



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



## **ANEJO 2: DISEÑO CONCEPTUAL. ESTÁTICA GRÁFICA**

Estructura singular con madera de derribo revalorizada para un espacio polivalente en la Avenida de la Justicia en el Barrio de Los Dolores (Murcia)

## Índice de contenido

1. Diseño conceptual. Estática Gráfica. ....	6
1.1 La historia de la Estática Gráfica. El Método y su aplicación en el diseño estructural.....	6
1.2 La relación entre el cálculo analítico y el cálculo gráfico. La Estática Gráfica como instrumento de diseño y conceptualización de la estructura...	18
1.3 La búsqueda de la forma.....	18
1.4 Las herramientas para la creación de modelos gráficos. ....	29
1.5 La estructura. Inspiración, alternativas de diseño y criterios. ....	39
2. Las estructuras de madera. Repaso histórico y propiedades. ....	49
3. Acciones. ....	56
4. El Teorema de Maxwell y su empleo en la selección del diseño final.....	62

## Índice de figuras

Figura 1. Sistema de cuerdas y fuerzas de P. Varignon (1687) .....	7
Figura 2. Die Graphische Statik, K. Culmann (1866).....	8
Figura 3. Maqueta de la Iglesia de la Colonia Güel.....	9
Figura 4. Cálculos de resistencia a viento en la Torre Eiffel.....	10
Figura 5. Diseño y cálculo del puente de Salginatobel.....	11
Figura 6. Magazzini Generali de Chiasso, 1924.....	11
Figura 7. Figuras recíprocas de la Magazzini Generali .....	12
Figura 8. Figuras recíprocas de Cubierta del Campo de fútbol de Les Corts ...	13
Figura 9. Puente de Ganter .....	14
Figura 10. Diagrama de Forma en una cercha, con carga aplicadas en los nudos del cordón superior y reacciones en los extremos.....	15
Figura 11. Diagrama de Fuerzas en una cercha con cargas aplicadas en los nudos del cordón superior y reacciones en los extremos.....	16
Figura 12. Búsqueda del punto de concurrencia en un sistema simple .....	17
Figura 13. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema 1 .....	20
Figura 14. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema 2.....	21
Figura 15. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema 3.....	22

Figura 16. Croquis de cerchas con geometrías no habituales.....	22
Figura 17. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema 4.....	23
Figura 18. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema 5.....	24
Figura 19. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema 6.....	25
Figura 20. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema 7.....	26
Figura 21. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema 8.....	27
Figura 22. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema tipo K.....	28
Figura 23. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema tipo.....	29
Figura 24. Ejemplo de diagramas realizados mediante CAD del Magazzini Generali de Maillart .....	30
Figura 25. Búsqueda de las resultantes en un sistema elaborado en Geogebra .....	31
Figura 26. Diagramas de Forma y Fuerza con resultados numéricos elaborados en Geogebra .....	32
Figura 27. Resultados numéricos.....	33
Figura 28. Diagramas de Forma y Fuerza de una cercha Howe .....	34
Figura 29. Diagramas de Forma y de Fuerza de una cercha Pratt.....	34
Figura 30. Estado 1 de un funicular de cargas .....	35
Figura 31. Estado 2 de un funicular de cargas .....	35
Figura 32. Diseño inicial de una estructura en structureFIT .....	36
Figura 33. Fase de exploración de la geometría de una estructura en structureFIT .....	36
Figura 34. Fase de refinado de una estructura en structureFIT .....	37
Figura 35. Diseño inicial de una estructura triangulada en structureFIT .....	37
Figura 36. Fase de exploración de la geometría de una estructura triangulada en structureFIT .....	38
Figura 37. Fase de refinado de una estructura triangulada en structureFIT.....	38
Figura 38. Concepto inicial de diseño .....	39
Figura 39. Geometría diseño 1 .....	40
Figura 40. Diagrama de Forma para el diseño 1 .....	40
Figura 41. Diagrama de Fuerzas para el diseño 1 .....	41
Figura 42. Geometría diseño 2.....	41
Figura 43. Diagrama de Forma para el diseño 2.....	42
Figura 44. Diagrama de Fuerzas para el diseño 2 .....	42
Figura 45. Donhwanum, entrada principal del palacio de Changdeokgung .....	43

Figura 46. Geometría diseño 3.....	43
Figura 47. Diagrama de Forma para el diseño 3.....	43
Figura 48. Diagrama de Fuerzas para el diseño 3 .....	44
Figura 49. Geometría diseño 4.....	44
Figura 50. Diagrama de Forma para el diseño 4.1 .....	45
Figura 51. Diagrama de Fuerzas para el diseño 4.1 .....	45
Figura 52. Disposición de pilares para la Alternativa 4.1 .....	46
Figura 53. Geometría de diseño 4.2.....	46
Figura 54. Diagrama de Forma para el diseño 4.2.....	47
Figura 55. Diagrama de Fuerzas para el diseño 4.2 .....	47
Figura 56. Geometría diseño 5.....	48
Figura 57. Diagrama de Forma para el diseño 6.....	48
Figura 58. Diagrama de Fuerzas para el diseño 5 .....	49
Figura 59. Los múltiples componentes de sistema dougong.....	50
Figura 60. Museo del Puente de Madera Yusuhara .....	51
Figura 61. Plano del museo Puente de Madera de Yusuhara .....	51
Figura 62. Vista interior del Old Faithful Inn .....	52
Figura 63. Edificio T3 en EEUU. Michael Green Architecture .....	52
Figura 64. Centro de Gimnasia de Ariake, Nikken Sekkei.....	53
Figura 65. Vikingskipet. Niels Torp AS .....	54
Figura 66. Puente de varios vanos de madera como elemento principal .....	54
Figura 67. Nave Cross, Valencia.....	55
Figura 68. Panel sándwich portante tipo (SIP) .....	58
Figura 69. Hipótesis de diseño preliminar de correa principal .....	59
Figura 70. Vista en planta de los pórticos de la estructura.....	62
Figura 71. Diagrama de Forma Alternativa 3.....	64
Figura 72. Diagrama de Fuerza Alternativa 3.....	64
Figura 73. Diagrama de Forma Alternativa 4.1.....	66
Figura 74. Diagrama de Fuerza Alternativa 4.1 .....	66
Figura 75. Diagrama de Forma Alternativa 4.2.....	68
Figura 76. Diagrama de Fuerza Alternativa 4.2.....	68
Figura 77. Diagrama de Forma Alternativa 5.....	70
Figura 78. Diagrama de Fuerza Alternativa 5.....	70



## **1. Diseño conceptual. Estática Gráfica.**

### **1.1 La historia de la Estática Gráfica. El Método y su aplicación en el diseño estructural.**

Como introducción a este capítulo se emplea, por su claridad y detalle, la definición de Estática Gráfica proporcionada por George Bayle en su libro *Estática Gráfica* (1930):

*“La Estática Gráfica, designada también con el nombre de Grafostática, tiene por objeto representar gráficamente las condiciones de equilibrio de las fuerzas que actúan sobre un punto material o bien sobre cuerpos definidos.*

*Tiene igualmente por objeto determinar la magnitud y el sentido de los esfuerzos a que están sometidos diversos elementos de estos cuerpos, lo que permite seguidamente a la Resistencia de Materiales calcular las dimensiones que conviene darles para que puedan resistir a dichos esfuerzos en las debidas condiciones de seguridad.*

*Constituye, pues, un auxiliar precioso de la Resistencia de Materiales, y si bien no da resultados tan exactos como los métodos algebraicos, presenta sobre estos la ventaja de una gran sencillez. “*

El nacimiento de la estática gráfica como ciencia data de 1866, fecha en la que Karl Culmann (1821-1881) publica su *Die Graphische Statik*, obra en la que establece las bases de la disciplina gráfica.

Debe mencionarse, por su importancia, la influencia de otros autores en el desarrollo de la estática gráfica. Uno de ellos es el holandés Simon Stevin (1548-1620), con su estudio del equilibrio mediante una cadena cerrada, con bolas, que quedaba suspendida sobre dos planos inclinados. Definió también el teorema del triángulo de fuerzas, que permitía describir el equilibrio de forma gráfica mediante el empleo de vectores.

Pierre Varignon (1654-1722) consiguió analizar el equilibrio en sistemas de fuerzas mediante el empleo del conocido polígono de fuerzas. En su libro *La Nouvelle mecanique ou statique* (1687), graficaba sistemas físicos de cuerdas sometidas a unas fuerzas y los polígonos de fuerzas relacionados con estos sistemas, como se muestra en la figura 1.

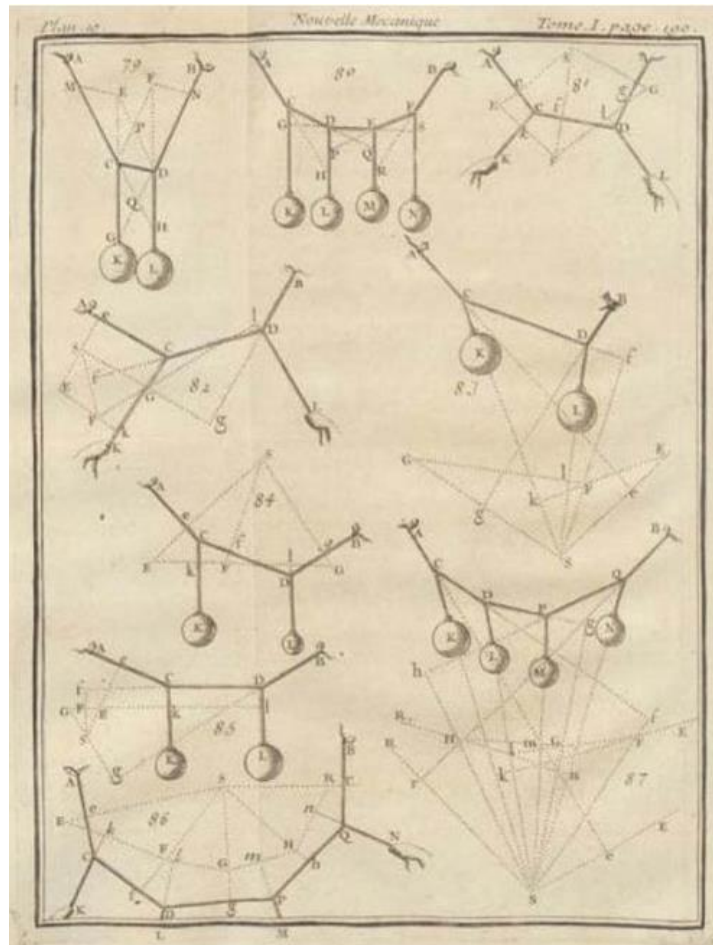


Figura 1. Sistemas de cuerdas y fuerzas de P. Varignon (1687). Fuente: *Nouvelle mecanique ou Statique*.

Otro de los métodos desarrollados por Varignon y de principal importancia en la Estática Gráfica es el método de las tres fuerzas. La dirección de actuación de cada una de estas fuerzas viene representada por su línea de acción. Para que exista el equilibrio entre ellas es necesario que estas líneas de acción se intersecten en un mismo punto, y que el polígono de fuerzas que forman sea cerrado. El método se basa en el conocimiento de la línea de acción y magnitud de una de las fuerzas, la dirección y punto de aplicación de otra, y la necesidad de que la línea de acción de la tercera fuerza pase por el punto de intersección de las otras dos para que exista el equilibrio. Así puede conocerse la magnitud de las otras dos fuerzas desconocidas. Jean Victor Poncelet (1788-1867), una de las principales figuras de la geometría proyectiva, muestra en su trabajo *Cours de mecanique appliqué aux machines* (1826) ilustraciones donde queda reflejado el empleo de este método.

Poncelet fue una de las mayores influencias en el desarrollo de los métodos gráficos, reconocido por el propio Culmann en su libro *Die Graphische Statik*, empleando los polígonos de fuerzas y funicular para el diseño de puentes colgantes entre otras estructuras. La figura 2 muestra una página de dicho libro.

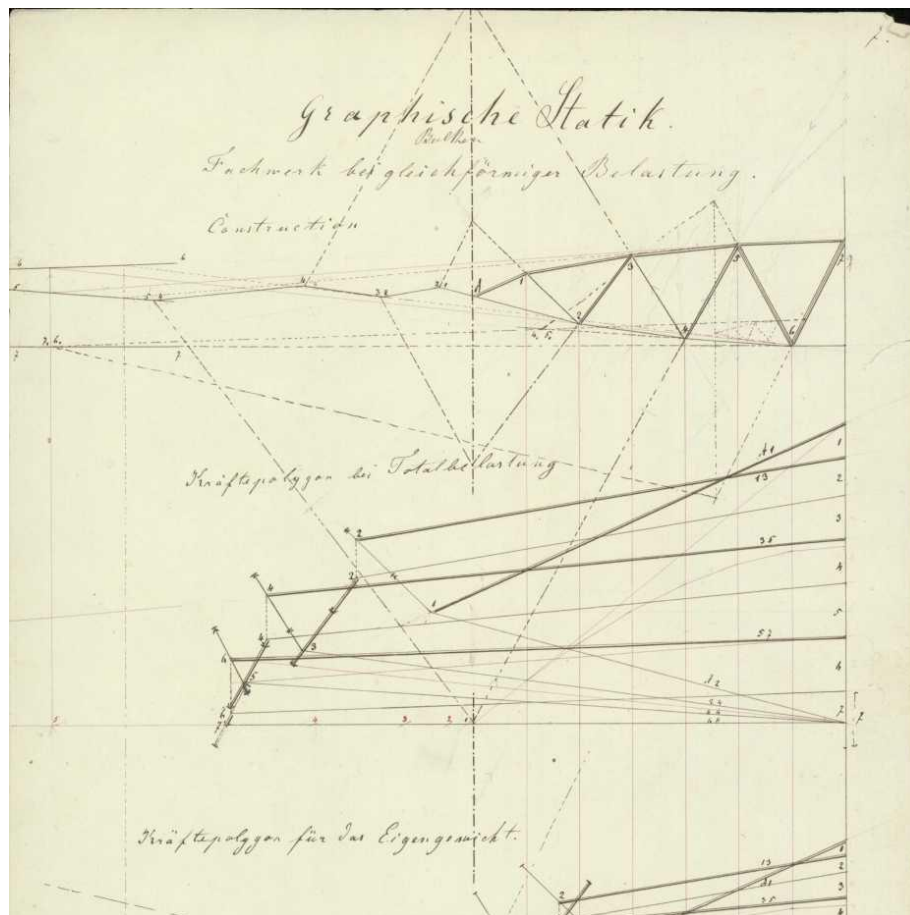


Figura 2. Die Graphische Statik, K. Culmann (1866). Fuente: Archivos ETH Zürich.

El método de Culmann se basa en realizar un corte de un sistema por un plano, sin que este plano corte más de tres barras, determinar la resultante de las fuerzas exteriores y la reacción a un lado del corte y descomponerlas según las barras cortadas.

En el año 1879, unos años después de la publicación del libro de K. Culmann, Luigi Cremona (1830-1903) publica *Le figure reciproche nella statica grafica*. Éste formula las hipótesis del método, considerando que las barras del sistema sólo están sometidas a esfuerzos axiales, es decir, compresión y tracción, y que además estas se encuentran articuladas en sus nudos. Cremona combinó los conceptos de Estática Gráfica que había establecido K. Culmann con las figuras recíprocas desarrolladas por el escocés James Clerk Maxwell (1831-1879), dando como resultado los Diagramas de Fuerzas recíprocos a los Diagramas de Forma. El Método de Cremona se convirtió así en un método empleado tanto a nivel académico como a nivel profesional formando parte de los cálculos realizados en proyectos, extendiéndose su uso durante los siglos XIX y XX.

En España, el arquitecto catalán Antoni Gaudí i Cornet (1852-1926) empleó en el diseño de sus obras las técnicas de la estática gráfica, en conjunto con asombrosas maquetas y modelos físicos como los de La Sagrada Familia y la Iglesia de la Colonia Güell (figura 3). Gaudí empleaba en sus maquetas cadenas de las cuales colgaban pesos, describiendo funiculares de cargas que se invertirían para así generar arcos en sus construcciones (antifuncular).

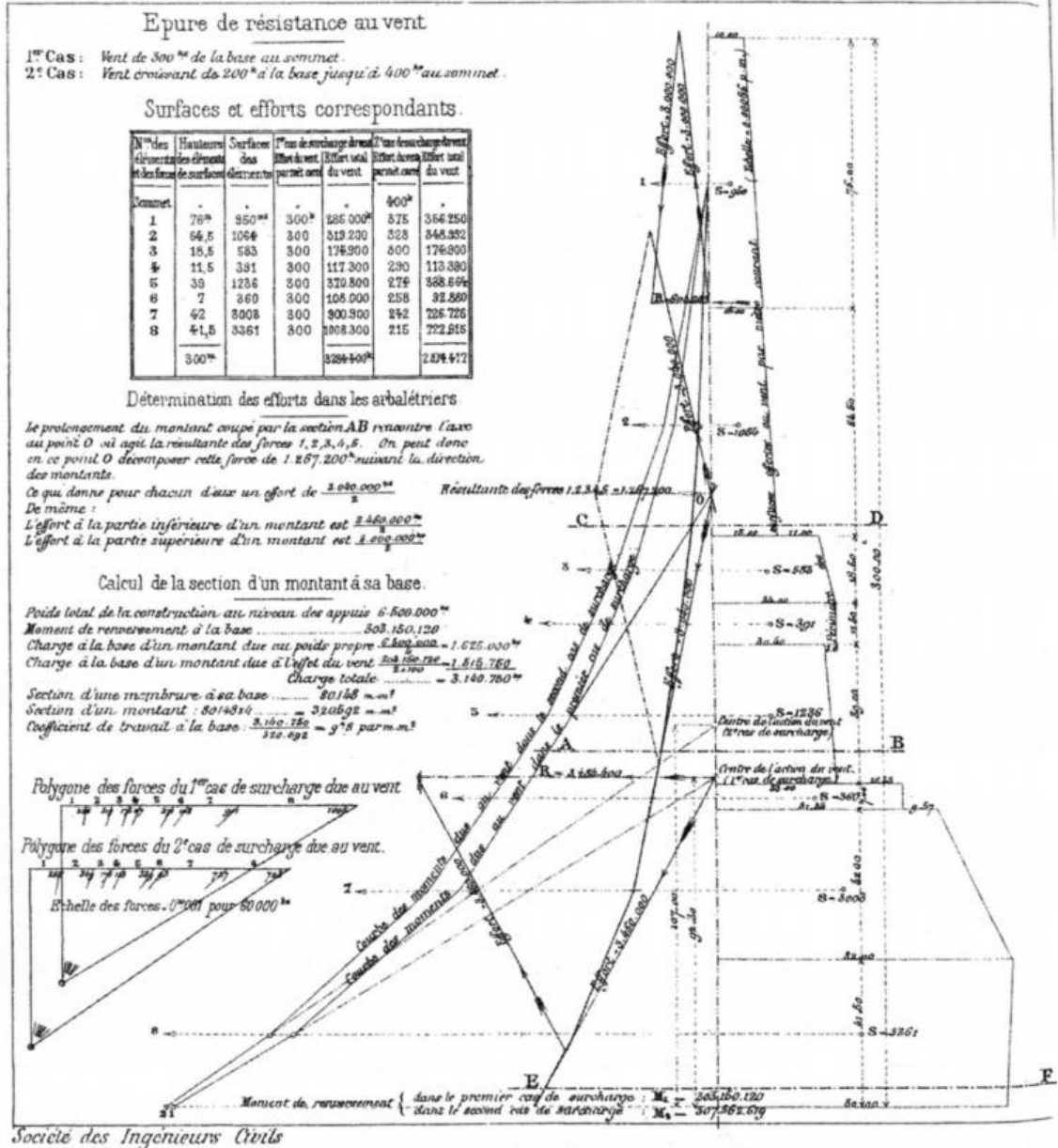




*Figura 3. Maqueta de la Iglesia de la Colonia Güel. Fuente: La Geometria i la mecànica a l'obra de Gaudí. Alsina, C. (2004).*

El número de ingenieros y arquitectos que emplean los métodos gráficos aumenta durante la época. Uno de ellos fue Maurice Koechlin (1856-1946) quien estudió ingeniería civil en Zúrich y recibió clases impartidas por el propio Culmann. Koechlin fue contratado por la compañía de Gustave Eiffel, para la cual desarrolló diseños de importancia histórica, como los de la Torre Eiffel, el Viaducto de Garabit y la armadura de la Estatua de la Libertad.

La figura 4 muestra una página con cálculos gráficos realizados por Koechlin para la Torre Eiffel. En ella pueden observarse la distribución de cargas de viento actuantes sobre la estructura, los polígonos de fuerzas y la determinación de la inclinación de los pilares de la torre. Es este un claro ejemplo de la relevancia de los métodos gráficos en la época, que constituyeron una parte esencial de los cálculos de estructuras que pasarían a ser símbolos de ciudades.



se mantiene dentro de los límites físicos delimitados por el propio arco, haciendo por tanto que éste resista por forma, y aumentando por tanto su eficiencia estructural.

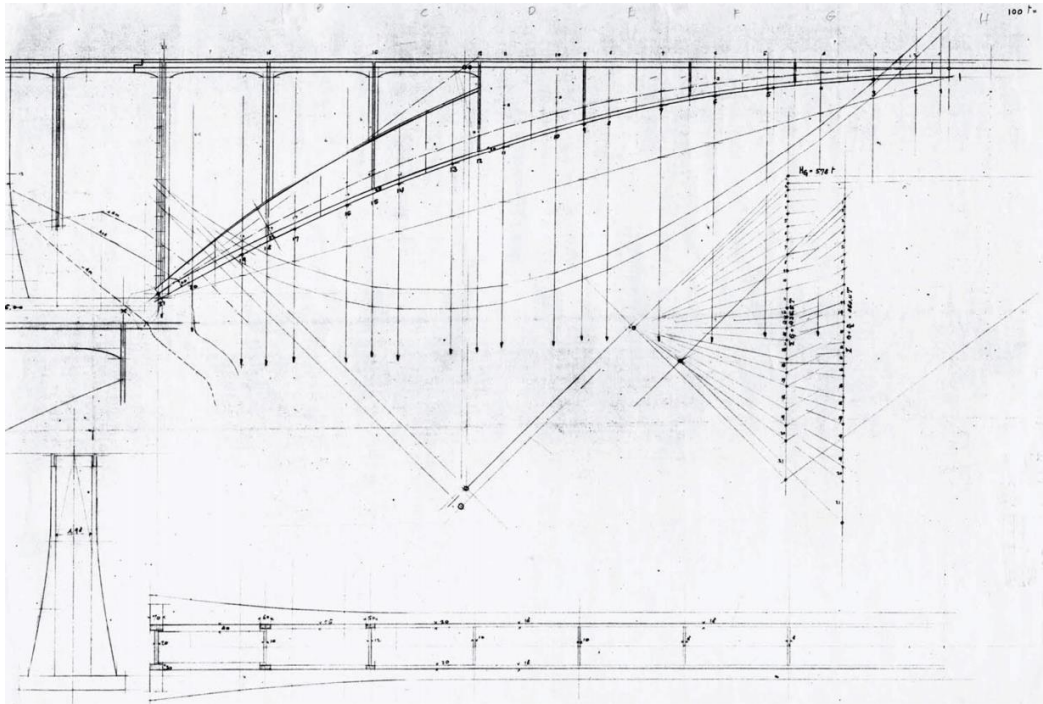


Figura 5. Diseño y cálculo del Puente de Salginatobel. Fuente: Archivos Maillart. ETH, Zürich.

La estructura de la cubierta del Magazzini Generali (figura 6) tiene la particularidad de no poseer diagonales. Esta cercha, ejecutada en hormigón armado, fue diseñada de forma que las fuerzas en los elementos de cordón superior bajo las acciones gravitatorias fuesen constantes. Esto permitió eliminar los elementos diagonales. La figura 7 muestra el diagrama de Cremona asociado a la geometría y fuerzas actuantes sobre la estructura.

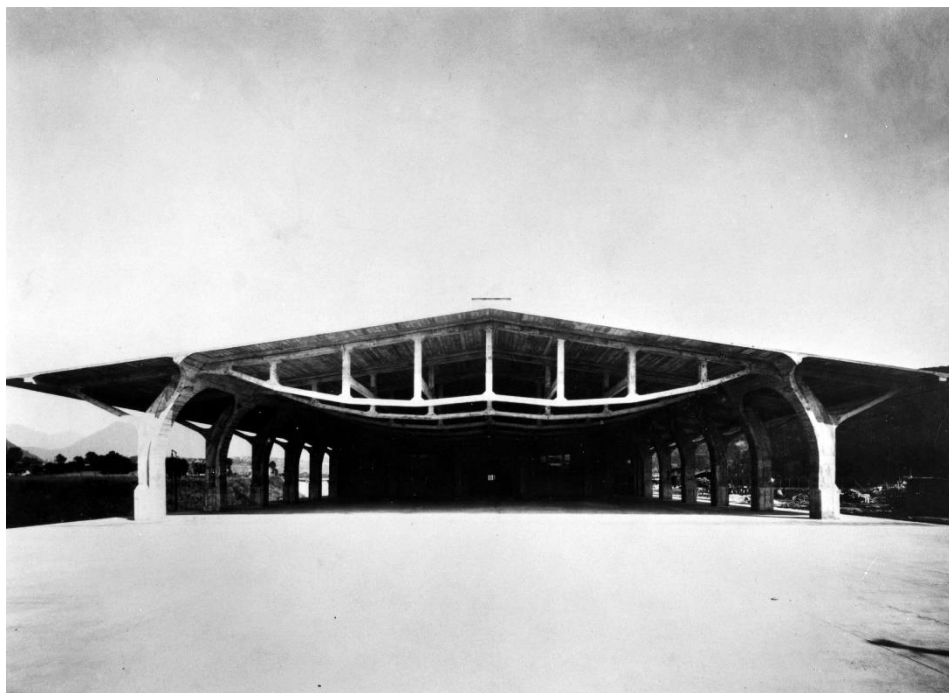


Figura 6. Magazzini Generali de Chiasso, 1924. Fuente: Archivos Maillart. ETH, Zürich.

Estructura singular con madera de derribo revalorizada para un espacio polivalente en la Avenida de la Justicia en el Barrio de Los Dolores (Murcia)

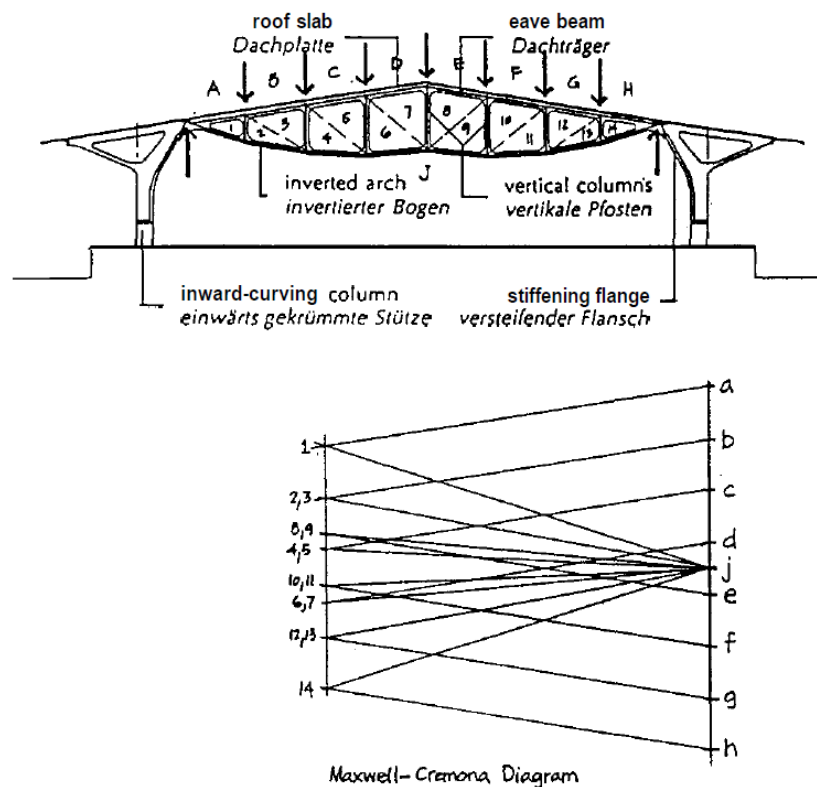


Figura 7. Figuras recíprocas de la Magazzini Generali. Fuente: *Understanding Famous Structures Through Simple Graphical Analyses*. Allen, E. Zalewski, W. Meeting anual ACSA, 1996.

Don Eduardo Torroja Miret (1889-1961), Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, una de las figuras más importantes de la historia de la ingeniería civil en España, y de reconocido prestigio internacional, revolucionó e impulsó el uso del hormigón armado con sus obras. Algunas de las más representativas y conocidas, entre una extensa lista, son la cubierta del Mercado de Algeciras (1933) y el Hipódromo de la Zarzuela (1935), cuya calidad técnica y estética las hacía singulares. Las bóvedas y los arcos, formas tan habituales en los cálculos por estática gráfica, están presentes en muchas de las estructuras de Torroja, como las mencionadas anteriormente o el Antiguo Frontón de Recoletos de Madrid (1939).

Los cálculos gráficos formaron parte de las técnicas empleadas por Torroja para el diseño de sus estructuras. Queda constancia de ello analizando los documentos de sus proyectos. Un ejemplo de su uso es la obra de Tribuna cubierta del Campo de fútbol de Les Corts, en Barcelona (figura 8).

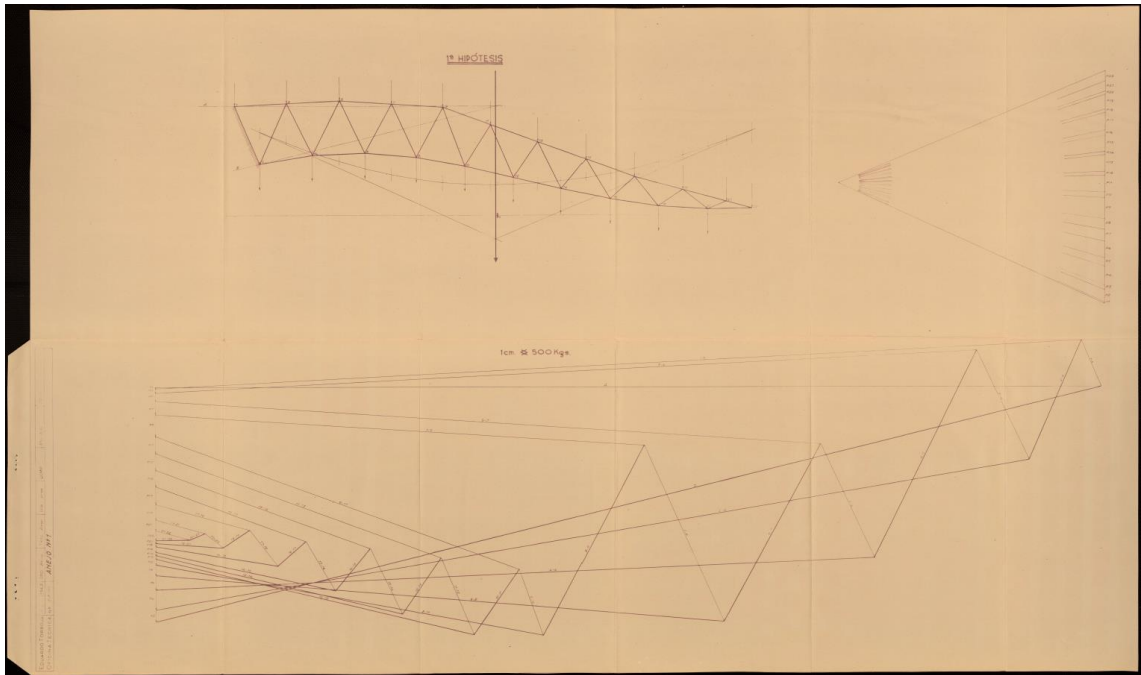


Figura 8. Figuras recíprocas de Cubierta del Campo de fútbol de Les Corts. Fuente: ETM-284-001. Tribuna cubierta para el Campo de fútbol de Las Corts. [Exp. 513]. Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas. Ministerio de Fomento. España.

Durante el siglo XX aparecieron varias publicaciones que explicaban el método de la Estática Gráfica y que proporcionaban casos resueltos en los que se demostraba el amplio rango de su aplicabilidad. Entre estas obras encontramos *Estática Gráfica* (1926), de Otto Henkel. Este libro proporciona soluciones gráficas de múltiples problemas de la ingeniería estructural, como celosías, sistemas reticulares, determinación de centros de gravedad y equilibrio de arcos. Otra publicación semejante y con mismo nombre fue publicada por George Bayle (1966).

La tradición gráfica de la ETH de Zürich continua, esta vez de la mano de Christian Menn (1927-2018), alumno de propio Maillart y cuyas obras muestran formas obtenidas a partir del entendimiento y el uso de las técnicas gráficas. Menn continua desarrollando esa elegancia establecida previamente por Maillart en obras de hormigón armado, sin embargo, Menn realiza una transición en la que sustituye el arco, insignia de Maillart, por elementos atirantados en los que la tensión es protagonista. Un ejemplo de ello es el Puente de Ganter (Figura 9). Menn materializa esta transición en su diseño, manteniendo a la vez una estética muy limpia e integrando la imponente estructura en el paisaje, fusionándola con este como si de roca se tratase.





Figura 9. Puente de Ganter. Fuente: Nicolas Janberg, 12 de julio 2019. Structurae.

Durante el siglo XX los métodos gráficos empezaron a caer en desuso en favor de los métodos analíticos, relegando a los primeros a un segundo plano, cada vez más desconocido a medida que el cálculo por métodos analíticos y computacionales avanzaba. No obstante, algunas figuras del mundo de la ingeniería estructural se esforzaron en reavivar y divulgar las técnicas gráficas. Dos de ellos son Edward Allen y Waclaw Zalewski, autores del libro *Form and Forces: Designing Efficient, Expressive Structures* (2010), probablemente la obra más completa y didáctica en torno a la Estática Gráfica escrita. Es éste trabajo una extensa síntesis sobre la estática gráfica, la cual ya promocionaban ambos autores décadas antes, con publicaciones como *Understanding Famous Structures Through Simple Graphical Analyses*, para el meeting anual de la ACSA (1996).

Una vez completada una introducción histórica sobre el método se describe este. El método que se emplea en este trabajo es el denominado como Método de Cremona, empleando la notación desarrollada por Robert H. Bow (1832-1908). El método se emplea en la resolución de estructuras isostáticas de barras, articuladas, en las que los esfuerzos se consideran de compresión o de tracción.

De manera general, se parte de un sistema de barras sobre cuyos nudos actúan unas cargas. A este sistema se le puede llamar Diagrama de Forma, y sobre él se aplica la notación de Bow, que es la siguiente: Las letras mayúsculas se emplean para determinar los “espacios” exteriores, generados por el sistema de cargas actuantes y por las reacciones de la estructura. Los números se emplean para identificar los “espacios” interiores, que son aquellos generados por la propia geometría de la estructura. La figura 10 presenta uno de estos diagramas.

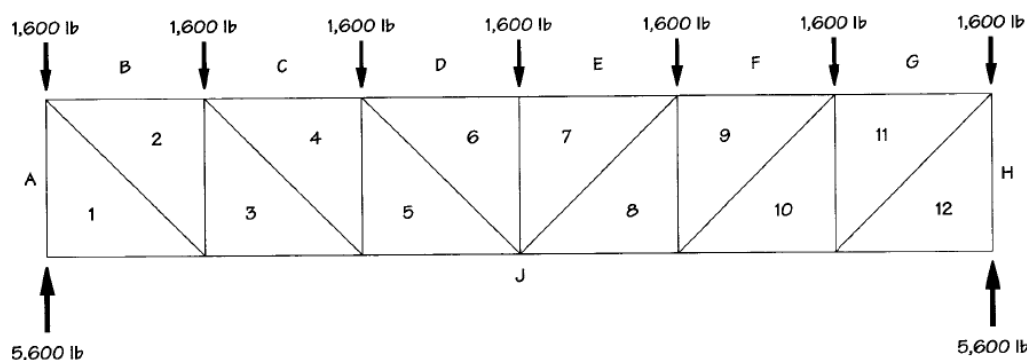


Figura 10. Diagrama de Forma en una cercha, con cargas aplicadas en los nudos del cordón superior y reacciones en los extremos. Fuente: *Form and Forces: Designing Efficient, Expressive Structures*. Zalewski, W. Allen, E. (2010).

La determinación de las reacciones en la estructura se realiza habitualmente de forma previa a la construcción de la figura recíproca del Diagrama de Forma, que es el Diagrama de Fuerzas. En el Diagrama de Fuerzas se emplean los conceptos de resultante y antirresultante de un sistema de vectores, el empleo de polígonos vectoriales cerrados, que representan el equilibrio de la estructura, y la reciprocidad entre vectores (fuerzas) y los elementos del Diagrama de Forma, tanto de las fuerzas actuantes como de los elementos físicos. La figura 11 muestra el Diagrama de Fuerzas recíproco a la figura 10.

En el Diagrama de Fuerzas la longitud de los vectores es proporcional su magnitud, empleándose siempre una relación entre estas dos, como por ejemplo, que 1 centímetro medido sobre el diagrama sea equivalente a 5 KN. Como puede observarse, y continuando con la reciprocidad entre figuras, aquello que en el Diagrama de Forma eran espacios exteriores, como el correspondiente a la letra 'A', se convierte en un punto o nudo en el Diagrama de Fuerzas, representado por la letra minúscula 'a'. Las fuerzas aplicadas sobre la estructura, gravitacionales en este caso, se presentan como vectores uno a continuación del otro. Sirva de ejemplo el vector o segmento 'ab' del Diagrama de Fuerzas, que corresponde a la carga puntual que aparece al pasar de la zona 'A' a la zona 'B'. Las resultantes, aunque a simple vista no resulten fáciles de distinguir, también aparecen representadas en el Diagrama de Fuerza. Si todas las fuerzas actuantes sobre la estructura son verticales y en el sentido de la gravedad, las reacciones son verticales y en sentido contrario a estas, siendo el punto 'j' el paso de una a otra, que divide la resultante de fuerzas en dos mitades iguales.

Para resolver gráficamente el sistema y conocer la magnitud de las fuerzas en las barras se procede de la siguiente manera: se analiza cada nudo de la estructura girando sobre este en un sentido (horario o antihorario). Si se girase en sentido horario en torno al nudo de la esquina inferior izquierda se encontrarían una fuerza, que es la reacción y dos barras, que delimitan el paso de la zona exterior 'A' a la zona interior '1' y el paso de la zona interior '1' a la zona 'J'. En el Diagrama de Fuerza esto se traduce en una fuerza vertical que va desde 'a' al nudo '1' y desde el nudo '1' al nudo 'j'. Este primer nudo presenta una particularidad, y es que el nudo 'j' y el nudo '1' coinciden, y por tanto el miembro que representa el cambio de un espacio a otro es un miembro de fuerza nula.

Continuando con el análisis de la cercha en el nudo extremo izquierdo superior, se observa que en él confluyen 3 barras y una fuerza. Es momento este para hacer referencia a un concepto importante de la estática gráfica, que es de la línea de acción

de una fuerza. Los elementos mencionados no sólo confluyen en el nudo físicamente, si no que por tratarse de una estructura en la cual los esfuerzos son axiales, también lo hacen sus líneas de acción. Esas líneas de acción son las que realmente se representan en el Diagrama de Fuerzas.

Volviendo al análisis específico del nudo para la construcción del Diagrama de Fuerzas se observa lo siguiente: el cambio de la zona 'B' exterior a la zona '2' interior lo materializa una barra horizontal del cordón superior. Dicha barra debe tener asociado un vector paralelo en el Diagrama de Fuerzas, vector que viene representado por el segmento que va del nodo 'b' al nodo '2' en el diagrama. El siguiente elemento que encontramos es la diagonal que va de '2' a '1'. El nodo '1' ya había sido hallado previamente en la construcción del Diagrama de Fuerzas, y como es sabido que el vector diagonal debe pasar por él, se traza una diagonal paralela a la diagonal del Diagrama de Forma pasando por éste. El nodo '2' se encuentra en la intersección de la horizontal trazada por 'b' con esta diagonal formándose un polígono cerrado, que implica que el sistema está en equilibrio.

Se procede de la misma manera para la resolución del resto del sistema, y si la figura queda completamente cerrada significa que se tiene un sistema en equilibrio.

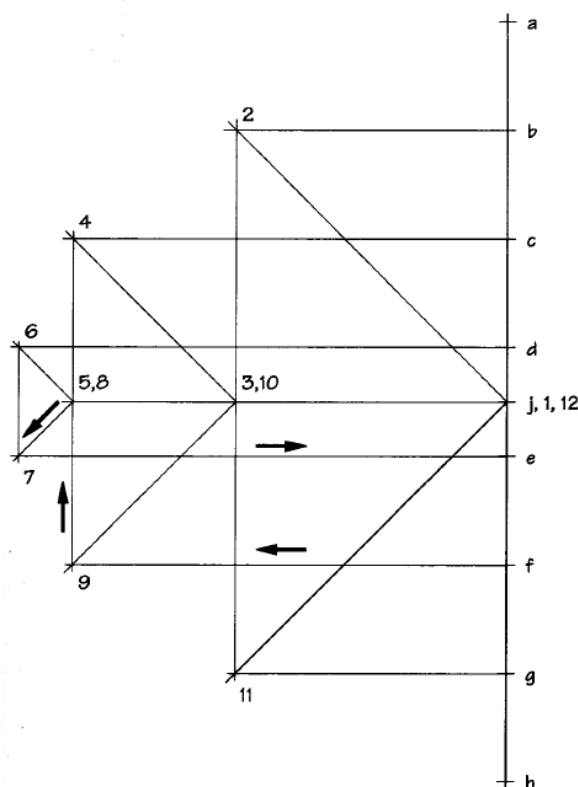


Figura 11. Diagrama de Fuerzas en una cercha, con cargas aplicadas en los nudos del cordón superior y reacciones en los extremos. Fuente: *Form and Forces: Designing Efficient, Expressive Structures*. Zalewski, W. Allen, E. (2010).



A pesar de que este trabajo no busca hacer las funciones de texto didáctico en Estática Gráfica, para lo cual resulta conveniente emplear algunos de los libros mencionados a lo largo de este capítulo, sí que se considera oportuno sintetizar algunos de los conceptos de aplicación en la Estática Gráfica que pueden simplificar su uso y el proceso de resolución de un problema, entendiéndose lo segundo bien como la determinación del equilibrio y magnitud de las fuerzas en los elementos de un sistema, o bien como la conceptualización de una forma estructural en función de unas condiciones dadas, como un sistema específico de cargas.

El primero de estos conceptos, del que ya se ha hablado anteriormente, es el concepto de **línea de acción**. Sobre estas líneas se encuentran tanto las fuerzas que actúan sobre la estructura, como las resultantes en sus apoyos y las fuerzas axiales de los miembros de la misma. Conocidos el concepto de línea de acción y de regla del paralelogramo, se puede realizar una descomposición de las reacciones en un apoyo simple. Un apoyo de este tipo, en el plano XZ, coarta los desplazamientos verticales en el eje Z y los desplazamientos horizontales en el eje X. Si se conoce la línea de acción diagonal que pasa por dicho apoyo, así como la magnitud de esta reacción, es posible descomponerla en una reacción vertical y en otra horizontal, que son las empleadas habitualmente en este tipo de apoyo.

Otro concepto importante a tener muy en cuenta es el de **resultante y antirresultante**. Supongamos un sistema de vectores, con una dirección y magnitud conocidas. Estos vectores pueden colocarse uno tras otro, formando un sistema. La resultante de este sistema viene dada por el vector que une el inicio del primer vector con el final (punta de flecha) del último vector del sistema. La antirresultante no es más que la resultante cambiada de sentido, y su función es la de anular o equilibrar las fuerzas del sistema. Escrito en forma vectorial, para un sistema con 3 fuerzas, se obtiene lo siguiente:

$$F_1 + F_2 + F_3 = R$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + AR = 0$$

$$R + AR = 0$$

Continuando con el concepto de línea de acción se describe ahora el concepto de **concurrency**. Si las líneas de acción de un sistema de 3 fuerzas se interceptan entre sí en un nudo, a este nudo se le llama punto de equilibrio o nodo de equilibrio. Por ejemplo, En el siguiente sistema, siendo conocidas la dirección, sentido y magnitud de la fuerza P, y sabiendo que la reacción en el apoyo B debe ser vertical, puede determinarse la reacción del apoyo en A intersectando una línea de acción que pase por él con el punto de intersección de la fuerza P con la reacción vertical por B. Este punto 'O' es el punto de equilibrio del sistema de la figura 12.

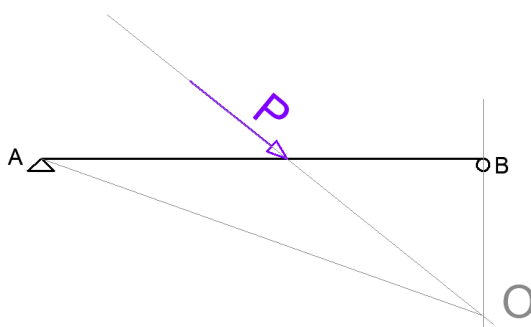


Figura 12. Búsqueda del punto de concurrency en un sistema simple. Fuente: Elaboración propia.

El resto de conceptos se han desarrollado a lo largo del capítulo. Estos son los de **reciprocidad**, que representa la esencia de la relación entre el Diagrama de Forma y el de Fuerza. El concepto de **polígono cerrado** que garantiza el equilibrio entre las fuerzas que lo forma. El **equilibrio estático** ( $\sum F_h=0$ ,  $\sum F_v=0$ ,  $\sum M=0$ ), que debe verificarse en la estructura y que se emplea frecuentemente para determinar las reacciones en un sistema. La **Notación de Bow**, empleada para identificar las distintas partes del sistema.

## 1.2 La relación entre el cálculo analítico y el cálculo gráfico. La Estática Gráfica como instrumento de diseño y conceptualización de la estructura.

El cálculo analítico es herramienta y método indispensable en el cálculo de estructuras. Sin embargo, el cálculo analítico carece de aquello que la Estática Gráfica posee. La sencillez a la hora de determinar los esfuerzos en los elementos de la estructuras mediante el trazado de paralelas a los elementos, la relación recíproca de los Diagramas de Forma y de Fuerza, que permite determinar de manera visual qué elementos de la estructura se encuentran sometidos a mayores esfuerzos, o cómo la modificación de un parámetro, como por ejemplo la profundidad en un cercha, generan polígonos de fuerza más compactos, sinónimo éste de unos menores esfuerzos en los elementos y de un mejor aprovechamiento del material.

Considera aquí el autor que, esta capacidad gráfica permite entender el comportamiento de la estructura y la manera en la que afecta a ésta la modificación de alguno de sus componentes, ya se trate de la dirección de aplicación de las cargas, la disposición de elementos geométricos o una combinación de ellas. Es esta cualidad la que se considera de gran valor a la hora de desarrollar un diseño, constituyendo una primera fase en la que poder comprender el funcionamiento del sistema, formado éste por el conjuntos de acciones, condicionantes geométricos, estructura y función.

Por dicho motivo descrito es por el que la descripción de este apartado enuncia "*La Estática Gráfica como instrumento de diseño y conceptualización*".

Una vez finalizada esa fase daría comienzo el complicado y menos transparente cálculo numérico, para cuyo desarrollo nos apoyaríamos en modelos FEM, que nos permiten verificar la aptitud del sistema y de sus elementos ante estados límite.

## 1.3 La búsqueda de la forma.

En este apartado se trata el proceso seguido por el autor en el aprendizaje del método de Estática Gráfica y en el análisis de diversas tipologías y formas en base a una idea inicial.

La mayor parte de este proceso se desarrolló empleando las herramientas de dibujo clásicas: papel, regla, escuadra, cartabón, lápiz. Su uso, al menos al comienzo del proceso, proporcionaba una mayor libertad que el empleo de software de dibujo asistido por ordenador, siendo el mayor de los problemas habitualmente la escasez de espacio proporcionada por el papel o la ligera pérdida de precisión por la acumulación de pequeñas diferencias en el paralelismo entre el Diagrama de Forma y el Diagrama de Fuerza.

Debido a que el método, sobre todo en su época más prolífera, se ejecutaba empleando las herramientas clásicas, se considera válido para el desarrollo de este apartado el uso de gráficos elaborados sobre papel manualmente, los cuales se emplearon en dicha búsqueda de la forma.

En todos estos sistemas es apreciable el empleo de la Notación de Bow, ya explicada con anterioridad en este trabajo.

El número de Diagramas de Forma y de Fuerza mostrados en este capítulo es extenso, y se pretende proporcionar una explicación suficiente de cada uno de ellos. Como puede verse, especialmente en los casos en los que las geometrías son más complejas, solo se ha dibujado la mitad del Diagrama de Forma y del Diagrama de Fuerza, por ser ambos simétricos. No se ha estimado necesario incluir resultados numéricos en este capítulo.

La figura 13 muestra una cercha triangular, cuya profundidad crece a medida que nos encontramos más cerca del centro de vano. Son varios los detalles que deben comentarse sobre este primer boceto o esquema. El sistema se encuentra bajo una hipótesis de cargas verticales, aplicadas esta sobre los nudos de la cercha. Sobre los nudos aparecen también flechas que, aparentemente, representan un momento actuando sobre el nudo, cuando en realidad representan el sentido en el que se hace el análisis de la cercha de acuerdo a la notación de Bow. Las líneas rectas discontinuas que aparecen representan las denominadas “líneas de acción” de los elementos y las cargas aplicadas, y el motivo principal de su uso es facilitar la elaboración de los diagramas. Como ya se ha mencionado, estos bocetos forman parte del proceso de aprendizaje del método, y por ello contienen elementos auxiliares y anotaciones que resultan de ayuda.

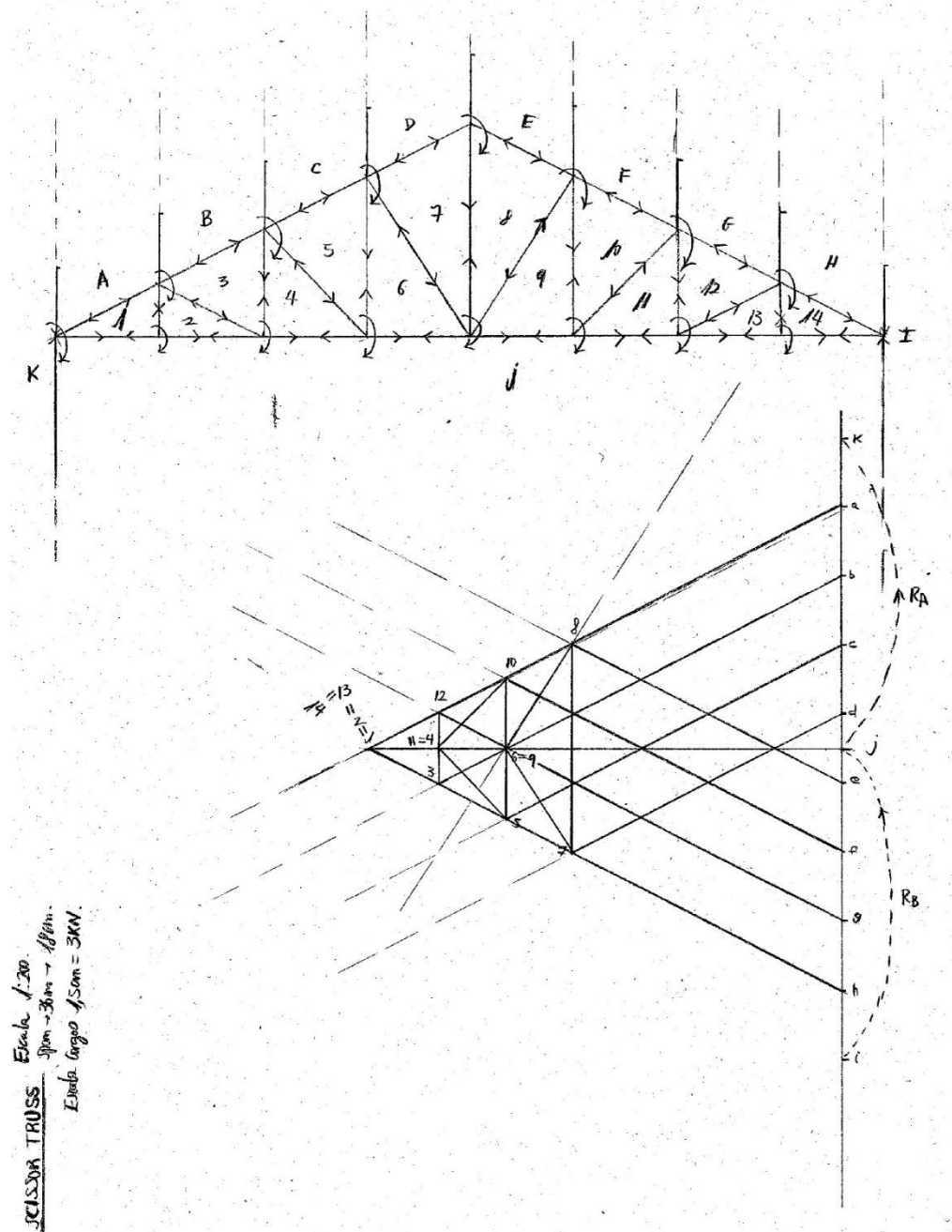


Figura 13. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema 1. Fuente: Elaboración propia.

Las figuras 14 y 15 representan iteraciones del caso anterior, en las que se ha modificado principalmente la profundidad de la cercha, produciendo ángulos más agudos en los apoyos, y se han eliminado los montantes más cercanos a los apoyos. Estos cambios dan lugar a aumentos en las fuerzas en los miembros de la cercha.

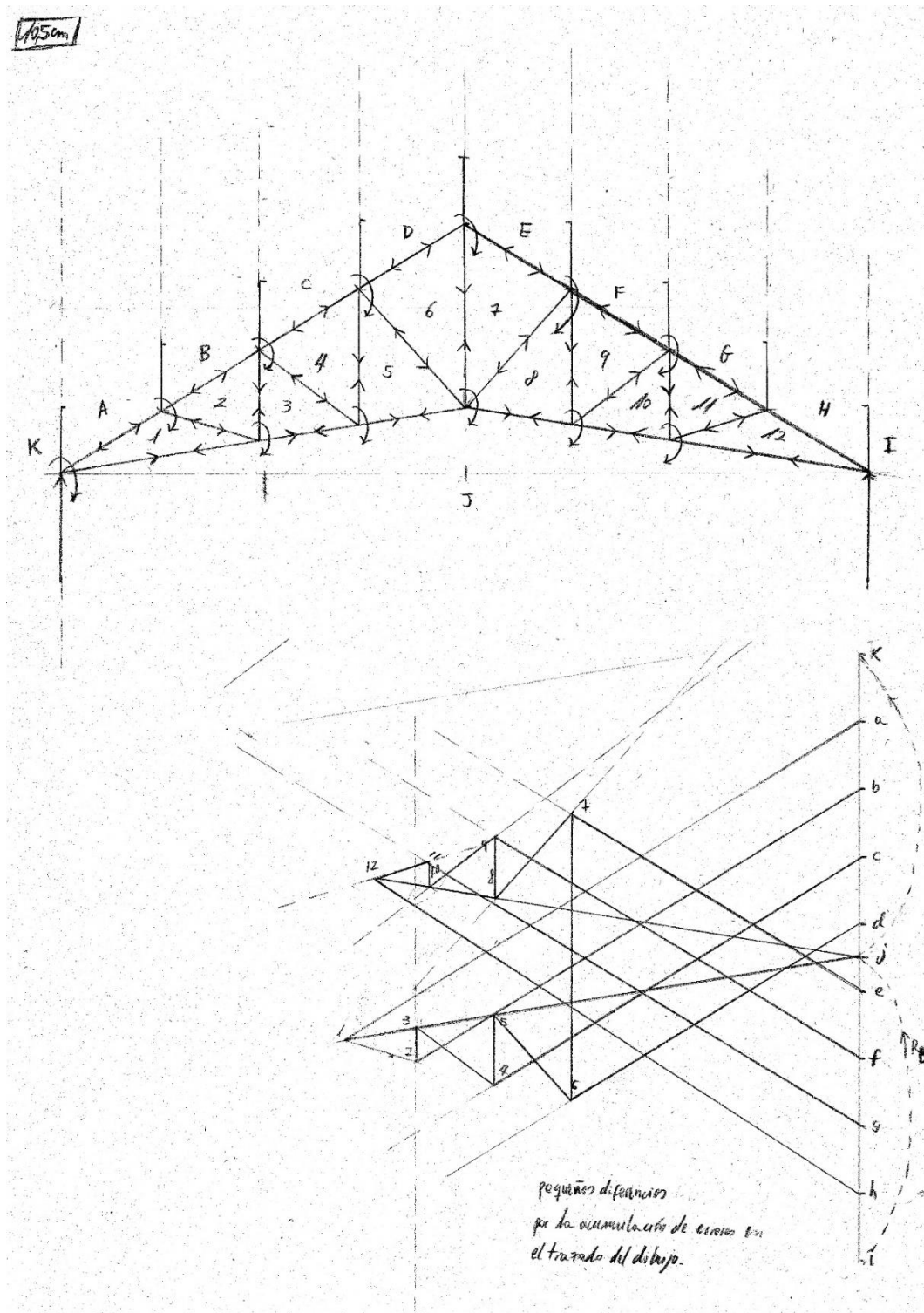


Figura 14. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema 2 Fuente: Elaboración propia.

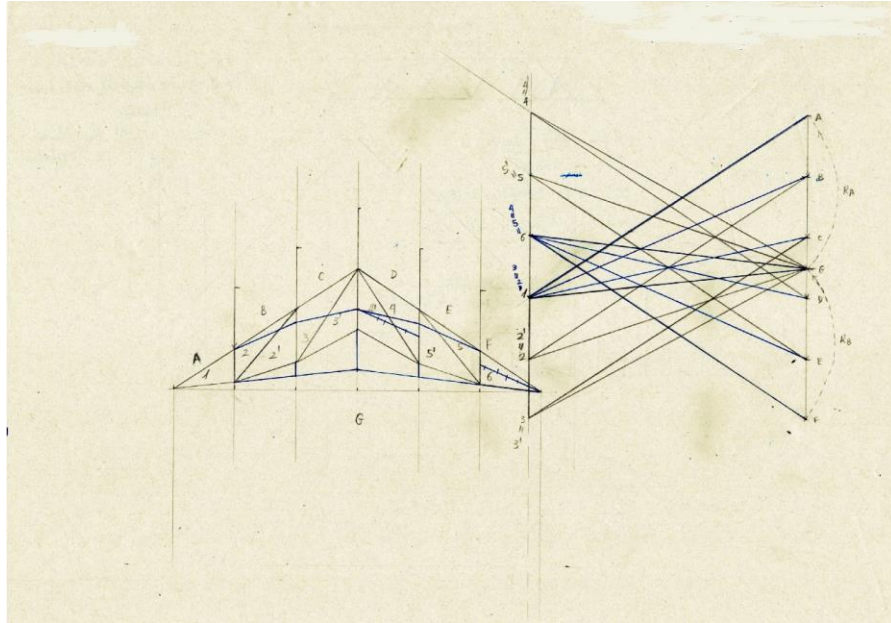


Figura 15. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema 3. Fuente: Elaboración propia.

La figura 16 muestra una primera idea de dos diseños que cobrarán importancia a lo largo de este trabajo. Se trata de dos bocetos sin una distribución de los elementos exacta ni excesivamente meditada.

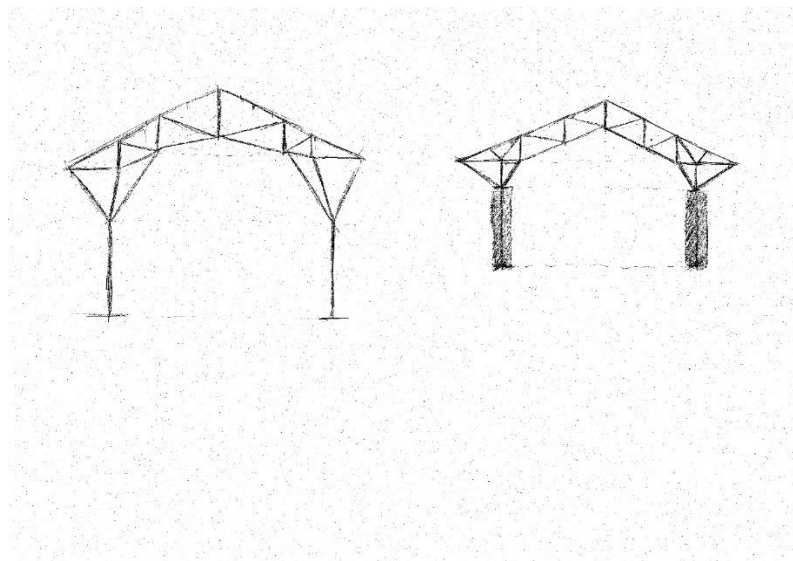


Figura 16. Croquis de cerchas con geometrías no habituales. Fuente: Elaboración propia.



La figura 17 constituye el inicio en la exploración de cómo los siguientes dos factores afectan a la estructura: el empleo de voladizos y el incremento del número de montantes y diagonales.

Analizando el efecto del voladizo se observa como el Diagrama de Forma comienza a generarse a la derecha de la línea que representa las cargas actuantes sobre los nudos. Esta es una primera clara diferencia si se compara este diseño con los mostrados anteriormente.

El empleo de un gran número de diagonales y montantes permite analizar el siguiente comportamiento: la magnitud de las fuerzas en los montantes y diagonales iniciales cercanos al apoyo son elevadas, disminuyendo a medida que nos acercamos al centro de vano. Ocurre lo contrario para los cordones superior e inferior, siendo los esfuerzos en estos mayores cuanto más cerca nos encontremos del centro de vano.

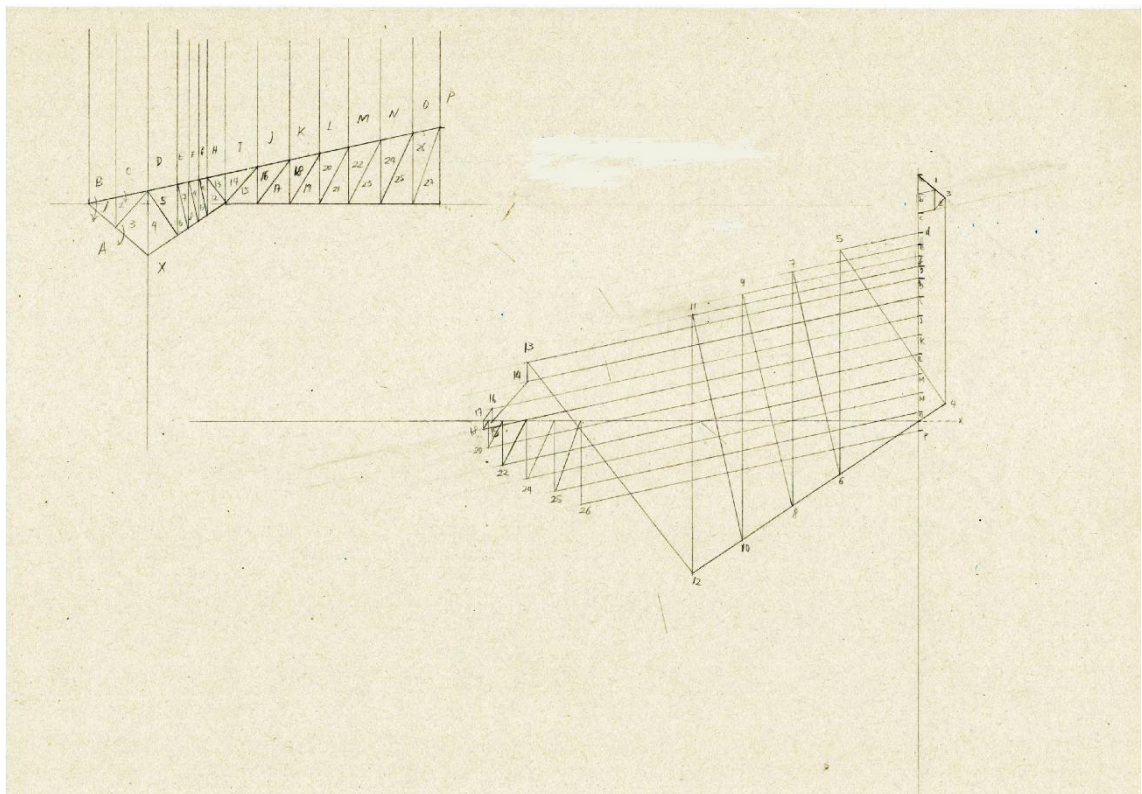


Figura 17. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema 4. Fuente: Elaboración propia.

La figura 18 muestra un diagrama que sirve para identificar uno de los problemas mencionados a cerca de elaborar los diagramas en papel, especialmente si se tiene en cuenta que la mayoría de ellos de hicieron en folios de dimensiones estandarizadas A4. Si se observa el Diagrama de Fuerza mostrado, con la notación empleada, puede apreciarse como se abandona la construcción del mismo poco después de haber representado en el Diagrama de Fuerza el elemento 8-9. El problema al que nos referimos es simplemente a la falta de espacio para poder completar el diagrama.

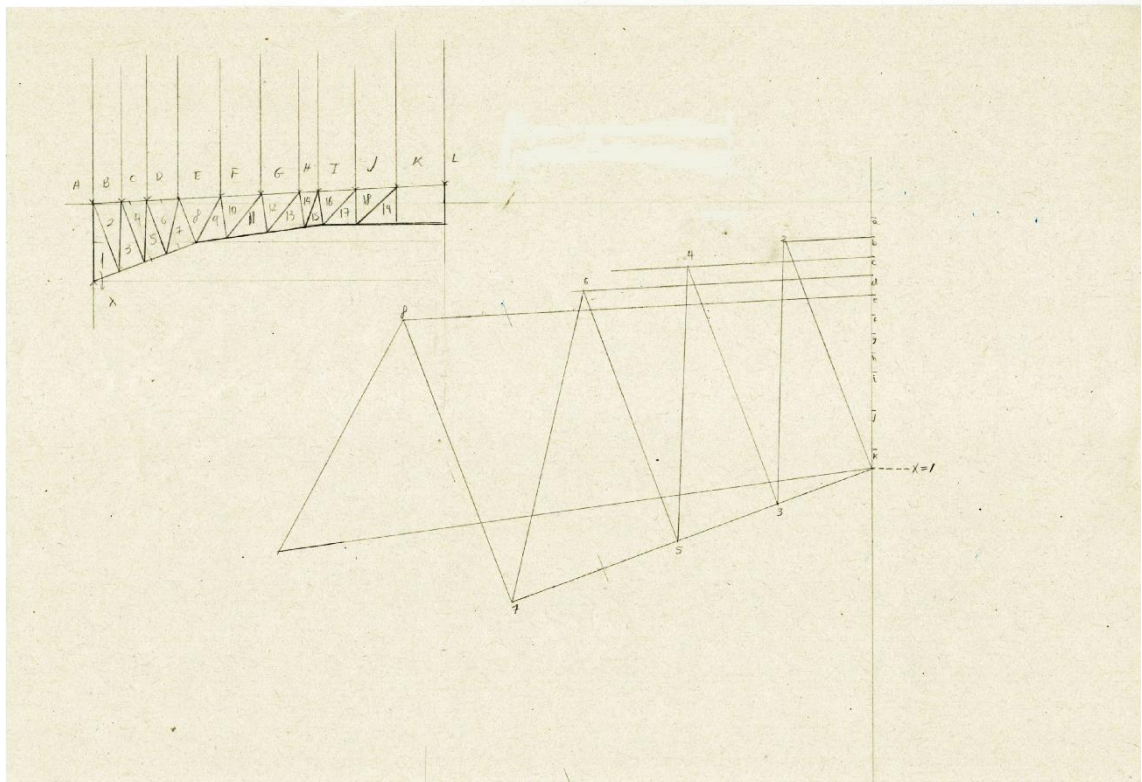


Figura 18. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema 5. Fuente: Elaboración propia.



El objetivo perseguido por el diseño de la figura 19 era el de intentar encontrar una distribución en la que apareciesen el menor número posible de elementos infrautilizados en comparación con otros, entendiéndose por infrautilizado el que la fuerza en un elemento fuese muy inferior a la fuerza en otro. Se considera, analizando el Diagrama de Fuerza y en la medida de la posible, que dicho objetivo se alcanza para el tramo central de la estructura, no siendo así para el voladizo, el cual podría haberse diseñado mejor empleando un número muy inferior de diagonales y montantes o incluso eliminándolos por completo, generando un voladizo de dos barras.

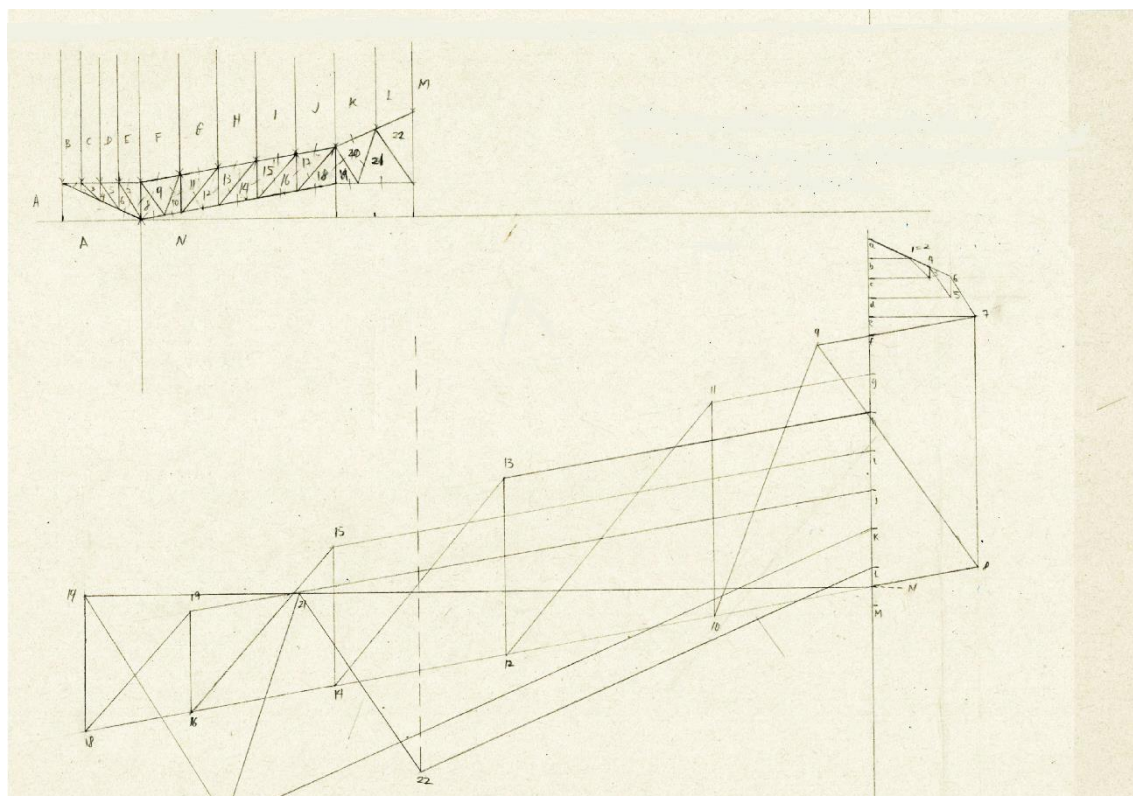


Figura 19. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema 6. Fuente: Elaboración propia.

La figura 20 integra varias ideas en un mismo diseño. Entre ella se encuentra el empleo de un montante sobre cada uno de los apoyos, pequeños voladizos y una variación del canto o profundidad de la cercha, que se incrementa conforme nos aproximamos al vano central.

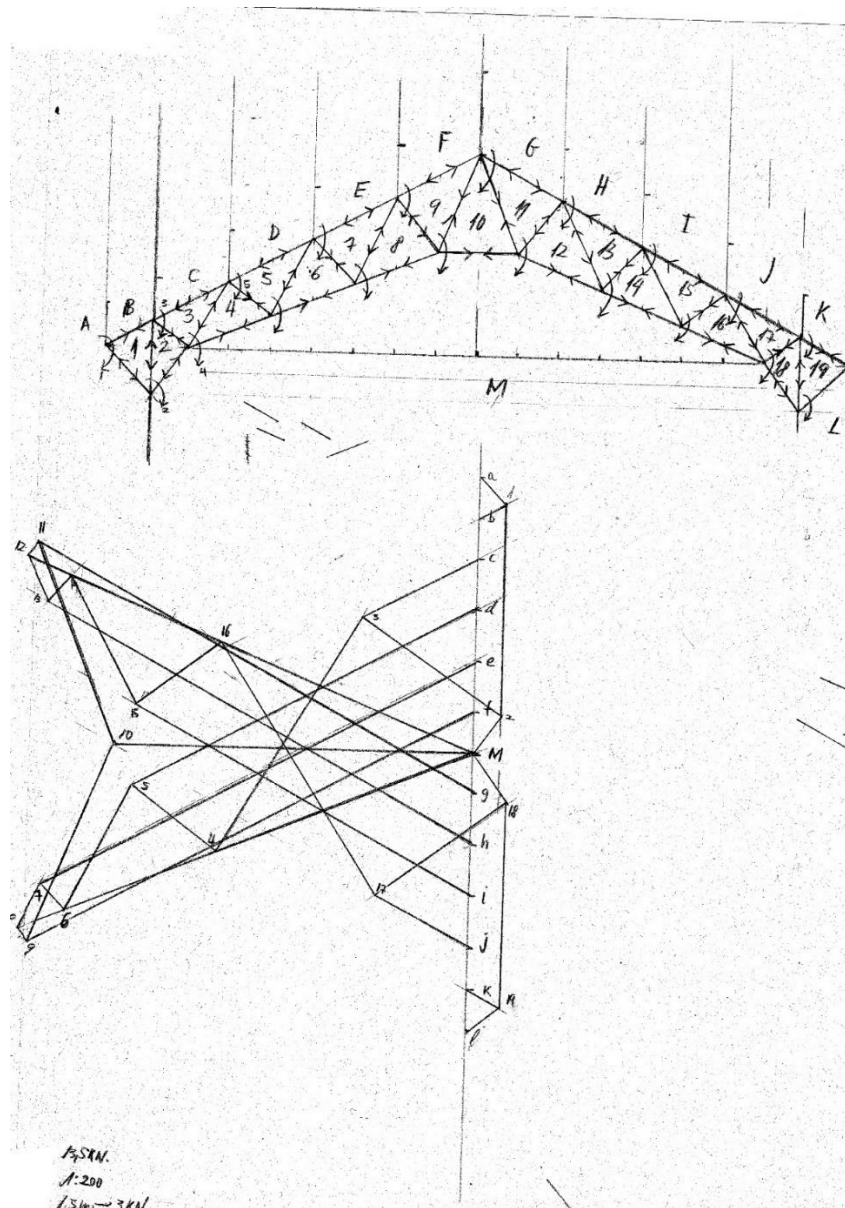


Figura 20. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema 7. Fuente: Elaboración propia.

La figura 21 muestra una geometría que podría catalogarse como singular o, al menos, poco frecuente. Esta geometría combina voladizos, un tramo central con profundidad de cercha variable y un apoyo en "V". Analizando el Diagrama de Fuerza se observa que, aunque sí que aparecen miembros claramente más solicitados que otros, no se encuentran miembros que estén excesivamente infrautilizados respecto a otros.

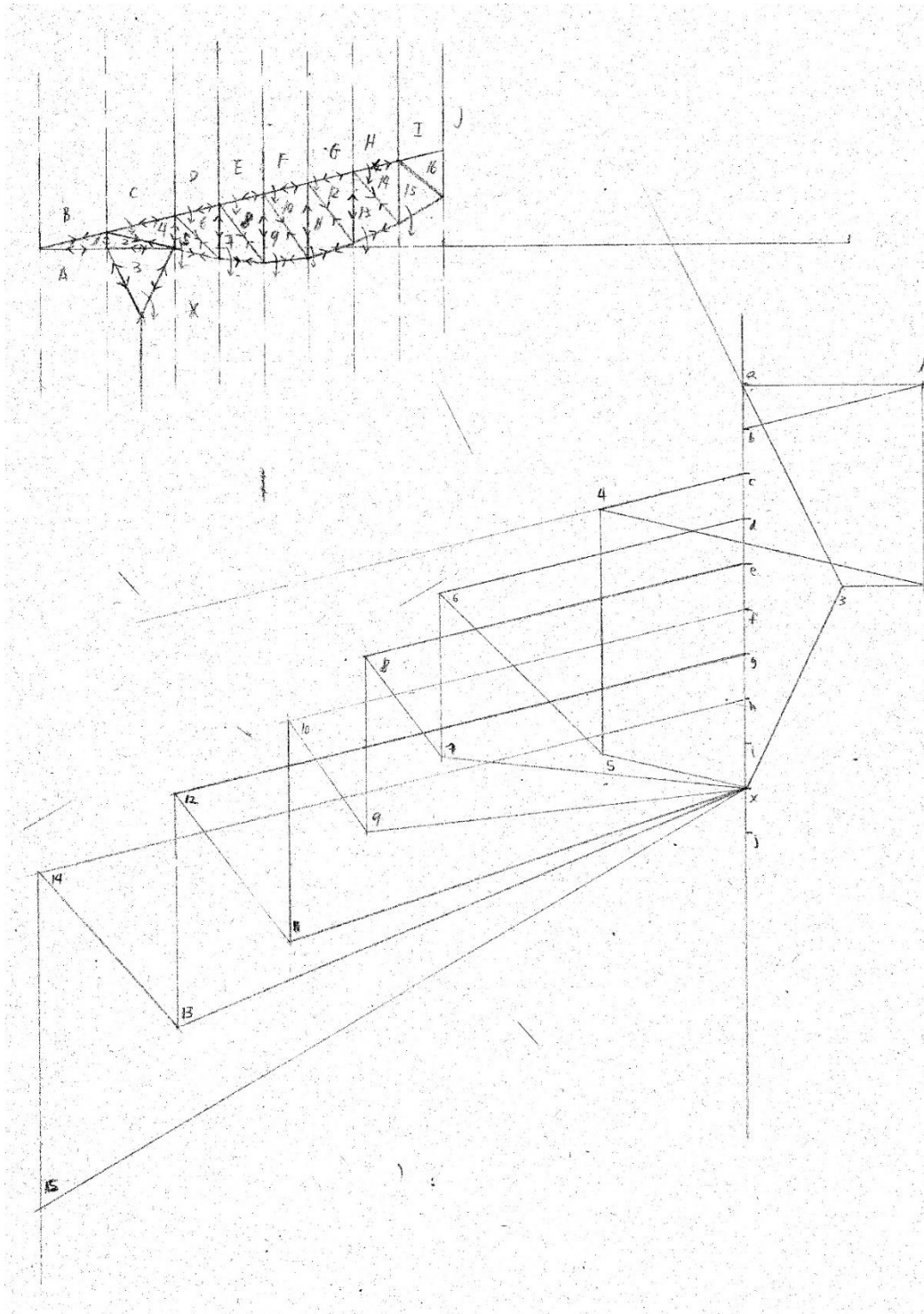


Figura 21. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza. Fuente: Elaboración propia.

Las figuras 22 y 23 muestran diseños para los cuales se experimenta con la tipología “K”, tipo de cercha que en lenguaje anglosajón suele denominarse como “K Truss”. Se considera una tipología compleja por el elevado número de elementos que presenta, así como el elevado número de nudos a ejecutar. A pesar de ello resulta de interés analizar su comportamiento mediante métodos gráficos.

En el primer caso el concepto de reciprocidad, tan propio de la estática gráfica, resulta especialmente visual, y puede verse la correspondencia entre las “K” del Diagrama de Forma con las del Diagrama de Fuerza.

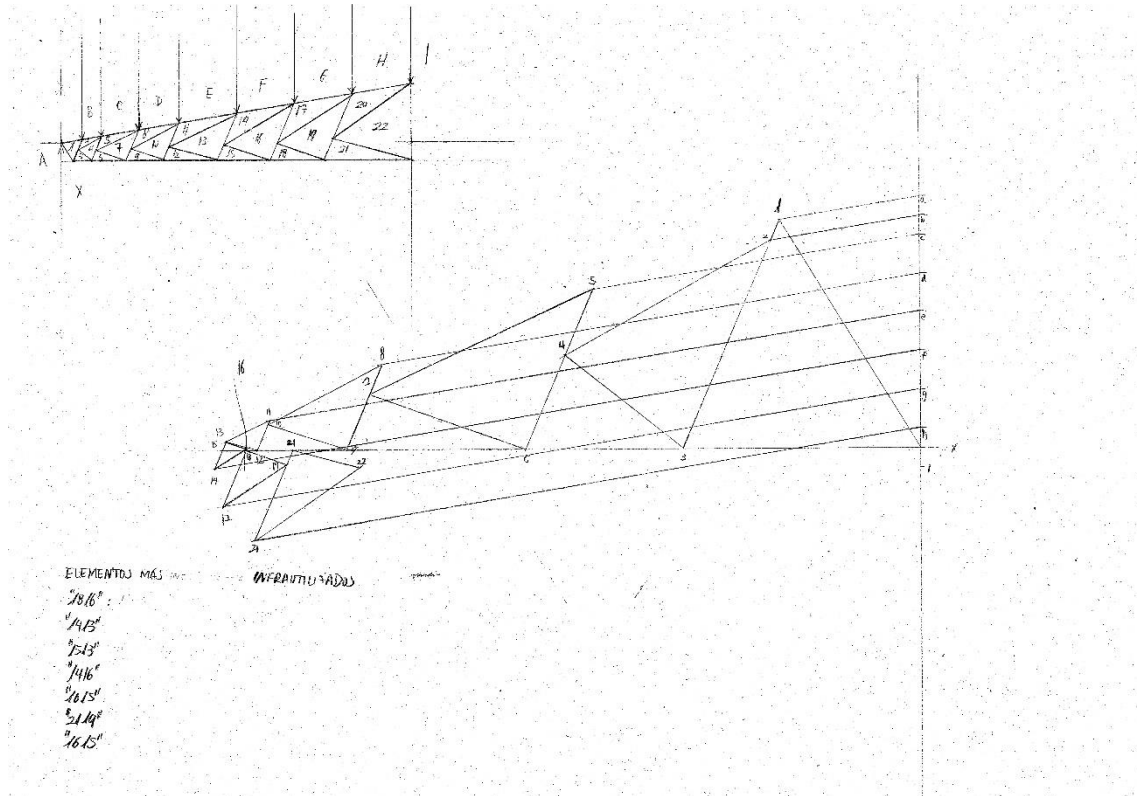


Figura 22. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema tipo “K”. Fuente: Elaboración propia.

En el segundo caso se decide combinar la tipología “K” con una geometría lenticular, además de incluir voladizos. Si se comparan los Diagramas de Fuerza de estos dos casos puede observarse cómo el segundo presenta un diagrama más compacto que el primero, resultando en una forma más eficiente para la hipótesis de carga aplicada a ambas. Los esfuerzos en las diagonales disminuyen considerablemente desde los apoyos al vano central.

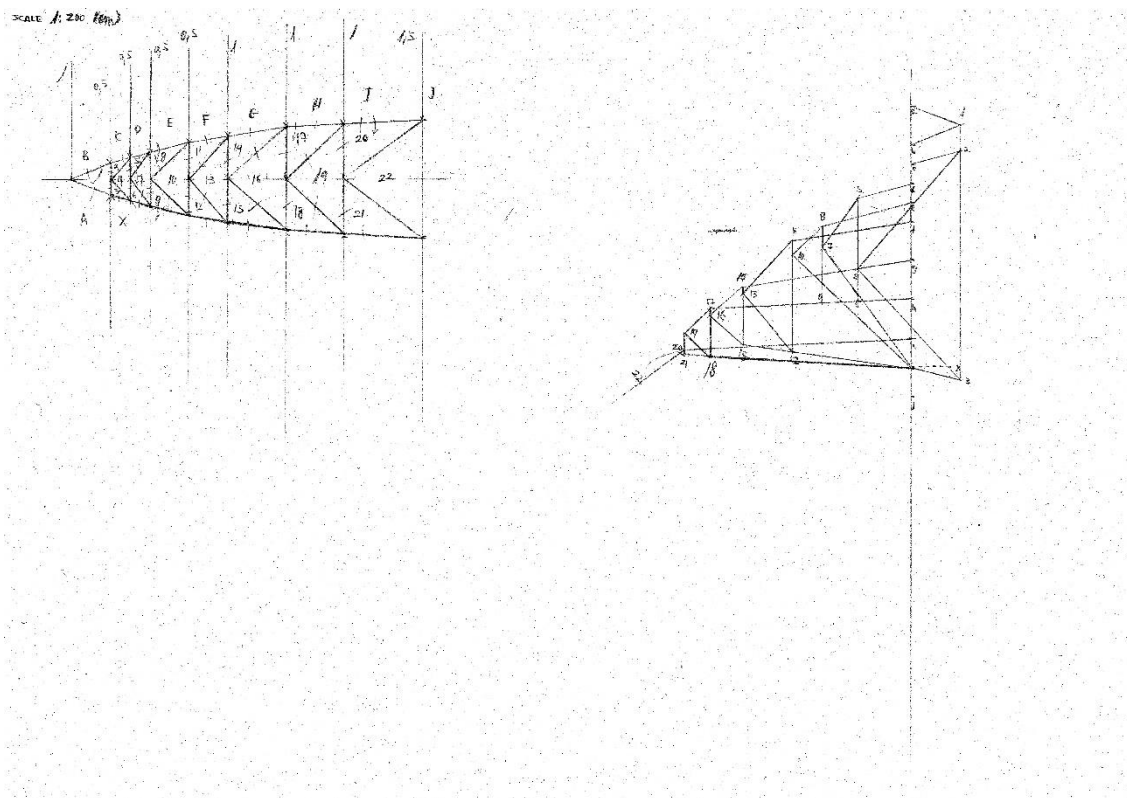


Figura 23. Diagrama de Forma y Diagrama de Fuerza, sistema tipo "K"-Lenticular. Fuente: Elaboración propia.

#### 1.4 Las herramientas para la creación de modelos gráficos.

La elaboración manual de diagramas tiene como principales ventajas la libertad de trazado de líneas y la no dependencia de software, en algunos casos de elevado coste. Y aunque estas sean buenas, las desventajas del método son algo molestas. Modificar parte de la geometría de un sistema implica tener que borrarla parcialmente o redibujar por completo el nuevo sistema, suponiendo esto una inversión de tiempo importante especialmente cuando se trata de un sistema con muchas barras. A esto hay que añadirle la acumulación de errores que se producen a lo largo del proceso de dibujo, ya que el trazado de paralelas entre diagramas puede no ser exacto. Otro inconveniente a tener en cuenta es el espacio de dibujo, a veces insuficiente si se emplea un folio de tamaño A4.

Entrando en el empleo de software, el primer tipo de herramienta en la que se pensaría para materializar diagramas como los de la Estática Gráfica es un programa de dibujo asistido por ordenador (CAD). Su uso elimina los problemas de exactitud en el dibujo consiguiendo que ésta sea total, y también los problemas asociados al espacio, proporcionando diagramas nítidos y precisos.

Otra ventaja que presenta es la velocidad en la elaboración del dibujo gracias a opciones del propio software como el trazado de paralelas, el recorte y extensión de líneas o la copia rápida de elementos. A su vez, el empleo de capas y diferentes colores permite ordenar los elementos del sistema de forma que su visualización e interpretación sean más sencillas, por ejemplo, para diferenciar aquellos elementos que se encuentran a tracción de los que se encuentran a compresión.

Aun suponiendo el uso de software CAD una mejoría respecto al método manual, sigue presentando algunos inconvenientes. De nuevo, la modificación de la geometría o de la magnitud y orientación de las cargas que actúan sobre la estructura implica tener que eliminar elementos y volver a construir el Diagrama de Fuerza. Esto no permite una visualización inmediata de cómo la modificación de un parámetro en el Diagrama de Forma afecta al Diagrama de Fuerza, algo que resulta de gran interés cuando se está analizando un diseño.

La figura 24 muestra unos diagramas creados mediante software CAD.

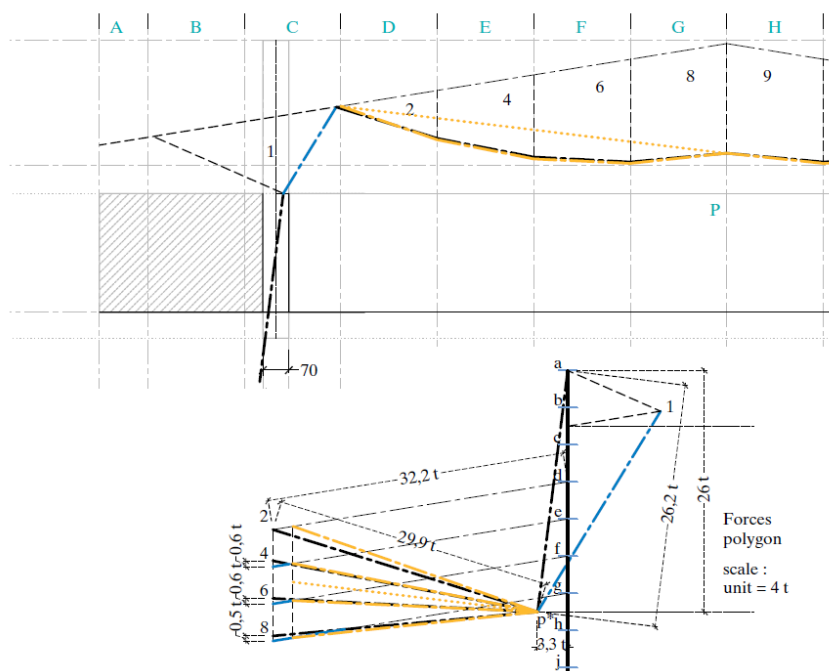


Figura 24. Ejemplo de diagramas realizados mediante CAD del Magazzini Generali de Maillart.  
Fuente: Zastavni (2008).

La siguiente herramienta es GeoGebra, software matemático gratuito que puede emplearse como aplicación web e incluso en dispositivos móviles. Las principales ventajas que presenta con respecto a los métodos anteriores son su versatilidad para generar diseños, y la reciprocidad total que crea entre el Diagrama de Forma y el Diagrama de Fuerza, que permite modificar un parámetro y ver inmediatamente los efectos de ese cambio en el otro diagrama, eliminando el mayor inconveniente encontrado en los otros métodos.

El autor incluye algunos modelos realizados con esta herramienta en este capítulo, con explicaciones que pretenden dar a entender el funcionamiento de los mismos y las posibilidades que ofrecen para variar parámetros.

En el primer modelo mostrado de Geogebra, correspondiente a la figura 25, pueden visualizarse los diversos elementos necesarios para confeccionar el modelo, además del menú de herramientas básicas disponibles para ello. Entre las herramientas disponibles y que más se emplean se encuentran el punto, segmentos, rectas, vectores, intersecciones, paralelas y equipolentes. En este primer sistema se buscaba determinar las reacciones en un sistema con cuatro cargas puntuales actuando sobre diferentes puntos de la viga.



El primer paso fue crear la geometría de la viga mediante segmentos y puntos. En segundo lugar se aplicaron las cargas sobre los nudos, empleando para ello vectores y rectas (discontinuas grises) asociadas a estos vectores, que representan sus líneas de acción. Posteriormente, se procede a generar el Diagrama de Fuerza, comenzando por los vectores de fuerzas. Es de interés mencionar que, en caso de que alguno de los vectores de las fuerzas aplicadas en el Diagrama de Forma cambiase de dirección, también cambiaría inmediatamente su vector recíproco en el Diagrama de Fuerza. Esta es una de las características más poderosas del empleo de Geogebra en la elaboración de modelos de Estática Gráfica.

Se genera ahora un polo, definido por la letra “U” en el Diagrama de Forma. A partir de dicho polo se trazan los radios hacia los vectores de las cargas, para posteriormente, de nuevo sobre el Diagrama de Forma, trazar el funicular de las cargas aplicadas y hallar la resultante de cargas.

Una vez determinada la resultante, y conocidas las condiciones de los apoyos se busca el punto de equilibrio de las tres. Se crean segmentos desde los puntos de apoyo al punto de equilibrio, a los cuales se asocian paralelas en el Diagrama de Fuerza, obteniendo las reacciones en dirección y magnitud, así como un polígono cerrado, condición de equilibrio.

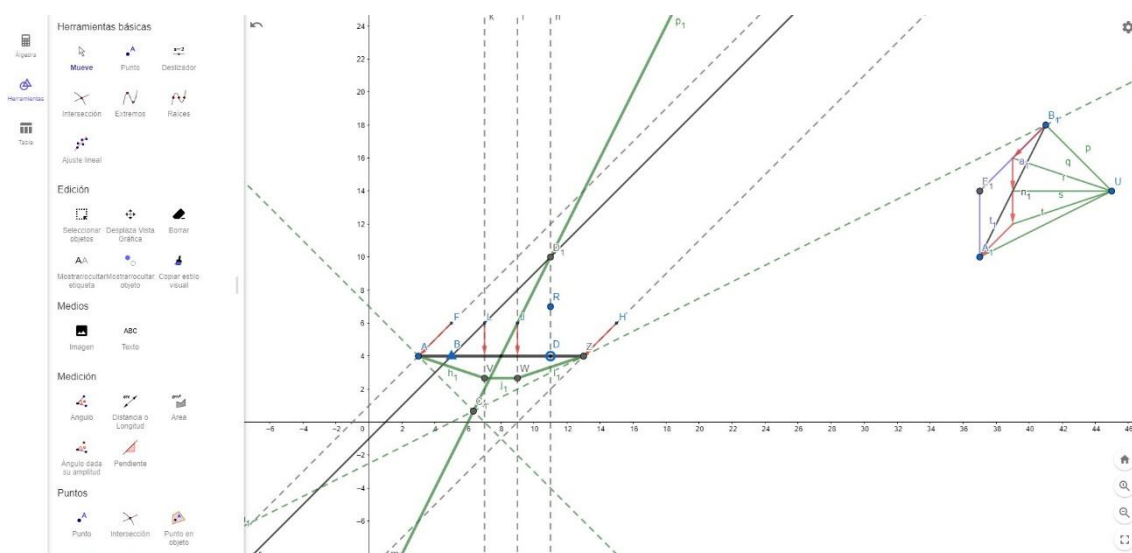


Figura 25. Búsqueda de las resultantes en un sistema elaborado en Geogebra. Fuente: propia.

El primer caso mostrado del empleo de Geogebra es un caso sencillo, que sirve para dar una visión clara e inicial de las posibilidades del software. Una consideración importante a tener en cuenta es el orden en el que se crean los elementos. Si se crea primero el elemento, por ejemplo una carga, en el Diagrama de Forma, el elemento paralelo en el Diagrama de Fuerza se generará a partir del que se haya creado primero. Se puede por tanto modificar la dirección y magnitud del primer elemento, afectando inmediatamente al segundo.

El siguiente caso ofrece incluso más posibilidades que el primero, aunque presenta algunas desventajas que se comentan más adelante.

Si se compara con el caso anterior, puede observarse que este modelo presenta una serie de elementos que no se encontraban antes. Este es el caso de las cargas variables, generadas mediante el uso de deslizadores. Estas cargas aparecen a la

izquierda, y su representación es una barra, con una bola, un nombre y un valor. A cada vector de carga aplicado sobre los nudos de la cercha se le ha asociado uno de estos deslizadores de carga, permitiendo variar el valor de la carga que se aplica sobre un nudo simplemente modificando el deslizador, y permitiendo así controlar la magnitud de cada una de las cargas que actúan sobre la estructura.

Otro elemento interesante es la casilla de control, cuyo nombre es “Polo y radios”. Dentro de esta casilla se alojan una gran cantidad de elementos que han sido necesarios para la elaboración de los diagramas, y mediante un click sobre este botón es posible ocultarlos o visualizarlos.

El modelo se elaboró pensando en hacerlo altamente interactivo y modificable. Es por ello que parte de los elementos del Diagrama de Formase han hecho fijos (nudos del cordón inferior) mientras que otros elementos son móviles, como los nudos del cordón superior y la dirección y magnitud de las cargas.

Siguiendo el proceso explicado para el primer caso se determinan las reacciones en los apoyos y la resultante del sistema. La reciprocidad entre los elementos del Diagrama de Forma y el de Fuerza es total, permitiendo el modelo modificar parámetros sobre el Diagrama de Forma y obtener una respuesta inmediata en el Diagrama de Fuerza.

Por último, se añade un listado a la derecha de los diagramas, el cual permite conocer el valor del esfuerzo axil en cada uno de los elementos del sistema. El modelo incluye, por tanto, cargas variables, Diagrama de Forma, Diagrama de Fuerza y resultados inmediatos.

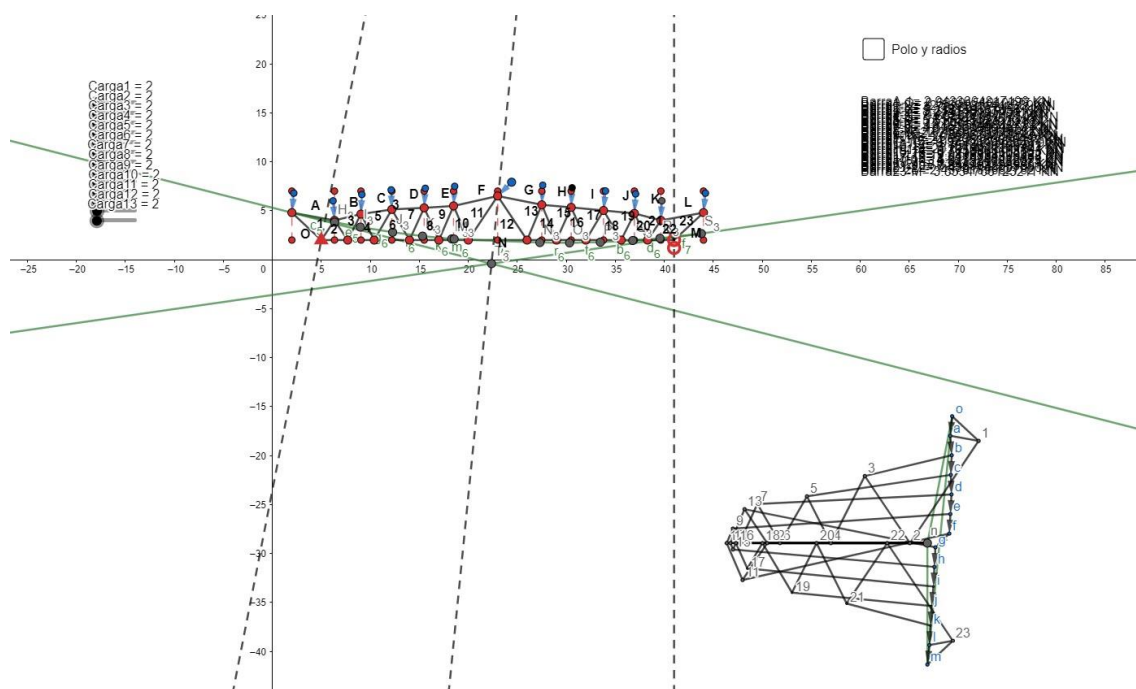


Figura 26. Diagramas de Forma y Fuerza con resultados numéricos elaborados en Geogebra.

Fuente: propia.

Para facilitar la visualización de los resultados, se ha redondeado el valor a dos decimales. La figura 27 muestra esos valores, ya que en la figura 26 resulta imposible distinguirlos.



BarraA-1= 2.94 KN  
 Barra1-O= 3.69 KN  
 Barra1-2= 12.57 KN  
 Barra2-N= 1.78 KN  
 BarraB-3= 9.12 KN  
 Barra3-2= 8.24 KN  
 Barra3-4= 7.68 KN  
 Barra4-N= 9.86 KN  
 BarraC-5= 14.84 KN  
 Barra5-4= 5.36 KN  
 Barra5-6= 5.51 KN  
 Barra6-N= 15.04 KN  
 BarraD-7= 19.83 KN  
 Barra7-6= 4.62 KN  
 Barra7-8= 4.4 KN  
 Barra8-N= 19.17 KN  
 BarraE-9= 22.24 KN  
 Barra9-10= 1.61 KN  
 Barra10-N= 20.48 KN  
 BarraF-11= 21.62 KN  
 Barra11-12= 4.53 KN  
 BarraG-13= 19.86 KN  
 Barra13-12= 4.16 KN  
 Barra13-14= 3.75 KN  
 BarraH-15= 20.62 KN  
 Barra15-14= 0.71 KN  
 Barra15-16= 0.71 KN  
 BarraL-17= 19.08 KN  
 Barra17-16= 2.84 KN  
 Barra17-18= 3.02 KN  
 BarraJ-19= 14.3 KN  
 Barra19-20= 5.64 KN  
 BarraK-21= 8.83 KN  
 Barra21-20= 6.9 KN  
 Barra21-22= 7.44 KN  
 BarraL-23= 2.44 KN  
 Barra23-M= 3.55 KN

☐ Polo y radios

Figura 27. Resultados numéricos. Fuente: propia

Una aplicación similar a Geogebra es la herramienta empleada habitualmente por el Block Research Group de la ETH de Zürich, grupo de investigación liderado por los doctores Philippe Block y Tom Van Mele. El grupo se especializa en el diseño y análisis estructural mediante métodos gráficos y en el desarrollo de software que permita encontrar y optimizar formas. En 2011 lanzaron la plataforma online *eEQUILIBRIUM*, en la que se encuentran múltiples recursos dedicados a las técnicas de diseño y análisis gráfico. Para ilustrar lo mencionado sobre el uso de GeoGebra, se muestran algunos modelos proporcionados en la plataforma dentro de su sección *Drawings*.

La primera comparativa muestra una cercha de cordones paralelos sometida al mismo sistema de cargas. En el primer caso, tipología Howe (figura 28), las diagonales se encuentran sometidas a compresión bajo la acción de las cargas. En el segundo caso, tipología Pratt (figura 29), las diagonales cambian de dirección, encontrándose ahora traccionadas. La asignación de colores (azul para compresión, rojo para tracción), y el cambio observable entre Diagramas de Fuerza, permiten analizar de manera rápida las consecuencias del cambio de dirección de las diagonales en el Diagrama de Forma.

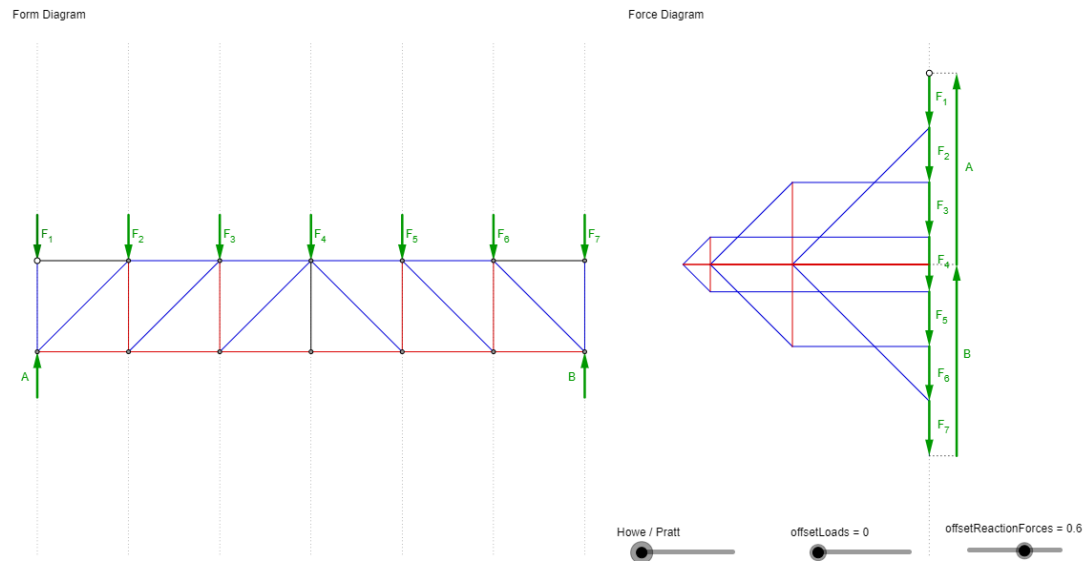


Figura 28. Diagramas de Forma y Fuerza de una cercha Howe. Fuente: eEQUILIBRIUM, Block Research Group, ETH Zürich.

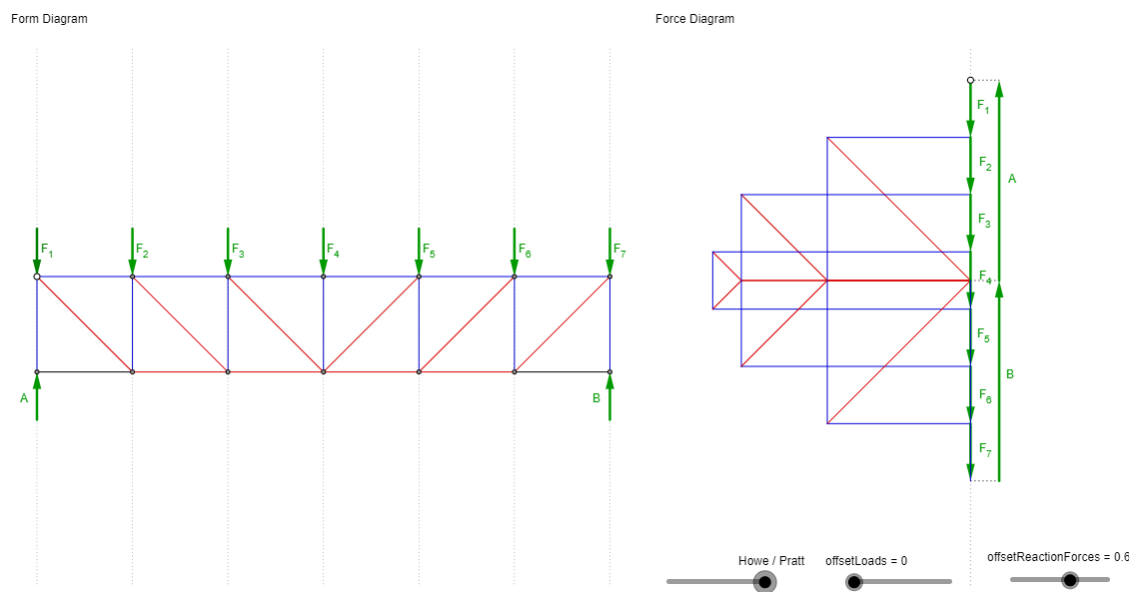


Figura 29. Diagramas de Forma y Fuerza de una cercha Pratt. Fuente: eEQUILIBRIUM, Block Research Group, ETH Zürich.

El segundo modelo muestra un funicular de cargas en el que se permite modificar la dirección de aplicación de las cargas y cambiar la posición vertical de los nudos extremos del funicular y de un nudo del segmento central. La figura 30 muestra una posición inicial del funicular, mientras que la figura 31 se ha modificado la posición del nudo central. Al hacer que los segmentos del funicular sean más horizontales, las fuerzas en éstos tienen que aumentar. Este cambio se ve representado inmediatamente en el Diagrama de Forma.

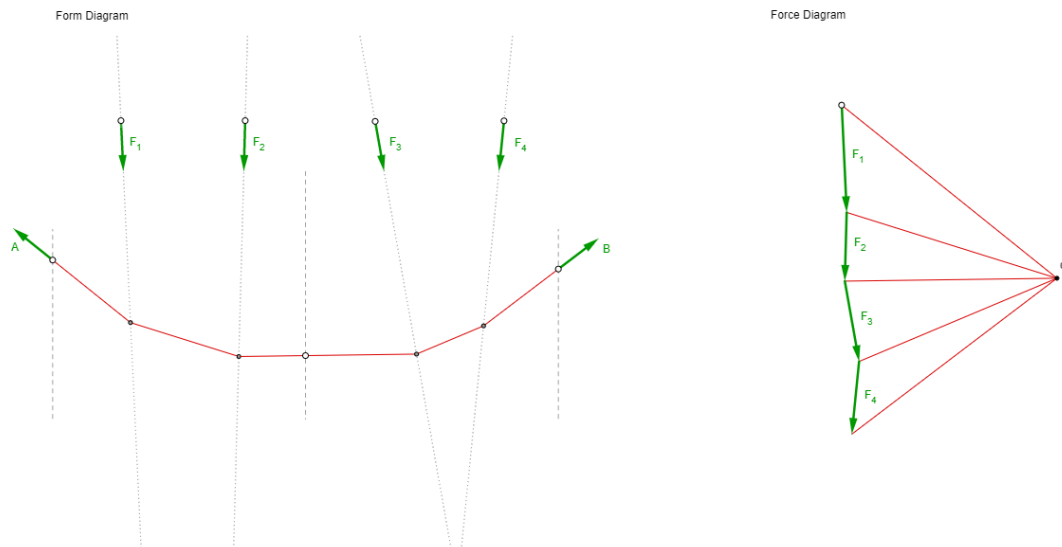


Figura 30. Estado 1 de un funicular de cargas. Fuente: eQUILIBRIUM, Block Research Group, ETH Zürich.

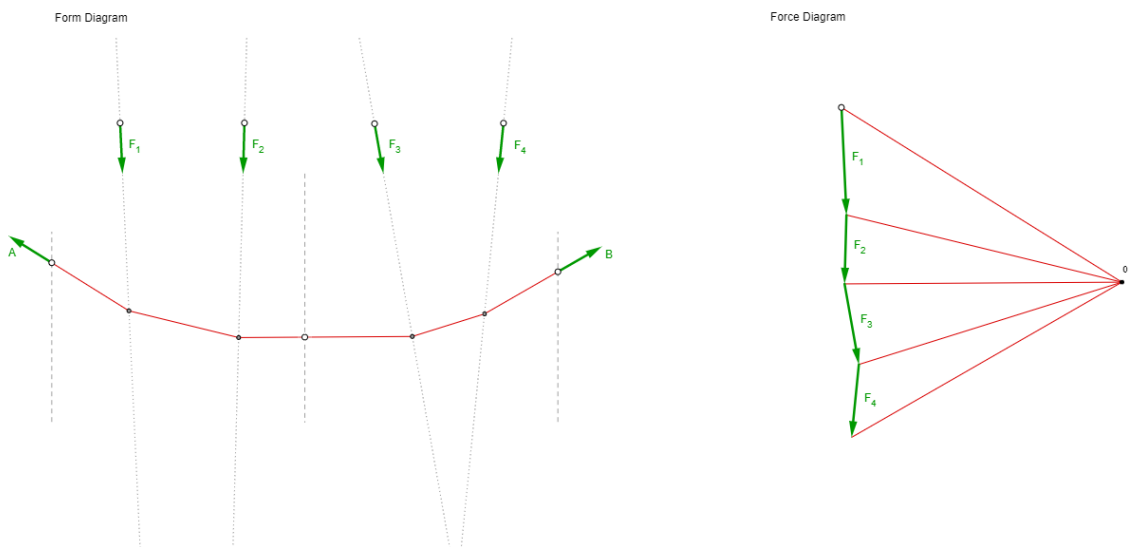


Figura 31. Estado 2 de un funicular de cargas. Fuente: eQUILIBRIUM, Block Research Group, ETH Zürich.

Otra herramienta interesante es structureFIT. Se trata de una aplicación web lanzada en 2014 por Caitlin Mueller y el MIT. Ésta busca integrar el diseño arquitectónico con el comportamiento estructural, proporcionando diseños y conceptos iniciales más eficientes. La aplicación emplea algoritmos evolucionarios interactivos, permitiendo explorar diversas soluciones al problema planteado.

La introducción de la geometría puede hacerse de forma precisa si se definen de forma previa las coordenadas de los nudos de la misma. Las cargas se introducen sobre los nudos en direcciones verticales, horizontales o ambas sobre el mismo nudo.

A los nudos se les pueden aplicar restricciones de movimiento en dirección vertical y horizontal, y puede establecerse antes de correr el modelo que los nudos puedan variar su posición o que por el contrario sean fijos. A cada nudo se le pueden aplicar las condiciones aquí descritas que se desee.

La figura 32 muestra una estructura creada en la aplicación de acuerdo a la explicación proporcionada. Las cargas verticales están aplicadas sobre los nudos y tienen todas el mismo valor. El modelo se procesa una vez se definido, comprobándose la estabilidad de la estructura, la definición de las variables y la definición de las cargas.

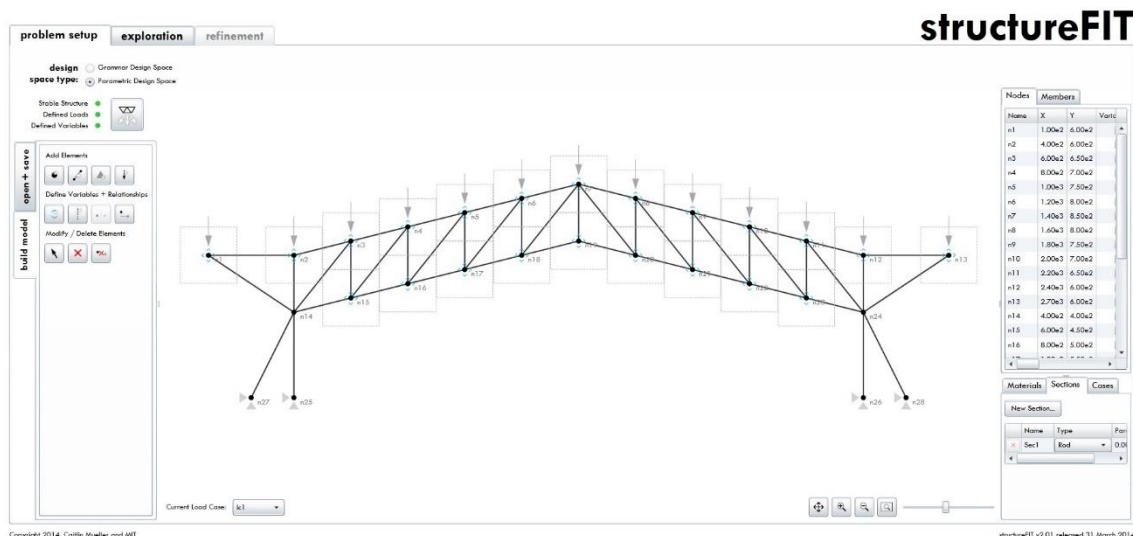


Figura 32. Diseño inicial de una estructura en structureFIT. Fuente: Elaboración propia.

Una vez procesado se accede a la pestaña de exploración (figura 33). En esta pestaña se generan diferentes geometrías a partir de un valor del ratio de mutación y del tamaño de generación. Los valores numéricos mostrados indican el volumen normalizado requerido en base al diseño inicial.

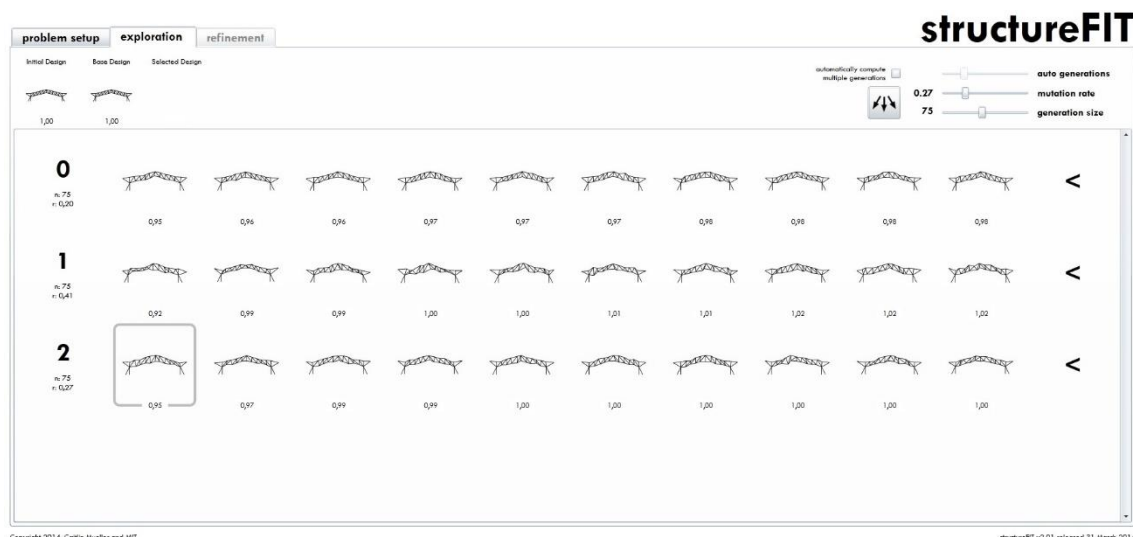


Figura 33. Fase de exploración de la geometría de una estructura en structureFIT. Fuente: Elaboración propia.

Después de seleccionar una de las geometrías generadas en la fase de exploración se accede a la pestaña de refinado (figura 34). En esta pestaña aparece una tabla con información sobre los nodos y los miembros de la estructura, entre la que se encuentra la posición de los nodos de las barras, la longitud de cada una, la fuerza en el miembro o el momento de inercia de la sección. Es posible modificar la posición de los nodos,

viéndose modificados los valores de la tabla de nodos y miembros y el valor del resultado relativo.

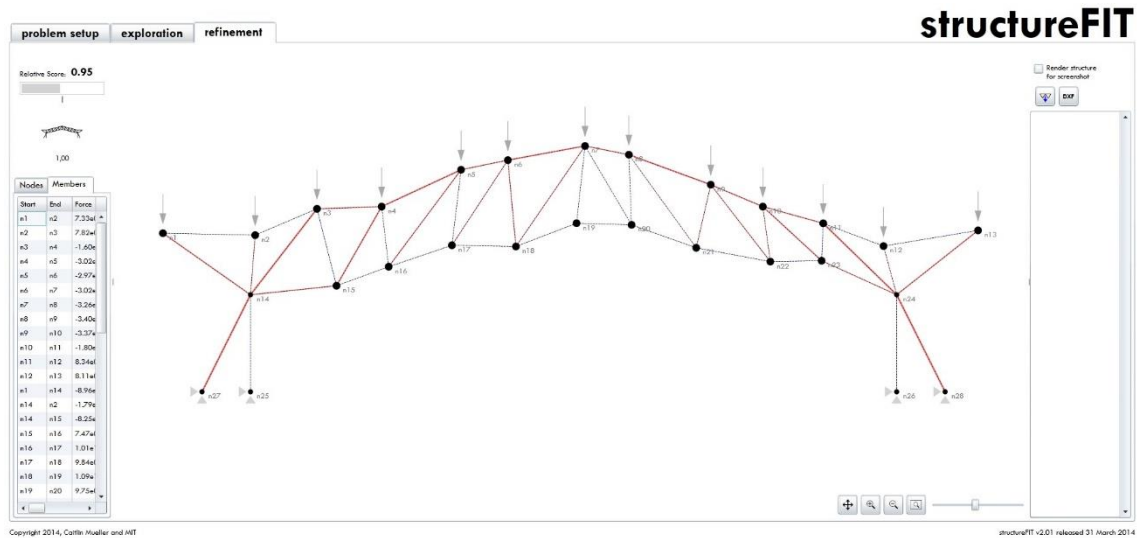


Figura 34. Fase de refinado de una estructura en structureFIT. Fuente: Elaboración propia.

Se proporciona un segundo ejemplo, en este caso una estructura triangulada (figura 35) con una geometría poco convencional. El procedimiento seguido es el mismo que en el caso anterior, mostrándose la exploración en la figura 36 y el refinado en la 37.

Cabe mencionar que esta aplicación presenta problemas de compatibilidad con varios buscadores web, siendo su funcionamiento estable, o fácilmente accesible al menos, solamente en versiones antiguas de Internet Explorer. La futura desaparición de éste buscador imposibilitará o hará bastante complicada la utilización de esta aplicación.

Aunque structureFIT resulta de gran interés y asienta un camino en la investigación de la optimización estructural, el autor prefiere emplear en este trabajo la ya mencionada herramienta GeoGebra, en la que sí resulta posible analizar la relación inmediata entre los diagramas de Forma y Fuerza.

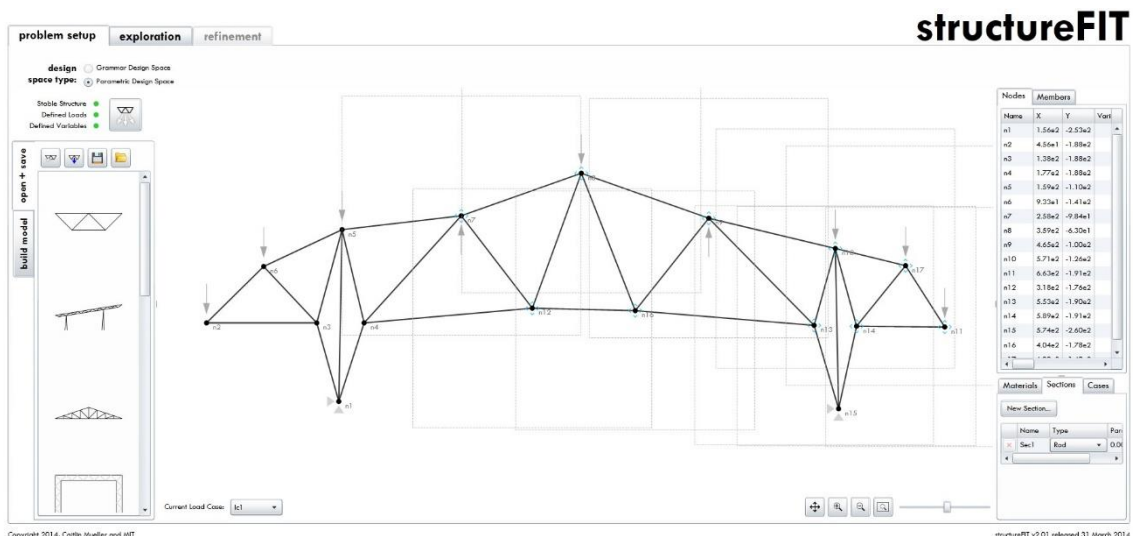


Figura 35. Diseño inicial de una estructura triangulada en structureFIT. Fuente: Elaboración propia.

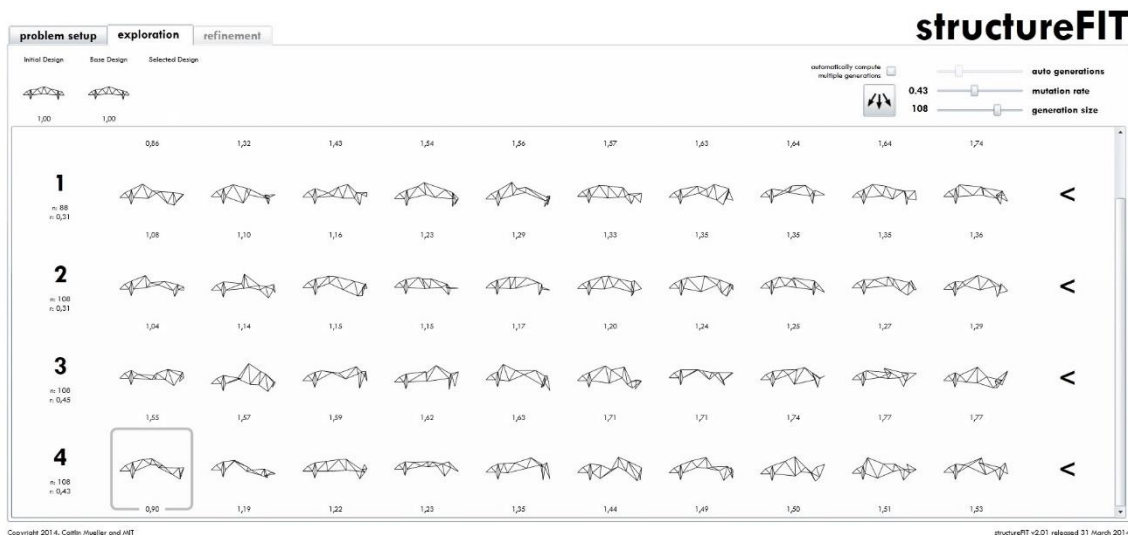


Figura 36. Fase de exploración de la geometría de una estructura triangulada en structureFIT. Fuente: elaboración propia.

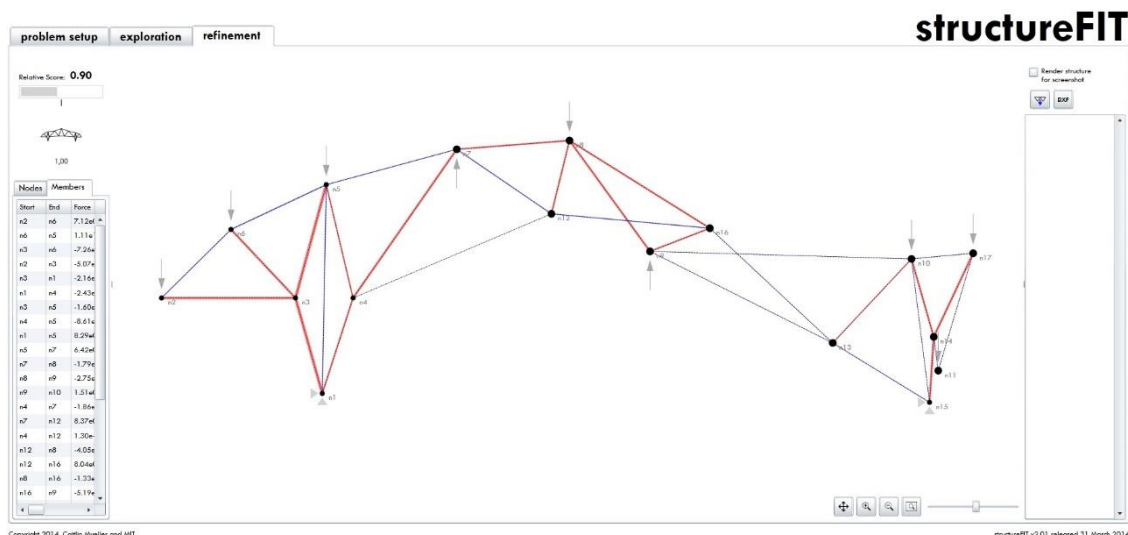


Figura 37. Fase de refinado de una estructura triangulada en structureFIT. Fuente: elaboración propia.

Con esto quedan descritas varias herramientas que pueden ser empleadas en el proceso de diseño. Se consideran, por su disponibilidad y capacidades, como alternativas más interesantes, AutoCAD y Geogebra. Una condición importante a la hora de seleccionar una herramienta es el tiempo necesario para elaborar modelos y el tiempo de aprendizaje para manejarla. Si bien Geogebra proporciona modelos altamente modificables e interactivos, el tiempo de elaboración para modelos complejos es elevado, y exige tener muy en cuenta el orden en el que se crean los elementos, como ya se había comentado anteriormente. Cuanto más aumenta un modelo en complejidad, mayor es el número de elementos necesarios para generar los diagramas, pudiendo dar lugar esto a intersecciones erróneas entre elementos y a la necesidad de empleo de opciones auxiliares para favorecer la visualización de aquellos elementos que realmente interesan.

Es por esto que una herramienta CAD puede considerarse como suficiente para la elaboración de diagramas. Aunque carezca de ese comportamiento interactivo que

posee Geogebra, si se conocen entre dos y tres hipótesis de carga que se consideren como las más relevantes, pueden crearse los correspondientes Diagramas de Fuerza en un tiempo relativamente bajo. En capítulos posteriores de este texto se presentan alternativas de diseño analizadas mediante el empleo de CAD.

## 1.5 La estructura. Inspiración, alternativas de diseño y criterios.

El diseño de la estructura objeto de este trabajo viene condicionada por diferentes factores y criterios. En el nivel funcional, la estructura busca generar un espacio diáfano y luminoso, con un alto nivel de funcionalidad, pudiendo llegar a compartimentarse en caso de que resultase necesario durante la vida útil de la estructura. En primer lugar se revisa el apartado relacionado con el concepto estructural y con la inspiración detrás del diseño de la geometría de la estructura.

El primero concepto que se aplica en el diseño de la cubierta de estructura, elemento que se considera una prioridad de la misma, es el cambio en la ley de momentos y la reducción de la deformación en el centro de vano. La siguiente imagen muestra de una forma sencilla el concepto que se acaba de mencionar. El motivo por el cual la figura se realiza a mano es para enfatizar que esta primera fase del diseño parte de un boceto realizado sin necesidad de recurrir a un software especializado.

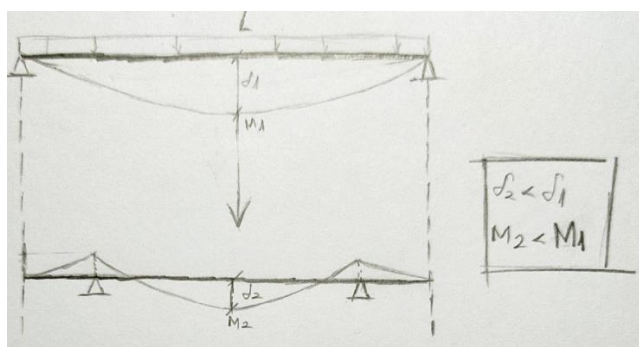


Figura 38. Concepto inicial del diseño. Fuente: elaboración propia.

En las diferentes alternativas de diseño se ha explorado el cambio en las condiciones de apoyo, modificando así el porcentaje de voladizos respecto a la longitud total de la cubierta. El concepto expresado en la figura 38 supone que ambos casos se encuentran sometidos al mismo sistema de cargas.

Este concepto inicial se trasladó posteriormente a las diferentes alternativas de diseño. Estas alternativas se analizaron empleando métodos gráficos en CAD, consiguiendo con ello la máxima exactitud en los Diagramas de Forma y Fuerza.

Se muestran ahora las alternativas seleccionadas del diseño de la cercha del edificio, añadiendo una breve descripción de cada una. Algunas de ellas son bastante similares entre sí, cambiando ligeramente la geometría o las condiciones de apoyo.

### Alternativa de diseño 1.

La primera alternativa (figura 39) que se muestra presenta una geometría cercana a la lenticular, con un cordón inferior rectilíneo y con una disposición de montantes y diagonales que genera formas de 'K'. La profundidad de la sección central es de 4,8 m. La dimensión de cada uno de los módulos 'K' se ha definido intentando que los ángulos

que forman las barras cada módulo se encuentren entre los 30 y los 60°. Las dimensiones para todos los diseños vienen expresadas en mm.

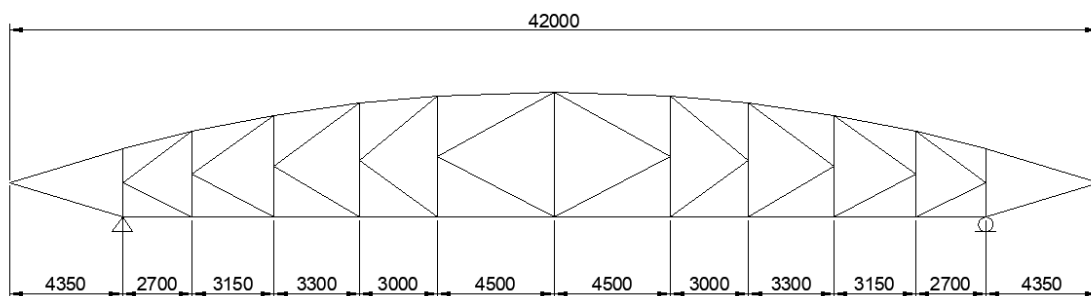


Figura 39. Geometría diseño 1. Fuente: elaboración propia.

La figura 40 muestra la distribución de cargas aplicadas sobre los nudos de la cercha. Se emplea la notación de Bow para identificar los espacios interiores y exteriores delimitados por la geometría y las cargas.

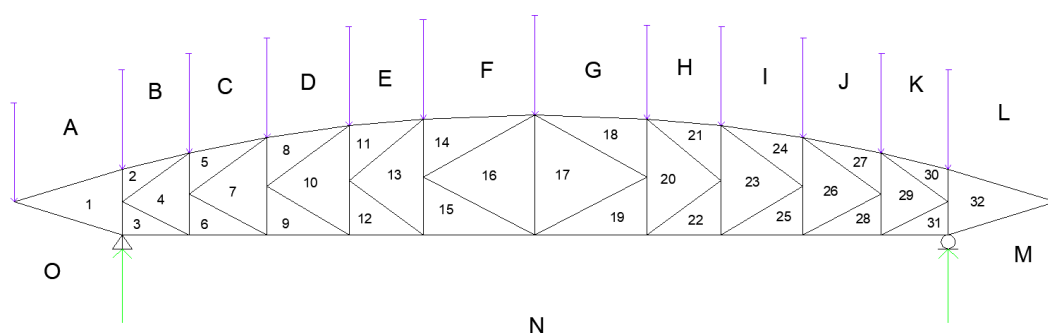


Figura 40. Diagrama de Forma para el diseño 1. Fuente: elaboración propia.

El Diagrama de Fuerza asociado a esta geometría y cargas (figura 41) parece compacto. La línea vertical de mayor longitud, de color morado, representa a las fuerzas aplicadas sobre los nudos de la cercha. Los elementos que aparecen a la derecha de esta son consecuencia de la existencia de voladizos. Puede observarse como el valor del esfuerzo en las barras, que viene directamente relacionado con su longitud, es especialmente alto en los montantes y las diagonales iniciales de la cercha, disminuyendo el valor de los esfuerzos para estos elementos a medida que nos aproximamos al centro de vano, y aumentando por el contrario el esfuerzo en los elementos de los cordones superior e inferior.



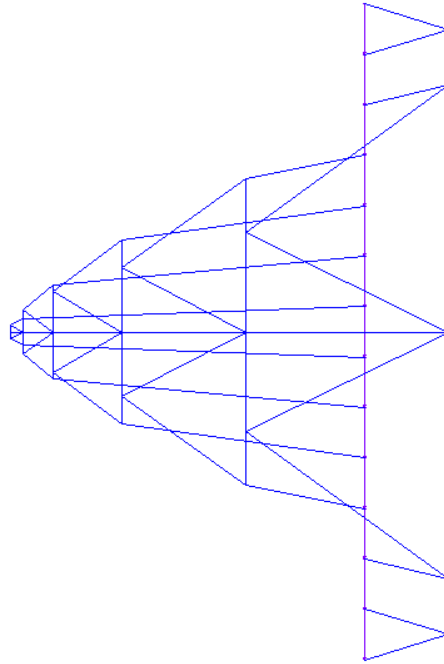


Figura 41. Diagrama de Fuerzas para el diseño 1. Fuente: elaboración propia.

### Alternativa de diseño 2.

El diseño 2 (figura 42) presenta la diferencia, respecto al diseño 1 de la distribución de montantes y diagonales. En este diseño se ha optado por una distribución más habitual, empleándose una tipología Howe, con la intención de hacer que los elementos comprimidos sean las diagonales, de mayor longitud que los montantes. Esta decisión es la contraria a la que se tomaría en caso de que el material principal empleado en la cercha fuese acero, para el cual, por motivos de esbeltez, se buscaría que los elementos de mayor longitud estuviesen sometidos a tracción. En comparación con la alternativa de diseño 1, esta alternativa implicaría una mayor simplicidad en el proceso constructivo de la cercha, debido a la disminución del número de nudos a ejecutar, y por tanto de elementos o barras a ensamblar, posicionándola como una mejor alternativa.

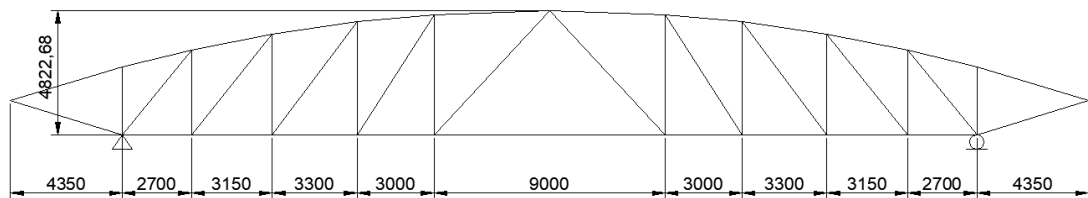


Figura 42. Geometría diseño 2. Fuente: elaboración propia.

Las figuras 43 y 44 muestran los diagramas de Forma y de Fuerza correspondientes al diseño 2.

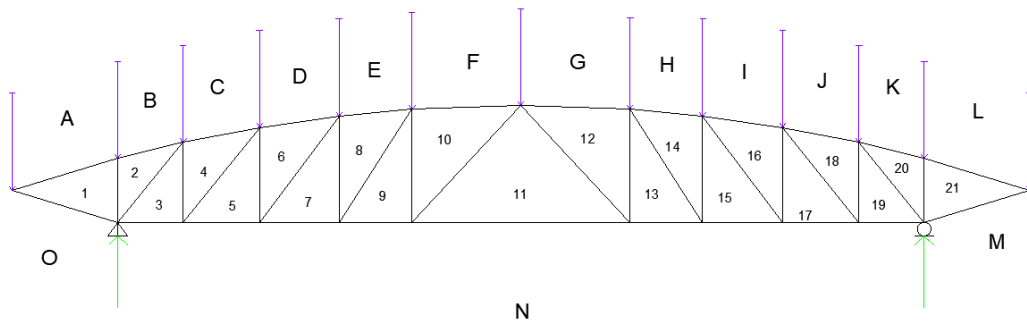


Figura 43. Diagrama de Forma para el diseño 2. Fuente: elaboración propia.

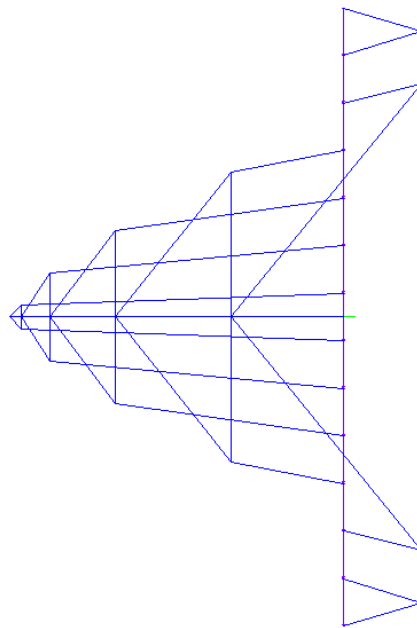


Figura 44. Diagrama de Fuerzas para el diseño 2. Fuente: elaboración propia.

### Alternativa de diseño 3.

Las alternativas 3, 4 y 5 poseen además un componente de inspiración estética, que busca generar una sensación o imagen similar a la de los tradicionales tejados orientales de los templos y edificios conocidos comúnmente bajo el nombre de *Pagoda*, como el mostrado en la figura 45, siendo estas unas de las construcciones en madera más reconocibles y notorias.



Figura 45. Donhwangum, entrada principal del palacio de Changdeokgung. Fuente: The Korean Herald. (<http://www.koreaherald.com/view.php?ud=20190221000282>)

En el diseño número 3 (figura 46) se ha optado por una tipología Warren para las diagonales, sin disponer de ningún montante adicional.

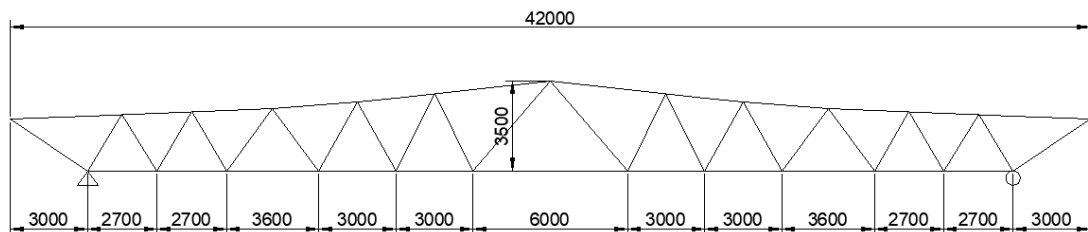


Figura 46. Geometría diseño 3. Fuente: elaboración propia.

Las figuras 47 y 48 muestran el Diagrama de Forma y el diagrama de Fuerza asociados a esta estructura. El Diagrama de Fuerzas recíproco al de forma es compacto, repitiéndose patrones o características vistas anteriormente, como el aumento de los esfuerzos en las barras del cordón superior a medida que nos acercamos al centro de la cercha, o la disminución en los esfuerzos en las diagonales cuando nos alejamos de los apoyos.

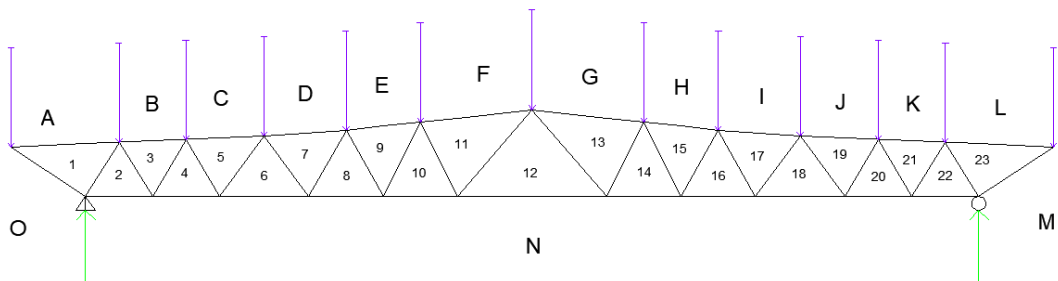


Figura 47. Diagrama de Forma para el diseño 3. Fuente: elaboración propia.

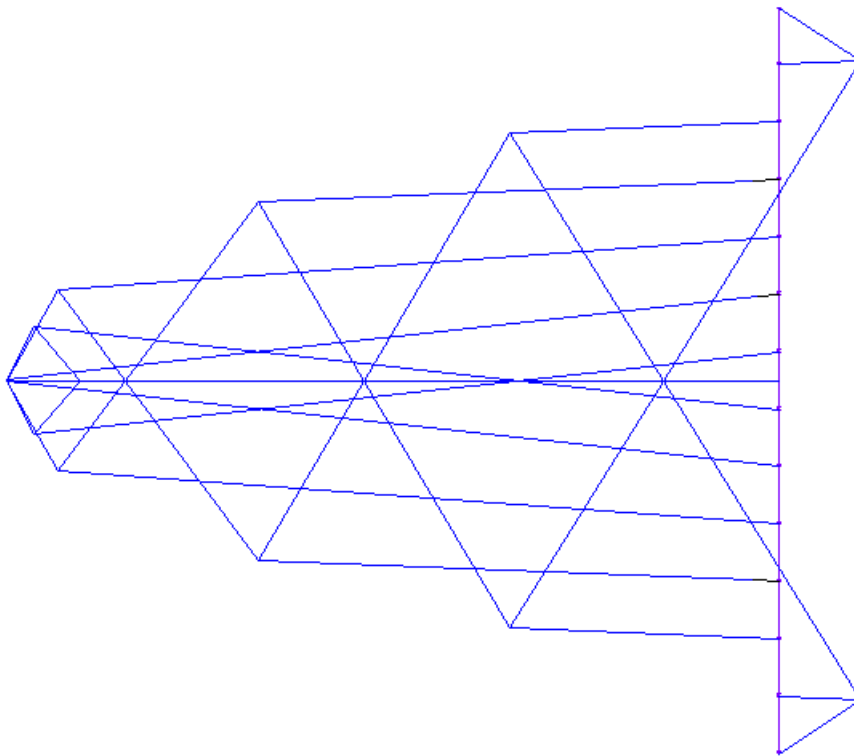


Figura 48. Diagrama de Fuerzas para el diseño 3. Fuente: elaboración propia.

#### Alternativa de diseño 4.1

La alternativa 4, que se divide en 2 opciones (figura 49 y 53), es una iteración de la tercera alternativa, presentando varios cambios en su geometría. La tipología asociada a las diagonales de la cercha cambia de una Warren a una Howe. Existen otras diferencias claras, como la profundidad de la cercha en su centro, o la situación de los apoyos. Las pendientes en cubierta son de  $3^\circ$  para el voladizo y de  $8^\circ$  para el resto de la cubierta. Las figuras 50 y 51 muestran el Diagrama de Forma y Fuerza de esta alternativa.

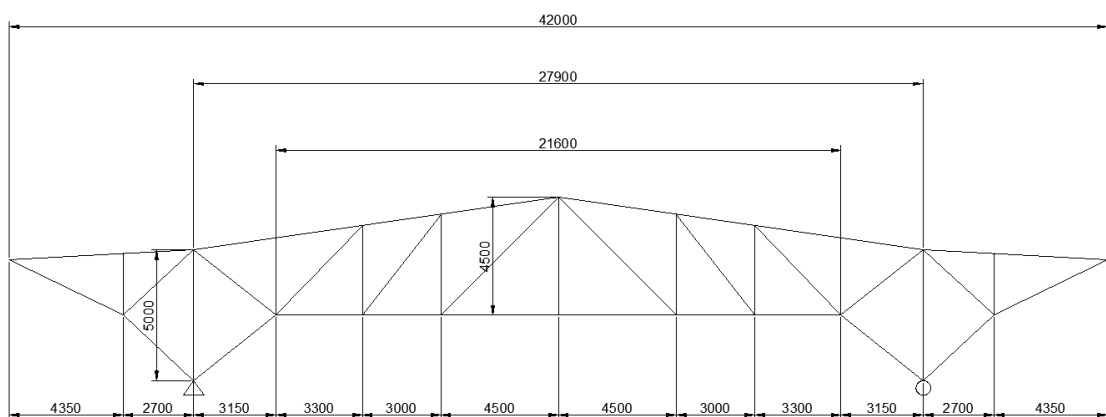


Figura 49. Geometría diseño 4. Fuente: elaboración propia.

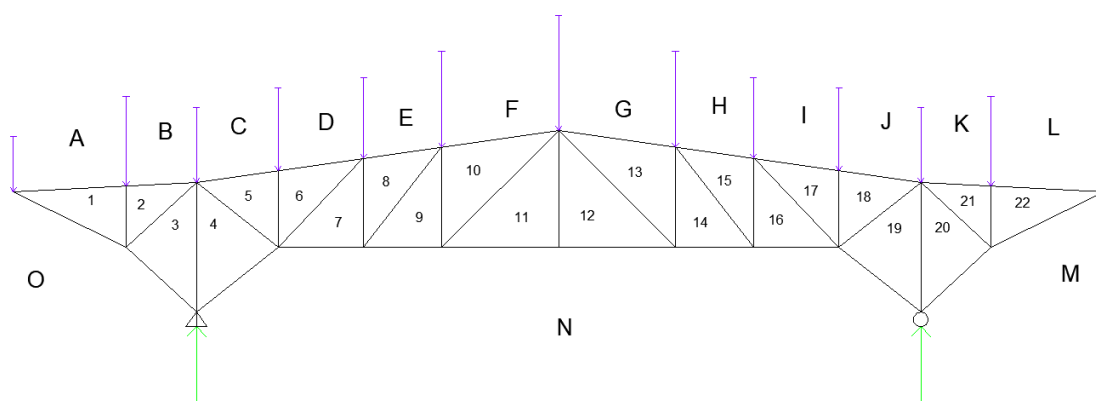


Figura 50. Diagrama de Forma para el diseño 4.1. Fuente: elaboración propia.

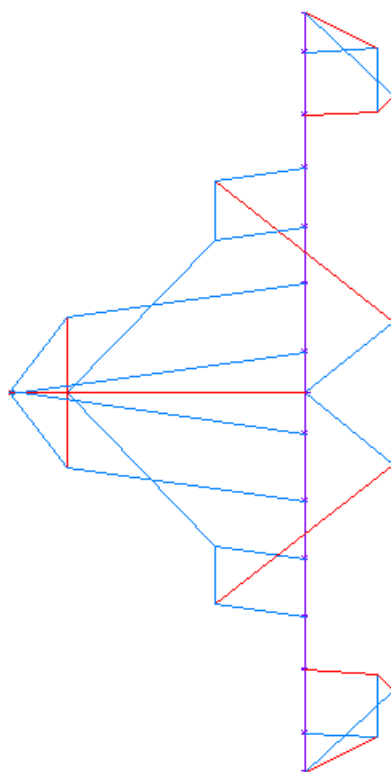


Figura 51. Diagrama de Fuerzas para el diseño 4.1. Fuente: elaboración propia.

Para esta alternativa se propone emplear la disposición de pilares de la figura 52.

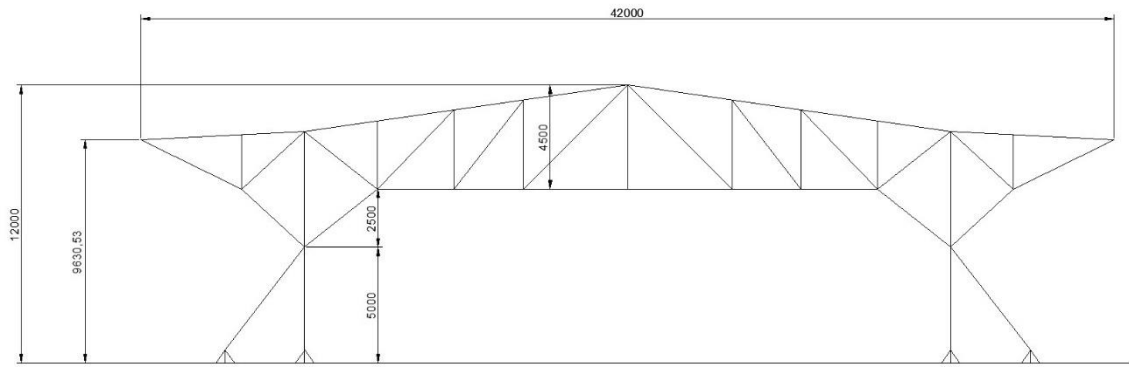


Figura 52. Disposición de pilares para la Alternativa 4.1. Fuente: elaboración propia.

### Alternativa de diseño 4.2

Se decide numerar a la siguiente alternativa como 4.2 (figura 53) debido a que su geometría es muy similar a la de la alternativa 4.1. La diferencia principal radica en que dos de las barras que formaban la cercha se han extendido hasta la base de la estructura generando los pilares de la misma. Las figuras 54 y 55 muestran el Diagrama de Forma y Fuerza de esta alternativa.

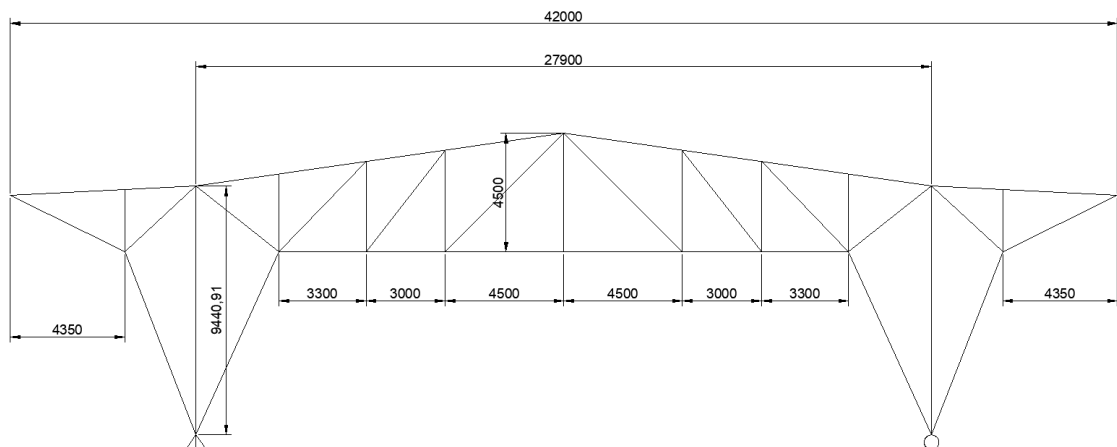


Figura 53. Geometría del diseño 4.2. Fuente: elaboración propia.

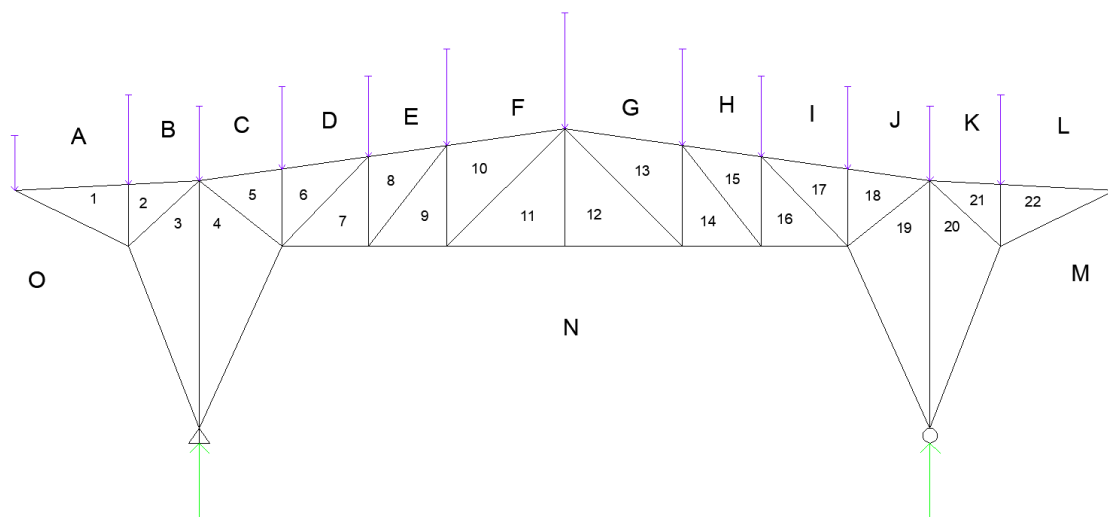


Figura 54. Diagrama de Forma para el diseño 4.2. Fuente: elaboración propia.

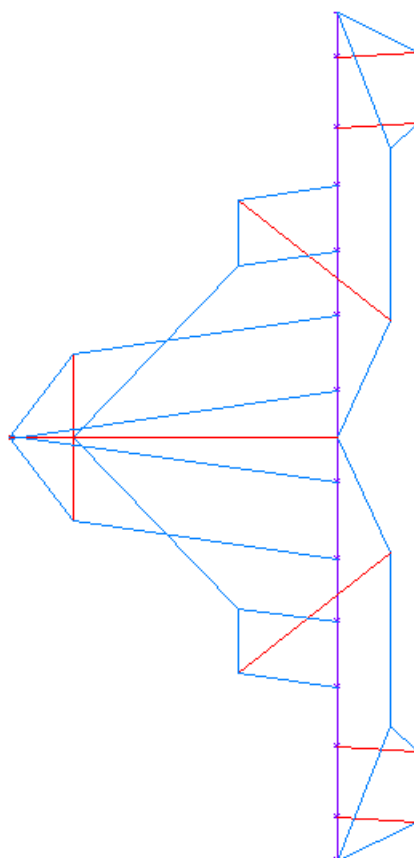


Figura 55. Diagrama de Fuerzas para el diseño 4.2. Fuente: elaboración propia.

### Alternativa de diseño 5.

La quinta y última alternativa presentada (figura 56) en esta sección es una iteración directa de la Alternativa 3. En ella se han añadido los montantes a la geometría. Si se comparan los Diagramas de Fuerza de los diseños 3 y 5, se observa como las esfuerzos en los montantes son de poca magnitud comparados con los de las diagonales, funcionando principalmente como un elemento que reduciría la longitud de pandeo de



los elementos del cordón superior. La alternativa 3 se considera como una mejor opción a la alternativa 5. Las figuras 57 y 58 muestran el Diagrama de Forma y Fuerza de esta alternativa.

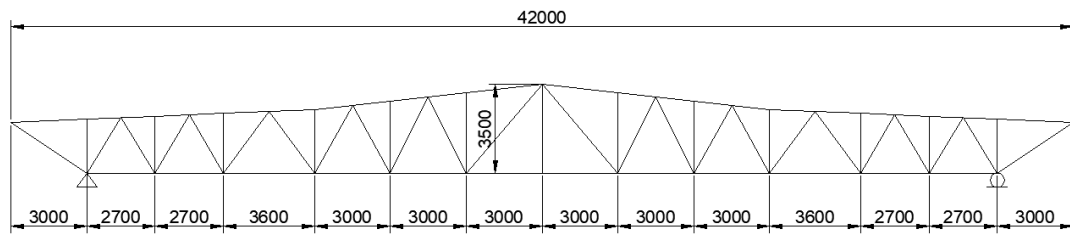


Figura 56. Geometría diseño 5. Fuente: elaboración propia.

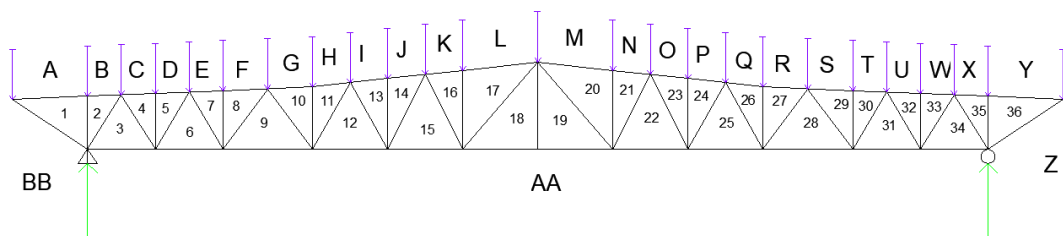


Figura 57. Diagrama de Forma para el diseño 6. Fuente: elaboración propia.

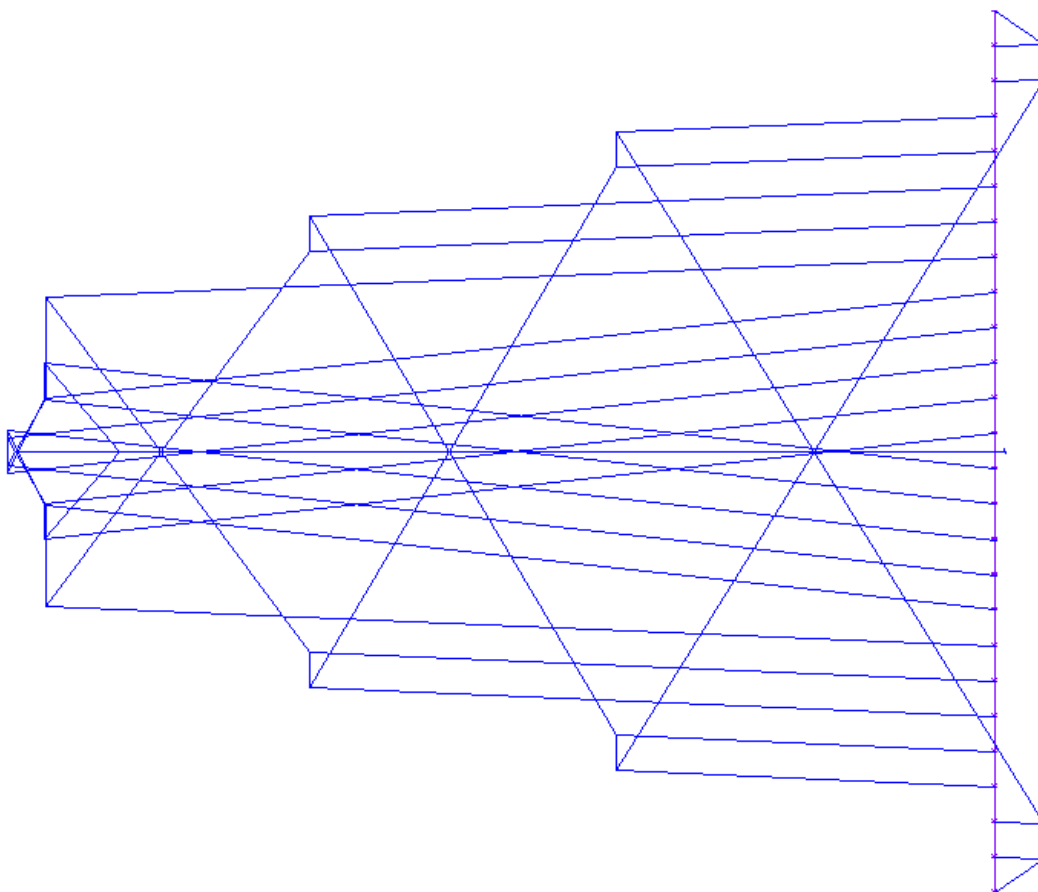


Figura 58. Diagrama de Fuerzas para el diseño 5. Fuente: elaboración propia.

Las diferentes alternativas mostradas en este capítulo se encuentran todas ellas sometidas a una hipótesis de cargas actuando en la dirección de la gravedad. Comparar los Diagramas de Fuerza de cada una de ellas permite realizar una primera valoración para decidir qué alternativa es superior. Esta comparativa se basa en observar la compacidad del Diagrama de Fuerza. A mayor compacidad del diagrama menores son los esfuerzos en las barras de la estructura.

Sin embargo este criterio de compacidad no se considera suficiente, ya que no trata de una comparación cuantitativa entre alternativas. En un capítulo posterior se empleará el Teorema de Maxwell para dar solución a este problema, comparándose las Alternativas 3, 4.1, 4.2, y 5.

## **2. Las estructuras de madera. Repaso histórico y propiedades.**

El empleo de la madera como elemento constructivo ha formado parte del desarrollo de la civilización desde sus inicios, constituyendo el principal recurso que permitía crear pequeños refugios y espacios habitables. La disponibilidad de la madera, que se encontraba en el medio natural, y sus características, destacando principalmente su ligereza, lo convertían en un material idóneo en un tiempo en el que las técnicas constructivas como tal se encontraban en zona 0 o en nacimiento.

Con el paso del tiempo este material estableció su lugar como protagonista en la construcción y arquitectura de algunas culturas, como es el caso de la asiática, caracterizada por las casas de madera y por las torres y templos que se elevan sobre una base rocosa.

Resulta de interés el analizar algunas de las razones por las que se extendió tanto el uso de este material en algunas zonas. En el mencionado caso de Asia, uno de los motivos principales era la abundancia de materia prima que podía conseguirse de las masas forestales. La alta disponibilidad asociada al material lo convertía en una primera opción. Esta tendencia al uso del material de mayor disponibilidad es común a todas las civilizaciones y zonas, y es principal motivo de la arquitectura o construcción tradicional que las caracteriza.

Otra razón para el empleo predominante de un material determinado en una zona es la relación entre las características mecánicas de dicho material y las acciones accidentales a las que pueda verse expuesta la estructura durante su vida útil. Por ejemplo, uno de los países donde más se ha empleado la madera como material tradicional de construcción es Japón, país caracterizado por una alta actividad sísmica. Las propiedades de la madera hacen de ella un material superior frente a acciones dinámicas, especialmente si se compara con materiales como la piedra, de extendido uso en zonas mediterráneas y europeas, caracterizadas por la construcción en mampostería. La necesidad de resistir este tipo de acciones llevó a la concepción y desarrollo de uniones entre elementos tan complejas como el sistema *dougong*, consistente en un intrincado sistema de piezas unidas metódicamente y que mejoraban el comportamiento estructural frente al sismo. La figura 59 muestra este sistema, donde aparece el nombre de cada una de las piezas.

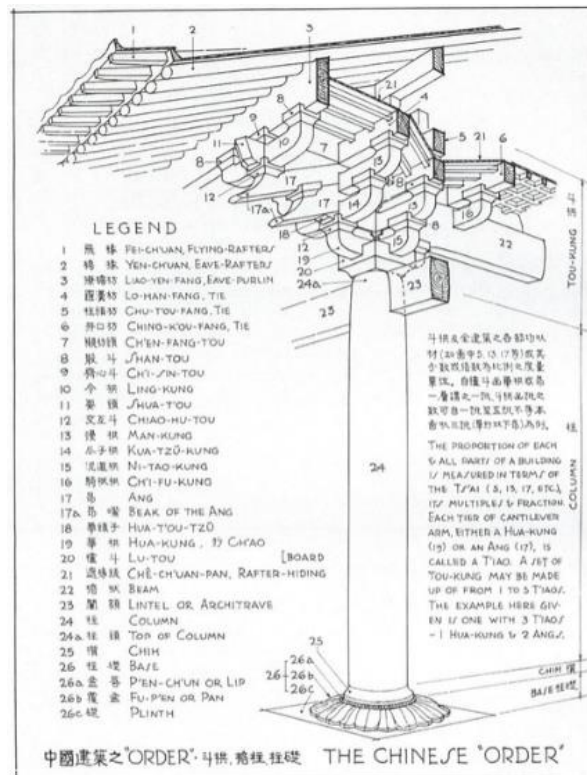


Figura 59. Los múltiples componentes del sistema dougong. Fuente: Liang Sicheng. Archdaily.

Estos métodos tradicionales de unión y ensamblaje de elementos estructurales han sido recientemente adaptados a algunas de las obras más singulares realizadas en madera

Estructura singular con madera de derribo revalorizada para un espacio polivalente en la Avenida de la Justicia en el Barrio de Los Dolores (Murcia)

en las últimas décadas. Este es el caso del Museo Puente de Madera de Yushara, diseñado por Kengo Kuma & Associates. Esta estructura muestra un vasto entramado de vigas, dispuestas ortogonalmente capa a capa, generando un cuerpo cuyo volumen aumenta a medida que se eleva sobre la cabeza del pilar central de glulam desde la que comienza. Representa un buen ejemplo de cómo emplear la técnica y la estética tradicional para generar una estructura que, aun siendo novedosa, consigue provocar la sensación de estar observando algo conocido. Las figuras 60 y 61 permiten apreciar la obra.



Figura 60. Museo Puente de Madera de Yushara. Fuente: Museo puente de madera Yushara. Tectonicablog.com

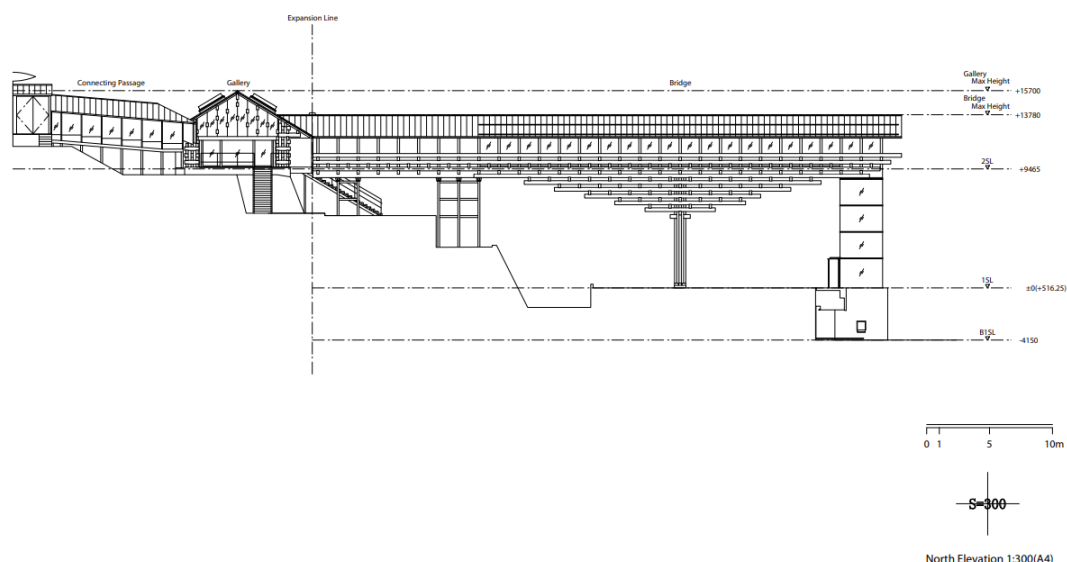
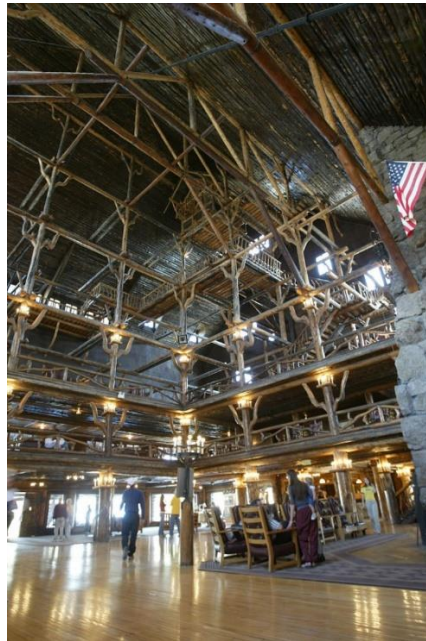


Figura 61. Plano del Museo Puente de Madera de Yushara. Fuente: Museo puente de madera Yushara. Tectonicablog.com

Otro de los lugares donde el uso de la madera como elemento estructural ha sido amplio es en Norte América, donde actualmente, y debido al reciente desarrollo de productos de madera como la madera laminada cruzada (CLT), con cualidades superiores para su uso en construcción, el empleo de este material experimenta un auge. Continuando la comparativa anteriormente realizada entre tradición e innovación, me muestran a

continuación 2 estructuras: La primera de ellas es el Old Faithful Inn (figura 62), en el Parque Nacional de Yellowstone. Este Hotel, ubicado en el estado de Wyoming, fue inaugurado en 1904, empleándose en su construcción principalmente materiales autóctonos. El segundo caso es el del edificio T3 (figura 63), de la firma MGA, que describió como objetivo principal de éste el construir un edificio con el carácter del pasado empleando una perspectiva moderna. Los principales materiales que se emplearon en la construcción del edificio T3, con un total de 7 plantas, fueron madera encolada laminada y madera laminada cruzada.



*Figura 62. Vista interior del Old Faithful Inn. Fuente: Jim Peaco. Wikipedia.*

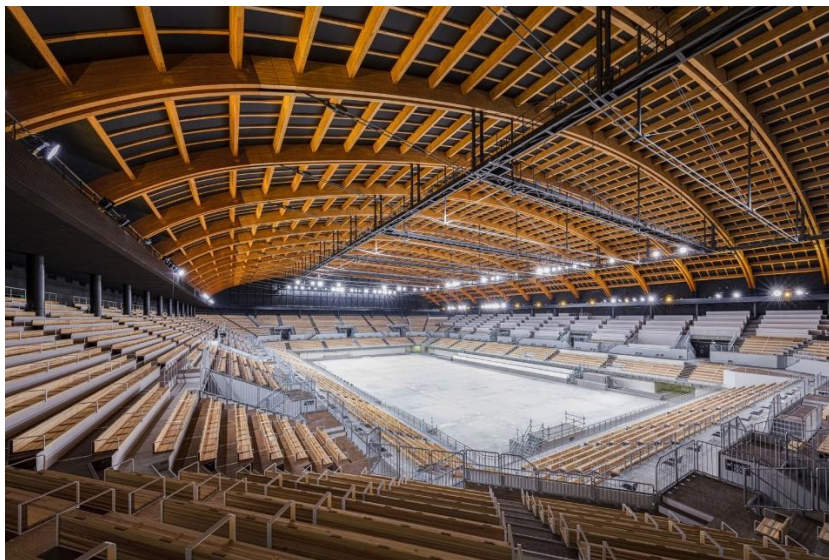


*Figura 63. Edificio T3 en EEUU. Michael Green Architecture. Fuente: dezeen.com*



Aunque los usos mostrados hasta ahora en este apartado muestran a la madera como un material asociado a obras de tipo residencial o de vivienda, incluyendo los templos tradicionales, es necesario destacar la versatilidad del material y la posibilidad de su empleo en otro tipo de estructuras en las que el uso de acero y hormigón armado es predominante. Uno de estos tipos de estructuras son los estadios deportivos y pabellones, en los que resulta característico el empleo de cerchas y mallas espaciales de acero para generar amplios espacios libres de pilares. Y, si bien es cierto que una solución en acero suele ser la primera opción a la que se recurre en estos casos, los productos actuales de madera suponen una alternativa completamente válida en la resolución del problema.

Se exponen a continuación dos ejemplos de estructuras que sirven como claro ejemplo de lo argumentado en el párrafo anterior. El primero de ellos es el Centro de Gimnasia de Ariake (figura 64), inaugurado en 2019, ubicado en el Distrito de Ariake, Tokio, con capacidad para 12000 espectadores y un vano principal de 90 m de luz, resuelto mediante grandes vigas curvas dobles de glulam y correas de sección rectangular perpendiculares a ellas. La segunda es el Hall Olímpico de Hamar (figura 65), también conocido por el nombre de Vikingskipet, construido con motivo de la celebración de los Juegos Olímpicos de Invierno de 1994 en Noruega. La estructura la confeccionan una serie de cerchas de tipología Warren en arco con un sistema triarticulado, capaz de cubrir una luz máxima de 96,4 m.



*Figura 64. Centro de Gimnasia de Ariake. Nikken Sekkei. Fuente: SS Company Limited.*



*Figura 65. Vikingskipet. Niels Torp AS. Fuente: architectureofthegames.net*

El empleo de la madera llega a extenderse incluso al área de los puentes y pasarelas. Lo común al hacer referencia a un “puente de madera” sería pensar en una pasarela esbelta y sustentada por cables, ligera y en algunos casos de cuestionable estabilidad. No es este el caso para algunas de las obras de un Maestro europeo de las estructuras de madera como Julius Natterer. La figura 66 muestra una de estas obras.



*Figura 66. Puente de varios vanos con madera como elemento principal. Fuente: Bois Consult Natterer SA.*

A lo largo del desarrollo de este apartado se ha comentado la manera en la que, la disponibilidad o abundancia de un determinado material en una zona, afecta a la toma de decisiones sobre el tipo de construcciones que se realizan y sobre la arquitectura del lugar. La estética asociada a un material se transforma en característica propia de la zona, en un símbolo o cualidad reconocibles. Esta costumbre de emplear materiales próximos al emplazamiento, aunque sí es recomendable, no es limitante debido al avanzado estado actual de las posibilidades logísticas y de transporte de materiales entre zonas. La estructura que se muestra en la figura 67 son las Naves Cross en Valencia. Dicha estructura representa un ejemplo de cómo resulta posible el empleo de un material poco común en una zona, dando una solución alternativa a un determinado proyecto.





*Figura 67. Nave Cross, Valencia. Fuente: valenciacuriosa.blogspot.com.*

Sirve este capítulo a modo inspiración, ya que las estructuras presentadas demuestran que existe un amplio rango de usos de la madera y que su empleo en nuevas obras es una alternativa viable.

La estructura objeto de este trabajo se ejecuta principalmente en madera, empleándose madera encolada laminada (Glulam) en los elementos longitudinales de la estructura y paneles de madera en los elementos de cerramiento, como son los laterales o la cubierta. Las propiedades principales que favorecen la selección de la madera son su resistencia mecánica, su ligereza, ductilidad, versatilidad y durabilidad si se le aplica un tratamiento correcto. Además, el elevado ratio resistencia mecánica – peso propio que posee permite reducir las dimensiones de las cimentaciones y presenta un buen comportamiento estructural frente a acciones sísmicas.

En lo referente, de manera general, a la construcción de estructuras, la madera presenta ventajas en el tiempo de ejecución y montaje de la estructura, así como en el transporte de los elementos constructivos a obra, debido principalmente a su ligereza.

Un importante aspecto a destacar es su superioridad ambiental respecto al resto de materiales constructivos predominantes en la industria, como el acero y el hormigón, destacando especialmente por su capacidad para capturar y almacenar dióxido de carbono. A esta capacidad de almacenaje debe añadirse la escasa producción de CO<sub>2</sub> en la producción de los elementos de madera, ya que el material se obtiene de bosques, siendo su crecimiento natural.

Cada vez son más numerosos los estudios que ensalzan el valor ambiental de los productos de madera.

Un estudio de 2014 realizado por el Journal Of Sustainable Forestry estableció una reducción de emisiones de CO<sub>2</sub> en el sector de la construcción de entre el 14 y el 31% al emplear elementos constructivos de madera en lugar de elementos metálicos o de hormigón.

Un estudio del WoodWorks (Wood Products Council) publicado en 2013 proporciona una comparativa en el impacto ambiental generado por diversos proyectos en función del material utilizado, empleando para ello un análisis del ciclo de vida. Para un edificio

de viviendas convencional de poca envergadura, la reducción en la emisión de gases de efecto invernadero en un periodo de 100 años resultó del orden de 2 a 3 veces superior para el proyecto ejecutado en madera que para el mismo proyecto ejecutado en hormigón. Para un edificio de oficinas se compararon los análisis del ciclo de vida del proyecto según se hubiese ejecutado éste en madera, acero u hormigón, siendo la madera el material con menor consumo energético asociado y con emisiones de CO<sub>2</sub> asociadas que representan entre el 60 y el 70% de aquellas producidas por el acero y el hormigón. Se realizó otra comparativa en consumo energético y emisión de gases de efecto invernadero en la ejecución de un techo de gran luz mediante el empleo de vigas de acero frente al de vigas de Glulam, generando la solución en madera unas emisiones de gases 5 veces menores que la solución en acero, así como un consumo energético 3 veces menor en su fabricación.

Volviendo a la selección de los materiales para la estructura, se decide emplear madera laminada encolada de clase resistente GL24h para los elementos longitudinales o barras de la estructura. Las características de este producto de madera laminada encolada se obtienen del apartado E.2 del Documento Básico SE-M Madera. Puede observar de la tabla de propiedades la marcada anisotropía de la madera, presentándose valores diferentes de resistencia característica en función del tipo de esfuerzo al que esté sometida una pieza. Es especialmente acusada la escasa resistencia que presenta frente a esfuerzos de tracción perpendicular a las fibras, siendo por tanto de gran importancia el diseñar teniendo en cuenta este aspecto. Por el contrario, los esfuerzos de compresión paralela a las fibras son los más favorables para las piezas, coincidiendo con el mayor de los valores de resistencia característica. La tabla 1 muestra dichas propiedades.

Propiedades		Clase Resistente			
		GL24h	GL28h	GL32h	GL36h
<b>Resistencia (característica), en N/mm<sup>2</sup></b>					
- Flexión	$f_{m,g,k}$	24	28	32	36
- Tracción paralela	$f_{t0,g,k}$	16,5	19,5	22,5	26
- Tracción perpendicular	$f_{t90,g,k}$	0,4	0,45	0,5	0,6
- Compresión paralela	$f_{c0,g,k}$	24	26,5	29	31
- Compresión perpendicular	$f_{c90,g,k}$	2,7	3,0	3,3	3,6
- Cortante	$f_{v,g,k}$	2,7	3,2	3,8	4,3
<b>Rigidez, en kN/mm<sup>2</sup></b>					
- Módulo de elasticidad paralelo medio	$E_{0,g,medio}$	11,6	12,6	13,7	14,7
- Módulo de elasticidad paralelo 5 <sup>o</sup> -percentil	$E_{0,g,k}$	9,4	10,2	11,1	11,9
- Módulo de elasticidad perpendicular medio	$E_{90,g,medio}$	0,39	0,42	0,46	0,49
- Módulo transversal medio	$G_{g,medio}$	0,72	0,78	0,85	0,91
<b>Densidad, en kg/m<sup>3</sup></b>					
Densidad característica	$\rho_{g,k}$	380	410	430	450

*Tabla 1. Madera laminada encolada homogénea. Valores de las propiedades asociadas a cada Clase Resistente. Fuente: Tabla E.3 Documento Básico SE-M Madera.*

Para la ejecución de los cerramientos de la estructura se decide emplear paneles de madera, que serán diferentes según se trate de un cerramiento de cubierta o uno de fachada.

### **3. Acciones.**

Se prevé la instalación de placas solares en cubierta de la estructura. Se considera como carga muerta, ya que su acción sobre la estructura es constante y permanente a

lo largo del tiempo. La instalación de los paneles solares se hará en ambos lados de la cubierta. El lateral este producirá energía durante las horas solares de la franja matinal, mientras que el lateral oeste producirá energía en la franja horaria de la tarde. De acuerdo a datos climatológicos consultados, la media de horas de sol diarias en los meses de verano, donde se alcanzan los valores más altos, es de 12,4 horas aproximadamente. Los valores más bajos aparecen en los meses de invierno, siendo el valor mínimo asociado a estos de aproximadamente 7,11 horas. Se establece 9,75 horas como valor medio. Por la orientación en la que se dispone la estructura se estima que cada lateral de la cubierta recibe un promedio de 4,8 horas diarias de exposición. La producción de las placas fotovoltaicas viene condicionada por este parámetro.

El tipo de placa solar a instalar en cubierta es una placa adhesiva, lo cual hace posible una instalación más sencilla sobre cubierta y una reducción en las cargas asociadas y en los tiempos de instalación y montaje. Las especificaciones técnicas del producto determinan que los paneles tienen un peso de 6 kg/m<sup>2</sup> o 0,06 kN/m<sup>2</sup>, un espesor de placa de 4 mm, eficacia proporcionada por los paneles del 20,9 % y una potencia solar instalada por metro cuadrado de 0,3 kW. El sistema se encuentra configurado de modo que cada metro cuadrado de superficie sobre la que se coloque la placa se convierta en superficie cubierta por panel solar.

Considerando ahora las dimensiones de la cubierta, para una longitud de 50 m y un perfil de 42,28 m se obtiene un área total de 2114,26 m<sup>2</sup> de techo. El peso total correspondiente a los paneles solares se obtiene multiplicando el área total de tejado por el peso de cada módulo, siendo el peso total de los paneles de 126,85 kN. La potencia solar instalada total es de 634,278 kW.

La carga de nieve actuante sobre la estructura se obtiene a partir del Anejo E del Documento Básico SE-AE Acciones en la edificación. Para la ciudad de Murcia, la altitud es aproximadamente de unos 40 m, y se encuentra incluida en una zona de clima invernal 6. Conocida la altitud y la zona climática, se determina una carga de nieve de 0,2 kN/m<sup>2</sup>. La tabla 2 muestra las sobrecargas de nieve según la zona de clima invernal.

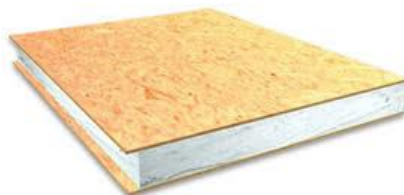
Altitud (m)	Zona de clima invernal, (según figura E.2)						
	1	2	3	4	5	6	7
0	0,3	0,4	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
200	0,5	0,5	0,2	0,2	0,3	0,2	0,2
400	0,6	0,6	0,2	0,3	0,4	0,2	0,2
500	0,7	0,7	0,3	0,4	0,4	0,3	0,2
600	0,9	0,9	0,3	0,5	0,5	0,4	0,2
700	1,0	1,0	0,4	0,6	0,6	0,5	0,2
800	1,2	1,1	0,5	0,8	0,7	0,7	0,2
900	1,4	1,3	0,6	1,0	0,8	0,9	0,2
1.000	1,7	1,5	0,7	1,2	0,9	1,2	0,2
1.200	2,3	2,0	1,1	1,9	1,3	2,0	0,2
1.400	3,2	2,6	1,7	3,0	1,8	3,3	0,2
1.600	4,3	3,5	2,6	4,6	2,5	5,5	0,2
1.800	-	4,6	4,0	-	-	9,3	0,2
2.200	-	8,0	-	-	-	-	-

Tabla 2. Sobrecarga de nieve en un terreno horizontal (kN/m<sup>2</sup>). Fuente: Tabla E.2 CTE DB SE-AE.

Debido a la forma singular de la cubierta, la determinación exacta de la carga de viento requiere de un estudio más detallado. Sin embargo, para realizar un predimensionado inicial de la estructura y poder seleccionar un espesor de cubierta adecuado se estima una carga de viento actuante sobre la cubierta de la estructura de valor 1 kN/m<sup>2</sup>.

La sobrecarga de uso asociada a la cubierta de la estructura corresponde a una categoría de uso G (Cubiertas accesibles únicamente para conservación), subcategoría de uso G1 cubiertas ligeras sobre correas (sin forjado), para la cual se establece una carga uniforme de 0,4 kN/m<sup>2</sup>.

Las acciones accidentales se tendrán en cuenta para el cálculo completo de la estructura. El cerramiento de cubierta se prevé ejecutar mediante panel sándwich portante. Se trata de paneles mixtos, con una capa interna de espuma de poliuretano aislante rígida (PUR), polisocianurato (PIR) o poliestireno expandido (EPS) y dos capas exteriores de tablero de madera de OSB-3 o contrachapado estructural. La clase de servicio asociada a su uso es la 2. La figura x muestra el aspecto habitual de uno de estos paneles. Entre las ventajas del empleo de estos paneles se encuentra el nivel de aislamiento térmico que proporcionan, su capacidad portante estructural y los tiempos reducidos de instalación. La figura 68 muestra un panel sándwich tipo.



*Figura 68. Panel sándwich portante tipo (SIP). Fuente: leanhouse.*

Las características habituales de estos paneles son las siguientes:

- Ancho estándar de panel de 12000 mm.
- Longitud de panel comprendida entre 2400 y 4990 mm.
- Espesor total (tableros exteriores y capa aislante interior) comprendido entre 90 y 235 mm.
- El peso medio de un panel de este tipo es de 20 kg/m<sup>2</sup> (0,196 kN/m<sup>2</sup>).

Las características finales del producto dependen de la distribuidora o casa comercial que se consulte.

Sobre las cerchas de la estructura se instala un sistema de correas en dos direcciones, siguiendo un esquema de mallado. La intención detrás del empleo de este sistema es mejorar el arriostramiento de la estructura y proporcionar una malla con vanos reducidos para poder instalar la cubierta, aumentando el número de puntos de apoyo que se tendría si se emplease exclusivamente un sistema de correas sobre los nudos de las cerchas y perpendiculares a ellas. Los detalles geométricos del sistema se muestran en el anejo de planos.

Se selecciona un panel de espesor total 180 mm, con aislante de polisocianurato. Las capas exteriores del panel son de OSB-2 de 12 mm de espesor cada una. El peso propio de estos paneles es de 21,05 kg/m<sup>2</sup> o 0,2065 kN/m<sup>2</sup>.

Para completar el proceso preliminar de cálculo de acciones sobre la estructura es necesario determinar el peso propio de los elementos de arriostramiento. Este sistema es una malla de viguetas perpendiculares, cuyo elemento principal son las correas en la dirección perpendicular a los pórticos. Sobre este sistema actúan las cargas que se han especificado anteriormente. El valor total de la carga superficial se obtiene inicialmente sumando todas las cargas actuantes, creando así una combinación característica. En capítulos posteriores se refinará el cálculo de las acciones. Se muestra ahora la combinación, a la que se denomina  $Q_{pk}$ .

$$Q_{pk} = L_{SIP} + L_{SCU} + L_W + L_S + L_{ps}$$

Los términos que aparecen en la combinación son:

- $L_{SIP}$ : carga correspondiente al panel sándwich portante. Valor: 0,2065 kN/m².
- $L_{SCU}$ : carga correspondiente a la sobrecarga de uso. Valor: 0,4 kN/m².
- $L_W$ : carga correspondiente a la acción del viento. Valor: 1 kN/m².
- $L_S$ : carga correspondiente a la nieve. Valor: 0,2 kN/m².
- $L_{ps}$ : carga correspondiente a las placas solares. Valor: 0,06 kN/m².

El valor de  $Q_{pk}$  es de 1,866 kN/m².

Se considera ahora una situación de viga biapoyada sometida a una carga distribuida en toda su longitud. Se plantea esta situación para determinar una sección inicial de correa. La longitud del elemento es de 5 m, como se muestra en la figura 69, equivalente a la distancia entre pórticos, y se estima para ella un área tributaria  $A_u = 10,88 \text{ m}^2$ . La carga distribuida es  $Q_{di} = 4,06 \text{ kN/m}$ .

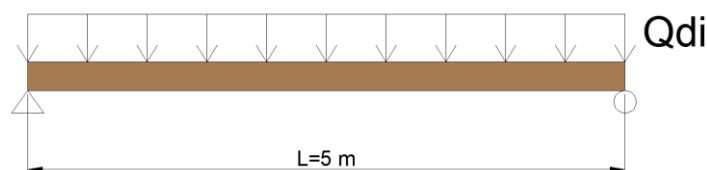


Figura 69. Hipótesis de diseño preliminar de correa principal. Fuente: elaboración propia.

Se decide emplear en las correas madera laminada encolada, de la clase GL24h. Este material tiene una resistencia característica a flexión de 24 N/mm², un módulo de elasticidad característico de 9400 N/mm² y una densidad característica de 380 kg/m³.

El DBSE-M define en el apartado 2.2.3 el valor de cálculo de la resistencia del material,  $X_d$  de la siguiente manera:

$$X_d = k_{mod} \cdot \left( \frac{X_k}{\gamma_M} \right)$$

Donde:

- $X_k$ : valor característico de la propiedad del material;
- $\gamma_M$ : Coeficiente parcial de seguridad;
- $k_{mod}$ : factor de modificación.

Los valores del coeficiente parcial de seguridad y del factor de modificación se muestran en la tabla 3.

Situaciones persistentes y transitorias:	
- Madera maciza	1,30
- Madera laminada encolada	1,25
- Madera microlaminada, tablero contrachapado, tablero de virutas orientadas	1,20
- Tablero de partículas y tableros de fibras (duros, medios, densidad media, blandos)	1,30
- Uniones	1,30
- Placas clavo	1,25
Situaciones extraordinarias:	
	1,0

Tabla 3. Coeficientes parciales de seguridad para el material. Fuente: tabla 2.3 DBSE-M.

El valor del coeficiente parcial de seguridad es de 1,25 para madera laminada encolada se obtiene de la tabla 4.



Material	Norma	Clase de servicio	Clase de duración de la carga				
			Permanente	Larga	Media	Corta	Instantánea
Madera maciza	UNE-EN 14081-1:2016	1	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		2	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		3	0,50	0,55	0,65	0,70	0,90
Madera laminada encolada	UNE-EN 14080:2013	1	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		2	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		3	0,50	0,55	0,65	0,70	0,90
Madera microlaminada	UNE-EN 14374:2005, UNE-EN 14279:2007+A1:2009	1	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		2	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		3	0,50	0,55	0,65	0,70	0,90
Tablero contrachapado	UNE-EN 636:2012+A1:2015						
	Tipo EN 636-1,2 y 3	1	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
	Tipo EN 636-2 y 3	2	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
	Tipo EN 636-3	3	0,50	0,55	0,65	0,70	0,90
Tablero de virutas orientadas (OSB) <sup>1</sup>	UNE-EN 300:2007						
	OSB/2	1	0,30	0,45	0,65	0,85	1,10
	OSB/3, OSB/4	1	0,40	0,50	0,70	0,90	1,10
	OSB/3, OSB/4	2	0,30	0,40	0,55	0,70	0,90
Tablero de partículas	UNE-EN 312:2010						
	Tipo P4, Tipo P5	1	0,30	0,45	0,65	0,85	1,10
	Tipo P5	2	0,20	0,30	0,45	0,60	0,80
	Tipo P6, Tipo P7	1	0,40	0,50	0,70	0,90	1,10
	Tipo P7	2	0,30	0,40	0,55	0,70	0,90
Tablero de fibras duro	UNE-EN 622-2:2004						
	HB, LA, HB, HLA 1 o 2	1	0,30	0,45	0,65	0,85	1,10
	HB, HLA 1 o 2	2	0,20	0,30	0,45	0,60	0,80
Tablero de fibras semi-duro	UNE-EN 622-3:2005						
	MBH, LA 1 o 2,	1	0,20	0,40	0,60	0,80	1,10
	MBH, HLS1 o 2	1	0,20	0,40	0,60	0,80	1,10
	MBH, HLS1 o 2	2	-	-	-	0,45	0,80
Tablero de fibras MDF	UNE-EN 622-5:2010						
	MDF, LA, MDF, HLS	1	0,20	0,40	0,60	0,80	1,10
	MDF, HLS	2	-	-	-	0,45	0,80

Tabla 4. Valores del factor  $k_{mod}$ . Fuente: tabla 2.4 DBSE-M.

En el DBSE-M se especifica que si una combinación de acciones incluye acciones pertenecientes a diferentes clases de duración, entonces debe elegirse como valor del factor  $k_{mod}$  el correspondiente a la acción de menor duración. Para la combinación planteada se considera que la acción de menor duración, considerada como corta, es la de la nieve, obteniéndose un valor del coeficiente de 0,9 (clase de servicio 1).

Conocidos estos valores se obtiene un valor de cálculo de la resistencia del material de 17,28 N/mm<sup>2</sup>. Se realiza la comprobación a resistencia para determinar las dimensiones de una sección empleando la siguiente expresión.

$$X_d W > M_d$$

El momento de diseño,  $M_d$ , se obtiene de la siguiente expresión

$$M_d = \frac{Q_{dl} L^2}{8} = \frac{4,06 \cdot 5^2}{8} = 12,68 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Despejando el término W en la ecuación de diseño se obtiene

$$W > \frac{M_d}{X_d} = \frac{12,68}{17,28 \cdot 10^3} = 0,0007337 \text{ m}^3 = 0,0007337 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$$

Como el valor del término W debe ser mayor al obtenido se establece este en 735000 mm<sup>3</sup>.

El material seleccionado para esta correa es madera lamina encolada. El ancho habitual para las secciones de este material viene comprendido entre 80 y 220 mm. Se considera inicialmente para la sección un ancho,  $b$ , de 130 mm. Teniendo en cuenta que el módulo resistente para una sección rectangular viene dado como  $W = (b \cdot h^2)/6$ , se obtiene de ella un canto  $h = 184,1$  mm. Las dimensiones finales para la sección son 130x185.

Se realiza ahora la comprobación de flecha o deformación. Se limita la flecha admisible a  $L/300$ . La expresión utilizada para encontrar una sección es la de flecha máxima o

deformación máxima en una viga biapoyada sometida a una carga uniformemente distribuida.

$$f = \frac{5 \cdot Q_{di} \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

$$I = \frac{5 \cdot Q \cdot L^3 \cdot 300}{384 \cdot E} = \frac{5 \cdot 4,06 \cdot 300 \cdot 5^3}{384 \cdot 9400 \cdot 10^3} = 0,00021089 \text{ m}^4$$

De la misma manera que se había hecho para la comprobación de resistencia, se decide emplear un ancho de sección  $b$  de 130 mm. Conocida la expresión de la inercia para una sección rectangular,  $I = (b \cdot h^3)/12$ , se obtiene un canto de sección  $h$  de 270 mm. Las dimensiones de la sección son 130x270. Puede observar cómo la comprobación de flecha resulta más restrictiva que la comprobación de resistencia.

Para los elementos secundarios de la malla de correas se estima una sección de GL24h de 110x120.

Una vez determinadas las secciones de las correas principales y secundarias es posible determinar el peso asociado al sistema. Para ello se va a realizar el siguiente proceso: Para el sistema secundario se estima un total de 12 correas en la dirección perpendicular a los pórticos. La longitud de cada una de estas correas se supone de 50 m. En el plano de los pórticos se estima un total de 17 correas secundarias, cuya longitud es la de la cubierta en verdadera magnitud (42,304 m). La longitud total de correas secundarias, obtenida de multiplicar el número de cada correa por su longitud, es de 1319 m. Para las correas principales se realizar el mismo cálculo, considerando un total de 14 correas, de 50 m cada una, y longitud total de correas principales 700 m.

Para determinar el peso total de cada grupo de correas se emplea la densidad característica del GL24h, de 380 kg/m<sup>3</sup>.

- Peso total sistema de correas secundario  
 $P_{scs} = 1318 \cdot 0,11 \cdot 0,12 \cdot 380 = 6611,08 \text{ kg}$
- Peso total del sistema de correas principal  
 $P_{scp} = 700 \cdot 0,13 \cdot 0,27 \cdot 380 = 9336,6 \text{ kg}$

Para transformar este peso total en una carga superficial se va a dividir entre la superficie de la cubierta. A la carga se la denomina  $Q_{sc}$ .

$$Q_{sc} = 15947,68 / 2115,2 = 7,54 \text{ kg/m}^2 = 0,074 \text{ kN/m}^2.$$

Finalmente se estiman las cargas actuantes sobre cada uno de los pórticos. Debido a que la estructura que soporta la cubierta es una cercha, para la cual las cargas se consideran aplicadas sobre los nudos de la misma, resulta necesario distribuir las cargas que actúan sobre la cubierta según áreas tributarias, por pórtico y nodo.

Se calcula inicialmente el pórtico más desfavorable, siendo éste un pórtico intermedio de la estructura, para la alternativa de diseño elegida. La figura 70 muestra una distribución en planta de los pórticos de la estructura, con sus separaciones correspondientes entre ejes de pilares. Las cotas se expresan en mm.



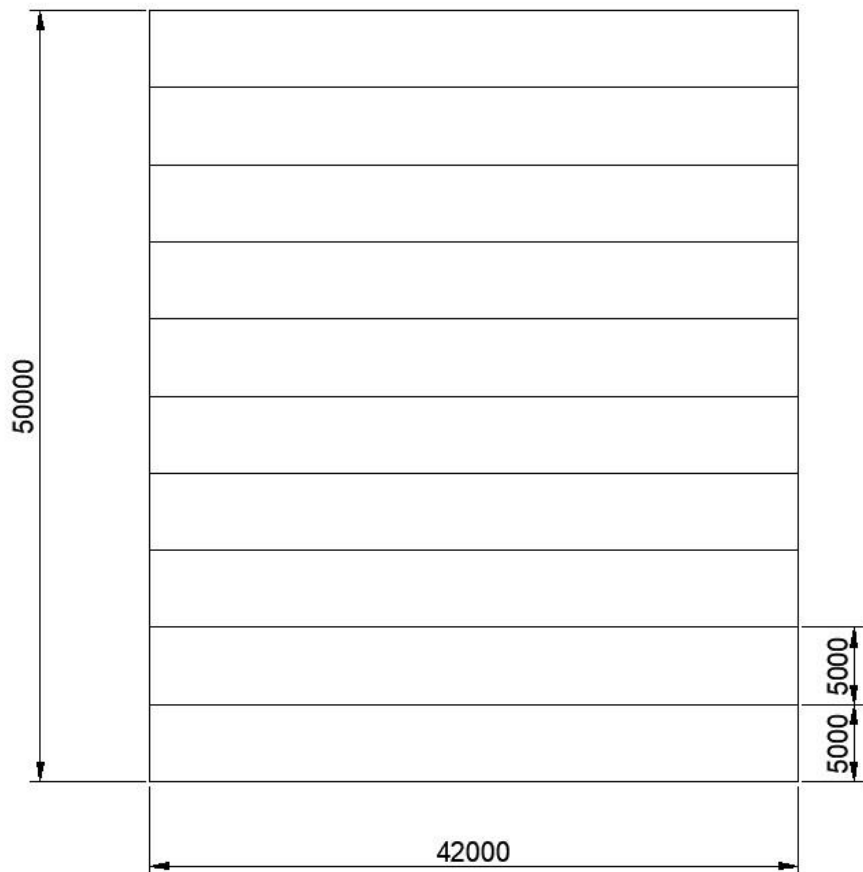


Figura 70. Esquema en planta de los pórticos de la estructura. Fuente: elaboración propia.

De la figura anterior puede deducirse que el área tributaria correspondiente para un pórtico intermedio es de  $A_{trib,pi}=5 \cdot 42,304= 211,52 \text{ m}^2$ . La longitud se ha considerado en verdadera magnitud y de acuerdo al perfil real que caracteriza a la cubierta de la estructura.

El diseño de cercha para el cual se presenta el cálculo o dimensionado inicial de elementos es la alternativa de diseño 4.1. El ancho tributario del pórtico más desfavorable asociado a esta estructura es de 5 m. La carga distribuida longitudinalmente sobre la cercha tiene el valor  $C_c=1,94 \cdot 5= 9,7 \text{ kN/m}$ .

#### **4. El Teorema de Maxwell y su empleo en la selección del diseño final.**

Si bien anteriormente se ha utilizado el concepto de compacidad del Diagrama de Fuerzas para comparar diferentes alternativas, y aun siendo un método válido y directo para realizar comparaciones, no se trata de un método cuantitativo que proporcione resultados numéricos, al menos no de manera instantánea.

En este capítulo se hace uso del teorema de Maxwell en la manera expuesta por William F. Baker en el artículo titulado “*Structural Innovation: combining classic theories with new technologies*”. El teorema enuncia que el sumatorio del camino de las cargas de tracción en una estructura menos el sumatorio del camino de las cargas de compresión

es equivalente al trabajo necesario para que las fuerzas exteriores del sistema cancelen a las reacciones. La expresión del teorema es la siguiente:

$$\sum F_T L_T - \sum F_C L_C = \sum \vec{P}_i \cdot \vec{r}_i$$

El primer conjunto de la ecuación,  $\sum F_T L_T$ , es el sumatorio de las fuerzas (axiales) de tracción en cada miembro de la estructura por su longitud correspondiente. El segundo conjunto es el sumatorio para las compresiones. El término a la derecha de la igualdad es el sumatorio del producto vectorial de las fuerzas exteriores por un vector de posición respecto a un origen.

Una de las principales ventajas del teorema de Maxwell cuando se emplea en el diseño preliminar o conceptual de una estructura es que permite determinar el volumen de material de la misma. Una vez conocido el camino total de las cargas, que se define como  $\sum F_T L_T + \sum F_C L_C$  es posible obtener el volumen total de material dividiendo a este por el valor de tensión característica del material,  $\sigma_k$ , cuyo valor viene expresado frecuentemente en N/mm<sup>2</sup>. Puede deducirse de aquí que minimizar el camino total de las cargas implica minimizar el volumen de la estructura.

El Teorema de Maxwell resulta especialmente potente al combinarlo con la Estática Gráfica, ya que ésta permite obtener de forma directa la longitud de todos los miembros de la estructura midiéndolos sobre el diagrama de forma, y del mismo modo pueden obtenerse los esfuerzos en todos los miembros midiendo sobre el Diagrama de Fuerza. A partir de los datos obtenidos de los diagramas recíprocos puede determinarse el camino de las cargas de tracción, compresión y total.

El Teorema se ha empleado para comparar 4 de las alternativas de diseño presentadas en este trabajo. Se considera una carga distribuida de 9,7 kN/m actuando sobre la estructura (una cercha correspondiente a un pórtico central). Esta carga ha sido determinada previamente analizando las acciones que actúan sobre cubierta y debe repartirse entre los nudos de la estructura, convirtiéndose en una carga puntual sobre cada uno de ellos. Una vez hecho esto, y mediante el empleo de la notación de Bow, se construye el Diagrama de Fuerza de cada una de las alternativas a partir de su correspondiente Diagrama de Forma. Una vez hecho esto pueden obtenerse los caminos de las cargas de la manera descrita anteriormente.

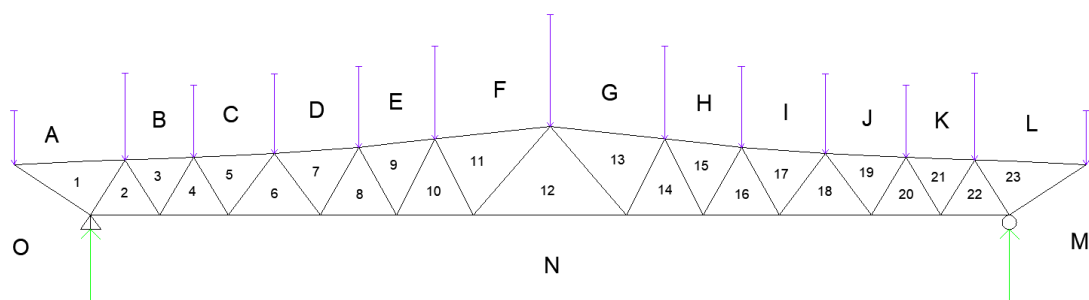
A continuación se muestra para cada alternativa el Diagrama de Forma, el Diagrama de Fuerza y los resultados de caminos de carga. Debido a la simetría que presentan las estructuras y la distribución de cargas, los Diagramas de Fuerzas son simétricos. Esto hace que determinando los caminos de carga de la mitad de la estructura pueda conocerse el camino de cargas total.

Se presenta en primer lugar la alternativa denominada Alternativa 3. La tabla 5 muestra una numeración de nudos de 1 al 7, la cual hace referencia a los nudos sobre los que se encuentran aplicadas las cargas, numerándose de izquierda a derecha. El Diagrama de Forma de esta alternativa se muestra en la figura 71. En el Diagrama de Fuerza (figura 72) las compresiones se identifican por el color azul, y a las tracciones por el color rojo.

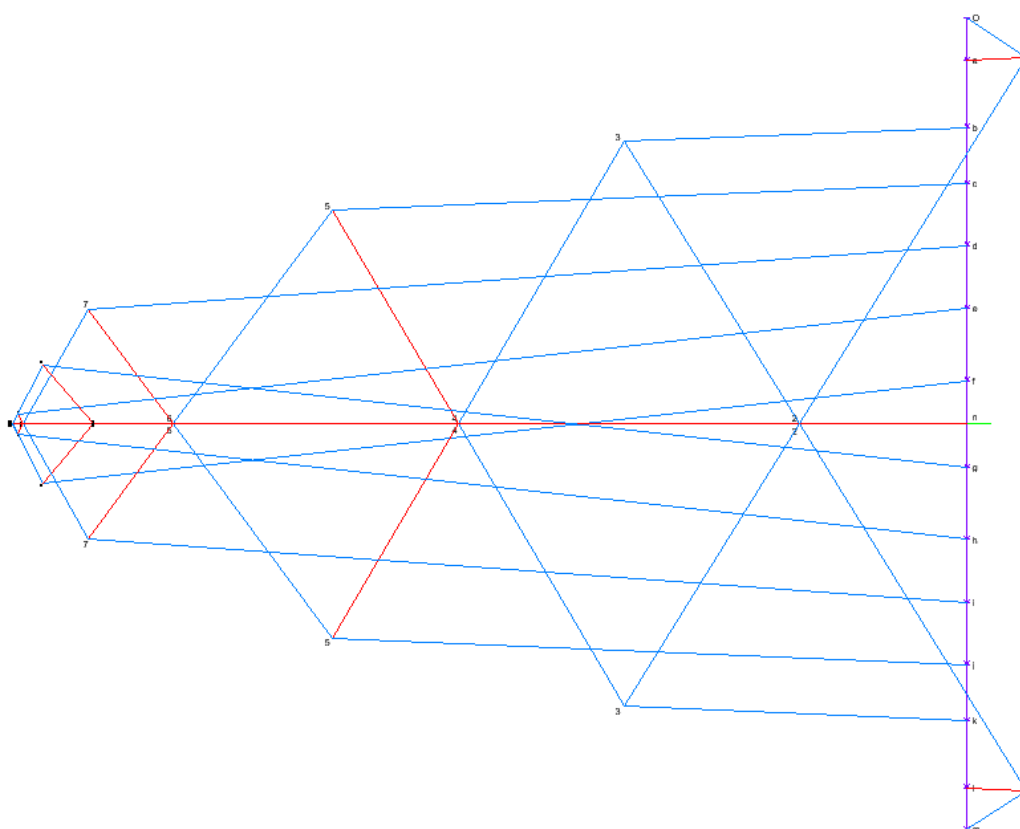
Nudo (izquierda a derecha)	Longitud tributaria (m)	Carga puntual aplicada (kN)
1	2,177	21,12
2	3,528	34,22
3	2,928	28,40
4	3,231	31,34

5	3,305	32,06
6	3,773	36,60
7	4,528	43,92

*Tabla 5. Nudos, longitudes y cargas para la Alternativa 3. Fuente: elaboración propia.*



*Figura 71. Diagrama de Forma Alternativa 3. Fuente: elaboración propia.*



*Figura 72. Diagrama de Fuerza Alternativa 3. Fuente: elaboración propia.*

La tabla 6 enumera las barras de la estructura de acuerdo a la notación de Bow. Debe tenerse en cuenta que el estudio en cada nudo se realiza en sentido horario. Como ejemplo de esto, la barra “a1” representa es la que se encuentra al pasar de “A” (espacio determinado por las cargas exteriores) a “1” (espacio determinado por la geometría). Para expresar el paso de una zona interior a otra se emplea del símbolo “\_”. La tabla proporciona además el esfuerzo axial, el tipo de esfuerzo (tracción o compresión), la longitud de la barra y el camino de carga de cada una. La tabla 7 proporciona los caminos de carga de tracción, compresión, diferencia entre ellos y camino total de cargas para la Alternativa 3.

Barra	Esfuerzo axial (KN)	C/T	Longitud barra (m)	FL (KNm)
a1	29,84	tracción	4,356	129,98
1o	-35,84	compresión	3,605	-129,20
1_2	-218,53	compresión	2,565	-560,53
2n	85,19	tracción	2,7	230,01
b3	-173,92	compresión	2,702	-469,93
3_2	-168,31	compresión	2,565	-431,72
3_4	-166,07	compresión	2,662	-442,08
4n	258	tracción	2,7	696,60
c5	-322,17	compresión	3,156	-1016,77
5_4	125,95	tracción	2,662	335,28
5_6	-135,18	compresión	3,02	-408,24
6n	402,46	tracción	3,6	1448,86
d7	-446,7	compresión	3,309	-1478,13
7_6	72,22	tracción	3,02	218,10
7_8	-66,53	compresión	3,059	-203,52
8n	478,13	tracción	3	1434,39
e9	-483,97	compresión	3,018	-1460,62
9_8	5,87	tracción	3,059	17,96
9_10	-5,72	compresión	3,354	-19,18
10n	483,56	tracción	3	1450,68
f11	-471,39	compresión	4,528	-2134,45
11_10	-33,65	compresión	3,354	-112,86
11_12	39,64	tracción	4,609	182,70
12n	442,71	tracción	6	2656,26

Tabla 6. Resultados para la Alternativa 3. Fuente: elaboración propia.

Camino de cargas en tracción $\sum F_{tLt}$	Camino de cargas en compresión $\sum F_{cLc}$	Diferencia entre caminos de carga $\sum F_{tLt} - \sum F_{cLc}$	Camino de cargas total $\sum F_{tLt} + \sum F_{cLc}$
14945,38	-17734,48	-2789,09	32679,86

Tabla 7. Caminos de cargas para la Alternativa 3. Fuente: elaboración propia.

Se proporcionan ahora los diagramas y tablas correspondientes a la Alternativa 4.1. Lo mismo explicado para la Alternativa 3 se aplica a ésta. Las figuras correspondientes a esta alternativa son las 73 y 74, mientras que las tablas son las 8, 9 y 10.

Nudo (izquierda a derecha)	Longitud tributaria (m)	Carga puntual aplicada (kN)
1	2,177	21,12
2	3,529	34,23
3	2,943	28,55
4	3,258	31,60
5	3,182	30,87
6	3,788	36,74
7	4,546	44,10

Tabla 8. Nudos, longitudes y cargas para la Alternativa 4.1. Fuente: elaboración propia.

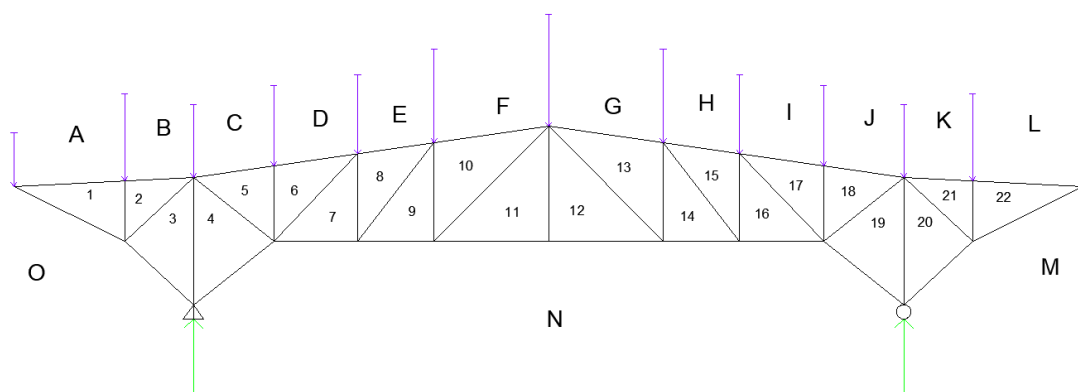


Figura 73. Diagrama de Forma Alternativa 4.1. Fuente: elaboración propia.

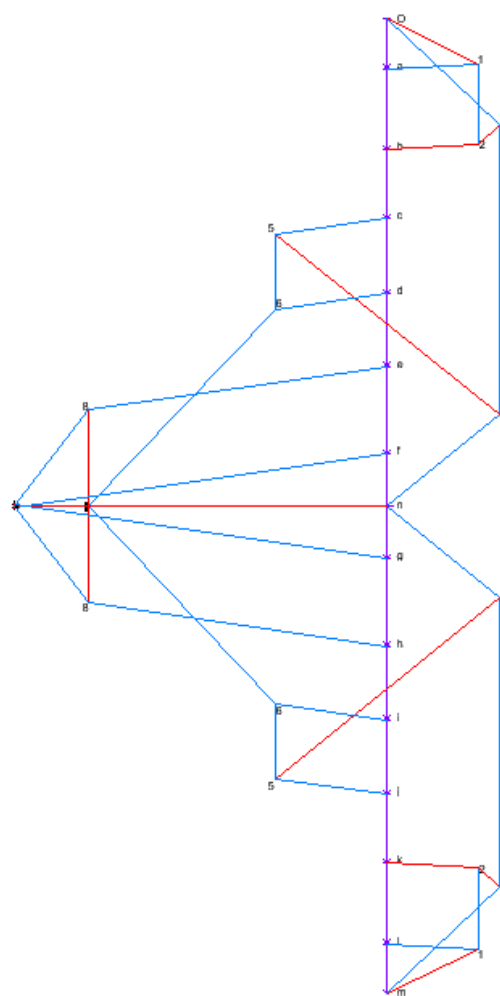


Figura 74. Diagrama de Fuerza Alternativa 4.1. Fuente: elaboración propia.

Barra	Esfuerzo axial (KN)	C/T	Longitud barra (m)	FL (KNm)
a1	-39	compresión	4,355	-169,85
1o	43,38	tracción	4,843	210,09
b2	39	tracción	2,704	105,46

2_1	-34,23	compresión	2,385	-81,64
2_3	12,68	tracción	3,679	46,65
3o	-65,77	compresión	3,679	-241,97
c5	-48,14	compresión	3,182	-153,18
5_4	122,45	tracción	4,021	492,37
3_4	-122,17	compresión	5	-610,85
4n	-61,62	compresión	4,021	-247,77
d6	-48,14	compresión	3,333	-160,45
6_5	31,6	tracción	2,952	93,28
6_7	-115,02	compresión	4,756	-547,04
7n	127,46	tracción	3,3	420,62
e8	-128,77	compresión	3,031	-390,30
8_7	40,52	tracción	3,425	138,78
8_9	-51,34	compresión	4,885	-250,80
9n	158,96	tracción	3	476,88
f10	-160,62	compresión	4,546	-730,18
10_11	1,05	tracción	6,364	6,68
11n	158,25	tracción	4,5	712,13
11_12	0	nulo	4,5	0

*Tabla 9. Caminos de cargas para la Alternativa 4.1. Fuente: elaboración propia.*

Camino de cargas en tracción $\Sigma F_{tLt}$	Camino de cargas en compresión $\Sigma F_{cLc}$	Diferencia entre caminos de carga $\Sigma F_{tLt} - \Sigma F_{cLc}$	Camino de cargas total $\Sigma F_{tLt} + \Sigma F_{cLc}$
5405,87	-7168,04	-1762,17	12573,91

*Tabla 10. Caminos de cargas para la Alternativa 4.1. Fuente: elaboración propia.*

Diagramas y tablas correspondientes a la Alternativa 4.2. Se proporcionan ahora los diagramas y tablas correspondientes a la Alternativa 4.2. Las figuras correspondientes a esta alternativa son las 75 y 76, mientras que las tablas son las 11, 12 y 13.

Nudo (izquierda a derecha)	Longitud tributaria (m)	Carga puntual aplicada (kN)
1	2,177	21,12
2	3,529	34,23
3	2,943	28,55
4	3,258	31,60
5	3,182	30,87
6	3,788	36,74
7	4,546	44,10

*Tabla 11. Nudos, longitudes y cargas para la Alternativa 4.2. Fuente: elaboración propia.*

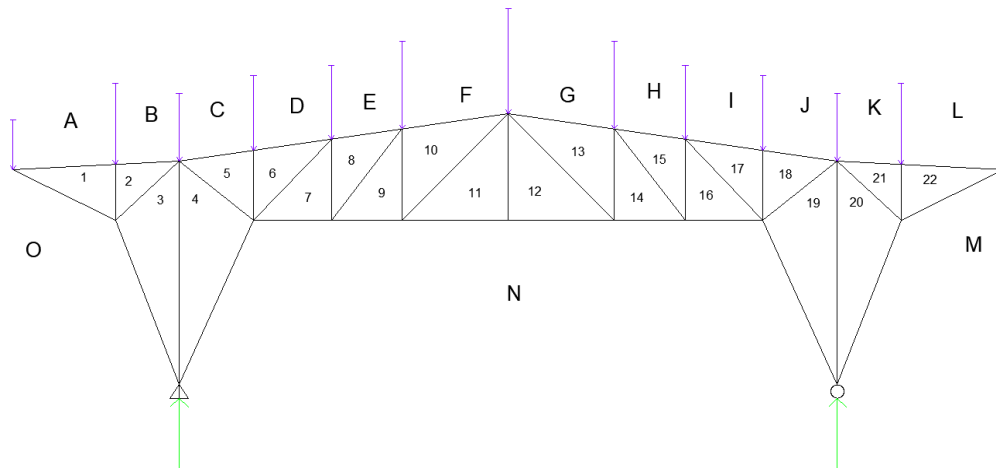


Figura 75. Diagrama de Forma Alternativa 4.2. Fuente: elaboración propia.

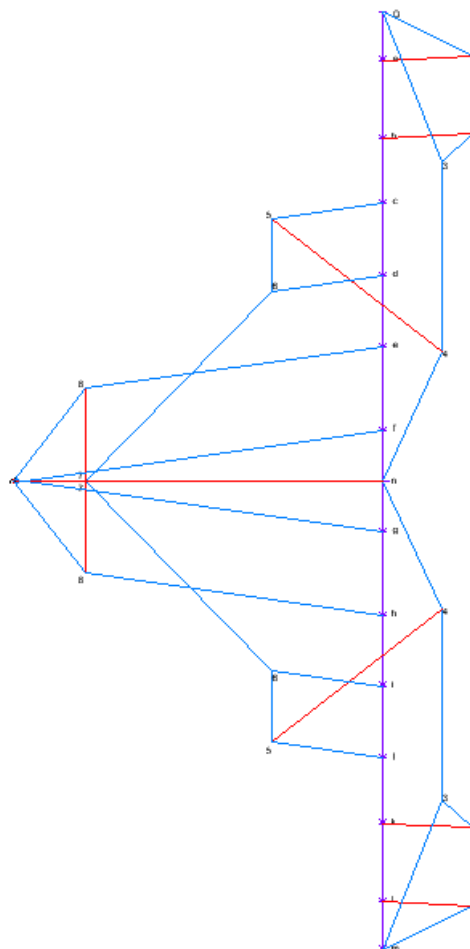


Figura 76. Diagrama de Fuerza Alternativa 4.2. Fuente: elaboración propia.

Barra	Esfuerzo axial (KN)	C/T	Longitud barra (m)	FL (KNm)
a1	39	tracción	4,355	169,85
1o	-43,37	compresión	4,843	-210,04
b2	39	tracción	2,704	105,46



2_1	-34,23	compresión	2,385	-81,64
2_3	-18,25	compresión	3,679	-67,14
3o	-70,5	compresión	7,447	-525,01
c5	-48,13	compresión	3,182	-153,15
5_4	93,47	tracción	4,021	375,84
3_4	-83,13	compresión	9,441	-784,83
4n	-61,85	compresión	7,622	-471,42
d6	-48,14	compresión	3,333	-160,45
6_5	-31,6	compresión	2,952	-93,28
6_7	-115,02	compresión	4,756	-547,04
7n	127,46	tracción	3,3	420,62
e8	-128,76	compresión	3,031	-390,27
8_7	40,52	tracción	3,425	138,78
8_9	-51,34	compresión	4,885	-250,80
9n	158,9	tracción	3	476,70
f10	-160,62	compresión	4,546	-730,18
10_11	1,05	tracción	6,364	6,68
11n	158,25	tracción	4,5	712,13
11_12	0	nulo	4,5	0

Tabla 12. Caminos de cargas para la Alternativa 4.2. Fuente: elaboración propia.

Camino de cargas en tracción $\sum F_{tLt}$	Camino de cargas en compresión $\sum F_{cLc}$	Diferencia entre caminos de carga $\sum F_{tLt} - \sum F_{cLc}$	Camino de cargas total $\sum F_{tLt} + \sum F_{cLc}$
4812,10	-8930,50	-4118,40	13742,60

Tabla 13. Caminos de cargas para la Alternativa 4.2. Fuente: elaboración propia.

Diagramas y tablas correspondientes a la Alternativa 5. Se proporcionan ahora los diagramas y tablas correspondientes a la Alternativa 5. Lo mismo explicado para la Alternativa 3 se aplica a ésta. Las figuras correspondientes a esta alternativa son las 77 y 78, mientras que las tablas son las 14, 15, 16.

Nudo (izquierda a derecha)	Longitud tributaria (m)	Carga puntual aplicada (kN)
1	1,501	14,56
2	2,177	21,12
3	1,351	13,11
4	1,351	13,11
5	1,351	13,11
6	1,576	15,29
7	1,802	17,48
8	1,655	16,06
9	1,509	14,64
10	1,509	14,64
11	1,509	14,64
12	2,264	21,96
13	3,018	29,28

Tabla 14. Nudos, longitudes y cargas para la Alternativa 5. Fuente: elaboración propia.

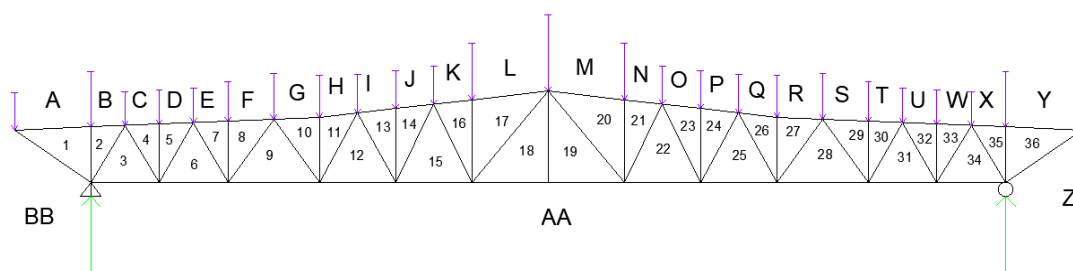


Figura 77. Diagrama de Forma Alternativa 5. Fuente: elaboración propia.

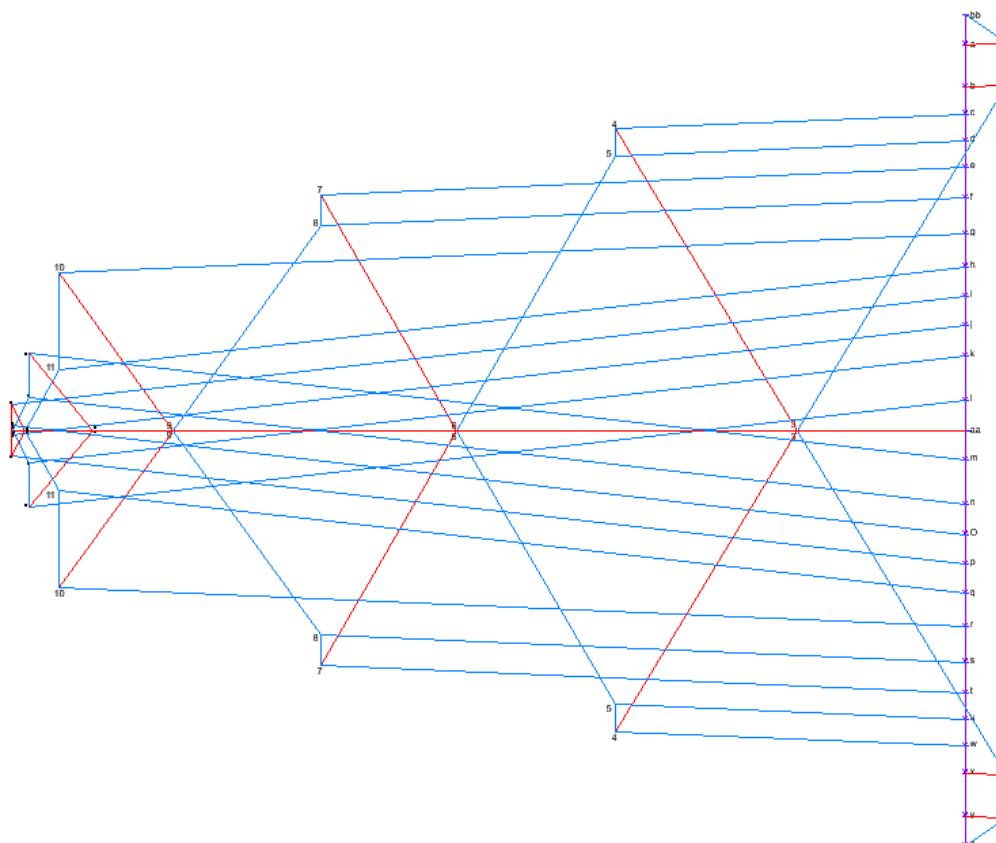


Figura 78. Diagrama de Fuerza Alternativa 5. Fuente: elaboración propia.

Barra	Esfuerzo axial (KN)	C/T	Longitud barra (m)	FL (KNm)
a1	20,57	tracción	3,002	61,75
1bb	-24,7	compresión	3,605	-89,04
b2	20,57	tracción	1,351	27,79
2_1	-21,12	compresión	2,125	-44,88
2_3	-199,38	compresión	2,565	-511,41
3aa	84,37	tracción	2,7	227,80
c4	-176,27	compresión	1,351	-238,14
4_3	174,32	tracción	2,565	447,13
d5	-176,26	compresión	1,351	-238,13
5_4	-13,11	compresión	2,237	-29,33
5_6	-156,79	compresión	2,662	-417,37
6aa	255,64	tracción	2,7	690,23

e7	-32,41	compresión	1,351	-43,79
7_6	134,43	tracción	2,662	357,85
f8	-324,11	compresión	1,802	-584,05
8_7	-15,29	compresión	2,35	-35,93
8_9	-125,24	compresión	3,02	-378,22
9aa	398,47	tracción	3,6	1434,49
g10	-456,46	compresión	1,801	-822,08
10_9	96,61	tracción	3,02	291,76
h11	-458,86	compresión	1,509	-692,42
11_10	-477,3	compresión	2,5	-1193,25
11_12	-34,24	compresión	3,059	-104,74
12aa	472,84	tracción	3	1418,52
i13	-482,87	compresión	1,509	-728,65
13_12	14,4	tracción	3,059	44,05
j14	-482,86	compresión	1,509	-728,64
14_13	14,64	tracción	2,833	41,48
14_15	2,33	tracción	3,354	7,81
15aa	478,87	tracción	3	1436,61
k16	-473,9	compresión	1,509	-715,12
16_15	-175,9	compresión	3,354	-589,97
l17	-473,9	compresión	3,018	-1430,23
17_16	-21,96	compresión	3,166	-69,53
17_18	-49,64	compresión	4,61	-228,84
18aa	438,69	tracción	3	1316,07
18_19	0	nulo	3,5	0

Tabla 15. Caminos de cargas para la Alternativa 5. Fuente: elaboración propia.

Camino de cargas en tracción $\sum F_{tLt}$	Camino de cargas en compresión $\sum F_{cLc}$	Diferencia entre caminos de carga $\sum F_{tLt} - \sum F_{cLc}$	Camino de cargas total $\sum F_{tLt} + \sum F_{cLc}$
15606,69	-19827,50	-4220,81	35434,20

Tabla 16. Caminos de cargas para la Alternativa 5. Fuente: elaboración propia.

Por último, y para completar la comparativa entre alternativas, se presenta la tabla 17. Esta tabla proporciona los valores de camino de las cargas de cada una de las alternativas, un ratio de camino de cargas para el cual se ha tomado como alternativa base o de comparación la 4.1.

La última columna de la tabla proporciona el volumen total asociado a cada estructura. El volumen puede obtenerse dividiendo el camino de las cargas por la resistencia característica del material empleado. Se debe tener en cuenta que se trata de estructuras de madera, y que la resistencia característica es diferente según la dirección en la que actúen las cargas en relación a la dirección de las fibras del material. Por ello, si se busca obtener el volumen asociado al camino de las cargas en compresión, es necesario emplear la resistencia característica a compresión paralela del material. Para la clase resistente de madera GL24h, la resistencia característica a tracción paralela es  $\sigma_t = f_{t,0,g,k} = 16,5 \text{ N/mm}^2$ , y la resistencia característica a compresión paralela es  $\sigma_c = f_{c,0,g,k} = 24 \text{ N/mm}^2$ . La expresión utilizada para calcular el volumen total de material de cada alternativa es la siguiente:

$$V_{\text{total}} = \frac{1}{\sigma_t} \sum F_t L_t + \frac{1}{\sigma_c} \sum F_c L_c$$

Alternativa de diseño	Camino de cargas en tracción $\sum F_t L_t$	Camino de cargas en compresión $\sum F_c L_c$	Diferencia entre caminos de carga $\sum F_t L_t - \sum F_c L_c$	Camino de cargas total $\sum F_t L_t + \sum F_c L_c$	Ratio camino de cargas	$V_{\text{total}}$ (m³)
Alternativa 4.1	5405,87	-7168,04	-1762,17	12573,91	1	0,626
Alternativa 4.2	4812,10	-8930,50	-4118,40	13742,60	1,09	0,664
Alternativa 3	14945,38	-17734,48	-2789,09	32679,86	2,60	1,645
Alternativa 5	15606,69	-19827,50	-4220,81	35434,20	2,82	1,772

*Tabla 17. Caminos de cargas de las alternativas presentadas y ratios. Fuente: elaboración propia*

De la tabla anterior puede observarse que la alternativa con el menor camino de cargas total es también la alternativa con el menor volumen de material. Los resultados expuestos demuestran como el Teorema de Maxwell constituye una potente herramienta en el diseño conceptual e inicial de una estructura.

Dentro de las alternativas comparadas la Alternativa 4.1 es la que presenta un menor camino de cargas total, y considerando que todas las alternativas se encuentran sometidas a la misma carga, esta alternativa resultaría la más eficiente. Cabe considerar que la Alternativa 4.2, al contrario que el resto, ya contabiliza los pilares del pórtico, y la diferencia respecto a la Alternativa 4.1 es de escasa magnitud analizando el ratio que relaciona los caminos de cargas, siendo el valor para la Alternativa 4.2 respecto a la Alternativa 4.1 de 1,09.

Para realizar una comparativa más precisa entre la Alternativa 4.1 y la Alternativa 4.2 sería necesario contabilizar los pilares de la Alternativa 4.1. Del propio Diagrama de Fuerza de esta alternativa es posible obtener el valor de la reacción en cada uno de los apoyos, cuyo valor es de 205,16 kN. Este valor de la reacción se considera como una carga vertical actuando sobre el nudo de unión de la pareja de pilares, y su valor se descompondría de manera que cada pilar recibiese una parte de la reacción, aunque, por tratarse de una carga vertical y dado que uno de los pilares coincide exactamente en dirección con ella, se considera que éste pilar soporta por completo la carga o reacción. El esfuerzo axil en este elemento es por tanto de 205,16 kN, en compresión, y conocida su longitud de 5 m, puede determinarse que el camino de cargas de compresión correspondiente al elemento es  $\sum F_c L_c = 205,16 \cdot 5 = 1025,8 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Este valor se repite para al pilar del otro apoyo.

El camino total de cargas de la Alternativa 4.1 una vez contabilizados los pilares presenta un valor de 14625,51 kN·m, superior al valor del camino total de cargas de la Alternativa 4.2.

La Alternativa 3 y la Alternativa 5 quedarían descartadas a la vista de los resultados obtenidos. Estas alternativas presentan caminos de cargas totales cuyo valor duplica al de la Alternativa 4.1. Además de los resultados numéricos es preciso tener en cuenta que una alternativa como la “Alternativa 5” presenta un número de nudos muy elevado respecto al resto de alternativas, lo que la convierte en una solución más costosa a nivel constructivo por el mayor número de nudos a materializar.

En la selección de la alternativa más adecuada se han tenido en cuenta también otros criterios, entre los que se encuentran la eficiencia, la economía, la elegancia y el criterio social. Se proporciona una descripción de en qué se basa cada uno de estos criterios.

Para satisfacer el criterio de **eficiencia** se persigue diseñar la estructura de manera que cumpla con sus requisitos funcionales de forma segura, procurando realizar el menor empleo posible de material.

Para satisfacer el criterio de **economía** resultara necesario tener en cuenta diversos factores que repercuten sobre el precio final de la obra, como son el coste de fabricación de los diferentes elementos de la estructura o los costes asociados al transporte de material a obra y la facilidad de montaje.

El criterio de **elegancia** resulta probablemente el más complicado de valorar, ya que se encuentra sujeto a un nivel de subjetividad superior al de otros criterios. Está por tanto sujeto a una valoración estética de la estructura en relación a la manera en la que su forma facilita la función que se pretende hacer de ella.

El criterio **social** viene relacionado en gran medida con el criterio **económico**, valorándose el coste que tenga la estructura para la sociedad, así como su repercusión sobre esta, añadiendo valor al espacio en el que se crea por resultar un atractivo social o cultural, y por proveer a la zona de unos servicios o funcionalidad favorecedores.