Resumen

La tesis "*Teoría Combinatoria de Números, Recurrencia de Operadores y Dinámica Lineal*" se sitúa dentro del estudio de la dinámica de operadores lineales, o *Dinámica Lineal*. El objetivo de este trabajo es estudiar múltiples nociones de *recurrencia*, que pueden presentar los sistemas dinámicos lineales, y que clasificaremos mediante la *Teoría Combinatoria de Números*.

La Dinámica Lineal estudia las órbitas generadas por las iteraciones de una transformación lineal. Las propiedades más estudiadas en esta rama durante los últimos 30 años han sido la hiperciclicidad (existencia de órbitas densas) y el caos (con sus múltiples definiciones), siendo esta un área de investigación muy activa y obteniéndose un considerable número de resultados profundos e interesantes (véase [10, 55]). Nosotros nos centraremos en la *recurrencia*, propiedad muy estudiada para sistemas dinámicos clásicos no lineales (véase [41, 48]), pero prácticamente nueva en Dinámica Lineal pues no es hasta 2014, con el artículo [30] de Costakis, Manoussos y Parissis titulado "*Recurrent linear operators*", cuando se empieza a estudiar esta noción de manera sistemática en el contexto de operadores actuando en espacios de Banach.

La situación básica de la que parte nuestro estudio es la siguiente: $T : X \longrightarrow X$ será un operador lineal y continuo actuando sobre un F-espacio X (es decir, un espacio vectorial topológico que admite una métrica completa), aunque a veces necesitaremos que el espacio subyacente X sea un espacio de Fréchet, de Banach o de Hilbert. Dado un vector $x \in X$ y un entorno U de x estudiaremos el *conjunto de retorno* $N_T(x,U) := \{n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in U\}$ y dependiendo de su tamaño, observado mediante la Teoría Combinatoria de Números, diremos que el vector x presenta una propiedad de recurrencia u otra.

La memoria de la tesis se ha realizado por compendio de artículos y, siguiendo la normativa establecida por la **Escuela de Doctorado**, la estructura es la siguiente:

– **Introducción**. Se presentan las nociones y definiciones básicas necesarias, junto con la notación utilizada a lo largo de la memoria y la explicación de qué contiene cada uno de los capítulos siguientes. Este capítulo pretende ser el hilo conductor del trabajo.

1. **Frequently recurrent operators**. Adaptación de la "versión de autor" del artículo [21]: *Journal of Functional Analysis*, **283** (12) (2022), artículo núm. 109713, 36 páginas. En este se definen por primera vez las fuertes nociones de *recurrencia reiterada*, *$\mathcal{U}$-frecuente* y *frecuente*, y sus propiedades básicas (como las similitudes con las respectivas nociones de hiperciclicidad, las diferencias entre los distintos tipos de recurrencia, el tamaño de los varios conjuntos de vectores recurrentes, la relación de estos fenómenos con propiedades espectrales, y los respectivos teoremas del tipo "Ansari" y "León-Müller") son estudiadas. Finalmente se generaliza el estudio mediante el concepto de $\mathcal{F}$-recurrencia, que se conecta con la noción de $\mathcal{F}$-hiperciclicidad anteriormente estudiada en trabajos como [6, 84, 16, 20].

2. **Recurrence properties: An approach via invariant measures**. Adaptación al formato de la tesis de la "versión de autor" revisada del artículo [50]: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **169** (2023), 155–188. En este se relaciona la recurrencia de operadores, que se había estudiado únicamente desde el punto de vista topológico, con la Teoría Ergódica y los sistemas dinámicos que conservan la medida. Restringiendo el espacio subyacente a espacios de Banach reflexivos y espacios de Hilbert se obtienen fuertes equivalencias entre las distintas propiedades de recurrencia establecidas en [21]: a partir de vectores con recurrencia débil se construyen medidas invariantes, y de estas se obtienen nociones de recurrencia más fuertes.

3. **Questions in linear recurrence: From the $T \oplus T$-problem to lineability**. Adaptación de la "versión de autor" del preprint [51]. Se resuelve negativamente un problema abierto de 2014 (véase [30, Question 9.6]): *Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador recurrente. ¿Es cierto que el operador $T \oplus T$ es recurrente en $X \oplus X$?* Para resolverlo introducimos la *casi-rigidez*, que será, para la recurrencia, la noción análoga a la propiedad *débil-mezclante* (topológica) para la transitividad/hiperciclicidad; y luego construimos operadores recurrentes pero no casi-rígidos en todo espacio de Banach infinito-dimensional y separable. La casi-rigidez es posteriormente utilizada para estudiar la lineabilidad de los conjuntos de vectores $\mathcal{F}$-recurrentes.

4. **Recurrent subspaces in Banach spaces**. Adaptación de la "versión de autor" revisada del preprint [69]. En este se estudia la propiedad de *espaciabilidad* (existencia de un subespacio vectorial cerrado y de dimensión infinita) para el conjunto de vectores recurrentes. Usando la Teoría Espectral como en [66, 47] se caracterizan los operadores casi-rígidos que admiten *subespacios recurrentes*, y se obtiene el curioso resultado: *un operador débil-mezclante admite un subespacio hipercíclico si, y solamente si, admite un subespacio recurrente.*

– **Discusión general de los resultados**. Se discute la naturaleza de los diferentes resultados conseguidos. También hemos incluido algunos comentarios y resultados extra relacionados con cada uno de los capítulos/artículos que forman esta memoria.

– **Conclusiones**. Se incluyen las conclusiones del trabajo, analizando el impacto que puede tener en el área de la Dinámica Lineal, y recogiendo las principales líneas de investigación y problemas que quedan abiertos.

– **Apéndice**. Para conseguir un carácter auto-contenido hemos añadido un apéndice con los resultados básicos de *Teoría Combinatoria de Números* que se han utilizado en los trabajos que componen la memoria. Se incluyen: algunos conceptos de tamaño para conjuntos de números naturales relacionados con las propiedades de la compactación de Stone-Čech $\beta\mathbb{N}_0$; las definiciones y propiedades básicas de algunas nociones de densidad para conjuntos de números naturales; el concepto de familia de Furstenberg; y algunos ejemplos.