Ecuaciones en derivadas parciales en grafos con pesos

Miguel López Durán

UPV

July 1, 2024

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Índice

Definición (Grafo)

Un grafo G es un par $G = (V, E)$, donde V es el conjunto de vértices, y E es un conjuntos de pares no ordenados $(x, y) \in V \times V$.

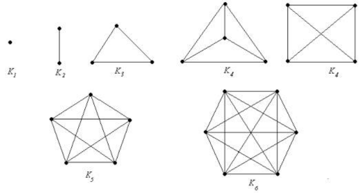
- *Vértices vecinos:* $x \sim y \Leftrightarrow (x, y) \in E$
- *Grafos localmente finito: Cada vértice tiene un número finito de vecinos*
- *Camino:* $(x_k)_{k=1}^{N} \subset V$ *con* $x_{k-1} \sim x_k$ *para* $k = 1, 2, \ldots, N$

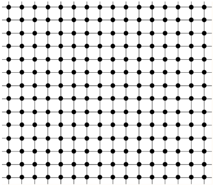
Definición (Grafo)

Un grafo G es un par $G = (V, E)$, donde V es el conjunto de vértices, y E es un conjuntos de pares no ordenados $(x, y) \in V \times V$.

- *Vértices vecinos:* $x \sim y \Leftrightarrow (x, y) \in E$
- *Grafos localmente finito: Cada vértice tiene un número finito de vecinos*
- *Camino:* $(x_k)_{k=1}^{N} \subset V$ *con* $x_{k-1} \sim x_k$ *para* $k = 1, 2, \ldots, N$

Ejemplos:





Definición (Grafo con pesos)

Dado un grafo $G = (V, E)$, definimos un grafo con pesos asociado como un par (V, ω) donde ω es una función no negativa de $V \times V$ tal que

- $\omega_{xy} = \omega_{yx} \forall x, y \in V$
- $\omega_{xy} > 0$ *si y solo si* $(x, y) \in E$.

Definición (Grafo con pesos)

Dado un grafo $G = (V, E)$, definimos un grafo con pesos asociado como un par (V, ω) donde ω es una función no negativa de $V \times V$ tal que

- $\omega_{xy} = \omega_{yx} \forall x, y \in V$
- $\omega_{xy} > 0$ *si y solo si* $(x, y) \in E$.

Medidas asociadas

- Volumen: $\nu(A) = \sum_{x\in A} d_x$, con $d_x = \sum_{y\sim x} \omega_{xy}, \quad A \subset V$
- Probabilidad asociada a cada vértice $x \in V$: $m_x(A) = \frac{1}{d_x} \sum_{y\in A} \omega_{xy}$

Definición (Grafo con pesos)

Dado un grafo $G = (V, E)$, definimos un grafo con pesos asociado como un par (V, ω) donde ω es una función no negativa de $V \times V$ tal que

- $\omega_{xy} = \omega_{yx} \forall x, y \in V$
- $\omega_{xy} > 0$ *si y solo si* $(x, y) \in E$.

Medidas asociadas

- Volumen: $\nu(A) = \sum_{x \in A} d_x$, con $d_x = \sum_{y \sim x} \omega_{xy}, \quad A \subset V$
- Probabilidad asociada a cada vértice $x \in V$: $m_x(A) = \frac{1}{d_x} \sum_{y \in A} \omega_{xy}$

Producto escalar en $L^2(V, \nu)$

$$(f, g) = \sum_{x \in V} f(x) g(x) d_x$$

Gradiente y Laplaciano de $u : V \to \mathbb{R}$

- Gradiente: $\nabla u(x,y) = u(y) - u(x), \quad x, y \in V$
- $\Delta_G u(x) = \frac{1}{d_x} \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x)) \omega_{xy}$

Divergencia de $z : V \times V \to \mathbb{R}$

$$div_G(z)(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} (z(x,y) - z(y,x)) \omega_{xy}$$

Se tiene que

$$\Delta_G u(x) = div_G(\nabla u)(x)$$

Teorema (Fórmula de Green)

Sea (V, ω) un grafo con pesos finito y sea $\Omega \subset V$ un subconjunto no vacío. Entonces, para $f, g : V \to \mathbb{R}$,

$$\sum_{x \in \Omega} \Delta_G f(x) g(x) d_x = -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Omega} \nabla f(x,y) \nabla g(x,y) \omega_{xy} + \sum_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \Omega^c}} \nabla f(x,y) g(x) \omega_{xy}.$$

Teorema (Fórmula de Green)

Sea (V,ω) un grafo con pesos finito y sea $\Omega \subset V$ un subconjunto no vacío. Entonces, para $f,g : V \to \mathbb{R}$,

$$\sum_{x\in\Omega} \Delta_G f(x)g(x)d_x = -\frac{1}{2}\sum_{x,y\in\Omega} \nabla f(x,y)\nabla g(x,y)\omega_{xy} + \sum_{\substack{x\in\Omega \\ y\in\Omega^c}} \nabla f(x,y)g(x)\omega_{xy}.$$

Proposición

El operador $\mathcal{L} = -\Delta_G$ es simétrico en $L^2(V,\nu)$, es decir

$$(\mathcal{L}f,g) = (f,\mathcal{L}g) \quad \forall f,g \in L^2(V,\nu)$$

Por tanto todos sus autovalores son reales.

Perímetro de un conjunto

Dado $\Omega \subset V$,

$$P(\Omega) = \sum_{x \in V} \sum_{y \in V \setminus \Omega} \omega_{xy}$$

Perímetro de un conjunto

Dado $\Omega \subset V$,

$$P(\Omega) = \sum_{x \in V} \sum_{y \in V \setminus \Omega} \omega_{xy}$$

La constante de Cheeger

Dado un grafo con pesos finito,

$$h = h(V) = \inf_{\Omega \subset V} \frac{P(\Omega)}{\nu(\Omega)}.$$

En general, dado $\Omega \subset V$ con $0 < \nu(\Omega) < \nu(V)$,

$$h_1(\Omega) = \inf \left\{ \frac{P(E)}{\nu(E)} : E \subset \Omega, \nu(E) > 0 \right\}$$

Lema: Fórmula de co-área

Dada $f : V \to \mathbb{R}$, se tiene:

$$\sum_{x \sim y} |\nabla f(x,y)| \omega_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} P(\Omega_t) dt,$$

donde $\Omega_t = \{x \in V : f(x) > t\}$.

Lema: Fórmula de co-área

Dada $f : V \to \mathbb{R}$, se tiene:

$$\sum_{x \sim y} |\nabla f(x,y)| \omega_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} P(\Omega_t) dt,$$

donde $\Omega_t = \{x \in V : f(x) > t\}$.

Teorema: Desigualdad de Cheeger en grafos finitos

Dado un grafo con pesos finito, se tiene

$$\frac{h^2}{2} \leq \lambda_1 \leq 2h,$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\lambda_1}{2} \leq h \leq \sqrt{2\lambda_1}$$

donde λ_1 es el primer autovalor no nulo de $\mathcal{L}$.

La ecuación del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t) = \Delta_G u(t) \quad \text{para } t \in (0, +\infty), \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

La ecuación del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t) = \Delta_G u(t) & \text{para } t \in (0, +\infty), \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

Funcional de energía asociado

Definimos el *funcional de energía* $\mathcal{H}_G : L^2(V, \nu) \to [0, +\infty]$ como

$$\mathcal{H}_G(f) = \begin{cases} \frac{1}{4} \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} (f(x) - f(y))^2 \omega_{xy} & \text{si } f \in L^2(V, \nu) \cap L^1(V, \nu), \\ \\ +\infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema

$\mathcal{H}_G$ es propio, convexo y semicontinuo inferiormente en $L^2(V,\nu)$. Además,

$$\partial\mathcal{H}_G = \mathcal{L},$$

es decir, si $g \in \partial\mathcal{H}_G(f)$ entonces $g = \mathcal{L}f$.

Teorema

$\mathcal{H}_G$ es propio, convexo y semicontinuo inferiormente en $L^2(V, \nu)$. Además,

$$\partial \mathcal{H}_G = \mathcal{L},$$

es decir, si $g \in \partial \mathcal{H}_G(f)$ entonces $g = \mathcal{L}f$.

Teorema de Brezis-Komura

Sea H un espacio de Hilbert y $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ una función propia, convexa y semicontinua inferiormente tal que $\min \varphi = 0$. Supongamos que $f \in L^2(0, T; H)$ y $u_0 \in \overline{D(\partial\varphi)}$, donde $D(\partial\varphi) = \{x \in H : \partial\varphi(x) \neq \emptyset\}$, entonces el problema

$$\begin{cases} u' + \partial\varphi(u) \ni f \quad \text{en } [0, T], \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

tiene una única solución fuerte.

Teorema: Existencia y unicidad de soluciones fuertes

Dada u_0 en $L^2(V,\nu)$, denotamos por

$$T_t^G u_0 = e^{-t\Delta_G} u_0 = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(I - \frac{t}{n}\Delta_G \right)^{-1} \right]^n u_0, \forall u_0 \in L^2(V,\nu).$$

Esta es la única solución fuerte de la ecuación del calor. Definimos el flujo de calor como:

$$\{e^{-t\Delta_G} : t \geq 0\}$$

Teorema: Existencia y unicidad de soluciones fuertes

Dada u_0 en $L^2(V,\nu)$, denotamos por

$$T_t^G u_0 = e^{-t\Delta_G} u_0 = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(I - \frac{t}{n}\Delta_G \right)^{-1} \right]^n u_0, \forall u_0 \in L^2(V,\nu).$$

Esta es la única solución fuerte de la ecuación del calor. Definimos el flujo de calor como:

$$\{e^{-t\Delta_G} : t \geq 0\}$$

Conservación de la masa

Si $\nu(V) < +\infty$, entonces el flujo de calor conserva la masa, es decir,

$$\sum_{x\in V} d_x e^{-t\Delta_G} u_0(x) = \sum_{x\in V} d_x u_0(x) \quad \forall u_0 \in L^2(V,\nu), \forall t \geq 0$$

Fórmula explícita del flujo de calor

Sea $u_0 \in L^1(V,\nu) \cap L^2(V,\nu)$, entonces:

$$e^{-t\Delta_G} u_0(x) = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{C_n} u_0(y) W_{C_n} \frac{t^n}{n!},$$

donde el sumatorio para cada $n \in \mathbb{N}$ es sobre el conjunto de todos los caminos $C_n = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ de longitud n en el grafo que unen x e y, para cada $y \in V$, y donde $W_{C_n} = \omega_{xx_1}\omega_{x_1x_2}\cdots\omega_{x_{n-1}y}$.

Fórmula explícita del flujo de calor

Sea $u_0 \in L^1(V,\nu) \cap L^2(V,\nu)$, entonces:

$$e^{-t\Delta_G} u_0(x) = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{C_n} u_0(y) W_{C_n} \frac{t^n}{n!},$$

donde el sumatorio para cada $n \in \mathbb{N}$ es sobre el conjunto de todos los caminos $C_n = \{x_k\}_{k=0}^n$ de longitud n en el grafo que unen x e y, para cada $y \in V$, y donde $W_{C_n} = \omega_{xx_1}\omega_{x_1x_2} \cdots \omega_{x_{n-1}y}$.

Comportamiento asintótico

Dado (V,ω) un grafo con pesos finito, existe una constante $\lambda > 0$ tal que para toda $f \in L^2(V,\nu)$ con media $\nu(f)$ se tiene:

$$||e^{-t\Delta_G} f - \nu(f)||_{L^2(V,\nu)} \leq e^{-2\lambda t} ||f - \nu(f)||_{L^2(V,\nu)} \text{ para todo } t \geq 0.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t) = \frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} \frac{u(y,t)-u(x,t)}{|u(y,t)-u(x,t)|} \omega_{xy}, \quad x \in V, t \geq 0 \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t) = \frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} \frac{u(y,t)-u(x,t)}{|u(y,t)-u(x,t)|}\omega_{xy}, \quad x \in V, t \geq 0 \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

Funcional de energía asociado: La variación total

Definimos la *variación total* de una función $u : V \to \mathbb{R}$ como:

$$TV(u) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} |u(y) - u(x)|\omega_{xy}$$

y el funcional en $L^2(V, \nu)$ asociado:

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} TV(u) & \text{si } u \in L^2(V,\nu) \text{ y } TV(u) < +\infty, \\ +\infty & \text{si } u \in L^2(V,\nu) \text{ y } TV(u) = +\infty \end{cases}$$

Espacio de las funciones con divergencia en L^p

Sea $p \geq 1$. Definimos:

$$X^p(V,\nu) = \{z \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x) : div_G z \in L^p(V,\nu)\}.$$

Proposición

Sean $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^q(V,\nu)$ con $TV(u) < +\infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; y $z \in X^p(V,\nu)$, entonces:

$$TV(u) = \sup \left\{ \sum_{x \in V} u(x) div_G z(x) d_x : z \in X^p(V,\nu), ||z||_\infty \leq 1 \right\},$$

La subdiferencial de $\mathcal{F}$

Teorema

Sean $u, v \in L^2(V, \nu)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $v \in \partial \mathcal{F}(u)$
- Existe $z \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$ tal que $v = -div_G(z)$ y
$$\sum_{x \in V} d_x u(x) v(x) = \mathcal{F}(u)$$
- Existe $g \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$ antisimétrica con $||g||_\infty \leq 1$ tal que $v = -div_G(g)$ y tal que
$$g(x,y) \in sign(u(y) - u(x)) \text{ en casi todo punto } (x,y) \in V \times V$$

El 1-Laplaciano

Definimos en $L^2(V,\nu)$ el operador multivaluado Δ_1 como:

$$(u,v) \in \Delta_1 \Longleftrightarrow -v \in \partial\mathcal{F}(u).$$

Reformulación de la ecuación de evolución

Reformulación de la ecuación de evolución:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_1 u \ni 0 & \text{en } (0,T) \times V \\ u(0,x) = u_0(x) & \quad x \in V. \end{cases}$$

El 1-Laplaciano

Definimos en $L^2(V,\nu)$ el operador multivaluado Δ_1 como:

$$(u,v) \in \Delta_1 \Longleftrightarrow -v \in \partial\mathcal{F}(u).$$

Reformulación de la ecuación de evolución

Reformulación de la ecuación de evolución:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_1 u \ni 0 & \text{en } (0,T)\times V \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in V. \end{cases}$$

Proposición

$TV(\cdot)$ es convexa, propia y semicontinua inferiormente respecto a la topología débil de $L^2(V,\nu)$

Teorema: Existencia y unicidad de soluciones

Para toda función $u_0 \in L^2(V,\nu)$ y todo $T > 0$, existe una única solución de:

$$\begin{cases} u \in W^{1,1}(0,T; L^2(V,\nu)), & \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{en } L^2(V,\nu) \text{ y} \\ u_t(t,\cdot) - \Delta_1 u(t) \ni 0 & \text{para casi todo } t \in (0,T). \end{cases}$$

Flujo variación total

Denotamos por

$$e^{-t\Delta_1} u_0$$

a la única solución del problema. Definimos el flujo variación total en $L^2(V,\nu)$ como:

$$\{e^{-t\Delta_1} : t \geq 0\}$$

Conservación de la masa

El flujo variación total satisface que para todo $t \geq 0$ y toda función $u_0 \in L^1(V,\nu) \cap L^2(V,\nu)$,

$$\sum_{x \in V} d_x e^{-t\Delta_1} u_0(x) = \sum_{x \in V} d_x u_0(x).$$

Conservación de la masa

El flujo variación total satisface que para todo $t \geq 0$ y toda función $u_0 \in L^1(V,\nu) \cap L^2(V,\nu)$,

$$\sum_{x \in V} d_x e^{-t\Delta_1} u_0(x) = \sum_{x \in V} d_x u_0(x).$$

Comportamiento asintótico

Sea (V,ω) un grafo con pesos finito. Entonces para toda función $u_0 \in L^2(V,\nu)$ con media $\nu(u_0)$, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left|\left| e^{-t\Delta_1} u_0 - \nu(u_0) \right|\right|_{L^2(V,\nu)} \leq C \cdot (\tilde{t} - t)^+,$$

donde

$$\tilde{t} = \frac{||u_0 - \nu(u_0)||_{L^2(V,\nu)}}{C}.$$

Autopares de Δ_1

Diremos que un par $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times L^2(V, \nu)$ es un *autopar* de $-\Delta_1$ si

1. $||u||_{L^1(V,\nu)} = 1$ y
2. existe $\xi \in sign(u)$ tal que

$$\lambda\xi \in \partial\mathcal{F}(u) = -\Delta_1 u.$$

Equivalente a que exista una función antisimétrica $g \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$ con $||g||_\infty \leq 1$ tal que:

$$\begin{cases} -\sum_{y \in V} g(x,y) \frac{\omega_{xy}}{d_x} = \lambda\xi(x) & \text{para todo } x \in V, \\ \\ g(x,y) \in sign(u(y) - u(x)) & \text{para casi todo punto } (x,y) \in V \times V. \end{cases}$$

Conjuntos calibrables

Definición

Un conjunto $\Omega \subset V$ con $0 < \nu(\Omega) < \nu(V)$ es calibrable si

$$h_1(\Omega) = \inf\left\{\frac{P(E)}{\nu(E)} : E \subset \Omega, \nu(E) > 0\right\} = \frac{P(\Omega)}{\nu(\Omega)}$$

Conjuntos calibrables

Definición

Un conjunto $\Omega \subset V$ con $0 < \nu(\Omega) < \nu(V)$ es calibrable si

$$h_1(\Omega) = \inf\left\{\frac{P(E)}{\nu(E)} : E \subset \Omega, \nu(E) > 0\right\} = \frac{P(\Omega)}{\nu(\Omega)}$$

Teorema

Sea $\Omega \subset V$ con $0 < \nu(\Omega) \leq \frac{1}{2}$ y sea $\lambda_\Omega = \frac{P(\Omega)}{\nu(\Omega)}$. Se tiene:

- λ autovalor de $-\Delta_1 \Longrightarrow h_1(V) \leq \lambda$
- Ω y $V \setminus \Omega$ calibrables $\Longrightarrow \left(\lambda_\Omega, \frac{1}{\nu(\Omega)}\chi_\Omega\right)$ autopar de $-\Delta_1$.
- $h(V) = \lambda_\Omega \Longrightarrow \Omega$ y $V \setminus \Omega$ calibrables.
- $h(V) = \lambda_\Omega \Longrightarrow \left(\lambda_\Omega, \frac{1}{\nu(\Omega)}\chi_\Omega\right)$ es un autopar de $-\Delta_1$.

Modelo ROF

Objetivo del modelo ROF: Eliminar el ruido de la imagen $f = u + n$, para ello, minimizamos

$$TV(u) + \frac{\lambda}{2}||u - f||^2_{L^2(V,\nu)}, \quad u \in L^2(V, \nu) \tag{3}$$

Teorema

Para toda $f \in L^2(V,\nu)$ y $\lambda > 0$, existe una única función minimizante u_λ del problema (3), que es la única solución del problema

$$\lambda(u - f) \in \Delta_1(u). \tag{4}$$

Esto es equiavlente a que exista una función $g \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$ antisimétrica tal que

$$\lambda(u_\lambda - f) = div_G(g) \text{ y} \tag{5}$$

$$g(x,y) \in sign(u_\lambda(y) - u_\lambda(x)) \quad \text{para casi todo punto } (x,y) \in V \times V.$$

Teorema

Para toda $f \in L^2(V,\nu)$ y $\lambda > 0$, existe una única función minimizante u_λ del problema (3), que es la única solución del problema

$$\lambda(u - f) \in \Delta_1(u). \tag{4}$$

Esto es equiavlente a que exista una función $g \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$ antisimétrica tal que

$$\lambda(u_\lambda - f) = div_G(g) \text{ y} \tag{5}$$

$$g(x,y) \in sign(u_\lambda(y) - u_\lambda(x)) \quad \text{para casi todo punto } (x,y) \in V \times V.$$

Proposición

Sea $f \in L^2(V,\nu)$. Si u_λ es la única solución de (3), entonces

$$\sum_{x\in V} d_x u_\lambda(x) = \sum_{x\in V} d_x f(x).$$

Proposición

Sean $\lambda, b > 0$. Si $u \in L^2(V, \nu)$ es solución de

$$-u \in \Delta_1 u, \tag{6}$$

entonces $u_\lambda = \left(b - \frac{1}{\lambda}\right)^+ u$ es un minimizante de (3) con $f = bu$. Recíprocamente, si $\left(b - \frac{1}{\lambda}\right) u$ minimiza (3) con $f = bu$, entonces u es solución de (6).

Método del descenso del gradiente

Objetivo: Aproximar (3) mediante la solución de

$$\begin{cases} v_t \in \Delta_1(v(t)) - \lambda(v(t) - f) & \text{en } (0, T) \times V, \\ v(0, x) = v_0(x) & \text{para } x \in V, \end{cases} \tag{7}$$

con v_0 cumpliendo

$$\sum_{x \in V} d_x v_0(x) = \sum_{x \in V} d_x f(x).$$

Método del descenso del gradiente

Teorema

Para toda función $v_0 \in L^2(V, \nu)$, existe una única solución fuerte del problema (7) en $(0, T)$ para todo $T > 0$.

Método del descenso del gradiente

Teorema

Para toda función $v_0 \in L^2(V,\nu)$, existe una única solución fuerte del problema (7) en $(0,T)$ para todo $T > 0$.

Teorema

Sea $f \in L^2(V,\nu)$ y sea $v(t)$ la solución del problema (7) para $v_0 \in L^2(V,\nu)$ tal que $\sum_{x\in V} d_x v_0(x) = \sum_{x\in V} d_x f(x)$. Entonces,

$$||v(t) - u_\lambda||_{L^2(V,\nu)} \leq ||v_0 - u_\lambda||_{L^2(V,\nu)} \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{para todo } t \geq 0, \tag{8}$$

donde u_λ es la única función minimizante de (3).

- Mazón, José M and Solera-Diana, Marcos and Toledo-Melero, J Julián, *Variational and Diffusion Problems in Random Walk Spaces*, Springer Nature **103** (2023)
- Mazon, Jose M and Solera, Marcos and Toledo, Julian, *The heat flow on metric random walk spaces*, Elsevier **483(2)**, (2020), 123645
- Brézis, Haim *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, New York: Springer **Vol. 2; No. 3, p 5** (2011)

Gracias por su atención