



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Análisis de la influencia del diseño, material y fuerza de pretensado en el comportamiento resistente del marco de una raqueta de tenis mediante el Método de los Elementos Finitos

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Mecánica

AUTOR/A: González Díaz, Johana Carolina

Tutor/a: Vercher Martínez, Ana

CURSO ACADÉMICO: 2022/2023



*“Ever tried. Ever failed. No matter. Try again. Fail Again. Fail better” –  
Samuel Beckett.*

## AGRADECIMIENTOS

*A mi tutora, Ana Vercher Martínez, por su dedicación, paciencia, optimismo y porque su guía ha sido fundamental para la realización de este Trabajo de Fin de Grado y para mi aprendizaje. Gracias por la inspiración, ha sido un honor.*

*A mis amigas Nela, Paquita, Lidia y Nerea, porque recorrer este camino juntas ha sido uno de los mayores privilegios de mi vida. Os tengo en el corazón para siempre.*

*A la familia Cuervo Moreno, por hacerme parte de vuestra familia desde el primer momento. Gracias por vuestro cariño.*

*To Marina, for her unwavering faith in me and her unconditional support. I could've not done this without you. Thank you for making me happy.*

*A mi familia Díaz Balza, por cuidarme, quererme y siempre darme un motivo para sonreír. Cuento los días para volver a vernos. Gracias por ser y estar.*

*A mi abuela Consuelo, por mostrarme la importancia de ser una buena persona. Sé que desde donde esté, me sigue guiando cada día. Gracias, Cheno.*

*A mi madre, por todos los sacrificios que hoy me permiten estar aquí. Ser tu hija es uno de los mayores orgullos de mi vida. Pa' ti, mamá.*

*Y en especial a mi hermana, la persona más importante en este camino y en mi vida porque nada de esto habría sido posible sin ella. No hay palabras para agradecerte todo lo que has hecho y sigues haciendo por mí. Te quiero. Gracias totales.*

## RESUMEN

El empleo de materiales poliméricos reforzados con fibra para la fabricación de la raqueta de tenis de alta gama permite optimizar su diseño gracias a la mejora de parámetros como la rigidez y resistencia específicos. La aplicación de materiales avanzados ha permitido crear nuevos diseños del marco y la sección de la raqueta. El uso de estos materiales comenzó en la década de 1980 desbancando la tradicional madera.

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado es evaluar la influencia del diseño y el material empleado en la fabricación de la raqueta de tenis en el comportamiento resistente del marco. Asimismo, se analizará la influencia de la fuerza de pretensado. Para ello se empleará el software de elementos finitos Ansys APDL.

En la elaboración de los modelos numéricos, se considerarán diversos diseños. El material a estudiar será en base a preimpregnados de fibra de vidrio/carbono/aramida. Se modelará la cuerda de la raqueta considerando diferentes valores de fuerza de pretensado. Finalmente, mediante el criterio de fallo de Hashin, se estudiará la influencia de estos parámetros sobre la resistencia del marco al recibir el impacto de la pelota.

Palabras clave: Raqueta de tenis, preimpregnados, criterio de Hashin, Elementos Finitos.

## RESUM

L'ús de materials polimèrics reforçats amb fibra per a la fabricació de la raqueta de tennis d'alta gamma permet optimitzar el seu disseny gràcies a la millora de paràmetres com la rigidesa i resistència específics. L'aplicació de materials avançats ha permès crear nous dissenys del marc i la secció de la raqueta. L'ús d'aquests materials va començar en la dècada de 1980 desbancant la tradicional fusta.

L'objectiu principal d'aquest Treball Fi de Grau és avaluar la influència del disseny i el material emprat en la fabricació de la raqueta de tennis en el comportament resistent del marc. Així mateix, s'analitzarà la influència de la força de pretensat. Per això s'emprarà el programari d'elements finits Ansys APDL.

En l'elaboració dels models numèrics, es consideraran diversos dissenys. El material a estudiar està basat en preimpregnats de fibra de vidre/carboni/aramida. Es modelarà la corda de la raqueta considerant diferents valors de força de pretensat. Finalment, mitjançant el criteri de fallada de Hashin, s'estudiarà la influència d'aquests paràmetres sobre la resistència del marc en rebre l'impacte de la pilota.

Paraules clau: Raqueta de tennis, preimpregnats, criteri de fallada de Hashin, Elements Finites.

## **ABSTRACT**

The use of fiber-reinforced polymeric materials for the manufacture of the high-end tennis racket allows to optimize of it's design thanks to the improvement of parameters such as rigidity and specific resistance. The application of advanced materials has made it possible to create new designs of the frame and section of the racket. The use of these materials began in the 1980s displacing traditional wood.

The main objective of this Final Degree Project is to evaluate the influence of the design and material used in the manufacture of the tennis racket on the resistant behavior of the frame. Moreover, the influence of the prestressing force will be analyzed. For this, the Ansys APDL finite element software will be used.

In the elaboration of numerical models, various designs will be considered. The material to be studied will be based on fiberglass/carbon/aramid prepregs. The racket string will be modeled considering different values of prestressing force. Finally, using the Hashin failure criterion, the influence of these parameters on the resistance of the frame when receiving the impact of the ball will be studied.

Keywords: Tennis racket, prepregs, Hashin criterion, Finite elements.

# **ÍNDICE GENERAL**

**Documento 1: MEMORIA**

**Documento 2: PRESUPUESTO**

**Documento 3: PLIEGO DE CONDICIONES**

**Documento 4: PLANOS**

**ANEXOS A LA MEMORIA**





UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Análisis de la influencia del diseño, material y fuerza de pretensado en el comportamiento resistente del marco de una raqueta de tenis mediante el Método de los Elementos Finitos.

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Mecánica

# DOCUMENTO 1: MEMORIA

AUTOR/A: González Díaz, Johana Carolina

Tutor/a: Vercher Martínez, Ana

CURSO ACADÉMICO: 2022/2023

# CONTENIDO

0. MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS.....	3
1. ANTECEDENTES.....	4
1.2. Marco teórico. ....	7
1.2.1. El laminado como paradigma del material compuesto.....	7
1.2.3. Propiedades elásticas. Modelos micromecánicos. ....	10
1.2.4. Propiedades resistentes. Criterios de fallo.....	13
1.2.5. Ley de Hooke Generalizada .....	19
1.2.6. Teoría Clásica de Laminados.....	21
1.3. Método de los Elementos Finitos .....	24
1.4. Normativa ITF.....	26
1.5. Estudio de las tipologías constructivas en el mercado a lo largo de la historia. 28	
1.6. Fabricación de raquetas de tenis de alta gama .....	32
1.7. Materiales. ....	35
2. Modelado numérico de una raqueta de alta gama.....	37
2.1. Tratamiento geométrico. Variables de diseño. ....	37
2.2. Cálculo de las propiedades elásticas y resistentes. Variable: fracción en volumen de fibra.....	43
2.3. Mallado por elementos finitos.....	46
2.3.1. Tipo de elemento y definición de laminado. ....	48
2.3.2. Sistema de referencia local. Orientación de elementos.....	49
2.4. Asignación de propiedades. ....	50
2.5. Incorporación de la red. Fuerza de pretensado.....	52
2.6. Análisis resistente del marco de la raqueta.....	54
3. ESTUDIO DE LA FUERZA DE PRETENSADO E IMPACTO DE LA PELOTA. ....	60
3.1. Análisis de la fuerza de pretensado. ....	60
3.2. Análisis del material. Variable fracción en volumen de fibra.....	63
4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES .....	66
4.1. Resumen de resultados obtenidos.....	66
4.2. Conclusiones .....	68
5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	70

## **0. MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS.**

El mundo del tenis ha sido testigo del avance imparable en las últimas cinco décadas de los materiales compuestos y las diferentes ventajas que pueden ofrecer estos materiales. La combinación entre ligereza y resistencia convierten a los materiales compuestos reforzados con fibra en un gran activo en el ámbito deportivo. Por ello, el objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado es analizar cómo diferentes variables afectan al comportamiento resistente del marco de una raqueta de tenis, utilizando el Método de los Elementos Finitos para dicho estudio. En este proyecto se considera la influencia del diseño del marco de la raqueta, el material utilizado en su fabricación y la fuerza del pretensado al encordar la misma.

Para alcanzar este objetivo, se realizará una revisión bibliográfica sobre los materiales compuestos y su aplicación, así como de la evolución de los modelos disponibles en el mercado y la normativa que rige al deporte. Posteriormente se procederá a modelar dos propuestas de marcos de raquetas de tenis para seguidamente realizar un estudio computacional mediante el método de los elementos finitos que permita simular y analizar el comportamiento del marco respecto a las variables a estudiar. Finalmente, se examinarán los resultados y se presentarán las conclusiones alcanzadas.

La motivación para realizar este Trabajo de Fin de Grado fue la de combinar dos intereses personales: la ingeniería y el tenis. Asimismo, se pretende profundizar en los conocimientos adquiridos sobre materiales compuestos y completar los requisitos necesarios para obtener la titulación en el Grado en Ingeniería Mecánica.

# 1. ANTECEDENTES.

## 1.1. Definición e historia del tenis.

El tenis es un deporte de raqueta disputado entre dos jugadores (categoría individual) o dos equipos de dos jugadores (categoría dobles), en una cancha rectangular dividida por una red, en la que el objetivo principal es utilizar una raqueta para golpear una pelota hueca por encima de la red y en dirección del campo del oponente de manera tal que el o los rivales no puedan devolver la pelota exitosamente.

Los orígenes del tenis se pueden rastrear hasta el siglo XII, cuando un juego que consistía en golpear la pelota con la palma de la mano y llamado "*le jeu de paume*" se popularizó entre monjes de la época. Este juego continuó su evolución, añadiendo componentes como guantes o palas hasta la implementación de la primera raqueta de madera encordada en el siglo XVI (Grasso, J, 2011).

Durante la década de 1970, la utilización de materiales compuestos se generalizó tras el desarrollo de nuevas fibras, llegando a utilizarse en diferentes mercados, incluido el de las indumentarias deportivas y suponiendo una revolución en cuanto al rendimiento ofrecido por los diferentes equipamientos. Esta revolución incluyó al mundo del tenis, que pasó progresivamente de marcos de madera a marcos de materiales compuestos, pasando por otros como el aluminio previamente.

### 1.1.1. Evolución en los materiales utilizados en la fabricación de raquetas de tenis.

La madera se mantuvo como componente principal de los marcos de las raquetas de tenis desde el siglo XVI hasta mediados del siglo XX, siendo la década de 1980 la última en ver finales de torneos de Grand Slam donde los jugadores que la disputaban usaban raquetas fabricadas con este material. Diferentes técnicas y combinaciones de maderas fueron desarrolladas para mejorar la calidad de las raquetas, mejorando propiedades como la rigidez y durabilidad de estas. Entre los problemas derivados de la utilización de la madera, se encontraba la fragilidad en las gargantas de las raquetas y el pandeo del marco a causa de la humedad. Estos problemas se solucionaron reforzando las zonas críticas con, entre otros, envolturas de lienzo o tiras de metal.

En la década de 1920 se comenzaron a fabricar raquetas macizas de aluminio y de aleaciones de magnesio fundido, pero no fue hasta la década de los 60 que se desarrollaron

marcos huecos con ambos materiales, lo que significó una revolución en el campo del diseño y tecnología de las raquetas, ya que la ligereza y alta resistencia de los marcos huecos permitió crear nuevos diseños con mayor superficie de golpeo. En la actualidad, se siguen fabricando raquetas de aluminio moldeado en frío como opción de bajo coste o para jugadores infantiles (Lammer y Koetze, 2004).

Tal y como se ha mencionado anteriormente, la proliferación del uso de los materiales compuestos y su llegada al mundo del tenis supuso un antes y un después en la fabricación de raquetas de tenis. Inicialmente, se crearon marcos de mezcla de fibra de vidrio con fibra de carbono, pasando posteriormente a raquetas de fibra de carbono rellenas de espuma o algunas con poliamidas utilizado como termoplástico unido a fibra de carbono o como filamentos combinados con fibras de grafito (Haines, 1983, como se citó en Lammer y Koetze, 2004).

Actualmente, los marcos de las raquetas de alta gama cuentan con materiales compuestos con refuerzos de fibra de carbono como su material principal. Una parte fundamental de este estudio se basa en la elección del material y las propiedades mecánicas que aporta al modelo, por lo que es necesario profundizar sobre su composición y características para entender su influencia.

### **1.1.2. Partes de una raqueta de tenis.**

En la figura 1 se muestran las partes de una raqueta de tenis en la que se distinguen tres zonas características: la cabeza, que contiene a las cuerdas y en consecuencia la superficie de golpeo, el árbol con su respectiva garganta y el agarre. Cabe destacar que, aunque el árbol técnicamente está conformado por la garganta y la parte del tubo principal que conecta a la garganta con la empuñadura, para efectos prácticos consideraremos a la garganta como una zona y al resto del árbol como parte del agarre.

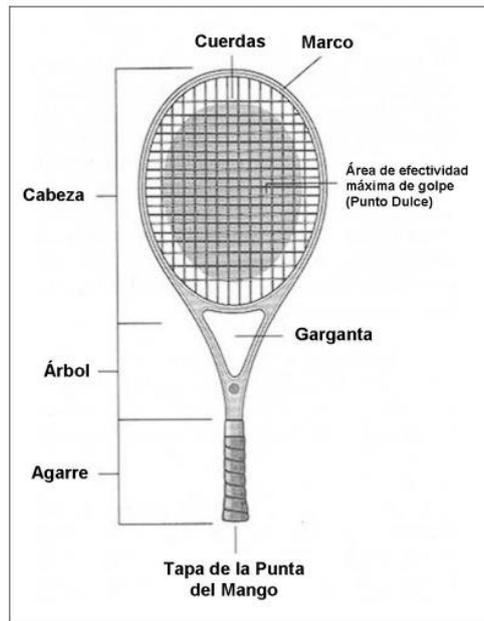


Figura 1. Partes de una raqueta de tenis. (Crespo, 2015)

### 1.1.2.1. Cabeza

Es el componente principal de una raqueta de tenis, ya que es la parte utilizada para golpear la pelota. Generalmente tiene forma ovalada y está delimitada por la parte redondeada del marco y el refuerzo superior de la garganta. Su tamaño dependerá, entre otras variables, del nivel de juego de su público objetivo, siendo las de mayor tamaño utilizadas por jugadores principiantes por tener un área de efectividad máxima de golpe más grande, y las de tamaño medio o estándar, las preferidas por jugadores más experimentados, puesto que ofrece mayor control y precisión. También es conocida como superficie de golpeo.

### 1.1.2.2. Garganta.

Es el componente encargado de conectar la cabeza con la empuñadura. Antiguamente representaba una de las zonas más críticas del marco, pero los cambios en el diseño geométrico y los materiales de fabricación de las raquetas disminuyeron considerablemente las tensiones en la garganta. La rigidez de esta zona tiene un gran impacto sobre la rigidez total de la raqueta, por lo que suele reforzarse durante el proceso de fabricación.

### 1.1.2.3. Empuñadura y agarre.

La empuñadura, también referida como mango, representa la zona del marco que va desde la parte inferior de la garganta hasta el final de este. Está compuesto por la parte recta del marco y un componente propio de espuma de poliuretano que se adhiere o inyecta una vez terminado el moldeo del marco, con lo que se busca amortiguar las vibraciones

producidas por el impacto de la pelota y evitar el contacto directo entre el marco y la mano del jugador. Por ella se sostiene la raqueta al jugar, por lo que se suele recubrir con un material antideslizante conocido como *agarre* (en inglés, *grip*) para asegurar que la raqueta no deslice en la mano del jugador, especialmente cuando este transpire.

Actualmente, muchos jugadores añaden una capa extra enrollando una cinta de poliuretano muy fina alrededor del agarre, la cual es conocida como *overgrip*, y que se puede cambiar con facilidad regularmente a muy bajo coste, lo que permite contar con un agarre firme constantemente al jugar.

#### **1.1.2.4. Otros componentes.**

Las cuerdas utilizadas ofrecen una variedad de prestaciones que no serán desarrolladas en este trabajo, pero sí se debe destacar como una de las variables más importantes al momento de escoger una raqueta. Desde los diferentes patrones de encordado hasta los materiales y sus diferentes combinaciones, las cuerdas son un factor determinante en las sensaciones y confort que puede proporcionar una raqueta.

Otro elemento relevante son los ojales de las raquetas. En las raquetas de madera, eran simplemente agujeros que se realizaban alrededor del marco para permitir el encordado. Sin embargo, al pasar de la madera al aluminio y materiales compuestos, fue necesario añadir ojales de otros materiales para proteger las cuerdas de los posibles bordes afilados del marco. Actualmente, los ojales también ofrecen otras ventajas como aumentar la flexión del marco, amortiguar vibraciones actuando como un resorte o recibir y proteger la parte superior de la raqueta. Suelen ser fabricados con poliamidas como PA11 o PA6, que ofrecen mayor dureza y flexibilidad y su diseño es muy preciso, ya que sólo se encajan al marco de manera manual y se debe asegurar que no se caigan durante el juego.

### **1.2. Marco teórico.**

#### **1.2.1. El laminado como paradigma del material compuesto.**

##### **Materiales compuestos**

En términos generales se entiende por materiales compuestos a aquellos formados por la combinación de dos o más constituyentes, a escala macroscópica, los cuales no son solubles el uno en el otro y tienen un efecto sinérgico (las propiedades del material resultante de la unión son mejores que las propiedades de los materiales individualmente).

La condición de heterogeneidad entre los distintos componentes en la escala macroscópica es la diferencia entre materiales compuestos y las aleaciones, lo que implica que las partes de los materiales compuestos pueden ser separados mecánicamente y la dispersión de uno en otro puede ser controlada.

Los componentes de los materiales compuestos se dividen en refuerzos y matrices: los refuerzos se pueden encontrar en forma de fibras o de partículas y son los encargados de aportar rigidez y resistencia. Asimismo, suelen poseer una elevada relación longitud/diámetro, llegando incluso al caso en el que el diámetro de la fibra es del mismo orden de magnitud del tamaño del cristal; esto trae como consecuencia que los defectos internos sean prácticamente inexistentes y que las fibras son más resistentes y rígidas que los materiales en bruto. Por su parte, las matrices se encargan de proteger a las fibras a la vez que dan forma al material compuesto. Su principal función es transmitir los esfuerzos a las fibras por lo que su resistencia y rigidez suelen ser significativamente inferiores a la de las fibras. En este Trabajo Fin de Grado, hemos considerado para la fabricación del marco de la raqueta, utilizar laminados formados por láminas de matriz polimérica reforzadas con fibras largas con orientación unidireccional.

Los compuestos reforzados presentan variedad de ventajas respecto con los materiales más tradicionales, tales como resistencia y rigidez específica muy elevadas, resistencia a la fatiga, corrosión, entre otras. Asimismo, optimizan los diseños, reducen la cantidad de material residual en la fabricación y son ideales para la creación de laminados, proceso que se simplifica con la utilización de preimpregnados.

Las propiedades de las láminas -y posteriores laminados- depende de diferentes características propias de la fabricación y diseño de las láminas, entre las cuales se encuentra la orientación de las fibras, la fracción en volumen de fibra y los materiales utilizados para la fibra y la matriz, aunque este último será explicado más adelante.

En el caso de la orientación de la fibra, se asume que cada lámina unidireccional tiene un sistema de referencia orientado asociado, conformado por tres vectores directores 1, 2 y 3 y el cual se define de manera tal que el vector 1 sea paralelo a la dirección longitudinal de las fibras, mientras que los vectores 2 y 3, perpendiculares entre sí, son transversales a las fibras.

Por su parte, la fracción en volumen de fibra ( $V_f$ ) se define como la relación entre el volumen de las fibras y el volumen total del compuesto, tal y como se observa en la Ecuación

1. Partiendo de la hipótesis de que la sección recta de las fibras es circular (válido para el vidrio y aramida; carbono tiene sección irregular), con mismo diámetro para todas las fibras y que la distribución de éstas en la lámina será ideal, hexagonal o cuadrada. De acuerdo con lo mostrado en la Figura 2, el valor máximo de fracción de volumen de fibra se dará cuando la distancia entre dos centros de sección de fibra consecutivos sea igual al diámetro, siendo la separación entre fibras nula. En la práctica, esto es imposible de recrear por lo que se asume que el valor máximo de volumen de fibra en la práctica es de 0,7.

$$V_f = \frac{\text{Volumen de fibras}}{\text{Volumen total del compuesto}} \quad (1)$$

$$V_f = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (1.a)$$

$$V_f = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (1.b)$$

Ecuación 1. Fracción en volumen de fibras, cálculo para ordenación hexagonal ideal (1.a) y cálculo para ordenación cuadrada ideal (1.b)

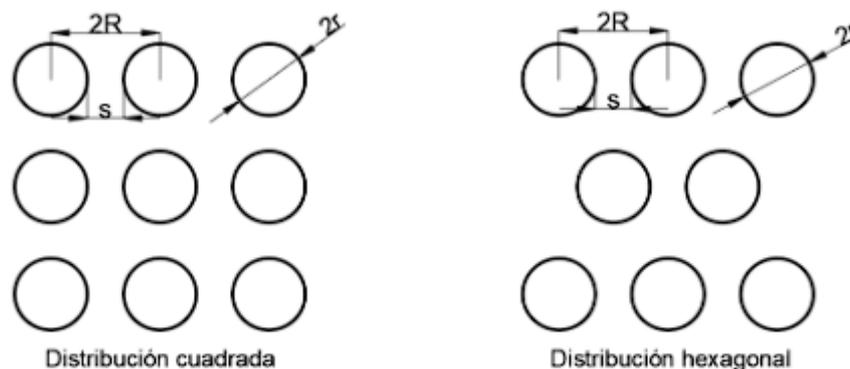


Figura 2. Distribución de fibras ideal, cuadrada (izq.) y hexagonal (der.).

### 1.2.2. Definición de laminado

Los laminados se definen como la unión apilada de capas (láminas) de dos o más materiales diferentes, orientadas convenientemente. Se caracterizan por tener un espesor considerablemente inferior a sus dimensiones de alto y ancho, así como su alta rigidez y resistencia específica y su principal función es la de soportar distintos tipos de esfuerzos de la manera más eficiente posible.

Dentro de los laminados, existen dos tipos de configuraciones destacables, tipo membrana y tipo sándwich. La configuración tipo membrana tiene un espesor muy bajo y sólo

transmite cargas contenidas en el plano del laminado, a la vez que tiene diferentes variables de diseño como material, la proporción de fracción en volumen de fibra, orientación y espesor de cada lámina, secuencia de apilado, número de láminas, entre otras. Por su parte, los laminados tipo “sándwich” se forman apilando piel, núcleo y piel, y se caracterizan por ser heterogéneos y un comportamiento no isótropo. Se emplean fundamentalmente cuando existe sollicitaciones de flexión. Para este proyecto, utilizaremos laminados tipo membrana.

Para la nomenclatura de las capas, se sigue la convención de Stephen. W. Tsai, en la que se define un plano medio XOY en la mitad del espesor del laminado. A partir de este, con la dirección z positiva apuntando hacia la parte inferior del laminado, se comienza a numerar cada límite de lámina comenzando por  $Z_1$  a la altura de la capa superior externa del laminado, seguido por  $Z_2$  a la altura del final del espesor de la primera lámina y así sucesivamente hasta llegar al borde de la capa inferior externa, la cual se nombra como  $Z_{n+1}$ , siendo n el número de capas. En caso de laminados con un número de capas impar, se considera que el plano medio será  $Z_{n+2}$ . En la Figura 3 se puede apreciar un diagrama orientativo sobre la nomenclatura y numeración.

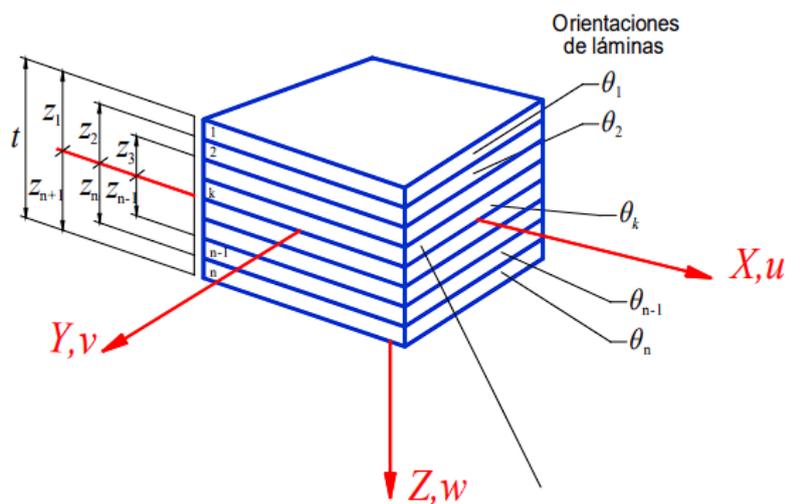


Figura 3. Diagrama orientativo sobre la nomenclatura en laminados y sistema de referencia.

### 1.2.3. Propiedades elásticas. Modelos micromecánicos.

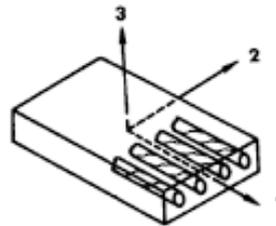
Sabiendo que la micromecánica estudia el material compuesto partiendo de las propiedades de los componentes, ya que tiene en cuenta la heterogeneidad del compuesto, se pueden plantear las siguientes hipótesis de cálculo:

- tanto la fibra como la matriz son homogéneas, isótropas, linealmente elásticas y continuas
- las fibras están ordenadas de forma repetitiva y regular

- las propiedades de la matriz son constantes, incluso en las cercanías de la fibra
- la unión entre las fibras y la matriz es perfecta
- la interfase es infinitamente delgada
- no existe discontinuidad en la deformación a través de la interfase.

Estas hipótesis son muy difíciles de garantizar en la práctica, pero facilitan la creación de modelos válidos como primera aproximación de diseño que suele venir acompañada de una posterior etapa de análisis experimental.

Por su parte, para estimar las propiedades elásticas de las láminas unidireccionales, es necesario tomar en cuenta el sistema de referencia orientado, recordando que la dirección 1 es la dirección de la fibra y que las direcciones 2 y 3 son direcciones transversales.



*Figura 4. Definición del sistema de referencia orientado en una lámina con fibra unidireccional*

En este sentido, es relevante considerar que el sistema de referencia y las características propias de los materiales pueden dar lugar a diferentes planos de simetría, si se plantean sistemas orientados convenientemente. Considerando que los materiales utilizados para el diseño del marco son fibras de carbono (propiedades anisótropas), fibras de vidrio y resina tipo epoxi (propiedades isotropas), si se supone que el diámetro de las fibras es micrométrico y que la geometría es simétrica, podemos asumir un comportamiento ortótropo del material compuesto. El carácter ortótropo del material implica que existen tres planos de simetría ortogonales y que, al ser las direcciones 2 y 3 del sistema de referencia orientado radiales a la fibra, se entiende que el comportamiento de ambas direcciones será idéntico, lo que da paso a definir dos direcciones representativas: la dirección 1 que coincidirá con la dirección longitudinal de las fibras y una dirección radial que pasaremos a nombrar como dirección 2. Este comportamiento se denomina transversalmente isotropo.

Para la determinación de las propiedades elásticas de las láminas unidireccionales, aplicaremos en primer lugar un enfoque en resistencia de materiales. Este enfoque requiere de hipótesis simplificadoras que supongan que las deformaciones en la dirección 1 coinciden

con la de la fibra y la de la matriz y que las secciones normales al eje 1 permanecen planas. Derivado de estas hipótesis resulta la “regla de las mezclas”, la cual se puede aplicar para el cálculo del módulo de Young en la dirección 1,  $E_1$  (Ecuación 2), y del coeficiente de Poisson mayor,  $\nu_{12}$  (Ecuación 3).

$$E_1 = E_f \cdot V_f + E_m \cdot (1 - V_f) \quad (2)$$

$$\nu_{12} = \nu_f \cdot V_f + \nu_m \cdot (1 - V_f) \quad (3)$$

No obstante, este enfoque no genera estimaciones fiables para el cálculo del módulo de Young en la dirección 2 ni del módulo de cizalladura en las direcciones 1-2 ( $G_{12}$ ), por lo que se pasa a considerar un enfoque de elasticidad. Este enfoque comprende dos posibilidades: análisis teóricos basados en elasticidad y técnicas numéricas propias del Método de los Elementos Finitos. Basado en esto, se formularon las ecuaciones de Halpin-Tsai.

Las ecuaciones de Halpin-Tsai (Ecuaciones 4 y 5) provienen de un ajuste de las ecuaciones teóricas mediante resultados numéricos y son de gran utilidad para el diseño. Estas ecuaciones ofrecen soluciones precisas si las fracciones de volumen de fibra utilizadas no son muy elevadas y vienen dadas por:

$$\frac{M}{Mm} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (4)$$

con  $\eta$  igual a:

$$\eta = \frac{\frac{Mf}{Mm} - 1}{\frac{Mf}{Mm} + \xi} \quad (5)$$

donde:

- M: constante elástica a calcular ( $E_2$ ,  $G_{12}$  o  $\nu_{23}$ )
- Mf: constante elástica de la fibra ( $E_f$ ,  $G_f$  o  $\nu_f$ )
- Mm: constante elástica de la matriz ( $E_m$ ,  $G_m$  o  $\nu_m$ )
- $\xi$ : medida del refuerzo en fibra del compuesto

El parámetro  $\xi$  depende de la geometría y distribución de la fibra, así como de las condiciones de carga. Su estimación representa el principal inconveniente pues se realiza a partir del ajuste de las ecuaciones de Halpin-Tsai a soluciones exactas de elasticidad.

Sabiendo esto, se puede asumir que, para fibras cilíndricas en ordenación cuadrada, el valor del parámetro  $\xi$  para calcular  $E_2$  y  $G_{12}$  será igual a dos y uno, respectivamente.

En este sentido, el cálculo del coeficiente de Poisson en el plano 2-3,  $\nu_{23}$ , y el módulo de rigidez frente a cortadura transversal en el plano mismo plano,  $G_{23}$ , es necesario una variación de las fórmulas de Halpin-Tsai, dadas por las ecuaciones 6 y 7:

$$G_{23} = \frac{E_2}{2 \cdot (1 + \nu_{23})} \quad (6)$$

$$\nu_{23} = 1 - \nu_{21} - \frac{E_2}{3K} \quad (7)$$

donde:

- $\nu_{21}$  es el coeficiente de Poisson menor en el plano 1-2.
- $K$  es el módulo de compresibilidad del compuesto, basado en los módulos de compresibilidad de la fibra y la matriz,  $K_f$  y  $K_m$  respectivamente.

$$\nu_{21} = \nu_{12} \cdot \frac{E_2}{E_1} \quad (8)$$

$$K = \left[ \frac{V_f}{K_f} + \frac{1 - V_f}{K_m} \right]^{-1} \quad (9)$$

$$K_f = \frac{E_f}{3(1 - 2\nu_f)} \quad (10)$$

$$K_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)} \quad (11)$$

#### 1.2.4. Propiedades resistentes. Criterios de fallo.

Dentro de la micromecánica también es posible estudiar las propiedades resistentes de los materiales y, en el caso de las láminas, estas propiedades, que suelen depender de variables como la orientación de la fibra, requieren de ensayos para cuantificar los límites de fallo y compararlos con los diferentes esfuerzos a los que se somete la lámina. Asimismo, en el caso de los laminados, la resistencia de estos está relacionada con la resistencia de cada lámina que lo compone. Diferentes teorías se han desarrollado para determinar el límite a rotura de una lámina orientada y estas generalmente se basan en la resistencia a esfuerzos

normales y tangenciales de las láminas unidireccionales y orientadas. Así como los modelos empleados para estimación de las constantes ingenieriles son empleados ampliamente, los modelos teórico existentes para estimar los límites resistentes no son muy buenos, se recurre al ensayo experimental para su determinación.

En el caso de una lámina unidireccional se pueden definir cuatro parámetros de resistencia normal (dos a tracción  $X_T$ ,  $Y_T$  y dos a compresión  $X_C$ ,  $Y_C$ ) y un quinto parámetro para la resistencia a cortadura de una lámina unidireccional,  $S$ . Estos parámetros no se pueden transformar directamente de una lámina orientada a una no orientada, por lo que los criterios de fallo se enfocan en encontrar las tensiones en ejes orientados para posteriormente utilizar los cinco parámetros de resistencia y determinar si la lámina ha fallado o no [3].

Los criterios de fallo en un material compuesto se pueden dividir en no interactivos e interactivos. Los no interactivos o de límite predicen la carga de rotura y el modo al comparar las tensiones de lámina ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\tau_{12}$ ) o las deformaciones ( $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\gamma_{12}$ ) con su respectiva resistencia por separado y sin considerar la interacción entre las tensiones aplicadas. Por su parte, los criterios interactivos pronostican la carga de rotura utilizando una sola ecuación cuadrática o de orden superior, que involucra todas las componentes de tensión (o deformación). El fallo ocurre cuando se cumple esta ecuación, y el modo de fallo se determina indirectamente al comparar las relaciones entre tensión y límites resistentes.

#### 1.2.4.1. Criterio de fallo de Tsai-Hill

Este criterio está basado en la Teoría de Distorsión de la Energía de von Mises para fluencia en materiales isótropos aplicados a materiales anisótropos. La energía de deformación de un cuerpo cuenta con dos partes: la energía dada por el cambio en el volumen del cuerpo llamada energía de dilatación y la energía generada por el cambio en la forma del cuerpo llamada energía de distorsión. Se asume que el fallo en el material se produce sólo cuando la energía de distorsión aplicada supera el límite del material. Fue planteada en la década de los 50, y propone que una lámina falla si la Ecuación 12 no se cumple.

$$(G_2 + G_3)\sigma_1^2 + (G_1 + G_3)\sigma_2^2 + (G_2 + G_1)\sigma_3^2 - 2G_3\sigma_1\sigma_2 - 2G_2\sigma_1\sigma_3 - 2G_1\sigma_3\sigma_2 + 2G_4\tau_{23}^2 + 2G_5\tau_{13}^2 + 2G_6\tau_{12}^2 < 1 \quad (12)$$

Los coeficientes de la ecuación anterior se pueden calcular siguiendo las ecuaciones 13 a la 16, y debido a que se presume que la lámina está sometida a tensión plana, se puede asumir que  $\sigma_3 = \tau_{31} = \tau_{23} = 0$  y que el criterio de fallo de Tsai-Hill se reduce a la ecuación 17:

$$G_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{[(\sigma_2^T)_{ult}]^2} - \frac{1}{[(\sigma_1^T)_{ult}]^2} \right) \quad (13)$$

$$G_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{[(\sigma_1^T)_{ult}]^2} \right) \quad (14)$$

$$G_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{[(\sigma_1^T)_{ult}]^2} \right) \quad (15)$$

$$G_6 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{[(\tau_{12})_{ult}]^2} \right) \quad (16)$$

$$\left[ \frac{\sigma_1}{(\sigma_1^T)_{ult}} \right]^2 - \left[ \frac{\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1^T)_{ult}} \right]^2 + \left[ \frac{\sigma_2}{(\sigma_2^T)_{ult}} \right]^2 + \left[ \frac{\tau_{12}}{(\tau_{12})_{ult}} \right]^2 < 1 \quad (17)$$

#### 1.2.4.2. Criterio de fallo Tsai-Wu

El criterio de Tsai-Wu busca generalizar el criterio de fallo de Tsai-Hill diferenciando las resistencias a tracción y compresión. Se considera como uno de los criterios interactivos más relevantes. Bajo la hipótesis de tensión plana, se considera que la lámina falla si la ecuación 18 no se cumple [4].

$$H_1\sigma_1 + H_2\sigma_2 + H_6\tau_{12} + H_{11}\sigma_1^2 + H_{22}\sigma_2^2 + H_{66}\tau_{12}^2 + 2H_{12}\sigma_1\sigma_2 < 1 \quad (18)$$

Los cinco componentes  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_6$ ,  $H_{11}$ ,  $H_{22}$  y  $H_{66}$  se obtienen de acuerdo con los cinco límites de resistencia de la lámina unidireccional de la siguiente manera:

- Aplicando una tensión  $\sigma_1 = (\sigma_1^T)_{ult}$ ,  $\sigma_2 = \tau_{12} = 0$  a una lámina unidireccional hasta que falle. La ecuación 18 se reduce a:

$$H_1(\sigma_1^T)_{ult} + H_{11}(\sigma_1^T)_{ult}^2 = 1 \quad (19)$$

- Aplicando una tensión  $\sigma_1 = (-\sigma_1^C)_{ult}$ ,  $\sigma_2 = \tau_{12} = 0$  a una lámina unidireccional hasta que falle. La ecuación 18 se reduce a:

$$-H_1(\sigma_1^C)_{ult} + H_{11}(\sigma_1^C)_{ult}^2 = 1 \quad (20)$$

- De las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$H_1 = \frac{1}{(\sigma_1^T)_{ult}} - \frac{1}{(\sigma_1^C)_{ult}} \quad (21)$$

$$H_{11} = \frac{1}{(\sigma_1^T)_{ult}(\sigma_1^C)_{ult}} \quad (22)$$

- Aplicando una tensión  $\sigma_2 = (-\sigma_2^T)_{ult}$ ,  $\sigma_1 = \tau_{12} = 0$  a una lámina unidireccional hasta que falle. La ecuación 18 se reduce a:

$$H_2(\sigma_2^T)_{ult} + H_{22}(\sigma_2^T)_{ult}^2 = 1 \quad (23)$$

- Aplicando una tensión  $\sigma_2 = (-\sigma_2^C)_{ult}$ ,  $\sigma_1 = \tau_{12} = 0$  a una lámina unidireccional hasta que falle. La ecuación 18 se reduce a:

$$-H_2(\sigma_2^C)_{ult} + H_{22}(\sigma_2^C)_{ult}^2 = 1 \quad (24)$$

- De las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$H_2 = \frac{1}{(\sigma_2^T)_{ult}} - \frac{1}{(\sigma_2^C)_{ult}} \quad (25)$$

$$H_{22} = \frac{1}{(\sigma_2^T)_{ult}(\sigma_2^C)_{ult}} \quad (26)$$

- Aplicando una tensión  $\tau_{12} = (\tau_{12})_{ult}$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  a una lámina unidireccional hasta que falle. La ecuación 18 se reduce a:

$$H_6(\tau_{12})_{ult} + H_{66}(\tau_{12})_{ult}^2 = 1 \quad (27)$$

- Aplicando una tensión  $\tau_{12} = -(\tau_{12})_{ult}$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  a una lámina unidireccional hasta que falle. La ecuación 18 se reduce a:

$$-H_6(\tau_{12})_{ult} + H_{66}(\tau_{12})_{ult}^2 = 1 \quad (28)$$

- De las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$H_6 = 0 \quad (29)$$

$$H_{66} = \frac{1}{(\tau_{12})_{ult}^2} \quad (30)$$

El único coeficiente que no puede ser calculado directamente a través de los cinco límites de resistencia es  $H_{12}$ . Este se puede determinar experimentalmente utilizando los esfuerzos biaxiales que causan que la lámina falle y sustituyendo estos valores en la ecuación 18. Se han desarrollado diferentes criterios para determinar  $H_{12}$ , incluyendo la teoría del fallo de Tsai-Hill, presentado en la ecuación 31:

$$H_{12} = \frac{1}{2(\sigma_1^T)_{ult}^2} \quad (31)$$

#### 1.2.4.3. Criterio de fallo de Hashin

El criterio de fallo de Hashin defiende que, para predecir el fallo de un material compuesto, es necesario que la base sean los mecanismos de fallo del material, en lugar de extrapolar los criterios existentes para otros materiales [1]. Tras varias propuestas, en 1980 Hashin presenta un criterio con dos mecanismos de fallo: uno asociado a las fibras y otro asociado a la matriz, haciendo distinción entre los fallos a compresión y a tracción. Este criterio de fallo es cuadrático, al igual que el de Tsai-Wu y se deduce a través de la invariancia ante rotación de los materiales compuestos, la cual se produce por la isotropía transversal de estos materiales.

Considerando los dos modos de fallos mencionados anteriormente, de fibra y de matriz, se puede dividir cada uno de estos en otros dos modos, a compresión y a tracción. En el caso de la fibra se puede asumir que el plano de fallo es el x-y y que la expresión general del criterio viene dada por la ecuación 32.

$$A_f \sigma_1 + B_f \sigma_1^2 + \frac{1}{S^2} [\sigma_5^2 + \sigma_6^2] = 1 \quad (32)$$

A su vez, las expresiones para fallo a compresión y a tensión se determinan como:

- **Fallo de fibra a tracción (FFT):** requiere  $\sigma_1 > 0$  y parte de un valor experimental de  $X_T$  y se calcula realizando ensayos biaxiales combinando  $\sigma_1$  y  $\sigma_6$ , quedando como:

$$\left[ \frac{\sigma_1}{X_T} \right]^2 + \frac{1}{S^2} [\sigma_5^2 + \sigma_6^2] = 1 \quad (33)$$

- **Fallo de fibra a compresión (FFC):** requiere  $\sigma_1 < 0$ , parte de  $X_C$  y para su cálculo, Hashin sugiere un estudio experimental. De la ecuación 32 se deduce:

$$-\frac{\sigma_1}{X_C} = 1 \quad (34)$$

En el caso de fallo de la matriz, se consideran que los esfuerzos que actúan en ese plano son:  $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$  y  $\sigma_6$ . La ecuación para el fallo de matriz viene dada por:

$$A_m [\sigma_2 + \sigma_3] + B_m [\sigma_2 + \sigma_3]^2 + \frac{1}{\tau_T^2} [\sigma_4^2 - \sigma_2 \sigma_3] + \frac{1}{S^2} [\sigma_6^2 + \sigma_5^2] = 1 \quad (35)$$

Asimismo, las expresiones para fallo a tracción y compresión de la matriz son:

- **Fallo de matriz a tracción (FMT):** donde  $\sigma_2 + \sigma_3 > 0$ . De forma similar al fallo de fibra a tracción y partiendo de  $Y_T$ , se obtiene la expresión:

$$\frac{1}{Y_T^2} [\sigma_2 + \sigma_3]^2 + \frac{1}{\tau_T^2} [\sigma_4^2 - \sigma_2 \sigma_3] + \frac{1}{S^2} [\sigma_6^2 + \sigma_5^2] = 1 \quad (36)$$

- **Fallo de matriz a compresión (FMC):** donde  $\sigma_2 + \sigma_3 < 0$ . Sabiendo  $Y_C$ , se obtiene la expresión:

$$\frac{1}{Y_C} \left[ \left( \frac{Y_C}{2\tau_T} \right)^2 - 1 \right] [\sigma_2 + \sigma_3] + \frac{1}{4\tau_T^2} [\sigma_2 + \sigma_3]^2 + \frac{1}{\tau_T^2} [\sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3] + \frac{1}{S^2} [\sigma_6^2 + \sigma_5^2] = 1 \quad (37)$$

Se debe tener en cuenta que el valor  $\tau_T$  es complicado de calcular, pero para efectos de criterios de fallo se puede obtener mediante la ecuación 38. Asimismo, el fallo de la fibra a tracción se puede aproximar mediante la ecuación 39.

$$\tau_T = S \left[ \frac{Y_c}{Y_T} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (38)$$

$$\frac{\sigma_1}{X_T} = 1 \quad (39)$$

### 1.2.5. Ley de Hooke Generalizada

Partiendo de una hipótesis de comportamiento elástico-lineal, el enunciado de la Ley de Hook Generalizada (LHG) expresa que:

*“Cada una de las seis componentes de la tensión en un punto de un sólido es una función lineal de las seis componentes de la deformación en ese punto”*

Teniendo en cuenta esto, es posible definir las matrices de rigidez [C], (ecuaciones 40.a y 40.b) y de flexibilidad [S] (ecuaciones 41.a y 41.b), así como la relación entre ambas (ecuación 42).

La ventaja que aporta esta relación es que, a través de la matriz de flexibilidad, es posible relacionar constantes ingenieriles. En la tabla ## se muestran alguna de estas relaciones:

$$\{\sigma\} = [C] \cdot \{\varepsilon\} \quad (40.a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (40.b)$$

$$\{\varepsilon\} = [S] \cdot \{\sigma\} \quad (41.a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (41.b)$$

Donde  $\{\sigma\}$  y  $\{\varepsilon\}$  son los vectores de tensión y deformación en un punto, respectivamente, expresados mediante la notación clásica. Es importante mencionar que las componentes de estos vectores también pueden expresarse del siguiente modo, de acuerdo con la denominada notación contractada:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix};$$

$$[S] = [C]^{-1} \quad (42)$$

CONSTANTE INGENIERIL	RELACIÓN CON ELEMENTOS DE [S]
Módulos de Young	$E_1 = \frac{1}{S_{11}} \quad E_2 = \frac{1}{S_{22}} \quad E_3 = \frac{1}{S_{33}}$
Módulos de rigidez	$G_{23} = E_4 = \frac{1}{S_{44}}$ $G_{31} = E_5 = \frac{1}{S_{55}}$ $G_{12} = E_6 = \frac{1}{S_{66}}$
Coefficientes de Poisson	$S_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} ; S_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} ; S_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}$ $S_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} ; S_{31} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} ; S_{32} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}$

Tabla 1. Relaciones entre constantes ingenieriles y elementos de la matriz de flexibilidad [S].

Ciertas restricciones termodinámicas aplican para esta ley, incluyendo:

*“La suma del trabajo realizado por todas las componentes de la tensión debe ser positiva para evitar la creación de energía”*

Esta restricción implica que las matrices [C] y [S] sean definidas positivas, o, que  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{31}$  y  $G_{12}$  deben ser mayor que cero.

### 1.2.6. Teoría Clásica de Laminados.

Esta teoría permite relacionar las deformaciones y curvaturas en el plano medio del laminado con las solicitaciones por unidad de anchura aplicadas. Parte de las siguientes suposiciones simplificadoras:

- El material en cada lámina es homogéneo y, al menos, ortótropo.
- Se asumen pequeñas deformaciones (basado en LHG) y pequeños desplazamientos (linealidad geométrica).
- La unión perfecta de las láminas (continuidad de desplazamientos).
- Espesor muy pequeño comparado con el ancho y largo del laminado.
- Tensión plana en cada lámina (lo cual no es válido en borde de lámina).
- Los desplazamientos en  $z$  son constantes y las secciones planas permanecen planas a flexión.

Esta teoría se puede dividir en función de los planos de simetría que posea el laminado a estudiar. En el caso de una lámina ortótropa, los esfuerzos en ejes orientados dependen de la matriz de rigidez reducida de tensión plana  $[Q]$ , tal y como se muestra en la ecuación 43:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

Y al sustituir en función de constantes ingenieriles:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

En el caso de laminados no orientados, es necesario transformar la matriz de rigidez, para lo que es necesaria una matriz  $[T]$ , función del ángulo que forman la dirección 1-2 de las láminas con los ejes globales  $X$ - $Y$ , (Ecuación 45, Figura 5) y la matriz de Reuter (ecuación 46). Una vez calculada  $[T]$  y  $[R]$ , se puede calcular la matriz de rigidez reducida para laminados no orientados  $[\bar{Q}]$  (ecuación 47), la cual permite calcular  $[\bar{Q}_k]$  para cada lámina del material.

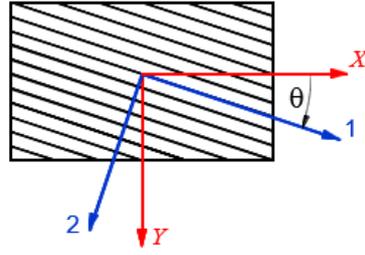


Figura 5. Diagrama de los ejes 1-2 respecto a los ejes X-Y globales.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1} \quad (47)$$

Una vez obtenida la matriz de rigidez reducida a tensión plana no orientada, se puede calcular los esfuerzos no orientados con el campo de deformaciones (Ecuaciones 48.a y 48.b), el cual dependerá del vector de deformaciones respecto a los ejes del laminado (Ecuación 49), y para cuyo cálculo es necesario los vectores de deformación (Ecuación 50) y de curvaturas en el plano medio (Ecuación 51). En la Figura 5 se muestran las deformaciones y curvaturas comentadas anteriormente. Un aspecto a resaltar es que, al comparar las matrices de rigidez reducidas, se puede observar que en el caso de la matriz no orientada aparecen acoplamientos que en el caso de la orientada eran valores nulos.

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{Q}]\{\bar{\varepsilon}\} \quad (48.a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (48.b)$$

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \{\varepsilon^0\} + z_p\{k\} \quad (49)$$

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \tau_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (50)$$

$$\{K\} = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (51)$$

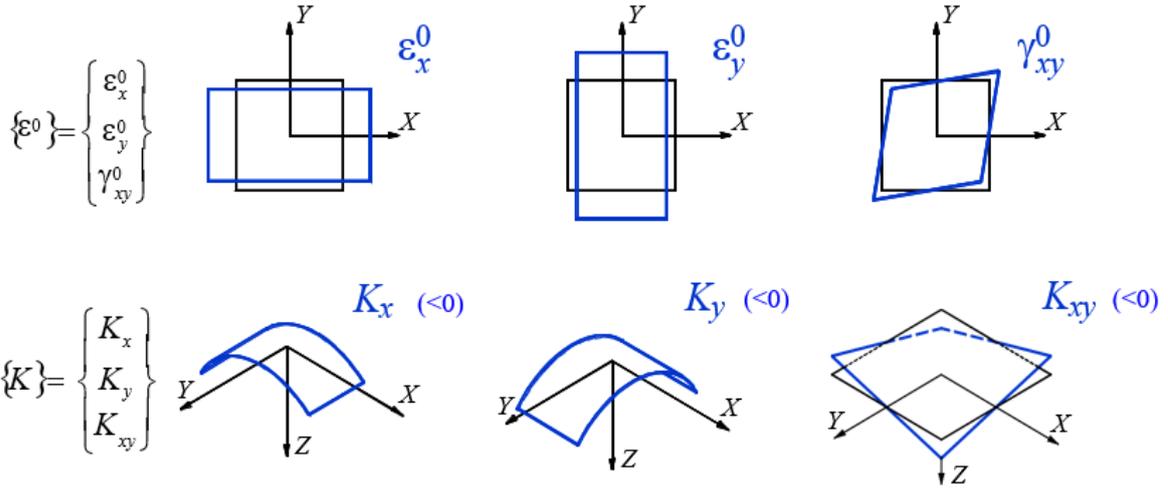


Figura 6. Deformaciones (-) y curvaturas ( $m^{-1}$ ) en el plano medio del laminado.

A partir de las ecuaciones del equilibrio de fuerzas y momentos en el laminado, se puede llegar a relacionar las sollicitaciones actuantes por unidad de anchura (ver Figura 5) con el estado tensional (elástico) de cada lámina y, finalmente, con las deformaciones y curvaturas del plano medio del laminado.

En la Figura 7 se puede observar el criterio de signos positivos para las fuerzas y los momentos por unidad de anchura.

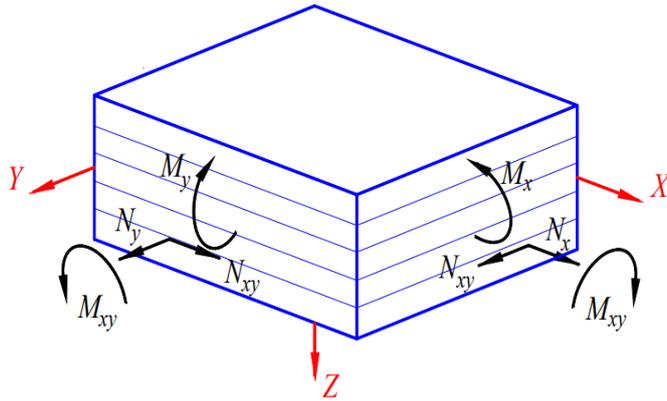


Figura 7. Criterio de signos positivos para fuerzas y momentos por unidad de anchura aplicados en un laminado.

La formulación de la Teoría Clásica de Laminados queda como expresada de la siguiente manera:

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{K\} \quad (52)$$

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{K\} \quad (53)$$

Donde:

- [A] es la matriz de rigidez de membrana

$$[A] = \sum_{k=1}^n [\overline{Q}_k] (z_{k+1} - z_k) \quad (54)$$

- [B] es la matriz de acoplamientos

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\overline{Q}_k] (z_{k+1}^2 - z_k^2) \quad (55)$$

- [D] es la matriz de rigidez a flexo-torsión

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\overline{Q}_k] (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (56)$$

Siendo n el número de láminas del laminado.

### 1.3. Método de los Elementos Finitos

Desde la aparición de sus ideas esenciales en la década de los 40, el Método de los Elementos Finitos (MEF) ha experimentado un desarrollo gradual gracias a las contribuciones de ingenieros, matemáticos y físicos. Artículos como el de Courant en 1943, que define polinomios lineales sobre regiones trianguladas para resolver el problema de torsión en elasticidad, o el de Schönberg, en 1946 que define el nacimiento de la teoría de los splines y recomienda la utilización de polinomios definidos a tramos para aproximación e interpolación, sentaron las bases para el desarrollo del MEF.

Con la introducción comercial de computadores digitales en la década de los 50, investigadores como Langefors y Argyris reformularon el análisis de estructuras de forma matricial, ideal para el cálculo por ordenador. En 1956 Clough, Turner, Martin y Top modelaron estructuras de aviones mediante ensamblado de pequeños paneles triangulares, lo significó un avance conceptual importante ya que permite un modelado más realista de estructuras bi y tridimensionales. El término “elementos finitos” fue presentado por primera vez por el mismo Clough en 1960, y el MEF se consolidó como una forma del método variacional de Ritz que se basa en funciones definidas a tramos.

Desde mediados de los 60 hasta finales de los 70, el MEF pasó a tener una orientación cada vez más matemática, lo que permitió el desarrollo de fundamentos sólidos con pruebas rigurosas de convergencia, límites de error y estabilidad. Los algoritmos numéricos se refinaron y se crearon herramientas de pre y post proceso, como generadores de mallas. Esta etapa se puede considerar como de maduración y asentamiento del MEF, donde su popularidad creció notablemente y pasó a protagonizar gran cantidad de publicaciones científicas.

Actualmente el MEF es una de las técnicas mejor asentadas para la resolución de problemas de contorno en la ingeniería, pues permite que los problemas no lineales o combinados que involucren múltiples interacciones pueden ser abordados con mayor eficacia simultáneamente. Se debe tener en cuenta que la solución de elementos finitos es aproximada, siendo necesario calcular el error que se produce. Se han desarrollado métodos confiables y rápidos para estimar el error de discretización y ajustar automáticamente la solución, garantizando un error menor al deseado sin requerir intervención del usuario. El objetivo principal es automatizar por completo el proceso de análisis, para que los usuarios puedan enfocarse en interpretar resultados y estudiar detalladamente los problemas bajo estudio.

Los problemas de contorno se caracterizan por estar gobernados por ecuaciones diferenciales o integrales dentro de un dominio específico, junto con condiciones de contorno en sus fronteras. En el caso particular del análisis estructural, estas ecuaciones incluyen relaciones entre deformaciones y desplazamientos, tensiones y deformaciones, así como las ecuaciones de equilibrio, las cuales pueden ser resueltas mediante la minimización de la energía potencial total. Para este trabajo, nos enfocaremos en el análisis de tensiones y deformaciones dentro del régimen elástico. Asimismo, se considerarán las no linealidades de origen geométrico debido a la posible existencia de grandes deformaciones.

Para abordar problemas de contorno, existen diversos métodos disponibles. Si bien la solución analítica es limitada, especialmente en geometrías complejas, se recurre a soluciones aproximadas que permiten obtener resultados cercanos con errores acotados. Entre estos métodos aproximados, el enfoque más comúnmente empleado en la actualidad es el Método de los Elementos Finitos, aunque ciertos problemas específicos pueden ser más eficientemente tratados mediante técnicas de diferencias finitas o elementos de contorno. En este análisis nos enfocaremos en el MEF.

En resumen, el MEF es una técnica numérica que se basa en la discretización en elementos de un dominio determinado para resolver las condiciones de contorno dadas mediante ecuaciones diferenciales, las cuales a su vez se resuelven mediante ecuaciones algebraicas que cumplen con las condiciones de contorno iniciales. Tal y como se ha mencionado antes, este método conlleva un error de cálculo dependiente del grado de los polinomios utilizados, siendo el error menor a medida que aumenta el grado y que se aproxima la solución calculada a la real.

Desde el punto de vista aplicado, el primer paso sería identificar la geometría y las condiciones de contorno en coordenadas globales. Seguidamente, se procede a dividir el dominio en elementos más pequeños, los cuales pueden ser lineales (aplicación unidimensional), triangulares, cuadriláteros (aplicación tridimensional), tetraedros o paralelepípedos (aplicación tridimensional). A su vez, cada elemento es normalizado, es decir, se toma su versión en coordenadas locales. Según el grado de error requerido, cada elemento tendrá un conjunto de nodos predefinidos en él, de cuya cantidad o distribución dependerá el grado del polinomio interpolador, conocidos como funciones de forma y que se definen para cada uno de los nodos dentro del elemento. Esta función tendrá un valor unitario en el nodo al que esté asociado y nula en el resto de nodos. Asimismo, es necesario cumplir con la condición de continuidad  $C^0$ , lo que implica continuidad en la solución entre elementos contiguos y que se consigue trabajando con coordenadas locales en cada elemento (Rubio Hervás, 2021).

Interpolando las funciones de forma se pueden calcular las magnitudes necesarias en cualquier punto del dominio, como por ejemplo la deformación y tensión requerida para llevar a cabo este estudio. Varios programas comerciales son capaces de implementar este procedimiento, incluyendo el software de simulación ingenieril ANSYS, el cual utilizaremos en este estudio.

#### **1.4. Normativa ITF**

La Federación Internacional de Tenis (de ahora en adelante ITF por sus siglas en inglés) es el máximo organismo del tenis a nivel mundial. Dentro de sus competencias, se encuentra la de regular el deporte y los elementos propios del mismo, entre ellos, las raquetas.

Cada año, la ITF publica las reglas del tenis, en un documento que recoge la normativa general por la que se rigen los diferentes torneos internacionales [ (International Tennis Federation, 2023)]. Dicho documento, llamado “2023 ITF Reglas del Tenis”, especifica en su

capítulo 4 (“LA RAQUETA”) que todas las raquetas deben cumplir con las especificaciones del apéndice II. A su vez, en el apéndice II (“LA RAQUETA”), se resaltan diferentes aspectos a considerar, especialmente:

*“a. La raqueta consistirá en un marco y cuerdas. El marco consistirá en un mango y una cabeza, y puede que también tenga una garganta. La cabeza se define como la parte de la raqueta donde se conecta el encordado. El mango se define como la parte de la raqueta conectada a la cabeza que el jugador agarra para jugar. La garganta, cuando la haya, es la parte de la raqueta que une el mango con la cabeza.*

*b. La superficie de golpeo, que se define como el área principal del encordado rodeada por los puntos de entrada de las cuerdas a la cabeza o puntos de contacto de las cuerdas con la cabeza, lo que sea más pequeño, será plana y consistirá en un encordado de cuerdas cruzadas, que serán entrelazadas o adheridas alternativamente donde se cruzan. El cordaje será generalmente uniforme y en particular, tendrá la misma densidad en el centro que en cualquier otra área. La raqueta será diseñada y encordada de tal forma que las características de juego sean idénticas en ambas caras.*

*c. El marco de la raqueta no excederá de 73.7 cm de longitud total y de 31.7 cm de anchura total. La superficie de golpeo o encordado no excederá de 39.4 cm de longitud total cuando se mida paralelamente al eje longitudinal del mango, y de 29.2 cm de ancho total, cuando se mida perpendicularmente al eje longitudinal del mango. (p.27).”*

De esta normativa extraemos dos puntos importantes para este Trabajo Fin de Grado: las dimensiones máximas que puede tener una raqueta y la uniformidad y densidad del cordaje. Teniendo en consideración las medidas máximas admisibles para la raqueta, hemos diseñado un modelo límite que se mostrará más adelante, y, considerando las condiciones del encordado, se ha añadido el mismo a los diferentes modelos generados.

## **1.5. Estudio de las tipologías constructivas en el mercado a lo largo de la historia.**

### **1.5.1. Raqueta ‘Scaino’**

Comúnmente conocidas como “raquetas Scaino” en honor al sacerdote y médico italiano Antonio Scaino (1524 – 1612), quien dejó descripciones detalladas de las mismas, los primeros registros de raquetas con marco y cuerdas similares a los modelos actuales datan a mediados del siglo XVI y representaron un importante avance en el deporte, al sustituir los guantes y bates utilizados hasta la fecha. Estos modelos consistían en un marco de madera con forma casi de lágrima, gran superficie de contacto y no contaban con garganta previa a la empuñadura, por lo que se asemejaban a las raquetas utilizadas actualmente en el ráquetbol (Kuebler, 1995, citado en Lammer & Kotze, 2003).

### **1.5.2. Dunlop Maxply**

Fue la primera raqueta fabricada con múltiples capas de diferentes tipos de maderas, lo que maximizó sus propiedades resistentes. Era confeccionada por maestros artesanos utilizando tiras de madera de fresno de Vermont, cerezo y nogal unidas con pegamento resistente al agua y madera de tilo para la empuñadura, lo que le daba un acabado elegante. Fue presentada en 1931 y se mantuvo durante casi 50 años como hasta que fue sustituida por nuevas versiones más ligeras (Kuebler, 1995, citado en Lammer & Kotze, 2003).

### **1.5.3. Prince Oversize**

Patentada en 1974 por Howard Head, antiguo propietario de Head Ski Company, la primera raqueta ‘oversize’ revolucionó el mercado para siempre, al incrementar en un 50 por ciento la superficie de golpeo y la resistencia al giro en la mano al impactar con la pelota en zonas menos óptimas (considerando el centro de la zona encordada como la zona ideal de impacto), lo que resultó en raquetas más estables y disminución de la fatiga generada al jugar. Este incremento en el tamaño se pudo llevar a cabo gracias a que los marcos pasaron de fabricarse con madera a aluminio extruido, el cual es más liviano, y refuerzos de poliamida en la garganta, lo que garantizaba un producto más resistente. Se mantuvo como el modelo más vendido hasta 1988 y su diseño prácticamente no varió durante este período (Fisher, 1977, Arthur, 1992, Brody, 1995b citado en Lammer & Kotze, 2003).

#### **1.5.4. Wilson T2000**

Presentada en 1979, fue la raqueta de acero más popular en el mercado. Contaba con un marco tubular recubierto de cromo y de un sistema patentado de alambre doblado que creaba aros alrededor de la parte interna de la cabeza de la raqueta, utilizado para enhebrar y sujetar las cuerdas (Kuebler, 1995, citado en Lammer & Kotze, 2003).

#### **1.5.5. Head Arthur Ashe Competition**

También presentada en 1979, se fabricaba con la técnica utilizada para la fabricación de esquís. Contaba con un centro de plástico cubierto por ambos lados por láminas de aluminio (Kuebler, 1995, citado en Lammer & Kotze, 2003).

#### **1.5.6. Dunlop Max 200G**

Contaba con un marco hueco hecho de poliamida 66, con refuerzos de fibras de carbono y una aleación de bismuto y estaño como núcleo del marco, ya que el metal tiene un punto de fusión menor que el de la poliamida, lo que permitía fundirlo y retirarlo al finalizar el moldeado. El proceso de inyección por moldeo desarrollado por Dunlop permitía disminuir la mano de obra requerida y las raquetas ofrecían buenas cualidades de amortiguación, lo que la convirtió en un modelo muy popular durante la década de 1980. (Haines et al. 1983, Haines 1985, Kuebler 1995, citado en Lammer & Kotze, 2003).

#### **1.5.7. PDP Staff**

Fue presentada en 1975 por PDP Sports Company como la primera raqueta creada completamente con fibra de vidrio. El marco se fabricaba en una pieza única a la que se le añadían los ojales y la empuñadura. (Kuebler, 1995, citado en Lammer & Kotze, 2003).

#### **1.5.8. Wilson Pro-Staff**

Es uno de los modelos más representativos de la estandarización de la fabricación de raquetas de compuestos de fibra de carbono que se produjo en los años 90. Este modelo se sigue comercializando en la actualidad y el proceso de fabricación sigue siendo casi idéntico en la actualidad: las diferentes láminas, reforzadas con fibras de carbono en su mayoría, se orientan convenientemente para ser enrolladas en un tubo de aluminio, el cual será presurizado para crear una raqueta de pared delgada y propiedades resistentes optimizadas. (Kuebler, 1995, citado en Lammer & Kotze, 2003).

### **1.5.9. Prince Vortex**

En 1991, el modelo Vortex de Prince surgió como otra alternativa construida con materiales termoplásticos. Poseía un marco hueco compuesto de poliamida 6 tejida con fibras de grafito y se fabricaba con moldes inflables y presurizados de silicona en moldes tubulares. Aparte de las altas temperaturas requeridas, el proceso de fabricación era parecido al de aquellas raquetas de matrices termoestables.

### **1.5.10. Wilson Profile Hammer**

El sistema Profile Hammer de Wilson, presentado en 1989, llevó el diseño de raquetas con materiales compuestos al siguiente nivel. Las raquetas tenían un peso aproximado de 280 g, una combinación de fibras especializadas como Kevlar y boro y se basaba en sus dos patentes principales: el sistema Profile establecía que la raqueta debía tener su mayor anchura en el centro del marco, estrechándose hacia el mango y la punta, lo que resultaba en la máxima rigidez en el punto de mayor flexión. Por otro lado, la idea del sistema Hammer era desplazar la masa hacia la cabeza de la raqueta al reducir el peso en el mango, manteniendo al mismo tiempo su resistencia y rigidez global. Esta raqueta impulsó a la compañía Wilson a la cima del mercado mundial, siendo líder de ventas durante tres años consecutivos (Beercheck 1991, Wilson 1992, Wilson 2002, Kuebler 1995, citado en Lammer & Kotze, 2003).

### **1.5.11. Head Twin Tube**

En el año 1996, Head desarrolló un sistema de doble tubo que consistía en colocar una funda de poliamida que envolvía la cabeza de la raqueta justo antes del proceso moldeado, lo que generaba una capa exterior de poliamida que reducía las vibraciones y que, a su vez, podía ser gravado con láser para añadir grafismos más detallados. Tradicionalmente, el añadir grafismos al marco significaba una tarea engorrosa en tiempo y esfuerzo por lo que el poder aplicar casi cualquier diseño sin coste añadido y con la ventaja de que sería protegido por la capa antiabrasión del acabado, significó un cambio en la parte estética de las raquetas de tenis (Head 1996, Head 2002, citado en Lammer & Kotze, 2003).

#### **1.5.12. Head Titanium**

Uno de los mayores éxitos en la historia de HEAD como fabricante de raquetas de tenis fue la inclusión de la tecnología Titanium en 1998. Esta se basa en la incorporación de un tejido externo de cable de titanio y carbono en la zona de la garganta del marco, lo que aumentaba la rigidez de la garganta y permitía disminuir considerablemente el peso del marco. El modelo Ti.S6, el mejor vendido del mundo durante tres años consecutivos, pesaba tan solo 225 g sin encordar (Head 2001, Head 2002, citado en Lammer & Kotze, 2003).

#### **1.5.13. Head Intelligence**

En el año 2000, Head se convierte en la primera compañía en utilizar fibras de cerámica piezoeléctrica para su serie Intelligence. Estas fibras polarizadas se colocaban en la parte externa de la garganta y, a su vez, entre electrodos impresos, lo que le permitía convertir la energía mecánica del impacto en energía eléctrica que se disipaba. Cada una de las fibras se conectaba a un circuito autónomo ubicado en la empuñadura que almacenaba la energía de impacto y enviaba una señal opuesta a la garganta, a una velocidad tal que se pueda rigidizar el marco de la raqueta y amortiguar las vibraciones del impacto, aumentando la potencia (Head 2001, Head 2002, Crawford 2000b, citado en Lammer & Kotze, 2003)

#### **1.5.14. Wilson Triad**

La serie Triad fue presentada en el año 2001, y se caracterizaba por la capacidad de amortiguación de las vibraciones de la raqueta a través de un modelo dividido en tres partes, incluyendo una cabeza con una garganta triangular y delgada, un mango una terminación en V perteneciente a la garganta y un elastómero, también en forma de V, que conectaba ambas piezas, pero manteniendo es aislamiento entre ellas. Todas las piezas eran fabricadas individualmente y conectadas con un adhesivo potente, así como a través de dos ojales comunes que eran atravesados por cuatro de las cuerdas principales, lo que mejoraba la unión entre componentes. El sistema aislaba el impacto, lo que amortiguaba hasta el 60% de las vibraciones (Crawford 2001a, Wilson 2002, Wilson 2002, citado en Lammer & Kotze, 2003)

### **1.5.15. Wilson Blade**

La serie Wilson Blade, introducida en el 2006, revolucionó el diseño de raquetas con diferente tecnología innovadoras y mango ergonómico, lo que la convirtió en la principal serie de Wilson en la actualidad. Desde su presentación, han desarrollado tecnologías como la Amplifeel, que incorpora fibras de basalto al mango de la raqueta para mejorar la transmisión de señal y disminuir la torsión tras impacto, la tecnología de Parallel Drilling que maximiza la potencia y el tamaño de la zona ideal de impacto de la pelota, o el Countervail, pensado para reducir las vibraciones y la fatiga generada al tenista. Los últimos modelos de la serie presentados hasta la fecha (julio 2023) son la Wilson Blade 98 v8 y la Wilson Blade 100 v8.

## **1.6. Fabricación de raquetas de tenis de alta gama**

En la actualidad, la mayoría de las raquetas de tenis de media o alta gama tienen un proceso de fabricación similar, siendo el componente principal láminas preimpregnadas de carbono con resinas termoestables, por lo que las variables de diseño más relevantes giran en torno a la fracción en volumen de fibra ( $V_f$ ) o a la orientación de las fibras en cada capa del laminado.

En un vídeo producido por Tennis Warehouse en cooperación con la empresa de indumentaria deportiva HEAD (Tennis Warehouse, 2020), se muestra el proceso de fabricación de las raquetas de tenis de la marca. En el video se aprecia que inicialmente las láminas preimpregnadas se almacenan en un congelador a  $-16\text{ }^{\circ}\text{C}$  para evitar que la resina en estas se endurezca, así como la dificultad para manejar dichas láminas al momento de utilizarlas.

Del mismo modo, se resalta la importancia del tipo de material a utilizar y, sobre todo, de la correcta aplicación del mismo, ya que la orientación y combinación de diferentes tipos de láminas es lo que determinará la rigidez del marco de la raqueta.

Así pues, el primer paso para la fabricación de una raqueta es alinear las láminas preimpregnadas convenientemente y posteriormente enrollarla alrededor de un tubo que permita formar el laminado principal (Figura 8). Dicho tubo formará la parte externa del marco de la raqueta y su diámetro dependerá del modelo a fabricar.



*Figura 8. Creación de laminado por enrollamiento de las láminas preimpregnadas.*

Seguidamente, se procede a aplicar refuerzos en las zonas que así lo requieran, incluyendo el límite entre la superficie de golpeo y la garganta de la raqueta. Una vez colocados los refuerzos, se calentará ligeramente el tubo del primer paso para volverlo más maleable y facilitar el posicionamiento de éste en el primer molde (Figura 9), la remoción de exceso de material y la colocación del adaptador en la empuñadura y de pesos para ajustar el marco a las especificaciones correspondientes.



*Figura 9. Molde del marco de una raqueta de tenis.*

Luego, la raqueta preformada se coloca en un nuevo molde doble (Figura 10) en el cual la raqueta debe encajar de la manera más exacta posible para evitar pliegues. Este segundo molde forma parte de una máquina que se encarga de empujar aire a presión por a través del tubo para asegurar que las láminas son empujadas hacia el exterior del molde y calentar la resina de manera tal que en un primer momento disminuya su viscosidad y reduzca los posibles huecos en el laminado para posteriormente endurecerse y dar forma permanente al marco de la raqueta. Una vez terminado este proceso, se puede observar como los residuos de resina quedan adheridos al exterior del marco (Figura 11), por lo que es necesario removerlos.



*Figura 10. Marco de una raqueta de tenis previo al moldeo.*



*Figura 11. Marco de una raqueta de tenis una vez moldeado.*

Finalmente, se procede a lijar el marco, pintar la raqueta y perforar los agujeros necesarios para los ojales de encordado y añadir la empuñadura y los ojales.

## 1.7. **Materiales.**

La evolución en el desarrollo de diferentes modelos de raquetas de tenis está marcada por dos tendencias claras: el desuso de la madera y la consolidación de los materiales compuestos como principal componente de fabricación. Hoy en día, la mayoría de las raquetas de alta y media gama se producen a partir de un marco de materiales reforzados con fibra de carbono combinado con otros materiales que mejoren determinadas características, así que nos enfocaremos en estos a continuación.

### 1.7.1. **Materiales compuestos.**

A continuación, se detallan las principales características de los materiales compuestos empleados en la fabricación de raquetas de tenis atendiendo a dos criterios, el tipo de fibras empleado y el tipo de aglutinante o matriz.

#### 1.7.1.1. **Según el material de las fibras de refuerzo.**

##### - **Fibras de carbono.**

Aunque algunas raquetas de alta gama suelen ser denominadas raquetas de grafito, la realidad es que en la mayoría de los casos suelen ser fabricadas principalmente con compuestos reforzados con fibra de carbono. Estas fibras son sintéticas y se extraen del poliacrilonitrilo (PAN), por lo que su porcentaje de carbono suele ser menor al 95%. Si bien estas fibras poseen un diámetro de alrededor de 7 – 8  $\mu\text{m}$ , pueden llegar a tener un módulo de Young de hasta 217 MPa en la dirección longitudinal de fibra ya que poseen propiedades anisótropas. Sus prestaciones dependen de la temperatura y el tratamiento dado al momento de extraer las fibras, generando diferentes tipos de fibras como las de alto módulo (HM, por sus siglas en inglés), alta resistencia (HST) o módulo intermedio (IM).

##### - **Fibras de vidrio**

El componente principal de las fibras de vidrio es la sílice  $\text{SiO}_2$ , con adiciones de óxido de calcio, boro, sodio, hierro, aluminio, entre otros. Tiene una estructura de red tridimensional, lo que le aporta propiedades isotrópicas. En el tenis, los materiales reforzados con fibras de vidrios fueron los primeros composites en utilizarse, siendo las fibras de vidrio E las elegidas.

Este tipo específico tiene un diámetro de 8 – 15  $\mu\text{m}$ , buenas propiedades de resistencia a tracción y compresión, pero menor rigidez y mayor densidad que las fibras de carbono.

- **Fibras de aramida.**

Son fibras orgánicas creadas partiendo de una poliamida aromática que le ofrece buena resistencia al impacto y muy baja densidad, pero la resistencia a compresión es muy baja, por lo que no se ha proliferado su uso al mismo nivel que las dos mencionadas anteriormente.

#### **1.7.1.2. Según el material empleado como aglutinante o matriz**

- **Resinas termoestables**

Se caracterizan por no fundir al calentarse y ser más rígidas que las resinas termoplásticas. Poseen numerosas ventajas como su isotropía, bajas viscosidad, volatilidad durante la cura y compresión durante el curado, lo que reduce la posibilidad de generar tensiones a cortadura entre la resina y las fibras, así como ciertas desventajas como su coste o rotura frágil a tracción. Son las más comúnmente utilizadas para combinar con fibras de carbono, específicamente el epoxi, y predominan en campos como en el de la aeronáutica por su gran estabilidad térmica y dimensional.

- **Elastómeros**

Son polímeros con propiedades elásticas únicas, que le permiten deformarse al aplicar tensiones y volver a su forma original una vez que vuelve a un estado de reposo. Si bien algunos diseños de raquetas de tenis han añadido piezas diseñadas con elastómeros, en la actualidad, el uso más común es el de los anti vibradores externos, los cuales se sujetan a las cuerdas, generalmente a la altura de la última o penúltima cuerda horizontal, y que consigue amortiguar las vibraciones generadas por el impacto de la pelota.

## 2. Modelado numérico de una raqueta de alta gama.

Desde el punto de vista del diseño, son varios los aspectos que hay que tener en cuenta al momento de desarrollar una raqueta de tenis, tales como la potencia, el control, la comodidad o resistencia mecánica, pero el factor verdaderamente determinante es el estilo y nivel del jugador. Basado en estas variables, la demanda en el mercado para diferentes modelos es elevada, y aunque el objetivo es optimizar el diseño en todos los aspectos, la potencia y el control suelen ser los dos más determinantes.

Con el objetivo de analizar la influencia de las diferentes variables y sus posibles combinaciones, en este Trabajo Fin de Grado hemos desarrollado dos prototipos de raquetas. Estos diseños fueron ideados en base al proceso de fabricación e intentan replicar de la manera más fiel posible los modelos comerciales de raquetas de tenis de alta gama y basándonos en la normativa aplicable.

### 2.1. Tratamiento geométrico. Variables de diseño.

La normativa ITF especifica las medidas máximas aplicables en la fabricación de una raqueta de tenis (Tabla 2), específicamente las medidas de longitud total, anchura y longitud totales de la superficie de golpeo. Teniendo en cuenta estas especificaciones, hemos diseñado un modelo (Figura 12.a) que se ajuste a los valores dados, al cual denominaremos modelo límite (ML) de ahora en adelante. A su vez, hemos diseñado un modelo más ajustado a los valores promedios encontrados en el mercado (Figura 12.b) que nos permitirá comparar resultados respecto al modelo límite. Para facilitar las referencias a este modelo durante el desarrollo de este trabajo, lo denominaremos modelo medio (MM).

MEDIDA	VALOR MÁXIMO (cm)
Longitud total	73.7
Anchura total	31.7
Longitud total de la superficie de golpeo	39.4

Tabla 2. Medidas límites establecidas por la ITF para la fabricación de raquetas de tenis.

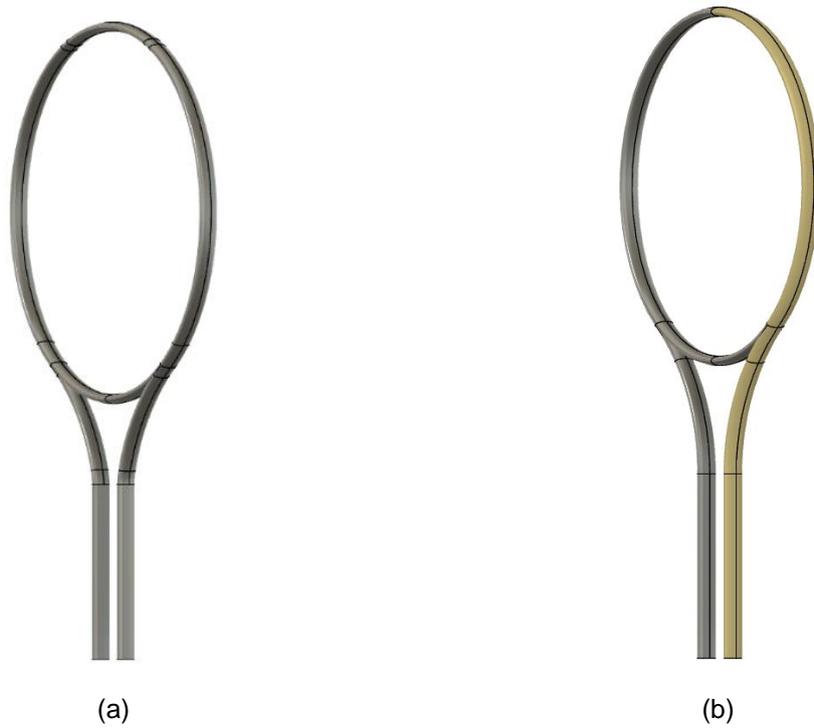


Figura 12. Modelo límite, ML (a) y modelo medio, MM (b).

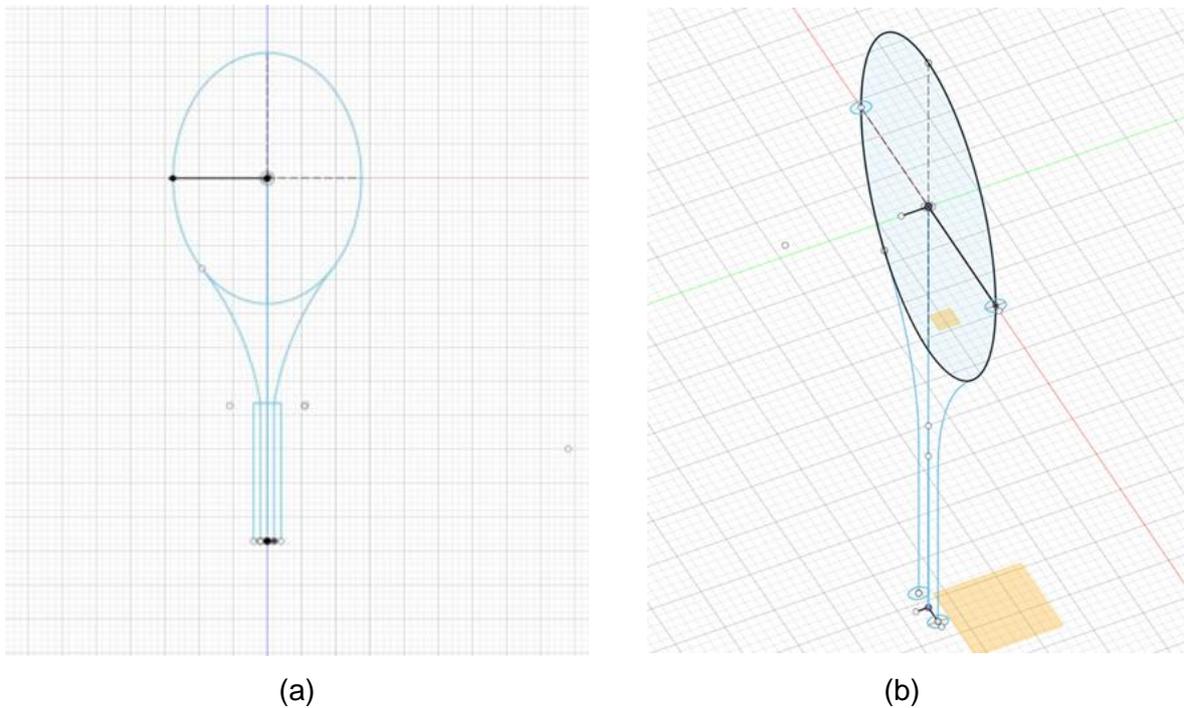


Figura 13. Plano medio del marco de la raqueta.

Utilizando la plataforma de software de modelado 3D, CAD, CAM y PCB, Autodesk Fusion 360, hemos realizado el diseño de los modelos correspondientes. Para ello, partimos en ambos casos de un bosquejo del plano medio del marco de la raqueta y el refuerzo de la garganta (Figura 13.a). A efectos de simplificar el diseño, hemos supuesto que la superficie

de golpeo tiene forma de elipse simétrica y que el estudio se realizará sin empuñadura. Una vez realizado este bosquejo, procedimos a realizar otros bosquejos, perpendiculares a los primeros, que contienen la sección transversal del marco de la raqueta y refuerzo de la garganta, el cual también tiene forma de elipse simétrica, y que se considera igual en ambas piezas (Figura 13.b).

A continuación, procedimos a barrer el perfil transversal del marco utilizando el trazado del eje medio como ruta de barrido, lo cual genera un cuerpo hueco formado por superficies externas. En este punto fue necesario ajustar la posición, longitud y curvatura de los laterales de la garganta para garantizar la continuidad y perpendicularidad de las líneas del plano medio. Considerando que deseábamos realizar modelos que se ajustaran de la mejor manera posible al proceso de fabricación, decidimos barrer dos veces: primero alrededor de la elipse que describe la cabeza de la raqueta, y luego otra vez alrededor del borde exterior de la raqueta, sin incluir el refuerzo. Este doble barrido nos permitió interceptar las superficies y extraer el equivalente al refuerzo de la garganta del primer barrido (Figura 14).



*Figura 14. Modelado de la superficie externa del marco de la raqueta.*

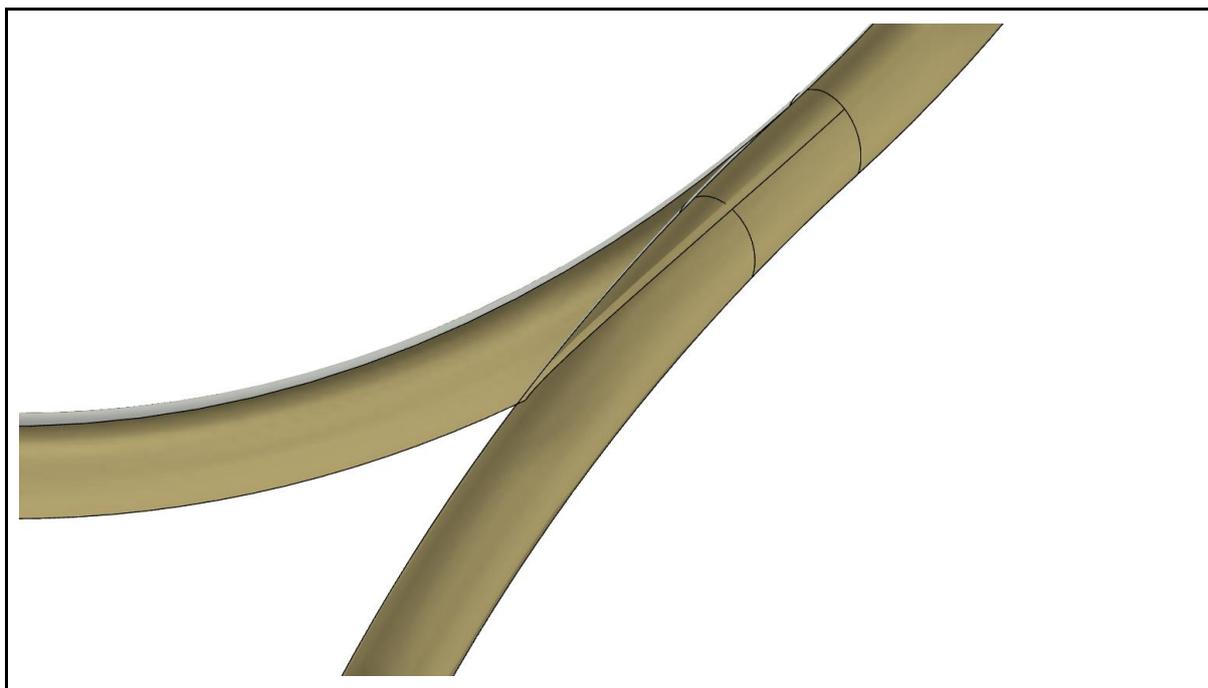
Seguidamente, procedemos a realizar dos cortes que dividan el modelo en cuatro partes simétricas entre sí, lo que permite retirar las partes excedentes del barrido y exportar el modelo en formato iges ya dividido en tantos planos de simetría como permita la geometría. El objetivo de esto es que, al importar el modelo en ANSYS, se pueda realizar un mallado de un cuarto de modelo y terminar el modelo final reflejando este, lo que contribuye a la realización de una buena malla simétrica. Fue necesario realizar varios prototipos para

garantizar la continuidad de las superficies, su correcta intersección y que las dimensiones se ajustaran a los límites de la normativa, entre otros.



*Tabla 3. Prototipos de modelos de marcos de raquetas de tenis realizados en este trabajo. (a) Modelo con empuñadura sólida; (b) Modelo con empuñadura sólida y refuerzo redondeado; (c) Modelo con refuerzo redondeado; (d) Modelo con garganta semi redondeada; (e) Modelo con superficie de golpeo reducida; (f) Modelo límite con garganta angosta.*

En este sentido, uno de los principales ajustes a realizar en Fusion 360 sobre la geometría de la raqueta fue la incorporación de una pequeña solapa extra en la intersección entre el refuerzo de la garganta y el marco principal. Esta solapa fue requerida ya que al momento de importar el modelo en formato iges, las áreas del refuerzo reducían su tamaño ligeramente, lo que generaba un agujero milimétrico en el modelo. En la figura 15 se puede comprobar como en la unión inferior entre marco y refuerzo, aparece la solapa auxiliar en la parte interna.



*Figura 15. Detalle solapa auxiliar en modelo límite.*

Para comprobar la conformidad de la malla y así garantizar la continuidad de los desplazamientos en los modelos, hemos realizado un análisis modal libre-libre en ANSYS, del que se extraen los 8 primeros modos de vibración. Recordamos que, en un análisis modal libre de condiciones de contorno (y de cargas), los seis primeros modos se consideran “modos rígidos del cuerpo” y se corresponden con las seis direcciones del movimiento, es decir, traslaciones y rotaciones en los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , por lo que, al presentar al marco como un sistema discreto de masa, los valores de estos seis modos deberán ser aproximadamente cero para representar la inmovilidad de la estructura. En las figuras 16.a y 16.b se aprecian los resultados para el análisis modal del modelo límite y el medio respectivamente.

\*\*\*\*\* INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE \*\*\*\*\*

SET	TIME/FREQ	LOAD	STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	0.0000		1	1	1
2	0.0000		1	2	2
3	0.0000		1	3	3
4	0.0000		1	4	4
5	0.0000		1	5	5
6	0.31106E-03		1	6	6
7	16.728		1	7	7
8	46.413		1	8	8

(a)

\*\*\*\*\* INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE \*\*\*\*\*

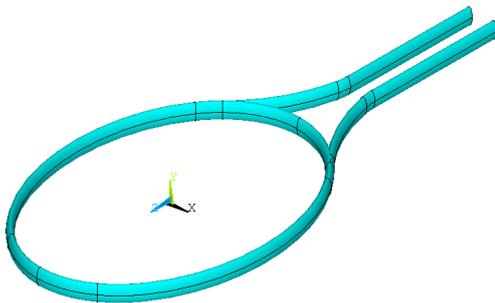
SET	TIME/FREQ	LOAD	STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	0.0000		1	1	1
2	0.0000		1	2	2
3	0.74641E-04		1	3	3
4	0.33256E-03		1	4	4
5	0.52398E-03		1	5	5
6	0.15469E-02		1	6	6
7	6.3933		1	7	7
8	19.865		1	8	8

(b)

Figura 16. Resultado del análisis modal del modelo límite (a) y el modelo medio (b).

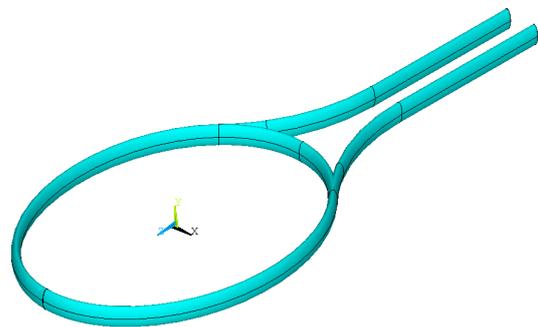
Finalmente, las superficies externas de los dos modelos previo al mallado se pueden visualizar en las Figuras 17.a y 17.b. Asimismo, en los planos 1 y 2 se puede ver en detalle cada modelo.

AREAS  
TYPE NUM



(a)

AREAS  
TYPE NUM



(b)

Figura 17. Áreas del modelo límite (a) y modelo medio (b) en ANSYS.

## 2.2. Cálculo de las propiedades elásticas y resistentes. Variable: fracción en volumen de fibra.

Una de las variables que hemos decidido estudiar en este proyecto es la influencia de la fracción en volumen de fibra. Para ello, es necesario explicar algunas de las propiedades de los materiales a utilizar. La elección de estos materiales (HM-Epoxi y E-Glass Epoxi) se basa en el artículo publicado por J. Kotze y H. Lammer (Lammer & Kotze, 2003), en el que se detalla un diagrama de *lay-up* para composites en una raqueta de tenis (Figura 18) y en el que los dos materiales utilizados son láminas reforzadas con fibras de carbono y vidrio, por lo que hemos optado por HM-Epoxi y E-Glass Epoxi respectivamente.

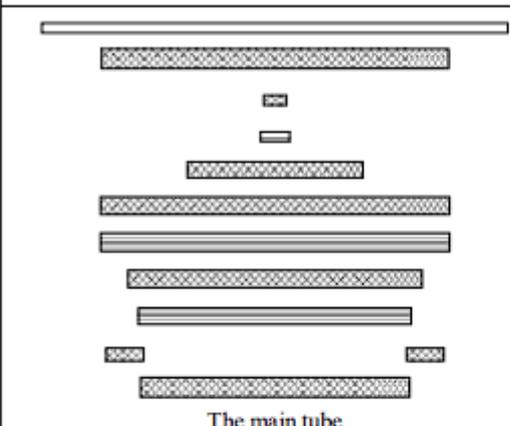
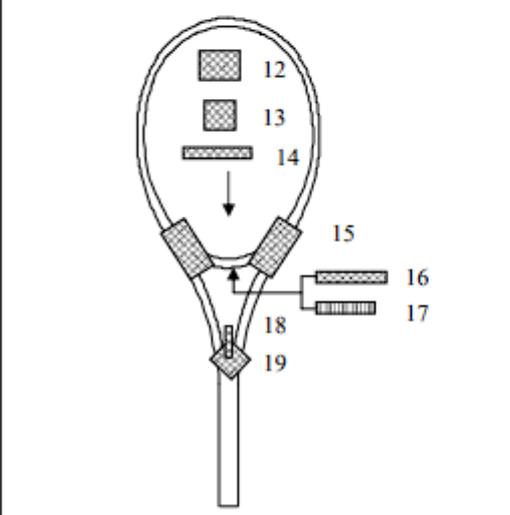
Pre-preg layers	Parts	Material	Fibre angle
	1	PA Foil	-
	2	Glass	$\pm 20^\circ$
	3	Carbon	$\pm 30^\circ$
	4	Carbon	0
	5	Glass	0
	6	Carbon	$\pm 30^\circ$
	7	Carbon	0
	8	Carbon	$\pm 30^\circ$
	9	Carbon	0
	10	Glass	$\pm 30^\circ$
	11	Carbon	$\pm 30^\circ$
The main tube			
	12	Carbon	$\pm 30^\circ$
	13	Carbon	$\pm 30^\circ$
	14	Carbon	$\pm 30^\circ$
	15	Glass	$\pm 20^\circ$
	16	Carbon	$\pm 30^\circ$
	17	Carbon	$90^\circ$
	18	Glass	$\pm 30^\circ$
	19	Glass	$\pm 30^\circ$
The throat piece and reinforcements			

Figura 18. Lay-up típico para una raqueta de materiales compuestos. (Lammer & Kotze, 2003)

En las tablas 4-6 se detallan algunas de las propiedades de las fibras utilizadas (Tabla 4), la matriz epoxi (Tabla 5) y los materiales para una fracción en volumen de fibra de 0,6 (Tabla 6).

PROPIEDADES	E-Glass	Carbon HM
Densidad [ $\times 10^3 \text{ kg m}^3$ ]	2.54	2.0
Módulo de tracción long. [GPa]	70	350
Resistencia a tracción long. [MPa]	3100	2000
Módulo de tracción transversal [GPa]	70	12.1
Módulo de cizalladura [GPa]	28.7	13.7
Resistencia a compresión [MPa]	1750	-
Deformación al fallo [%]	2.5-3.0	0.
Coefficiente de Poisson [-]	0.22	0.28
Diámetro [ $\mu\text{m}$ ]	10.0	11
Coef. de expansión térmica long. [ $\times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ]	5	-0.5

Tabla 4. Propiedades de las fibras utilizadas en los materiales compuestos de la raqueta (HM "High Modulus") (Lammer & Kotze, 2003)

PROPIEDADES	Epoxi
Densidad [ $\times 10^3 \text{ kg m}^3$ ]	1.1 - 1.4
Módulo de tracción long. [GPa]	3 - 6
Resistencia a tracción long. [MPa]	35 - 100
Resistencia a compresión long. [MPa]	100 - 200
Contracción al curado [%]	1 - 2
Deformación al fallo [%]	1 - 6
Coefficiente de Poisson [-]	0.38 - 0.4
Temperatura de distorsión [ $^\circ\text{C}$ ]	50 - 300
Coef. de expansión térmica long. [ $\times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ]	60

Tabla 5. Propiedades de las matrices poliméricas de epoxi a  $20^\circ\text{C}$ .

PROPIEDADES	E-Glass Epoxi	HM-Epoxi
Densidad [ $\times 10^3$ kg m <sup>3</sup> ]	2.0	1.6
Resistencia a tracción long. [MPa]	1.0	1.2
Resistencia a tracción long. específica [m]	0.5	0.94
Módulo de Young. [GPa]	42	210
Módulo de Young específico [-]	21	119

Tabla 6. Propiedades de los materiales compuestos utilizados en la raqueta para fracción en volumen 0.6. (Lammer & Kotze, 2003)

Para completar el estudio de la influencia de la fracción de volumen de fibra, establecemos tres valores de  $V_f$  (0.3, 0.35 y 0.4) y calculamos las propiedades de los materiales para cada valor (Tabla 7 y Tabla 8) haciendo uso de las ecuaciones descritas en el apartado 1.2.3. Una vez obtenido estos valores, procedemos al estudio del efecto de esta variable, para lo cual utilizaremos el modelo medio (MM) y mantendremos la fuerza de pretensión constante.

HM – Epoxi			
PROPIEDADES	$V_f = 0.3$	$V_f = 0.35$	$V_f = 0.4$
$E_1$ [GPa]	101.850	119.575	137.300
$E_2$ [GPa]	9.980	11.357	12.950
$E_3$ [GPa]	9.980	11.357	12.950
$\nu_{12}$	0.357	0.352	0.346
$\nu_{23}$	0.620	0.601	0.581
$\nu_{31}$	0.357	0.352	0.346
$G_{12}$ [GPa]	1.620	1.763	1.922
$G_{23}$ [GPa]	3.081	3.547	4.095
$G_{31}$ [GPa]	1.620	1.763	1.922
Densidad $\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$	1445	1477.5	1510

Tabla 7. Propiedades del material HM-Epoxi que se utilizarán en el proyecto.

E-Glass Epoxi			
PROPIEDADES	$V_f = 0.3$	$V_f = 0.35$	$V_f = 0.4$
$E_1$ [GPa]	17.850	21.575	25.300
$E_2$ [GPa]	8.970	11.357	12.950
$E_3$ [GPa]	8.970	11.357	12.950
$\nu_{12}$	0.339	0.331	0.322
$\nu_{23}$	0.501	0.433	0.414
$\nu_{31}$	0.339	0.331	0.322
$G_{12}$ [GPa]	1.620	1.763	1.922
$G_{23}$ [GPa]	2.988	3.962	4.579
$G_{31}$ [GPa]	1.620	1.763	1766.0
Densidad $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	1637.0	1701.5	25.300

Tabla 8. Propiedades del material E-Glass Epoxi que utilizaremos en el proyecto.

### 2.3. Mallado por elementos finitos.

Uno de los objetivos de este proyecto es diseñar modelos basados en el proceso de fabricación y que los componentes de estos sean tan fieles a los modelos comerciales como sea posible. Si utilizamos las figuras 8, 9, 10, 11 y 18 como punto de partida podemos deducir algunos aspectos que nos permitirán cumplir este objetivo:

- El diagrama de la Figura 18 indica que la capas, tanto en cantidad como en orientación, en todo el marco.
- En el proceso de fabricación, el tubo principal se coloca en un molde doble que obliga a que la superficie externa del marco sea lisa, empujando las posibles irregularidades creadas por las diferentes capas hacia el interior del marco.
- El tubo guía utilizado para enrollar las diferentes láminas y formar el laminado también obliga a que el espesor del marco sea constante.

Tomando en cuenta la información anterior, desarrollaremos diferentes laminados para cada sección del marco con espesor constante. Con esa finalidad, definimos un espesor de marco calculando el mínimo común múltiplo entre el número total de capas de cada una de las secciones del laminado (7, 9, 10, 11, 12, 13 y 14 capas). El M.C.M fue 180180, por lo decidimos que el espesor de cada lámina sea de 0,18018 mm. Contado con este espesor, y

multiplicándose por el número máximo de capas (14), se estima un espesor de sección del marco de 2.52252 mm, el cual es un resultado que se ajusta a los valores estimados de espesor de los modelos comerciales.

A su vez, se definen las diferentes secciones del laminado partiendo de la Figura 18, trazando líneas verticales en el diagrama del tubo y estimando su posible posición en el marco. La Figura 19 muestra las secciones definidas en el tubo principal.

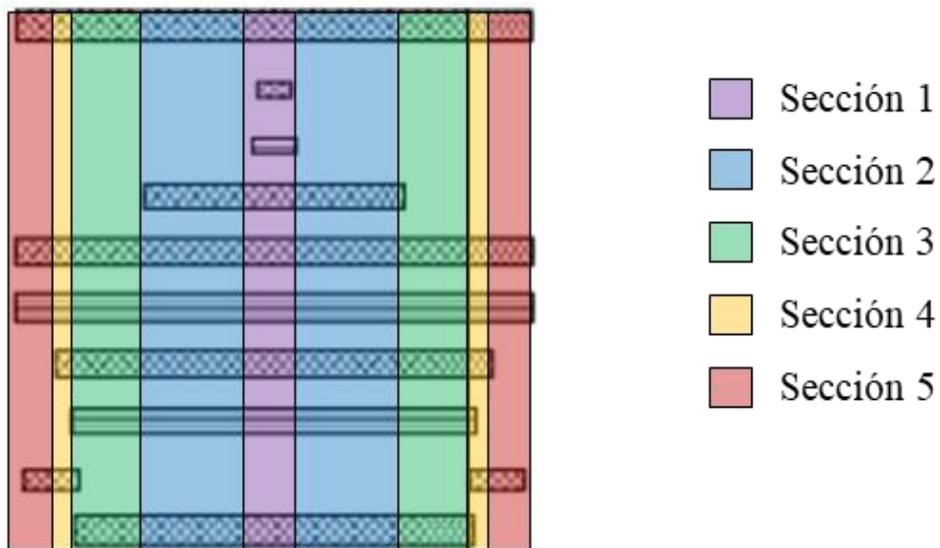


Figura 19. División por secciones del diagrama de laminado del tubo.

También en la Figura 18 se muestra la sección del refuerzo de la garganta, la cual será nombrada sección 6, y láminas adicionales en la zona de intersección entre el tubo principal y el refuerzo. Estimamos que estas láminas se aplican por encima de las secciones 2 y 3, por lo que se denominan secciones 21 y 31 respectivamente. En la tabla 8 se muestran las fibras de refuerzo de cada lámina por sección, así como la orientación de las fibras en estas. La distribución de las secciones a lo largo de los modelos se mostrará más adelante.

Sección 1 (14 layers)	Sección 2 (11 layers)	Sección 3 (10 layers)	Sección 4 (9 layers)
E-Glass: $\pm 20^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $0^\circ$ E-Glass: $0^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $0^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $0^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$	E-Glass: $\pm 20^\circ$ E-Glass: $0^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $0^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $0^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$	E-Glass: $\pm 20^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $0^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $0^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$	E-Glass: $\pm 20^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $0^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ E-Glass: $\pm 30^\circ$
Sección 5 (7 layers)	Sección 6 (9 layers)	Sección 21 (13 layers)	Sección 31 (12 layers)
E-Glass: $\pm 20^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $0^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$	Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $90^\circ$	E-Glass: $\pm 20^\circ$ E-Glass: $\pm 20^\circ$ E-Glass: $0^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $0^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $0^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$	E-Glass: $\pm 20^\circ$ E-Glass: $\pm 20^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $0^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$ Carbon HM: $0^\circ$ Carbon HM: $\pm 30^\circ$

Tabla 8. Desarrollo del laminado correspondiente a cada sección.

### 2.3.1. Tipo de elemento y definición de laminado.

Uno de los primeros pasos que se debe realizar para realizar un modelo en ANSYS es definir el tipo de elemento a utilizar. En nuestro caso, utilizaremos el elemento SHELL 181, el cual es un elemento cuadrilátero y bidimensional con seis grados de libertad por nodo, que cuenta con la particularidad de que permite crear laminados (o secciones tipo *shell*). Tras definir el elemento, se debe crear cada una de las secciones necesarias, lo cual se realiza directamente en ANSYS, rellenando los campos mostrados en la Figura 20. Una de las variables para la definición es el *offset* de la sección, lo que indica si se define el laminado utilizando el área de la misma como capa superior, inferior o media. En este caso será la capa superior para replicar el acabado de los modelos comerciales.

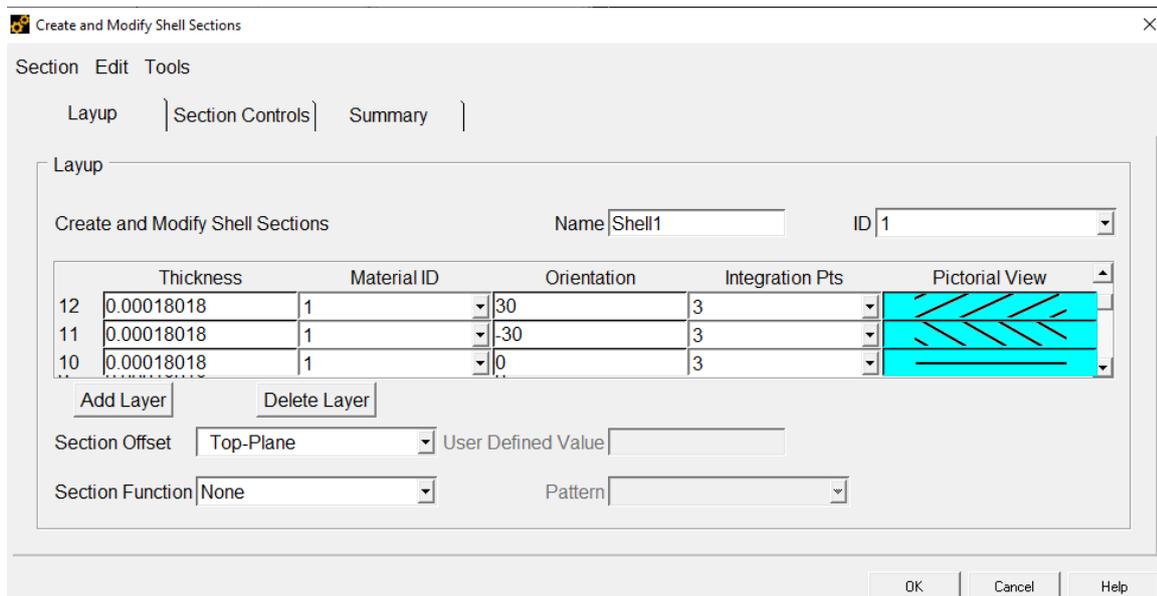


Figura 20. Generador de laminados de ANSYS.

### 2.3.2. Sistema de referencia local. Orientación de elementos

De acuerdo con lo definido en el marco teórico, la dirección  $z$  de un laminado debe atravesar de manera tal que sea normal a las láminas que lo conforman. Este convenio también es el que utiliza ANSYS, por lo que es crucial definir correctamente los sistemas de referencia para orientar el espesor del laminado. Convenientemente, ANSYS cuenta con una función llamada *Reverse Normals* que facilita esta labor. La Figura 21 muestra como la dirección  $z$  (mostradas como flechas azules) de las áreas de la cabeza del modelo límite.

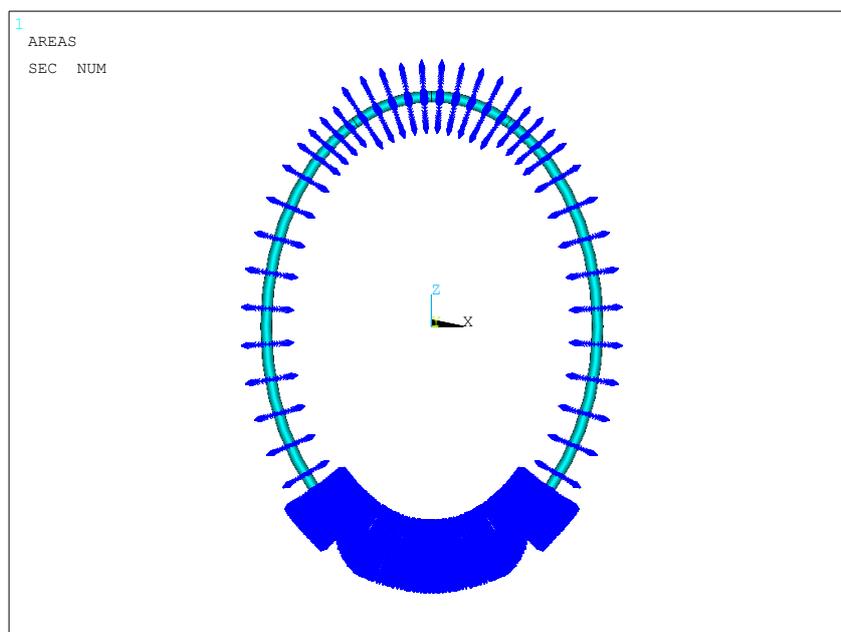


Figura 21. Representación del eje  $z$  de las áreas de la cabeza del modelo límite.

Del mismo modo, se decide que el eje  $x$  sea circunferencial con respecto al centro de la cabeza del modelo. Para ello, en el caso del modelo límite, fue necesario definir varios sistemas de referencia rotando el eje  $x$  convenientemente para que en el modelo fuese, aproximadamente, elíptico. En las Figuras 22.a y 22.b se distingue las direcciones  $y$  (amarilla) y  $z$  (azul) de los elementos de la malla, que son perpendiculares a la circunferencial.

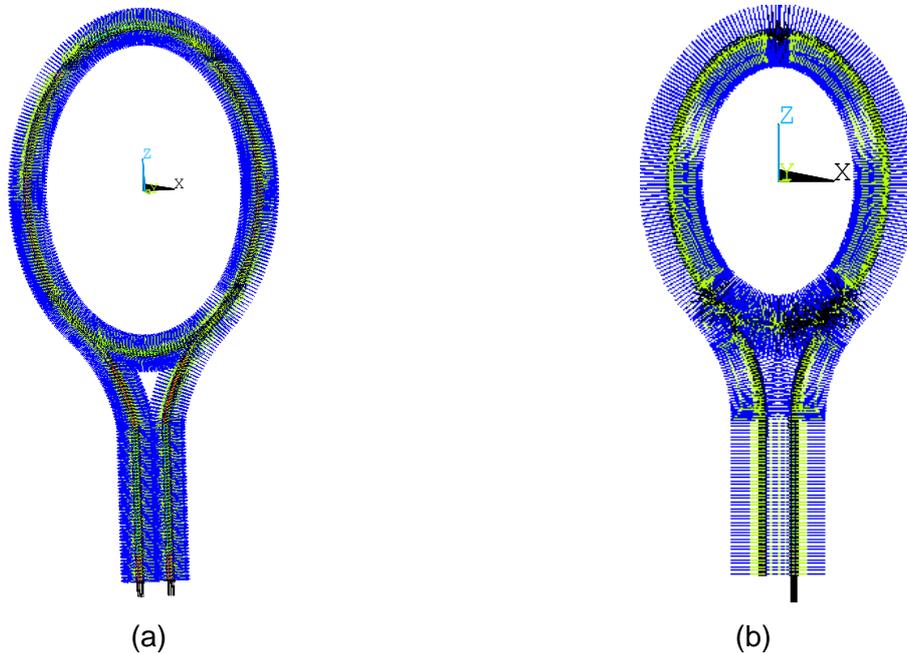
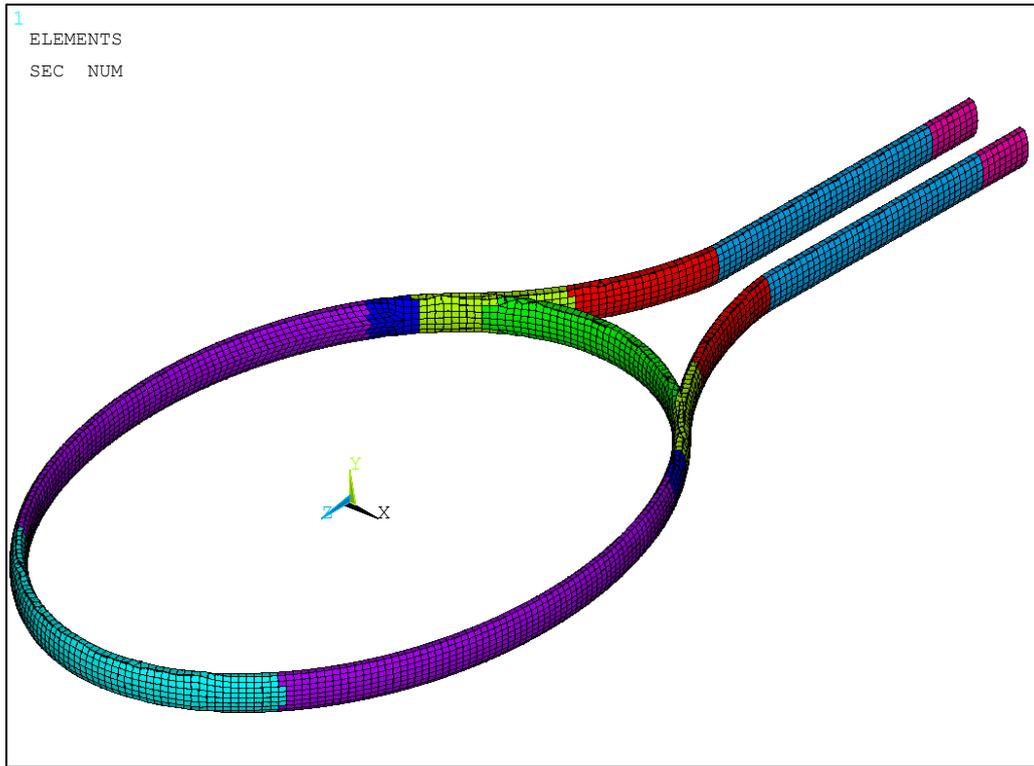


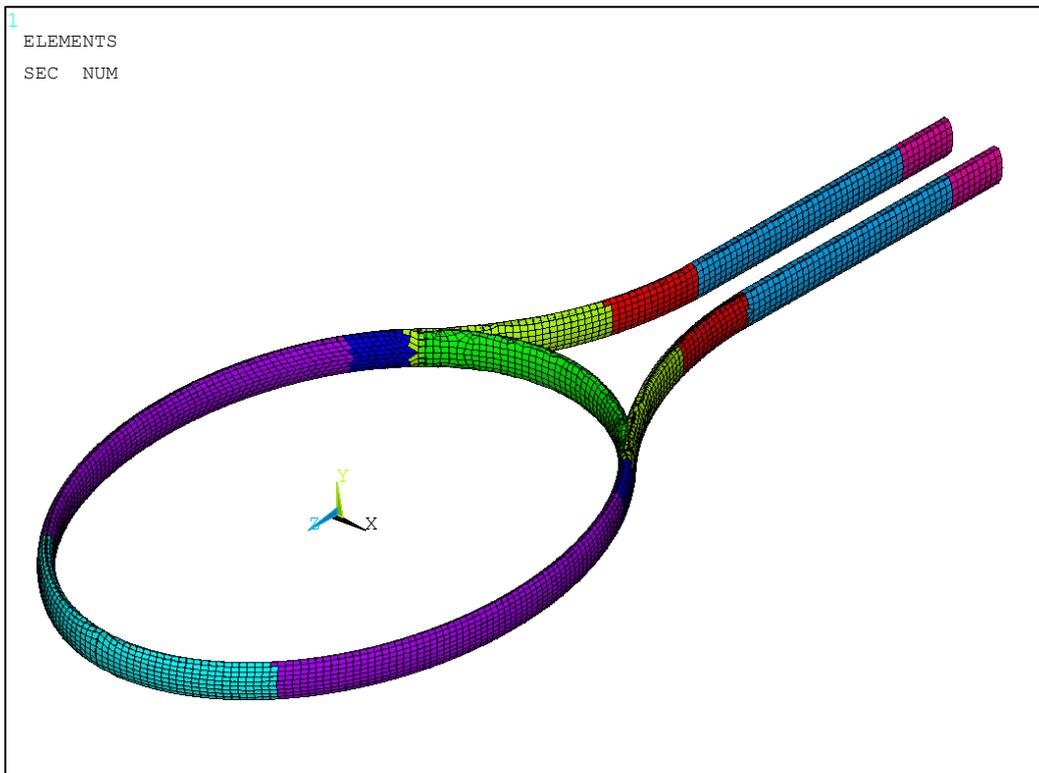
Figura 22. Representación del sistema de referencia local de los elementos del modelo límite (a) y del modelo medio (b).

#### 2.4. Asignación de propiedades.

En primer lugar, para la generación de la malla se debe definir el tamaño del elemento, que en este caso será de 0.0045 m o 4.5 mm. Para procurar la simetría en el mallado, se crea una malla en un cuarto de modelo y se refleja en las direcciones correspondientes para completar el modelo. Posteriormente se atribuye a los elementos las respectivas secciones descritas en el apartado 2.3. En las Figuras 23.a y 23.b se representa cada sección con un color diferente, explicado en la tabla 9.



(a)



(b)

Figura 23. Distribución de las secciones en el modelo límite (a) y el modelo medio (b).

SECCIÓN	COLOR
Sección 1	Aguamarina
Sección 2	Morado
Sección 21	Azul rey
Sección 31	Amarillo
Sección 3	Rojo
Sección 4	Azul claro
Sección 5	Fucsia
Sección 6	Verde

Tabla 9. Leyenda de secciones de los modelos.

## 2.5. Incorporación de la red. Fuerza de pretensado.

En primer lugar, definimos el elemento de ANSYS para modelar la red, el cual será el BEAM188. Elegimos este elemento porque tiene seis grados de libertad por nodo al igual que el elemento SHELL181 del marco de la raqueta, lo que permite que los esfuerzos se transmitan entre los componentes de la raqueta. Posteriormente, se define el material de las cuerdas, que será Kevlar 49, cuyas propiedades se pueden encontrar en la tabla 10. En ambas raquetas se definen 19 cuerdas horizontales y 16 cuerdas verticales.

PROPIEDADES	Kevlar 49
Módulo de Young [GPa]	1256
Peso específico [kN/m³]	14.2
Densidad [kg/m³]	1449
Coefficiente de Poisson [-]	0.28

Tabla 10. Propiedades del Kevlar 49.

Tras definir el material, se procede a crear una sección tipo *beam* para las cuerdas. Esta sección se forma eligiendo el tipo de sección del elemento *beam* (en este caso circular maciza) y el radio de la misma. El radio dependerá del grosor -o calibre- de la cuerda. En la tabla 11 se representan algunos de los calibres comerciales. Finalmente se mallan las cuerdas con elementos de 0.005 m y se unen estas con el marco.

Calibre	15	15L	16	16L	17	17L	18
∅ [mm]	1.43	1.38	1.32	1.28	1.25	1.20	1.10

Tabla 11. Calibres de las cuerdas.

Excluyendo el material de las cuerdas, ya que su influencia no es objeto de estudio en este Trabajo, las dos variables que afectan al encordado serían su calibre y la fuerza de pretensado. Al ser el grosor una característica propia de la cuerda, se decide utilizar un mismo calibre para todos los modelos y enfocarnos en el efecto de la fuerza de pretensado. Esta fuerza suele oscilar entre las 50 y 70  $lb_f$ , que a la conversión resulta 222.413 N y 311.38 N respectivamente, y se define a tracción respecto a la cuerda, tal y como se puede observar en la Figura 24. Para el estudio de su influencia utilizaremos el modelo límite, donde se aplicarán tres fuerzas de pretensado distintas (55  $lb_f$ , 60  $lb_f$  y 65  $lb_f$ ) manteniendo fija la fracción en volumen de fibra.

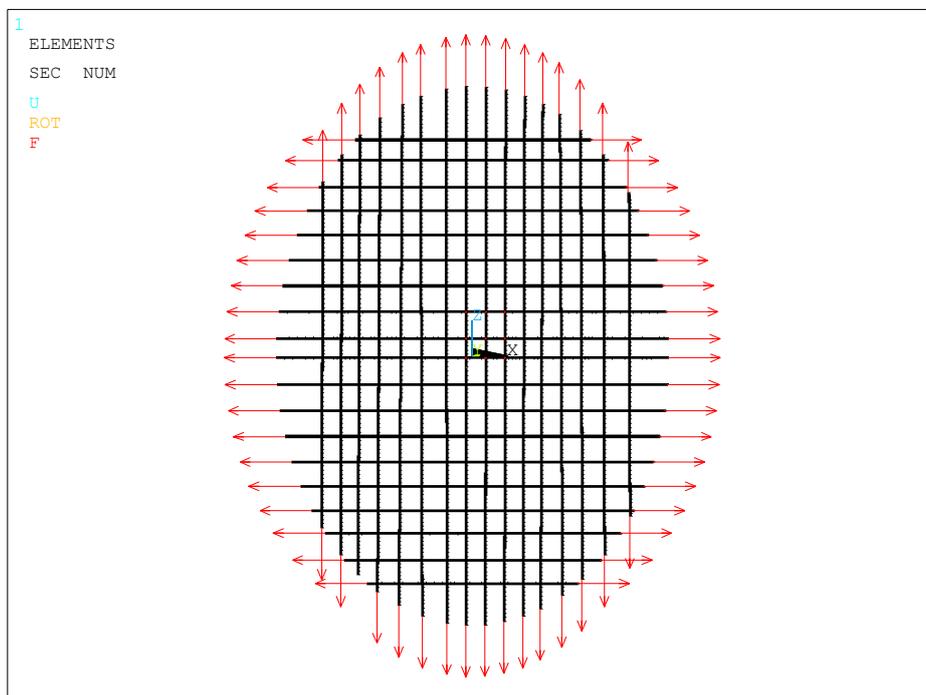


Figura 24. Fuerza de pretensado aplicada al encordado.

## 2.6. Análisis resistente del marco de la raqueta.

En primer lugar, es necesario puntualizar que el análisis resistente del marco de la raqueta representa la solución a un problema no lineal debido a potenciales grandes deformaciones en la red y el efecto de la pretensión, lo que significa que es necesario establecer varios estados antes de obtener un resultado. ANSYS utiliza el algoritmo de Newton Raphson para resolver problemas no lineales, dividiendo la carga en pequeños incrementos de carga y aplicándolos en varios pasos.

Antes de abordar cada solución, el método de Newton-Raphson evalúa los residuos de carga “*out-of-balance*” que representa la diferencia entre las tensiones de elementos y las cargas aplicadas (considerando la pretensión de las cuerdas). A continuación, ANSYS realiza un análisis lineal utilizando dicho vector de carga y se verifica la convergencia. En caso de que los criterios de convergencia no se cumplan, se procede a reevaluar el vector de carga, actualizar la matriz de rigidez y obtener una nueva solución.

Existen varias técnicas que pueden mejorar la convergencia, como la búsqueda de línea, el incremento automático de la carga y el método de bisección. Si la convergencia no se logra, el programa intenta resolver el problema utilizando incrementos de carga más pequeños en un esfuerzo por alcanzar la convergencia deseada. ANSYS ofrece una variedad de criterios de convergencia, que pueden basarse en fuerzas, momentos, desplazamientos o giros, e incluso en combinaciones de estos parámetros, permitiendo asignar tolerancias específicas a cada ítem. En situaciones que involucran múltiples grados de libertad, es posible emplear una norma de convergencia. En términos generales, se recomienda emplear una tolerancia para la convergencia basada en fuerzas o momentos, mientras que las tolerancias basadas únicamente en desplazamientos o giros pueden añadirse, pero no deben emplearse exclusivamente.

En resumen, el análisis no lineal se resume en tres niveles:

- Pasos de carga o *load steps*: aquí se supondrá que las cargas varían linealmente dentro de un paso de carga.
  - Dentro de cada *load step*, se puede forzar el programa a crear *substeps* o *timesteps*, con el objetivo de aplicar la carga gradualmente generando varias soluciones en el proceso.
    - El programa aplicará un número de iteraciones de equilibrio hasta conseguir la convergencia.

Para realizar este análisis, se definirán tres pasos de carga (LS por sus siglas en inglés): un primer paso que aplicará la pretensión y dos pasos más para añadir la fuerza generada por el impacto de la pelota. En este proyecto, se simulará la acción del saque en el tenis, ya que supone la situación más desfavorable para la raqueta en el juego. Como referencia, en el torneo de Wimbledon, el saque más rápido registrado en el circuito femenino alcanzó los 207.58 km/h (Venus Williams en el 2008) y los 238.16 km/h en el masculino (Taylor Dent en el 2010) (Wimbledon, s.f.). En promedio, el tiempo de contacto de la pelota con la red es de 6 ms, por lo que fijando la velocidad del saque en 216 km/h y asumiendo una masa de 0.0057 kg para la pelota, se calcula una fuerza de 570 N al servir la pelota. Para efectos del proyecto, se distribuirá esta fuerza equitativamente entre nueve puntos centrales del encordado, recibiendo cada uno 63.334 N.

Del mismo modo, es necesario establecer las condiciones aplicadas en el marco de las raquetas. Se tomarán ambos modelos y se fijarán las variables de material y fuerza de pretensado. De este modo, es posible observar la influencia del diseño en las propiedades resistentes del marco. En las tablas 12 y 13 se detalla cada LS, y en la Figura 25 se muestran las condiciones de contorno (apoyo tipo empotramiento) y cargas (fuerzas de pretensado e impacto de la pelota) aplicadas en los modelos.

<b>Modelo límite</b>			
	<b>TIME [s]</b>	<b>NSUBST</b>	<b>FUERZA APLICADA</b>
<b>LS1</b>	1e-6	4	Pretensado
<b>LS2</b>	2e-3	8	Pretensado + impacto de la pelota
<b>LS3</b>	6e-3	8	Pretensado + impacto de la pelota
<b>Modelo medio</b>			
	<b>TIME [s]</b>	<b>NSUBST</b>	<b>FUERZA APLICADA</b>
<b>LS1</b>	1e-6	4	Pretensado
<b>LS2</b>	2e-3	8	Pretensado + impacto de la pelota
<b>LS3</b>	6e-3	8	Pretensado + impacto de la pelota

Tabla 12. Tiempo, subpasos y tipo de fuerza aplicada en cada LS. (NSUBST: "Number substeps", número de subpasos; Time: "tiempo", duración del LS).

Por otro lado, es necesario conocer los límites resistentes para una lámina reforzada con fibra de carbono unidireccional, para poder calcular el coeficiente de reserva empleando un criterio de fallo. En la siguiente tabla se recogen dichos límites como valores de referencia tomados en este Trabajo Fin de Grado:

Límite resistente	Valor [MPa]
$S_{1t}$	930
$S_{2t}$	35
$S_{1c}$	-860
$S_{2c}$	-860
$S_{s12}$	46

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para los dos modelos de raqueta analizados (ML y MM) considerando los valores de fuerza de pretensado y fracción en volumen de fibra recogidos en la tabla 13.

Fuerza de pretensado [N]	267.05
$V_f$	0.35

Tabla 13. Valores de fuerza de pretensado y  $V_f$  (fracción en volumen de fibra) aplicados en el análisis.

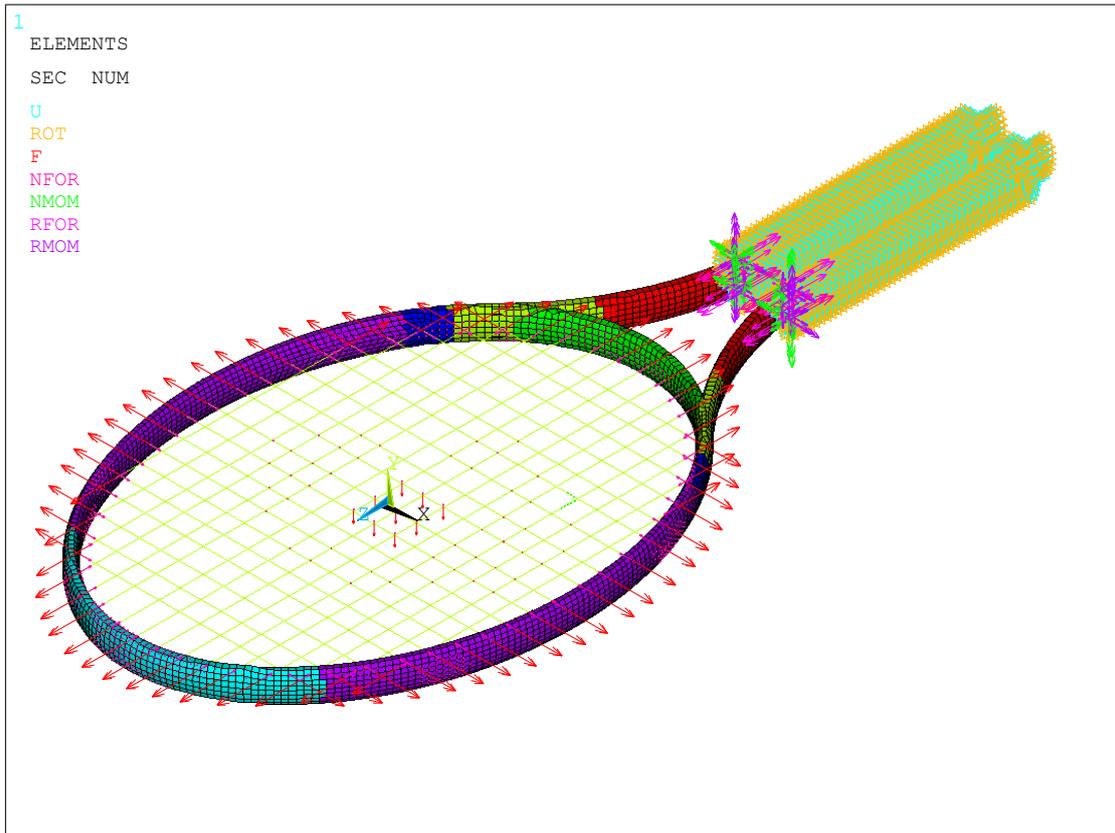


Figura 25. Condiciones de contorno (amarillo y celeste en el agarre) y cargas (flechas rojas en el marco y encordado) aplicadas, idénticas en ambos modelos.

Finalmente, se extraen los valores de tensiones en el eje x (dirección de la fibra en cada elemento) y en el eje y (dirección del impacto de la pelota), tal y como se puede apreciar en las Figuras 26.a, 26.b, 26.c, 26.d, y se aplica el criterio de fallo de Hashin para comprobar la resistencia de los modelos. En la tabla 14 se muestran los valores máximos y mínimos de la inversa del coeficiente de reserva (R) según el criterio de Hashin tanto como para las fibras (HFIB) como para la matriz (HMAT) y según el criterio de Tsai-Wu. Si el valor de  $1/R$  supera la unidad, se produce el fallo por rotura del elemento.

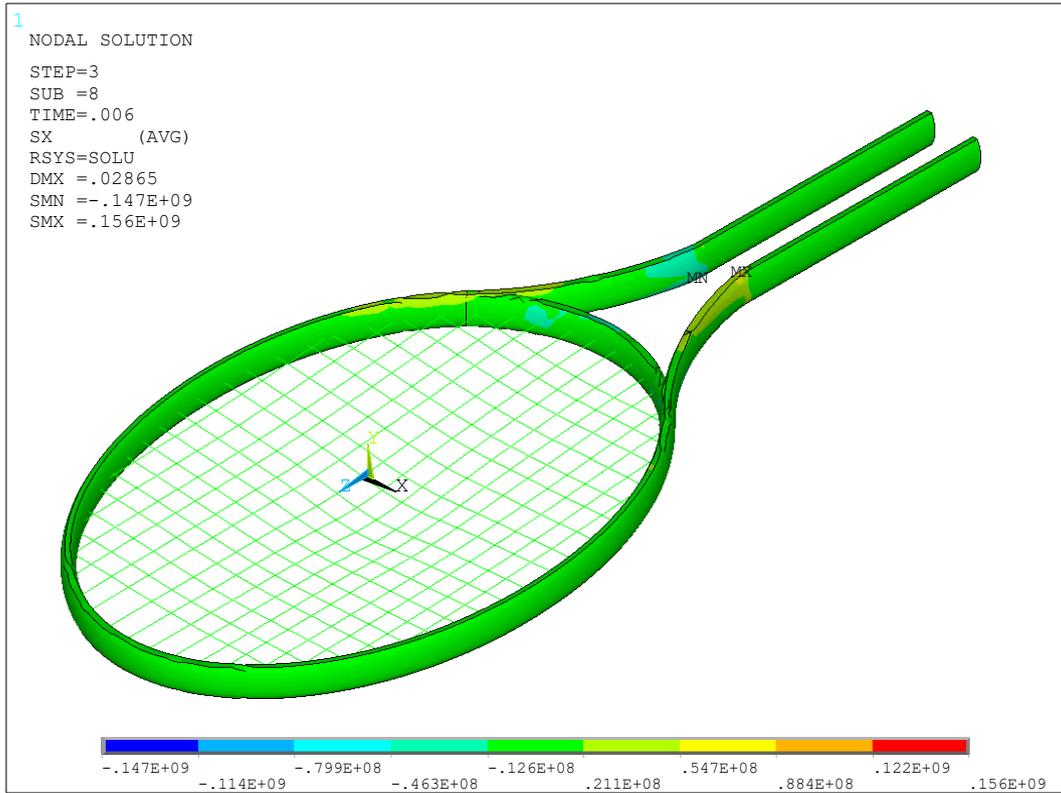


Figura 26.a. Tensiones en la dirección x del modelo límite (ML).

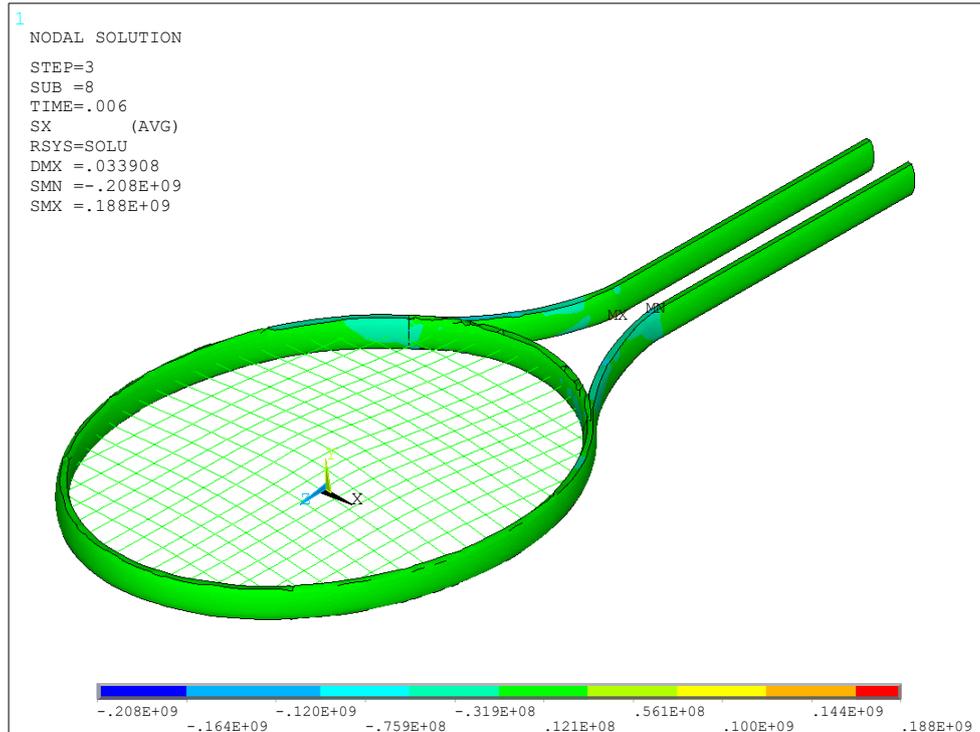


Figura 26.b. Tensiones en la dirección x del modelo medio (MM).

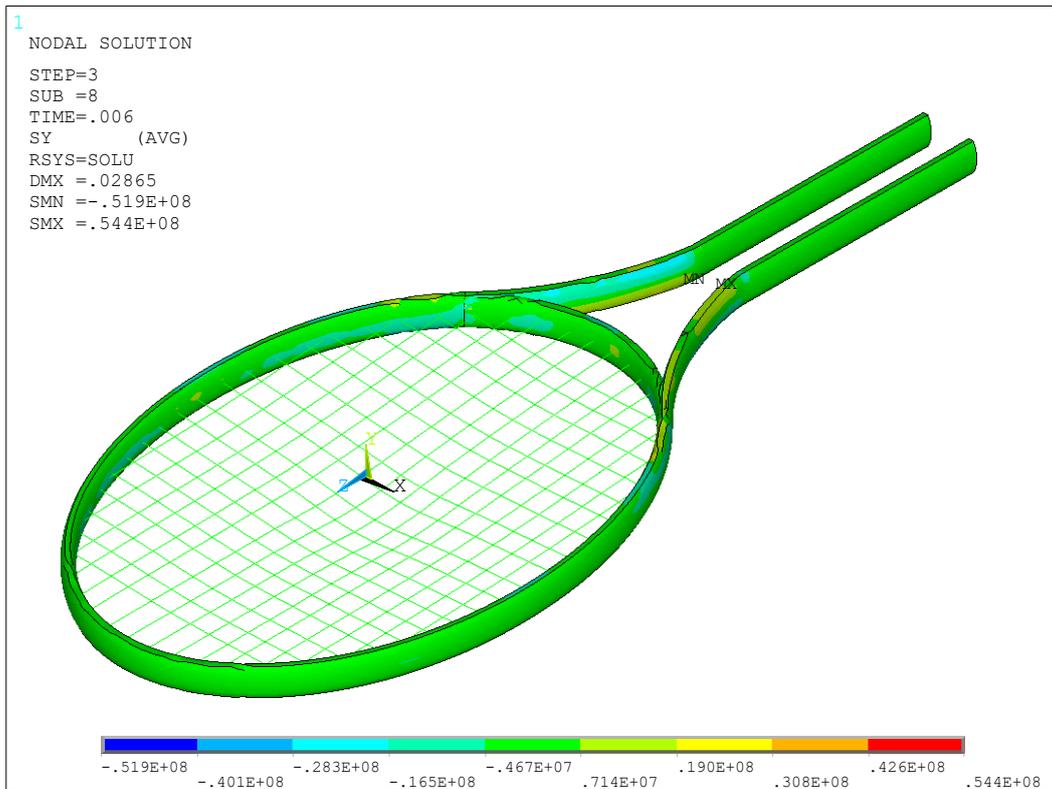


Figura 26.c. Tensiones en la dirección y del modelo límite (ML).

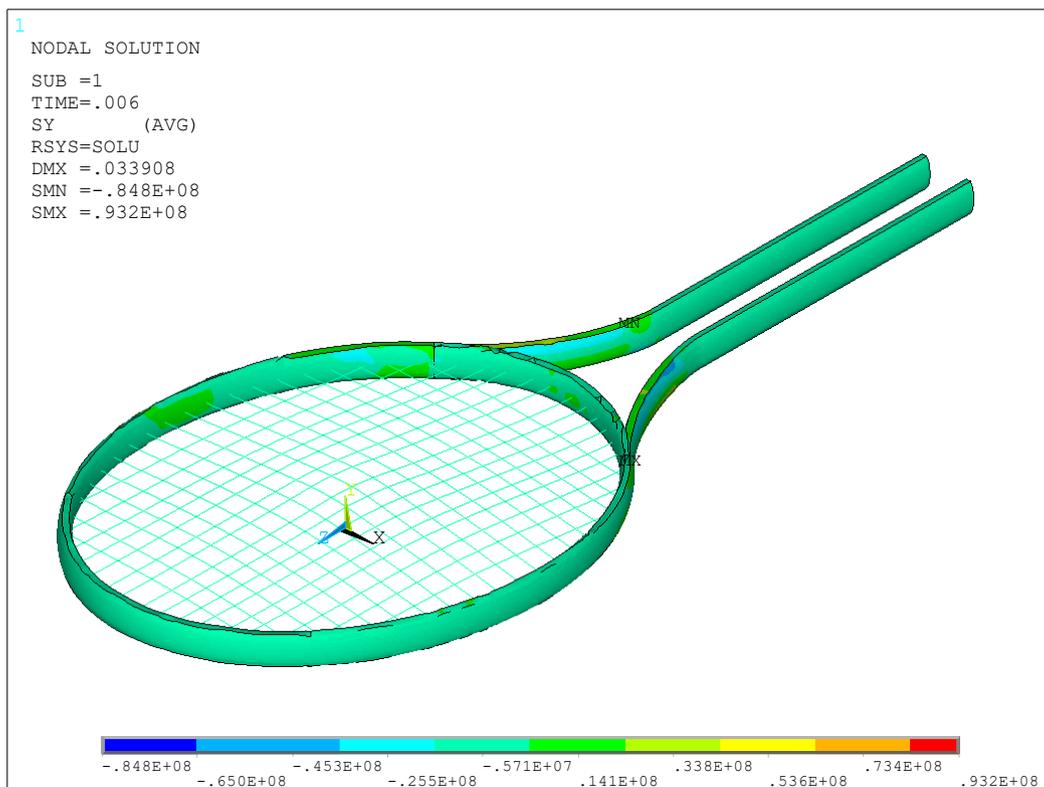


Figura 26.d. Tensiones en la dirección y del modelo medio (MM).

	<b>HFIB<sub>máx</sub></b>	<b>HMAT<sub>máx</sub></b>	<b>TW<sub>máx</sub></b>
<b>Modelo límite</b>	0.017977	0.56416	0.74783
<b>Modelo medio</b>	0.038885	0.46866	0.68586

Tabla 14. Valores máximos de la inversa del coeficiente de reserva según los criterios de Hashin (HFIB, HMAT) y Tsai-Wu (TW), para diferentes modelos de raqueta ML y MM mantenido la fuerza de pretensado y la fracción en volumen de fibra constantes.

### 3. ESTUDIO DE LA FUERZA DE PRETENSADO E IMPACTO DE LA PELOTA.

#### 3.1. Análisis de la fuerza de pretensado.

Del mismo modo que en el análisis resistente, es fundamental fijar todas las variables que no sean la fuerza de pretensado para obtener resultados claros. En este sentido, se opta por utilizar sólo el modelo límite (ML) y mantener una fracción en volumen de fibra constante e igual a 0.35. Asimismo, una de las ventajas de ANSYS es la generación de macros que facilitan el cambio de variables si son adecuadamente definidas, por lo que para cambiar el valor de una fuerza, sólo hace falta sustituirlo en los archivos .s0 de cada LS.

En la tabla 15 se recuerdan los valores de fuerza de pretensado que se van a estudiar, así como su equivalente en Newtons (1 Libra fuerza = 4.4482 Newtons).

<b>Caso</b>	<b>Fuerza de pretensado [lb.]</b>	<b>Fuerza de pretensado [N]</b>
1	55.000	244.655
2	60.035	267.050
3	65.000	289.137

Tabla 15. Valores de fuerza de pretensado a analizar.

Nuevamente, se extraen los valores de tensiones en el eje x (dirección de la fibra en el elemento) y en el eje y (dirección del impacto de la pelota). En la figura 27.a-f se muestran los gráficos correspondientes. Del mismo modo, se añaden los coeficientes de reserva de acuerdo con el criterio de Hashin para cada caso en la tabla 16.

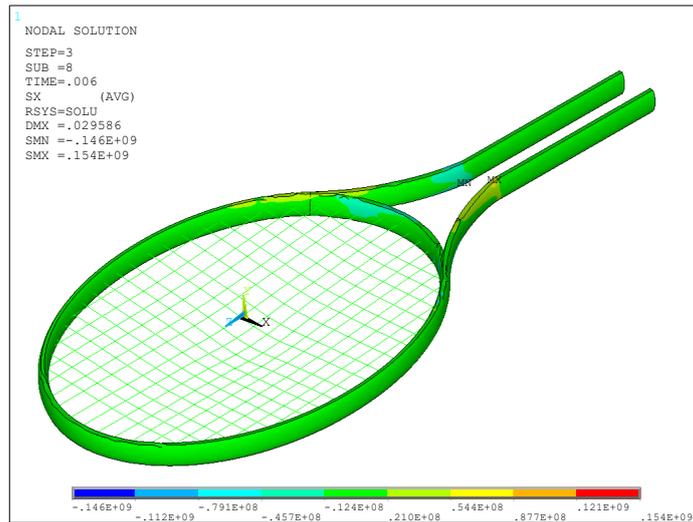


Figura 27.a. Tensiones en la dirección x del ML al aplicarse la fuerza de pretensado 1.

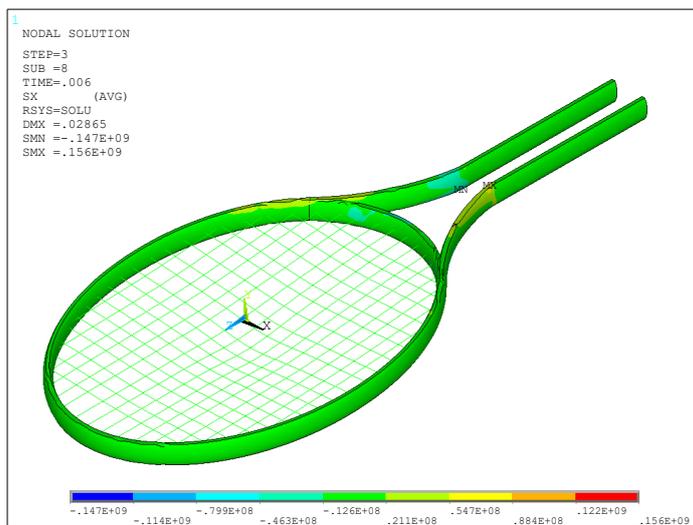


Figura 27.b. Tensiones en la dirección x del ML al aplicarse la fuerza de pretensado 2.

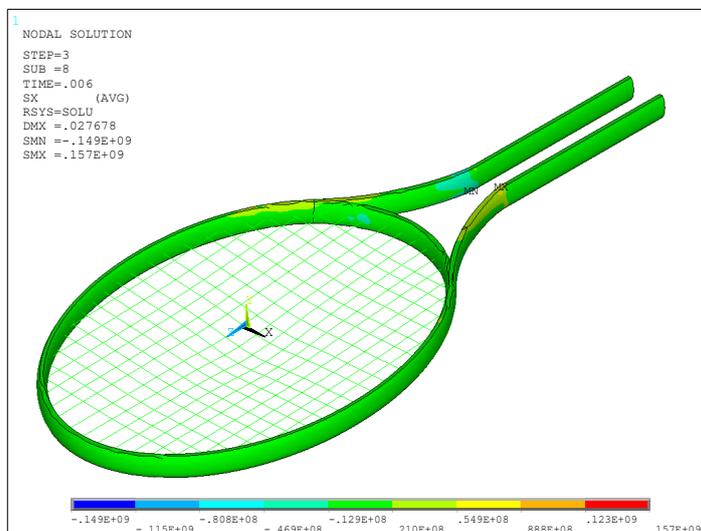


Figura 27.c. Tensiones en la dirección x del ML al aplicarse la fuerza de pretensado 3.

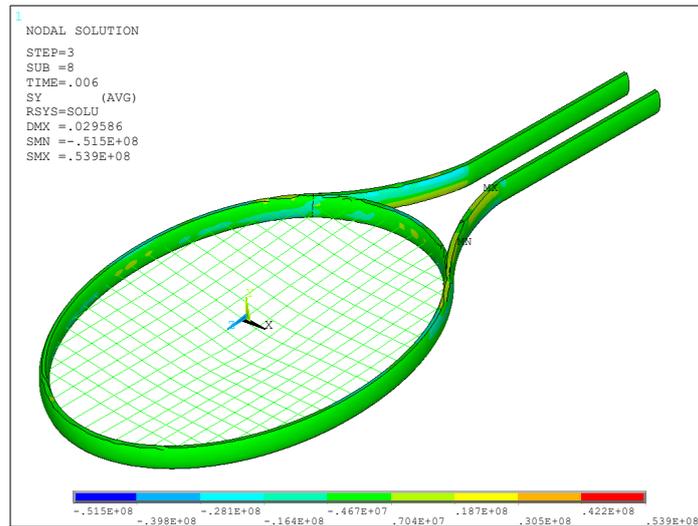


Figura 27.d. Tensiones en la dirección y del ML al aplicarse la fuerza de pretensado 1.

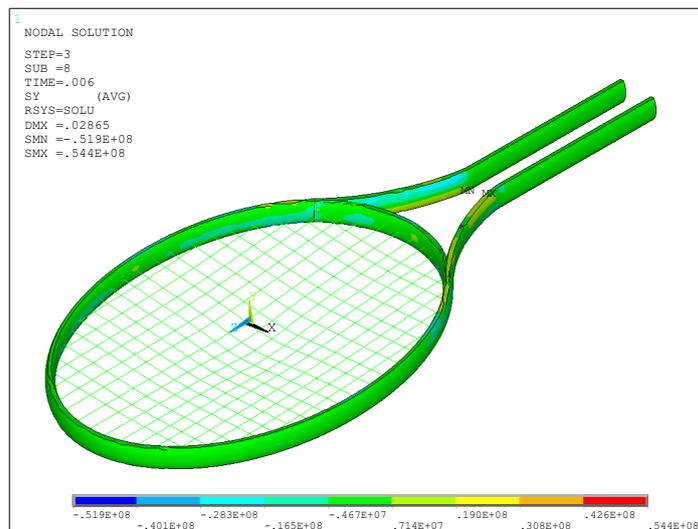


Figura 27.e. Tensiones en la dirección y del ML al aplicarse la fuerza de pretensado 2.

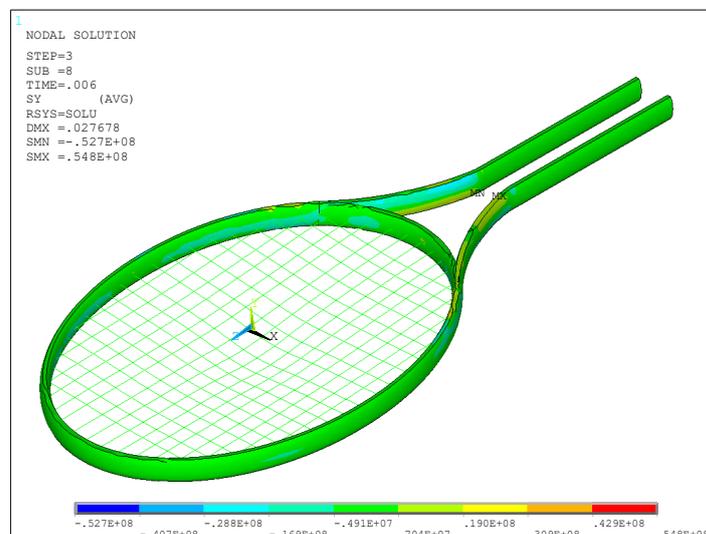


Figura 27.f. Tensiones en la dirección y del ML al aplicarse la fuerza de pretensado 3.

Caso	Fuerza. de pretensado (N)	HFIB <sub>máx</sub>	HMAT <sub>máx</sub>	TW <sub>máx</sub>
1	244.6551	0.017185	0.63238	0.79164
2	267.0502	0.017977	0.56416	0.74783
3	289.1373	0.018757	0.51586	0.71604

*Tabla 16. Valores máximos de la inversa del coeficiente de reserva según los criterios de Hashin (HFIB, HMAT) y Tsai-Wu (TW), para diferentes valores de fuerza de pretensado analizando el ML y manteniendo constante el valor de fracción en volumen de fibra en 0.3*

### **3.2. Análisis del material. Variable fracción en volumen de fibra.**

En este caso, se hará uso del modelo medio (MM) y se mantendrá la fuerza de pretensado constante e igual a 267.05 N y se cambiarán las propiedades de los materiales utilizados dependiendo de la fracción en volumen de fibra a estudiar. Los valores de  $V_f$  analizados son 0.3, 0.35 y 0.4 y las propiedades del material para cada uno de ellos se encuentran en las tablas 7 y 8.

Finalmente, se grafican los valores de tensiones en el eje x (dirección de la fibra) y en el eje y (Figura 28.a-f) y se calculan los valores del coeficiente de reserva según el criterio de Hashin y de Tsai-Wu (tabla 17).

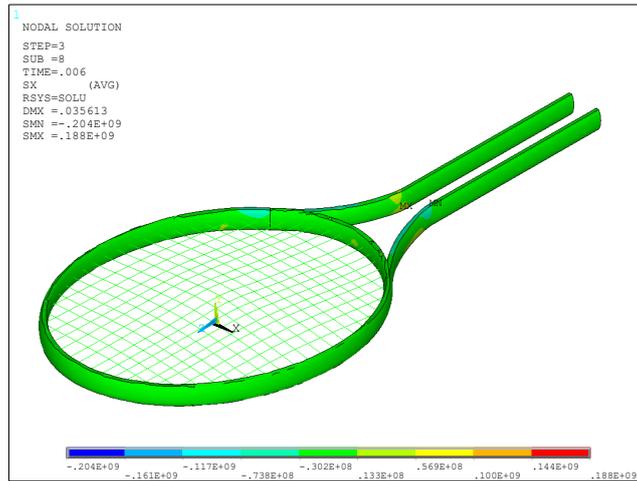


Figura 28.a. Tensiones en la dirección x del MM para  $V_f = 0.3$ .

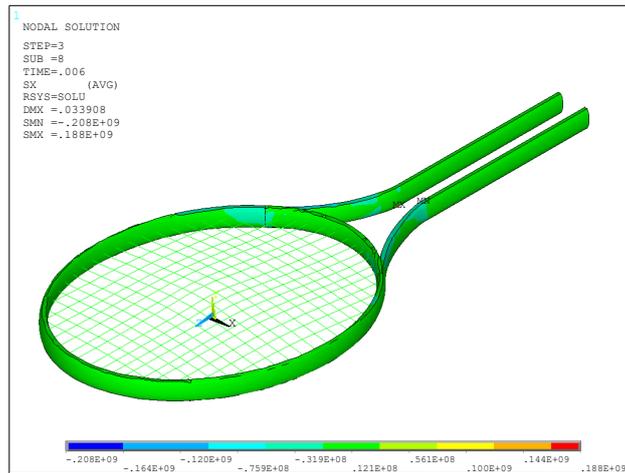


Figura 28.b. Tensiones en la dirección x del MM para  $V_f = 0.35$ .

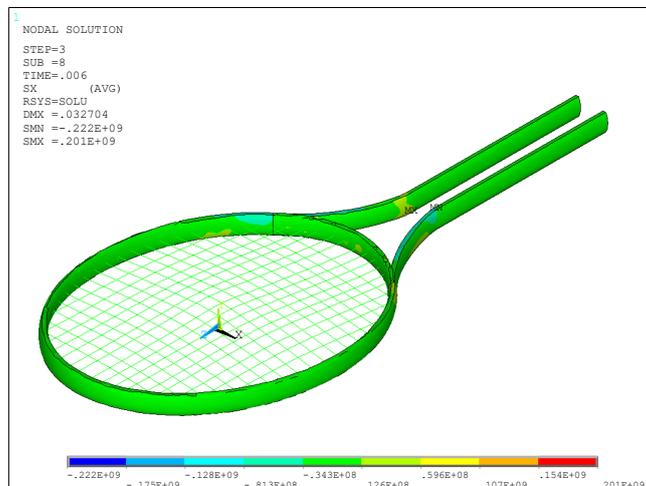


Figura 28.c. Tensiones en la dirección x del MM para  $V_f = 0.4$ .

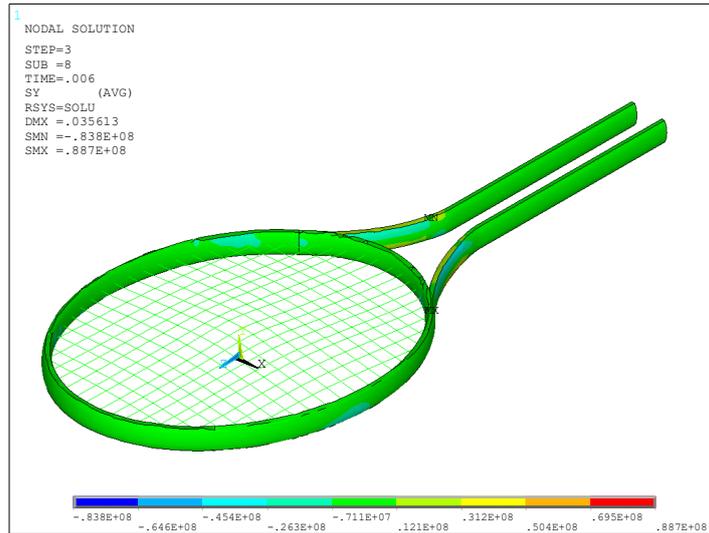


Figura 28.d. Tensiones en la dirección y del MM para  $V_f = 0.3$ .

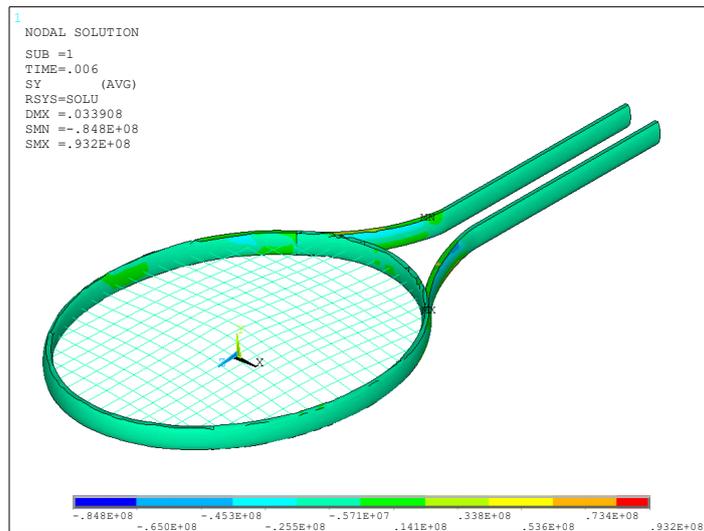


Figura 28.e. Tensiones en la dirección y del MM para  $V_f = 0.35$ .

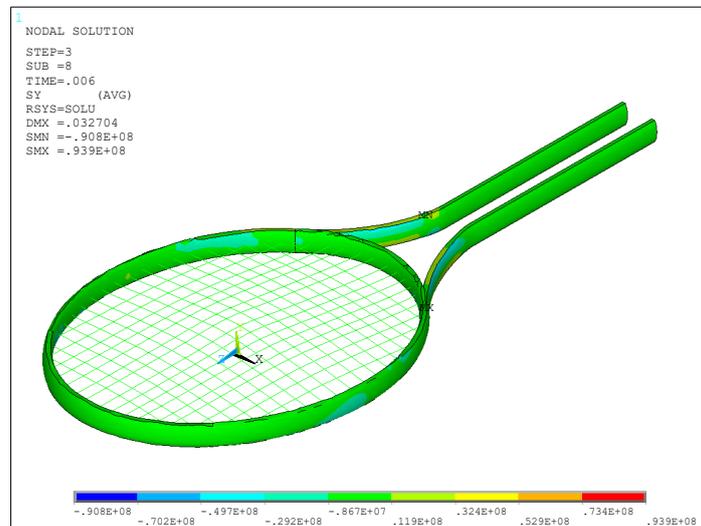


Figura 28.f. Tensiones en la dirección y del MM para  $V_f = 0.4$ .

	<b>HFIB<sub>máx</sub></b>	<b>HMAT<sub>máx</sub></b>	<b>TW<sub>máx</sub></b>
<b>V<sub>f</sub> = 0.3</b>	0.003091	0.31973	0.56551
<b>V<sub>f</sub> = 0.35</b>	0.038885	0.46866	0.68586
<b>V<sub>f</sub> = 0.4</b>	0.046782	0.58776	0.76939

Tabla 17. Valores máximos de la inversa del coeficiente de reserva, según los criterios de Hashin (HFIB, HMAT) y Tsai-Wu (TW) para diferentes valores de fracción en volumen en fibra.

## 4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En términos generales, para interpretar los resultados se debe tener en cuenta que los modelos desarrollados no son simétricos, por lo que la distribución de las cargas tampoco lo será. Del mismo modo, los valores máximos y mínimos se presentan en zonas puntuales, lo cual se puede deber a errores de discretización propios del MEF. Por otra parte, es importante resaltar que los límites resistentes de la lámina dados en la el apartado 4.6, se han considerado constantes cuando verdaderamente dependen del contenido de fibra del material. En este sentido, los resultados del coeficiente de reserva obtenidos al consider como variable la fracción en volumen de fibra pueden ser conservadores. Finalmente, es importante acotar que el valor mayoritario que se muestra en las tablas 18, 19 y 20 es estimado.

Los coeficientes de reserva obtenidos en todos los análisis son superiores a la unidad lo que muestra la ausencia de fallo en el componente. Estos resultados son coherentes teniendo en cuenta que tanto los modelos de raqueta analizados como los materiales de construcción son comerciales, por otro lado, los valores de fuerza de pretensado y la acción simulada del saque de la pelota son habituales.

### 4.1. Resumen de resultados obtenidos

A continuación, se resumen los valores tensionales máximos, mínimos y mayoritarios de cada uno de los modelos y casos estudiados. En la tabla 18 se muestran los resultados obtenidos en los dos modelos desarrollados (variable diseño) con condiciones de contorno y demás variables fijas. En la tabla 19 se recogen los resultados generados al variar el valor de la fuerza de pretensado en el modelo medio con el resto de las variables fijas. Finalmente, en

la tabla 20 se resumen los resultados conseguidos al cambiar la fracción en volumen de fibra en el modelo medio mientras se mantienen las demás variables constantes.

	Modelo límite	Modelo medio
$S_{x,\text{mín}}$ [MPa]	-147	-208
$S_{x,\text{máx}}$ [MPa]	156	188
$S_{x,\text{medio}}$ [MPa]	85	121
$S_{y,\text{mín}}$ [MPa]	-51.9	-84.8
$S_{y,\text{máx}}$ [MPa]	54.4	93.2
$S_{y,\text{medio}}$ [MPa]	7.14	5.71

Tabla 18. Resumen de los resultados obtenidos en el análisis resistente del ML y MM.

	F pret. = 55 lb <sub>f</sub>	F pret. = 60 lb <sub>f</sub>	F pret. = 65 lb <sub>f</sub>
$S_{x,\text{mín}}$ [MPa]	-146	-147	-149
$S_{x,\text{máx}}$ [MPa]	154	156	157
$S_{x,\text{medio}}$ [MPa]	86	85	81
$S_{y,\text{mín}}$ [MPa]	-51.5	-51.9	-52.7
$S_{y,\text{máx}}$ [MPa]	53.9	54.4	54.8
$S_{y,\text{medio}}$ [MPa]	2.37	2.47	2.85

Tabla 19. Resumen de los resultados obtenidos en el análisis de la influencia de la fuerza de pretensado sobre el ML.

	$V_f = 0.3$	$V_f = 0.35$	$V_f = 0.4$
$S_{x,\text{mín}}$ [MPa]	-204	-208	-222
$S_{x,\text{máx}}$ [MPa]	188	188	201
$S_{x,\text{medio}}$ [MPa]	133	121	126
$S_{y,\text{mín}}$ [MPa]	-83.8	-84.8	-90.8
$S_{y,\text{máx}}$ [MPa]	88.7	93.2	93.9
$S_{y,\text{medio}}$ [MPa]	4.5	4.1	3.2

Tabla 20. Resumen de los resultados obtenidos en el análisis de la influencia de la fracción de variable de fibra sobre el MM.

## 4.2. Conclusiones

En este Trabajo Fin de Grado se han analizado dos modelos de raqueta de tenis de alta gama comerciales. Al comparar el modelo medio (MM) y el modelo límite (ML), se observa que el modelo límite genera un rango de tensiones más reducido y que la mayoría del marco está sometido a tensiones más bajas en la dirección de las fibras, lo que supone una ventaja con respecto al modelo medio. Un aspecto a considerar es que el ML tiene una superficie de golpeo mayor que la del MM, por lo que sería interesante estudiar la influencia del tamaño de la cabeza de la raqueta y de las cuerdas, si se desea profundizar este estudio.

En segundo lugar, se deduce que el impacto de la fuerza de pretensión en cuanto a valores tensionales en la raqueta no es significativo. A pesar de evolucionar de acuerdo a lo esperado y aumentar las tensiones generadas a medida que se eleva su valor, su influencia en el marco no fue importante, lo cual es lógico considerando que la fuerza de pretensado busca influir en el encordado y que las posibles combinaciones de pretensión son muy elevadas.

Con respecto a la variación de la variable fracción en volumen de fibra, se observa una correlación positiva entre el incremento del contenido de fibra y el riesgo de rotura de la raqueta. La inversa del coeficiente de reserva aumenta a medida que lo hace  $V_f$ . La tendencia del estudio sugiere que el valor óptimo a utilizar está en torno a 0.35 pero sería conveniente ampliar la muestra para comprobarlo,

En base a los resultados obtenidos, se puede concluir que, tal y como se esperaba, la variable más determinante en la fabricación de raquetas de tenis es el diseño. La geometría en términos de curvatura de la garganta o la superficie total de golpeo parecen ser las variables más cruciales al momento de evaluar las tensiones. Asimismo, sería interesante estudiar la influencia del espesor del marco, ya que en este estudio se mantiene constante en ambos modelos.

Entre los posibles factores a mejorar en estos modelos, destaca la implementación de un laminado simétrico en la medida que sea posible para evitar tensiones producidas por acoplamientos. A su vez, sería conveniente desarrollar otros análisis que complementen los realizados en este proyecto, tal y como un estudio de flexión de tres puntos sobre el marco o

un análisis transitorio sobre la influencia del impacto de la pelota de tenis, variando su posición y velocidad.

Finalmente, es importante recalcar que este análisis es completamente computacional y se asumen hipótesis simplificativas, por lo que se considera como un prediseño de raquetas de tenis y que los resultados obtenidos son meramente orientativos. Para validar los modelos sería necesario desarrollar los prototipos y realizar análisis experimentales en entornos controlados.

## 5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- Castillo Sebastián, E. (2016). *Análisis de Criterios de Fallo para Materiales Compuestos [Trabajo de Fin de Grado]*. Valencia: Universidad Politécina de Valencia.
- Cervera Sanz, P. (2015). *Ergonomía de las raquetas de tenis: relación de características de los tenistas con propiedades de las raquetas en la precisión del saque*. Zaragoza: Universidad de Zaragoza – Zagan.
- Crespo, M. (2015). *La raqueta de tenis*. Obtenido de <http://www.miguelcrespo.net/temasextra/Tema%20.%20%20La%20raqueta%20de%20tenis.pdf>
- Gay, D., Hoa, S., & Tsai, S. (2003). *Composite Materials: Design and applications*. CRC Press.
- Gibson, R. (2012). *Principles of composite material mechanics*.
- Giner, E., & Albelda, J. (1998). *Análisis y Diseño con Materiales Compuestos*. SPUPV-98.4063.
- Grasso, J. (2011). *Historical dictionary of tennis*. Scarecrow Press, Incorporated.
- International Tennis Federation. (2023). *ITF Reglas del Tenis*.
- Jones, R. (1975). *Mechanics of composite materials*. New York: McGraw-Hill.
- Kaw, A. K. (2006). *Mechanics of Composite Materials*. Boca Raton, Florida: Taylor & Francis Group.
- Lammer, H., & Kotze, J. (2003). Materials and tennis rackets. *ResearchGate*.
- Rubio Hervás, C. (2021). *Análisis mediante el Método de los Elementos Finitos del comportamiento mecánico de una prótesis deportiva de miembro inferior modelizada con materiales compuestos [Trabajo de Fin de Grado]*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.
- Tennis Warehouse. (1 de Mayo de 2020). *How a HEAD Tennis Racquet is Made -- Behind the scenes in Kennelbach, Austria!*. Obtenido de [https://www.youtube.com/watch?v=n62fqfBUuIY&ab\\_channel=TennisWarehouse](https://www.youtube.com/watch?v=n62fqfBUuIY&ab_channel=TennisWarehouse)
- THE SINGLES GAME*. (s.f.). Recuperado el 22 de Marzo de 2023, de ITF: <https://www.itftennis.com/media/4419/2021-rules-of-tennis-spanish.pdf>
- Vellisco Campos, V. M. (2018). *Cálculo de la rigidez estática de una pala de pádel utilizando elementos finitos. [Trabajo de Fin de Grado]*. Valencia : Universidad Politécnica de Valencia.
- Wimbledon. (s.f.). *The Championships, Wimbledon*. Obtenido de [https://www.wimbledon.com/en\\_GB/atoz/faq\\_and\\_facts\\_and\\_figures.html](https://www.wimbledon.com/en_GB/atoz/faq_and_facts_and_figures.html).





UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Análisis de la influencia del diseño, material y fuerza de pretensado en el comportamiento resistente del marco de una raqueta de tenis mediante el Método de los Elementos Finitos.

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Mecánica

## DOCUMENTO 2: PRESUPUESTO

AUTOR/A: González Díaz, Johana Carolina

Tutor/a: Vercher Martínez, Ana

CURSO ACADÉMICO: 2022/2023

## CONTENIDO

1. Presupuesto de conceptualización y desarrollo del proyecto .....	74
2. Presupuesto de materiales.....	74
3. Presupuesto de licencias .....	74
4. Presupuesto de equipos informáticos .....	75
5. Presupuesto total.....	75
6. Referencias .....	76

## 1. Presupuesto de conceptualización y desarrollo del proyecto

En este presupuesto se cuantifica el valor del tiempo empleado en la realización de este proyecto.

Ref.	ud.	Descripción	Precio (€)	Cantidad	Total (€)
h1	h	Consulta inicial de bibliografía	35.00	40	1400.00
h2	h	Desarrollo de modelos y análisis	35.00	180	6300.00
h3	h	Redacción del Trabajo Final de Grado	35.00	90	3150.00
h4	h	Revisión del proyecto	35.00	20	700.00
h5	h	Presentación	35.00	5	175.00
<b>Total costes de conceptualización y desarrollo del proyecto</b>					<b>11725</b>

## 2. Presupuesto de materiales

En este presupuesto se estima la cantidad de material necesaria y se ofrece precio aproximado del mismo.

Ref.	ud.	Descripción	Precio (€)	Cantidad	Total (€)
m1	m <sup>2</sup>	Preimpregnados de carbono-epoxi	69.82	3	209.46
m2	m <sup>2</sup>	Preimpregnados de vidrio-epoxi	58.08	3	174.24
m3	ud	Cordaje de tenis	18.00	1	18.00
<b>Total costes de materiales</b>					<b>401.70</b>

## 3. Presupuesto de licencias

En este presupuesto se especifica el coste de obtención de las licencias necesarias para la realización de este proyecto.

Ref.	ud.	Descripción	Precio (€)	Cantidad	Total (€)
l1	meses	Licencia Fusion 360	73.00	2	146.00
l2	meses	Licencia ANSYS APDL	833.33	3	2500.00
l3	meses	Licencia AutoCAD	245.00	1	245.00
l4	meses	Licencia Office 365	5.42	4	21.67
<b>Total costes de licencias</b>					<b>2912.67</b>

#### 4. Presupuesto de equipos informáticos

En este presupuesto se incluye únicamente el ordenador utilizado para llevar a cabo este estudio.

Ref.	ud.	Descripción	Precio (€)	Cantidad	Total (€)
o1	ud	Ordenador de escritorio	874.73	1	874.73
<b>Total costes de equipos informáticos</b>					<b>874.73</b>

#### 5. Presupuesto total

En primer lugar, se contabiliza el presupuesto de la inversión como la suma de los presupuestos parciales calculados anteriormente.

Ref.	ud.	Descripción	Precio (€)
p1	-	Conceptualización y desarrollo del proyecto	11725.00
p2	-	Licencias	2912.67
p3	-	Materiales y componentes	401.70
p4	-	Equipos informáticos	874.73
<b>Total presupuesto de la inversión</b>			<b>15914.10</b>

A este presupuesto se le añaden los gastos generales (13%) y el beneficio industrial esperado (6%).

Ref.	ud.	Descripción	Precio (€)
t1	-	Inversión total	15914.10
g1	-	Gastos generales (13%)	2068.83
b1	-	Beneficio industrial (6%)	954.85
<b>Total presupuesto del proyecto (sin IVA)</b>			<b>18937.78</b>

Finalmente, se añade el impuesto al valor agregado (IVA).

Ref.	ud.	Descripción	Precio (€)
t2	-	Presupuesto del proyecto (sin IVA)	18937.78
i1	-	IVA (21%)	3976.933
<b>Total presupuesto del proyecto (con IVA)</b>			<b>22914.71</b>

El presupuesto total del proyecto será de **VEINTIDÓS MIL NOVECIENTOS CATORCE EUROS CON SETENTA Y UN CÉNTIMOS.**

## 6. Referencias

ANSYS. (s.f.). Obtenido de <https://www.ansys.com/>

Autodesk. (s.f.). *SUSCRIPCIÓN Y LICENCIA DE AUTOCAD* . Obtenido de <https://www.autodesk.es/solutions/autocad-subscription-faq>

Autodesk. (s.f.). *SUSCRIPCIÓN Y LICENCIA DE FUSION 360* . Obtenido de <https://www.autodesk.es/products/fusion-360/overview?term=1-YEAR&tab=subscription>

Castro Composites. (s.f.). *Castro Composites Shop*. Obtenido de <https://www.castrocompositesshop.com/>

Microsoft. (s.f.). *Microsoft 365 Personal*. Obtenido de <https://www.microsoft.com/es-es/microsoft-365/buy/compare-all-microsoft-365-products?tab=1>





UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Análisis de la influencia del diseño, material y fuerza de pretensado en el comportamiento resistente del marco de una raqueta de tenis mediante el Método de los Elementos Finitos.

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Mecánica

## DOCUMENTO 3: PLIEGO DE CONDICIONES

AUTOR/A: González Díaz, Johana Carolina

Tutor/a: Vercher Martínez, Ana

CURSO ACADÉMICO: 2022/2023

## CONTENIDO

1. Condiciones legales .....	80
2. Condiciones técnicas .....	80
2.1. Condiciones de hardware .....	80
2.2. Condiciones de software.....	81
2.2.1. Fusion360.....	81
2.2.2. ANSYS Mechanical APDL.....	81
2.2.3. Office 365 .....	81
3. Condiciones de interpretación y uso de resultados.....	82

En el presente proyecto se presentan dos propuestas de diseño del marco de una raqueta de tenis, así como el análisis de la influencia de diferentes variables definidas también en la etapa de prediseño. Para su realización, se deben cumplir las siguientes condiciones legales y técnicas.

## 1. Condiciones legales

Se reconocen públicamente las marcas registradas nombradas a lo largo del proyecto.

Se reconocen los derechos de los autores de las referencias consultadas.

Se prohíbe la reproducción total o parcial de este proyecto, incluyendo los diferentes elementos que lo conforman, sin el permiso previo de la autora.

## 2. Condiciones técnicas

Los modelos que forman este proyecto no han sido desarrollados experimentalmente. Su estudio y análisis se ha llevado a cabo utilizando recursos computacionales únicamente, lo que incluye los componentes físicos y tangibles (*hardware*) y los programas y aplicaciones utilizadas (*software*).

### 2.1. Condiciones de hardware

Para la realización de este proyecto se ha utilizado un ordenador de escritorio con las siguientes características principales:

<b>Procesador</b>	AMD Ryzen 5 5600G with Radeon Graphics de 3.90 GHz
<b>Memoria RAM</b>	16 GB
<b>Sistema operativo</b>	Windows 10 Pro 22H"

Tabla 1. Características del hardware utilizado.

## **2.2. Condiciones de software**

Las licencias de los programas computacionales y aplicaciones utilizadas fueron adquiridas a través de la Universidad Politécnica de Valencia y de a través de las licencias de estudiantes disponibles, por lo que su utilización sólo tiene carácter educativo, jamás profesional ni comercial.

### **2.2.1. Fusion360**

Se trata de un software de diseño asistido por ordenador (CAD) y fabricación asistida por computadora (CAM) desarrollado por Autodesk ®. En este proyecto fue utilizado para desarrollar la geometría de cada modelo. Se consiguió el acceso a este software a través de la licencia para estudiantes ofrecida por Autodesk ®.

### **2.2.2. ANSYS Mechanical APDL**

Es una herramienta de simulación de elementos finitos desarrollada por ANSYS ® que permite definir y controlar el análisis mediante comandos del lenguaje de programación ANSYS Parametric Design Language (APDL). Fue la herramienta utilizada para llevar a cabo los análisis modales, resistentes y estáticos del proyecto. Se consiguió el acceso a este software a través de la licencia para estudiantes ofrecida por ANSYS ® en colaboración con la Universidad Politécnica de Valencia.

### **2.2.3. Office 365**

Está formado por una gama de servicios, aplicaciones y herramientas desarrollada por Microsoft. En este proyecto fueron utilizados:

#### **2.2.3.1. Microsoft Excel**

Es una hoja de cálculo utilizada para el análisis de datos numéricos. En este proyecto fue utilizada para calcular las propiedades de cada material y de las diferentes variables estudiadas.

#### **2.2.3.2. Microsoft Word**

Este procesador de texto fue el utilizado para realizar los documentos de este proyecto.

#### **2.2.3.3. Microsoft PowerPoint**

Fue la herramienta utilizada para crear la presentación mostrada durante la defensa de este proyecto.

### **3. Condiciones de interpretación y uso de resultados**

La autora no se hace responsable por los resultados obtenidos. Diferentes hipótesis simplificativas fueron aplicadas para facilitar la realización de este proyecto. La validación de estos resultados deberá estar sujeta a estudios experimentales en un entorno controlado. La interpretación de los resultados no será, de ninguna manera, vinculante a los resultados propiamente dichos, así como a los generados en un hipotético estudio experimental.





UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Análisis de la influencia del diseño, material y fuerza de pretensado en el comportamiento resistente del marco de una raqueta de tenis mediante el Método de los Elementos Finitos.

Trabajo Fin de Grado

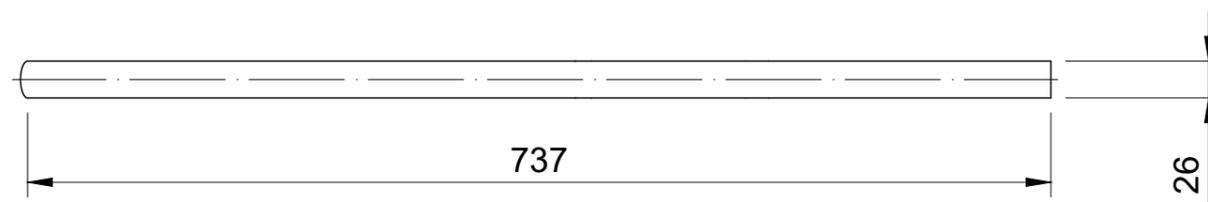
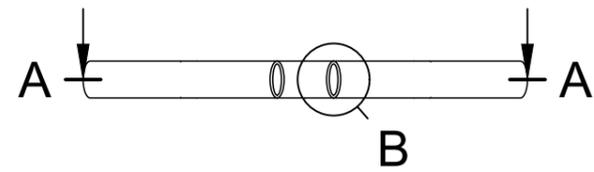
Grado en Ingeniería Mecánica

## DOCUMENTO 4: PLANOS

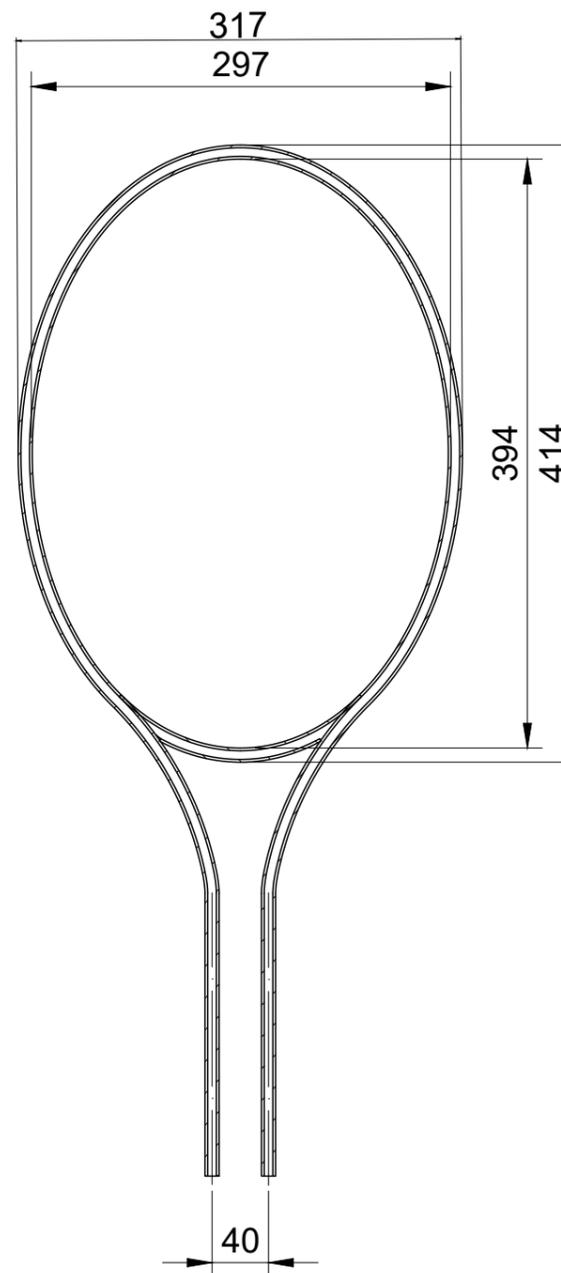
AUTOR/A: González Díaz, Johana Carolina

Tutor/a: Vercher Martínez, Ana

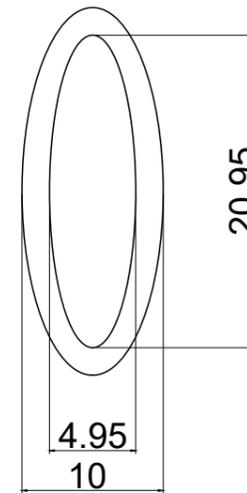
CURSO ACADÉMICO: 2022/2023



A-A

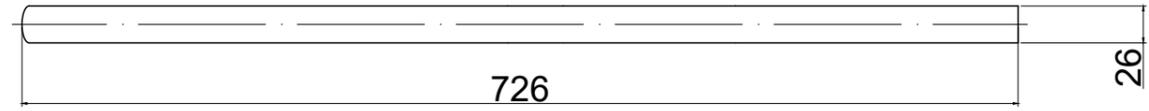
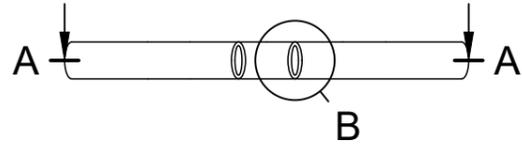


B (2:1)

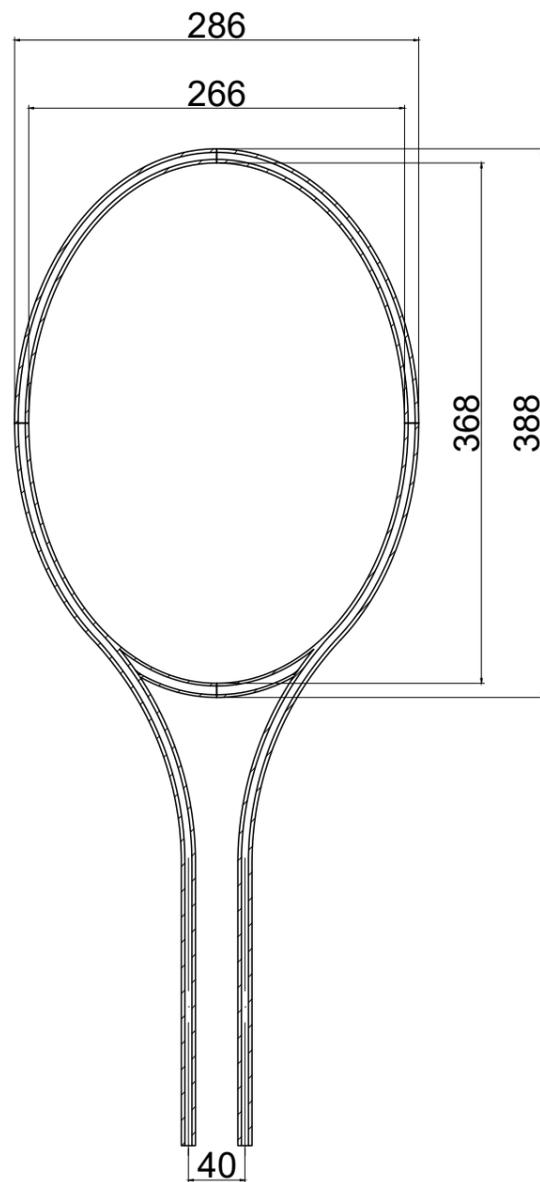


Cotas en mm.

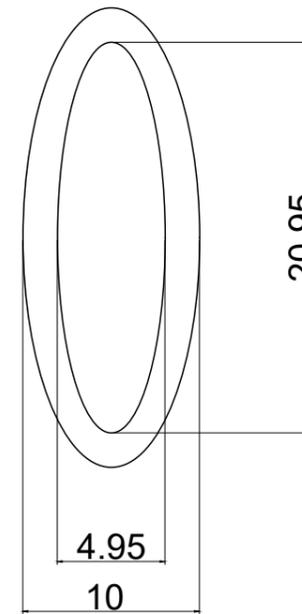
	Nombre	Fecha	Firma	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL DISEÑO PROYECTO DE OFICINA TÉCNICA Título del proyecto: Trabajo de Fin de Grado Autores: Johana González Díaz
Diseñado	Johana González	28/07/2023		
Dibujado	Johana González	28/07/2023		
Comprobado				
ESCALA	Denominación del plano			Número del plano
1:5	MODELO LÍMITE			1



A-A



B (2:1)



Cotas en mm.

	Nombre	Fecha	Firma	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL DISEÑO PROYECTO DE OFICINA TÉCNICA Título del proyecto: Trabajo de Fin de Grado Autores: Johana González Díaz
Diseñado	Johana González	28/07/2023		
Dibujado	Johana González	28/07/2023		
Comprobado				
ESCALA	Denominación del plano			Número del plano
1:5	MODELO MEDIO			2





UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Análisis de la influencia del diseño, material y fuerza de pretensado en el comportamiento resistente del marco de una raqueta de tenis mediante el Método de los Elementos Finitos.

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Mecánica

# ANEXOS A LA MEMORIA

AUTOR/A: González Díaz, Johana Carolina

Tutor/a: Vercher Martínez, Ana

CURSO ACADÉMICO: 2022/2023

**HM**

Ef [Gpa]	350
Em [GPa]	4.5
vf	0.28
vm	0.39
Gf [GPa]	13.7
Gm [GPa]	1.6
Dens matriz [kg/m <sup>3</sup> ]	1250
Dens fibra [kg/m <sup>3</sup> ]	1900

**Vf=0.3**

E1 [GPa]	101.850
E2 [GPa]	9.980
E3 [GPa]	9.980
v12	0.357
v23	0.620
v13	0.357
G12 [GPa]	1.620
G23 [GPa]	3.081
G31 [GPa]	1.620
Dens Comp [kg/m <sup>3</sup> ]	1445

**Vf=0.35**

E1 [GPa]	119.575
E2 [GPa]	11.357
E3 [GPa]	11.357
v12	0.352
v23	0.601
v13	0.352
G12 [GPa]	1.763
G23 [GPa]	3.547
G31 [GPa]	1.763
Dens Comp [kg/m <sup>3</sup> ]	1477.5

**Vf=0.4**

E1 [GPa]	137.300
E2 [GPa]	12.950
E3 [GPa]	12.950
v12	0.346
v23	0.581
v13	0.346
G12 [GPa]	1.922
G23 [GPa]	4.095
G31 [GPa]	1.922
Dens Comp [kg/m <sup>3</sup> ]	1510

**Vf=0.3**

Vf 0.3

<b>E1 [GPa]</b>	<b>101.85</b>
-----------------	---------------

$\eta$	0.96239554
--------	------------

$\xi$	2
-------	---

<b>E2 [GPa]</b>	<b>9.9798316</b>
-----------------	------------------

<b>v12</b>	<b>0.357</b>
------------	--------------

$\eta$	0.78866294
--------	------------

$\xi$	1
-------	---

<b>G12 [GPa]</b>	<b>1.61985469</b>
------------------	-------------------

Kf	265.151515
----	------------

Km	6.81818182
----	------------

K	9.63408816
---	------------

v21	0.03498085
-----	------------

<b>G23 [GPa]</b>	<b>3.08072112</b>
------------------	-------------------

<b>v23</b>	<b>0.61972331</b>
------------	-------------------

**Vf=0.35**

Vf 0.35

<b>E1 [GPa]</b>	<b>119.575</b>
-----------------	----------------

$\eta$	0.96239554
--------	------------

$\xi$	2
-------	---

<b>E2 [GPa]</b>	<b>11.3570303</b>
-----------------	-------------------

<b>v12</b>	<b>0.3515</b>
------------	---------------

$\eta$	0.78866294
--------	------------

$\xi$	1
-------	---

<b>G12 [GPa]</b>	<b>1.76255315</b>
------------------	-------------------

Kf	265.151515
----	------------

Km	6.81818182
----	------------

K	10.3462547
---	------------

v21	0.03338487
-----	------------

<b>G23 [GPa]</b>	<b>3.54748261</b>
------------------	-------------------

<b>v23</b>	<b>0.60071685</b>
------------	-------------------

**Vf=0.4**

Vf 0.4

<b>E1 [GPa]</b>	<b>137.3</b>
-----------------	--------------

$\eta$	0.96239554
--------	------------

$\xi$	2
-------	---

<b>E2 [GPa]</b>	<b>12.9497283</b>
-----------------	-------------------

<b>v12</b>	<b>0.346</b>
------------	--------------

$\eta$	0.78866294
--------	------------

$\xi$	1
-------	---

<b>G12 [GPa]</b>	<b>1.92169212</b>
------------------	-------------------

Kf	265.151515
----	------------

Km	6.81818182
----	------------

K	11.1721144
---	------------

v21	0.03263369
-----	------------

<b>G23 [GPa]</b>	<b>4.09543425</b>
------------------	-------------------

<b>v23</b>	<b>0.58099575</b>
------------	-------------------

**E-Glass**

<b>Ef [Gpa]</b>	70
<b>Em [GPa]</b>	4.5
<b>vf</b>	0.22
<b>vm</b>	0.39
<b>Gf [GPa]</b>	13.7
<b>Gm [GPa]</b>	1.6
<b>Dens matriz [kg/m<sup>3</sup>]</b>	1250
<b>Dens fibra [kg/m<sup>3</sup>]</b>	2540

**Vf=0.3**

<b>E1 [GPa]</b>	17.850
<b>E2 [GPa]</b>	8.970
<b>E3 [GPa]</b>	8.970
<b>v12</b>	0.339
<b>v23</b>	0.501
<b>v13</b>	0.339
<b>G12 [GPa]</b>	1.620
<b>G23 [GPa]</b>	2.988
<b>G31 [GPa]</b>	1.620
<b>Dens comp [kg/m<sup>3</sup>]</b>	1637.0

**Vf=0.35**

<b>E1 [GPa]</b>	21.575
<b>E2 [GPa]</b>	11.357
<b>E3 [GPa]</b>	11.357
<b>v12</b>	0.331
<b>v23</b>	0.433
<b>v13</b>	0.331
<b>G12 [GPa]</b>	1.763
<b>G23 [GPa]</b>	3.962
<b>G31 [GPa]</b>	1.763
<b>Dens comp [kg/m<sup>3</sup>]</b>	1701.5

**Vf=0.4**

<b>E1 [GPa]</b>	25.300
<b>E2 [GPa]</b>	12.950
<b>E3 [GPa]</b>	12.950
<b>v12</b>	0.322
<b>v23</b>	0.414
<b>v13</b>	0.322
<b>G12 [GPa]</b>	1.922
<b>G23 [GPa]</b>	4.579
<b>Dens comp [kg/m<sup>3</sup>]</b>	1766.0

**Vf=0.3**

Vf 0.3

<b>E1 [GPa]</b>	<b>17.85</b>
-----------------	--------------

$\eta$	0.82911392
--------	------------

$\xi$	2
-------	---

<b>E2 [GPa]</b>	<b>8.96967144</b>
-----------------	-------------------

<b>v12</b>	<b>0.339</b>
------------	--------------

$\eta$	0.78866294
--------	------------

$\xi$	1
-------	---

<b>G12 [GPa]</b>	<b>1.61985469</b>
------------------	-------------------

Kf	41.6666667
----	------------

Km	6.81818182
----	------------

K	9.10194175
---	------------

v21	0.17034838
-----	------------

<b>G23 [GPa]</b>	<b>2.98757547</b>
------------------	-------------------

<b>v23</b>	<b>0.50116232</b>
------------	-------------------

**Vf=0.35**

Vf 0.35

<b>E1 [GPa]</b>	<b>21.575</b>
-----------------	---------------

$\eta$	0.96239554
--------	------------

$\xi$	2
-------	---

<b>E2 [GPa]</b>	<b>11.3570303</b>
-----------------	-------------------

<b>v12</b>	<b>0.3305</b>
------------	---------------

$\eta$	0.78866294
--------	------------

$\xi$	1
-------	---

<b>G12 [GPa]</b>	<b>1.76255315</b>
------------------	-------------------

Kf	41.6666667
----	------------

Km	6.81818182
----	------------

K	9.64010283
---	------------

v21	0.17397444
-----	------------

<b>G23 [GPa]</b>	<b>3.96177867</b>
------------------	-------------------

<b>v23</b>	<b>0.43332469</b>
------------	-------------------

**Vf=0.4**

Vf 0.4

<b>E1 [GPa]</b>	<b>25.3</b>
-----------------	-------------

$\eta$	0.96239554
--------	------------

$\xi$	2
-------	---

<b>E2 [GPa]</b>	<b>12.9497283</b>
-----------------	-------------------

<b>v12</b>	<b>0.322</b>
------------	--------------

$\eta$	0.78866294
--------	------------

$\xi$	1
-------	---

<b>G12 [GPa]</b>	<b>1.92169212</b>
------------------	-------------------

Kf	41.6666667
----	------------

Km	6.81818182
----	------------

K	10.2459016
---	------------

v21	0.16481472
-----	------------

<b>G23 [GPa]</b>	<b>4.57947634</b>
------------------	-------------------

<b>v23</b>	<b>0.41388745</b>
------------	-------------------

<b>Fpretensado 1 [N]</b>	244.655
<b>Fpretensado 1 [kg]</b>	24.95
<b>Fpretensado 1 [lb]</b>	55

<b>Fpretensado 2 [N]</b>	267.050
<b>Fpretensado 2 [kg]</b>	27.232
<b>Fpretensado 2 [lb]</b>	60.035

<b>Fpretensado 3 [N]</b>	289.137
<b>Fpretensado 3 [kg]</b>	29.48
<b>Fpretensado 3 [lb]</b>	65

	<b>Layers</b>	<b>THK layer</b>	<b>Total THK</b>
<b>Shell1</b>	14	0.000180180	0.00252252
<b>Shell2</b>	11	0.000229320	0.00252252
<b>Shell3</b>	10	0.000252252	0.00252252
<b>Shell4</b>	9	0.000280280	0.00252252
<b>Shell5</b>	7	0.000360360	0.00252252
<b>Shell21</b>	13	0.000194040	0.00252252
<b>Shell31</b>	12	0.000210210	0.00252252