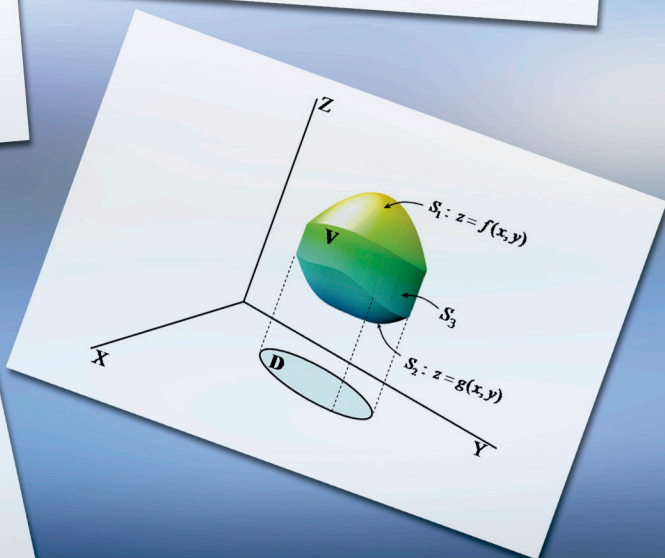
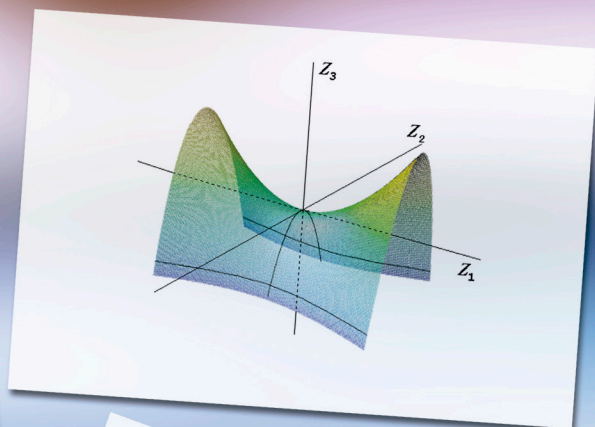
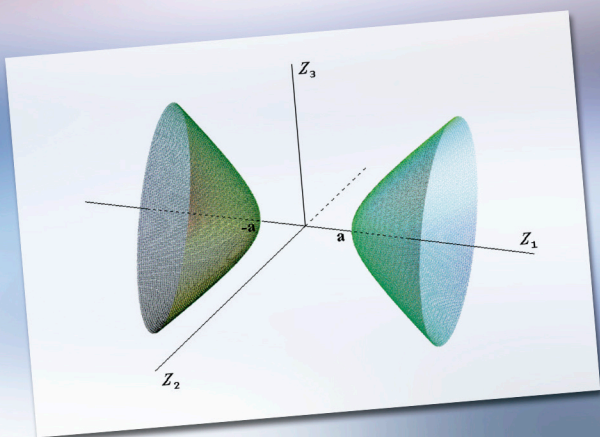


INTEGRACIÓN MÚLTIPLE Y VECTORIAL



José Bonet Solves
Vicenta Calvo Roselló
Alfredo Peris Manguillot
Francisco Rodenas Escribá



edUPV

Universitat Politècnica de València

José Bonet Solves
Vicenta Calvo Roselló
Alfred Peris Manguillot
Francisco Rodenas Escribá

Integración múltiple y vectorial

Colección *Académica* http://tiny.cc/edUPV_aca

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita:
Bonet Solves, José; Calvo Roselló, Vicenta; Peris Manguillot, Alfred y Rodenas Escribá, Francisco (2023). *Integración múltiple y vectorial*. Valencia: edUPV

© José Bonet Solves
Vicenta Calvo Roselló
Alfred Peris Manguillot
Francisco Rodenas Escribá

© 2023, edUPV
Venta: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0171_06_01_01

ISBN: 978-84-1396-182-8
Depósito Legal: V-3269-2023

Imprime: Byprint Percom, S. L.

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a edicion@editorial.upv.es

edUPV se compromete con la ecoimpresión y utiliza papeles de proveedores que cumplen con los estándares de sostenibilidad medioambiental <https://editorialupv.webs.upv.es/compromiso-medioambiental/>

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo edicion@editorial.upv.es

Impreso en España

Prólogo

El texto que tiene el lector entre las manos presenta una exposición detallada de la integración múltiple y de los fundamentos de la teoría de campos vectoriales. Se añade también un apéndice acerca de superficies cuàdricas en el espacio tridimensional. Los temas aquí expuestos cubren una parte importante del programa de la asignatura Matemáticas 2 del Grado en Fundamentos de la Arquitectura de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universitat Politècnica de València. Esta asignatura, tiene 6 créditos, es obligatoria y se imparte en segundo curso durante el primer cuatrimestre. La exposición de los contenidos en este texto sigue bastante fielmente el modo cómo dichos temas se explican en clase.

El libro es el resultado de muchos años de experiencia en la docencia de la asignatura. La materia está distribuida en tres capítulos y un apéndice. Cada capítulo comienza exponiendo cláramente las definiciones, enunciados y demostraciones que se ven en clase, ilustrándolos con gráficas y ejemplos clarificadores; a continuación se presenta una colección de problemas resueltos y se termina con un listado de problemas propuestos, de dificultad variada. Muchos de ellos han aparecido en exámenes realizados en los últimos años.

La teoría de campos escalares y vectoriales tiene aplicación en distintas áreas relevantes en el estudio de la Arquitectura, como estática, dinámica, acústica, elasticidad, fluidos, transmisión del calor y electromagnetismo. Hemos tratado de escribir un libro útil para nuestros estudiantes, que les ayude a seguir las explicaciones y les permita ampliar sus conocimientos y comprobar su comprensión de los mismos. El libro va dirigido a estudiantes que ya han cursado la asignatura de Matemáticas 1 de primer curso de la ETS de Arquitectura, con 9 créditos. En ella se han familiarizado con vectores, matri-

ces, producto escalar y vectorial, cambios de coordenadas, geometría analítica elemental, así como con las funciones de una variable, cálculo de extremos y ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las limitaciones de tiempo y el enfoque del curso nos han hecho renunciar a parte del rigor. Se presentan las definiciones y enunciados correctamente, pero el lector no debe esperar en las páginas que siguen las demostraciones rigurosas de todos los resultados necesarios. Tratamos de dar la mayor información posible, con la máxima claridad, respetando lo que debe ser un texto de Matemáticas, incluyendo, por tanto, algunas demostraciones sencillas o accesibles y presentando muchos ejercicios, problemas y gráficos. Esperamos que sea una buena ayuda para nuestros estudiantes.

Es importante para los autores agradecer la ayuda prestada al profesorado de la Unidad Docente de la ETS Arquitectura del Departamento de Matemática Aplicada, en especial a aquellos que en el pasado han compartido con nosotros la docencia de Matemáticas 2. Y, por supuesto, queremos mencionar a nuestros estudiantes, sin cuyas preguntas, su interés y su paciencia, este libro nunca hubiera visto la luz.

Los autores

Índice

| | |
|--|------------|
| Prólogo | i |
| Índice | iii |
| 1 La integral de línea | 1 |
| 1.1 Introducción | 3 |
| 1.2 Curvas en \mathbb{R}^n | 4 |
| 1.2.1 Primeras definiciones | 4 |
| 1.2.2 Longitud de arco | 6 |
| 1.2.3 Arcos equivalentes | 8 |
| 1.3 Integrales curvilíneas | 10 |
| 1.3.1 Integral de línea de un campo escalar | 10 |
| 1.3.2 Algunas aplicaciones: centros de gravedad y momentos de inercia | 11 |
| 1.3.3 Integral de línea de un campo vectorial | 13 |
| 1.3.4 Propiedades de las integrales de línea | 14 |
| 1.4 Campo conservativo. Función potencial | 17 |
| 1.4.1 Gradiente y rotacional | 17 |
| 1.4.2 Independencia del camino de la integral de un gradiente | 18 |
| 1.4.3 Campos conservativos y función potencial | 19 |
| 1.4.4 Cálculo de la función potencial | 22 |
| 1.5 Problemas resueltos | 24 |
| 1.6 Problemas propuestos | 38 |
| 2 La integral múltiple | 43 |
| 2.1 Introducción | 45 |
| 2.2 Integral Riemann en \mathbb{R}^n | 45 |
| 2.2.1 Función integrable Riemann sobre rectángulos | 45 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 2.2.2 | Propiedades de las funciones integrables | 49 |
| 2.2.3 | Cálculo de la integral múltiple: integrales iteradas | 50 |
| 2.3 | La integral Riemann en conjuntos más generales | 51 |
| 2.3.1 | Conjuntos medibles | 51 |
| 2.3.2 | La integral en conjuntos medibles | 52 |
| 2.3.3 | Cálculo de la integral múltiple | 54 |
| 2.3.4 | Algunas aplicaciones de las integrales múltiples | 57 |
| 2.4 | Cambio de variables en integrales múltiples | 59 |
| 2.4.1 | Fórmula del cambio de variables | 60 |
| 2.4.2 | Coordenadas polares en \mathbb{R}^2 | 63 |
| 2.4.3 | Coordenadas cilíndricas en \mathbb{R}^3 | 64 |
| 2.4.4 | Coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3 | 65 |
| 2.5 | El teorema de Green-Riemann | 67 |
| 2.6 | Problemas resueltos | 72 |
| 2.7 | Problemas propuestos | 85 |
| 3 | La integral de superficie | 93 |
| 3.1 | Introducción | 95 |
| 3.2 | Superficies paramétricas en \mathbb{R}^3 | 95 |
| 3.2.1 | Representación paramétrica de una superficie | 95 |
| 3.2.2 | Vectores tangentes y vector normal a una superficie | 99 |
| 3.2.3 | Área de una superficie paramétrica | 102 |
| 3.3 | Integrales de superficie | 105 |
| 3.3.1 | Integral de superficie de un campo escalar | 105 |
| 3.3.2 | Integral de superficie de un campo vectorial | 106 |
| 3.4 | El teorema de Stokes | 107 |
| 3.4.1 | Relación con el teorema de Green en el plano | 110 |
| 3.5 | El teorema de Gauss o de la divergencia | 111 |
| 3.6 | Problemas resueltos | 118 |
| 3.7 | Problemas propuestos | 138 |
| A | Introducción a las cuádricas | 145 |
| A.1 | Ecuación general de una cuádrica | 147 |
| A.2 | Ecuación reducida de una cuádrica | 148 |
| A.3 | Cuádricas Regladas | 161 |
| A.4 | Problemas propuestos | 163 |
| | Bibliografía | 167 |

Capítulo 1

La integral de línea

1.1 Introducción

En la asignatura de primer curso *Fundamentos Matemáticos en la Arquitectura* se estudió la integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ para funciones reales definidas y acotadas en intervalos finitos. En este curso se dan extensiones del concepto integral aunque en distintas direcciones. En las integrales de línea el intervalo $[a, b]$ de la integral definida se reemplaza por una curva en el espacio n -dimensional definida por una función vectorial α , siendo el integrando una función f de n variables definida y acotada sobre la curva, llamada "camino de integración". La integral que resulta se llama integral de línea y se denota por $\int_{\alpha} f$.

El problema de definir el trabajo realizado por una fuerza variable aplicada a un punto material, cuando éste se desplace por una curva dada, conduce de manera natural a las llamadas integrales curvilíneas. Más allá de este ejemplo, las integrales de línea constituyen una herramienta fundamental en diversos campos de la física, de la ingeniería y de la arquitectura. En múltiples ocasiones se puede representar el estado de un sistema cualquiera, caracterizado por el valor de varias magnitudes, por un punto en un espacio. Cuando el sistema evoluciona, cambia de forma continua de estado, dicha evolución o proceso corresponde a una curva en el espacio de los estados. Muchas cantidades de interés en un proceso se pueden calcular como la integral curvilínea a lo largo de la curva que describe el proceso de una función de las variables que lo caracterizan. Este esquema se aplica a un gran número de sistemas: microscópicos, termodinámicos, económicos, estructuras, etc.

Entre los objetivos que se persiguen se encuentran:

- aprender a parametrizar curvas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 ,
- obtener las propiedades más importantes de las integrales de línea,
- conocer algunas aplicaciones de las integrales de línea,
- saber identificar un campo vectorial conservativo y obtener la función potencial asociada.

1.2 Curvas en \mathbb{R}^n

Ejemplo previo: Ecuaciones paramétricas de una recta.

Las ecuaciones de una recta que pasa por dos puntos distintos (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1) son:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), \quad t \in] -\infty, +\infty[$$

Vemos que las tres coordenadas (x, y, z) de los puntos de la recta se expresan en función de un parámetro t . Para $0 \leq t \leq 1$ se obtiene el segmento entre (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1) .

1.2.1 Primeras definiciones

Definición 1.1 Se llama *curva o arco* en \mathbb{R}^n a una función continua

$$\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)), \quad \gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

las funciones coordenadas también suelen representarse como

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

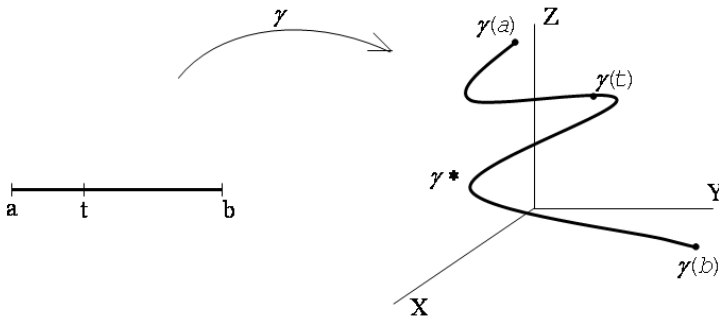


Figura 1.1: curva en \mathbb{R}^3

Definición 1.2 La imagen del arco γ se denota por γ^*

$$\gamma^* = \text{Im}\gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [a, b]\}. \quad (1.2)$$

El punto inicial de la curva es $\gamma(a)$ y el punto final $\gamma(b)$ (figura 1.1). Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ la curva se llama cerrada.

Ejemplos:

$$1) \quad \alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (x(t), u(t)) = (r \cos t, r \sin t).$$

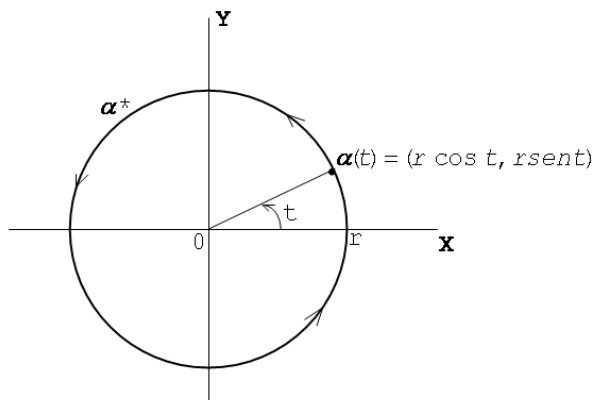


Figura 1.2: parametrización de la circunferencia

$$2) \quad \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) = (r \cos 2\pi t, r \sin 2\pi t).$$

Los arcos α y β tienen la misma imagen $\alpha^* = \beta^*$, la circunferencia de radio r , además, ambos la recorren en el sentido contrario a las agujas del reloj (sentido *levógiro*). Consideremos el arco

$$3) \quad \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (r \cos t, -r \sin t),$$

que tiene la misma imagen que los anteriores $\gamma^* = \alpha^* = \beta^*$, sin embargo, γ recorre la imagen en sentido *dextrógiro*, es decir, en sentido contrario a como la recorren α y β .

Definición 1.3 Un arco $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase \mathcal{C}^1 si existen las derivadas de las funciones γ_i en $[a, b]$ y son funciones continuas.

Definición 1.4 Un arco $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es regular o suave si

$$\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

Definición 1.5 Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un arco de clase C^1 . Se llama vector derivada o vector velocidad de γ en el punto $\gamma(t)$, al vector:

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t)), \quad t \in [a, b].$$

El vector $\gamma'(t)$ es tangente a la curva en el punto correspondiente $\gamma(t)$. La denominación de vector velocidad alude al sentido físico del mismo cuando γ representa la trayectoria de un punto móvil en función del tiempo.

Si además γ es regular, se define el vector tangente unitario en el punto $\gamma(t)$ como

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}. \quad (1.3)$$

1.2.2 Longitud de arco

La idea para introducir el concepto de longitud de un arco de curva consiste en aproximar la curva por medio de polígonos inscritos, técnica aprendida de los antiguos geómetras. Nuestra intuición nos asegura que la longitud de cualquier polígono inscrito no excederá a la de la curva (dado que la línea recta es el camino más corto entre dos puntos), luego la longitud de una curva deberá ser una cota superior de las longitudes de todos los polígonos inscritos. Por consiguiente, parece natural definir la longitud de una curva como el supremo de las longitudes de todos los polígonos inscritos posibles. Para la mayoría de las curvas que aparecen en la práctica, esto proporciona una definición útil de la longitud de arco. Sin embargo, existen curvas para las cuales el extremo superior de las longitudes de los polígonos inscritos no existe; esto ocurre, por ejemplo, con el arco dado por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, t \cos(\pi/2t)) & \text{si } t \neq 0 \\ (0, 0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Por tanto, es necesario clasificar las curvas en dos categorías: las que tienen longitud y las que no. Las primeras se denominan rectificables y las segundas no rectificables. Basta con exigir que la curva sea \mathcal{C}^1 para que sea rectificable. A partir de ahora sólo consideraremos este tipo de curvas.

Definición 1.6 Dado un arco $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^1 , se define la longitud del arco γ como

$$s(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (1.4)$$

Ejemplos:

1) Longitud de la circunferencia. Consideremos

$$\left. \begin{array}{l} \alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \alpha(t) = (r \cos t, r \sin t), \mathcal{C}^1 \end{array} \right\} \longrightarrow s(\alpha) = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

2) Longitud de la *gráfica* de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^1 . La gráfica de f es el arco

$$\left. \begin{array}{l} \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma(t) = (t, f(t)) \end{array} \right\} \longrightarrow s(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

3) Longitud de la hélice. Consideremos

$$\left. \begin{array}{l} \beta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \beta(t) = (r \cos t, r \sin t, at), \mathcal{C}^1 \end{array} \right\} \longrightarrow s(\beta) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + a^2} dt = 2\pi \sqrt{r^2 + a^2}.$$

1.2.3 Arcos equivalentes

En un ejemplo previo aparecen arcos distintos cuya imagen es la misma y, además, la recorren en el mismo sentido. Cuando esto sucede, podemos considerar que son parametrizaciones distintas de la misma curva.

Definición 1.7 (Arcos equivalentes)

Consideremos los arcos de \mathbb{R}^n

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Supongamos que existe una función real $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ de clase \mathcal{C}^1 , sobreyectiva y estrictamente creciente, por tanto $\varphi'(t) > 0 \forall t \in [a, b]$, tal que

$$\alpha = \beta \circ \varphi, \quad \alpha(t) = (\beta \circ \varphi)(t) = \beta(\varphi(t)) \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.5)$$

Dos arcos α y β como estos se llaman equivalentes y lo representaremos $\alpha \sim \beta$.

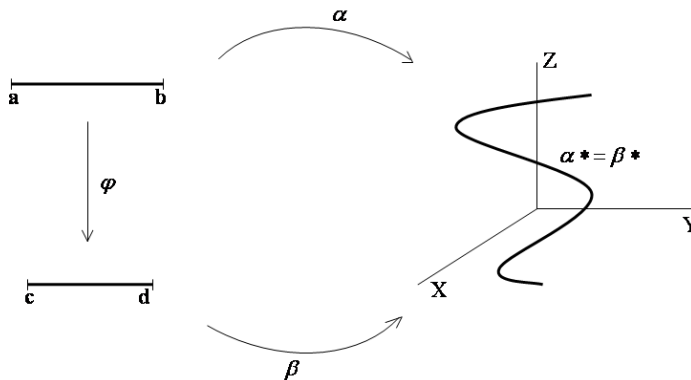


Figura 1.3: arcos equivalentes

Proposición 1.1 Dados $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^1 tales que $\alpha \sim \beta$. Entonces

$$\alpha^* = \beta^*, \quad s(\alpha) = s(\beta). \quad (1.6)$$

Además, si α es suave ($\alpha' \neq 0$) el arco β también lo es ($\beta' \neq 0$).

Demostración:

Veamos primero que $\alpha^* = \beta^*$. Para ello utilizamos que, por ser φ creciente y sobreyectiva, conforme t varía entre a y b su imagen $\varphi(t)$ recorre todo el intervalo $[c, d]$. Entonces,

$$\alpha^* = \{\alpha(t) : t \in [a, b]\} = \{\beta(\varphi(t)) : t \in [a, b]\} = \{\beta(z) : z \in [c, d]\} = \beta^*.$$

Ahora veamos que la longitud de ambos arcos es la misma. Derivando en ambos miembros de la ec. (1.5) aplicando la regla de la cadena, se tiene

$$\alpha'(t) = \beta'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \quad \|\alpha'(t)\| = \|\beta'(\varphi(t))\| \varphi'(t),$$

La longitud de α es

$$s(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \|\beta'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt = \int_c^d \|\beta'(z)\| dz = s(\beta),$$

donde en la última integral se ha hecho el cambio de variable $z = \varphi(t)$.

Como $\varphi' > 0$, a partir de la expresión $\alpha'(t) = \beta'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ se deduce que $\alpha'(t) \neq 0$ implica $\beta'(t) \neq 0$, es decir, que si α es suave, β es suave.

En vista de la propiedad anterior se dice que si α y β son arcos equivalentes entonces proporcionan representaciones paramétricas distintas de una misma curva. La función φ define el cambio de parámetro.

Los arcos equivalentes tienen la misma imagen y recorren los puntos de la imagen en el mismo sentido. Si en la definición anterior consideramos la función φ de modo que $\varphi'(t) < 0 \forall t \in [a, b]$, entonces obtenemos otro arco que también tiene la misma imagen que γ pero recorrida en sentido contrario. Este arco es el que se denomina *arco opuesto*. El punto inicial de γ es el punto final de su opuesto y *viceversa*.

Definición 1.8 (*Arco unión*)

Consideremos dos arcos

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

tales que cumplen

$$\alpha(b) = \beta(c).$$

**Para seguir leyendo, inicie el
proceso de compra, click aquí**