

Una ecuación en derivadas parciales de primer orden se dice que es cuasilineal si presenta la forma

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = R(x_1, x_2, \ldots, x_n, u). \tag{5.3}$$

donde X_i y R son funciones conocidas y la variable u, en general, depende de todas las variables x_i, es decir, $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Si la función $R = 0$, entonces las funciones X_i no dependen explícitamente de la variable u (solo de sus derivadas) y la Ec. (5.3) es una ecuación lineal en derivadas parciales homogénea. Es decir, se tendría que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \tag{5.4}$$

5.4.2. Solución de la ecuación cuasilineal de primer orden

Si observamos la forma de la Ec.(5.3), es directo hacer una equivalencia con un sistema de ecuaciones lineal. Recordando la forma simétrica de escribir un sistema de ecuaciones, podemos expresar la ecuación cuasilineal en la forma

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{R}. \tag{5.5}$$

Si consideramos que las funciones X_i y R son continuas y diferenciables y, además, no se anulan simultáneamente, podríamos integrar cada una de las ecuaciones anteriores para obtener, en general, una serie de funciones y constantes de integración

$$
\begin{aligned}
\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) &= C_1, \\
\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) &= C_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) &= C_n.
\end{aligned}
$$

Se podrá resolver la EDP encontrando la solución del sistema de ecuaciones anterior. En general, dicha solución será, en realidad, una integral genérica que contenga cada una de las integrales anteriores. Es decir, la solución general se expresará como

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0.$$

Además, las constantes de integración podrán ser determinadas si se tiene un problema de Cauchy, es decir, si se dan las condiciones iniciales necesarias.

5.4.3. EDP cuasilineal en tres dimensiones

Para comprender mejor el proceso de resolución de las EDPs cuasilineales, veamos el caso en el que se tienen tres variables $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $x_3 = z$. Llamemos además, $X_1 = P(x, y, z)$,$X_2 = Q(x, y, z)$,$X_3 = R(x, y, z)$. En tal caso, se tiene que la Ec.(5.5) queda en la forma

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \tag{5.6}$$

En el fondo, la ecuación anterior puede tener como solución cualquier familia de superficies que cumplan la dicha condición. Es fácil ver que, si llamamos $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, la Ec.(5.6) lleva a

$$pP(x, y, z) + qQ(x, y, z) = R(x, y, z).$$

Si nos fijamos en la ecuación diferencial anterior, dadas las funciones P, Q y R, cualquier superficie $z = f(x, y)$ que la cumpla será solución. Ahora bien, si volvemos a la Ec.(5.6), podemos aplicar el método general en el que realizamos dos integrales que dan lugar a dos funciones constantes

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= C_1, \\
g(x, y, z) &= C_2.
\end{aligned}
$$

La solución general será cualquier función que presenta la dependencia explícita

$$\phi(f(x, y, z), g(x, y, z)) = 0.$$

En algunas ocasiones habrá que emplear la **propiedad compuesta** del sistema característico dado por la Ec.(5.6), que establece que dicho sistema se puede igualar a

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{\alpha(x,y,z)dx + \beta(x,y,z)dy + \gamma(x,y,z)dz}{\alpha(x,y,z)P(x,y,z) + \beta(x,y,z)Q(x,y,z) + \gamma(x,y,z)R(x,y,z)}. \quad (5.7)$$

donde α, β y γ son funciones arbitrarias que han de cumplir que

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0,$$

o, empleando la ecuación simétrica de la EDP, que

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0. \quad (5.8)$$

En la práctica, buscaremos una combinación de α, β y γ que simplifique la resolución de la EDP. Con dichas funciones, sustituimos en la Ec.(5.8), de manera que obtendremos una relación diferencial entre las variables. De esta última relación es posible obtener una de las funciones $f(x,y,z) = C_i$ que resuelven la ecuación.

5.5. Ejemplos de EDPs cuasilineales

1. $\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{dz}{x^2+y^2}$

   De la primera igualdad obtenemos la ecuación

   $$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2},$$

   que es directamente integrable y da como resultado

   $$-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = C_1.$$

   Por otro lado, podemos obtener una ecuación con los tres diferenciales a partir de la Ec.(5.7), escogiendo $\alpha = \beta = 1$ y $\gamma = -1$, es decir

   $$\frac{dx + dy - dz}{0}$$

   o, lo que es lo mismo, $dx + dy - dz = 0$. Es ecuación se puede integrar directamente y da lugar a

   $$x + y - z = C_2.$$

   La solución general de la EDP será una cierta función arbitrario con dependencias de la forma

   $$\phi(C_1, C_2) = \phi(\frac{x-y}{xy}, x + y - z) = 0.$$

5.6. Ecuación de Pfaff (ecuación diferencial total)

Supongamos un cierto sistema en un espacio tridimensional. Consideremos que describimos dicho sistema en coordenadas cartesianas. Se denomina ecuación de Pfaff (o ecuación diferencial total, EDT) a toda ecuación con la forma

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0. \tag{5.9}$$

Podemos deducir que la ecuación anterior proviene de diferenciar una cierta función en tres dimensiones, es decir, $du(x,y,z) = \partial_x u(x,y,z)dx + \partial_y u(x,y,z)dy + \partial_z u(x,y,z)dz$, donde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial_i}$. Dado que dicho diferencial aparece igualado a cero, resolver este problema es equivalente a encontrar una cierta familia de superficies, $u(x,y,z) = C$ ortogonales a las líneas de un cierto campo vectorial $\mathbf{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$. Es decir, tenemos las siguientes relaciones

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}, \tag{5.10}$$

siempre que el campo sea potencial (es decir, que se puede expresar como el gradiente de un campo escalar). En tal caso, encontrar la superficie se reduce a resolver la integral curvilínea siguiente

$$u(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (Pdx + Qdy + Rdz). \tag{5.11}$$

Condición de campo potencial

Se puede demostrar que para que el campo vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ sea potencial es condición necesaria y suficiente que $\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$. En tal caso, la ecuación sera **integrable**. Por otro lado, si $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, la ecuación será **exacta** y podremos resolver empleando el mismo procedimiento que en el capítulo 2.

Nótese que a partir de la condición anterior se obtiene el potencial escalar en electromagnetismo. Dado que en condiciones de campos estáticos, el campo eléctrico $\mathbf{E}$ cumple que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, se puede definir una cierta función potencial $U(x,y,z)$ que sea la diferencial exacta del campo. Por otro lado, el campo magnético no es un campo potencial y, por tanto, no se puede definir de manera exacta un potencial escalar que cuya diferencial total sea el propio campo magnético.

5.6.1. Factor integrante

En este punto resulta bastante obvio que las ecuaciones diferenciales exactas que vimos en el capítulo 2 son el equivalente a la ecuación de Pfaff en dos dimensiones. Al igual que ocurría con dichas ecuaciones, una ecuación de Pfaff será integrable siempre que exista un factor integrante $\mu(x,y,z)$ de forma que

$$\mu(x.y.z)(P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz) = du(x,y,z). \tag{5.12}$$

sea la forma diferencial exacta de una cierta función $u(x,y,z)$. Al igual que en el caso en que la ecuación de Pfaff es directamente integrable, la función $u(x,y,z)$ ha de ser una función potencial.

5.6.2. Resolución de la ecuación de Pfaff por integración secuencial

La forma general de resolver una ecuación de Pfaff se basa en realizar la integración de la ecuación de manera secuencial. Para ello, en primer lugar se considera que una de las variables es un cierto parámetro constante. Es posible realizar esta consideración sobre cualquiera de las variables. Normalmente, haremos dicha suposición de forma que la ecuación resultante sea la más sencilla posible. Para estudiar el caso general supongamos, por ejemplo, que z es una cierta constante en la ecuación de Pfaff. Entonces, $dz = 0$ y la ecuación se reduce a

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy = 0.$$

Esta ecuación debería resultar familiar ya que presenta la misma forma que la Ec.(2.9), con la salvedad que ahora las funciones incluyen dependencia en z. Para resolver la ecuación hemos de suponer que existe una cierta función potencial $G(x, y, z)$ que cumple que

$$dG(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy,$$

donde, si fuese necesario, habría que encontrar un factor integrante $\mu(x, y, z)$ tal que

$$\frac{\partial G(x, y, z)}{\partial x} = \mu(x, y, z)P(x, y, z), \quad \text{ó} \quad \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial y} = \mu(x, y, z)Q(x, y, z),$$

Una vez encontrado el factor integrante, podemos plantear una ecuación para obtener la dependencia en z. Es fácil ver que, en realidad, hemos obtenido la función que cumple que

$$dG(x, y, z) + (\mu(x, y, z)R(x, y, z) - \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial z})dz = 0$$

de donde es posible obtener la dependencia en z y, por tanto, la función completa $G(x, y, z)$. Podemos reescribir la ecuación anterior en la forma

$$dG(x, y, z) + K(G, z)dz = 0,$$

de donde resulta la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dG(x, y, z)}{dz} + K(G, z) = 0.$$

Nótese que en la ecuación anterior hemos obviado que es una derivada parcial ya que, en este caso, solo faltaría resolver la ecuación para la variable z.

5.7. Casos particulares de la ecuación de Pfaff

Veamos como, en algunos casos particulares, la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo Pfaff se simplifica.

- **Ecuación en variables separadas** Si la ecuación de Pfaff presenta la forma

$$P(x)dx + Q(y)dy + R(z)dz = 0,$$

la ecuación se puede resolver por integración directa.

- **Ecuación con una variable separada** Si la ecuación de Pfaff presenta la forma

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(z)dz = 0,$$

se dice que la variable z está separada. En tal caso, la ecuación será integrable si $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ es exacta. Consecuentemente, existirá la función potencial para las variables x e y a la que llamaremos $U(x,y)$. Para obtener la solución general de la ecuación de Pfaff bastará con añadir la solución para z

$$U(x,y) + \int R(z)dz = C.$$

Ecuación diferencial exacta Si se cumple que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, entonces la ecuación será exacta y el método de resolución es el mismo que el visto en el capítulo 2 (con una variable más).

5.8. Ejercicios de la ecuación de Pfaff

Veamos algunos ejemplos de la ecuación de Pfaff.

1. Verifica si la siguiente función de Pfaff es integrable

   $(x+y)dx + (x-z)dy + x^2yzdz = 0$

   Solución:

   Dada la ecuación de Pfaff, podemos suponer que representa el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{F} = (x+y, x-z, x^2yz). \tag{5.13}$$

   Para que sea integrable el campo $\mathbf{F}$ ha de ser un campo potencial y, por tanto, debe cumplir que

$$\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0.$$

   Calculemos en primer lugar el rotacional

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+y & x-z & x^2yz \end{vmatrix} = (x^2z+1, -2xyz, 0).$$

   A continuación realizamos el producto escalar con el propio campo

$$\mathbf{F}\cdot\nabla\times\mathbf{F} = x^2z + x + y - x^2yz + 2xyz^2 \neq 0.$$

Como vemos, el resultado de la operación es distinto de cero y, por tanto, la ecuación de Pfaff de partida no es integrable (no cumple la condición de campo potencial).

2. Verifica si la siguiente función de Pfaff es integrable y, en caso afirmativo, resuélvela.

   $yzdx + (xz + yz^3)dy - 2xydz = 0$

   Solución:

   Escribimos el campo vectorial que representa la ecuación

   $$\mathbf{F} = (yz, xz + yz^3, -2xy). \tag{5.14}$$

   y calculamos su rotacional

   $$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz + yz^3 & -2xy \end{vmatrix} = (-3x - 3yz^2, 3y, 0).$$

   El producto escalar con el propio campo da lugar a

   $$\mathbf{F}\cdot\nabla\times\mathbf{F} = -3xyz - 3y^2z^3 + 3xyz + 3y^2z^3 = 0.$$

   Es decir, la ecuación de Pfaff de partida es integrable.

   Dado que la ecuación es integrable, pasemos a resolverla. El primer paso es considerar que una de las variables es un parámetro constante. En este caso, fijándonos en la ecuación de partida, suponemos que $dy = 0$ ya que, de esta forma, la ecuación resultante es la más sencilla posible. Nos queda la siguiente ecuación

   $$yzdx - 2xydz = 0$$

   que, sacando factor común la y resulta en

   $$zdx - 2xdz = 0.$$

   Como vemos, nos queda una ecuación diferencial de primer orden de variables separables

   $$\frac{dx}{x} = 2\frac{dz}{z},$$

   que da lugar a

$$\ln|x| = \ln z^2 + C_0.$$

Agrupamos los términos para obtener

$$\ln\frac{|x|}{z^2} = C_0.$$

o, lo que es lo mismo

$$\frac{|x|}{z^2} = C,$$

donde $C = e^{C_0}$. En realidad, hemos obtenido una parte de la función $G(x, y, z)$ que estamos buscando

$$G_{xz}(x, y, z) = \frac{|x|}{z^2},$$

y, además, aparece una constante debido a que hemos considerado que y es un parámetro. Por tanto, cuando calculemos la solución general en todas las variables, C no será una constante si no una cierta función de y, es decir, $C = g(y)$.

Buscamos ahora el factor integrante

$$\frac{\partial G_{xz}}{\partial x} = \mu(x, y, z)P(x, y, z).$$

Sustituyendo se obtiene

$$\frac{1}{z^2} = \mu(x, y, z)yz,$$

de donde despejamos el factor

$$\mu(x, y, z) = \frac{1}{yz^3}.$$

Una vez hallado el factor integrante, podemos pasar a plantear la ecuación diferencial para la variable y, es decir

$$dG_{xz} + K(G_{xz}, y)dy = 0, \tag{5.15}$$

donde la función K tiene la forma

$$K(G_{xz}, y) = \mu(x, y, z)Q(x, y, z) - \frac{\partial G_{xz}}{\partial y}.$$

Sustituyendo los distintos valores hallamos

$$K(G_{xz}, y) = \frac{1}{yz^3}(xz + yz^3) = \frac{yx}{z^2} + 1.$$

En la ecuación anterior podemos asociar el primer término con la función G, es decir

$$\frac{xy}{z^2} = \frac{G_{xz}(x,y,z)}{y}.$$

Sustituimos en la Ec.(5.15) para obtener

$$dG_{xz} + (\frac{G_{xz}}{y} + 1)dy = 0,$$

es decir, tenemos la siguiente ecuación diferencial lineal completa de primer orden

$$\frac{dG_{xz}}{dy} + \frac{G_{xz}}{y} = -1,$$

Calculamos en primer lugar la solución homogénea

$$\frac{dG_{xz}}{dy} + \frac{G_{xz}}{y} = 0,$$

de donde se obtiene una ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{dG_{xz}}{G_{xz}} = -\frac{dy}{y},$$

cuya solución es $\ln G = \ln y^{-1} + C_0$, de donde obtenemos $G(y)$

$$G = \frac{C}{y}.$$

Para hallar la solución particular de la ecuación completa aplicamos el método de la variación de constantes, es decir, suponemos que la solución es del tipo

$$\hat{G} = \frac{C(y)}{y}.$$

Hallamos la primera derivada de la solución que posteriormente sustituiremos en la ecuación de partida

$$\frac{d\hat{G}}{dy} = \frac{C'(y)}{y} - \frac{C(y)}{y^2} = \frac{C'(y)y - C(y)}{y^2}.$$

Sustituimos la solución particular

$$\frac{d\hat{G}}{dy} + \frac{\hat{G}}{y} = -1,$$

que resulta en

$$\frac{C'(y)y - C(y)}{y^2} + \frac{C(y)}{y}^2 = -1,$$

de donde se obtiene

$$\frac{C'(y)}{y} = -1, .$$

Por último, hallamos el valor de C

$$C(y) = -\int y dy = \frac{y^2}{2} + C.$$

Con esto, hemos obtenido la dependencia en y de la solución de la ecuación de Pfaff, es decir

$$G(y) = \frac{C(y)}{y} = \frac{C}{y} - \frac{y}{2}.$$

Por último, expresamos esta solución junto con la solución obtenida para x y z para obtener la solución general de la ecuación Pfaff

$$\frac{x}{z^2} = \frac{C}{y} - \frac{y}{2}.$$

3. Comprueba si las siguiente ecuaciones de Pfaff son integrables y resuélvelas en tal caso.

   - $3xydx + xzdy - 2xydz = 0$

     Solución:

     Podemos percatarnos de que, si sacamos factor común xyz se obtiene[2]

     $$xyz(\frac{3}{x}dx + \frac{1}{y}dy - \frac{2}{z}dz) = 0$$

     con lo que obtenemos la siguiente ecuación de Pfaff de variables separadas

     $$\frac{3}{x}dx + \frac{1}{y}dy - \frac{2}{z}dz = 0$$

     La resolución de este tipo de ecuación es por integración directa, de donde obtenemos

     $$\ln x^3 + \ln y + \ln z^{-2} + C_0 = 0.$$

     Agrupando términos y despejando se obtiene la solución general

     $$\frac{x^3 y}{z^2} = C.$$

[2] Si no nos diésemos cuenta de esta simplificación, podríamos aplicar el procedimiento general.

- $2xydx + (x^2 - z^2)dy - 2zydz = 0$
  Solución:
  Aplicamos el rotacional al campo $\mathbf{F} = (2xy, x^2 - z^2, -2zy)$, es decir

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + z^2 & -2zy \end{vmatrix} = (0, 0, 0).$$

Dado que el rotacional es cero, la ecuación es exacta. Este tipo de ecuación se resuelve exactamente igual que en el caso que vimos en el capítulo 2 pero, en este caso, tenemos una variable más. Tomemos, por ejemplo, la función $P(x, y, z)$

$$U(x, y, z) = \int 2xydx = x^2y + g(y, z).$$

Como vemos, al integrar tenemos que suponer que existe una función que puede depender de las otras dos variables. Si ahora aplicamos la derivada parcial en las otras dos variables, debe cumplirse que

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} = Q(x, y, z); \quad \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = R(x, y, z).$$

En este caso, tomando la primera condición, nos queda que

$$x^2 + \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

De donde se deduce que

$$g(y, z) = \int z^2 dy = yz^2 + h(z),$$

y, por tanto

$$U(x, y, z) = x^2y + yz^2 + h(z).$$

Por último, aplicamos el mismo procedimiento para la variable z

$$2yz + \frac{\partial h(z)}{\partial z} = 2zy,$$

que da lugar a $\dfrac{\partial h(z)}{\partial z} = 0$, es decir, $h(z) = C$.
La solución general de la ecuación de Pfaff será

$$x^2y + yz^2 + C = 0.$$

- $ydx + xdy + dz = 0$

  En este caso es obvio que la ecuación de Pfaff presenta una variable separada, la variable z. La ecuación será integrable si la ecuación es exacta para las variables x e y. Es fácil ver que, efectivamente, la ecuación diferencial en x e y es exacta. Resolvamos por el método convencional

  $$U(x, y) = \int ydx = xy + g(y),$$

  que lleva a

  $$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = xy + g'(y),$$

  de donde se deduce que $g'(y) = 0$ y, por tanto, $g = C$. La función potencial en x e y es, por tanto, $U(x, y) = xy + C$. Para obtener la dependencia en z basta con considerar

  $$dU(x, y) + dz = 0,$$

  que podemos integrar directamente para obtener

  $$U(x, y, z) = xy + z + C = 0.$$

5.9. Ecuaciones en derivadas parciales no lineales de primer orden

Se dice que la ecuación con la forma

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

con $p_i = \dfrac{\partial z}{\partial x_i}$, con $i = \overline{1, n}$, es una ecuación no lineal en derivadas parciales de primer orden.

Su solución, al igual que en las ecuaciones cuasilineles, será una integral completa que represente una cierta familia de curvas, superficies o, en general, funciones n-dimensionales.

Nuevamente, estudiaremos su resolución en el caso particular de funciones tridimensionales. Emplearemos el método conocido como método de Lagrange-Charpit.

5.9.1. Método de Lagrange-Charpit

En el caso de una EDP no lineal de primer orden con tres variables, tendremos que

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

donde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

En este caso, la solución será una integral completa que represente una cierta familia de curvas del tipo

$$\phi(x, y, z, C_1, C_2) = 0.$$

Para resolver por el método de Lagrange-Charpit procedemos de la siguiente manera:

Suponemos que la función F que representa la ecuación diferencial es derivable con respecto a todas las variables incluyendo q y p, de manera que llamamos

$$F_{x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \text{con } x_i = (x, y, z, p, q).$$

El método se basa en encontrar una segunda función en las mismas variables y que contenga una constante arbitraria, llamémosle a. Es decir, buscamos la función

$$G(x, y, z, p, q, a) = 0,$$

Para que ambas EDPs sean compatibles se debe cumplir la siguiente identidad [3]

$$p(F_z G_p - G_z F_p) - q(F_q G_z - G_p F_z) - (F_q G_y - G_q F_y) + (F_x G_p - G_x F_p) = 0.$$

Podemos reescribir la ecuación anterior como

$$F_p \frac{\partial G}{\partial x} + F_q \frac{\partial G}{\partial y} + (pF_p + qF_q)\frac{\partial G}{\partial z} - (F_x + pF_z)\frac{\partial G}{\partial p} - (F_y + qF_z)\frac{\partial G}{\partial q} = 0.$$

Si nos fijamos, podemos ver que la ecuación anterior es una ecuación de Lagrange en la que x, y, z, p y q actúan como variables independientes. Podemos escribir la ecuación anterior en forma simétrica de manera que tenemos que

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z}, \tag{5.16}$$

que será la ecuación que emplearemos para resolver la EDP no lineal, es decir, para encontrar la integral completa.

Hay que tener en cuenta la relación implícita existente en p y q con las variables (x, y, z). Típicamente, buscaremos encontrar la relación $z(p, q)$ combinando las ecuaciones dadas en Ec.(5.16). Posteriormente, pasaremos la dependencia implícita con (x, y) a dependencia explícita gracias a la relación entre las derivadas parciales y el diferencial de la variable z, esto es

$$dz(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = pdx + qdy$$

Veamos un ejemplo:

[3] La demostración de compatibilidad entre EDPs es compleja. Dejo un link en el que la podéis encontrar http://www.nou.ac.in/Online%20Resourses/19-7/Maths2.pdf

1. $z^3 = pq^2$

   Solución: Escribimos la ecuación en la forma

$$F(x, y, z, p, q) = z^3 - pq^2 = 0.$$

A continuación, emplearemos el método de Lagrange-Charpit, para lo cual necesitamos conocer las derivadas parciales de la función con respecto a todas las variables, es decir

$$F_q = -2qp, \quad F_p = -q^2, \quad F_x = F_y = 0, \quad F_z = 3z^2.$$

Aplicamos la fórmula dada por la Ec.(5.16) para obtener el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente

$$\frac{dx}{-q^2} = \frac{dy}{-2pq} = \frac{dz}{-pq^2 - 2pq^2} = \frac{-dp}{3z^2 p} = \frac{-dp}{3z^2 q}.$$

En la ecuación correspondiente a dz, podemos identificar, fijándonos en la ecuación de partida, que $3pq^2 = 3z^3$. Empleando dicha ecuación y la correspondiente a dp, tenemos que

$$-\frac{dz}{3z^3} = -\frac{dp}{3z^2 p},$$

que da lugar a

$$\frac{dz}{z} = \frac{dp}{p},$$

es decir, una EDO de variables separadas cuya solución es

$$\ln p = \ln z + C_0,$$

y, por tanto,

$$p = C_1 z.$$

Si nos fijamos en la ecuación de partida, depende exclusivamente de z, p y q. Como hemos obtenido la relación $z(p)$, podemos directamente sustituir en dicha ecuación para obtener $z(q)$. Hagámoslo

$$z^3 - C_1 z q^2 = 0,$$

de donde obtenemos

$$q = \frac{z}{\sqrt{C_1}}.$$

Por último, empleamos la siguiente relación

$$dz = pdx + qdy = C_1 z dx + \frac{z}{\sqrt{C_1}} dy,$$

que se transforma en una ecuación de variables separadas

$$\frac{dz}{z} = pdx + qdy = C_1 dx + \frac{1}{\sqrt{C_1}} dy.$$

Integrando la ecuación anterior llegamos a la solución

$$\ln z = C_1 x + \frac{y}{\sqrt{C_1}} + C_2.$$

Problemas

1. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

   Escribamos la ecuación diferencial en forma simétrica de manera que nos quede un sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{x+2y} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{0}$$

   Por un lado, tenemos que $dz = 0$ y, por tanto, $z = C_1$. Por otro, nos queda la ecuación

$$ydx + (x+2y)dy = 0.$$

   Podemos darnos cuenta de que la ecuación anterior es una ecuación diferencial exacta. Podemos usar directamente la ecuación de Pfaff, es decir,

$$\int_0^x ydx + \int_0^y 2ydy = xy + y^2 = C_2.$$

   La integral general de la ecuación inicial queda como

$$\Phi(z, xy + y^2) = 0.$$

   Podemos reescribir la ecuación anterior como

$$z = \phi(xy + y^2),$$

   siendo ϕ una función diferenciable.

2. $e^z\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = ye^x$

   Reescribimos la EDP como sistema de ecuaciones diferenciales en forma simétrica

$$\frac{dx}{e^x} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{ye^x}.$$

   En la primera igualdad tenemos una ecuación diferencial de variables separadas

$$\frac{dx}{e^x} = \frac{dy}{y^2},$$

   que, tras integrar, da lugar a

$$\frac{1}{y} - e^{-x} = C_1.$$

En la ecuación anterior podemos despejar el factor e^x que dependerá exclusivamente de y, es decir

$$e^x = \frac{y}{1 - yC_1}.$$

De esta forma, si sustituimos en la segunda igualdad, obtenemos una ecuación que depende exclusivamente de y y z, esto es

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{ye^x} = \frac{dz}{y}\frac{(1 - yC_1)}{y},$$

que, despejando, lleva a

$$dz = \frac{dy}{1 - yC_1},$$

Integramos a ambos lados para obtener

$$z = -\frac{\ln|C_1 y - 1|}{C_1} + C_2,$$

Ahora sustituimos el valor de la constante C_1, es decir

$$z = -\frac{\ln|(\frac{1}{y} - e^{-x})y - 1|}{\frac{1}{y} - e^{-x}} + C_2,$$

y, por tanto

$$z = -\frac{\ln|-e^{-x}y|}{\frac{1}{y} - e^{-x}} + C_2,$$

o, lo que es lo mismo

$$z = -\frac{\ln|y| - x}{\frac{1}{y} - e^{-x}} + C_2,$$

Finalmente, despejando, obtenemos el valor de la constante C_2

$$z + \frac{\ln|y| - x}{\frac{1}{y} - e^{-x}} = C_2.$$

Con esto, obtenemos la solución de la integral general de la EDP

$$\phi(C_1, C_2) = \phi(\frac{1}{y} - e^{-x}, \frac{\ln|y| - x}{y^{-1} + e^{-x}} + z) = 0.$$