

Coeficientes de la superficie en modo deslizante directamente en la magnitud de control, un enfoque de esfuerzo reducido

Pedro R. Acosta*, Isidro Robledo-Vega, Abraham E. Rodríguez-Mata, Rogelio Baray-Arana

Instituto Tecnológico de Chihuahua/Tecnológico Nacional de México, Av. Tecnológico 2909, Chihuahua, 31310 Chihuahua 31310 México.

To cite this article: Acosta, P.R., Robledo-Vega, I., Rodríguez-Mata, A.E., Baray-Arana, R.E. 2023. Sliding mode surface coefficients directly in the control magnitude, a reduced effort approach. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 20, 355-365. <https://doi.org/10.4995/riai.2023.17980>

Resumen

Se presenta un procedimiento de diseño para el control en modo deslizante de primer orden aplicado a un sistema en forma de cadena de integradores pura o perturbada, (forma canónica controlable perturbada). La ley de control se propone de forma novedosa. La magnitud de control se define directamente por los coeficientes del polinomio de la superficie de deslizamiento. Se muestra que este procedimiento minimiza en cierto sentido el esfuerzo de control para alcanzar la superficie diseñada. Los cálculos son aún más sencillos que los de las técnicas clásicas en modo deslizante. Además, la elección de una dinámica de superficie estable garantiza un tiempo de alcance finito a la misma. El esfuerzo de control y el castañeteo (chattering) son bajos. Las perturbaciones y términos conocidos que provocan inestabilidad se aprovechan en ciertas condiciones del alcance a la superficie. Se muestra la importancia de considerar la dinámica natural del sistema para el diseño de la superficie deslizante si se desea un esfuerzo reducido. Se presentan simulaciones que ilustran los resultados y comparando el comportamiento de métodos de control en modo deslizante existentes en la literatura con el propuesto en este artículo.

Palabras clave: Control en modo deslizante, esfuerzo de control, cadena de integradores, rechazo a perturbaciones, castañeteo.

Sliding mode surface coefficients directly in the control magnitude, a reduced effort approach

Abstract

A design procedure is presented for first order sliding mode control applied to a system in form of a pure or perturbed chain of integrators (perturbed controllable canonical form). The control law is proposed in a novel way. The control magnitude is directly defined by the sliding surface polynomial coefficients. It is shown that this procedure minimizes in a given sense the control effort for reaching the designed surface. Calculations are even simpler than those in sliding mode classical techniques. Moreover, choosing a stable dynamical surface warrants a finite reaching time to it. Control effort and chattering are low. Under given conditions of the surface reaching phase, advantage is taken of known perturbations and terms leading to instability. It is shown the relevance of considering the natural dynamics of the system when designing the sliding surface if a reduced effort is desired. Simulations are given illustrating the results and comparing the behavior of some sliding mode methods in the literature to the one here proposed.

Keywords: Sliding mode control, control effort, chain of integrators, perturbation rejection, chattering.

1. Introducción

El control en modo deslizante (CMD) es una técnica muy utilizada por su robustez frente a las perturbaciones e

incertidumbres debidas a errores de modelado o distorsiones en la entrada. Varios enfoques se han utilizado para el diseño de la superficie de deslizamiento tales como: métodos estáticos e integrales, lógica borrosa dinámica, redes neuronales, desigualdad matricial lineal, pasividad, planitud,

*Autor para correspondencia: pedro.ac@chihuahua.tecnm.mx
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

algoritmos anidados, movimientos estables naturales. Una buena referencia clásica sobre CMD es (Utkin et al., 2017). Los avances recientes junto con las aplicaciones más actuales se han recopilado en diversos trabajos como por ejemplo (Yu y Efe, 2015; Riaz et al., 2021; Hu et al., 2021). Una de las principales inquietudes cuando se aplica el CMD es el castañeteo o chattering. La técnica del modo deslizante de orden superior ha sido utilizada para reducir o eliminar el castañeteo. Los dos primeros algoritmos para CMD de orden superior fueron de segundo orden: El llamado twisting (Levant, 1993) y el algoritmo subóptimo (Bartolini y Pydyowski, 1996). Otra forma de reducir el efecto del castañeteo actualmente es el uso de control fraccionario combinado con técnicas en modo deslizante (Ullah et al., 2019).

El CMD ha sido utilizado comúnmente para su uso en sistemas con múltiples integradores para diferentes situaciones, como en (Levant, 2001) para la convergencia en tiempo finito en sistemas no lineales; también con sistemas inciertos de fase no mínima, (Plestan et al., 2008); para el control en modos deslizantes de orden superior arbitrario (Kamal y Bandyopadhyay, 2012); sistemas MIMO no lineales (Liu y Han, 2014); aplicaciones industriales diversas tal como en (Chalanga et al., 2014) y super twisting, con integradores de orden superior perturbados (Laghrouche et al., 2017). También es habitual introducir un orden relativo artificialmente alto para poder aplicar una entrada discontinua con el objetivo de tener una convergencia en tiempo finito, pero teniendo una entrada continua al sistema real. Muchos de estos enfoques utilizan el CMD terminal junto con algoritmos anidados como en (Fridman et al., 2015) que se han utilizado para sistemas dinámicos representados con cadenas de integradores, como se propone en (Levant, 2001).

Además, las cadenas de integradores son de interés por sí mismas como muestran los resultados recientes que estudian diferentes problemas como la estabilización bajo perturbación en tiempo prescrito (Chitour et al., 2020), estabilización en tiempo finito y en tiempo fijo sin perturbaciones (Zimenko et al., 2018), cadenas de integradores con saturación (Adelipour et al., 2020), optimización en tiempo finito distribuida (Wang et al., 2020) y cadenas de integradores sujetas a perturbaciones y control saturado (Amini et al., 2019).

Recientemente, (Utkin, 2015) planteó la pregunta sobre cuándo es mejor utilizar el CMD de primer orden o de orden superior. Señaló además que las leyes de control que utilizan los modos deslizantes de primer orden son más simples y mostró que en algunos casos el castañeteo es menor con control en modo deslizante de primer orden que cuando se utiliza control en modo deslizante superior.

En este trabajo se presenta un procedimiento general, novedoso y constructivo que utiliza el CMD de primer orden para la estabilización de una cadena de integradores pura o perturbada, incluyendo la forma canónica controlable, motivado por el enfoque dado en (Acosta, 2014), de forma que el castañeteo en la señal de control es de baja amplitud, y se mantiene la robustez frente a incertidumbres en condiciones concordantes. El procedimiento incluye cálculos que son aún más sencillos que los utilizados comúnmente en modo deslizante. La visualización de la ley de control resultante es también muy simple, y se requiere un bajo esfuerzo de control para el alcance de la superficie deslizante. Se muestra la importancia de considerar la dinámica natural

del sistema para el diseño de la superficie deslizante si se desea un esfuerzo reducido, proponiéndose un procedimiento sencillo para la selección de la superficie deslizante en este sentido y la ley de control correspondiente. Además, por ser CMD de primer orden, no se imponen restricciones sobre las derivadas de las perturbaciones.

El artículo está organizado como sigue: La siguiente sección presenta el procedimiento general para determinar la ley de control en modo deslizante para una cadena de integradores perturbada, utilizando un enfoque de esfuerzo mínimo para el alcance de la superficie deslizante. En la sección 3, se dan algunas simulaciones para validar el resultado, comparando diferentes variantes incluyendo algunas que resultan en leyes clásicas de modos deslizantes de primer orden y con otros enfoques de orden superior. Finalmente se presentan algunas conclusiones.

2. Diseño de control en modo deslizante para una cadena de integradores perturbada.

Como base, para obtener una ley de control con esfuerzo reducido en el alcance de la superficie, en un sistema en forma controlable, se considera el caso de una cadena de integradores perturbada.

Consideremos un sistema de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

Con:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(\mathbf{x}, t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix}$$

Donde $g(\mathbf{x}, t)$ es una perturbación para la cadena pura de integradores, que pudiera contener dinámica adicional, perturbaciones independientes del estado y términos que provocan inestabilidad y $b(\mathbf{x}, t) \neq 0$. $u(\mathbf{x}, t)$ es la ley de control y $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]^T$. El problema es encontrar un procedimiento general para una ley de control en modo deslizante de primer orden, manteniendo bajo esfuerzo de control en el alcance a la superficie y baja magnitud de castañeteo.

Proposición 1. El punto de equilibrio $\mathbf{x} = 0$ en el sistema (1) es globalmente exponencialmente estable si la ley de control se define como: $u(\mathbf{x}, t) = -k(\mathbf{x}, t) \text{sign}(s(\mathbf{x}, t))$ donde,

$$s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} = b(\mathbf{x}, t) [c_1 \dots c_{n-1} 1] \mathbf{x}, \quad (3)$$

tal que el polinomio característico $\lambda_c^{n-1} + c_{n-1} \lambda_c^{n-2} \dots + c_2 \lambda_c + c_1$ no tiene raíces con parte real cero o positiva. Además, si $g(\mathbf{x}, t)$ se conoce,

$$k(\mathbf{x}, t) = \frac{\alpha_1(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}, t)) \text{sign}(s(\mathbf{x}, t)) + |\alpha_1(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}, t))|}{2b(\mathbf{x}, t)} \beta \quad (4)$$

donde $\alpha_1(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}, t)) = \sum_{i=2}^n c_{i-1} x_i + g(\mathbf{x}, t)$ y $\beta \geq 1$.

En caso de que sólo se conozca el límite superior de la perturbación tal que: $|g(\mathbf{x}, t)/b(\mathbf{x}, t)| \leq \Gamma(\mathbf{x}, t)$, entonces,

$$k(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\alpha_2(\mathbf{x}) \text{sign}(s(\mathbf{x}, t)) + |\alpha_2(\mathbf{x})|}{2b(\mathbf{x}, t)} + \Gamma(\mathbf{x}, t) \right) \beta \quad (5)$$

con $\alpha_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=2}^n c_{i-1} x_i$

Prueba

Para visualizar mejor el esfuerzo requerido para el alcance de una superficie determinada y su relación con la propia superficie, se presenta la prueba de la siguiente manera. Definiendo, como en Acosta (2014), $s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} = (\mathbf{Pb}(\mathbf{x}, t))^T \mathbf{x}$, con $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$, $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = [0 \dots 0 \ b(\mathbf{x}, t)]^T$ y la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ [-a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n] \end{bmatrix}, \quad (6)$$

tal que el polinomio característico $\lambda_a^n + a_n \lambda_a^{n-1} \dots + a_2 \lambda_a + a_1$ no tiene raíces con parte real positiva, ni raíces múltiples con parte real cero. Definiendo también,

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ [-a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n] & [h(\mathbf{x})] \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (7)$$

donde $h(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^n a_i x_i$. Por lo tanto, $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}$. Ahora,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} & & p_{2n} \\ & & \vdots & \ddots & \\ p_{1(n-1)} & p_{2(n-1)} & p_{3(n-1)} & \dots & p_{(n-1)n} \\ [p_{1n} & p_{2n} & p_{3n} & \dots & p_{nn}] \end{bmatrix} > 0, \quad (8)$$

y escogiendo

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & & 0 \\ & & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & q_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ [0 & 0 & 0 & \dots & q_{nn}] \end{bmatrix} > 0. \quad (9)$$

Con la siguiente función de Lyapunov, en trayectorias de (1)

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \\ \dot{V} &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{1}{2} ((\mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t))^T \mathbf{P} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (10)$$

$$+ \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t))).$$

Para lograr la estabilidad, sumando y restando $\mathbf{A}_2 \mathbf{x}$,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} ((\mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{A}_2 \mathbf{x} - \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t))^T \mathbf{P} \mathbf{x} \\ &\quad + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{A}_2 \mathbf{x} - \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t))). \\ &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T - \mathbf{x}^T \mathbf{A}_2^T + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)^T + u(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)^T) \mathbf{P} \mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t)) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + (-\mathbf{h}(\mathbf{x})^T + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)^T + u(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)^T) \mathbf{P} \mathbf{x} \\ &\leq (-\mathbf{h}(\mathbf{x})^T + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)^T + u(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)^T) \mathbf{P} \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (11)$$

Es claro de lo anterior que puede utilizarse cualquier polinomio característico, que cumpla con $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$. También de (11), si $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ incluye términos que anulen o compensen en parte a términos de $-\mathbf{h}(\mathbf{x})$, el esfuerzo requerido en $u(\mathbf{x}, t)$ para alcanzar la superficie se verá reducido. Esto se analiza en detalle en los comentarios 2 y 3. Continuando con el caso de cadena de integradores, suponiendo el caso general donde $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ puede no tener términos que anulen o compensen a $-\mathbf{h}(\mathbf{x})$.

De la definición de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$,

$$\dot{V} \leq (-h(\mathbf{x})/b(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)/b(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x}, t)) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (12)$$

Aplicando la ley de control,

$$\dot{V} \leq ((g(\mathbf{x}, t) - h(\mathbf{x}))/b(\mathbf{x}, t) - k(\mathbf{x}, t) \text{sign}(s(\mathbf{x}, t))) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (13)$$

Substituyendo $k(\mathbf{x}, t)$ similar a la dada en (4) y por la definición de $s(\mathbf{x}, t)$,

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \left(\frac{g(\mathbf{x}, t) - h(\mathbf{x})}{b(\mathbf{x}, t)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_i + g(\mathbf{x}, t)) \text{sign}(s(\mathbf{x}, t)) + |\sum_{i=1}^n a_i x_i + g(\mathbf{x}, t)|}{2b(\mathbf{x}, t)} \right) \\ &\quad \times \beta \text{sign}(s(\mathbf{x}, t)) s(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (14)$$

Pueden darse cuatro casos al aproximarse a la superficie. Si $\text{sign}(s(\mathbf{x}, t)) > 0$ y $g(\mathbf{x}, t) - h(\mathbf{x}) > 0$, el esfuerzo de control supera o compensa las perturbaciones y los términos inestables. También lo hace si $\text{sign}(s(\mathbf{x}, t)) < 0$ y $g(\mathbf{x}, t) - h(\mathbf{x}) < 0$. Ahora, si $\text{sign}(s(\mathbf{x}, t)) < 0$ y $g(\mathbf{x}, t) - h(\mathbf{x}) > 0$, el esfuerzo de control no es necesario, tampoco si $\text{sign}(s(\mathbf{x}, t)) > 0$ y $g(\mathbf{x}, t) - h(\mathbf{x}) < 0$, por lo que el esfuerzo de control para estos dos casos se convierte en cero. Además, para una determinada $g(\mathbf{x}, t)$, mientras más grande sea β y/o $-h(\mathbf{x})$, más rápido la dinámica va a $s(\mathbf{x}, t) = 0$. Ahora, si sólo se conoce el límite superior de la perturbación, utilizando de forma similar a (5),

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \left(\frac{g(\mathbf{x}, t) - h(\mathbf{x})}{b(\mathbf{x}, t)} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_i) \text{sign}(s(\mathbf{x}, t)) + |\sum_{i=1}^n a_i x_i|}{2b(\mathbf{x}, t)} + \Gamma(\mathbf{x}, t) \right) \beta \text{sign}(s(\mathbf{x}, t)) s(\mathbf{x}, t) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

En este caso, como sólo se conoce el límite superior de la perturbación, el esfuerzo de control es mayor, porque $\Gamma(\mathbf{x}, t)\beta$ está siempre presente sin importar el valor de $\text{sign}(s(\mathbf{x}, t))$, pero el esfuerzo de la compensación de la dinámica introducida se reduce de la misma manera que para la primera ley de control.

Ahora, para mostrar que con $\sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=2}^n c_{i-1} x_i$, se logra esfuerzo mínimo con este enfoque en el alcance de la superficie, debe probarse que con $a_i = c_{i-1}$ y $a_1 = 0$, se tiene el menor esfuerzo.

Recordando que la respuesta transitoria del sistema en la superficie depende de la dinámica introducida de la siguiente manera:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{n-1} \ 1] \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x} = (\mathbf{P}\mathbf{b}(\mathbf{x}, t))^T \mathbf{x} \quad (16)$$

$$= [p_{1n} \ p_{2n} \ \dots \ p_{nn}] \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Estos y los otros valores para \mathbf{P} deben cumplir con $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ tal como se estableció. Además, \mathbf{P} tiene sólo $(n^2+n)/2$ elementos diferentes ya que es una matriz simétrica definida positiva. Por tanto, $(n^2-n)/2$ elementos diferentes de \mathbf{P} no están determinados por $\mathbf{C}(\mathbf{x}, t)$. Estos elementos restantes se obtienen considerando que \mathbf{P} es simétrica positiva definida, y con la ecuación de Lyapunov, $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$.

Entonces, en este caso

$$q_{ij} = p_{in} a_j - p_{(j-1)i} + p_{jn} a_i - p_{(i-1)j}, \quad (17)$$

con $p_{0r} = 0$, $r = 1, 2, 3, \dots, n$. Esto se define para no complicar la notación en el caso de que alguno de los subíndices i o j , sea 1 y por tanto $i-1$ ó $j-1$ sería cero dando un contrasentido ya que no existe ese elemento.

Y sustituyendo de (16), los valores $c_i = p_{in}$

$$q_{ij} = c_i a_j - p_{(j-1)i} + c_j a_i - p_{(i-1)j} \quad (18)$$

Para $i=j$

$$q_{ii} = 2(c_i a_i - p_{(i-1)i}) \quad (19)$$

Resolviendo para a_i

$$a_1 = \frac{q_{11}}{2c_1}, \quad a_n = \frac{q_{nn}}{2} + c_{n-1}, \quad a_i = \frac{q_{ii} + p_{(i-1)i}}{c_i} \quad (20)$$

Y para $i \neq j$

$$0 = c_i a_j - p_{(j-1)i} + c_j a_i - p_{(i-1)j} \quad (21)$$

Así pues, cualquier combinación de parámetros a_i , $i=1, 2, \dots, n$ que cumpla con (20), (21) será una solución factible para obtener $(\sum_{i=1}^n a_i x_i)$ en el esfuerzo de control logrando el alcance de la superficie.

Ahora, buscando el mínimo esfuerzo del control para el alcance de la superficie, se considera el mínimo que se requiera introducir en la dinámica, tal que $\mathbf{Q} \rightarrow 0^+$. Por tanto, haciendo $q_{ii} \rightarrow 0^+$ en (20), los parámetros para menor esfuerzo de control en el alcance de la superficie son

$$a_1 = 0, \quad a_n = c_{n-1}, \quad a_i = \frac{p_{(i-1)i}}{c_i} \quad (22)$$

Por tanto, para el menor esfuerzo queda claro que $a_1 = 0$ y $a_n = c_{n-1}$ para cualquier polinomio. La prueba para el menor esfuerzo se cumple $a_i = c_{i-1}$, para $i=2, 3, \dots, n-1$, se

muestra en lo siguiente para cualquier polinomio $\lambda_a^n + a_n \lambda_a^{n-1} \dots + a_2 \lambda_a + a_1$ de orden $n \geq 2$.

Primero, se muestra para $n=2, 3, 4$. Para $n=2$, el resultado es obvio de (22).

Para $n=3$, de (21), se escoge $q_{31} = 0 = c_3 a_1 - p_{03} + c_1 a_3 - p_{21}$, y con (22),

$$0 = c_1 c_2 - c_2 a_2. \quad (23)$$

Entonces, $a_2 = c_1$.

Para $n=4$, otra vez de (21), $q_{42} = 0 = c_4 a_2 - p_{14} + c_2 a_4 - p_{32}$, y con (22),

$$0 = a_2 - c_1 + c_2 c_3 - c_3 a_3, \quad (24)$$

Sustituyendo la solución supuesta, $0 = c_1 - c_1 + c_2 c_3 - c_3 c_2$. Por tanto, es correcto.

Ahora, para cualquier $n \geq 5$. $v = \lfloor \frac{n+4}{2} \rfloor$ y $m \leq 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor$. Empleando (21) con (22),

$$q_{(v-2)v} = 0 = c_{v-2} a_v - p_{(v-1)(v-2)} + c_v a_{v-2} - p_{(v-3)v}$$

$$= c_{v-2} a_v - c_{v-1} a_{v-1} + c_v a_{v-2} - p_{(v-3)v} \quad (25)$$

Sustituyendo la solución supuesta

$$0 = c_{v-2} c_{v-1} - c_{v-1} c_{v-2} + c_v c_{v-3} - p_{(v-3)v}, \quad (26)$$

por tanto,

$$c_v c_{v-3} = p_{(v-3)v}. \quad (27)$$

Además con

$$q_{(v-2m)(v+m)} = 0 = c_{v-2m} a_{v+m} - p_{(v-1+m)(v-2m)}$$

$$+ c_{v+m} a_{v-2m} - p_{(v-3m)(v+m)} \quad (28)$$

Sustituyendo $m=1$,

$$q_{(v-3)(v+1)} = 0 = c_{v-3} a_{v+1} - p_{v(v-3)} + c_{v+1} a_{v-3} - p_{(v-4)(v+1)}. \quad (29)$$

Con la solución supuesta y (27)

$$0 = c_{v-3} c_v - c_v c_{v-3} + c_{v+1} a_{v-3} - p_{(v-4)(v+1)}$$

$$0 = c_{v+1} a_{v-3} - p_{(v-4)(v+1)}. \quad (30)$$

Con (30), la solución es verificada para $n=5$, ya que $0 = c_5 a_1 - p_{05}$ es correcto y para $n=6$, $0 = c_6 a_2 - p_{16} = a_2 - c_1 = 0$, también lo es.

En lo siguiente se aplica el método de inducción para cualquier caso donde $n \geq 7$. Es claro que si $n \geq 7$, el máximo valor para m , es mayor que 1. Entonces, se deben establecer más de una ecuación (28), una para cada valor de m . Así pues, primeramente, (26) se sustituye en (28) con $m=1$. Además, se deben establecer otras ecuaciones (28) con $m=2, \dots, \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor$. Para $m=1$, se verificó que $c_{v+m} a_{v-2m} = p_{(v-3m)(v+m)}$. Ahora, para cada valor de m , $c_{v+m} a_{v-2m} = p_{(v-3m)(v+m)}$ se sustituye en (28) con $m+1$, cancelando los dos primeros términos en cada nueva ecuación de este tipo establecida con (28). Los dos últimos términos de cada ecuación se convierten en los dos primeros términos de la siguiente ecuación establecida incrementando m y por tanto se pueden cancelar de la misma manera. Para los dos últimos términos, en la última ecuación, cuando se llega a

$m = \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor$, de (28) se puede ver que para n par, $p_{(v-3-m)(v+m)} = p_{1n} = c_1$, y $c_{v+m} a_{v-2-m} = c_n a_2 = c_1$, verificando la solución supuesta. Para n impar $p_{(v-3-m)(v+m)} = p_{0n} = 0$ y $c_{v+m} a_{v-2-m} = c_n a_1 = 0$, verificando también la última ecuación en ambos casos. ■

Comentario 1: Para una cadena de integradores pura, la forma directa de obtener los coeficientes, de la magnitud de la ley de control, (4) o (5), es seleccionando la superficie deslizante deseada que dará la respuesta transitoria una vez alcanzada la superficie, definiendo directamente los coeficientes en la magnitud de la ley de control sumándose al esfuerzo para superar el efecto de las perturbaciones, lo que garantiza un esfuerzo reducido para alcanzar tal superficie. Alternativamente, se puede escoger una superficie aceptable buscando disminuir la magnitud de los coeficientes, tal que el esfuerzo esté dentro de los niveles deseados. Así pues, se da el compromiso clásico entre la respuesta transitoria deseada y el esfuerzo de control necesario para alcanzar la superficie. Se puede ver a partir del criterio de Routh Hurwitz que a_i puede hacerse muy pequeño para cualquier orden de integración, pero el tiempo para alcanzar la superficie se incrementa en relación inversa al valor de los coeficientes y la dinámica en la superficie se deteriora. Si se utiliza $k(\mathbf{x}, t) = (||c_1 x_2 + \dots + c_{n-1} x_n|| + ||g(\mathbf{x}, t)||) \beta / b(\mathbf{x}, t)$, se llega a una forma clásica de control por modos deslizantes, lo que da mayor o igual esfuerzo. Además, está claro que si $g(\mathbf{x}, t)$ es conocido, otra forma de establecer la ley de control es $u(\mathbf{x}, t) = -g(\mathbf{x}, t) / b(\mathbf{x}, t) - k(\mathbf{x}, t) \text{sign}(s(\mathbf{x}, t))$ con

$$k(\mathbf{x}, t) = \left(\left(\sum_{i=2}^n c_{i-1} x_i \right) \text{sign}(s(\mathbf{x}, t)) + \left| \sum_{i=2}^n c_{i-1} x_i \right| \right) / 2 b(\mathbf{x}, t). \tag{31}$$

También, ya que $h(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + \sum_{i=2}^n c_{i-1} x_i$, $a_1 = 0$, es conocido, la ley de control también se puede establecer como $u(\mathbf{x}, t) = \frac{h(\mathbf{x})}{b(\mathbf{x}, t)} - k(\mathbf{x}, t) \text{sign}(s(\mathbf{x}, t))$ con $k(\mathbf{x}, t) = \beta \Gamma(\mathbf{x}, t)$, lo que es el caso clásico de modos deslizantes que resulta con el método de control equivalente directamente. En este caso, ya que $a_1 = 0$, es conveniente incrementar el valor de β para eliminar el efecto del integrador, dando diferentes desempeños.

Comentario 2: También se puede ver que si $g(\mathbf{x}, t)$ incluye una dinámica lineal estable, $-a'_1 x_1 + \sum_{i=2}^n -a'_i x_i$, tal que $g(\mathbf{x}, t) = -a'_1 x_1 + \sum_{i=2}^n -a'_i x_i + g'(\mathbf{x}, t)$, se podría aprovechar esa dinámica estable, diseñando la superficie deslizante para que el esfuerzo de control se vea disminuido. En este caso, lo que se requiere compensar en (11) es

$$-\mathbf{A}_2 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ [-a'_1 + a'_1 & -c_1 + a'_2 & -c_2 + a'_3 & \dots & -c_{n-1} + a'_n] \end{bmatrix} \mathbf{x}, \tag{32}$$

con $0 \leq a'_1 \leq a_1^{\max}$, donde a_1^{\max} es el valor máximo de a_1 tal que $\lambda_a^n + c_{n-1} \lambda_a^{n-1} + c_{n-2} \lambda_a^{n-2} \dots + c_1 \lambda_a + a_1$ se conserve Hurwitz. Entonces, tomando como ejemplo la forma de ley de control (4), (aunque se puede extender fácilmente a las otras variantes) se puede considerar $k(\mathbf{x}, t)$ de la siguiente manera:

$$k(\mathbf{x}, t) = \frac{\alpha_3(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}, t)) \text{sign}(s(\mathbf{x}, t)) + |\alpha_3(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}, t))|}{2 b(\mathbf{x}, t)} \beta, \tag{33}$$

donde $\alpha_3(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}, t)) = (a_1^n - a'_1) x_1 + \sum_{i=2}^n (c_{i-1} - a'_i) x_i + g'(\mathbf{x}, t)$ y $\beta \geq 1$.

Ahora, si el polinomio Nyquist, $\lambda_c^{n-1} + c_{n-1} \lambda_c^{n-2} \dots + c_2 \lambda_c + c_1$, es adecuado para la dinámica en la superficie, tal que $a_1^n - a'_1 = 0$ y $c_{i-1} - a'_i = 0$, el esfuerzo de control para alcanzar la superficie se reduciría a un mínimo en este sentido con sólo $\alpha_3(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}, t)) = g'(\mathbf{x}, t)$. Así pues, alineando la superficie a la dinámica estable del sistema, la dinámica de la superficie se alcanza sin necesidad de mayor esfuerzo que el requerido para contrarrestar la perturbación, incertidumbres o términos que provocan inestabilidad.

Comentario 3: Cuando se aplica el control, con perturbaciones o términos conocidos que provocan inestabilidad, con $\beta = 1$, el sistema conmuta entre los siguientes estados: Para los casos en que $\text{sign}(s(\mathbf{x}, t))$ y $g(\mathbf{x}, t) - h(\mathbf{x})$ tienen el mismo signo, la dinámica del sistema queda

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \tag{34}$$

y el otro estado cuando los signos de $\text{sign}(s(\mathbf{x}, t))$ y $g(\mathbf{x}, t) - h(\mathbf{x})$ son diferentes por tanto no se requiere el esfuerzo de control, entonces la dinámica es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \tag{35}$$

Así pues, para alcanzar la superficie y mantenerse ahí, se aprovechan los términos que posiblemente provocan inestabilidad y las perturbaciones, cuando sean de utilidad, usando como referencia al signo de la superficie de deslizamiento para el cambio de estado.

Además, observando que A es Hurwitz con un polo en cero, $a_1 = 0$, A se puede conservar Hurwitz, si se incrementa a_1 hasta un cierto valor menor o igual a a_1^{\max} , que puede revisarse con el criterio de Routh-Hurwitz. Esto puede aprovecharse para mejorar el castañeteo en el alcance de la superficie y la magnitud del control, moviendo los puntos de conmutación. Así, se puede revisar variando a_1 para posiblemente encontrar un mejor valor donde el castañeteo se disminuya en el alcance de la superficie y la dinámica del sistema sea aceptable. Al mover los puntos de conmutación, el alcance final de la superficie se logra con uno o más cruces por cero de la superficie, similar a modo deslizante de orden superior.

Comentario 4: Considerando la prueba de la proposición y los comentarios anteriores, se puede proponer el siguiente procedimiento para el diseño de modos deslizantes de primer orden, considerando esfuerzo reducido en el alcance de la superficie (sin pérdida de generalidad, se considera el punto de equilibrio en cero). Por simplicidad, se proponen dos casos. El primero supone que (1) y (2) es propiamente una cadena de integradores con perturbaciones y el segundo se extiende a sistemas en forma canónica controlable con alguna parte lineal, posiblemente estable, con perturbaciones.

Caso I. Si el sistema es una cadena de integradores perturbada de orden n , donde las perturbaciones existentes, $g(\mathbf{x}, t)$, provocan inestabilidad o problemas para el alcance del punto de equilibrio, se selecciona el polinomio característico $c_1 + c_2 \lambda \dots + c_{n-1} \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1}$ que dé la dinámica

deseada cuando se alcance la superficie, expresándola de la siguiente forma: $s(\mathbf{x},t)=b(\mathbf{x},t)(c_1x_1+\dots+c_{n-1}x_{n-1}+x_n)$. Ha de tenerse en cuenta que cuanto más rápida la dinámica deseada, mayor será el esfuerzo requerido de control.

La ley de control se establece como $u(\mathbf{x},t)=-k(\mathbf{x},t)\text{sign}(s(\mathbf{x},t))$ con $k(\mathbf{x},t)$ tal como se expresa en (4), (5) o considerar alguna de las variantes expresadas en el Comentario 1. Además se puede variar a_1 , tal como se menciona en el Comentario 3, para posiblemente reducir castañeteo. En los ejemplos de las secciones 3.1 y 3.2, se analizan algunas de las implicaciones de cada variante.

Caso II. Para el caso en que $g(\mathbf{x},t)$ incluya una parte lineal con al menos algunos coeficientes negativos, tal que

$$\dot{x}_1 = x_2$$

.

.

.

$$\dot{x}_n = -a'_1x_1 - a'_2x_2 \dots - a'_nx_n + g'(\mathbf{x},t) + b(\mathbf{x},t)u(\mathbf{x},t),$$

con $a'_i \geq 0$, donde $i = 1, \dots, n$ y $g'(\mathbf{x},t)$, incluye el resto de las perturbaciones en $g(\mathbf{x},t)$.

Se revisa el polinomio $a'_1 + a'_2\lambda + \dots + a'_n\lambda^{n-1} + \lambda^n$ con el criterio de Routh-Hurwitz y se selecciona el polinomio Hurwitz más similar, denotando al polinomio seleccionado como $a_1^{\max} + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \dots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$, (siendo a_1^{\max} el valor máximo para conservar este polinomio Hurwitz), cuidando que la dinámica de la superficie con polinomio característico $c_1 + c_2\lambda + \dots + c_{n-1}\lambda^{n-2} + \lambda^{n-1}$, sea aceptable de acuerdo a lo deseado. La superficie deslizante se establece como $s(\mathbf{x},t)=b(\mathbf{x},t)(c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_{n-1}x_{n-1}+x_n)$. De acuerdo con el Comentario 2, la ley de control se puede establecer como $u(\mathbf{x},t)=-k(\mathbf{x},t)\text{sign}(s(\mathbf{x},t))$, con $k(\mathbf{x},t)$ definida por (33) (o variantes) y usando $a_1^n = a_1^{\max}$. En caso que $a_1^{\max} - a'_1$ sea positivo, el coeficiente de x_1 en (33) se hace cero, porque no se requiere ese esfuerzo adicional. Este método muestra la importancia de elegir la superficie de acuerdo a la dinámica del sistema, pudiendo reducir significativamente el esfuerzo de control. En la subsección 3.3 se presenta la aplicación de este método y se analizan algunas variantes e implicaciones.

3. Simulaciones numéricas

En esta sección, se presentan ejemplos para validar el procedimiento propuesto en cuatro subsecciones. En los ejemplos se realizan algunas comparaciones y se analizan aspectos de los diferentes casos considerados en la proposición 1 y los comentarios, con diferentes perturbaciones y conexiones de entrada.

3.1 Desempeño de diferentes variantes de leyes de control en modos deslizantes de primer orden

El sistema considerado es tomado de (Hong et al., 2005),

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = g(\mathbf{x},t) + u(\mathbf{x}). \quad (36)$$

Con $g(\mathbf{x},t)=x_1x_2+x_3 + \text{sen}(t)$, y las condiciones iniciales [1 2 0.5]. Suponiendo que sólo se conocen las cotas de $\text{sen}(t)$. Utilizando el método del Caso I, se observa que $b = 1$ y se selecciona como superficie deseada a $s(\mathbf{x})=4x_1+4x_2+x_3$, y $\beta=1$. En la Figura 1, se muestran la dinámica de las señales de

control y de la superficie para diferentes variantes de establecer la ley de control de modos deslizantes de primer orden, mencionadas en la sección anterior. La dinámica de la primera variante de ley de control, u , denotada como Esfzred1, así como la dinámica de la superficie, s , se presentan en la Figura 1 a). Se utiliza una combinación de (4) y (5) ya que una parte de $g(\mathbf{x},t)$ es conocida, $x_1x_2+x_3$, y otra parte sólo su cota es conocida, $\Gamma=1$. La parte conocida se aplica sumándola a $4x_2+4x_3$ como en (4) y la desconocida se suma como en (5). Así, la ley de control resultante es $u(\mathbf{x}) = -(((4x_2+5x_3+x_1x_2)\text{sign}(s(\mathbf{x})) + |4x_2+5x_3+x_1x_2|)/2+1)\text{sign}(s(\mathbf{x}))$. El alcance de la superficie se hace con la menor magnitud de esfuerzo, ya que se aprovecha la dinámica inestable del sistema, lo que se observa en el hecho de que la señal de control inicia en -13.5 y llega a -1 manteniéndose constante por un tiempo antes de que la superficie se alcance. Una vez alcanzada la superficie, hay un pico en la señal de control hasta una amplitud un poco menor que 30, debido a que aunque $s(\mathbf{x})=0$, el valor de las variables de estado se mantiene alto y las perturbaciones dependen del estado.

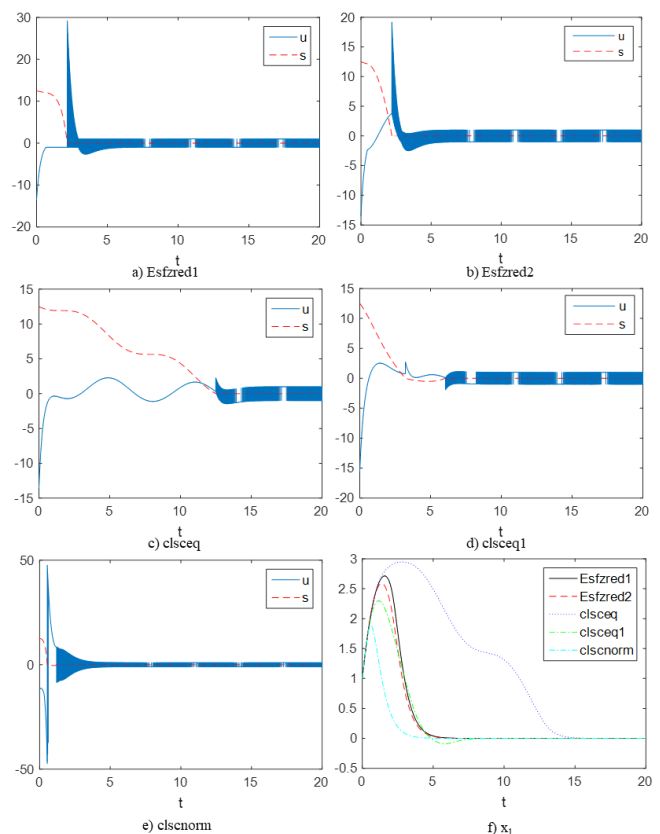


Figura 1: Integrador de tercer orden perturbado (36) con ley de control:

a) $u(\mathbf{x}) = -((4x_2+5x_3+x_1x_2)\text{sign}(s(\mathbf{x})) + |4x_2+5x_3+x_1x_2|/2+1)\text{sign}(s(\mathbf{x}))$

b) $u(\mathbf{x}) = -x_1x_2 - x_3 - (((4x_2+4x_3)\text{sign}(s(\mathbf{x})) + |4x_2+4x_3|)/2+1)\text{sign}(s(\mathbf{x}))$

c) $u(\mathbf{x}) = -x_1x_2 - 4x_2 - 5x_3 - \text{sign}(s(\mathbf{x}))$ d) $u(\mathbf{x}) = -x_1x_2 - 4x_2 - 5x_3 - 2x_1 - \text{sign}(s(\mathbf{x}))$ e) $u(\mathbf{x}) = -(|4x_2+4x_3| + |x_1x_2+x_3+1|)\text{sign}(s(\mathbf{x}))$.

En f) comportamiento de x_1 con las diferentes leyes de control.

Ahora, dejando la perturbación conocida fuera de la magnitud del signo, similar a la expresión (31), se tiene la ley de control: $u(\mathbf{x}) = -x_1x_2 - x_3 - (((4x_2+4x_3)\text{sign}(s(\mathbf{x})) + |4x_2+4x_3|)/2+1)\text{sign}(s(\mathbf{x}))$, que se muestra en la Figura 1 b) denominada como Esfzred2, ya que todavía se considera la posibilidad de cancelar parte del esfuerzo de control en caso de no ser necesario. La magnitud del esfuerzo

para alcanzar la superficie va de -13.5 a 4 . Es mayor porque $-x_1x_2 - x_3$ está siempre presente sin importar $\text{sign}(s(\mathbf{x}))$, pero una vez alcanzada la superficie, el pico en la señal de control es menor.

Considerando todo el esfuerzo de control fuera de la magnitud del signo, a excepción de la perturbación con sólo la cota conocida, se llega a la ley de control $u(\mathbf{x}) = -x_1x_2 - 4x_2 - 5x_3 - \text{sign}(s(\mathbf{x}))$, que es la variante que resulta en el clásico obtenido directamente por medio del método de control equivalente, tal como se menciona al final del Comentario 1. El esfuerzo se muestra en la Figura 1 c), mencionada como *clsceq*. La magnitud del esfuerzo para alcanzar la superficie va de -13.5 a 2.5 . Es mayor que el requerido para *Esfred1*, pero un poco menor a la obtenida con *Esfred2*, aunque el tiempo para alcanzar la superficie es mucho mayor. Una vez alcanzada la superficie, se reduce significativamente el pico en la señal de control. La dinámica de x_1 , se deteriora significativamente, tal como se muestra en la Figura 1 f).

En la Figura 1 d), *clsceq1*, la magnitud del esfuerzo para alcanzar la superficie va de -15.5 a 3 . Es mayor que *clsceq*, porque de acuerdo al Comentario 3, se incluye $-2x_1$, manteniendo **A** Hurwitz para no tener un cero como valor característico en **A** y mejorar la dinámica de x_1 tal que $u(\mathbf{x}) = -x_1x_2 - 4x_2 - 5x_3 - 2x_1 - \text{sign}(s(\mathbf{x}))$. Aquí se aumenta un poco el esfuerzo para alcanzar la superficie, pero se reduce el tiempo para alcanzarla, en comparación con *clsceq*. Asimismo, la amplitud desde el máximo esfuerzo negativo hasta el máximo esfuerzo positivo para alcanzar la superficie con *clsceq1* es mayor que el requerido por *Esfred2*. Se observa que la superficie se alcanza en el segundo cruce por cero, como se menciona en el Comentario 3.

Del Comentario 1, utilizando la norma en la magnitud de control, $k(\mathbf{x},t) = (\|c_1x_2 + \dots + c_{n-1}x_n\| + \|g(\mathbf{x},t)\|)\beta/b(\mathbf{x},t)$, la ley de control queda así: $u(\mathbf{x}) = -(\|4x_2 + 4x_3\| + \|x_1x_2 + x_3 + 1\|)\text{sign}(s(\mathbf{x}))$. En la Figura 1 e), *clscnorm*, se muestra el desempeño del control y la superficie. La magnitud del esfuerzo en el alcance de la superficie, es mayor que cualquiera de los anteriores, lo cual es de esperarse debido a que se utiliza la norma en el esfuerzo de control. El alcance de la superficie se obtiene con el menor tiempo, como se esperaría ya que el esfuerzo es mayor. El comportamiento de x_1 para cada variante se muestra en la Figura 1 f). Su forma es muy similar para todos los casos, excepto para *clsceq* debido al mucho mayor tiempo en alcanzar la superficie. La que se establece más rápido es utilizando *clscnorm*, como se esperaría debido al esfuerzo mayor. Para *clsceq1*, se observa una oscilación antes de alcanzar la superficie ya que al agregar $-2x_1$, en el esfuerzo de control, el polinomio característico de **A** es $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 2$ con dos raíces complejas en vez de $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda$ sin raíces complejas.

3.2 Comparación con otros enfoques de modos deslizantes de orden superior

Se presentan dos ejemplos y su comparación en cuanto a esfuerzo y desempeño con respecto al enfoque presentado aquí.

3.2.1 Ejemplo con modos deslizantes terminales

La primera comparación se hace utilizando (36), con $g(x,t) = x_1x_2 + x_3$. Aplicando la ley de control propuesta en (Hong et al., 2005),

$$u(\mathbf{x}) = -x_1x_2 - x_3 - 3(1 + |x_2| + |x_3|)\text{sign}(s(\mathbf{x})), \quad (37)$$

donde $s(\mathbf{x}) = x_1^{1/5} + x_2^{1/3} + x_3$. El comportamiento del estado se muestra en la Figura 2(a) y el esfuerzo originado por la ley de control en la Figura 2(b).

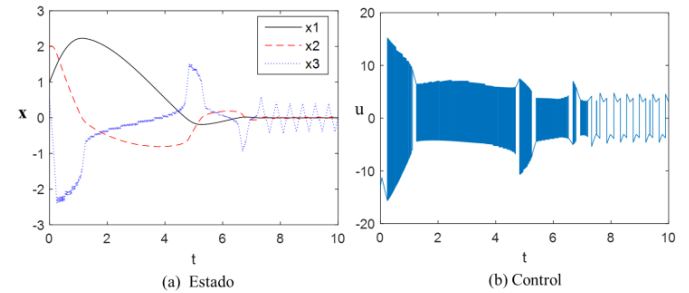


Figura 2: Integrador de tercer orden perturbado (36) utilizando el enfoque de (Hong et al., 2005): (a) Comportamiento del estado, (b) Comportamiento de la señal de control.

Con el procedimiento propuesto en este trabajo, tratando de obtener un comportamiento similar para x_1 , se escogió $s(\mathbf{x}) = 4x_1 + 4x_2 + x_3$, $\beta = 1$. Usando el procedimiento para el Caso I y para condiciones similares a (37), se deja la perturbación fuera de la magnitud del signo. Así pues, se escoge:

$$u(\mathbf{x}) = -x_1x_2 - x_3 - k(\mathbf{x})\text{sign}(s(\mathbf{x})) \quad (38)$$

$$\text{con } k(\mathbf{x}) = \frac{(4x_2 + 4x_3)\text{sign}(s(\mathbf{x})) + |4x_2 + 4x_3|}{2}$$

Los resultados obtenidos con (38) son mostrados en la Figura 3. En la Figura 3(a) se muestra el comportamiento de la dinámica del estado. El esfuerzo de control, así como la dinámica de la superficie de deslizamiento se muestran en la Figura 3(b). x_1 y x_2 tienen un comportamiento similar con ambos controladores. Por otro lado, usando el controlador de Hong et al. (2005), x_2 y x_3 tienen castañeteo una vez que x_1 se establece. En cuanto al esfuerzo de control, es menor con el método propuesto en general. Sólo por un tiempo muy pequeño, la magnitud máxima del esfuerzo es similar con ambos controladores. La señal de control con el método propuesto, en este caso, no presenta castañeteo.

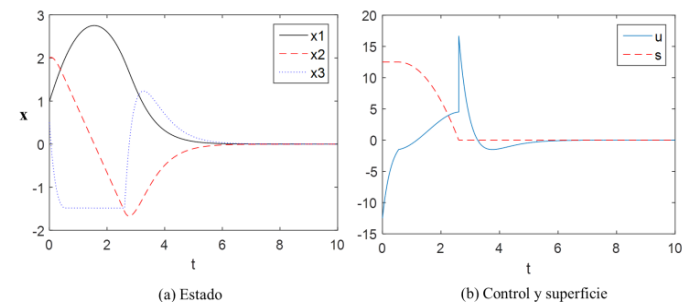


Figura 3: Integrador de tercer orden perturbado (36) utilizando el enfoque propuesto con (38): (a) Comportamiento del estado, (b) Comportamiento de la señal de control y superficie de deslizamiento.

Si la perturbación se incluye en $k(\mathbf{x})$, tal como en (4), similar a la ley de control utilizada en Esfzred1 tal que:

$$u(\mathbf{x}) = -k(\mathbf{x})\text{sign}(s(\mathbf{x})) \tag{39}$$

$$\text{con } k(\mathbf{x}) = \frac{(4x_2 + 5x_3 + x_1x_2)\text{sign}(s(\mathbf{x})) + |4x_2 + 5x_3 + x_1x_2|}{2},$$

el comportamiento del estado se muestra en la Figura 4(a) y el control tanto como la superficie se pueden ver en la Figura 4(b).

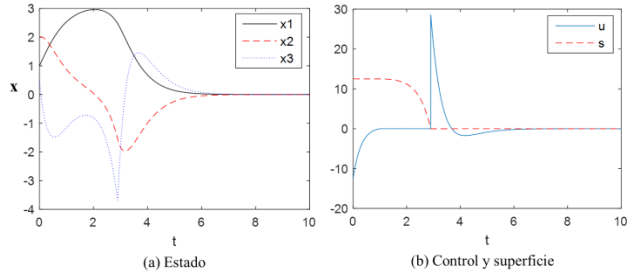


Figura 4: Sistema de tercer orden perturbado (36) utilizando el enfoque propuesto con (39): (a) Comportamiento del estado, (b) Comportamiento de la señal de control y superficie de deslizamiento.

En este ejemplo se puede observar como la señal de control se hace cero durante un intervalo de tiempo, mientras la dinámica de la superficie se aproxima a cero. Así pues, el esfuerzo de control para llegar a la superficie es menor, aunque una vez en la superficie el esfuerzo se incrementa debido principalmente al aumento en x_3 . Si se integra la magnitud del esfuerzo de control observado para cada ley de control, de las Figuras 3 y 4, el resultado es el mismo en este caso.

3.2.2 Ejemplo con orden superior super-twisting

El sistema con una cadena de integradores de cuarto orden, analizado aquí, tiene la siguiente estructura (Laghrouche et al., 2017):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= g(t) + b(t)u(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \tag{40}$$

Con $g(t) = \text{sen}(t)$, $b(t) = 3 + 0,5\text{sen}(0,5t)$. En este caso se supone que sólo la cota de $g(t)$ es conocida, y las condiciones iniciales son $[-5 \ 2 \ 4 \ 4]$. La ley de control aplicada en (Laghrouche et al., 2017) está diseñada utilizando un algoritmo anidado basado en (Hong, 2002).

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\eta_4 + \psi}{\rho}, \tag{41}$$

con

$$\begin{aligned} \rho &= \min(b(\mathbf{x}, t)) \\ \dot{\psi} &= -(\gamma_3 \text{sig}(x_4)^{\gamma_3} - \text{sig}(\eta_3)^{\gamma_3}) / V_0^{\gamma_3 + 1}, \\ \text{siendo } \text{sig}(x)^{\gamma} &= |x|^{\gamma} \text{sign}(x) \\ \text{y } \eta_{i+1} &= -\lambda_{i+1} \text{sig}(\text{sig}(x_{i+1})^{\gamma_i} - \text{sig}(\eta_i)^{\gamma_i})^{\frac{\alpha_{i+1}}{\gamma_i}} \\ \eta_0 &= 0, (\gamma_i + 1)p_{i+1} = \gamma_0 + 1, p_i = p + (i - 1)k, k = \frac{-1}{r+1}, \\ r &= 4 \text{ (orden del integrador),} \\ V_0 &= \sum_{i=1}^r Z_i, \\ Z_i &= \frac{1}{\gamma_{i+1} + 1} (|x_j|^{\gamma_{i+1} + 1} + \gamma_{i+1} + |\eta_{j-1}|^{\gamma_{i+1} + 1}) - x_j \text{sig}(\eta_{j-1})^{\gamma_{i-1}} \\ p &= 1, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 8. \end{aligned}$$

Este algoritmo tiene como condición que la función $g(t)$ así como su derivada estén acotadas. Con las condiciones iniciales $[-5 \ 2 \ 4 \ 4]$ y la ley de control (41), el comportamiento de la dinámica del estado se muestra en la Figura 5(a) y el esfuerzo de control en la Figura 5(b).

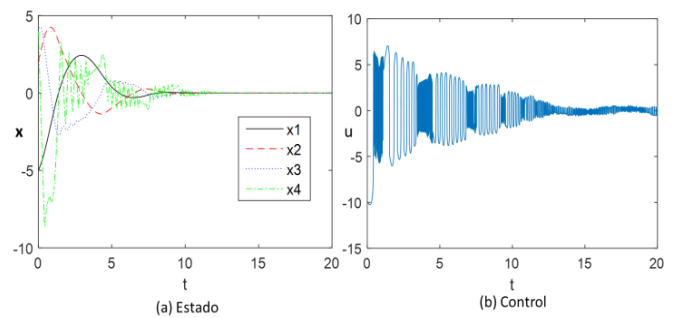


Figura 5: Integrador de cuarto orden (40) usando el método en (Laghrouche et al., 2017), con la ley de control (41): (a) Comportamiento del estado (b) Comportamiento de la señal de control.

Usando el procedimiento para el Caso I y con sólo la cota de la perturbación conocida, se utiliza la variante (5) para la ley de control. También se intenta obtener un tiempo de establecimiento similar para x_1 . Se selecciona

$$u(\mathbf{x}, t) = -k(\mathbf{x}, t) \text{sign}(s(\mathbf{x}, t)). \tag{42}$$

$$\text{con } s(\mathbf{x}, t) = b(t)(2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4),$$

$$k(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{(2x_2 + 5x_3 + 4x_4) \text{sign}(s(\mathbf{x})) |2x_2 + 5x_3 + 4x_4|}{2} + 1 \right) \times \frac{1}{3 + 0,5 \text{sen}(0,5t)}$$

$$\text{ya que } \beta = 1 \text{ y } \Gamma(t) = \frac{1}{3 + 0,5 \text{sen}(0,5t)}$$

El comportamiento del estado puede verse en la Figura 6(a) y la señal de control así como la superficie de deslizamiento se muestran en la Figura 6(b).

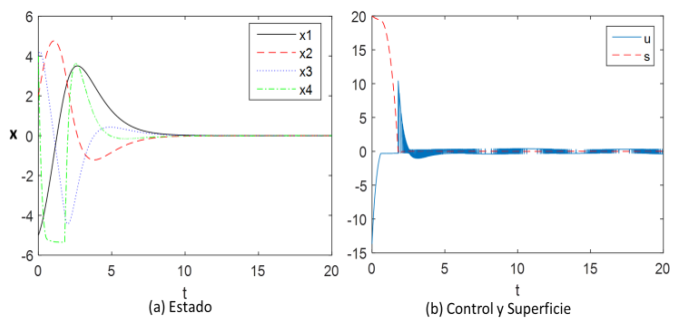


Figura 6: Integrador de cuarto orden perturbado (40) utilizando el enfoque propuesto con la ley de control (42): (a) Dinámica de estado (b) Comportamiento de la señal de control y superficie de deslizamiento.

La dinámica del estado es similar con las dos leyes de control, excepto para x_4 , que exhibe castañeteo cuando se utiliza (41). La señal de control tiene mayor amplitud máxima para el enfoque propuesto, pero la vibración se establece en su estado estacionario en un tiempo significativamente menor. Una vez que se establece el estado, ambas señales de control tienen una magnitud de castañeteo similar.

Al modificar la señal de control, agregando en $k(\mathbf{x}, t)$, $0,6x_1$, para intentar mejorar el castañeteo, tal como se menciona en el Comentario 3, tal que

$$k(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\alpha_3(\mathbf{x}) \text{sign}(s(\mathbf{x})) + |\alpha_3(\mathbf{x})|}{2} + 1 \right) \frac{1}{3 + 0,5 \text{sen}(0,5t)} \quad (43)$$

con $\alpha_3(\mathbf{x}) = 0,6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4$, la dinámica del estado, el esfuerzo de control y la dinámica de la superficie de deslizamiento se modifican tal como se muestra en la Figura 7.

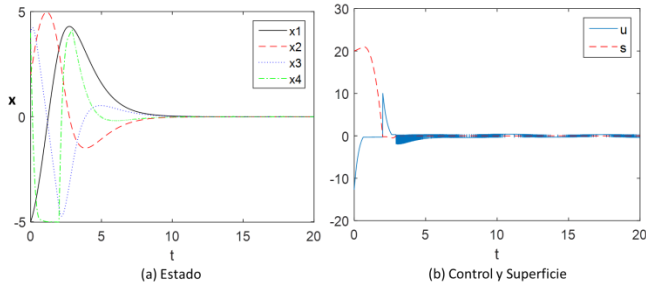


Figura 7: Integrador de cuarto orden perturbado (40) aplicando la ley de control (42), con esfuerzo (43): (a) Dinámica de estado (b) Comportamiento de la señal de control y superficie de deslizamiento.

Se puede apreciar en la Figura 7 (b), que la primera vez que la superficie de deslizamiento toca el cero, lo cruza y hasta la segunda vez que lo toca ya se establece. Se puede ver también la significativa reducción de castañeteo. En el estado, x_1 tiene un sobre impulso mayor y con una pequeña variación en el tiempo de establecimiento.

Ahora, si se desea un menor esfuerzo de control, hay que llegar a un compromiso en la respuesta de la dinámica del estado de acuerdo a lo mencionado en el Comentario 1. Con el método propuesto, se elige en cambio, $s(\mathbf{x}) = b(t)(1,25x_1 + 2,25x_2 + 2x_3 + x_4)$, con los valores propios $[-1, -0,5 + i, -0,5 - i]$ en vez de $[-1 -1 -2]$. Los coeficientes del polinomio son menores buscando una menor amplitud del esfuerzo en el control cuidando no afectar demasiado el desempeño dinámico del sistema. Además, se agrega $0,3x_1$ en $k(\mathbf{x}, t)$, para reducir el castañeteo, tal como se menciona en el procedimiento de acuerdo al Comentario 3, $k(\mathbf{x}, t) =$

$$\left(\frac{\alpha_4(\mathbf{x}) \text{sign}(s(\mathbf{x})) + |\alpha_4(\mathbf{x})|}{2} + 1 \right) \frac{1}{3 + 0,5 \text{sen}(0,5t)} \quad (44)$$

con $\alpha_4(\mathbf{x}) = 0,3x_1 + 1,25x_2 + 2,25x_3 + 2x_4$.

En la Figura 8(a), se ve que x_1 se establece en mayor tiempo debido a la dinámica seleccionada y también tiene mayor amplitud máxima. Por otro lado, la señal de control tiene una amplitud mucho menor y la misma magnitud de castañeteo en estado estacionario. La dinámica de la superficie también tarda más en establecerse en cero.

3.3 Ejemplo con forma canónica controlable y parte de dinámica estable

En esta subsección se aplica el método del Caso II del procedimiento propuesto. Para aprovechar los términos que ayudan a la estabilidad, utilizando lo mencionado en el Comentario 2, se puede utilizar como base (33) para el esfuerzo de control. El siguiente ejemplo ilustra esto. Considerando (40) con la perturbación

$$g(\mathbf{x}, t) = -x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 + g'(t), \quad (45)$$

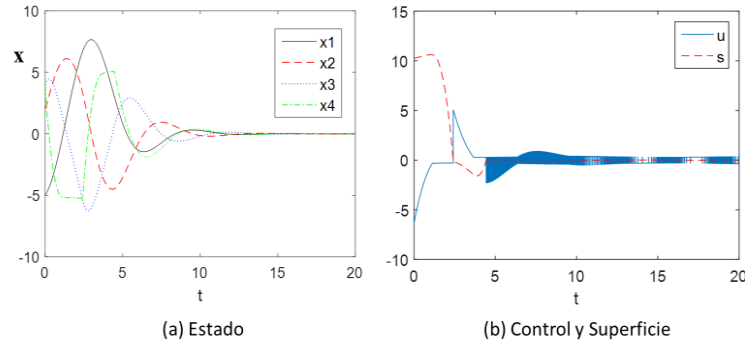


Figura 8: Integrador de cuarto orden perturbado (40) aplicando la ley de control (42) con esfuerzo de control (44): (a) Dinámica de estado (b) Comportamiento de la señal de control y superficie de deslizamiento.

es claro que el origen de (40) sería estable, si $g'(t) = 0$, sin necesidad de control, con valores propios $-1,866 \pm 0,5i, -0,134 \pm 0,5i$. Se considera $g'(t) = \text{sen}(t)$, con sólo la cota conocida. Siguiendo el procedimiento, el polinomio Hurwitz, $a_1^{\max} + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + \lambda^4$, más similar a $1 + 2\lambda + 5\lambda^2 + 4\lambda^3 + \lambda^4$, es él mismo con $a_1^{\max} = 2,25$, así pues, éste resulta ser $2,25 + 2\lambda + 5\lambda^2 + 4\lambda^3 + \lambda^4$. Entonces, de acuerdo al procedimiento, el polinomio característico resultante para la superficie, $c_1 + c_2\lambda + c_3\lambda^2 + \lambda^3$, es $2 + 5\lambda + 4\lambda^2 + \lambda^3$, (valores propios $-1, -1, -2$). Suponiéndolo aceptable, se selecciona como superficie deslizante a $s(\mathbf{x}, t) = b(t)(2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4)$. (En caso de no ser aceptable, se elegiría un polinomio aceptable para la superficie lo más similar posible a éste y con sus coeficientes se define $a_1^{\max} + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + \lambda^4$, para establecer el esfuerzo de control, (33)). Siguiendo con la superficie seleccionada, y ya que $a_1^{\max} - 1$ es positivo, el coeficiente de x_1 se puede hacer cero en la magnitud de control, pero si se considera $-x_1$, como perturbación no deseada, para tener $a_1 = 0$ en \mathbf{A} , tal que la superficie se alcance en el primer toque con cero, habrá que dejar lo que hay en x_1 como parte de perturbación conocida e incluirla en la magnitud del esfuerzo. Entonces, se tendrá $g'(t) = -x_1 + \text{sen}(t)$, con sólo la cota conocida para $\text{sen}(t)$. Así pues, se separa la perturbación conocida de la desconocida y siguiendo una variante de lo establecido en (33), con una parte de la perturbación con sólo la cota de $g'(t)$ conocida, se escoge

$$k(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{-x_1 \text{sign}(s(\mathbf{x})) + |-x_1|}{2} + 1 \right) \frac{1}{3 + 0,5 \text{sen}(0,5t)} \quad (46)$$

En la Figura 9, se puede observar el comportamiento del estado, de la señal de control y de la dinámica de la superficie.

Comparando con los casos ilustrados en las Figuras 6 y 7, el esfuerzo de control con (46) es mucho menor, la superficie se alcanza en el primer toque con cero, ya que, igualmente, por la compensación se tiene $a_1 = 0$ en \mathbf{A} . La superficie se alcanza en más del doble de tiempo, pero el estado se establece en un tiempo sólo aproximadamente 20% mayor.

Ahora, considerando que $a_1^{\max} - 1 > 0$, se puede hacer cero el coeficiente de x_1 en $k(\mathbf{x}, t)$, ya que no hay necesidad de compensar por el coeficiente de x_1 debido a que el polinomio

característico del sistema lineal original es estable, dejando $-a_1 = -1$ en **A**. Así pues,

$$k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{3 + 0,5 \sin(0,5t)} \quad (47)$$

Esto hace que el esfuerzo de control sea el mínimo posible, obteniéndose el comportamiento mostrado en la Figura 10. La superficie se alcanza en más de un cruce por cero, ya que la dinámica sin compensar por $-x_1$, tiene $a_1 > 0$ en **A**, de acuerdo a la observación en el Comentario 3.

Así pues, para un sistema que tenga una dinámica estable, si se establece la superficie de acuerdo a esa dinámica, el esfuerzo requerido será sólo el necesario para eliminar el efecto de las perturbaciones.

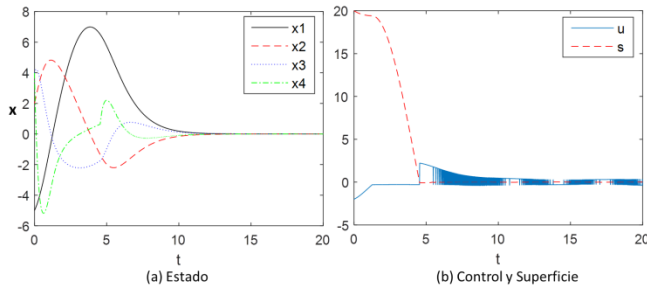


Figura 9: Integrador de cuarto orden perturbado con dinámica estable (40) aplicando la ley de control (42) con esfuerzo (46): (a) Dinámica de estado (b) Comportamiento de la señal de control y superficie de deslizamiento.

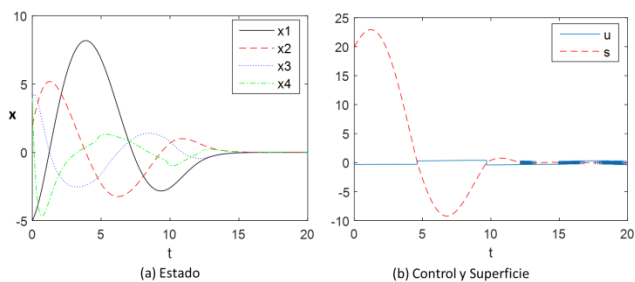


Figura 10: Integrador de cuarto orden (40) perturbado con dinámica estable (45) aplicando la ley de control (42) con (47): (a) Dinámica de estado (b) Comportamiento de la señal de control y superficie de deslizamiento.

3.4 Sistema de décimo orden con perturbación desconocida

El ejemplo mostrado aquí es sólo para validar el procedimiento en un orden alto de integración. El sistema de décimo orden estudiado se amplía a partir de (40).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_9 &= x_{10} \\ \dot{x}_{10} &= g(t) + b(t)u(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (48)$$

Aquí también, $g(t) = \sin(t)$, $b(t) = 3 + 0,5 \sin(0,5t)$ y se supone que sólo la cota de $g(t)$ es conocida. Las condiciones iniciales, para simplicidad de presentación, son $[-5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Tratando de tener tiempos de establecimiento similares al sistema de cuarto orden estudiado, la superficie de deslizamiento seleccionada es

$$s(\mathbf{x}, t) = b(t)(x_{10} + 5,8x_9 + 17,39x_8 + 34,272x_7 + 47,9755x_6 + 49,2245x_5 + 36,8811x_4 + 19,4843x_3 + 6,6456x_2 + 1,1125x_1). \quad (49)$$

Los coeficientes fueron truncados del polinomio obtenido con los valores propios $[-1, -1, -0,8, -0,5-i, -0,5+i, -0,5-i, -0,5+i, -0,5-0,8i, -0,5+0,8i,]$. Y por tanto, el esfuerzo de control es

$$k(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\alpha_5(\mathbf{x}) \text{sign}(s(\mathbf{x})) + |\alpha_5(\mathbf{x})|}{2} + 1 \right) \frac{1}{3 + 0,5 \sin(0,5t)} \quad (50)$$

$$\text{con } \alpha_5(\mathbf{x}) = 1,1125x_2 + 6,6456x_3 + 19,4843x_4 + 36,8811x_5 + 49,2245x_6 + 47,9755x_7 + 34,272x_8 + 17,39x_9 + 5,8x_{10}.$$

En la Figura 11, se muestran los comportamientos del estado, la señal de control y la dinámica de la superficie de deslizamiento.

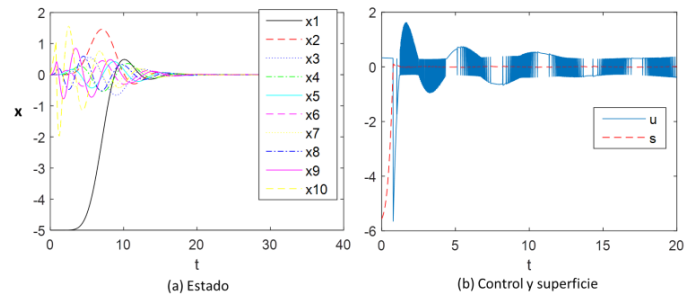


Figura 11: Integrador de décimo orden (48) con perturbación (45) aplicando la ley de control (42) con (49) y (50): (a) Dinámica de estado (b) Comportamiento de la señal de control y superficie de deslizamiento.

Se puede ver que x_7 se establece alrededor del tiempo esperado, considerando los valores propios utilizados. La amplitud máxima del control está en torno al orden de magnitud de las condiciones iniciales y los coeficientes del polinomio, como era de esperar. El castañeteo, una vez establecido el estado, es muy similar al del sistema con integrador de cuarto orden, ya que tiene la misma perturbación y la misma magnitud de acción para contrarrestarla.

4. Conclusiones

Se presentó un procedimiento general para obtener una ley de control en modo deslizante de primer orden con esfuerzo mínimo, para alcanzar la superficie diseñada considerando un sistema en forma de cadena de integradores pura o perturbada, incluyendo sistemas en la forma canónica controlable. La elección de una superficie asintóticamente estable garantiza también el alcance en tiempo finito a dicha superficie cuando se aplican las expresiones propuestas para obtener la magnitud de control, que depende del estado y de la perturbación. Las condiciones se dan para una clase de sistemas no lineales variables en el tiempo. Ya que es modo deslizante de primer orden, no se impone ningún límite a las derivadas de la perturbación.

Además, se muestra que se pueden elegir los coeficientes para la superficie de deslizamiento con el fin de reducir la magnitud de control, teniendo en cuenta una superficie de deslizamiento estable y una respuesta transitoria aceptable. Como es de esperar, a medida que se elige un esfuerzo de control menor, reduciendo los coeficientes, el comportamiento transitorio se deteriora. Por otro lado, se

observa claramente que si al menos parte de la dinámica lineal natural del sistema es aceptable para la superficie, se puede diseñar la superficie alineándola a esta dinámica, reduciendo el esfuerzo de control. En caso de que la superficie se alinee completamente con la dinámica del sistema, el esfuerzo es mínimo, requiriéndose sólo el esfuerzo para contrarrestar las perturbaciones. Por tanto, una buena práctica para diseñar la superficie deslizante podría ser revisar la dinámica natural del sistema y seleccionar la superficie aceptable que más se alinee a tal dinámica, para no aplicar más esfuerzo del necesario con la ley de control de modos deslizantes de primer orden seleccionada. El tiempo de muestreo para su aplicación práctica en cada caso se puede estimar por prueba y error, considerando frecuencias máximas en el sistema y desempeño aceptable. Su análisis teórico es parte de trabajo futuro.

Referencias

- Acosta, P., 2014. Natural surface design for sliding mode control with multiple discontinuous inputs. *Journal of the Franklin Institute* 351 (8), 4198–4210.
- Adelipour, S., Ahi, B., Haeri, M., 2020. Dual-mode global stabilization of highorder saturated integrator chains: Lmi-based mpc combined with a nested saturated feedback. *Nonlinear Dynamics* 102 (1), 211–222.
- Amini, S., Ahi, B., Haeri, M., 2019. Control of high order integrator chain systems subjected to disturbance and saturated control: A new adaptive scheme. *Automatica* 100, 108–113.
- Bartolini, G., Pydynowski, P., 1996. An improved, chattering free, vsc scheme for uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 41 (8), 1220–1226.
- Chalanga, A., Kamal, S., Bandyopadhyay, B., 2014. A new algorithm for continuous sliding mode control with implementation to industrial emulator setup. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 20 (5), 2194–2204.
- Chitour, Y., Ushirobira, R., Bouhemou, H., 2020. Stabilization for a perturbed chain of integrators in prescribed time. *SIAM Journal on Control and Optimization* 58 (2), 1022–1048.
- Fridman, L., Moreno, J. A., Bandyopadhyay, B., Kamal, S., Chalanga, A., 2015. Continuous nested algorithms: The fifth generation of sliding mode controllers. En: *Recent advances in sliding modes: From control to intelligent mechatronics*. Springer, pp. 5–35.
- Hong, Y., 2002. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems. *Systems & control letters* 46 (4), 231–236.
- Hong, Y., Yang, G., Cheng, D., Spurgeon, S., 2005. A new approach to terminal sliding mode control design. *Asian Journal of Control* 7 (2), 177–181.
- Hu, J., Zhang, H., Liu, H., Yu, X., 2021. A survey on sliding mode control for networked control systems. *International Journal of Systems Science* 52 (6), 1129–1147.
- Kamal, S., Bandyopadhyay, B., 2012. Arbitrary higher order sliding mode control based on control lyapunov approach. En: *2012 12th International Workshop on Variable Structure Systems*. IEEE, pp. 446–451.
- Laghrouche, S., Harmouche, M., Chitour, Y., 2017. Higher order super-twisting for perturbed chains of integrators. *IEEE Transactions on Automatic Control* 62 (7), 3588–3593.
- Levant, A., 1993. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control* 58 (6), 1247–1263.
- Levant, A., 2001. Universal single-input-single-output (siso) sliding-mode controllers with finite-time convergence. *IEEE transactions on Automatic Control* 46 (9), 1447–1451.
- Liu, X., Han, Y., 2014. Finite time control for mimo nonlinear system based on higher-order sliding mode. *ISA transactions* 53 (6), 1838–1846.
- Plestan, F., Glumineau, A., Laghrouche, S., 2008. A new algorithm for highorder sliding mode control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal* 18 (4-5), 441–453.
- Riaz, U., Tayyeb, M., Amin, A. A., 2021. A review of sliding mode control with the perspective of utilization in fault tolerant control. *Recent Advances in Electrical & Electronic Engineering (Formerly Recent Patents on Electrical & Electronic Engineering)* 14 (3), 312–324.
- Ullah, N., Ali, M. A., Ibeas, A., Herrera, J., 2019. Control deslizante fraccionario de la trayectoria y orientación de un quadrotor con cargas suspendidas desconocidas. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 16 (3), 321–331.
- Utkin, V., 2015. Discussion aspects of high-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control* 61 (3), 829–833.
- Utkin, V., Guldner, J., Shi, J., 2017. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. CRC press.
- Wang, X., Wang, G., Li, S., 2020. Distributed finite-time optimization for integrator chain multiagent systems with disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control* 65 (12), 5296–5311.
- Yu, X., Efe, O. M. (Eds.), 2015. *Recent advances in sliding modes: from control to intelligent mechatronics*. Vol. 24. Springer.
- Zimenko, K., Polyakov, A., Efimo, D., Perruquetti, W., 2018. Finite-time and fixed-time stabilization for integrator chain of arbitrary order. En: *2018 European Control Conference (ECC)*. IEEE, pp. 1631–1635.