

DESCRIPTIVE GEOMETRY AND AUGMENTED GRAPHIC THINKING

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA Y PENSAMIENTO GRÁFICO AUMENTADO

Andrés Martín-Pastor ^a, Rodrigo Vargas-Peña ^{a2}

^a Departamento de Ingeniería Gráfica/ETSIE/IUACC, Universidad de Sevilla, España.

^b Profesor Escuela de Arquitectura/Universidad del Valle, Colombia.

^aarchiamp@us.es, ^brodrigo.vargas@correounivalle.edu.co

Abstract

An approach to Descriptive Geometry from digital graphic tools is presented, in which the form of graphic interaction that arises from these tools is analysed, and the importance of their associated automatisms and procedures is discussed. We review the classic idea of graphical thinking to introduce the concept of “augmented graphical thinking”: this is linked to the new paradigm of simulation, which is understood as an evolution of the previous paradigm based on representation. Understanding this paradigm shift allows us to approach Descriptive Geometry with digital graphic tools from an in-depth gnoseological foundation, but not without observing certain contradictions that must be analysed and discussed. By focusing on the so-called digital automatisms, we demonstrate that these form part of a long tradition in the history of Graphic Expression, since, like other drawing mechanisms machines designed in the past, they involve the search for the “shortest way” to solve the problem of image construction. Lastly, in the conclusions we address the inevitable connection between Descriptive Geometry and Digital Fabrication.

Keywords: Descriptive Geometry; Graphic Thinking; Augmented Graphic Thinking; Simulation; Digital Fabrication; Graphic Automatisms; Parametric Design.

Resumen

Presentamos una aproximación a la Geometría Descriptiva desde las herramientas gráficas digitales, analizando la forma de interacción gráfica que surge de ellas y reflexionando sobre la importancia de los automatismos y los procedimientos asociados a dichas herramientas. Revisamos la idea clásica de pensamiento gráfico apoyándonos en el concepto de “pensamiento gráfico aumentado”, vinculado al nuevo paradigma de la simulación, entendido éste como una evolución del anterior basado en la representación. Comprender este cambio de paradigma nos permite abordar la Geometría Descriptiva con herramientas gráficas digitales desde una fundamentación gnoseológica más profunda, no sin evidenciar ciertas contradicciones que deben ser analizadas y discutidas. Centrándonos en los automatismos digitales, demostraremos que forman parte de una larga tradición en la historia de la Expresión Gráfica, ya que, al igual que otras máquinas de dibujo ideadas en el pasado, suponen la búsqueda de la “vía más corta” al problema de la construcción de la imagen. Finalmente, a modo de conclusiones, abordamos la inevitable conexión entre la Geometría Descriptiva y la Fabricación Digital.

Palabras clave: Geometría Descriptiva, Pensamiento Gráfico, Pensamiento Gráfico Aumentado, Simulación, Fabricación Digital, Automatismos Gráficos, Diseño Paramétrico.

1. INTRODUCTION AND OBJECTIVES

In the Program included in the Spanish version of *Géométrie Descriptive* by Gaspard Monge, we can read:

“[Descriptive Geometry] is a necessary language to the man of genius who conceives a project, to those who must direct its execution, and finally, to the artists who must themselves execute its different parts. The second objective of Descriptive Geometry is to deduce, from the exact description of bodies, all that necessarily follows their correspondent forms and positions. In this respect, it is a means of investigating the truth” (Monge 1799).

This statement by Monge has yet to be sufficiently discussed by experts and hence we strive to link it with the current skills of graphic thinking, from the perspective of digital graphic tools and CAD-CAM means of production.

The use of graphical means to address the geometrical properties of a complex surface is a complementary approach to the analytical-mathematical approach. However, on surfaces that are analytically indescribable, the digital medium presents the only feasible approximation. Monge’s apostille “in this respect, [Descriptive Geometry] is a means to investigate the truth” is today, with digital graphic tools, a stronger and more meaningful statement than ever, and raises Graphic Thinking to a privileged position with respect to past time (Fig. 1).

2. ON GRAPHIC THINKING

Paul Laseau adopts the term Graphic Thinking to “describe thinking aided by drawing” (Laseau 1982:1). This definition, in turn, has as its reference the concept of visual thinking, described by the German psychologist Rudolph Arnheim, for whom the perception of the world, by means of visual images, is not dissociated from the processing of these images by the intellect, as philosophy and psychology had assumed.

For Arnheim, “vision is the primary means of thought”, which gives visual perception an intellectual rank equivalent to that of the processes of understanding and development of concepts. The term Graphic Thinking (thinking with images), coined by Arnheim in the book of the same name, focused on the psychological interpretation of the visual arts, is later brought to the field of architecture in “The Dynamics of Architectural Form”. In this book, a method is formulated for the analysis of architectural objects as visual phenomena (Arnheim 1985; Arnheim 1978). In the “Architectural Representation Handbook”, Laseau (2000) strives to update and expand the spectrum covered by his previous work, by including computer-produced graphics as study objects. In this book, Laseau re-introduces the definition of Graphic Thinking as “an introverted conversation that includes image, vision, brain and hand”. However, he clarifies that, in this case, the support for the image, apart from paper, can be “other media”. In the chapter on Drawing as

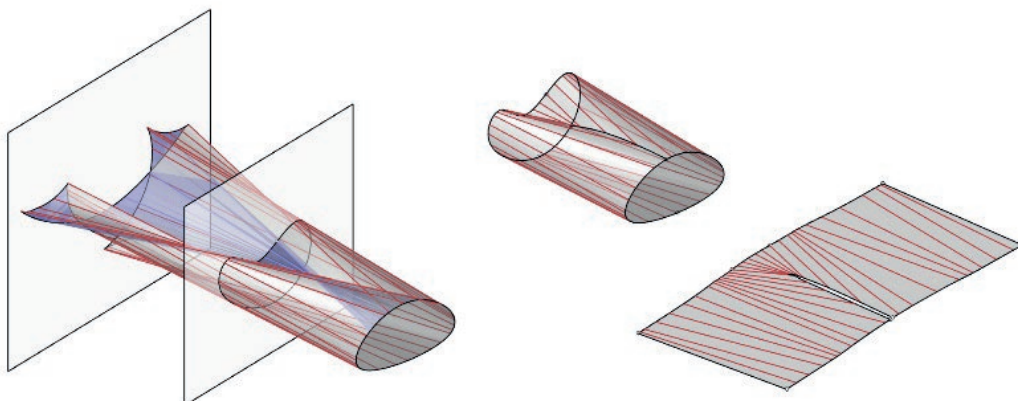


Fig. 1. Layout of a developable surface using digital graphic tools. For the generation of this surface, the concepts of traditional Descriptive Geometry have been used. The surface is bicircumscribed by two plane curves whose analytical/mathematical description remains unknown. 3D model made in Rhinoceros (Source: the authors).

Thought, Laseau discusses the processes of massing without considering the differences that may exist between manual procedures based on drawing and on Descriptive Geometry, and three-dimensional digital modelling methods.

According to Mario Carpo, the paradigm shift that is implicit in the use of the three-dimensional digital model, meant for designers, engineers, and architects, the possibility of overcoming many geometric limitations, in terms of complexity and precision, and of overcoming other limitations related to graphic codes that are deeply rooted in the history of architectural design (Carpo 2011). With the advent of the digital model, it becomes necessary to revise the term *graphic thinking* in search of a definition that involves the procedures of generation, visualisation, and analysis of the digitally produced form.

Several authors have used Howard Gardner's theory of multiple intelligences as a reference to understand how means of representation operate in the general context of cognition. According to Gardner (2001), human intelligence is not a single intelligence essentially linked to mathematical skills, but it is expressed in seven different intelligences whose development determines the individual's ability to perform in any activity. The heterogeneous development of these intelligences defines a person's competencies, all of which together constitute their personal intelligence.

Llopis-Verdú (2018:21-22) states that three of these intelligences are involved in the exercise of architectural drawing: the visual-spatial intelligence, which determines the ability to "spatially represent the world around us and to transfer spatial models into concrete representations that can be manipulated"; the bodily-kinaesthetic intelligence, which determines the ability to control the movement and position of the body and its limbs; and the linguistic-verbal intelligence, related to the ability to use the language as a system of meaningful and expressive elements.

For the British pre-digital critic, Robin Evans, the key element for the study of architecture is geometry, which manifests itself in the architectural object through processes of projection. It is the projection, or the processes that we have decided to model through said projection, that connect thought with imagination, imagination with drawing, drawing with the building, and buildings with our vision, thus establishing that the process of perceiving

geometry (the essence of the physical reality of architecture) depends on this concept. For Evans, the relationship between geometric projection and architecture enables the reading of the built works of history, by distinguishing three types of geometry: Euclidean geometry, related to composition; projective geometry, which is accessed through descriptive geometry; and signifying or symbolic geometry (Evans 2000).

In computational design, geometry is produced by the digital system from a series of instructions provided by the designer through means that rely on geometry, mathematics, spatial reasoning, and programming. Among these procedures, parametric modelling, which is based on writing code or the use of visual programming platforms, involves the implementation of logical-mathematical intelligence, another of the categories proposed by Gardner, given the close relationship between programming languages and mathematical reasoning. Since computational design is a process based on new theoretical and technological paradigms, David Scheer (2014:145) proposes the existence of a new geometry to be added to the three proposed by Evans. This would be a virtual geometry, which has an operational character, and in which instrumental mediation carries a much greater weight since many of the processes that shape the generation are unknown by the designer, because they form part of the operation of the computer or software. Although manual dexterity plays no determining role, knowledge of the elements that make the control of digital machinery operational does feature in a major way.

3. GRAPHIC THINKING AND DESCRIPTIVE GEOMETRY

When focusing on Descriptive Geometry, there is a broad consensus among specialists that the discipline is intrinsically based on the concept of projection and the paradigm of representation. These ideas are associated with the way graphic tools operate in graphic thinking. In traditional Descriptive Geometry, that is, that which is based on drawing, the control of the form occurs as the representations are constructed (Gentil-Baldrich 1986).

The different traditional representation systems (dihedral, axonometric, bounded, and conical) address different problems that can become as

complex as the representations allow, these being the essence and, at the same time, the operational limit of all the systems.

Fernando Izquierdo Asensi's book "Descriptive Geometry" is probably the most widely circulated manual of descriptive geometry written in Spanish. In its twenty-fourth edition, the book dedicates 590 pages to explain "the possible obtaining of the various projections of a body in the four systems of representation, as well as that of its cabinet and conical perspective" (Izquierdo-Asensi 1996:7). The entire content of Izquierdo Asensi's texts, as well as other traditional Descriptive Geometry manuals, are based on the drawing of projections to understand the problems of objects in space.

However, it should be borne in mind that Descriptive Geometry enables other extra representative potentialities to be extracted from the drawing itself. This, which is largely used as a means of graphic control and adjustment of dimensional variables, also operates as a measurement tool and as a calculation instrument. That is, thanks to all these representative and extra-representative uses of drawing, Descriptive Geometry enables solutions to numerous geometric problems to be found by employing only the graphic medium. Far from underestimating its importance, traditional Descriptive Geometry constitutes the most precise and advanced control tool that the mind of the architect or engineer had until the consolidation of digital graphic tools (Calvo-López 2006).

Digital graphic tools, which are many and diverse, provide an approach to Descriptive Geometry in multiple ways. Early digital modelling tools were not conceived for use in Geometry, but for other purposes, such as the creation of photorealistic scenes. However, the use of the three-dimensional model in Descriptive Geometry has become widespread thanks to specific tools, such as Rhinoceros, and to the theoretical and conceptual support of treatises, such as Architectural Geometry, written by Pottmann, Asperl, Hofer and Kilian, (2007), which remains today as the most complete geometry manual aimed at working in digital media.

4. AUGMENTED GRAPHIC THINKING: REPRESENTATION AND SIMULATION

Finally, digital tools have brought us a different way of relating to perceived objects: through simulation. And by simulation we do not necessarily mean the

incorporation of virtual reality glasses or augmented reality devices. We talk about simulation as the characteristic perceptual process of digital graphic environments that are based on the extraction of information about an object through a sequence of image perceptions produced in real time from a three-dimensional model (Vargas-Peña 2019).

Although representation and simulation are supported by graphics and visual images, the main difference between them is that representation cannot replace the represented object, while simulation does propose the existence of a substitute entity for the object in the form of a digitally constructed virtual version (Fig. 2).

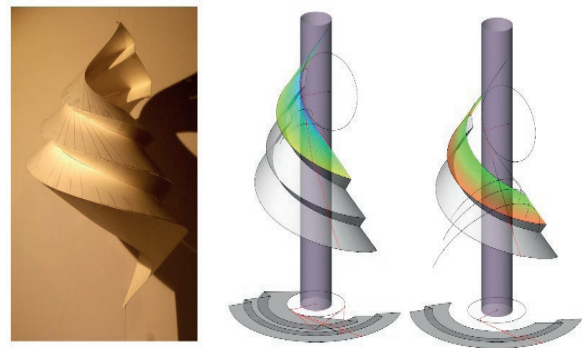


Fig. 2. Set of developable helicoidal strips. The digital tool presents additional geometric information about the geometric entities, such as the curvature, the osculating circle, etc. 3D model made in Rhinoceros (Source: the authors).

A type of representation such as dihedral requires conventional signs and rigorous codification: the point and the line are expressed from their two projections, the plane from its traces, while hidden lines are expressed with discontinuous lines, etc. The dihedral representation is an abstract symbol of a static reality that will need to be decoded through a very complex process. On the other hand, the dynamic simulation offered by digital tools does not require conventional signs when working directly on a simulacrum of the surface, or on a geometric entity, in a moving digital environment. The enormous distance between "what is" and its representation does not have to be covered by incorporating meanings. Simulation offers the perceptual experience without any mental effort: "what is seen" is "what is."

Understood in this way, a simulation produced in a digital environment also incorporates a fourth

dimension, temporal in nature, associated with the movement of the camera around the object or geometric entities. Therefore, the task of constructing the representations has no weight, since it is relegated to the machine, thereby freeing up the time and mental energy of the designer and hence graphic thinking operates with increased power (Martín-Pastor 2019).

Furthermore, simulation can offer additional information associated with the body or surface, such as the position of the normal vector, and the principal curvatures of a surface at any point thereon. It is, in a way, an augmented reality process with greater descriptive potential than representation. Processes, representation, and simulation all operate from graphical thinking, but simulation offers an augmented graphical experience, since it is assisted by the processing power of the machine. This condition, where the subject expands their analytical capacity through the assistance of the computer, is called “Augmented Graphic Thinking.”

In order to understand the scope of augmented graphical thinking, the differences between representation and simulation must be identified. While representation refers to the production of an image analogous to the real object, David Scheer (2014:31) defines a simulation as “an artificial environment that creates an experience that feels like reality”, that is, an artificial realm where a virtual version of the object exists and operates.

Seen in this way, simulation supports the processes in which graphic information is extracted, not through the decoding of synchronously arranged views, but through a perceptual sequence in which differentiated views of the object occur as it is projected in different positions and sizes, and fully available on screen to the viewer. This form of access to the geometric data of the object, more efficient in most cases, aligns with the notion of augmented graphic thinking, to the extent that the computer assists the process of visualisation of the shape (Fig. 3). In this respect, simulation becomes one of the “new ways of overcoming the perceptual limitations of traditional representations with drawings and models” (Porter 1979:91).

The presence of simulation as the new paradigm that enables augmented graphic thinking completes what has been pointed out in other previous works on this topic (Martín-Pastor 2019) (Chiarella et al. 2019).

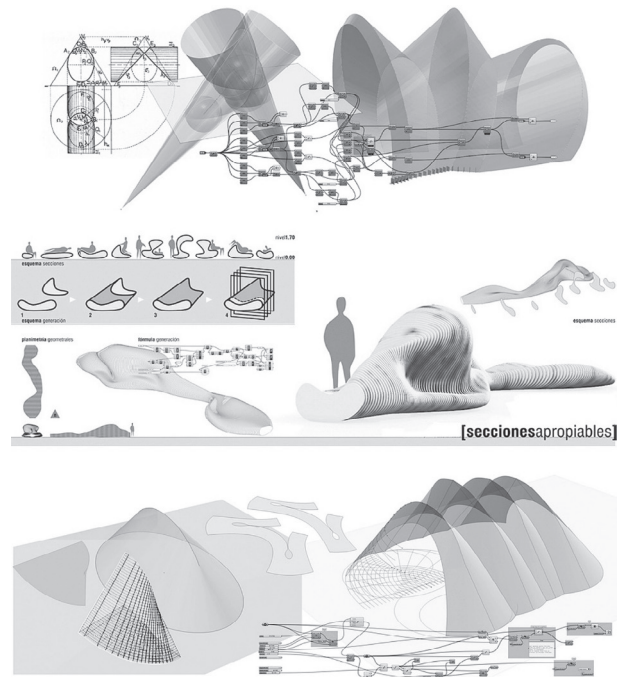


Fig. 3. The use of parametric algorithms makes it possible to design automation in a personalised way. In the example, an algorithm generates a developable surface of equal slope on an elliptical horizontal directrix. 3D model made in Rhinoceros and Grasshopper (Source: the authors).

5. AUTOMATISMS AND TEACHING

We all agree that, in professional life, it makes no sense to do a job the longest and most tortuous way, repeatedly, instead of using a specific simplifying automation. The teaching-learning processes move around other parameters. Where the theoretical foundations of a discipline begin and end and how the inevitable contact is made with the instruments and tools of each era is a common factor in any discipline, not only graphic expression.

Automatisms are the commands or components of a program that automatically solve a set of graphical operations, which could also be performed manually within the graphical environment of the program itself. A perfect example of automation is the “intersection” command, with which obtaining the intersecting lines of two or more intersecting bodies occurs automatically and instantly.

A few years ago, the existence of these automatisms raised numerous doubts regarding the convenience of the teaching use of digital media, not only in Descriptive Geometry but also in other disciplines, such as Architectural Surveys and Topography.

This has led to the assumption that the computer can solve anything just by pressing a button.

From a teaching point of view, we consider two interrelated issues to position ourselves in this scenario: on the one hand, the teaching of the fundamentals of the discipline and, on the other hand, the achievement of professional skills in accordance with the needs of a time (Narváez-Rodríguez and Aguilar-Alejandre 2012). Carrying out the intersections of surfaces by manual procedures, and not by automation, explains the intermediate operations and reveals the underlying geometric foundations of the problem. However, in the same way that the use of a calculator can help the practice of a technical discipline, since the calculator would not always have to go through purely mechanical intermediate operations, we must also reflect on the advantages offered by digital graphic automation. To this end, a brief review of other graphic automatisms in the history of Graphic Expression is carried out.

6. GRAPHIC AUTOMATISMS IN THE HISTORY OF GRAPHIC EXPRESSION

There are numerous testimonies in the history of graphic expression that show the search for automation and solutions “by the shortest route.” We can go back to Brunelleschi’s “*costruzione abbreviata*” described by Alberti, and “*de näherer we*” (the shortest path) by Dürer (1525). Likewise, the evolution of the ideation of simplifying mechanisms for the execution of the long geometric procedures associated with putting into perspective are linked to the use of the veil, glass, and the grid. Later, instruments, such as the camera obscura, the *camera lucida*, and the perspective machine, were designed and constructed, the latter to simplify putting graphic expression into perspective through mechanical procedures.

In a brief review of the most influential examples, we find Alberti’s “*veil*” and the three versions of Dürer’s “*portillon*”, which were reviewed and published by Daniele Barbaro (1569) and Vignola-Danti in “*La due regole dela prospettiva prattica*” (1583). This is a review of the different perspective instruments available at that time, such as the Tomaso Laurente Instrument, which Danti discovered in Bologna, and the Baldassarre Lanci instrument from Urbino. Furthermore, Danti presents us with his own machine, articulated

with mobile elements, which, with the help of an operator, allows complex elements to be put into perspective.

In German lands, we have the case of Wentzel Jamnitzer, a famous goldsmith who invented a perspective machine that must have been very popular in Nuremberg but was never published (Gentil-Baldrich et al. 2015). The painter Ludovico Cardi, called El Cigoli, who was very active in the Florentine scientific environment, proposes in his *Trattato della Prospettiva Prattica* (Ms h.1610) the construction and use of the first perspectograph machine itself.

In his work, *La Perspective contenant la théorie que la pratique et instruction*... Samuel Marolois (1614) presents his drawing machine, a device that allows three modes of operation. Pietro Accolti, in *Lo inganno degl’occhi* (1625), describes an improved version of Dürer’s *portillon* with mobile elements. Nicéron illustrates in his *Thaumaturgus Opticus*... (1646), the “*Instrumentum Universale*”, which is a copy of El Cigoli’s perspectograph, thanks to which this device became popular.

Christopher Scheiner published his pantograph in *Pantographica seu arts delineandi* in 1630, a device for copying, enlarging, and reducing drawings, and for representing objects in perspective. As Martin Kemp comments: “At the beginning of the 17th century, the inventions of El Cigoli and Scheiner established automatic models of perspective and all subsequent automatic machines are directly related to those” (Kemp 2000, 194). In the 18th century, we find treatises on perspective with titles that clearly support these instruments that facilitate implementation, such as “An Essay on Perspective, and a Description of some Instruments for Facilitating the Practice of that Useful Art”, by George Adams (1791).

The history of these drawing machines, together with others not mentioned here but collected in major research work (Cabezas Gelabert 2011; Gómez-Molina 2002), reveal the quest for new tools and the inclination of the human mind to explore new ideas supported by such tools. Certain scholars explain this quest from an evolutionary and adaptive point of view.

7. AUGMENTED GRAPHIC THINKING. AUTOMATISMS AND PROCEDURES

We have justified how graphic tools, based on the use of the digital three-dimensional model, promote a multiple approach to the geometric problem, where the construction of the two-dimensional representation ceases to hold the importance of yesteryear. We now attempt to categorise the “automatisms”, those resources of the tool that speed up a process, while we also categorise the “procedures”, that is, the concatenation of reasoning that enables a result to be achieved (Narváez-Rodríguez and Martín-Pastor 2021). According to other researchers, the methodology used in solving problems with digital tools is neither linear nor unique, since an increasing number of available resources and automatisms lead us to a scenario of greater freedom (Álvaro-Tordesillas et al. 2016; Cisneros-Vivó et al. 2016).

The arrival of parametric design represents the opportunity to design and incorporate our own automatisms, in addition to those provided by the default program in the form of commands. These parametric automatisms can systematise graphic procedures that are already known but difficult to apply with traditional tools. An example of this is the layout of a developable surface of equal slope, a problem that appears in the treatise by Jules de la Gournerie (1860). Current parametric tools allow the automation of intermediate geometric operations, thereby making it possible to visualise the result, since the parameters are updated in real

time, which opens numerous practical possibilities (Fig. 4).

These automatisms allow us to perform certain graphic operations instantly, from the simplest operations, such as drawing a section, to other more complex or tedious operations. However, articulating graphical reasoning based on multiple initial conditions, which enables the solution of problems of a more complex nature, is only viable by applying a procedure. Automatisms solve an intermediate part of the problem, but not the entire problem, nor do they lead directly to a solution that involves a certain level of complexity.

As a result of our work in recent years, we defend the idea that augmented graphic thinking, supported by the paradigm of simulation with digital tools, allows us to operate graphically with complex geometries and to articulate procedures that were unapproachable due to previous assumptions. We will show several examples of this.

The drawing of geodesic lines along a surface by graphical methods, a matter that is relatively simple, although tedious, in the case of a known developable surface, becomes an impossible process when dealing with geodesics on non-developable surfaces. This complex graphic operation can be carried out easily thanks to a specific automation for this purpose. By applying this automatism, we articulate a graphic procedure whose result is the placement of strips of rectifying surfaces on geodesic lines, thereby reaching innovative novel solutions (González-Quintal et al. 2023).

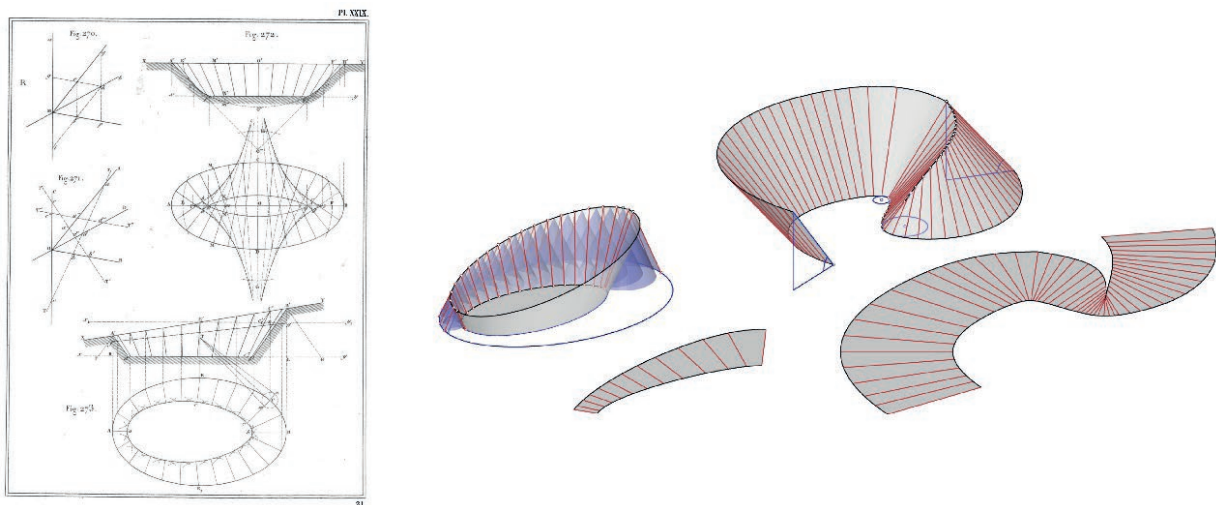


Fig. 4. Left-hand-side: Developable surface of equal slope (in land clearing) on an inclined ellipse (Lam. XXIX. La Gournerie 1860). Centre: Idem. by digital graphic means. Right-hand-side: Developable surface of equal slope along a free curve generated by a parametric algorithm. 3D model and layout made in Rhinoceros and Grasshopper (Source: the authors).

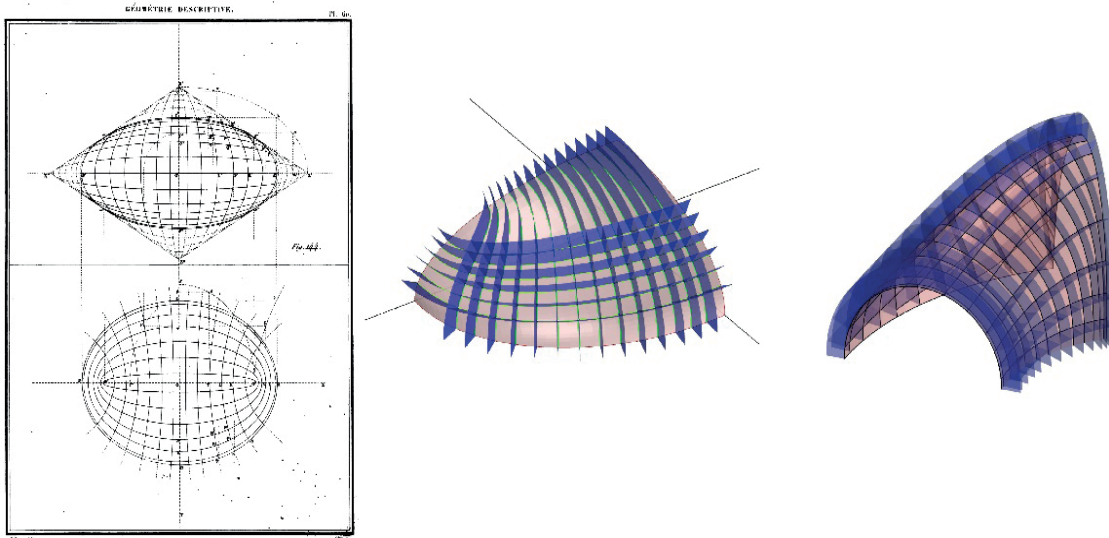


Fig. 5. Left-hand-side: Lines of main curvature of the scalene ellipsoid (collected in Leroy, C.F.A. *Traité de Géométrie Descriptive*, Plate 60). Centre and right-hand-side: Main curvature lines on the surface by digital graphic means with the help of a parametric algorithm. 3D model and layout made in Rhinoceros and Grasshopper (Source: the authors).

Graphic work with the main curvature lines of a surface (a fundamental concept that we owe to Monge) becomes operational with the help of certain automations. These lines of main curvature constitute a field of research related to discretisation in meshes of planar quadrilaterals, with significant applications in architecture and engineering (Fig. 5).

Another example of augmented graphical thinking is found in the recent study on polar surfaces. These developable surfaces, whose formulation we also owe to Monge, are generated by the envelope of the movement of the plane normal to a curve. Although these surfaces are mentioned in

Descriptive Geometry manuals, they have never been explored in depth from a graphic point of view (Martín-Pastor et al. 2024).

Figure 6 shows a surface discretisation procedure based on certain properties of the intersections of two quadrics of revolution that share a focus (Martín-Pastor and Narváez-Rodríguez 2019; Martín-Pastor 2022). These examples can illustrate the presence of so-called augmented graphic thinking in the field of Descriptive Geometry and its potential in both teaching and research.

A good understanding of parametric modelling as a mechanism at the service of Descriptive Geometry that enables the creation of both personalised

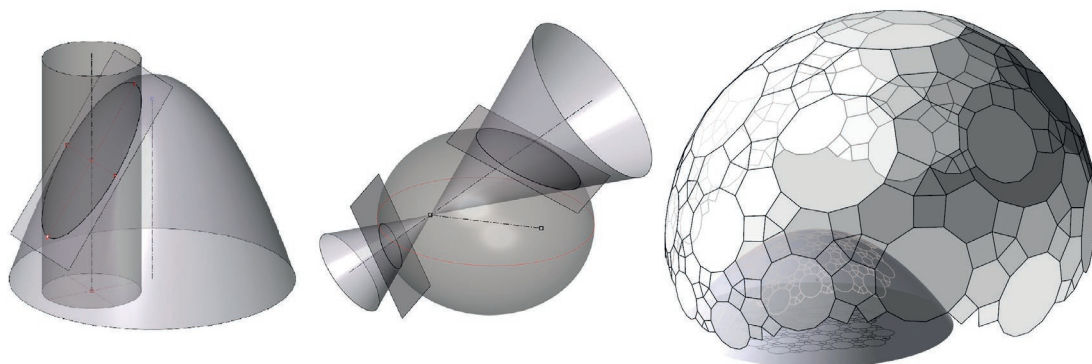


Fig. 6. Left-hand-side and centre: Intersection, according to two plane curves, of two quadrics of revolution that share focus. Right-hand-side: Ellipsoid discretisation procedure based on the previous theorem. The graphical procedure underlying the theorem has been synthesised in the form of a parametric algorithm, thereby allowing a more efficient formal exploration. 3D Model and layout made in Rhinoceros and Grasshopper (Source: the authors).

automation, and new graphic procedures requires deeper and more uncomfortable reflections: How much graphical thinking is involved in programming an algorithm? Can a very complex algorithm work as a procedure? To answer the first question, it must be borne in mind that Descriptive Geometry relies on graphical reasoning to articulate its procedures, while the development of a parametric algorithm requires mathematical and computational logic beyond the field of graphical thinking. For the second question, and for others related to the scope of computer programming in our daily lives we still have no answer.

Alluding to Monge's quote: "In this respect, [Descriptive Geometry] is a means of investigating the truth", the teaching-learning process in geometry does not differ substantially from research in geometry. Thanks to the concept of simulation, digital tools can be used as a "graphic laboratory", a term used in other academic fields (Celani 2012). The digital environment is appropriate for carrying out tests, thereby verifying or disproving geometric intuitions through trial-and-error procedures or other holistic processes, and for taking advantage of the precision and speed of the machine. All these complex potentialities describe and shape the idea of augmented graphic thinking.

8. CONCLUSIONS: DESCRIPTIVE GEOMETRY AND DIGITAL FABRICATION

The program of Monge's *Geométrie Descriptive* rendered the intention of the work very clear: it had to have a practical vocation and be at the service of improving industrial production. Likewise, Descriptive Geometry today faces the challenge of computational design, Computer Aided Design

(CAD), Building Information Modelling (BIM), and Computer Aided Manufacturing (CAM), arising precisely from the needs of precision and efficiency of the industry, which today leads us to production led by numerical control machinery and robots in all areas of engineering and construction (Oxman and Oxman 2014; Kohler 2008).

The teaching of Descriptive Geometry using digital tools is not alien to this change of productive paradigm, since it is the consummation of a reality established in other educational models (Burry 2013; Tafteberg et al. 2014). Computational design tools and procedures, such as parametric or algorithmic modelling, have overcome the phases of formal speculation with which they were initially associated, permanently positioning themselves among the repertoire of resources for the management and analysis of geometric shape (Meléndez 2019; Madl 2022). The inevitable contact between Descriptive Geometry and Digital Manufacturing has already occurred (Mesnil et al. 2016). Digital Manufacturing laboratories are today a conventional installation in university institutions dedicated to the disciplines of design and industrial production. In these spaces, experimentation on geometry and shape, at any level of complexity, can migrate from digital virtuality to the physical reality of the material, by allowing students to interact with tools that precisely materialise the result of the processes of the Augmented graphic thinking developed in digital virtuality. The Digital Manufacturing laboratories associated with university teaching represent a first contact, in university stages, with that other world of robotic manufacturing associated with the industry (García-Alvarado et al. 2009).

REFERENCES

- Accolti, P. 1625. *Lo inganno de gl'occhi: prospettiva pratica di Pietro Accolti...*, Florencia.
- Adams, G. 1791. An Essay on Perspective, and a Description of some Instruments for Facilitating the Practice of that Useful Art, In *Geometrical and graphical essays*. London
- Álvaro-Tordesillas, A., Galván-Desvaux, A.N., and Alonso-Rodríguez, M. 2016. "Hacia una nueva geometría descriptiva. Un Proyecto de Innovación Docente para la carrera de Arquitectura". En *Actas del 16 Congreso Internacional de Expresión Gráfica Arquitectónica*. Alcalá de Henares: Departamento de Arquitectura de la Escuela de Arquitectura de la Universidad de Alcalá, p. 9-16.
- Arnheim, R. 1978. *La forma visual de la arquitectura*. Gustavo Gili.
- Arnheim, R. 1985. *El pensamiento visual*. Paidós.

- Barbaro, D. 1569. *La pratica della perspettiva di monsignor Daniel Barbaro....* Venecia: Appresso Camillo & Rutilio.
- Burry, M. 2013. "From Descriptive Geometry to Smartgeometry". En Peters B. y Peters, T. ed. *Inside Smartgeometry: Expanding the Architectural Possibilities of Computational Design*. Londres: Wiley.
- Cabezas Gelabert, L. (coord.). 2011. *Dibujo y Construcción de la realidad*. Madrid: Cátedra.
- Calvo López, J. 2006. "Gaspard Monge, la estética de la Ilustración y la enseñanza de la Geometría Descriptiva". En *Revista de Expresión Gráfica en la Edificación (EGE)*, no. 4, p. 85-92. ISSN 1888-8143. <https://doi.org/10.4995/ege.2006.12657>
- Cardi, L. (El Cigoli) c. 1610. *Prospettiva pratica. Gabinetto disegni e stampe degli Uffizi*. Ms. 2660.
- Carpó, M. 2011. *The Alphabet and the Algorithm*. MIT Press.
- Celani, Gabriela. 2012. "Digital Fabrication Laboratories: Pedagogy and Impacts on Architectural Education". *Nexus Network Journal*, 14, p. 469-482. <https://doi.org/10.1007/s00004-012-0120-x>
- Chiarella, M., Miotto Bruscatto, U., Castro Henriques, G., Tortul, C.B. 2019. "Augmented Graphic Thinking". En: Marcos, C. ed. *Graphic Imprints. EGA 2018*. Springer, Cham, p. 335-346. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93749-6_28
- Cisneros Vivó, J., and Cabezas Bernal, P.M. 2016. "La enseñanza de la Geometría Descriptiva en la era digital". En *Actas del 16 Congreso Internacional de Expresión Gráfica Arquitectónica*. Alcalá de Henares: Departamento de Arquitectura de la Escuela de Arquitectura de la Universidad de Alcalá, p. 377-384.
- Durero, A. (Albrecht Dürer). 1525. *Underweysung der Messung...*, Nuremberg
- Evans, R. 2000. *The projective cast. Architecture and its three geometries*. MIT Press.
- García-Alvarado R., Lagos R., Salcedo P., Ramos M., Labarca-Montoya C., and Bruscatto U. 2009. "Emociones precisas: Fabricación digital en la enseñanza de la arquitectura". *Arquitectura Revista*, vol. 5, no. 2, p. 122-136. <https://doi.org/10.4013/arq.2009.52.06>
- Gardner, H. 2001. *La inteligencia reformulada: Las inteligencias múltiples en el siglo XXI*. Paidós..
- Gentil-Baldrich, J. M., and Martín-Pastor, A. 2015. "Los poliedros como forma de conocimiento geométrico: el Jamnitzer español o el cuarto libro de Artes Excelesas de la Perspectiva". *EGA Revista de expresión gráfica arquitectónica*, 20(25), p. 56-65. <https://doi.org/10.4995/ega.2015.3677>
- Gentil-Baldrich, J.M. 1986. "Papel de la Geometría Descriptiva en la enseñanza de la arquitectura". En *Actas del I Congreso de Expresión Gráfica Arquitectónica*, Sevilla: Junta de Andalucía, p. 75-79.
- Gómez-Molina (coord.). 2002. *Máquinas y Herramientas de Dibujo*. Catedra.
- González-Quintal, F., and Martín-Pastor, A. 2023. "Superficies rectificantes. Concepto, realidad geométrica y distorsión constructiva". *EGA Revista de expresión gráfica arquitectónica*, 28(47), p. 228-239. <https://doi.org/10.4995/ega.2023.16997>
- Izquierdo-Asensi, F. 1996. *Geometría descriptiva superior y aplicada*. (4a ed. Paraninfo).
- Kemp, Martin. 2000. *La ciencia del arte*. Madrid: Akal. ISBN: 84-460-0866-1
- Kohler M, Gramazio F. 2008. *Digital Materiality in Architecture*. Lars Müller Publishers.
- La Gournerie, J.M. 1860. *Traité de Géométrie Descriptive*. Paris: Mallet-Bachelier.
- Laseau, Paul. 1982. *La expresión grafica para arquitectos y diseñadores*. Gustavo Gili.

- Laseau, Paul. 2000. *Architectural representation handbook: traditional and digital techniques for graphic communication*. McGraw-Hill.
- Llopis-Verdú, J. 2018. *Dibujo y arquitectura en la era digital*. UPV.
- Madl, A. (2021). *Parametric design for landscape architects: computational techniques and workflows*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780429202957>
- Marolois, S. 1614. *Opticae sive perspectivae... pars prima*. 1614. La Haya: Hondius.
- Martín-Pastor, A. 2019. "Augmented Graphic Thinking in Geometry. Developable Architectural Surfaces in Experimental Pavilions". En Marcos, C. ed. *Graphic Imprints. EGA 2018*. Springer, Cham, p. 1065–1075. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93749-6_87
- Martín-Pastor, A. 2022. "Polyhedral Transformation Based on Confocal Quadratic Surface Properties. Graphical Speculations". En Viana, V., Mena Matos, H., Pedro Xavier, J. eds. *Polyhedra and Beyond. Trends in Mathematics*. Birkhäuser, Cham, p.35-51. https://doi.org/10.1007/978-3-030-99116-6_3
- Martín-Pastor, A., and González-Quintal, F. 2024. "La Superficie Polar de Gaspard Monge. Una aproximación desde el pensamiento gráfico aumentado", *EGA Expresión Gráfica Arquitectónica*, 29(50), pp. 274–287. <https://doi.org/10.4995/ega.2024.19729>
- Martín-Pastor, A., and Narváez-Rodríguez, R. 2019. "New properties about the intersection of rotational quadratic surfaces and their applications in architecture". *Nexus Network Journal* Vol. 21, no.1 (2019). p. 175–196. <https://doi.org/10.1007/s00004-018-0420-x>
- Melendez, F. 2019. *Drawing from the Model: Fundamentals of Digital Drawing, 3D Modeling, and Visual Programming in Architectural Design*. John Wiley & Sons.
- Mesnil, R., Douthe C., Baverel O., and Léger B. 2016. Marionette mesh: from Descriptive Geometry to Fabrication-Aware Design, *Advances in Architectural Geometry 2016*, Zurich: Hochschulverlag AG. http://dx.doi.org/10.3218/3778-4_7
- Monge, G. 1799 [or 1798], *Géométrie Descriptive*, Paris: Baudouin. [La 1ª versión española es de 1803. *Geometría Descriptiva*. Madrid: Imprenta Real. Su edición facsímil es de 1966, comentada y estudiada por Ángel del Campo Francés, José Mª Gentil Baldrich y Enrique Rabasa Díaz. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos].
- Narváez-Rodríguez, R., and Aguilar-Alejandre, M. 2012. "Aprender geometría aplicada en el siglo XXI: realidad y contexto". En *Actas del XI Congreso Internación de Expresión Gráfica aplicada a la edificación*. En Editorial Universitat Politècnica de València, p. 1027 – 1037. <http://hdl.handle.net/10251/19180>
- Narváez-Rodríguez, R., and Martín-Pastor, A. 2021. "From Descriptive Geometry to Architectural Geometry; contributions by classic authors to the new paradigm". En Pino-Suárez R., Martín-Dorta N., (eds.) *Redrawing the future of graphic expression applied to the building*. Tirant lo Blanch, p. 1207-1222. <https://idus.us.es/handle/11441/129781>
- Nicéron, J.F. 1646. *Thaumaturgus opticus seu admiranda optices, catoptrices, dioptrices*. Pars prima. Paris: François Langlois.
- Oxman, R., and Oxman, R. 2014. "From Composition to generation". In *Theories of the digital in architecture*. Routledge, New York.
- Porter, T. 1979. *How architects visualize*. Studio Vista.
- Pottmann, H, Asperl, A., Hofer, M., and Kilian, A., 2007. *Architectural Geometry*. Bentley Institute Press.

Scheer, D. 2014. *The death of drawing: architecture in the age of simulation*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315813950>

Tafteberg Jakobsen I, and Matthiasen J. 2014. "Descriptive Geometry and/or Computer Technology? What Mathematics is required for Doing and Understanding Architecture?". *Nexus Network Journal*, 16, p. 505-516. <https://doi.org/10.1007/s00004-014-0199-3>

Vargas-Peña, R. 2019. "Representación y simulación. El registro gráfico del tiempo en Arquitectura". En Llorens-Corraliza S., Rincón-Millán M., Martín-Pastor A, (eds.) *Avances en Expresión Gráfica Aplicada a la Edificación*, Tirant lo Blanch Humanidades, p. 621-634. ISBN: 978-84-17973-12-4.

Vignola, I.B., and Danti, E. 1583. *Le due regole della prospettiva pratica di M. Iacomo Barozzi da Vignola con i comentaris del R.P.M. Egnatio...* Roma.

How to cite this article: Martín-Pastor, A., & Vargas-Peña, R. 2024. "Descriptive Geometry and Augmented Graphic Thinking" *EGE Revista de Expresión Gráfica en la Edificación*, No. 20, Valencia: Universitat Politècnica de València. pp. 4-21. <https://doi.org/10.4995/ege.2024.20720>.

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

En el Programa recogido en la versión castellana de *Géométrie Descriptive* de Gaspard Monge podemos leer:

“[La Geometría Descriptiva] es una lengua necesaria al hombre de genio que concibe un proyecto, á los que deben dirigir su ejecución, y en fin á los artistas que por sí mismos deben ejecutar sus partes diferentes. El segundo objeto de la geometría descriptiva es deducir de la descripción exacta de los cuerpos todo quanto se sigue necesariamente de sus formas y de sus posiciones respectivas. En este sentido es un medio de investigar la verdad” (Monge 1799).

Esta última cuestión puntualizada por Monge no ha sido suficientemente comentada por los especialistas y trataremos de vincularla con las actuales competencias del pensamiento gráfico, de la mano de las herramientas gráficas digitales y los medios de producción CAD-CAM.

Aproximarse utilizando medios gráficos a las propiedades geométricas de una superficie compleja supone una aproximación complementaria a la analítica-matemática. Pero en superficies que son indescriptibles analíticamente, el medio digital supone la única aproximación posible. La apostilla de Monge “en ese sentido [la Geometría Descriptiva] es un medio para investigar la verdad” cobra hoy, con las herramientas gráficas digitales, más fuerza y más sentido que nunca, situando al pensamiento gráfico en una posición de privilegio respecto a épocas pasadas (Fig.1).

2. SOBRE EL PENSAMIENTO GRÁFICO

Paul Laseau adopta el término de pensamiento gráfico para “describir el pensamiento auxiliado por el dibujo” (Laseau 1982:1). Esta definición, a su vez, tiene como referencia el concepto de pensamiento visual, descrito por el psicólogo alemán Rudolph Arnheim, para quien la percepción del mundo, por medio de imágenes visuales, no está dissociada del procesamiento de dichas imágenes por parte del intelecto, como la filosofía y la psicología habían asumido. Por el contrario, para Arnheim, “la visión es el medio primordial del pensamiento”, con lo cual le confiere a la percepción visual un rango intelectual equivalente al de los procesos de comprensión y de elaboración de conceptos. El término pensamiento visual -pensar con imágenes- acuñado por Arnheim en el libro homónimo, enfocado en la interpretación psicológica de las artes visuales, es luego llevado al terreno de la arquitectura en “La Forma Visual de la Arquitectura”, publicación en la cual se formula un método para el análisis de los objetos arquitectónicos

como fenómenos visuales (Arnheim 1985; Arnheim 1978). En *Architectural Representation Handbook* (Laseau 2000), pretende actualizar y ampliar el espectro cubierto en la obra anterior, al incluir como objeto de estudio los gráficos producidos por computador. En este libro, Laseau reintroduce la definición de pensamiento gráfico considerada como una “conversación introvertida que incluye la imagen, la vista, el cerebro y la mano”, aunque aclara en este caso que el soporte de la imagen, aparte del papel, pueden ser “otros medios”. Laseau aborda, en el capítulo dedicado al dibujo como pensamiento, los procesos de modelado (*massing*) sin tener en consideración las diferencias que pueden existir entre los procedimientos manuales, basados en el dibujo y la Geometría Descriptiva, y los procesos de modelado digital tridimensional.

De acuerdo con Mario Carpo, el cambio de paradigma implícito en la utilización del modelo digital tridimensional significó para los diseñadores, ingenieros y arquitectos la posibilidad de vencer muchas limitaciones geométricas -complejidad y precisión- y otras relativas a los códigos gráficos que estaban profundamente arraigadas en la historia del diseño arquitectónico (Carpo 2011). Con la llegada del modelo digital se hace necesaria una revisión del término pensamiento gráfico en búsqueda de una definición que involucre los procedimientos de generación, visualización y análisis de la forma realizados digitalmente.

Algunos autores han empleado como referencia la teoría de las inteligencias múltiples de Howard Gardner (2001) para comprender cómo operan medios de representación en el contexto general de la cognición. Según Gardner, la inteligencia humana no es una sola, ligada fundamentalmente a las competencias matemáticas, sino que se expresa en siete distintas inteligencias cuyo desarrollo determina la capacidad del individuo para realizar cualquier actividad. El desarrollo diferenciado de estas inteligencias define a su vez las competencias de cualquier persona y todas en conjunto constituyen su inteligencia personal.

Llopis-Verdú (2018:21-22) afirma que en el ejercicio del dibujo arquitectónico intervienen tres de estas inteligencias: la visual-espacial, que determina la capacidad de “representarse espacialmente el mundo que nos rodea y de transferir los modelos espaciales en representaciones concretas manipulables”, la corporal-cinestésica, que determina la capacidad de controlar el movimiento y la posición del cuerpo y sus miembros, y la inteligencia lingüística-verbal, relacionada con la capacidad de uso del lenguaje como sistema de elementos significativos y expresivos.

Para el crítico pre-digital británico Robin Evans, el elemento clave para el estudio de la arquitectura

es la geometría, que se manifiesta en el hecho arquitectónico por medio de procesos de proyección. Es la proyección lo que conecta el pensamiento con la imaginación, la imaginación con el dibujo, el dibujo con lo construido y éste con nuestra visión, estableciendo que el proceso de percepción de la geometría (esencia de la realidad física de la arquitectura) depende de este concepto. Para Evans, la relación entre proyección geométrica y arquitectura permite elaborar una lectura de las obras construidas de la historia, distinguiendo en ellas tres tipos de geometría: la geometría euclidiana, relacionada con la composición, la geometría proyectiva, a la cual se accede a través de la Geometría Descriptiva, y la geometría significativa o simbólica (Evans 2000).

En el diseño computacional la geometría es producida por el sistema digital a partir de una serie de instrucciones que aporta el diseñador a través de conceptos de geometría, matemáticas, razonamiento espacial y programación. Entre éstos, el modelado paramétrico, basado en la escritura de código o el uso de plataformas de programación visual, implica la puesta en acción de la inteligencia lógico-matemática, otra de las categorías propuestas por Gardner, dada la estrecha relación entre los lenguajes de programación y el razonamiento matemático. Al ser el diseño computacional un proceso basado en nuevos paradigmas teóricos y tecnológicos, David Scheer (2014:145) propone la existencia de una nueva geometría que se agrega a las tres propuestas por Evans. Ésta sería una geometría virtual, la cual tiene carácter operacional y en la cual la mediación instrumental tiene un peso mucho mayor, ya que muchos de sus procesos no son conocidos por el diseñador, pues forman parte del funcionamiento del computador o del software. La destreza manual no tiene un papel determinante, como sí lo tiene el conocimiento de los elementos que hacen operativo el control de la maquinaria digital.

3. PENSAMIENTO GRÁFICO Y GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

Centrándonos en la Geometría Descriptiva, existe un amplio consenso entre los especialistas de que la disciplina está intrínsecamente basada en el concepto de proyección y en el paradigma de la representación.

Estas ideas están asociadas a la manera en que las herramientas gráficas operan en el pensamiento gráfico. En la Geometría Descriptiva tradicional, es decir, la que está basada en el dibujo, el control de la forma se produce a medida que se construyen las representaciones (Gentil-Baldrich 1986). Los diferentes sistemas de representación tradicionales -diédrico, axonométrico, acotado y cónico- abordan diferentes problemas que pueden complejizarse tanto como se lo permitan las representaciones, siendo

éstas la esencia y, a la vez, el límite operativo de todos ellos.

El manual de Geometría Descriptiva de Fernando Izquierdo Asensi, probablemente el de mayor difusión en español, se ocupa a lo largo de 590 páginas de explicar “la posible obtención de las diversas proyecciones de un cuerpo en los cuatro sistemas de representación, así como la de su perspectiva caballera y cónica” (Izquierdo-Asensi 1996:7). Todo el contenido de los textos de Izquierdo Asensi, y de otros manuales tradicionales de Geometría Descriptiva, se basan en el dibujo de proyecciones como medio para la comprensión de los problemas de los objetos en el espacio.

No obstante, no podemos olvidar que la Geometría Descriptiva nos permite extraer otras potencialidades extra representativas al propio dibujo. Éste, que es usado principalmente como medio de control gráfico y de ajuste de variables dimensionales, también opera como herramienta de medición y como instrumento de cálculo. Es decir, gracias a los usos representativos y extra representativos del dibujo, la Geometría Descriptiva nos permite encontrar soluciones a numerosos problemas geométricos usando únicamente el medio gráfico. Lejos de minusvalorar su importancia, la Geometría Descriptiva tradicional ha sido la herramienta de control más precisa y avanzada con la que ha contado la mente del arquitecto o del ingeniero, hasta la consolidación de las herramientas gráficas digitales (Calvo-López 2006).

Las herramientas gráficas digitales, que son muchas y diversas, propician una aproximación a la Geometría Descriptiva de forma múltiple. Las primeras herramientas de modelado digital no se concibieron para su uso en Geometría, sino para otros fines como la creación de escenas fotorrealistas, etc. Sin embargo, el uso del modelo tridimensional en Geometría Descriptiva se ha generalizado gracias a herramientas específicas como Rhinoceros, y al apoyo teórico y conceptual de tratados como *Architectural Geometry*, escrito por Pottmann, Asperl, Hofer y Kilian, (2007), que sigue siendo actualmente el manual de geometría más completo dirigido al trabajo en medios digitales.

4. PENSAMIENTO GRÁFICO AUMENTADO: REPRESENTACIÓN Y SIMULACIÓN

Finalmente, el modelo digital nos ha traído una forma diferente de relacionarnos con los objetos percibidos: la simulación. Y no nos referimos necesariamente a la incorporación de gafas de realidad virtual o dispositivos de realidad aumentada. Hablamos de la simulación como el proceso perceptivo característico de los entornos gráficos digitales que se basa en la extracción de información sobre un objeto por medio de una secuencia de percepción de imágenes producidas en tiempo real a partir de un modelo tridimensional (Vargas-Peña 2019).

Aunque la representación y la simulación se apoyan en gráficos y en imágenes visuales, la principal diferencia entre ambas radica en que la representación no puede sustituir el objeto representado, mientras que la simulación sí propone la existencia de una entidad sustitutiva del objeto, una versión virtual construida digitalmente (Fig. 2).

Un tipo de representación como la diédrica necesita de signos convencionales y de una rigurosa codificación: el punto y la recta se expresan a partir de sus dos proyecciones, el plano a partir de sus trazas, las líneas ocultas se expresan con trazos discontinuos, etc. La representación diédrica es un símbolo abstracto de una realidad estática que necesitará ser decodificada mediante un proceso muy complejo. En cambio, la simulación dinámica que ofrecen las herramientas digitales no necesita de signos convencionales al trabajar directamente sobre un simulacro de superficie o entidad geométrica, en un entorno digital en movimiento. La enorme distancia entre “lo que es” y su representación no hay que recorrerla incorporando significados. La simulación te ofrece la experiencia perceptiva sin ningún esfuerzo mental: “lo que ves” es “lo que es”.

Así entendida, la simulación producida en un entorno digital incorpora también una cuarta dimensión, de carácter temporal, asociada al movimiento de la cámara alrededor del objeto o entidades geométricas. Por tanto, la tarea de construir las representaciones no tiene peso, ya que es relegada a la máquina, liberando así un tiempo y una energía mental necesarias en el diseñador para que el pensamiento gráfico opere con una potencia aumentada (Martín-Pastor 2019).

Además, la simulación puede ofrecer información adicional asociada al cuerpo o superficie. Por ejemplo, la posición del vector normal, las curvaturas principales de una superficie en cualquier punto de ella, etc. Se trata, en cierto modo, de un proceso de realidad aumentada con un mayor potencial descriptivo que la representación. Ambos procesos, representación y simulación, operan desde el pensamiento gráfico, pero la simulación ofrece una experiencia gráfica aumentada, al estar asistida por la potencia de procesamiento de la máquina. A esta condición, donde el sujeto amplía su capacidad analítica por medio de la asistencia del ordenador, llamamos “pensamiento gráfico aumentado”.

Para comprender el alcance del pensamiento gráfico aumentado debemos identificar las diferencias entre representación y simulación. Mientras que la representación se refiere a la producción de una imagen análoga al objeto real, David Scheer (2014:31) define una simulación como “un ambiente artificial que crea una experiencia que se siente como la realidad”, es decir, un ámbito artificial donde existe y opera una versión virtual del objeto.

Así entendida, la simulación sustenta los procesos en los cuales la información gráfica se extrae, no mediante la decodificación de vistas dispuestas sincrónicamente sino mediante una secuencia perceptiva en la que se suceden vistas diferenciadas del objeto conforme este se proyecta en distintas posiciones y tamaños en pantalla a voluntad del observador. Esta forma de acceso a los datos geométricos del objeto, más eficiente en la mayoría de los casos, se alinea con la noción del pensamiento gráfico aumentado, en la medida que el computador asiste el proceso de visualización de la forma (Fig. 3). Con lo cual la simulación se constituye en una de las “nuevas formas de sobreponer las limitaciones perceptuales de las representaciones tradicionales con dibujos y maquetas” (Porter 1979:91).

La presencia de la simulación como el nuevo paradigma que posibilita el pensamiento gráfico aumentado completa lo apuntado en otros trabajos previos sobre este tema (Martín-Pastor 2019) (Chiarella et al. 2019).

5. AUTOMATISMOS Y DOCENCIA

Todos coincidimos en que, en la vida profesional, no tiene sentido realizar un trabajo por el camino más largo y tortuoso, una y otra vez, en lugar de usar un automatismo específico que lo simplifique. Los procesos de enseñanza-aprendizaje se mueven en torno a otros parámetros. Dilucidar dónde empiezan y terminan los fundamentos teóricos de una disciplina y de qué forma se realiza el inevitable contacto con los instrumentos y herramientas propios de cada época es algo común a cualquier materia, no solo de la expresión gráfica.

Llamamos automatismos a los comandos o componentes de un programa que resuelven automáticamente un conjunto de operaciones gráficas, las cuales también podrían realizarse de forma manual dentro del entorno gráfico del propio programa. Un ejemplo perfecto de automatismo es el comando “intersección”, con el cual la obtención de las líneas de intersección entre dos o más entidades geométricas se produce de forma automática e instantánea.

La existencia de estos automatismos puso encima de la mesa, hace algunos años, numerosas dudas sobre la conveniencia del uso docente de las herramientas digitales, no solo en la Geometría Descriptiva sino en otras disciplinas, como Levantamientos Arquitectónicos, Topografía, etc., llegándose a decir que el ordenador lo resuelve todo solo con pulsar un botón.

Desde un punto de vista docente consideramos dos cuestiones interrelacionadas para posicionarnos ante este escenario: por un lado, la enseñanza de los fundamentos de la disciplina y, por otro, la consecución de las competencias profesionales de acuerdo con

las necesidades de una época (Narváez-Rodríguez y Aguilar-Alejandre 2012). Realizar las intersecciones de superficies por procedimientos manuales —no mediante automatismos— explica las operaciones intermedias y da a conocer los fundamentos geométricos subyacentes del problema. No obstante, de la misma manera que el uso de una calculadora puede ayudar a la práctica de una disciplina técnica —ya que el calculista no tendría que pasar siempre por operaciones intermedias puramente mecánicas— debemos también reflexionar sobre las ventajas que ofrecen los automatismos gráficos digitales. Para ello vamos a hacer un pequeño repaso de otros automatismos gráficos en la historia de la Expresión Gráfica.

6. ALGUNOS AUTOMATISMOS GRÁFICOS EN LA HISTORIA DE LA EXPRESIÓN GRÁFICA

Existen numerosos testimonios en la historia de la expresión gráfica que evidencian la búsqueda de automatismos y de soluciones “por la vía más corta”. Nos podemos remontar a la “*costruzione abbreviata*” de Brunelleschi descrita por Alberti, y el “*de näherer weis*”, —el camino más breve— de Durero (1525), así como a la evolución que tuvo la ideación de mecanismos simplificadores para la ejecución de los largos procedimientos geométricos asociados a la puesta en perspectiva, que enlazan con el uso del velo, el cristal y la cuadrícula. Más tarde, con el diseño y construcción de instrumentos como la cámara oscura, la cámara lúcida y la máquina de perspectiva, esta última para simplificar la puesta en perspectiva mediante procedimientos mecánicos.

En un rápido repaso por los más influyentes ejemplos nos encontramos con el “velo” de Alberti y las tres versiones del “portillón” de Durero, que fueron revisados y publicados por Daniele Barbaro (1569) y Vignola-Danti en *La due regole dela prospettiva prattica* (1583). En esta se hace un repaso de los diferentes instrumentos perspectivos conocidos hasta la época, como el Instrumento de Tomaso Laurente, que conoció Danti en Bolonia o el instrumento de Baldassarre Lanci de Urbino. Además, Danti nos plantea su propia máquina, articulada con elementos móviles, que con ayuda de un operario permite la puesta en perspectiva de elementos complejos.

En tierras germanas tenemos el caso de Wentzel Jamnitzer, afamado orfebre quien inventa una máquina de perspectiva que debió ser muy popular en Nuremberg, pero que nunca llegó a publicarse (Gentil-Baldrich et al. 2015). El pintor Ludovico Cardi, llamado El Cigoli, muy activo en el ambiente científico florentino, plantea en su *Trattato della Prospettiva Prattica* (Ms h.1610) la construcción y el uso de la primera máquina perspectógrafa propiamente dicha.

Samuel Marolois expone en su obra *La Perspective contenant la théorie que la pratique et instruction...*

(1614) su máquina de dibujar, un dispositivo que permite tres modos de funcionamiento. Pietro Accolti, en *Lo inganno degl'occhi*, (1625), nos describe una versión mejorada del portillón de Durero con elementos móviles. Nicéron ilustra en su *Thaumaturgus Opticus...*, (1646), el “Instrumentum Universale”, que es una copia del perspectógrafo de El Cigoli, gracias al cual se populariza este dispositivo.

Christopher Scheiner, publica en *Pantographica seu arts delineandi* de 1630, su pantógrafo, un aparato para copiar, agrandar, disminuir dibujos y, también, para representar objetos en perspectiva. Como comenta Martin Kemp, “A principios del siglo XVII, los inventos de El Cigoli y Scheiner establecieron los modelos automáticos de perspectiva y todas las máquinas automáticas posteriores tienen relación directa con aquellas” (Kemp 2000 194). En el siglo XVIII encontramos tratados de perspectiva con títulos que apuestan claramente por estos instrumentos facilitadores de la puesta en práctica, como “*An Essay on Perspective, and a Description of some Instruments for Facilitating the Practice of that Usefull Art*”, de George Adams (1791).

La historia de estas máquinas de dibujar, y otras no mencionadas aquí, pero recogidas en importantes investigaciones (Cabezas Gelabert 2011) (Gómez-Molina 2002), nos evidencian la búsqueda de nuevas herramientas y la inclinación de la mente humana a explorar nuevas ideas apoyadas en ellas. Una pulsión que algunos estudiosos explican desde un punto de vista evolutivo y adaptativo.

7. PENSAMIENTO GRÁFICO AUMENTADO. AUTOMATISMOS Y PROCEDIMIENTOS

Hemos justificado cómo las herramientas gráficas basadas en el uso del modelo tridimensional digital propician una aproximación múltiple al problema geométrico, donde la construcción de la representación bidimensional deja de tener la importancia de antaño. Trataremos ahora de categorizar por un lado los “automatismos”, aquellos recursos propios de la herramienta que agilizan un proceso; respecto a los “procedimientos”, es decir, de la concatenación de razonamientos que nos permite alcanzar un resultado (Narváez-Rodríguez y Martín-Pastor 2021). De acuerdo con otros investigadores, la metodología empleada en la resolución de problemas con herramientas digitales no es lineal ni única, ya que una cantidad creciente de recursos y automatismos disponibles nos conducen a un escenario de mayor libertad (Álvaro-Tordesillas et al. 2016) (Cisneros-Vivó et al. 2016).

La llegada del diseño paramétrico supone la oportunidad de diseñar e incorporar nuestros propios automatismos adicionalmente a los que trae el programa por defecto en forma de comandos. Estos automatismos paramétricos, pueden sistematizar procedimientos gráficos ya conocidos pero difíciles de

aplicar con herramientas tradicionales. Un ejemplo de ello es el trazado de una superficie desarrollable de igual pendiente, un problema que aparece recogido en el tratado de Jules de la Gournerie (1860). Las herramientas paramétricas actuales permiten la automatización de las operaciones geométricas intermedias, permitiendo visualizar el resultado final, a medida que se cambian los parámetros en tiempo real, con lo que se abren numerosas posibilidades prácticas (Fig. 4).

Estos automatismos nos permiten realizar ciertas operaciones gráficas de forma instantánea, desde las más sencillas, como el trazado de una sección, hasta otras operaciones más dificultosas o tediosas. Sin embargo, articular un razonamiento gráfico a partir de múltiples condicionantes iniciales, que posibilite la solución de problemas más complejos, solo es viable aplicando un procedimiento. Los automatismos resuelven una parte intermedia del problema, pero no todo el problema, ni llevan directamente a una solución que implique cierto nivel de complejidad.

Como resultado de nuestro trabajo en los últimos años, defendemos la idea de que el pensamiento gráfico aumentado - sustentado en el paradigma de la simulación con herramientas digitales- permite operar gráficamente con geometrías complejas y articular procedimientos inabordables desde presupuestos anteriores. Mostraremos varios ejemplos de ello.

El trazado de líneas geodésicas a lo largo de una superficie por métodos gráficos —una cuestión que es relativamente sencilla, aunque tediosa, si se trata de una superficie desarrollable conocida— se vuelve un asunto imposible de abordar cuando se trata de superficies no desarrollables. Esta compleja operación se realiza con facilidad gracias a un automatismo digital para tal fin. Aplicando dicho automatismo, articulamos un procedimiento gráfico cuyo resultado final es la colocación de tiras de superficies rectificantes sobre líneas geodésicas, llegando a soluciones novedosas (González-Quintal et al 2023).

Trabajar gráficamente con las líneas de curvatura principal de una superficie -un concepto fundamental que debemos a Monge- comienza a ser operativo con la ayuda de ciertos automatismos. Estas líneas de curvatura principal constituyen un campo de investigación relacionado con la discretización en mallas de cuadriláteros planos, con importantes aplicaciones en arquitectura e ingeniería (Fig. 5).

Otro ejemplo de pensamiento gráfico aumentado lo encontramos en el reciente estudio sobre las superficies polares. Estas superficies desarrollables -cuya formulación también debemos a Monge- se generan por la envolvente del movimiento del plano normal a una curva. Aunque aparecen mencionadas en manuales de Geometría Descriptiva, nunca se había profundizado en ellas desde un punto de vista gráfico (Martín-Pastor et al. 2024).

En la Figura 6 se muestra un procedimiento de discretización de superficie basado en ciertas propiedades de las intersecciones de dos cuádricas de revolución que comparten foco (Martín-Pastor y Narváez-Rodríguez 2019; Martín-Pastor 2022). Estos ejemplos pueden ilustrarnos la presencia del denominado pensamiento gráfico aumentado en el campo de la Geometría Descriptiva y su potencial tanto en docencia como en investigación.

Entender el modelado paramétrico como un mecanismo al servicio de la Geometría Descriptiva que posibilita la creación tanto de automatismos personalizados como de nuevos procedimientos gráficos, nos exige reflexiones más profundas e incómodas: ¿Cuánto hay de pensamiento gráfico en la programación de un algoritmo? ¿Puede un algoritmo muy complejo funcionar como un procedimiento? Para responder a la primera cuestión debemos recordar que la Geometría Descriptiva se apoya en razonamientos gráficos para articular sus procedimientos, mientras que la elaboración de un algoritmo paramétrico necesita de lógicas matemáticas y computacionales que sobrepasan el campo del pensamiento gráfico. Para la segunda cuestión -y otras relacionadas con el alcance de la programación computacional en nuestro día a día- aún no tenemos respuesta.

Aludiendo a la cita de Monge: “En este sentido [la Geometría Descriptiva] es un medio de investigar la verdad”, el proceso de enseñanza-aprendizaje en geometría no se diferencia sustancialmente de la investigación en geometría. Gracias al concepto de simulación, podemos hacer uso de las herramientas digitales a modo de “laboratorio gráfico”, un término usado en otros ámbitos académicos (Celani 2012). El entorno digital es apropiado para realizar ensayos, verificar o desmentir intuiciones geométricas por procedimientos ensayo-error u otros procesos holísticos, aprovechando la precisión y la rapidez de la máquina. Todas estas complejas potencialidades describen y conforman la idea del pensamiento gráfico aumentado.

8. CONCLUSIONES: GEOMETRÍA DESCRIPTIVA Y FABRICACIÓN DIGITAL

El programa de la *Geométrie Descriptive* de Monge dejaba muy clara la intención de la obra: esta debía tener una vocación práctica y ponerse al servicio de la mejora de la producción industrial. De igual manera, la Geometría Descriptiva se enfrenta hoy al desafío del diseño computacional, el CAD -*Computer Aided Design*-, el BIM -*Building Information Modeling*-, y el CAM -*Computer Aided Manufacturing*-, surgido precisamente de las necesidades de precisión y eficiencia de la industria y que hoy nos conduce a una producción protagonizada por maquinaria de control numérico y robots, en todas las áreas de la ingeniería y de la construcción (Oxman y Oxman 2014; Kohler 2008).

La enseñanza de la Geometría Descriptiva mediante el uso de herramientas digitales no es ajena a este cambio de paradigma productivo, siendo la consumación de una realidad instaurada en otros modelos educativos (Burry 2013; Tafteberg et al. 2014). Herramientas y procedimientos propios del diseño computacional, como el modelado paramétrico o algorítmico han superado las fases de la especulación formal con las cuales fueron asociadas inicialmente, posicionándose de forma permanente entre el repertorio de recursos para la gestión y el análisis de la forma geométrica (Meléndez 2019), (Madl 2022). El inevitable contacto entre Geometría Descriptiva y Fabricación Digital ya se ha producido (Mesnil et al. 2016). Los laboratorios de Fabricación Digital son hoy en día una instalación convencional en las instituciones universitarias dedicadas a las disciplinas del diseño y la producción industrial. En estos espacios la experimentación acerca de la geometría y la forma, en cualquier nivel de complejidad, puede migrar desde la virtualidad digital a la realidad física del material, permitiendo a los estudiantes interactuar con herramientas que materializan de forma precisa el resultado de los procesos del pensamiento gráfico aumentado desarrollados en la virtualidad digital. Los laboratorios de Fabricación Digital asociados a la docencia universitaria representan un primer contacto, en etapas universitarias, con ese otro mundo de fabricación robotizada asociado a la industria (García-Alvarado et al. 2009).