Resumen

Andrés Quilis

Junio de 2023

Desde el comienzo de la Teoría de Espacios de Banach, el estudio de los subespacios complementados y no complementados ha sido uno de los principales temas del área. Específicamente, en espacios de Banach no separables, han habido grandes esfuerzos en construir un marco teórico para describir la estructura de subespacios linealmente complementados en espacios de Banach. Concepctos clásicos como la Propiedad del Complemento Separable, Resoluciones Proyectivas de la Identidad, y la Propiedad de Plichko han sido y continúan siendo estudiadas en esta disciplina.

En igual medida, las aplicaciones de Lipschitz en espacios de Banach también han jugado un papel importante en el desarrollo de la teoría. Cuestiones como la clasificación de Lipschitz de los espacios de Banach, la diferenciabilidad de las funciones de Lipschitz, o la existencia de retracciones de Lipschitz a subconjuntos y subespacios de espacios de Banach, son líneas de investigación activas con abundantes resultados y aplicaciones.

En esta tesis analizamos la estructura de retractos de Lipschitz en espacios métricos y espacios de Banach no separables, de forma análoga a la teoría de complementación lineal en espacios de Banach. También discutimos la conexión de este tema con el progreso actual en el estudio de la estructura de los espacios de Lipschitz-free, y con el problema de la existencia de operadores de extensión lineales para funciones de Lipschitz.

En primer lugar, generalizamos algunas herramientas clásicas de la teoría lineal al marco no lineal: Definimos el concepto de esqueletos retractivos de Lipschitz como una generalización a los esqueletos proyectivos. Como aplicación de estas nociones, demostramos que el espacio de Lipschitz-free asociado a un espacio de Banach con la propiedad de Plichko tiene a su vez la propiedad de Plichko. Utilizamos también los esqueletos retractivos de Lipschitz para caracterizar aquellos espacios métricos cuyo espacio de Lipschitz-free tiene la propiedad de Plichko con medidas de Dirac, y mostramos que el espacio de Lipschitz-free asociado a cualquier $\mathbb{R}$-árbol es 1-Plichko con moléculas elementales.

A continuación, pasamos a definir la Propiedad del Retracto de Lipschitz (α, β) (o la Lipschitz RP(α, β)) para un par de cardinales infinitos $\alpha \leq \beta$. Esta es la propiedad no lineal análoga a la clásica Propiedad del Complemento. Observamos que los espacios $C(K)$ tiene la Lipschitz RP$(\aleph_0, \aleph_0)$, lo cual implica que sus espacios de Lipschitz-free asociados poseen la Propiedad del Complemento Separable.

Siguiendo con el estudio previo, construimos, para cada cardinal infinito Λ, un espacio métrico completo sin la Lipschitz RP(Λ, Λ). En el caso numerable, podemos mejorar este resultado produciendo un espacio métrico completo que satisface una propiedad más fuerte que la negación de la Lipschitz RP$(\aleph_0, \aleph_0)$: Todo subconjunto separable con almenos dos puntos no es un retracto de Lipschitz.

Finalmente, generalizamos un resultado de Heinrich y Mankiewicz al marco no lineal al mostrar que en cada espacio métrico M, todo subconjunto está contenido en otro subconjunto con el mismo carácter de densidad que además admite un operador lineal de extensión de funciones Lipschitz.