

Una experiencia para favorecer el aprendizaje profundo del concepto umbral de función en Matemáticas

An experience for improving the deep learning of the threshold concept of function in Mathematics

Macarena Trujillo^a, Lorena Atarés^b, María José Canet^c, Asun Pérez-Pascual^c

^aDpto. Matemática Aplicada. Universitat Politècnica de València, matrugui@mat.upv.es 

^bDpto. Tecnología de Alimentos. Universitat Politècnica de València, loathue@tal.upv.es  y

^cDpto. Ingeniería Electrónica. Universitat Politècnica de València, macasu@eln.upv.es , asperez@eln.upv.es 

How to cite: Macarena Trujillo, Lorena Atarés, María José Canet y Asun Pérez-Pascual. 2023. Una experiencia para favorecer el aprendizaje profundo del concepto umbral de función en Matemáticas. En libro de actas: *IX Congreso de Innovación Educativa y Docencia en Red*. Valencia, 13 - 14 de julio de 2023. Doi: <https://doi.org/10.4995/INRED2023.2023.16544>

Abstract

A threshold concept is a transformative concept that students must assimilate to deeply understand the subject and its subsequent transfer to other disciplines. In the field of Mathematics, there are different threshold concepts, among them, the function concept is one of the most relevant. There are numerous studies to corroborate that students have several learning difficulties and misconceptions about this concept that make it difficult to understand. In order to help students overcome learning difficulties and confront misconceptions related to the concept of function in Mathematics, our goal has been to carry out the innovation presented in this paper. The results obtained in two academic years are shown. In the first course, we only focus on detecting difficulties and misconceptions. In the second course, we also carried out an intervention in the classroom. The results suggest that the actions have improved the students' understanding of the concept of function, and also highlight other aspects to continue improving.

Keywords: *threshold concept, function, mathematics, learning difficulty, misconception, deep learning.*

Resumen

Un concepto umbral es un concepto transformador que los estudiantes deben llegar a asimilar para abrir la puerta a la comprensión profunda de la materia y su posterior transferencia a otros ámbitos. En el campo de las Matemáticas existen diferentes conceptos umbrales, uno de los más relevantes es el de función. Existen numerosos estudios que

corroboran que los estudiantes presentan diversas dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas alrededor de este concepto que dificultan su comprensión. Con la finalidad de ayudar a los estudiantes a superar las dificultades de aprendizaje y confrontar sus concepciones erróneas relacionadas con el concepto de función en Matemáticas, se ha desarrollado la innovación que detallamos en este trabajo. Se presentan los resultados obtenidos en dos cursos académicos. En el primero de ellos, nos centramos solo en detectar dificultades y concepciones erróneas. En el segundo curso, además, realizamos una intervención en el aula. Los resultados sugieren que las actuaciones llevadas a cabo han conseguido una mejora en la comprensión de los estudiantes del concepto de función, y también destacan otros aspectos a seguir mejorando.

Palabras clave: *concepto umbral, función, matemáticas, dificultad de aprendizaje, concepción errónea, concepto clave, aprendizaje profundo.*

1. Introducción

El germen de la experiencia que presentamos comenzó en el INED (Iniciación a la Investigación Educativa), un curso bianual de formación que ofrece el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universitat Politècnica de València (UPV). Prácticamente al inicio de este curso, en el que coincidimos, nos plantearon si creíamos que nuestros estudiantes podían tener algún problema general de comprensión. La sorpresa fue que, a pesar de recibir buenas notas en las encuestas de valoración del profesorado y un elevado índice de aprobados, todas encontramos muchas evidencias de que verdaderamente nuestros estudiantes presentaban problemas de comprensión. El rápido olvido de procedimientos o conceptos, la dificultad de resolución de un ejercicio al que se le ha modificado ligeramente el enunciado habitual, la capacidad de memorizar varias fórmulas, pero no identificar correctamente el contexto en el que aplicarlas, o la imposibilidad de transferir conceptos de manera interdisciplinar, fueron algunos de los hechos que lo evidenciaban.

Es frecuente pensar que los alumnos no nos entienden porque no lo intentan. Es decir, que la causa del problema de comprensión está en la actitud y aptitud del alumnado. Realmente, esta puede ser una causa, pero si el problema es generalizado, persistente a lo largo de los cursos, y se observa incluso en estudiantes de éxito, tal vez el motivo de la falta de comprensión deba reconsiderarse. De hecho, la literatura apunta a tres posibles causas. La primera hace referencia a que los estudiantes no comprenden porque no perciben que eso sea lo que tienen que hacer. Un ejemplo claro está en la evaluación, ya que si les pedimos exactamente lo mismo que les damos, sin necesidad de un razonamiento mayor, les damos a entender que no es necesario que comprendan los conceptos y que es suficiente con repetir lo mismo que hacen en clase o se aprenden de memoria. La segunda causa tiene que ver con las condiciones que tienen los estudiantes para conseguir una comprensión profunda. Si tienen una excesiva carga de trabajo, estrés, o una baja percepción de relevancia de la materia, entonces no están en condiciones favorables para el aprendizaje profundo y recurrirán a una estrategia de aprendizaje superficial. La tercera causa principal, quizá la menos intuitiva, apunta a que existen determinados conceptos clave en las disciplinas que los estudiantes tienen dificultad en entender. Es decir, todas las disciplinas cuentan con conceptos determinantes para la correcta y profunda comprensión de la materia, que pueden estar limitando el aprendizaje profundo. En esta última causa es en la que hemos centrado nuestra innovación.

Estos conceptos de difícil comprensión reciben el nombre de *conceptos umbral*, o *threshold concepts* (Meyer, 2003). Se trata de ideas centrales de cualquier disciplina, tan arraigadas e incorporadas en la forma

de pensar del experto, que pasan desapercibidas como posible causa de un problema de comprensión. Un concepto umbral, como su propio nombre indica, es un concepto transformador que los estudiantes deben llegar a entender y llevar a la práctica para abrir la puerta a la comprensión profunda de la materia y su posterior transferencia a otros ámbitos, ya que está relacionado con muchos otros conceptos de la disciplina. Suelen ser ideas molestas o contraintuitivas que pueden limitar el proceso de aprendizaje, que requieren de perseverancia de trabajo dentro y fuera del aula, pero cuya superación favorecerá que el aprendizaje posterior avance exponencialmente.

En la innovación que presentamos nos centramos en la experiencia que hemos llevado a cabo con el concepto umbral de función en Matemáticas. Concretamente, el contexto ha sido la asignatura cuatrimestral de Matemáticas 2 del segundo curso del Grado en Fundamentos de la Arquitectura de la UPV. Ha sido una innovación planteada en dos años en la que han participado tres grupos, dos en el primer año y uno en el segundo, con un tamaño medio de 60 estudiantes/grupo.

La finalidad que perseguimos con esta innovación es la de favorecer el aprendizaje profundo del concepto de función en los aprendientes de la asignatura de Matemáticas 2. En cursos anteriores, las calificaciones obtenidas fueron aceptables en términos de porcentaje de aprobados. Sin embargo, en las pruebas de evaluación una proporción significativa de estudiantes evidenciaba no haber adquirido una comprensión profunda del concepto de función. De hecho, la evidencia de ello es que un cambio de nomenclatura en las funciones, la utilización de una función concreta que procediese de un problema real, o simplemente la no especificación de si la función era escalar o vectorial, suponía en algunos casos el principal problema para plantear el ejercicio de la evaluación. Los estudiantes en su gran mayoría tratan de aprender siguiendo recetas y guiones, pero no comprenden el sentido de lo estudiado, lo que limita su transferencia a otras asignaturas o futuro profesional. Esto conduce a una falta de motivación en el estudio de la asignatura y que, una vez aprobada la misma, los conceptos queden denostados. En definitiva, estudiar para el olvido.

La elección de función como concepto umbral en el que enfocarnos fue inducida por la literatura y la temática de la asignatura. Por un lado, Matemáticas 2 está basada fundamentalmente en el cálculo de derivadas e integrales de funciones de varias variables, por lo que su base son las funciones. Por otro lado, la literatura apunta a que, en el ámbito de las matemáticas, las funciones, los límites, las derivadas y las integrales se reconocen como conceptos umbrales (Pettersen, 2008). Hay numerosos estudios que demuestran los problemas que tienen los estudiantes con estos conceptos (Akkoç, 2003; Bardini 2014; Borke, 2021; Cansiz, 2011; Dubinsky 2013; Sajka, 2013). Respecto al concepto de función, Harel y Dubinsky (1992) editaron un libro sobre los problemas de comprensión de los estudiantes sobre este concepto, que a día de hoy siguen vigentes (Parhizgar, 2021). Y no es un problema solo de los estudios superiores, sino que una comprensión limitada del concepto de función ha demostrado tener un efecto significativo sobre la transición entre la educación secundaria y la universitaria (Thomas, 2012). Además, puesto que el concepto de función también es clave en otras disciplinas, este problema de comprensión afecta a muchas asignaturas relacionadas con la ingeniería en las que se utilizan funciones para modelizar diferentes fenómenos. En un trabajo previo (pendiente de revisión) indagamos sobre las principales dificultades y concepciones erróneas sobre el concepto de función que se habían recogido en la bibliografía desde los años 70. A partir de estos resultados nos planteamos la innovación que detallamos en los siguientes apartados.

2. Objetivos

La finalidad de la innovación, favorecer el aprendizaje profundo del concepto umbral de función en los estudiantes de la asignatura de Matemáticas 2, se concretó a través de los siguientes objetivos:

O1. Detectar dificultades y concepciones erróneas sobre el concepto de función en nuestros estudiantes a partir de las detectadas y referenciadas en la bibliografía.

O2. Diseñar, desarrollar y testear unas buenas prácticas docentes que favorezcan la calidad del aprendizaje del alumnado a partir de una comprensión más profunda del concepto de función.

Para ello partimos de la hipótesis de que el concepto de función es un concepto umbral en la asignatura, además de un concepto base para poder realizar derivadas e integrales, y que la mejora de su comprensión contribuirá también en la mejora de la comprensión de la materia.

3. Desarrollo de la innovación

La experiencia se ha llevado a cabo en dos cursos académicos consecutivos (2021-2022 y 2022-2023).

Matemáticas 2 es una asignatura de primer cuatrimestre. De este modo, en cada curso se ha dedicado el primer cuatrimestre a recopilar datos del alumnado y a la intervención, y el segundo cuatrimestre al análisis de los datos. Además, al finalizar el primer curso diseñamos los materiales a utilizar en el segundo curso (ver Figura 1).

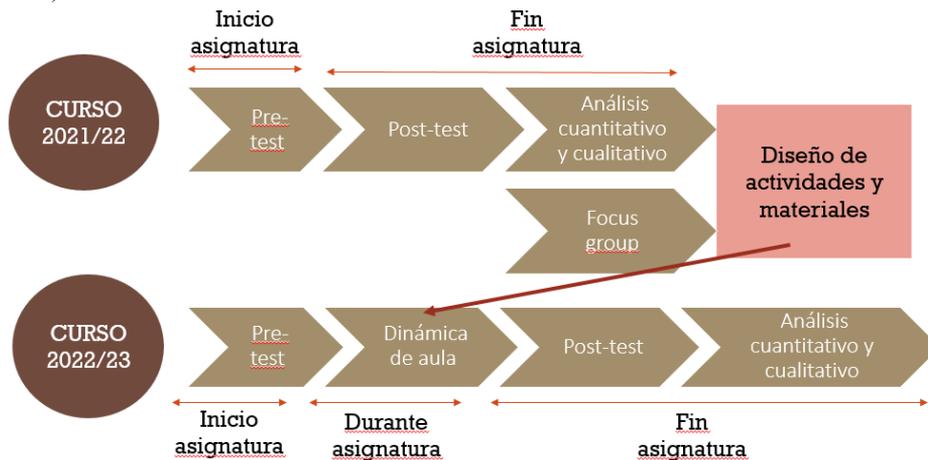


Fig. 1. Esquema temporal y secuencia de la innovación realizada.

La asignatura de Matemáticas 2 está dividida en seis grupos de aproximadamente 60 alumnos/grupo, es decir 360 alumnos/curso. Está impartida por cuatro profesores y todos ellos siguen la misma guía docente. Con respecto a la evaluación, un 80% de la nota se obtiene a partir de las calificaciones de dos exámenes de nivelación comunes a todos los grupos que se realizan a mediados y a final del cuatrimestre. El 20% restante de la nota de la asignatura es la correspondiente a la calificación de las prácticas.

3.1. Curso 2021-2022

En este primer curso la innovación estuvo focalizada en dos de los seis grupos de la asignatura de Matemáticas 2, en ambos la profesora era la misma.

En un trabajo previo (pendiente de revisión) clasificamos las dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas del concepto de función en 5 categorías: interpretación y significado, representación gráfica, definición, manejo y características, y notación y expresión. Distribuidas en estas categorías localizamos un total de 17 dificultades y 7 concepciones erróneas previas. De entre ellas, se seleccionaron las más relevantes para la asignatura de Matemáticas 2.

Nuestro primer objetivo (O1) consistió en detectar cuáles de estas dificultades y concepciones erróneas estaban afectando al modo de razonar de nuestros estudiantes. Para ello empleamos un test con 12 preguntas extraídas de los test validados de Bardini (2014) y O'Shea (2016). Las Figuras 2 y 3 muestran dos de las preguntas del test. La primera de ellas (Figura 2) se ha utilizado para detectar problemas con la interpretación de lo que representa la expresión de una función y con la definición, en tanto en cuanto un elemento del dominio puede estar asociado con un único elemento del rango. La segunda pregunta (Figura 3) también se ha utilizado para detectar problemas con la notación o expresión de la función, pero en este caso partiendo de la gráfica de la función que modeliza un problema real. Cada una de las preguntas estaba relacionada con uno o varios de los aspectos que queríamos detectar como se muestra en la Tabla 1, donde P_i hace referencia al número de pregunta y el símbolo * marca la dificultad o concepción errónea detectada por esa pregunta.

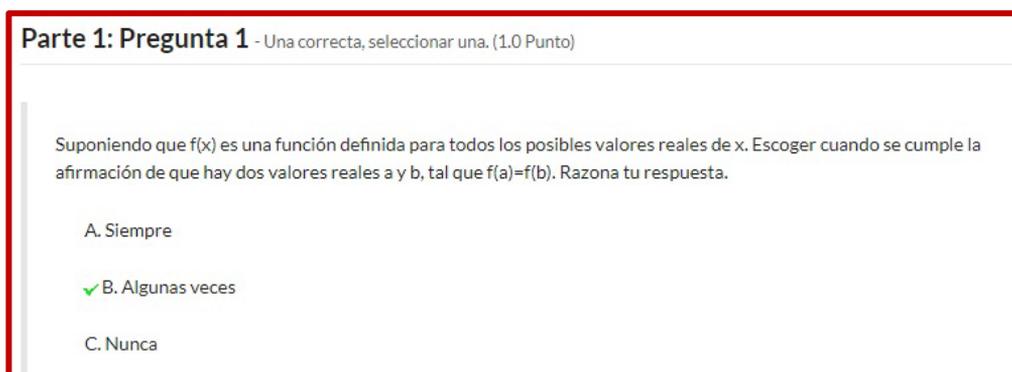


Fig. 2. Primera pregunta del test utilizado para detectar en nuestros estudiantes dificultades y concepciones erróneas con el concepto umbral de función.

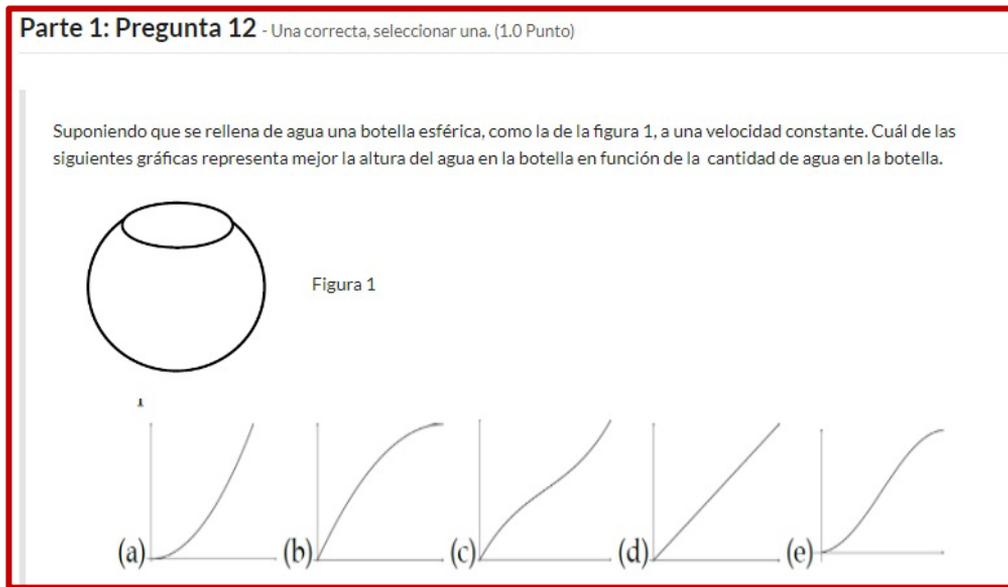


Fig. 3. Duodécima pregunta del test utilizado para detectar en nuestros estudiantes dificultades y concepciones erróneas con el concepto umbral de función.

Tabla 1. Dificultades y concepciones erróneas a detectar con cada una de las preguntas del test marcadas con el símbolo *. P_i hace referencia a la pregunta número i del test.

Dificultad con... (categorías)	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	Descripción de la dificultad
Interpretación o significado			*										Distinguir entre función y ecuación.
Representación gráfica						*	*	*					Pasar de la expresión algebraica a su representación gráfica y viceversa.
					*	*	*	*				*	Interpretar que los puntos de la representación gráfica de la función equivalen a las parejas de valores ...
					*	*		*				*	Darse cuenta que $f(x)=y$.
					*				*	*	*		Conectar el concepto de función, con la tabla de valores, y esta a su vez con la gráfica
Manejo y características				*									Distinguir cuando una expresión es una función o no.
Definición	*	*			*								Dar una definición clara y precisa utilizando un vocabulario matemático y sin recurrir a apoyos visuales.
Notación y expresión	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Saber interpretar lo que representa la expresión de una función.
Concepción errónea con...													Descripción de la concepción previa errónea
Interpretación o significado	*	*	*		*								Una función es una asociación de un único elemento del dominio con otro del rango y viceversa.
Representación gráfica					*	*	*	*				*	Todas las funciones tienen una representación gráfica en forma de recta o parábola.
Manejo y características				*									Las funciones que no son continuas, no son funciones.

Se diseñaron dos tests utilizando la herramienta PoliformaT (basada en el LMS Sakai) de la UPV. Denominamos pre-test al que se planteó al inicio del curso, previo a la impartición del tema en el que se comienza a trabajar con funciones. Pocos días antes de finalizar el curso se pidió a los estudiantes que

volvieron a realizarlo, siendo este el post-test. Los estudiantes realizaron ambos test en clase, durante 20 minutos.

Los resultados del pre-test y post-test junto con las notas finales de la asignatura se utilizaron para la obtención de resultados mediante un análisis cuantitativo. Además, para asegurar la triangulación de resultados y disponer de datos cualitativos, realizamos un *focus group*. En el *focus group* intervinieron 6 estudiantes con diferentes estrategias de aprendizaje (superficial y profundo) y cuyas notas en la asignatura variaban entre el aprobado y el sobresaliente. Las preguntas que se plantearon al *focus group* fueron las mismas del test, aunque esta vez el objetivo no era saber qué respondían sino por qué lo respondían, por lo que se les pedía un razonamiento para justificar su respuesta. Grabamos la entrevista que realizamos a los estudiantes, y elaboramos un informe con la transcripción de todo lo que dijeron.

A raíz del análisis de los resultados (detallados en el apartado 4) pudimos establecer cuáles eran las principales dificultades y concepciones erróneas que presentaban nuestros estudiantes con el concepto de función. Con ello diseñamos unas buenas prácticas docentes con las que acercarnos a la finalidad de la innovación, favorecer la mejora de la comprensión del concepto umbral de función.

3.2. Diseño de actividades y materiales

Se planteó la intervención para el curso siguiente como un seminario al inicio del curso. El seminario tuvo una duración aproximada de una hora y media. Para el seminario se diseñaron dos materiales. Por un lado, se grabó un vídeo utilizando los recursos multimedia de la UPV. El vídeo, de 10 minutos de duración, abarca todos los aspectos en los que se detectaron dificultades y concepciones erróneas y plantea varias preguntas interactivas para que los estudiantes puedan responder. La Figura 4 muestra una captura de pantalla del vídeo. Dirección del vídeo: <https://grem.upv.es?v=4241-sNhUf0owVhjAM2rETT9pe1>

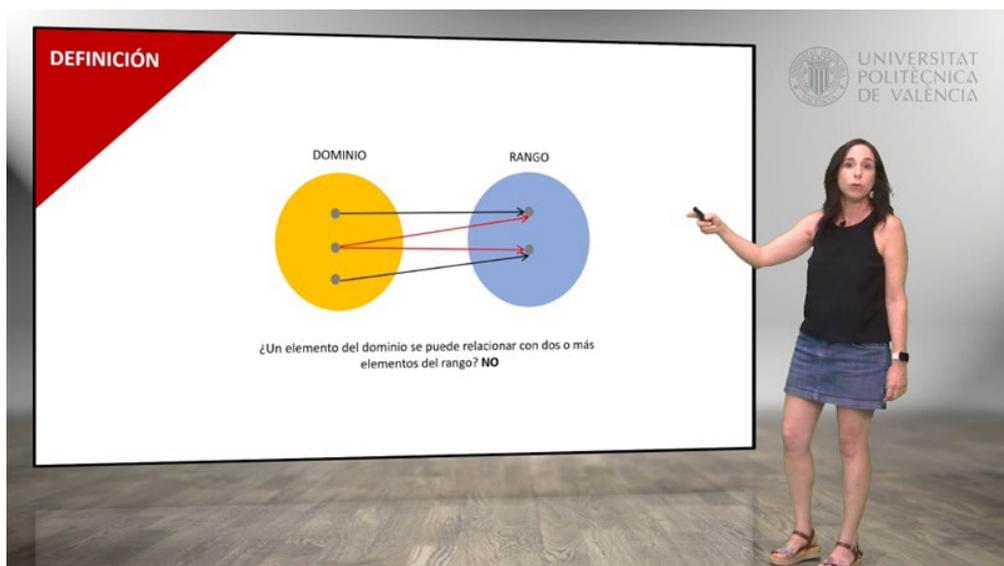


Fig. 4. Captura de pantalla del vídeo que se preparó para la intervención.

Por otro lado, se preparó un problema en el que se establecían diferentes tipos de funciones para representar el modo en que los estudiantes estudiaban una asignatura basada en aprendizaje por proyectos. De forma muy esquemática, se representaba gráficamente el número de horas de trabajo de los estudiantes a lo largo de los días, como se puede apreciar en la Figura 5. La idea era que, a partir de estas gráficas, interpretasen el significado de cada función para determinar qué tipo de estudiante se consideraban (A, B o C). Una vez

clasificados, por grupos analizaban las características de cada una de las funciones: dominio y rango, tabla con algunas parejas de valores que pertenecen a la función y una estimación de la regla que relaciona los elementos del rango con los del dominio. Para esto último podían utilizar el software *Mathematica* empleado habitualmente en la asignatura.

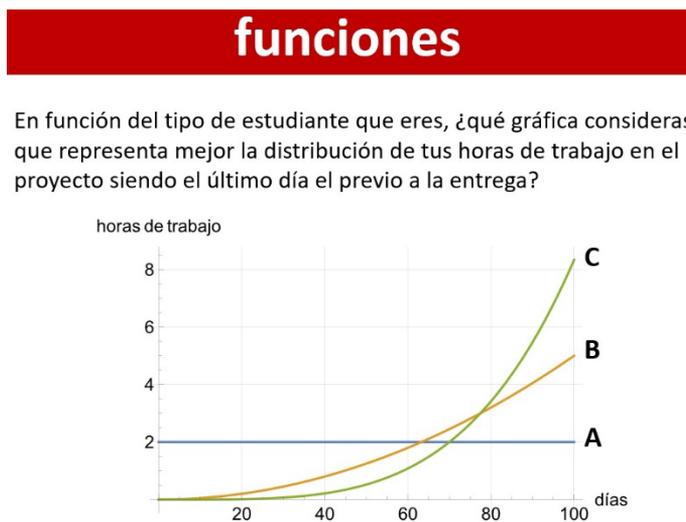


Fig. 5. Cuestión inicial del problema de modelización con funciones empleado en el seminario.

3.3. Curso 2022-2023

En el segundo curso, la innovación se focalizó en uno de los seis grupos de la asignatura.

En este curso se siguió un esquema de trabajo muy similar al del curso anterior: pase del test al inicio (pre-test) y final de la asignatura (post-test). Se realizó además la intervención (dinámica de aula) entre los dos pases del test, utilizando los materiales diseñados (ver curso 2022-2023 en Figura 1). Además del refuerzo en las clases sobre el concepto de función, se llevó a cabo el seminario en el que explícitamente tratábamos las dificultades relacionadas con el concepto con el fin de confrontar de una manera directa las concepciones erróneas.

En base a los resultados del curso previo, en este segundo curso se revisó el test y se incluyó una pregunta más del test validado de O'Shea (2016) para recabar más información relativa a las dificultades con la notación o expresión de la función, pero en este caso partiendo de la gráfica de la función utilizada para modelizar un problema real, en la línea de la pregunta 12 que se muestra en la Figura 3.

4. Resultados

Presentaremos los resultados secuencialmente, conforme se fueron obteniendo y analizando.

4.1. Resultados del pre-test y post-test del curso 2021-2022 (sin intervención)

La herramienta *exámenes* de la plataforma *PoliformaT* que utilizamos para que los estudiantes cumplimentasen el test, guarda en un archivo Excel todas las respuestas a las preguntas, las puntuaciones obtenidas por cada estudiante, la frecuencia de respuestas de cada pregunta y marca las respuestas correctas. Del archivo Excel generado, nos quedamos con las respuestas de los estudiantes que habían cumplimentado el pre y post-test, que fueron un total de 55. La muestra procedía de los dos grupos en los que se focalizó la innovación y estaba compuesta por 28 hombres y 27 mujeres. La Tabla 2 muestra la tabla de frecuencias para cada una de las preguntas del pretest del curso 2021-2022, en negrita se marca la respuesta correcta.

En el caso de las preguntas 3, 4 y 5, que tenían más de una respuesta correcta, se ha creado una columna (combinadas) en la que se contabilizó la frecuencia de la elección de todas las respuestas correctas.

Tabla 2. Tabla de frecuencias de respuestas del pretest del curso 2021-2022.

Pregunta	n	A	B	C	D	E	F	combinadas
P1	55	0,13	0,76	0,11				
P2	55	0,02	0,29	0,67				
P3	55	0,71	0,51	0,11	0,58			0,13
P4	55	0,67	0,75	0,73	0,73			0,05
P5	55	0,58	0,60	0,96	0,02			0,31
P6	55	0,85	0,13	0,00	0,02			
P7	55	0,02	0,93	0,02	0,04			
P8	55	0,04	0,18	0,00	0,78			
P9	55	0,91	0,04	0,02	0,04			
P10	55	0,00	0,91	0,07	0,02			
P11	55	0,00	0,02	0,95	0,02			
P12	55	0,00	0,07	0,40	0,05	0,22	0,25	

Las puntuaciones obtenidas fueron primeramente exportadas a Excel donde procesamos los datos para exportar las columnas correspondientes a *Statgraphics*. Los resultados se analizaron por bloques, de acuerdo con las categorías a las que se referían las preguntas del test:

- Bloque 1: Preguntas 1-5, relacionadas con la definición, la interpretación y el significado.
- Bloque 2: Preguntas 6-8, relacionadas con la identificación de funciones básicas a partir de su gráfica.
- Bloque 3: Preguntas 9-11, relacionadas con la representación gráfica de funciones a partir de tablas.
- Bloque 4: Pregunta 12, relacionada con la notación o expresión de la función, pero en este caso partiendo de la gráfica de la función utilizada para modelizar un problema real.

La Tabla 3 muestra los resultados del análisis estadístico realizado con *Statgraphics* para el pre- y el post-test para el curso 2021-2022. Cada celda tiene dos filas de datos, la superior hace referencia al pre-test y la inferior al post-test. La primera columna hace referencia a la nota global del test, y las siguientes a cada uno de los bloques. Como puede apreciarse, la media de la nota general del test mejoró en medio punto, coherentemente con las mejoras observadas por bloques. Con respecto a los bloques, los cambios más notables fueron en los bloques 1 y 4, en los que la media aumentó más de un punto. En el bloque 2 prácticamente no hubo ningún cambio, y en el bloque 3 la media descendió 0,3 puntos, si bien no hubo ningún cambio en la mediana.

Tabla 3. Resumen de algunos de los parámetros analizados en las respuestas del pre y post-test del curso 2021-2022 (sin intervención).

	Nota_PRE/POST	Nota B1_PRE/POST	Nota B2_PRE/POST	Nota B3_PRE/POST	Nota B4_PRE/POST
Distribución uniforme	SÍ	SÍ	NO	NO	NO

Media (0-10)	6,8687	5,03033	8,54545	9,21212	4
	7,35606	6,05455	8,54545	8,90909	5,63636
Mediana	7,22225	5,3334	10	10	0
	7,5	6,0	10	10	0
Desviación estándar	1,52263	1,80451			
	1,80357	2,18088			
Percentil 25%	6,38883	3,3334			
	6,66667	4,6666			
Percentil 75%	8,05558	6,0			
	8,61117	7,3334			

Hay que tener en cuenta que en este curso no se realizó ninguna intervención, solo el refuerzo que suponen las propias clases al concepto. Aunque sí que es cierto que, al ser conscientes de las dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas, a lo largo del curso se hizo especial hincapié en ellas a medida que surgían estas cuestiones. Los estudiantes presentaban de inicio pocos problemas de aprendizaje relacionados con la identificación de funciones básicas a partir de su gráfica, y de estas con la tabla de datos (bloques 2 y 3). De hecho, las notas medias son similares y muy elevadas tanto en el pre como en el post-test. El descenso de la media de las respuestas al bloque 3 podría deberse a que en la asignatura se trabaja con muchas más gráficas de las presentadas en el test y esto puede generar algo de confusión. En cualquier caso, lo que más se trabaja en la asignatura es la interpretación, la expresión y el significado, por ello la mejora más notable se observa en las preguntas del bloque 1 y 4, las cuales hacen alusión a este aspecto, aunque desde dos enfoques distintos, uno más teórico y otro más aplicado.

A la vista del análisis de todos los resultados, detectamos que los estudiantes tenían más dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas previas relacionadas con los aspectos que abarcan las preguntas de los bloques 1 y 4. También apreciamos que las preguntas con varias respuestas correctas presentaron una nota considerablemente inferior al resto, penalizando en este caso a la nota del bloque 1.

4.2. Notas del curso 2021-2022

Entre las notas finales del post test y la nota final de la asignatura se hizo una correlación (Figura 6). A la vista de los resultados, no parece existir correlación lineal entre ambas variables.

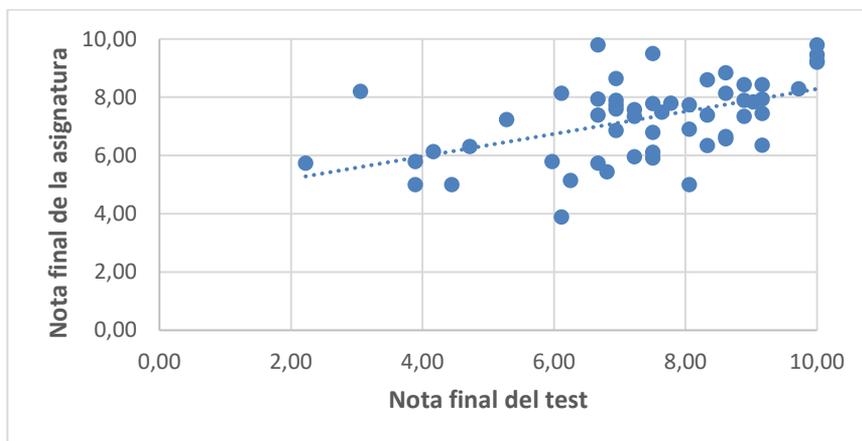


Fig. 6. Correlación entre las notas finales de la asignatura y las notas finales del test.

Las notas de la asignatura de los 55 estudiantes que hicieron ambos test siguieron la misma distribución de frecuencias que la del global de los estudiantes de la asignatura, no apreciándose ningún cambio significativo.

4.3. Resultados del *focus group*

Las respuestas de los estudiantes corroboraron los problemas que tenían con la definición y la interpretación de una función. De la muestra de 6 estudiantes que formaron parte del *focus group*, ninguno pudo dar una definición clara del concepto de función, sin utilizar apoyos gráficos y con el vocabulario adecuado. La mayoría de ellos se expresaban con un vocabulario no adecuado e impreciso, como el estudiante E1:

E1: Una expresión matemática, que es algo igual a algo, que pueden definir formas u otras cosas, como por ejemplo cómo varían ciertos elementos.

El estudiante E3 demostró tener la concepción errónea que considera las funciones como cajas transformadoras:

E3. Una máquina de transformación de valores.

Y tan solo el estudiante E4 se acercó a la definición de función como relación entre los elementos de dos conjuntos:

E4: Un mecanismo que nos permite a un valor relacionarle otro, un mecanismo que nos permite relacionar dos cosas.

La mayoría tenía problemas para discernir entre función y ecuación, no entendían el contexto de aplicación entre una y otra. Cuando se les preguntó:

Profesora: $y=3x+5$, ¿esto es una función, una ecuación, ambas cosas o ninguna?

Ninguno pudo contestar correctamente.

Las respuestas más solventes se dieron en relación a cuestiones de procedimiento en torno a la representación gráfica de una función, sobre cómo pasar de la función a la gráfica o de la tabla de valores a la gráfica. Sin embargo, las respuestas denotaron que en muchos casos recurrían a reglas y no a razonamientos para saber cómo representar la función:

Una experiencia para favorecer el aprendizaje profundo del concepto umbral de función en Matemáticas

Profesora: Cuando observas la gráfica de una función y te dan la expresión de varias funciones a las que pueden corresponder (les muestro las preguntas 6, 7 y 8), ¿en qué te fijas para saber a cuál corresponde?

E1: En el grado del polinomio, si es una recta, grado 1. Si es una parábola, grado 2.

El resto asiente.

Sin embargo, en el caso de la tabla de valores algunos mostraron que sí utilizaban razonamientos para representar la función:

Profesora: Cuando te dan una tabla de valores de una función y te dan la expresión de varias funciones a las que pueden corresponder (les muestro las preguntas 9, 10 y 11), ¿en qué te fijas para saber a cuál corresponde?

E4. Yo me fijo en cómo cambian los valores. Si en una fila cambian de una unidad en unidad, y en la otra lo mismo, eso significa que hay una correspondencia lineal. Hay otras que son el cuadrado.

E2. Yo no puedo hacerlo por lógica porque si no me equivoco, lo hago punto a punto.

En el caso del uso de funciones para modelizar un comportamiento real, de nuevo algunos demostraron que utilizaban un razonamiento lógico, aunque la mayoría no parecían seguir una estrategia:

Profesora: Cuando tratas de interpretar o tratar de describir el comportamiento de un fenómeno (les lee el enunciado de la pregunta 12) como una función, ¿qué estrategia utilizas?

E2. Yo no tengo ni idea.

E3. Yo me imaginé cómo se llenaba. Si es constante es como llenar una pecera en un grifo. Es lo mismo, entonces te das cuenta de cuándo sube más rápido y cuándo más lento, entonces dices más rápido, más pendiente. Depende de lo que te pregunten.

E4. Yo algo parecido. Me imaginé la pecera cortada por la mitad y a medida que iba llenándola de agua, cómo evolucionaba la altura y veía a qué gráfica se correspondía.

E1. Yo me la imaginé como por secciones horizontales. Y en cada sección miraba cuántos metros cuadrados tenía. A más metros cuadrados, más tardaba en llenarse.

En líneas generales los resultados del *focus group* apuntaron en la misma dirección que los resultados del pre y post-test, que las principales dificultades de aprendizaje que tenían los estudiantes estaban relacionadas con la definición y la expresión de las propias funciones. Además, se detectó que el principal problema de fondo que había en las respuestas de todas las cuestiones es que los estudiantes no encontraban el sentido a las funciones, el para qué. Por ello, los materiales que se diseñaron y el seminario se orientaron en reforzar este aspecto.

4.4. Resultados del pre-test y post-test del curso 2022-2023 (con intervención)

De forma análoga al curso 2021-2022, realizamos el análisis de los datos del pre y post-test del curso 2022-2023, en el que sí se realizó una intervención entre el pase de ambos test. En este caso el grupo estaba compuesto por 62 estudiantes, pero solo 40 (9 hombres y 31 mujeres) hicieron el pre y el post test (que fueron los considerados en las estadísticas), 15 hicieron solo uno de los test y 7 no hicieron ninguno, ya que eran estudiantes que no suelen asistir a clase.

La Tabla 4 muestra los resultados correspondientes al curso 2022-2023. Como puede apreciarse, la media general del test aumentó medio punto entre el pre-test y el post-test, el mismo aumento que en el curso

anterior. El aumento más notable se produjo en el bloque 1, del mismo modo que el curso anterior. Aunque existen varias diferencias entre los cursos: en el 2022-2023 tanto la nota del bloque 2, como la del bloque 3 aumentaron, algo que no sucedió en el curso anterior; y por el contrario, la nota del bloque 4 descendió. El análisis de las dos preguntas del bloque 4 por separado (hay que recordar que en este curso se introdujo la pregunta 13 con varias respuestas correctas) nos indica que, si solo utilizamos como referencia la pregunta 12, entonces los resultados son análogos a los que se obtuvieron en el curso 2021-2022. Es decir, comparando las mismas preguntas, los resultados del post-test han sido mejores que los del pre-test en todos los bloques, y todos los bloques mejoran, lo cual no sucedió en el curso anterior. El problema con la pregunta 13 es que era una pregunta con varias respuestas correctas y estas han demostrado tener una nota inferior al resto, como ya se comentó en los resultados del curso 2021-2022 en relación a algunas preguntas del bloque 1. Por otro lado, es probable que el orden de las preguntas tuviera un impacto en los resultados, y que cierto efecto de agotamiento afectara negativamente la calificación de las dos últimas preguntas, que a su vez requieren de un mayor grado de razonamiento.

Aunque hemos realizado una comparación entre cursos, esta es compleja por las variaciones de los individuos del grupo. Por ello, aunque hemos visto que los resultados del post-test en el segundo curso han sido mejores que en el primero, en realidad, lo que perseguimos es poder comparar los resultados de pre-test y post-test durante dos cursos, y en ese caso hemos visto que la tendencia es similar. Las clases por sí mismas sirven para favorecer el aprendizaje del concepto de función, si bien algunos aspectos aún tienen margen de mejora y sería útil seguir insistiendo en la intervención.

4.5. Notas del curso 2022-2023 (con intervención)

La correlación de la nota final de la asignatura y la del test indicaron lo mismo que en el curso anterior, que no existe correlación entre ambas variables.

Sin embargo, a diferencia del curso anterior, la nota final de la asignatura en el grupo en el que se hizo la intervención fue mucho mejor en comparación con la tendencia general de la asignatura. En la Figura 7 se pueden apreciar las notas del grupo (seleccionados) y las notas generales de la asignatura (todos). Como se puede apreciar, la distribución de notas en el grupo intervenido tiene una media muy superior al de la asignatura general (7,24 vs. 5,96), siendo el número de excelentes el doble que en el grupo general. También la nota mínima y el número de alumnos no presentados presentan mejores registros. Y es que en todos los índices se observa una mejora en el grupo intervenido respecto al total.

Tabla 4. Resumen de algunos de los parámetros analizados en las respuestas del pre y post-test del curso 2022-2023 (con intervención).

	Nota PRE/ POST	Nota B1_PRE/ POST	Nota B2_PRE/ POST	Nota B3_PRE/ POST	Nota B4_PRE/ POST
Distribución uniforme	SÍ	SÍ	NO	NO	NO
Media (0-10)	6,44923 6,92731	5,2665 6,061	8,75 9,16667	8,58333 8,75	3,625 3
Mediana	6,40769 7,11154	5,67 6,33	10 10	10 10	5 5

Desviación estándar	1,38263	1,90436			
	1,56027	2,58393			
Percentil 25%	5,64231	4,0			
	5,58077	4,84			
Percentil 75%	7,30769	6,34			
	8,01154	8,0			

MediaCurso

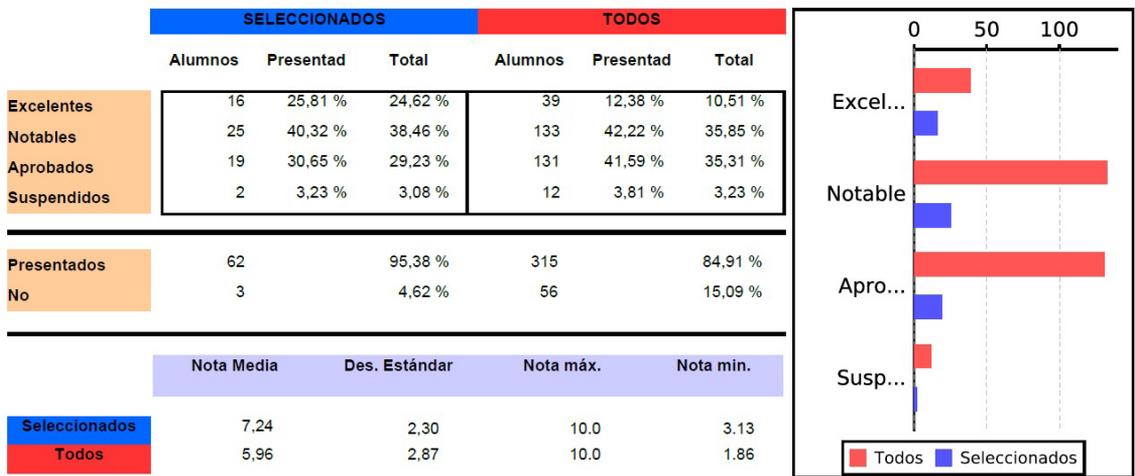


Fig. 7. Notas media de la asignatura de Matemáticas 2 en el curso 2022-2023. “Seleccionados” hace referencia al grupo donde se ha intervenido y “Todos” a todos los estudiantes de la asignatura.

Puntualizar que de los 6 grupos de la asignatura de Matemáticas 2, antes de la intervención la nota media del expediente de los estudiantes del grupo intervenido era la cuarta de los seis grupos, en orden de mayor a menor.

Aunque puedan existir otras variables, lo cierto es que la única variación en la enseñanza con respecto al curso anterior ha sido la intervención y la mayor insistencia en las dificultades de aprendizaje del concepto de función, por lo que parece apuntar que se ha favorecido el aprendizaje del concepto y que ha repercutido en las notas obtenidas.

5. Conclusiones

La finalidad que hemos perseguido con esta innovación es la de favorecer el aprendizaje profundo del concepto umbral de función. Para ello presentamos una innovación en dos etapas, por un lado, detectar las principales dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas que tenían nuestros estudiantes con dicho concepto y, por otro lado, a partir de los resultados de la primera etapa, diseñar, desarrollar y testar unas buenas prácticas que vayan encaminadas a la finalidad de la innovación.

A partir de los resultados de la primera etapa podemos concluir que las principales dificultades de los estudiantes se encontraban relacionadas con la definición, la interpretación o sentido y expresión de las

funciones, tanto en un contexto teórico, como en un problema contextualizado. Y podemos concluir del mismo modo que las clases *per se* contribuyen a mejorar estos aspectos.

Por los resultados de la segunda etapa podemos extraer que las buenas prácticas implementadas también han contribuido a una mejora notable de la comprensión del concepto de función, lo que fundamentalmente se ha traducido en un aumento de la nota de la asignatura de los alumnos implicados con respecto al grupo general de estudiantes de la asignatura.

Es remarcable que el efecto de la intervención se aprecia en toda la asignatura, y no solo en una prueba focalizada y específica para funciones, lo que hace corroborar la interrelación entre este concepto umbral y el aprendizaje posterior.

A pesar de los buenos resultados, es necesario seguir insistiendo en unas buenas prácticas que favorezcan el aprendizaje profundo del concepto de función puesto que todavía existe un margen amplio de mejora.

Agradecimientos. Esta innovación ha sido financiada por la Universitat Politècnica de València. Convocatoria A+D 2021. Proyectos de Innovación y Mejora Educativa. PIME E-1810.

Referencias

- Akkoç, H., & Tall, D. (2003). The function concept: Comprehension and complication. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 23(1), 1-6.
- Bardini, C., Pierce, R., Vincent, J., y King, D. (2014). Undergraduate Mathematics Students' Understanding of the Concept of Function. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, 5(2), 85-107.
- Borke, M. (2021). Student Teachers' Knowledge of Students' Difficulties with the Concept of Function. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 9(1), 670-695.
- Cansız, S., Küçük, B. y Isleyen, T. (2011). Identifying the secondary school students' misconceptions about functions. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 15, 3837-3842.
- Dubinsky, E., & Wilson, R. T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 83-101.
- Meyer, J.H.F & Land, R. (2003). *Threshold Concepts and Troublesome Knowledge: Linkages to ways of thinking and practising within the disciplines*. Edinburgh: ETL Project, Universities of Edinburgh
- O'Shea, A., Breen, S., y Jaworski, B. (2016). The development of a function concept inventory. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(3), 279-296.
- Pettersson, K. (2008). *Algoritmiska, intuitiva och formella aspekter av matematiken i dynamiskt samspel: en studie av hur studenter nyttjar sina begreppsuppfattningar inom matematisk analys*. Chalmers Tekniska Högskola (Sweden).
- Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function-A case study. *Educational studies in mathematics*, 53(3), 229-254.