



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Dpto. de Matemàtica Aplicada

Ecuaciones en derivadas parciales en grafos con pesos

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Investigación Matemática

AUTOR/A: López Duran, Miguel

Tutor/a: Morillas Gómez, Samuel

Cotutor/a externo: Mazón Ruiz, Jose Manuel

CURSO ACADÉMICO: 2023/2024



# Trabajo de Fin de Máster

Máster Universitario  
en Investigación Matemática

---

## Ecuaciones en derivadas parciales en grafos con pesos

Miguel López Durán

---

Dirección: José M. Mazón

Curso: 2023/24



# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>I</b>
<b>1. Grafos con pesos</b>	<b>3</b>
<b>2. El Laplaciano de un grafo con pesos</b>	<b>7</b>
2.1. El problema de Dirichlet en grafos finitos . . . . .	7
2.1.1. La desigualdad de Cheeger en grafos finitos . . . . .	11
2.2. El problema de Dirichlet para grafos infinitos . . . . .	15
2.2.1. La desigualdad de Cheeger en grafos infinitos . . . . .	19
<b>3. La ecuación del calor en grafos con pesos</b>	<b>22</b>
3.1. Comportamiento asintótico de la ecuación del calor . . . . .	28
<b>4. El flujo variación total</b>	<b>33</b>
4.1. El 1-Laplaciano . . . . .	37
4.2. Comportamiento asintótico del flujo variación total . . . . .	44
4.3. La constante de Cheeger y los conjuntos calibrables . . . . .	48
4.4. La constante de Cheeger y la variación total . . . . .	55
4.5. La constante de Cheeger y los autovalores del 1-Laplaciano . . . . .	61
<b>5. Modelo ROF en <math>L^2(V, \nu)</math></b>	<b>66</b>
5.1. El método de descenso del gradiente para el modelo ROF . . . . .	70
<b>A. Complementos de Análisis Convexo</b>	<b>73</b>
A.1. Introducción a los operadores multivaluados . . . . .	73
A.2. Soluciones leves y operadores acretivos . . . . .	74
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>



# Introducción

Actualmente el estudio y tratamiento de gran cantidad de datos es de gran interés. Los grafos con peso es un marco natural para dicho estudio. Históricamente, dicha teoría se estudiaba mediante la teoría combinatoria de grafos. Desde principio de los años setenta, con la introducción del Laplaciano en grafos, se ha desarrollado una teoría sobre ecuaciones en derivadas parciales en grafos con peso, que ha resultado de gran utilidad. A parte de esta teoría está dedicada esta memoria.

Los grafos fueron introducidos por Leonhard Euler en el siglo XVIII con el objetivo de resolver el problema de los puentes de Königsberg ([10]). Desde entonces, la teoría de grafos ha sido una disciplina que ha encontrado una gran cantidad de aplicaciones en campos muy diversos. Algunos de los campos donde los grafos han sido de gran utilidad son: los sistemas de geolocalización como el GPS ([9], [23]), las redes sociales ([17], [11], [20], [16]), el procesamiento del lenguaje ([14]), la química ([2]) o la biología ([18]).

Uno de los principales usos de los grafos es la creación de algoritmos eficientes de *clustering* o agrupamiento ([19], [15]), donde se ha comprobado que el estudio del Laplaciano de un grafo o la constante de Cheeger permiten crear algoritmos de *clustering* óptimos y altamente eficientes ([7], [21]).

Otra de las áreas donde los grafos han sido de gran utilidad es el análisis y tratamiento de imágenes. En este área han surgido algoritmos de reconstrucción de imágenes muy potentes usando, por ejemplo, algoritmos de división en grafos ([22]). Uno de los principales modelos que se usan para la reconstrucción de imágenes con ruido es el denominado modelo ROF, que se basa en hallar la imagen que minimiza un cierto funcional de energía. Este modelo se puede estudiar mediante grafos, obteniéndose soluciones en varios espacios con condiciones de contorno diversas ([13, Capítulo 4]).

Por todas estas razones, el estudio de los grafos y de las ecuaciones en derivadas parciales en ellos es de gran interés dado que proporcionan la base teórica en la que todas estas aplicaciones se fundamentan.

En este trabajo estudiaremos la base teórica de las ecuaciones en derivadas

parciales en grafos con pesos y algunas de sus propiedades más importantes.

En el Capítulo 1 introduciremos los grafos con pesos y algunas definiciones básicas que necesitaremos a lo largo del trabajo, además de introducir los espacios de medida con los que trabajaremos.

El Capítulo 2 estará dedicado al estudio del Laplaciano de un grafo con pesos y sus propiedades más importantes. Estudiaremos el problema de Dirichlet en grafos finitos e infinitos, y veremos la relación de los autovalores del Laplaciano de un grafo con pesos con la constante de Cheeger del grafo. Además, probaremos la desigualdad de Cheeger en grafos finitos e infinitos.

En el Capítulo 3 presentaremos la ecuación del calor en grafos y veremos un resultado de existencia y unicidad de soluciones fuertes de la ecuación. De hecho, daremos una fórmula explícita de esta solución y veremos el comportamiento asintótico de esta solución bajo ciertas restricciones en el grafo.

El Capítulo 4 se centrará en estudiar el flujo variación total de las funciones en grafos y sus propiedades. Comenzaremos introduciendo la variación total de una función y sus propiedades más importantes. Posteriormente estudiaremos un funcional de energía asociado a la variación total cuya subdiferencial será el 1-Laplaciano de un grafo con pesos, lo que nos permitirá dar un resultado de existencia y unicidad de soluciones a la ecuación diferencial asociada. A continuación estudiaremos el comportamiento asintótico de esta solución bajo ciertas restricciones en el grafo y en la medida asociada al mismo. Después veremos la relación entre la constante de Cheeger y el 1-Laplaciano de las funciones características de los conjuntos calibrables del grafo, probaremos una desigualdad de tipo Cheeger que involucrará al hueco espectral del Laplaciano y, por último, veremos la relación entre la constante de Cheeger de un grafo y los autovalores del 1-Laplaciano.

Por último, en el Capítulo 5 presentaremos el modelo ROF en grafos, ampliamente usado para el tratamiento de imágenes. Presentaremos el funcional de energía asociado al modelo y probaremos la existencia de una función minimizante del mismo, además de una caracterización variacional en términos del 1-Laplaciano de este minimizante. Posteriormente, usaremos el método del descenso del gradiente para aproximar esta función a través de la solución de un problema de Cauchy asociado.

# Capítulo 1

## Grafos con pesos

**Definición 1.0.1.** Un grafo  $G$  es un par  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto no vacío (finito o infinito), el conjunto de vértices, y  $E$ , el conjunto de aristas, es un conjunto de pares no ordenados  $(x, y)$  con  $x, y \in V$ . Escribiremos

$$x \sim y \text{ si } (x, y) \in E,$$

y en tal caso, diremos que  $x$  está conectado con  $y$  o que  $x$  e  $y$  son vecinos.

Un grafo  $G$  es finito si  $V$  es finito, y diremos que un grafo es localmente finito si cada  $x \in V$  tiene un número finito de vecinos.

Veamos algunos ejemplos de grafos:

1. Grafos completos  $K_n$ :  $|V| = n$  y  $i \sim j$  para cualesquiera  $i, j \in V$  distintos.

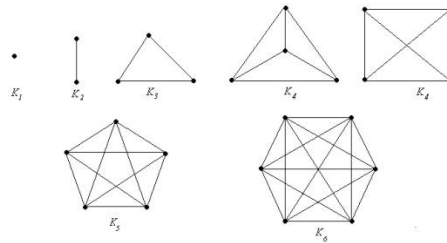


Figura 1.1: Grafos completos para  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6$

2. Grafos camino  $P_m$ :  $V = \{0, 1, \dots, m - 1\}$  y  $i \sim j$  si  $|i - j| = 1$ .

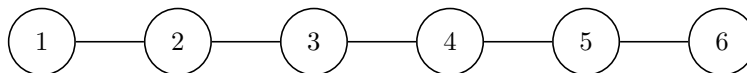


Figura 1.2:  $P_6$



3. Grafos cíclicos  $C_m = \mathbb{Z}_m$ :  $V = \{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$ , y  $i \sim j$  si  $i - j \equiv \pm 1$  mód  $m$ . (Figura 1.3)

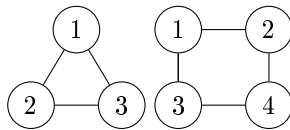


Figura 1.3:  $\mathbb{Z}_3$  y  $\mathbb{Z}_4$

**Definición 1.0.2.** Un grafo  $G = (V, E)$  es bipartito si existe una partición  $\{V^+, V^-\}$  de  $V$  tal que ningún vértice de  $V^+$  es vecino de otro vértice de  $V^+$  ni de sí mismo, y ningún vértice de  $V^-$  es vecino de otro vértice de  $V^-$  ni de sí mismo.

**Definición 1.0.3.** Dado un grupo  $(G, \cdot)$  y un subconjunto  $S$  de  $G$  con la propiedad de que si  $x \in S$  entonces  $x^{-1} \in S$  y tal que  $e \notin S$ , donde  $e$  es el elemento neutro del grupo, definimos el grafo de Cayley  $(G, S)$  del grupo  $G$  con un conjunto generador de vértices  $S$  de la siguiente forma:

- El conjunto de vértices  $V$  es todo el grupo  $G$ .
- Definimos que  $x \sim y$  si y solo si  $y = x \cdot s$  para algún  $s \in S$ .

Un ejemplo importante de grafo de Cayley es el generado por el grupo  $\mathbb{Z}^2$  con la operación suma habitual y el subconjunto  $S = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$ , que podemos representar de la siguiente forma:

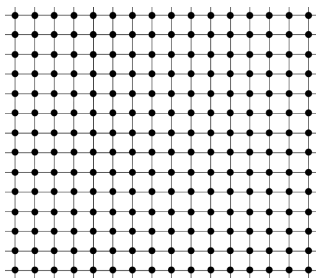


Figura 1.4: Grafo de Cayley  $(\mathbb{Z}^2, S)$

**Definición 1.0.4.** Dado un grafo  $G = (V, E)$ , definimos un grafo con pesos asociado como un par  $(V, \omega)$  donde  $\omega$  es una función no negativa de  $V \times V$  tal que

- (I)  $\omega_{xy} = \omega_{yx} \forall x, y \in V$
- (II)  $\omega_{xy} > 0$  si y solo si  $(x, y) \in E$ .

Estos grafos se suelen denotar como  $(V, \omega)$  dado que  $\omega$  caracteriza completamente el conjunto de aristas del grafo.

**Definición 1.0.5.** *Dado un grafo  $G = (V, E)$ , decimos que una sucesión  $\{x_k\}_{k=0}^n$  de vértices en el grafo es un camino si  $x_{k-1} \sim x_k$  para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ . Definimos la longitud del camino  $\{x_k\}_{k=0}^n$  como  $n$ . Un grafo es conexo si para todo  $x, y \in V$ , existe un camino que los une, es decir, existe un camino  $\{x_k\}_{k=0}^n$  tal que  $x_0 = x$  y  $x_n = y$ .*

En un grafo conexo, podemos definir una distancia entre dos vértices como el ínfimo de las longitudes de los caminos que los unen, es decir,

$$d_G(x, y) = \inf \{n \in \mathbb{N} \mid \{x_k\}_{k=0}^n \text{ camino}, x_0 = x, x_n = y\},$$

cuando no haya confusión denotaremos  $d_G$  simplemente como  $d$ .

Dados dos subconjuntos no vacíos  $X$  e  $Y$  de  $V$  podemos definir su distancia como

$$d(X, Y) = \inf \{d(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Con esta distancia podemos definir el  $r$ -entorno de un subconjunto de vértices como sigue:

**Definición 1.0.6.** *Sea  $r \geq 0$  y  $\Omega \subset V$  un subconjunto no vacío. Definimos el  $r$ -entorno de  $\Omega$  como*

$$U_r(\Omega) = \{y \in V : d(y, X) \leq r\}.$$

Vamos a definir ahora las medidas y los espacios relacionados con un grafo con pesos  $(V, \omega)$  que nos permitirán estudiar diversas ecuaciones en grafos. A partir de ahora trabajaremos siempre con un grafo con pesos  $(V, \omega)$  salvo que especifiquemos lo contrario. Además supondremos siempre que  $(V, \omega)$  es un grafo con pesos conexo y localmente finito.

**Definición 1.0.7.** *Dado  $x \in V$ , definimos el peso de  $x$ , como*

$$d_x = \sum_{y \sim x} w_{xy}.$$

En general, dado un conjunto  $A \subset V$ , definimos el volumen de  $A$  como

$$\nu(A) := \sum_{x \in A} d_x.$$

Como  $(V, \omega)$  es localmente finito y conexo, se tiene que  $0 < d_x < \infty$  para todo  $x \in V$ . De hecho, se puede comprobar que  $\nu : \mathcal{P}(V) \rightarrow [0, +\infty]$  es una medida.

Vamos a construir ahora una medida de probabilidad asociada a cada  $x \in V$  en el conjunto de partes de  $V$ . Para cada  $x \in V$  definimos la medida  $m_x : \mathcal{P}(V) \rightarrow [0, 1]$  como

$$m_x(A) = \frac{1}{d_x} \sum_{y \in A} \omega_{xy}.$$

---

Sea  $m = (m_x)_{x \in V}$ . La terna  $(V, d_G, m)$  es un caso particular de lo que se conocen como espacios métricos de caminos aleatorios [13].

**Definición 1.0.8.** Dado  $1 \leq p < \infty$ , definimos el espacio de funciones  $p$ -integrables como

$$L^p(V, \nu) = \left\{ u : V \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{x \in V} d_x |v(x)|^p < +\infty \right\}.$$

En estos espacios definimos la siguiente norma:

$$\|u\|_{L^p(V, \nu)} = \left( \sum_{x \in V} d_x |v(x)|^p \right)^{1/p}.$$

Definimos el espacio de funciones esencialmente acotadas como

$$L^\infty(V, \nu) = \left\{ u : V \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{x \in V} |u(x)| < +\infty \right\},$$

y definimos la norma en este espacio como

$$\|u\|_{L^\infty(V, \nu)} = \sup_{x \in V} |u(x)|.$$

## Capítulo 2

# El Laplaciano de un grafo con pesos

Para definir el Laplaciano de un grafo con pesos antes debemos definir el gradiente y la divergencia de una función sobre un grafo con pesos.

**Definición 2.0.1.** *Dado un grafo con pesos  $(V, \omega)$  y una función  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos su gradiente como*

$$\nabla u(x, y) = u(y) - u(x) \quad \forall x, y \in V. \quad (2.1)$$

*Dada una función  $z : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos su divergencia como*

$$(\operatorname{div}_G z)(x) = \frac{1}{2} \sum_{y \in V} (z(x, y) - z(y, x)) dm_x(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} (z(x, y) - z(y, x)) \omega_{xy}. \quad (2.2)$$

Ya estamos en condiciones de definir el operador Laplaciano en un grafo con pesos.

**Definición 2.0.2.** *Sea  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  una función cualquiera. Definimos la función  $\Delta_G f$  como*

$$\Delta_G f(x) = \frac{1}{d_x} \sum_{y \sim x} f(y) \omega_{xy} - f(x). \quad (2.3)$$

*Llamamos al operador  $\Delta_G$  el operador Laplaciano con pesos de  $(V, \omega)$ . Notar que se tiene que*

$$\Delta_G f(x) = \operatorname{div}_G(\nabla f)(x). \quad (2.4)$$

### 2.1. El problema de Dirichlet en grafos finitos

Consideremos en esta sección únicamente grafos finitos, vamos a estudiar el problema de Dirichlet en estos. Vamos a denotar por  $\mathcal{F}$  al conjunto de las

funciones en  $V$  con valores reales. Observamos que  $\mathcal{F}$  es un espacio vectorial real de dimensión  $|V| < \infty$  y que el operador Laplaciano  $\Delta_G$  es un operador lineal en  $\mathcal{F}$ .

**Teorema 2.1.1** (Fórmula de Green). *Sea  $(V, \omega)$  un grafo con pesos finito y sea  $\Omega \subset V$  un subconjunto no vacío. Entonces, para dos funciones reales cualesquiera  $f, g$  en  $V$ ,*

$$\sum_{x \in \Omega} \Delta_G f(x) g(x) d_x = -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Omega} \nabla f(x, y) \nabla g(x, y) \omega_{xy} + \sum_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \Omega^c}} \nabla f(x, y) g(x) \omega_{xy}. \quad (2.5)$$

Si  $\Omega = V$ , entonces  $\Omega^c$  es vacío y, por tanto el último término de (2.5) se anula, obteniéndose

$$\sum_{x \in V} \Delta_G f(x) g(x) d_x = -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} \nabla f(x, y) \nabla g(x, y) \omega_{xy}. \quad (2.6)$$

**Demostración:**

Tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Omega} \Delta_G f(x) g(x) d_x &= \sum_{x \in \Omega} \left( \frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} \nabla f(x, y) \omega_{xy} \right) g(x) d_x \\ &= \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in V} \nabla f(x, y) g(x) \omega_{xy} \\ &= \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega} \nabla f(x, y) g(x) \omega_{xy} + \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega^c} \nabla f(x, y) g(x) \omega_{xy} \\ &= \sum_{y \in \Omega} \sum_{x \in \Omega} \nabla f(y, x) g(y) \omega_{xy} + \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega^c} \nabla f(x, y) g(x) \omega_{xy}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos intercambiado las variables  $x$  e  $y$  y hemos usado que  $w_{xy} = w_{yx}$ . Sumando ahora las dos últimas igualdades y dividiendo por 2, obtenemos

$$\sum_{x \in \Omega} \Delta_G f(x) g(x) d_x = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Omega} \nabla f(x, y) (g(x) - g(y)) \omega_{xy} + \sum_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \Omega^c}} \nabla f(x, y) g(x) \omega_{xy},$$

que era lo que queríamos probar.  $\square$

Sea  $|V| = N$  (de forma que  $\dim \mathcal{F} = N$ ). Nos interesa estudiar el espectro del operador  $\mathcal{L} = -\Delta_G$ , conocido como el *operador Laplaciano definido positivo*. Como  $\mathcal{L}$  actúa en  $\mathcal{F}$ , ha de tener  $N$  autovalores  $\lambda$ , que veremos que son reales, determinados por  $\mathcal{L}f = \lambda f$ , para alguna  $f \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$ . A la función  $f$  la llamaremos la autofunción asociada al autovalor  $\lambda$ .

Podemos observar que  $\mathcal{L}1 = 0$ , por lo que 0 es un autovalor de  $\mathcal{L}$ . De hecho es simple, es decir, si  $\mathcal{L}f = 0$ , entonces  $f$  es constante. Veámoslo.

Supongamos que  $\mathcal{L}f = 0$ , entonces se sigue de (2.6) con  $g = f$  que

$$\sum_{\{x,y \in V, x \sim y\}} (f(x) - f(y))^2 \omega_{xy} = 0.$$

Por tanto,  $f(x) = f(y)$  para dos vértices vecinos cualesquiera. Como el grafo es conexo, para dos vértices  $x, y \in V$  arbitrarios, existe un camino  $\{x_k\}_{k=0}^n$  que los une y, como  $x_{k-1} \sim x_k$ , se tiene que  $f(x) = f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = f(y)$ , por tanto,  $f(x) = f(y)$ . Como  $x$  e  $y$  son arbitrarios, se tiene que  $f$  es constante en  $V$ , como queríamos ver.

Para comprobar que los autovalores de  $\mathcal{L}$  son reales, debemos definir un producto escalar en  $\mathcal{F}$  para el que veremos que  $\mathcal{L}$  es simétrico. Dadas dos funciones  $f, g$  en  $\mathcal{F}$ , definimos su producto escalar como

$$(f, g) = \sum_{x \in V} f(x)g(x)d_x.$$

**Lema 2.1.2.** *El operador  $\mathcal{L}$  es simétrico, es decir,  $(\mathcal{L}f, g) = (f, \mathcal{L}g) \forall f, g \in \mathcal{F}$ .*

**Demostración:**

Por la fórmula de Green (2.6), se tiene

$$(\mathcal{L}f, g) = - \sum_{x \in V} \Delta_G f(x)g(x)d_x = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} \nabla f(x,y) \nabla g(x,y) \omega_{xy} = (f, \mathcal{L}g).$$

□

**Corolario 2.1.3.** *Todos los autovalores de  $\mathcal{L}$  son reales.*

Vamos a ver ahora un resultado que nos va a permitir acotar los autovalores de  $\mathcal{L}$ .

**Teorema 2.1.4.** *Sea  $(V, \omega)$  un grafo con pesos, finito y conexo con  $|V| = N > 1$ , entonces se cumple:*

- (a) *Todos los autovalores de  $\mathcal{L}$  están contenidos en  $[0, 2]$*
- (b) *Si  $(V, \omega)$  no es bipartito, entonces todos los autovalores de  $\mathcal{L}$  están contenidos en  $[0, 2)$ .*

**Demostración:**

(a) Sea  $\lambda$  un autovalor de  $\mathcal{L}$  con autofunción  $f$ . Usando que  $\mathcal{L}f = \lambda f$  y la fórmula de Green (2.6), obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{x \in V} f^2(x)d_x &= \sum_{x \in V} \mathcal{L}f(x)f(x)d_x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\{x,y \in V, x \sim y\}} (f(y) - f(x))^2 \omega_{xy}, \end{aligned}$$

de lo que se sigue que  $\lambda \geq 0$ . Usando que  $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
\lambda \sum_{x \in V} f^2(x) d_x &\leq \sum_{\{x,y \in V, x \sim y\}} (f^2(y) + f^2(x)) \omega_{xy} \\
&= \sum_{x,y \in V} f^2(y) \omega_{xy} + \sum_{x,y \in V} f^2(x) \omega_{xy} \\
&= \sum_{y \in V} f^2(y) d_y + \sum_{x \in V} f^2(x) d_x \\
&= 2 \sum_{x \in V} f^2(x) d_x. \tag{2.7}
\end{aligned}$$

De (2.7) se sigue que  $\lambda \leq 2$ .

(b) Supongamos que  $\lambda = 2$  es un autovalor de  $\mathcal{L}$  con autofunción  $f$  y veamos entonces que  $(V, \omega)$  es bipartito.

Como  $\lambda = 2$ , todas las desigualdades en el cálculo de (2.7) han de ser igualdades, en particular debemos tener que para todo  $x \sim y$ ,

$$(f(x) - f(y))^2 = 2(f(x)^2 + f(y)^2),$$

o, equivalentemente,

$$f(x) + f(y) = 0.$$

Si  $f(x_0) = 0$  para algún  $x_0 \in V$ , se sigue que  $f(x) = 0$  para todos los vecinos de  $x_0$  y, como el grafo es conexo, se debe tener que  $f \equiv 0$  en  $V$ , pero  $f$  es una autofunción y, por tanto, no es nula. Por tanto,  $f(x) \neq 0$  para todo  $x \in V$ . Entonces  $V$  se puede dividir en la unión disjunta de los siguientes conjuntos:

$$V^+ = \{x \in V \mid f(x) > 0\} \text{ y } V^- = \{x \in V \mid f(x) < 0\}.$$

Como para todo  $x \sim y$  se ha de tener que  $f(x) + f(y) = 0$ , ningún vértice de  $V^+$  puede tener como vecino otro vértice de  $V^+$  y, análogamente, ningún vértice de  $V^-$  puede tener como vecino otro vértice de  $V^-$ , por lo que el grafo  $(V, \omega)$  es bipartito.  $\square$

Gracias al Teorema 2.1.4 y a que 0 es un autovalor simple, podemos enumerar los autovalores de  $\mathcal{L}$  en orden creciente como sigue:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N-1} \leq 2.$$

Vamos a aplicar el Teorema 2.1.4 para estudiar el problema de Dirichlet en grafos finitos, en particular vamos a demostrar el siguiente resultado:

**Proposición 2.1.5.** *Dada  $f \in \mathcal{F}$ , la ecuación  $\mathcal{L}u = f$  tiene solución única si y solo si  $\sum_{x \in V} f(x) d_x = 0$ .*

**Demostración:**

Supongamos que existe una única solución a la ecuación  $\mathcal{L}u = f$ . Por la fórmula de Green (2.6),

$$0 = (u, \mathcal{L}1) = (\mathcal{L}u, 1) = (f, 1) = \sum_{x \in V} f(x) d_x,$$

por lo que  $\sum_{x \in V} f(x) d_x = 0$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\sum_{x \in V} f(x) d_x = 0$ , es decir, que  $f$  es ortogonal a 1. Sea  $\mathcal{F}_0$  el subespacio de  $\mathcal{F}$  de las funciones ortogonales a 1. Como 1 es una autofunción con autovalor 0, el espacio  $\mathcal{F}_0$  es invariante por  $\mathcal{L}$  y el espectro de  $\mathcal{L}$  en  $\mathcal{F}_0$  es  $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$ . Por el Teorema 2.1.4,  $\lambda_j > 0$  para todo  $j = 1, \dots, N-1$ , por lo que  $\mathcal{L}$  es invertible en  $\mathcal{F}_0$ , es decir, para toda  $f \in \mathcal{F}_0$ , la ecuación  $\mathcal{L}u = f$  tiene una única solución  $u \in \mathcal{F}_0$  dada por  $u = \mathcal{L}^{-1}f$ .  $\square$

### 2.1.1. La desigualdad de Cheeger en grafos finitos

**Definición 2.1.6.** Dado  $\Omega \subset V$ , definimos el perímetro de  $\Omega$ ,  $P(\Omega)$  como

$$P(\Omega) = \sum_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \Omega^c}} \omega_{xy}.$$

El perímetro de un conjunto "mide" la interacción o la conexión entre un conjunto y su complementario.

**Definición 2.1.7** (Constante de Cheeger). Dado un grafo finito con pesos  $(V, \omega)$ , definimos su constante de Cheeger como

$$h = h(V, \omega) = \inf_{\substack{\Omega \subset V \\ \nu(\Omega) \leq \frac{1}{2}\nu(V)}} \frac{P(\Omega)}{\nu(\Omega)}. \quad (2.8)$$

La constante de Cheeger  $h$  es la constante más grande tal que

$$P(\Omega) \geq h\nu(\Omega) \quad (2.9)$$

para los subconjuntos  $\Omega \subset V$  con  $\nu(\Omega) \leq \frac{1}{2}\nu(V)$ .

En esta sección queremos desarrollar todos los resultados necesarios para demostrar una desigualdad conocida como la *desigualdad de Cheeger*, la cual afirma que

$$\lambda_1 \geq \frac{h^2}{2}$$

donde  $\lambda_1$  es el primer autovalor no nulo de  $\mathcal{L}$ . Para demostrarla, necesitamos antes 3 lemas previos.

**Lema 2.1.8.** Se tiene que  $\lambda_1 \leq 2h$ .

**Demostración:**

Dada  $f \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$ , consideramos el cociente de Rayleigh

$$R(f) = \frac{(\mathcal{L}f, f)}{(f, f)}.$$

Como

$$\lambda_1 = \inf_{f \in \mathcal{F}, f \perp 1} R(f),$$



basta encontrar una función  $f$  tal que  $f \perp 1$  y  $R(f) \leq 2h$ . Sea  $\Omega$  un conjunto considerado en el ínfimo de (2.8), en particular,  $\nu(\Omega) \leq \nu(\Omega^c)$ ; sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ -a & x \in \Omega^c \end{cases}$$

donde elegimos  $a$  de tal forma que  $f \perp 1$ , es decir,  $\nu(\Omega) = a\nu(\Omega^c)$ , por lo que

$$a = \frac{\nu(\Omega)}{\nu(\Omega^c)} \leq 1.$$

Por un lado tenemos

$$(f, f) = \sum_{x \in V} f(x)^2 d_x = \nu(\Omega) + a^2 \nu(\Omega^c) = (1+a)\nu(\Omega).$$

Por otro lado, por la fórmula de Green,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f, f) &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} (\nabla f(x, y))^2 \omega_{xy} = \sum_{x \in \Omega, y \in \Omega^c} (\nabla f(x, y))^2 \omega_{xy} \\ &= (1+a)^2 \sum_{x \in \Omega, y \in \Omega^c} \omega_{xy} = (1+a)^2 P(\Omega). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$R(f) = \frac{(1+a)^2 P(\Omega)}{(1+a)\nu(\Omega)} \leq (1+a)h \leq 2h.$$

□

**Lema 2.1.9** (Fórmula de co-área). *Dada una función  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos para cada  $t \in \mathbb{R}$*

$$\Omega_t = \{x \in V : f(x) > t\}.$$

*Entonces se tiene la siguiente igualdad:*

$$\sum_{x \sim y} |\nabla f(x, y)| \omega_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} P(\Omega_t) dt. \quad (2.10)$$

**Demostración:**

Dada una arista  $(x, y) \in E$ , podemos considerar el intervalo  $I_{xy} = [f(x), f(y))$ , asumiendo que  $f(x) \leq f(y)$  (en otro caso, cambiamos  $x$  por  $y$ ). Denotando por  $|I_{xy}|$  la longitud del intervalo, se tiene que  $|\nabla f(x, y)| = |I_{xy}|$ .

Además se tiene:

$$x \in \Omega_t^c \text{ y } y \in \Omega_t \Leftrightarrow f(x) \leq t \text{ y } f(y) > t \Leftrightarrow t \in I_{xy}.$$

Por tanto,

$$P(\Omega_t) = \sum_{\substack{x \in \Omega_t^c \\ y \in \Omega_t}} \omega_{xy} = \sum_{(x, y) \in E, t \in I_{xy}} \omega_{xy} = \sum_{(x, y) \in E} \omega_{xy} \chi_{I_{xy}}(t).$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} P(\Omega_t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{(x,y) \in E} \omega_{xy} \chi_{I_{xy}}(t) dt \\
&= \sum_{(x,y) \in E} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{xy} \chi_{I_{xy}}(t) dt \\
&= \sum_{(x,y) \in E} \omega_{xy} |I_{xy}| = \sum_{x \sim y} |\nabla f(x, y)| \omega_{xy}.
\end{aligned}$$

□

**Lema 2.1.10.** *Para toda función no negativa  $f$  en  $V$  tal que*

$$\nu(\{x \in V : f(x) > 0\}) \leq \frac{1}{2} \nu(V) \quad (2.11)$$

*se tiene*

$$\sum_{x \sim y} |\nabla f(x, y)| \omega_{xy} \geq h \sum_{x \in V} f(x) d_x,$$

*donde  $h$  es la constante de Cheeger de  $(V, \omega)$ .*

**Demostración:**

Por la fórmula de co-área (2.10) tenemos

$$\sum_{x \sim y} |\nabla f(x, y)| \omega_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} P(\Omega_t) dt \geq \int_0^{\infty} P(\Omega_t) dt.$$

Por la hipótesis (2.11), el conjunto  $\Omega_t = \{x \in V : f(x) > t\}$  tiene medida  $\leq \frac{1}{2} \nu(V)$  para todo  $t \geq 0$ . Por tanto, por (2.9),

$$P(\Omega_t) \geq h \nu(\Omega_t),$$

de lo que se sigue

$$\sum_{x \sim y} |\nabla f(x, y)| \omega_{xy} \geq h \int_0^{\infty} \nu(\Omega_t) dt.$$

Por otro lado, observamos que para  $t \geq 0$ ,  $x \in \Omega_t \Leftrightarrow t \in [0, f(x))$ , de lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \nu(\Omega_t) dt &= \int_0^{\infty} \sum_{x \in \Omega_t} d_x dt \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{x \in V} d_x \chi_{[0, f(x))}(t) dt \\
&= \sum_{x \in V} \int_0^{\infty} \chi_{[0, f(x))}(t) dt = \sum_{x \in V} d_x f(x),
\end{aligned}$$

de lo que se sigue el Lema. □

Gracias al Lema 2.1.10 ya podemos demostrar la desigualdad de Cheeger.

**Teorema 2.1.11** (Desigualdad de Cheeger).

$$\lambda_1 \geq \frac{h^2}{2} \quad (2.12)$$

donde  $\lambda_1$  es el primer autovalor no nulo de  $\mathcal{L}$ .

**Demostración:**

Sea  $f$  la autofunción de  $\lambda_1$ . Consideramos la siguiente partición de  $V$ :

$$V^+ = \{x \in V : f(x) \geq 0\} \quad \text{y} \quad V^- = \{x \in V : f(x) < 0\}.$$

Sin pérdida de generalidad suponemos que  $\nu(V^+) \leq \nu(V^-)$  (en caso contrario consideramos  $-f$ ). De esto se sigue que  $\nu(V^+) \leq \frac{1}{2}\nu(V)$ . Consideremos la función

$$g = f_+ = \begin{cases} f, & f \geq 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

Observemos que  $g \not\equiv 0$  porque si no  $f^+ \equiv 0$  y como  $(f, 1) = 0$  se ha de tener que  $f_- \equiv 0$  pero  $f \not\equiv 0$ . Aplicando la fórmula de Green se tiene

$$(\mathcal{L}f, g) = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} \nabla f(x, y) \nabla g(x, y),$$

y, usando que  $\mathcal{L}f = \lambda_1 f$ , tenemos

$$\lambda_1 \sum_{x \in V} f(x)g(x)d_x = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} \nabla f(x, y) \nabla g(x, y).$$

Del hecho de que  $fg = g^2$ , podemos deducir

$$\nabla f(x, y) \nabla g(x, y) = (f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) \geq (g(y) - g(x))^2 = |\nabla g(x, y)|^2.$$

Gracias a eso, podemos ver que

$$\lambda_1 \geq \frac{\sum_{x \sim y} |\nabla g(x, y)|^2 \omega_{xy}}{\sum_{x \in V} g^2(x) d_x}.$$

Por tanto, para probar (2.12) basta probar que

$$\sum_{x \sim y} |\nabla g(x, y)|^2 \omega_{xy} \geq \frac{h^2}{2} \sum_{x \in V} g^2(x) d_x.$$

Como

$$\nu(\{x \in V : g(x) > 0\}) \leq \nu(V^+) \leq \frac{1}{2}\nu(V),$$

podemos aplicar el Lema 2.1.10 a la función  $g^2$  obteniéndose así

$$\sum_{x \sim y} |\nabla g^2(x, y)| \omega_{xy} \geq h \sum_{x \in V} g^2(x) d_x. \quad (2.13)$$

Vamos a estimar el lado izquierdo de esta última desigualdad.

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \sim y} |\nabla g^2(x, y)| \omega_{xy} &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} |g^2(x) - g^2(y)| \omega_{xy} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} |g(x) - g(y)| \omega_{xy}^{1/2} |g(x) + g(y)| \omega_{xy}^{1/2} \\
 &\leq \left( \frac{1}{2} \left( \sum_{x, y \in V} (g(x) - g(y))^2 \omega_{xy} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{1}{2} \left( \sum_{x, y \in V} (g(x) + g(y))^2 \omega_{xy} \right) \right)^{1/2},
 \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Ahora, usando que  $\frac{1}{2}(a+b)^2 \leq a^2 + b^2$  obtenemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \sim y} |\nabla g^2(x, y)| \omega_{xy} &\leq \left( \sum_{x \sim y} |\nabla g(x, y)|^2 \omega_{xy} \sum_{x, y \in V} (g^2(x) + g^2(y)) \omega_{xy} \right)^{1/2} \\
 &= \left( 2 \sum_{x \sim y} |\nabla g(x, y)|^2 \omega_{xy} \sum_{x, y \in V} g^2(x) \omega_{xy} \right)^{1/2} \\
 &= \left( 2 \sum_{x \sim y} |\nabla g(x, y)|^2 \omega_{xy} \sum_{x \in V} g^2(x) d_x \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Esto, junto a (2.13) nos da

$$h \sum_{x \in V} g^2(x) d_x \leq \left( 2 \sum_{x \sim y} |\nabla g(x, y)|^2 \omega_{xy} \right)^{1/2} \left( \sum_{x \in V} g^2(x) d_x \right)^{1/2}.$$

Elevando ambos términos al cuadrado y dividiendo por  $\sum_{x \in V} g^2(x) d_x$  obtenemos lo que queríamos, lo que concluye la prueba.  $\square$

## 2.2. El problema de Dirichlet para grafos infinitos

Ya tenemos un resultado de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación  $\mathcal{L}u = f$  y hemos estudiado la desigualdad de Cheeger en grafos finitos, veamos ahora cómo extenderlo a grafos infinitos.

En esta sección,  $(V, \omega)$  será siempre un grafo (finito o infinito) con pesos, conexo y localmente finito con  $|V| > 1$ .

**Definición 2.2.1.** Dado un subconjunto finito  $\Omega \subset V$ , denotamos por  $\mathcal{F}_\Omega$  el espacio de las funciones de  $V$  en  $\mathbb{R}$  tales que  $f|_{\Omega^c} \equiv 0$ . Este espacio es un espacio vectorial de dimensión  $N = |\Omega|$ . Definimos el operador  $\mathcal{L}_\Omega$  en  $\mathcal{F}_\Omega$  como sigue

$$\mathcal{L}_\Omega f = \begin{cases} \mathcal{L}f & \text{en } \Omega \\ 0 & \text{en } \Omega^c \end{cases}$$

de forma que  $\mathcal{L}_\Omega f \in \mathcal{F}_\Omega$  y  $\mathcal{L}_\Omega : \mathcal{F}_\Omega \rightarrow \mathcal{F}_\Omega$ . Al operador  $\mathcal{L}_\Omega$  lo llamaremos el operador de Dirichlet en  $\Omega$

Hemos de observar que si  $\Omega$  es un subconjunto de un grafo finito, entonces el operador Laplaciano definido positivo en  $\Omega$  como grafo en sí mismo y el operador de Dirichlet en  $\Omega$  como subconjunto de un grafo mayor no tienen por qué ser iguales ni por qué tener el mismo espectro.

De forma análoga al caso de grafos finitos, podemos definir el producto escalar de dos funciones  $f$  y  $g$  en  $\mathcal{F}_\Omega$  de la siguiente forma:

$$(f, g) = \sum_{x \in \Omega} f(x)g(x)d_x.$$

**Lema 2.2.2** (Fórmula de Green). Para dos funciones  $f, g \in \mathcal{F}_\Omega$  cualesquiera, se tiene

$$(\mathcal{L}_\Omega f, g) = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Omega_1} \nabla f(x, y) \nabla g(x, y) \omega_{xy}, \quad (2.14)$$

donde  $\Omega_1 = U_1(\Omega)$  (véase Definición 1.0.6).

**Demostración:**

Aplicando (2.5) en  $\Omega_1$  y usando que  $g = 0$  fuera de  $\Omega$ , tenemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\Omega f, g) &= \sum_{x \in \Omega_1} \mathcal{L}_\Omega f(x)g(x)d_x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Omega_1} \nabla f(x, y) \nabla g(x, y) \omega_{xy} - \sum_{x \in \Omega_1, y \in \Omega_1^c} \nabla f(x, y)g(x)\omega_{xy} \quad (2.15) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Omega_1} \nabla f(x, y) \nabla g(x, y) \omega_{xy}. \end{aligned}$$

Donde hemos usado que la última suma de (2.15) se anula dado que si  $\omega_{xy} \neq 0$ , entonces  $x \sim y$ , como  $y \in \Omega_1^c$ , se debe tener que  $x \in \Omega^c$  y por tanto  $g(x) = 0$ .  $\square$

Dado que el lado derecho de (2.14) es simétrico, tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 2.2.3.**  $\mathcal{L}_\Omega$  es un operador simétrico en  $\mathcal{F}_\Omega$ .

Por tanto, los autovalores de  $\mathcal{L}_\Omega$  son reales y podemos escribirlos en orden creciente de la siguiente forma:

$$\lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \dots \leq \lambda_N(\Omega).$$

Como  $\mathcal{L}_\Omega$  es simétrico, podemos caracterizar  $\lambda_1(\Omega)$  como el ínfimo en  $\mathcal{F}_\Omega \setminus \{0\}$  del cociente de Rayleigh  $R(f)$ , donde

$$R(f) = \frac{(\mathcal{L}_\Omega f, f)}{(f, f)} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Omega_1} (\nabla f(x, y))^2 \omega_{xy}}{\sum_{x \in \Omega} f^2(x) d_x}.$$

Hemos de observar que podríamos poner en los índices de los sumatorios que los vértices estén en  $V$  en vez de en  $\Omega_1$ , ya que fuera de este conjunto la función  $f$  se anula o se tiene que  $\omega_{xy} = 0$ .

**Teorema 2.2.4.** *Sea  $\Omega$  un subconjunto finito no vacío de  $V$  con complementario  $\Omega^c$  no vacío. Entonces se cumple*

(a)  $0 < \lambda_1(\Omega) \leq 1$

(b)  $\lambda_1(\Omega) + \lambda_N(\omega) \leq 2$ , por tanto

$$\text{spec } \mathcal{L}_\Omega \subset [\lambda_1(\Omega), 2 - \lambda_1(\Omega)] \subset (0, 2).$$

(c)  $\lambda_1(\Omega)$  decrece si  $\Omega$  crece.

**Demostración:**

(a) Sea  $f$  la autofunción de  $\lambda_1(\Omega)$ . Entonces se tiene

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{(\mathcal{L}_\Omega f, f)}{f, f} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Omega_1} |\nabla f(x, y)|^2 \omega_{xy}}{\sum_{x \in \Omega} f^2(x) d_x}, \quad (2.16)$$

que implica que  $\lambda_1(\Omega) \geq 0$ . Veamos que no puede ser 0. Por reducción al absurdo, supongamos que  $\lambda_1(\Omega) = 0$ , entonces se debe tener que  $\nabla f(x, y) = 0$  para todo  $x \sim y$  en  $\Omega_1$ , es decir, que  $f(x) = f(y)$  siempre que  $x, y \in \Omega_1$  y  $x \sim y$ . Como  $\Omega^c$  es no vacío, existe un  $z \in \Omega^c$  y, por la conexión del grafo, dado  $x \in \Omega$ , existe un camino  $\{x_k\}_{k=0}^n$  que une  $z$  y  $x$ . Sea  $k_0$  el mínimo índice tal que  $x_{k_0} \in \Omega^c$ , como  $x_{k_0} \sim x_{k_0-1} \in \Omega$ , tenemos que  $x_{k_0} \in \Omega_1$  y, por lo anterior,  $f(x) = f(x_1) = \dots = f(x_{k_0})$ , pero  $x_{k_0} \in \Omega^c$ , por lo que  $f(x) = f(x_{k_0}) = 0$ , es decir,  $f = 0$  en  $V$ , pero esto contradice la hipótesis de que  $f$  sea autofunción. Esto prueba que  $\lambda_1(\Omega) > 0$ .

Veamos ahora que  $\lambda_1(\Omega) \leq 1$ , para ello vamos a usar la traza de  $\mathcal{L}_\Omega$ . Por un lado,

$$\text{Tr } \mathcal{L}_\Omega = \lambda_1(\Omega) + \dots + \lambda_N(\Omega) \geq N \lambda_1(\Omega). \quad (2.17)$$

Por otro lado, podemos observar que  $\mathcal{L}_\Omega \chi_x = \chi_x$  para todo  $x \in \Omega$ , por lo que en la base  $\{\chi_x\}_{x \in \Omega}$  de  $\mathcal{F}_\Omega$ , la matriz del operador es la matriz identidad, y por tanto  $\text{Tr } \mathcal{L}_\Omega = N$ . Igualando el lado izquierdo de (2.17) a  $N$ , vemos que efectivamente  $\lambda_1(\Omega) \leq 1$ .

(b) Sea  $f$  una autofunción con autovalor  $\lambda_N(\Omega)$ . de forma similar a (2.16), tenemos

$$\lambda_N(\Omega) = R(f) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Omega_1} |\nabla f(x, y)|^2 \omega_{xy}}{\sum_{x \in \Omega} f^2(x) d_x}.$$

Por la propiedad de ser ínfimo del cociente de Rayleigh de  $\lambda_1(\Omega)$ , tenemos

$$\lambda_1(\Omega) \leq R(|f|) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} (\nabla |f|(x,y))^2 \omega_{xy}}{\sum_{x \in V} f^2(x) d_x}.$$

Por otro lado observamos que

$$(\nabla f(x,y))^2 + (\nabla |f|(x,y))^2 \leq 2(f^2(x) + f^2(y)),$$

por lo que

$$\begin{aligned} \lambda_1(\Omega) + \lambda_N(\Omega) &\leq \frac{\sum_{x,y \in V} (f^2(x) + f^2(y)) \omega_{xy}}{\sum_{x \in \Omega} f^2(x) d_x} \\ &= \frac{2 \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} f^2(x) \omega_{xy}}{\sum_{x \in V} f^2(x) d_x} = \frac{2 \sum_{x \in V} f^2(x) d_x}{\sum_{x \in V} f^2(x) d_x} = 2. \end{aligned}$$

(c) Si  $\Omega \subset \Omega'$  entonces  $\mathcal{F}_\Omega \subset \mathcal{F}_{\Omega'}$  y

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{f \in \mathcal{F}_\Omega} \geq \inf_{f \in \mathcal{F}_{\Omega'}} = \lambda_1(\Omega').$$

□

Gracias al Teorema 2.2.4 podemos demostrar un resultado de existencia y unicidad de un problema de Dirichlet sin restricción en las condiciones de contorno.

**Teorema 2.2.5.** *Sea  $\Omega$  un subconjunto finito de  $V$  con complementario  $\Omega^c$  no vacío. Consideramos el siguiente problema de Dirichlet:*

$$\begin{cases} \Delta_G u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \Omega^c, \end{cases} \quad (2.18)$$

donde  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  es una función desconocida mientras que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \Omega^c \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones dadas. Entonces (2.18) tiene una única solución  $u$ .

**Demostración:**

Vamos a extender  $g$  arbitrariamente a  $\Omega$ . Sea  $v = u - g$  y reescribimos (2.18):

$$\begin{cases} \Delta_G v = h & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \Omega^c, \end{cases} \quad (2.19)$$

donde  $h = f - \Delta_G g$ . Equivalentemente, (2.19) significa que

$$v \in \mathcal{F}_\Omega \text{ y } \mathcal{L}_\Omega v = -h \text{ en } \Omega. \quad (2.20)$$

Por el Teorema 2.2.4, el espectro de  $\mathcal{L}_\Omega$  no contiene al 0 y por tanto es invertible en  $\mathcal{F}_\Omega$ , lo que nos da una solución única de (2.20) y en consecuencia de (2.19) y de (2.18). □

De hecho, en el caso de  $f = 0$ , podemos dar una caracterización variacional de la solución de (2.18) en términos de lo que llamaremos la *energía de Dirichlet*, que se define como

$$D(u) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Omega_1} (\nabla u(x,y))^2 \omega_{xy} \text{ donde } \Omega_1 = U_1(\Omega).$$

**Teorema 2.2.6** (El principio de Dirichlet). *Si  $u \in \mathcal{F}$  es la solución del problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \Omega^c, \end{cases} \quad (2.21)$$

entonces  $D(u) \leq D(v)$  para toda función  $v \in \mathcal{F}$  tal que  $v = g$  en  $\Omega^c$ .

**Demostración:**

Sea  $w = u - v$ , de forma que  $w = 0$  en  $\Omega^c$ . Se puede comprobar fácilmente que

$$D(v) = D(u + w) = D(u) + \sum_{x,y \in \Omega_1} \nabla u(x,y) \nabla w(x,y) \omega_{xy} + D(w).$$

Como  $w = 0$  en  $\Omega^c$  y  $\mathcal{L}u = 0$  en  $\Omega$ , por (2.14) tenemos

$$\frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Omega_1} \nabla u(x,y) \nabla w(x,y) \omega_{xy} = \sum_{x \in \Omega_1} \mathcal{L}u(x) w(x) d_x = 0,$$

por lo que  $D(v) = D(u) + D(w) \geq D(u)$ . □

### 2.2.1. La desigualdad de Cheeger en grafos infinitos

Como en el caso finito, definimos el perímetro de un subconjunto  $\Omega$  de  $V$  como

$$P(\Omega) = \sum_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \Omega^c}} \omega_{xy}.$$

**Definición 2.2.7.** *Para cualquier subconjunto finito  $\Omega \subset V$  definimos su constante de Cheeger como*

$$h(\Omega) = \inf_{U \subset \Omega} \frac{P(U)}{\nu(U)}, \quad (2.22)$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los subconjuntos  $U$  no vacíos de  $\Omega$ .

Es decir,  $h(\Omega)$  es la constante más grande tal que

$$P(U) \geq h(\Omega) \nu(U), \quad (2.23)$$

para todo  $U$  subconjunto no vacío de  $\Omega$ . Como en el caso finito, se tiene una desigualdad como la del Teorema 2.1.11 que también se conoce como la *desigualdad de Cheeger*. En particular, se tiene:



**Teorema 2.2.8.**

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{1}{2}h(\Omega)^2. \quad (2.24)$$

La prueba es similar al caso de grafos finitos. Para probar el Teorema necesitamos el siguiente Lema:

**Lema 2.2.9.** *Para toda función no negativa  $f \in \mathcal{F}_\Omega$  se tiene*

$$\sum_{x \sim y} |\nabla f(x, y)| \omega_{xy} \geq h(\Omega) \sum_{x \in V} f(x) d_x. \quad (2.25)$$

**Demostración:**

Por la fórmula de co-área, (2.10), se tiene

$$\sum_{x \sim y} |\nabla f(x, y)| \omega_{xy} \geq \int_0^\infty P(U_t) dt,$$

donde  $U_t = \{x \in V : f(x) > t\}$ . Como  $U_t \subset \Omega$  para  $t$  no negativo, por (2.23) se tiene

$$P(U_t) \geq h(\Omega) \nu(U_t)$$

y, por tanto,

$$\sum_{x \sim y} |\nabla f(x, y)| \omega_{xy} \geq h(\Omega) \int_0^\infty \nu(U_t) dt.$$

Por otro lado, como en la prueba del Lema 2.1.10 tenemos

$$\int_0^\infty \nu(U_t) dt = \sum_{x \in V} f(x) d_x,$$

de lo que se sigue (2.25). □

**Demostración:**

[Demostración del Teorema 2.2.8]

Sea  $f$  la autofunción de  $\lambda_1(\Omega)$ . Considerando el cociente de Rayleigh tenemos

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\sum_{x \sim y} |\nabla f(x, y)|^2 \omega_{xy}}{\sum_{x \in V} f^2(x) d_x}.$$

Por tanto, para probar (2.24) basta probar

$$\sum_{x \sim y} |\nabla f(x, y)|^2 \omega_{xy} \geq \frac{h(\Omega)^2}{2} \sum_{x \in V} f^2(x) d_x. \quad (2.26)$$

Aplicando (2.25) a la función  $f^2$  obtenemos

$$\sum_{x \sim y} |\nabla f^2(x, y)| \omega_{xy} \geq h(\Omega) \sum_{x \in V} f^2(x) d_x. \quad (2.27)$$

Haciendo los mismos cálculos que en la prueba del Teorema 2.1.11 podemos obtener

$$\sum_{x \sim y} |\nabla f^2(x, y)| \omega_{xy} \leq \left( 2 \sum_{x \sim y} |\nabla f(x, y)|^2 \omega_{xy} \sum_{x \in V} f^2(x) d_x \right)^{1/2}.$$

Combinando esto último con (2.27) tenemos

$$h(\Omega) \sum_{x \in V} f^2(x) d_x \leq \left( 2 \sum_{x \sim y} |\nabla f(x, y)|^2 \omega_{xy} \right)^{1/2} \left( \sum_{x \in V} f^2(x) d_x \right)^{1/2}.$$

Elevando al cuadrado y dividiendo por  $\sum_{x \in V} f^2(x) d_x$  obtenemos (2.26) como queríamos, lo que concluye la prueba.  $\square$

## Capítulo 3

# La ecuación del calor en grafos con pesos

En este capítulo, nuestro objetivo va a ser estudiar el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t) = \Delta_G u(t) & \text{para } t \in (0, +\infty), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $u_0$  será una función real de  $V$ .

Vamos a definir ahora un funcional cuya subdiferencial (véase A.2.12) va a resultar ser  $\Delta_G$ . Gracias a esto, veremos que vamos a tener resultados de existencia y unicidad de cierto tipo de soluciones de (3.1) conocidas como soluciones fuertes (véase A.1.2).

**Definición 3.0.1.** *Definimos el funcional de energía  $\mathcal{H}_G : L^2(V, \nu) \rightarrow [0, +\infty]$  como*

$$\mathcal{H}_G(f) = \begin{cases} \frac{1}{4} \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} (f(x) - f(y))^2 \omega_{xy} & \text{si } f \in L^2(V, \nu) \cap L^1(V, \nu); \\ +\infty & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Por la fórmula de Green (2.5) se tiene que si  $H_G(f) < +\infty$ , entonces

$$H_G(f) = -\frac{1}{2} \sum_{x \in V} f(x) \Delta_G f(x) d_x = \frac{1}{2} (\mathcal{L}f, f).$$

Por otro lado, podemos expresar  $H_G$  como una doble integral de la siguiente forma:

$$H(f) = \frac{1}{4} \int_{V \times V} (f(x) - f(y))^2 dm_x(y) d\nu(x) \text{ si } f \in L^2(V, \nu) \cap L^1(V, \nu). \quad (3.3)$$

**Teorema 3.0.2.**  *$\mathcal{H}_G$  es propio, convexo y semicontinuo inferiormente en  $L^2(V, \nu)^1$ . Además,*

$$\partial H_G = \mathcal{L},$$

---

<sup>1</sup>Ver el apéndice A

en el sentido de que si  $f \in \partial H_G(g)$  entonces  $g = \mathcal{L}f$ .

**Demostración:**

Por un lado, se tiene que  $D(H_G) = L^2(V, \nu) \cap L^1(V, \nu)$  (ver A.2.11), por lo que  $H_G$  es propio. Veamos que es convexo. Sean  $(f, r)$  y  $(g, s)$  elementos de  $Epi(H_G)$  (véase A.2.11) y sea  $t \in [0, 1]$ , entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} H_G(tf + (1-t)g) &= \frac{1}{4} \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} (tf(x) + (1-t)g(x) - tf(y) - (1-t)g(y))^2 \\ &\leq t^2 H_G(f) + (1-t)^2 H_G(g) \leq t H_G(f) + (1-t) H_G(g) \\ &\leq tr + (1-t)s, \end{aligned}$$

luego  $t(f, r) + (1-t)(g, s) \in Epi(H_G)$ , por lo que  $Epi(H_G)$  es convexo y por tanto  $H_G$  también lo es.

Para ver que es semicontinua inferiormente en todo  $L^2(V, \nu)$ , tomamos  $f \in L^2(V, \nu)$  y consideramos una sucesión  $(f_n) \subset L^2(V, \nu)$  tal que  $f_n \rightarrow f$  en  $L^2(V, \nu)$ . Para ver que  $H_G$  es semicontinua inferiormente en  $f$ , hay que ver que  $\liminf H_G(f_n) \geq H_G(f)$ .

Como  $f_n \rightarrow f$ , se tiene que  $(f_n(x) - f_n(y))^2 \rightarrow (f(x) - f(y))^2$  en casi todo punto  $(x, y)$  de  $V \times V$ . Por tanto, por el Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} 4H_G(f) &= \int_{V \times V} (f(x) - f(y))^2 dm_x(y) d\nu(x) \\ &\leq \liminf \int_{V \times V} (f_n(x) - f_n(y))^2 dm_x(y) d\nu(x) \\ &= 4 \liminf H_G(f_n), \end{aligned}$$

de lo que se sigue que  $H_G$  es semicontinua inferiormente en  $f$  y, como esta era arbitraria, obtenemos que  $H_G$  es semicontinua inferiormente en todo  $L^2(V, \nu)$ .

Solo nos falta probar que  $\partial H_G = \mathcal{L}$ . Sean  $f, g \in L^2(V, \nu) \cap L^1(V, \nu)$  tales que  $f \in \partial H_G(g)$ . Entonces

$$H_G(h) - H_G(g) \geq (f, h - g) \forall h \in L^2(V, \nu) \cap L^1(V, \nu).$$

Dada  $h \in L^2(V, \nu) \cap L^1(V, \nu)$  y  $\lambda > 0$ , se tiene

$$H_G(g + \lambda h) - H_G(g) \geq \lambda(f, h),$$

luego

$$\begin{aligned} (f, h) &\leq \frac{1}{\lambda} (H_G(g + \lambda h) - H_G(g)) \\ &= \frac{1}{2\lambda} ((\mathcal{L}(g + \lambda h), g + \lambda h) - (\mathcal{L}g, g)) = \frac{1}{2\lambda} ((\mathcal{L}g, \lambda h) + (\mathcal{L}(\lambda h), g)) \\ &= (\mathcal{L}g, h). \end{aligned}$$

Tomando  $\lambda < 0$ , la desigualdad anterior se invierte y haciendo los mismos cálculos llegaríamos a que  $(f, h) \geq (\mathcal{L}g, h)$ , por lo que concluimos que

$$(f, h) = (\mathcal{L}g, h) \forall h \in L^2(V, \nu) \cap L^1(V, \nu),$$

por lo que  $f = \mathcal{L}g$ . Veamos el recíproco, es decir, veamos que  $\mathcal{L}f \in \partial H_G(f)$  para  $f \in L^2(V, \nu) \cap L^1(V, \nu)$ . Sea  $h \in L^2(V, \nu) \cap L^1(V, \nu)$ .

$$\begin{aligned} H_G(h) - H_G(f) \geq (\mathcal{L}f, h - f) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\mathcal{L}h, h) - \frac{1}{2}(\mathcal{L}f, f) \geq (\mathcal{L}f, h) - (\mathcal{L}f, f) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\mathcal{L}h, h) + (\mathcal{L}f, f) \geq 2(\mathcal{L}f, h). \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Young,

$$\begin{aligned} 2(\mathcal{L}f, h) &= \sum_{x, y \in V} \sum \nabla f(x, y) \nabla h(x, y) \omega_{xy} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} (\nabla h(x, y))^2 \omega_{xy} + \frac{1}{2} (\nabla f(x, y))^2 \omega_{xy} = (\mathcal{L}h, h) + (\mathcal{L}f, f), \end{aligned}$$

que era lo que queríamos probar, por lo que  $\mathcal{L}f \in \partial H_G f$  para todo  $f \in L^2(V, \nu) \cap L^1(V, \nu)$ . Por tanto,  $\partial H_G = \mathcal{L}$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

Gracias al Teorema 3.0.2 y al Teorema A.2.15, el Teorema de Lumer-Phillips A.2.14 y la teoría desarrollada en [13] y [3] tenemos el siguiente resultado de existencia y unicidad de soluciones fuertes:

**Teorema 3.0.3.**  $\Delta_G$  genera un  $C_0$ -semigrupo<sup>2</sup>  $(T_t^G)_{t \geq 0}$  en  $L^2(V, \nu)$ , dado por la fórmula exponencial de Hille-Yoshida:

$$T_t^G u_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( I - \frac{t}{n} \Delta_G \right)^{-1} \right]^n u_0, \forall u_0 \in L^2(V, \nu).$$

Además, para toda  $u_0 \in L^2(V, \nu)$ ,  $u(t) = T_t^G u_0$  es la única solución fuerte<sup>3</sup> de la ecuación del calor

$$\begin{cases} u'(t) = \Delta_G u(t) & \text{para todo } t \in (0, +\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

**Definición 3.0.4.** Denotaremos por  $e^{-t\Delta_G}$  a  $T_t^G$  y diremos que  $\{e^{t\Delta_G} : t \geq 0\}$  es el flujo de calor del grafo  $G$ .

Si bien hemos visto que  $\Delta_G$  genera un  $C_0$ -semigrupo en  $L^2(V, \nu)$ , este se puede extender a todo  $L^1(V, \nu)$ . En particular, si definimos en  $L^1(V, \nu)$  el operador  $A$  como  $Au = v \Leftrightarrow v(x) = -\Delta_G u(x)$  para cada  $x \in V$ , entonces  $A$  genera un  $C_0$ -semigrupo  $(S(t))_{t \geq 0}$  en  $L^1(V, \nu)$  (ver [4] y [12]) tal que  $S(t)f = e^{t\Delta_G} f$  para toda  $f \in L^2(V, \nu) \cap L^1(V, \nu)$ . En particular, si tenemos que  $\nu(V) < \infty$ , entonces  $S(t)$  es una extensión a  $L^1(V, \nu)$  del flujo de calor  $e^{t\Delta_G}$  en  $L^2(V, \nu)$ , la cual denotaremos igual.

<sup>2</sup>Véase A.2.4

<sup>3</sup>Véase A.1.2

**Proposición 3.0.5.** Si  $\nu(V) < +\infty$ , entonces el flujo de calor conserva la masa, es decir,

$$\sum_{x \in V} d_x e^{-t\Delta_G} u_0(x) = \sum_{x \in V} d_x u_0(x) \quad \forall u_0 \in L^2(V, \nu), \forall t \geq 0$$

**Demostración:**

Sea  $u_0 \in L^2(V, \nu)$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{x \in V} d_x e^{-t\Delta_G} u_0(x) &= \sum_{x \in V} d_x \frac{d}{dt} e^{-t\Delta_G} u_0(x) \\ &= \sum_{x \in V} d_x \Delta_G u_0(x) = -(\mathcal{L}u_0, 1) \\ &= (u_0, \mathcal{L}1) = 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\mathcal{L}$  es simétrico y que  $\mathcal{L}1 = 0$ . Por tanto,  $\sum_{x \in V} d_x e^{t\Delta_G} u_0(x)$  es constante para todo  $t \geq 0$ , en particular,

$$\sum_{x \in V} d_x e^{t\Delta_G} u_0(x) = e^{0\Delta_G} u_0(x) = \sum_{x \in V} d_x u_0(x),$$

como queríamos probar.  $\square$

Si bien sabemos que la ecuación del calor tiene una única solución fuerte, nos gustaría obtener una expresión analítica de esta solución, es decir, queremos hallar una expresión explícita de  $e^{-t\Delta_G} u_0$  para  $u_0 \in L^1(V, \nu) \cap L^2(V, \nu)$ . Para ello, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 3.0.6.** Sea  $u_0 \in L^1(V, \nu) \cap L^2(V, \nu)$ , entonces:

$$e^{-t\Delta_G} u_0(x) = e^{-t} \left( u_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{C_n} u_0(y) W_{C_n} \frac{t^n}{n!} \right) = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{C_n} u_0(y) W_{C_n} \frac{t^n}{n!}, \quad (3.5)$$

donde el sumatorio para cada  $n \in \mathbb{N}$  es sobre el conjunto de todos los caminos  $C_n = \{x_k\}_{k=0}^n$  de longitud  $n$  en el grafo que unen  $x$  e  $y$ , donde  $y$  es algún vértice del grafo, y donde  $W_{C_n} = \omega_{xx_1} \omega_{x_1 x_2} \cdots \omega_{x_{n-1} y}$ .

Antes de demostrar el Teorema vamos a hacer algunas observaciones. En primer lugar, si definimos la medida  $m_x^{*n}(y)$  de forma inductiva como

$$m_x^{*n} = m_x^{*(n-1)} * m_x,$$

donde  $m_x^{*1} = m_x$  y  $m_x^{*0} = \delta$ , entonces se tiene que el sumatorio sobre los  $C_n$  que aparece en (3.5) es precisamente

$$\sum_{C_n} u_0(y) W_{C_n} = \int_V u_0(y) dm_x^{*n}(y).$$

Por otro lado, es fácil ver que si  $u_0 \in L^1(V, \nu)$ , entonces  $u_0 \in L^1(V, m_x^{*n})$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Teniendo en cuenta estas observaciones, ya podemos demostrar el Teorema 3.0.6.

**Demostración:**

Definimos

$$u(x, t) = e^{-t} \left( u_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{C_n} u_0(y) W_{C_n} \frac{t^n}{n!} \right).$$

Fijemos  $t \geq 0$ . Sea

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^k \left| \sum_{C_n} u_0(y) W_{C_n} \right| \frac{t^n}{n!},$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V} d_x f_k(x) &= \sum_{n=0}^k \sum_{x \in V} d_x \left| \sum_{C_n} u_0(y) W_{C_n} \right| \frac{t^n}{n!} \\ &\leq \sum_{n=0}^k \sum_{x \in V} \sum_{C_n} d_x |u_0(y)| W_{C_n} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^k \sum_{x \in V} d_x |u_0(x)| \frac{t^n}{n!} \\ &\leq e^t \|u_0\|_{L^1(V, \nu)}, \end{aligned}$$

por lo que  $0 \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) < \infty$  y  $\sum_{x \in V} d_x f_k(x) \leq e^t \|u_0\|_{L^1(V, \nu)}$ , por lo que por el Teorema de Convergencia Monótona:

$$\sum_{x \in V} d_x \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{C_n} u_0(y) W_{C_n} \right| \frac{t^n}{n!} \leq e^t \|u_0\|_{L^1(V, \nu)},$$

por lo que la función

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{C_n} u_0(y) W_{C_n} \right| \frac{t^n}{n!}$$

está en  $L^1(V, \nu)$  y, por tanto, es finita en todos los vértices. Esto también es cierto para la función

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{C_n} |u_0(y)| W_{C_n} \frac{t^n}{n!},$$

con lo que llegamos a que  $u(x, t)$  está bien definida y a que la serie converge uniformemente en los compactos de  $[0, +\infty)$ . Por tanto,

$$\frac{du}{dt}(x, t) = -u(x, t) + e^{-t} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{C_n} u_0(y) W_{C_n} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

por lo que, para probar (3.5) basta ver lo siguiente:

$$e^{-t} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{C_n} u_0(y) W_{C_n} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{d_x} \sum_{z \sim x} u(z, t) \omega_{xy}.$$

Para ver esto, veamos primero la siguiente propiedad:

$$\sum_{C_n} u_0(y) W_{C_n} = \frac{1}{d_x} \left( \sum_{C'_{n-1}} u_0(y) W_{C'_{n-1}} \right) \omega_{xz} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde los  $C'_{n-1}$  son los caminos de longitud  $n-1$  que unen  $z$  con  $y$ , para cada  $z \sim x$ :

$$\begin{aligned} \sum_{C_n} u_0(y) W_{C_n} &= \frac{1}{d_x} \sum_{x_1 \sim x} \frac{1}{d_{x_1}} \omega_{xx_1} \sum_{x_2 \sim x_1} \cdots \frac{1}{d_{x_{n-1}}} \sum_{y \sim x_{n-1}} u_0(y) \omega_{x_{n-1}y} \\ &= \frac{1}{d_x} \left( \sum_{x_1 \sim x} \frac{1}{d_{x_1}} \omega_{xx_1} \cdots \frac{1}{d_{x_{n-1}}} \sum_{y \sim x_{n-1}} u_0(y) \omega_{x_{n-1}y} \right) \\ &= \frac{1}{d_x} \left( \sum_{C'_{n-1}} u_0(y) W_{C'_{n-1}} \right) \omega_{xz}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} e^{-t} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{C_n} u_0(y) W_{C_n} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} &= e^{-t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_x} \sum_{z \in V} \left( \sum_{C'_{n-1}} u_0(y) W_{C'_{n-1}} \right) \omega_{xz} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{d_x} \left( e^{-t} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{C'_{n-1}} u_0(y) W_{C'_{n-1}} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right) \omega_{xz} \\ &= \frac{1}{d_x} \sum_{z \sim x} u(z, t), \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el Teorema de Convergencia Dominada para intercambiar el sumatorio y la integral dado que

$$\left| e^{-t} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{C'_{n-1}} u_0(y) W_{C'_{n-1}} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right| \leq e^{-t} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{C'_{n-1}} |u_0(y)| W_{C'_{n-1}} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} =: F(z),$$

y ya hemos visto que  $F \in L^1(V, \nu)$  y por tanto  $F \in L^1(V, m_x)$  para todo  $x \in V$ .

□



### 3.1. Comportamiento asintótico de la ecuación del calor

Dada la solución fuerte de la ecuación del calor (3.1), cuya fórmula, como hemos visto, viene dada por (3.5), nos interesa saber cómo se va a comportar cuando  $t$  tienda a infinito. Veremos que en  $L^2(V, \nu)$  el flujo de calor siempre tiende a una constante, pero nos interesa ver a qué velocidad va a tender a esa constante. El objetivo de esta sección es mostrar que si nuestro grafo  $(V, \omega)$  satisface un cierto tipo de desigualdad conocido como *Desigualdad de Poincaré* entonces se tendrá que este decaimiento está controlado por una gaussiana.

En esta sección vamos a asumir que  $\nu(V) = 1$  (podríamos trabajar también con  $\nu(V) < +\infty$  y considerando la medida  $\frac{1}{\nu(V)}\nu$ ). Dada  $f \in L^1(V, \nu)$ , denotaremos la *media* de  $f$  (o el valor esperado de  $f$ ) como

$$\nu(f) = \sum_{x \in V} f(x) d_x = \int_V f(x) d\nu(x).$$

Además, dada  $f \in L^2(V, \nu)$ , denotamos su varianza con respecto de  $\nu$  como

$$Var_\nu(f) = \sum_{x \in V} (f(x) - \nu(f))^2 d_x = \int_V (f(x) - \nu(f))^2 d\nu(x) = \frac{1}{2} \int_{V \times V} (f(x) - f(y))^2 d\nu(y) d\nu(x).$$

**Definición 3.1.1.** *Decimos que  $(V, \omega)$  satisface una desigualdad de Poincaré si existe  $\lambda > 0$  tal que*

$$\lambda Var_\nu(f) \leq H_G(f) \text{ para toda } f \in L^2(V, \nu),$$

*o, equivalentemente,*

$$\lambda \|f\|_{L^2(V, \nu)}^2 \leq H_G(f) \text{ para toda } f \in L^2(V, \nu) \text{ con } \nu(f) = 0.$$

**Definición 3.1.2.** *Definimos el hueco espectral de  $\mathcal{L}$  como*

$$\begin{aligned} gap(\mathcal{L}) &= \inf \left\{ \frac{H_G(f)}{Var_\nu(f)} : f \in L^2(V, \nu), Var_\nu(f) \neq 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{H_G(f)}{\|f\|_{L^2(V, \nu)}^2} : f \in L^2(V, \nu), \|f\|_{L^2(V, \nu)} \neq 0, \sum_{x \in V} f(x) d_x = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

El hueco espectral se puede definir también cuando  $\nu(V) \neq 1$ , en cuyo caso, en vez de funciones en  $L^2(V, \nu)$ , se considerarían funciones en el dominio de  $H_G$ , es decir, las funciones  $f \in L^2(V, \nu) \cap L^1(V, \nu)$ .

Observemos que si  $gap(\mathcal{L}) > 0$ , entonces  $(V, \omega)$  satisface una desigualdad de Poincaré con  $\lambda = gap(\mathcal{L})$ .

**Teorema 3.1.3.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $(V, \omega)$  satisface una desigualdad de Poincaré para un cierto  $\lambda > 0$ .
2. Para toda  $f \in L^2(V, \nu)$

$$\|e^{-t\Delta_G} f - \nu(f)\|_{L^2(V, \nu)} \leq e^{-2\lambda t} \|f - \nu(f)\|_{L^2(V, \nu)} \text{ para todo } t \geq 0.$$

o, equivalentemente, para toda  $f \in L^2(V, \nu)$  con  $\nu(f) = 0$ ,

$$\|e^{-t\Delta_G} f\|_{L^2(V, \nu)} \leq e^{-2\lambda t} \|f\|_{L^2(V, \nu)} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Gracias a este Teorema, y por la observación anterior, si vemos que  $\text{gap}(\mathcal{L}) > 0$  entonces podremos afirmar que existe el límite en  $L^2(V, \nu)$  de  $e^{-t\Delta_G} f$ , sabremos también que es constante y tendremos una cota de la velocidad de convergencia a ese valor. Probemos primero el Teorema.

**Demostración:**

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Sea  $\lambda > 0$  tal que  $\lambda \text{Var}_\nu(f) \leq H_G(f)$  para toda  $f$  en  $L^2(V, \nu)$ . Dada  $f \in L^2(V, \nu)$ , si definimos  $u(t, x) = e^{-t\Delta_G} f(x)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t) - \nu(f)\|_{L^2(V, \nu)}^2 &= 2 \sum_{x \in V} d_x(u(t, x) - \nu(f)) \frac{\partial u(t, x)}{t} \\ &= 2 \sum_{x \in V} d_x(u(t, x) - \nu(f)) \Delta_G u(t, x) = -4H_G(u(t, x)) \\ &\leq -4\lambda \text{Var}_\nu(u(t, x)) = -4\lambda \|u(t, x) - \nu(f)\|_{L^2(V, \nu)}^2, \end{aligned}$$

de lo que obtenemos

$$\|u(t) - \nu(f)\|_{L^2(V, \nu)} \leq \|u(0) - \nu(f)\|_{L^2(V, \nu)} e^{-2\lambda t} \text{ para todo } t \geq 0.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Dada  $f \in L^2(V, \nu)$ , definimos  $w(t) = e^{-t\Delta_G} f - \nu(f)$ . Entonces, por hipótesis,

$$\|w(t)\|_{L^2(V, \nu)} \leq \|w(0)\|_{L^2(V, \nu)} e^{-2\lambda t} \text{ para todo } t \geq 0.$$

La expansión de Taylor de orden 1 de  $w$  en  $t = 0$  es

$$w(t) = w(0) + tw'(0) + o(t) = w(0) + t\Delta_G f + o(t).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{L^2(V, \nu)}^2 &= \sum_{x \in V} d_x w(t, x)^2 + \sum_{x \in V} d_x w(0, x)^2 + 2t \sum_{x \in V} d_x f \Delta_G f + o(t) \\ &= \|w(0)\|_{L^2(V, \nu)}^2 - 4tH_G(f) + o(t). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|w(0)\|_{L^2(V, \nu)}^2 (1 - e^{-4\lambda t}) \leq 4tH_G(f) + o(t).$$

Por último, tomando límites cuando  $t \downarrow 0$  conseguimos

$$\lambda Var_\nu(f) = \lambda \|w(0)\|_{L^2(V,\nu)}^2 \leq H_G(f).$$

□

Vamos a estudiar ahora cuándo  $gap(\mathcal{L}) > 0$ , ya que como hemos visto, esto nos permite afirmar que se cumple una desigualdad de Poincaré. Resulta que el hueco espectral es positivo si y solo si el espectro del operador  $\mathcal{L}$  en un cierto subespacio de  $L^2(V,\nu)$  no contiene al 0. En concreto, sea

$$H(V,\nu) = \{f \in L^2(V,\nu) : \nu(f) = 0\}$$

el subespacio de  $L^2(V,\nu)$  de las funciones ortogonales a las constantes. Vamos a considerar la restricción de  $\mathcal{L}$  a este subespacio:

$$\mathcal{L}_{H(V,\nu)} = \mathcal{L}|_{H(V,\nu)} : H(V,\nu) \rightarrow H(V,\nu),$$

que cumple que es autoadjunto y no negativo. Denotaremos por  $\sigma(\mathcal{L}_{H(V,\nu)})$  al espectro de  $\mathcal{L}_{H(V,\nu)}$ .

**Proposición 3.1.4.** *Si  $(V,\omega)$  es un grafo conexo localmente finito, entonces*

$$gap(\mathcal{L}) > 0 \Leftrightarrow 0 \notin \sigma(\mathcal{L}_{H(V,\nu)}).$$

*En particular, si  $0 \notin \sigma(\mathcal{L}_{H(V,\nu)})$  entonces  $(V,\omega)$  cumple una desigualdad de Poincaré con  $\lambda = gap(\mathcal{L})$ .*

**Demostración:**

La segunda parte de la proposición se cumple gracias a los comentarios anteriores.

Supongamos por reducción al absurdo que  $gap(\mathcal{L}) > 0$  y que  $0 \in \sigma(\mathcal{L}_{H(V,\nu)})$ . Entonces existe  $u \in H(V,\nu)$  no nula tal que  $\mathcal{L}u = 0$ , por lo que  $u$  ha de ser constante, supongamos  $u \equiv c$ . Por otro lado, como  $u \in H(V,\nu)$ , se tiene que  $0 = \nu(u) = \sum_{x \in V} d_x c = c \cdot \nu(V) = c$ , por lo que  $u = 0$ , pero habíamos supuesto que  $u$  era no nula, por lo que llegamos a una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que  $0 \notin \sigma(\mathcal{L}_{H(V,\nu)})$ . Como  $\mathcal{L}_{H(V,\nu)}$  es autoadjunto y no negativo, se tiene que

$$\sigma(\mathcal{L}_{H(V,\nu)}) \subset [\alpha, \beta],$$

con  $\alpha > 0$  y  $\alpha = \inf \{(\mathcal{L}u, u) : u \in H(V,\nu), \|u\|_{L^2(V,\nu)} = 1\}$ . Entonces, dada  $f \in L^2(V,\nu)$  con  $Var_\nu(f) \neq 0$  y  $\nu(f) = 0$ , se tiene

$$0 < \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{2} \frac{(\mathcal{L}f, f)}{(f, f)} = \frac{H_G(f)}{Var_\nu(f)}.$$

Como la función  $f$  que hemos cogido es arbitraria, al tomar ínfimos se ha de tener que  $gap(\mathcal{L}) > 0$ , como queríamos ver. □

Un concepto más general que la desigualdad de Poincaré es la  $(p, q)$ -desigualdad de Poincaré, donde  $p$  y  $q$  están en el intervalo  $[1, +\infty)$ , que veremos que todo grafo con pesos finito cumple y, por tanto, todo grafo con pesos finito cumplirá que el flujo de calor tiene límite en  $L^2(V,\nu)$ . La definición es la siguiente:

**Definición 3.1.5.** Decimos que  $(V, \omega)$  satisface una  $(p, q)$ -desigualdad de Poincaré, con  $p, q \in [1, +\infty)$  si existe una constante  $\Lambda > 0$  tal que para toda  $f \in L^q(V, \nu)$ :

$$\|f\|_{L^p(V, \nu)} \leq \Lambda \left( \left( \sum_{x, y \in V} |f(y) - f(x)|^q \cdot \omega_{xy} \right)^{\frac{1}{q}} + \left| \sum_{x \in V} d_x f(x) \right| \right),$$

o, equivalentemente, si existe una constante  $\Lambda > 0$  tal que

$$\|f\|_{L^p(V, \nu)} \leq \Lambda \|\nabla f\|_{L^q(V \times V, \nu \otimes m_x)} \text{ para toda } f \in L^q(V, \nu) \text{ con } \nu(f) = 0.$$

Por simplicidad de la notación, cuando  $(V, \omega)$  satisfaga una  $(p, 1)$ -desigualdad de Poincaré, diremos que  $(V, \omega)$  satisface una  $p$ -desigualdad de Poincaré.

Podemos observar que la desigualdad de Poincaré que habíamos considerado antes en 3.1.1 es simplemente una  $(p, q)$ -desigualdad de Poincaré con  $p = q = 2$ .

**Proposición 3.1.6.** Sea  $(V, \omega)$  un grafo con pesos finito. Entonces  $(V, \omega)$  satisface una  $(p, q)$ -desigualdad de Poincaré para todo  $p, q \in [1, +\infty)$ .

**Demostración:**

Supongamos que existen  $p, q \in [1, +\infty)$  tales que  $(V, \omega)$  no cumple una  $(p, q)$ -desigualdad de Poincaré. Entonces, existe una sucesión  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(V, \nu)$  con  $\|u_n\|_{L^p(V, \nu)} = 1 \forall n \in \mathbb{N}$  tal que  $\nu(u_n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x, y \in V} |u_n(y) - u_n(x)|^q \cdot \omega_{xy} = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(y) - u_n(x)| = 0 \forall x, y \in V \text{ con } x \sim y.$$

Como  $\|u_n\|_{L^p(V, \nu)} = 1$ , se tiene que, puede que al restringirnos a una subsucesión,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) \in \mathbb{R} \forall x \in V.$$

Como el grafo  $(V, \omega)$  es conexo y además  $|u(y) - u(x)| = \lim_n |u_n(y) - u_n(x)| = 0$  para todo  $x \sim y$ , se ha de tener que  $u$  es constante, es decir, que existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $u(x) = \lambda \forall x \in V$ . Por tanto, el límite en  $L^p(V, \nu)$  de  $u_n$  ha de ser  $\lambda$ .

Como  $\nu(u_n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se ha de tener que  $\lambda = 0$ , pero esto contradice la hipótesis de que  $\|u_n\|_{L^p(V, \nu)} = 1$ . Lo que demuestra que no pueden existir  $p, q \in [1, +\infty)$  tales que  $(V, \omega)$  no cumpla una  $(p, q)$ -desigualdad de Poincaré.  $\square$

Como habíamos anticipado, combinando el Teorema 3.1.3 con la Proposición 3.1.6 obtenemos el siguiente resultado sobre el comportamiento asintótico del flujo de calor en grafos finitos:

**Corolario 3.1.7.** *Dado  $(V, \omega)$  un grafo con pesos finito, existe una constante  $\lambda > 0$  tal que para toda  $f \in L^2(V, \nu)$*

$$\|e^{-t\Delta_G} f - \nu(f)\|_{L^2(V, \nu)} \leq e^{-2\lambda t} \|f - \nu(f)\|_{L^2(V, \nu)} \text{ para todo } t \geq 0.$$

*o, equivalentemente, para toda  $f \in L^2(V, \nu)$  con  $\nu(f) = 0$ ,*

$$\|e^{-t\Delta_G} f\|_{L^2(V, \nu)} \leq e^{-2\lambda t} \|f\|_{L^2(V, \nu)} \text{ para todo } t \geq 0.$$

## Capítulo 4

# El flujo variación total

En este capítulo vamos a estudiar lo que se conoce como el flujo variación total de un grafo localmente finito. Antes de empezar a estudiar este flujo, debemos definir los espacios donde vamos a trabajar.

**Definición 4.0.1.** *Definimos el espacio de funciones de variación acotada como*

$$BV(V, \nu) = \left\{ u : V \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{x, y \in V} |u(y) - u(x)| \cdot \omega_{xy} < +\infty \right\}.$$

Por otro lado, definimos la variación total de una función  $u \in BV(V, \nu)$  como

$$TV(u) = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} |u(y) - u(x)| \omega_{xy}$$

Podemos observar que  $L^1(V, \nu) \subset BV(V, \nu)$ . Además, resulta que podemos calcular el perímetro de un conjunto a través de la variación total de su función característica. Recordemos que el perímetro de un conjunto  $E \subset V$  estaba definido como

$$P(E) = \sum_{x \in E} \sum_{y \in V \setminus E} \omega_{xy}.$$

Vamos a definir ahora la interacción no local entre dos conjuntos, la cual nos será útil a la hora de trabajar con el perímetro de diversos conjuntos.

**Definición 4.0.2.** *Sean  $A, B \subset V$ . Definimos la interacción no local entre  $A$  y  $B$  como*

$$L(A, B) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} \omega_{xy}.$$

Podemos observar que  $L(A, B) = L(B, A)$  y además se tiene que, dado un conjunto  $E \subset V$ ,

$$P(E) = L(E, V \setminus E).$$

**Proposición 4.0.3.** Sea  $E \subset V$  tal que  $\nu(E) < +\infty$ . Entonces

$$P(E) = \nu(E) - \sum_{x,y \in E} \omega_{xy}. \quad (4.1)$$

Además,  $P(E) = P(V \setminus E)$  y

$$P(E) = TV(\chi_E), \quad (4.2)$$

donde  $\chi_E$  es la función característica del conjunto  $E$ .

**Demostración:**

En primer lugar, se tiene

$$\begin{aligned} P(E) + \sum_{x,y \in E} \omega_{xy} &= \sum_{x \in E} \sum_{y \in V} \omega_{xy} + \sum_{x,y \in E} \omega_{xy} \\ &= \sum_{x \in E} \sum_{y \in V} \omega_{xy} = \sum_{x \in E} d_x = \nu(E). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} P(E) - P(V \setminus E) &= \sum_{x \in E} \sum_{y \in V \setminus E} \omega_{xy} - \sum_{x \in V \setminus E} \sum_{y \in E} \omega_{xy} \\ &= \sum_{x \in E} \sum_{y \in V} \omega_{xy} - \sum_{x \in E} \sum_{y \in E} \omega_{xy} \\ &\quad - \left( \sum_{x \in V} \sum_{y \in E} \omega_{xy} - \sum_{x \in E} \sum_{y \in E} \omega_{xy} \right) \\ &= \sum_{x \in V} d_x - \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} \chi_E(y) \omega_{xy} = \nu(E) - \sum_{x \in V} d_x \chi_E(x) \\ &= \nu(E) - \nu(E) = 0. \end{aligned}$$

Por último, probemos (4.2). Para ello, basta con observar que

$$\begin{aligned} 2TV(\chi_E) &= \sum_{x,y \in V} |\chi_E(y) - \chi_E(x)| \omega_{xy} \\ &= \sum_{x \in E} \sum_{y \in V \setminus E} \omega_{xy} + \sum_{x \in V \setminus E} \sum_{y \in E} \omega_{xy} \\ &= P(E) + P(V \setminus E) = 2P(E), \end{aligned}$$

de lo que se sigue (4.2). □

**Proposición 4.0.4.** Sean  $A, B \subset V$  conjuntos con perímetro finito y tales que  $\nu(A \cap B) = 0$ , entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 2L(A, B)$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= \sum_{x \in A \cup B} \sum_{y \in V \setminus (A \cup B)} \omega_{xy} \\
&= \sum_{x \in A} \sum_{y \in V \setminus (A \cup B)} \omega_{xy} + \sum_{x \in B} \sum_{y \in V \setminus (A \cup B)} \omega_{xy} \\
&= \sum_{x \in A} \left( \sum_{y \in V \setminus A} \omega_{xy} - \sum_{y \in B} \omega_{xy} \right) + \sum_{x \in B} \left( \sum_{y \in V \setminus B} \omega_{xy} - \sum_{y \in A} \omega_{xy} \right) \\
&= P(A) + P(B) - 2L(A, B).
\end{aligned}$$

□

Antes de comenzar el estudio del 1-Laplaciano, veamos un par de propiedades relevantes de la variación total.

**Proposición 4.0.5.** *Sea  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y Lipschitz. Si  $u \in BV(V, \nu)$ , entonces  $\phi(u) \in BV(V, \nu)$ . Además*

$$TV(\phi(u)) \leq \|\phi\|_{Lip} TV(u),$$

donde  $\|\phi\|_{Lip}$  es la menor constante  $C > 0$  tal que  $|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x - y|$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Demostración:**

$$\begin{aligned}
TV(\phi(u)) &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} |\phi(u)(y) - \phi(u)(x)| \omega_{xy} \\
&\leq \|\phi\|_{Lip} \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} |u(y) - u(x)| \omega_{xy} = \|\phi\|_{Lip} TV(u).
\end{aligned}$$

□

**Proposición 4.0.6.**  *$TV(\cdot)$  es convexa y continua en  $L^1(V, \nu)$ .*

**Demostración:**

Veamos primero la convexidad. Sea  $t \in [0, 1]$  y  $u, v \in BV(V, \nu)$ .

$$\begin{aligned}
TV(tu + (1-t)v) &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} |tu(y) + (1-t)v(y) - tu(x) - (1-t)v(x)| \omega_{xy} \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} |tu(y) - tu(x)| \omega_{xy} + \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} |(1-t)v(y) - (1-t)v(x)| \omega_{xy} \\
&= tTV(u) + (1-t)TV(v),
\end{aligned}$$



por lo que  $TV(\cdot)$  es convexa. Veamos ahora la continuidad en  $L^1(V, \nu)$ . Consideremos  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(V, \nu)$  con  $u_n \rightarrow u \in L^1(V, \nu)$ .

$$\begin{aligned} |TV(u_n) - TV(u)| &= \left| \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} (|u_n(y) - u_n(x)| - |u(y) - u(x)|) \omega_{xy} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \sum_{x,y \in V} |u_n(y) - u(y)| \omega_{xy} + \sum_{x,y \in V} |u_n(x) - u(x)| \omega_{xy} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{y \in V} |u_n(y) - u(y)| d_y + \sum_{x \in V} |u_n(x) - u(x)| d_x \right) \\ &= \|u_n - u\|_{L^1(V, \nu)}, \end{aligned}$$

por lo que  $TV(\cdot)$  es continua en  $L^1(V, \nu)$  como queríamos ver.  $\square$

**Proposición 4.0.7.** *Sea  $u \in BV(V, \nu)$ , entonces*

$$TV(u) = 0 \iff u \text{ es constante.}$$

**Demostración:**

Supongamos que  $u$  es constante, digamos  $u \equiv k$ . Entonces

$$TV(u) = \sum_{x,y \in V} |u(y) - u(x)| \omega_{xy} = \sum_{x,y \in V} |k - k| \omega_{xy} = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que  $TV(u) = 0$ , entonces

$$0 = 2TV(u) = \sum_{x,y \in V} |u(y) - u(x)| \omega_{xy} = \sum_{x \in V} d_x \frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} |u(y) - u(x)| \omega_{xy},$$

por tanto,

$$\frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} |u(y) - u(x)| \omega_{xy} = 0,$$

ya que todos los términos del primer sumatorio son positivos. Por otro lado,

$$|\Delta_G u(x)| = \left| \sum_{y \in V} (u(y) - u(x)) \omega_{xy} \right| \leq \sum_{y \in V} |u(y) - u(x)| \omega_{xy} = 0,$$

por tanto, como ya hemos visto que el Laplaciano de una función se anula si y solo si la función es constante, obtenemos que  $u$  es constante, como queríamos comprobar.  $\square$

## 4.1. El 1-Laplaciano

Ahora que ya hemos definido el espacio donde la variación total está bien definida, vamos a definir el concepto del 1-Laplaciano. Antes debemos definir el espacio de las funciones cuya divergencia está en el espacio  $L^p(V, \nu)$ . Recordemos que la divergencia de una función  $z : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  se define como

$$\operatorname{div}_G z(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} (z(x, y) - z(y, x)) \cdot \omega_{xy}.$$

**Definición 4.1.1.** Sea  $p \geq 1$ . Definimos:

$$X^p(V, \nu) = \{z \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x) : \operatorname{div}_G z \in L^p(V, \nu)\}.$$

En estos espacios, tenemos una fórmula de Green similar a la fórmula de Green que ya habíamos visto en (2.14) y cuya prueba es muy similar.

**Proposición 4.1.2.** Sean  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $u \in BV(V, \nu) \cap L^q(V, \nu)$  y  $z \in X^p(V, \nu)$ , entonces:

$$\sum_{x \in V} u(x) \operatorname{div}_G z(x) d_x = -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} \nabla u(x, y) \cdot z(x, y) \omega_{xy}, \quad (4.3)$$

donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  y con la convención  $\frac{1}{\infty} = 0$ .

**Demostración:**

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V} u(x) \operatorname{div}_G z(x) d_x &= \sum_{x \in V} u(x) d_x \cdot \frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} (z(x, y) - z(y, x)) \omega_{xy} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} u(x) \cdot (z(x, y) - z(y, x)) \omega_{xy} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} u(x) \cdot (z(x, y) - z(y, x)) \omega_{xy} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} u(x) \cdot (z(x, y) - z(y, x)) \omega_{xy} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{y, x \in V} u(y) \cdot (z(y, x) - z(x, y)) \omega_{xy} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} \nabla u(x, y) \cdot z(x, y) \omega_{xy}. \end{aligned}$$

□

Vamos a estudiar una caracterización de la variación total de una función en términos de la divergencia de funciones en  $X^p(V, \nu)$ .

**Proposición 4.1.3.** *Sea  $1 \leq p \leq \infty$ . Dada  $u \in BV(V, \nu) \cap L^q(V, \nu)$  se tiene:*

$$TV(u) = \sup \left\{ \sum_{x \in V} u(x) \operatorname{div}_G z(x) d_x : z \in X^p(V, \nu), \|z\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1 \right\}, \quad (4.4)$$

donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , con la convención  $\frac{1}{\infty} = 0$ . En particular, dado  $E \subset V$  con  $\nu(E) < \infty$ ,

$$P(E) = \sup \left\{ \sum_{x \in E} \operatorname{div}_G z(x) d_x : z \in X^1(V, \nu), \|z\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1 \right\}. \quad (4.5)$$

**Demostración:**

El caso particular se deduce de que si  $\nu(E) < \infty$  entonces  $TV(\chi_E) \in L^\infty(V, \nu)$  y de la fórmula (4.2). Probemos ahora la ecuación (4.4).

Denotemos  $D = \{z \in X^p(V, \nu), \|z\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1\}$ . Sea  $u \in BV(V, \nu) \cap L^q(V, \nu)$  y sea  $z \in D$ , por la fórmula de Green (4.3) se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V} d_x u(x) \operatorname{div}_G z(x) &= -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} \nabla u(x, y) z(x, y) \omega_{xy} \leq \left| -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} \nabla u(x, y) z(x, y) \omega_{xy} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} |u(y) - u(x)| |z(x, y)| \omega_{xy} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} |u(y) - u(x)| \omega_{xy} = TV(u), \end{aligned}$$

donde en la tercera desigualdad hemos usado que  $\|z\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1$ . Esto implica que  $\sup \left\{ \sum_{x \in V} d_x u(x) \operatorname{div}_G z(x) : z \in D \right\} \leq TV(u)$ . Veamos la desigualdad contraria. Para ello, denotemos la función signo como

$$\operatorname{sign}_0(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0, \\ 0 & \text{si } r = 0, \\ -1 & \text{si } r < 0, \end{cases}$$

Sea  $V = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  una enumeración de los vértices del grafo. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos  $K_n = \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ . Claramente  $\nu(K_n) < \infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y además  $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ . Por otro lado,  $K_n \subset K_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , definimos  $z_n(x, y) = \operatorname{sign}_0(u(y) - u(x)) \chi_{K_n \times K_n}$ . Claramente se tiene que  $z_n \in X^p(V, \nu)$  y además, como  $|z(x, y)| \leq 1$  para todo  $x, y \in V$ , obtenemos que  $\|z_n\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1$ , por lo que  $z_n \in D \forall n \in \mathbb{N}$ . Por otro

lado, por la fórmula de Green (4.3) se tiene

$$\begin{aligned} TV(u) &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} |u(y) - u(x)| \omega_{xy} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{x,y \in K_n} |u(y) - u(x)| \omega_{xy} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} \nabla u(x,y) z_n(x,y) \omega_{xy} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in V} d_x u(x) \operatorname{div}_G(-z_n)(x) \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{x \in V} d_x u(x) \operatorname{div}_G z(x) : z \in D \right\}, \end{aligned}$$

por tanto,  $TV(u) \leq \sup \{ \sum_{x \in V} d_x u(x) \operatorname{div}_G z(x) : z \in D \}$  y, por consiguiente

$$TV(u) = \sup \left\{ \sum_{x \in V} d_x u(x) \operatorname{div}_G z(x) : z \in D \right\}$$

como queríamos probar.  $\square$

**Corolario 4.1.4.**  $TV(\cdot)$  es semicontinua inferiormente con respecto a la convergencia débil en  $L^2(V, \nu)$ .

**Demostración:**

Sea  $u_n \rightharpoonup u$  débilmente en  $L^2(V, \nu)$ , es decir, dada  $v \in L^2(V, \nu)$ , se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in V} d_x u_n(x) v(x) = \sum_{x \in V} d_x u(x) v(x).$$

Dada  $z \in X^2(V, \nu)$ , con  $\|z\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1$  se tiene:

$$\sum_{x \in V} d_x u(x) \operatorname{div}_G z(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in V} d_x u_n(x) \operatorname{div}_G z(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} TV(u_n), \quad (4.6)$$

donde en la desigualdad hemos usado que

$$\sum_{x \in V} d_x u(x) \operatorname{div}_G z(x) \leq TV(u_n),$$

y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in V} d_x u(x) \operatorname{div}_G z(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in V} d_x u(x) \operatorname{div}_G z(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} TV(u_n).$$

Tomando supremos en  $z$  en la ecuación (4.6) y por la Proposición anterior obtenemos

$$TV(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} TV(u_n)$$

como queríamos comprobar.  $\square$

Vamos a definir ahora un funcional cuya subdiferencial va a ser precisamente el 1-Laplaciano.

**Definición 4.1.5.** Definimos el funcional  $\mathcal{F} : L^2(V, \nu) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  como:

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} TV(u) & \text{si } u \in L^2(V, \nu) \cap BV(V, \nu), \\ +\infty & \text{si } u \in L^2(V, \nu) \setminus BV(V, \nu). \end{cases}$$

Vamos a considerar la siguiente ecuación formal de evolución:

$$u_t(x, t) = \frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} \frac{u(y, t) - u(x, t)}{|u(y, t) - u(x, t)|} \omega_{xy}, \quad x \in V, t \geq 0. \quad (4.7)$$

Como en el caso de la ecuación del calor (ver capítulo 3), vamos a ver que podemos reescribir la ecuación (4.7) usando la subdiferencial del operador (4.1.5), lo que nos ayudará a dar un resultado de existencia y unicidad de soluciones de (4.7).

**Definición 4.1.6.** Dado un funcional  $\phi : L^2(V, \nu) \rightarrow [0, +\infty]$ , definimos  $\tilde{\phi} : L^2(V, \nu) \rightarrow [0, +\infty]$  como:

$$\tilde{\phi}(v) = \left\{ \frac{\sum_{x \in V} d_x v(x) w(x)}{\phi(w)} : w \in L^2(V, \nu) \right\},$$

con la convención de que  $\frac{0}{\infty} = \frac{0}{0} = 0$ .

Podemos observar que si  $\phi_1 \leq \phi_2$  entonces  $\tilde{\phi}_2 \leq \tilde{\phi}_1$ .

Para ayudarnos a probar el siguiente Teorema, debemos definir la función signo multivaluada:

$$\text{sign}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0, \\ [-1, 1] & \text{si } r = 0, \\ -1 & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

**Teorema 4.1.7.** Sean  $u, v \in L^2(V, \nu)$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I)  $v \in \partial\mathcal{F}(u)$

(II) Existe  $z \in X^2(V, \nu)$  con  $\|z\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1$  tal que

$$v = -\text{div}_G z \quad (4.8)$$

y además

$$\sum_{x \in V} d_x u(x) v(x) = \mathcal{F}(u).$$

(III) Existe  $z \in X^2(V, \nu)$  con  $\|z\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1$  tal que se cumple (4.8) y además

$$\frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} \nabla u(x, y) z(x, y) \omega_{xy} = \mathcal{F}(u).$$

(iv) Existe  $g \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$  antisimétrica con  $\|g\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1$  tal que

$$v(x) = -\frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} g(x, y) \omega_{xy} \text{ para todo } x \in V \quad (4.9)$$

y además

$$-\sum_{x, y \in V} g(x, y) u(x) \cdot \omega_{xy} = \mathcal{F}(u). \quad (4.10)$$

(v) Existe  $g \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$  antisimétrica con  $\|g\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1$  cumpliendo (4.9) y tal que

$$g(x, y) \in \text{sign}(u(y) - u(x)) \text{ para } (\nu \otimes m_x)\text{-casi todo punto } (x, y) \in V \times V. \quad (4.11)$$

**Demostración:**

Sabemos que  $\mathcal{F}$  es convexa y semicontinua inferiormente por la Proposición 4.0.6 y el Corolario 4.1.4, además es fácil ver que  $\mathcal{F}$  es positiva homogénea de grado 1, es decir,  $\mathcal{F}(tv) = |t|\mathcal{F}v$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por tanto, por [1, Teorema 1,8], tenemos:

$$\partial\mathcal{F}(u) = \left\{ v \in L^2(V, \nu) : \tilde{\mathcal{F}}(v) \leq 1, \sum_{x \in V} d_x u(x) v(x) = \mathcal{F}(u) \right\}. \quad (4.12)$$

Dada  $v \in L^2(V, \nu)$ , definimos

$$\psi(v) = \inf \{ \|z\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} : z \in X^2(V, \nu), v = -\text{div}_G z \}. \quad (4.13)$$

Es fácil ver que si  $\psi(v) < +\infty$  entonces el ínfimo en (4.13) se alcanza. Veamos que

$$\psi = \tilde{\mathcal{F}}.$$

En primer lugar probemos que  $\tilde{\mathcal{F}}(v) \leq \psi(v)$ . Si  $\psi(v) = +\infty$ , esta desigualdad es trivialmente cierta, así que supongamos que  $\psi(v) < +\infty$ . Sea  $z \in L^\infty(G \times G, \nu \otimes m_x)$  tal que  $v = -\text{div}_G z$ . Entonces, para  $w \in L^2(V, \nu)$ , por la fórmula de Green (4.3) se tiene

$$\sum_{x \in V} d_x w(x) v(x) = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} \nabla w(x, y) z(x, y) \omega_{xy} \leq \|z\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \mathcal{F}(w).$$

Tomando supremos sobre  $w$  obtenemos que  $\tilde{\mathcal{F}}(v) \leq \|z\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)}$ . Tomando supremos sobre  $z$  obtenemos precisamente

$$\psi = \tilde{\mathcal{F}}.$$

Veamos la desigualdad contraria. Denotemos por

$$D = \{ \text{div}_G z : z \in X^2(V, \nu) \}.$$

Entonces, por (4.4), se tiene que, para  $v \in L^2(V, \nu)$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(v) &= \sup_{w \in L^2(V, \nu)} \frac{\sum_{x \in V} d_x w(x) v(x)}{\psi(w)} \geq \sup_{w \in D} \frac{\sum_{x \in V} d_x w(x) v(x)}{\psi(w)} \\ &= \sup_{z \in X^2(V, \nu)} \frac{\sum_{x \in V} d_x \cdot \operatorname{div}_G z(x) v(x)}{\|z\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)}} = \mathcal{F}(v),\end{aligned}$$

por tanto  $\mathcal{F} \leq \tilde{\psi}$ . Por [1, Proposición 1,6], obtenemos que  $\psi = \tilde{\psi} \leq \tilde{\mathcal{F}}$  y, por tanto, por (4.12), tenemos

$$\partial \mathcal{F}(u) = \left\{ v \in L^2(V, \nu) : \psi(v) \leq 1, \sum_{x \in V} d_x \cdot u(x) v(x) = \mathcal{F}(u) \right\}.$$

Por tanto, por la observación sobre alcanzar el ínfimo en (4.13), se tiene la equivalencia entre (i) y (ii).

La equivalencia entre (ii) y (iii) se sigue de la fórmula de Green (4.3).

Basta coger  $g(x, y) = \frac{1}{2}(z(x, y) - z(y, x))$  para ver que (iii) implica (iv), y basta tomar  $z(x, y) = g(x, y)$  para ver que (iv) implica (ii).

Por último, para ver que (iv) y (v) son equivalentes, veamos que (4.10) y (4.11) son equivalentes. Como  $g$  es antisimétrica con  $\|g\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1$ ,

$$-2 \sum_{x, y \in V} g(x, y) u(x) \cdot \omega_{xy} = \sum_{x, y \in V} g(x, y) (u(y) - u(x)) \omega_{xy},$$

de lo que se sigue la equivalencia entre (4.10) y (4.11).  $\square$

**Definición 4.1.8.** *Definimos en  $L^2(V, \nu)$  el operador multivaluado  $\Delta_1$  como:*

$$(u, v) \in \Delta_1 \iff -v \in \partial \mathcal{F}(u).$$

*Lo llamamos el 1-Laplaciano y denotamos  $v \in \Delta_1(u)$  cuando  $(u, v) \in \Delta_1$ .*

Hemos de observar que podemos reescribir el problema (4.7), que es el que queríamos estudiar, como

$$\begin{cases} u_t - \Delta_1 u \ni 0 & \text{en } (0, T) \times V \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in V. \end{cases} \quad (4.14)$$

Antes de continuar, veamos un ejemplo de que  $\Delta_1$  es efectivamente multivaluado. Fijemos un valor  $0 < p < 1$ . Consideramos el conjunto de vértices  $V = \{a, b\}$  y el conjunto de pesos  $w_{aa} = w_{bb} = p$  y  $w_{ab} = 1 - p$ . Gracias al Teorema 4.1.7,

sabemos que  $(u, v) \in \Delta_1$  si y solo si

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists g \in L^\infty(\{a, b\} \times \{a, b\}, \nu \otimes m_x) \text{ antisimétrica tal que} \\ \|g\|_{L^\infty(\{a, b\} \times \{a, b\}, \nu \otimes m_x)} \leq 1, \\ g(a, a) \cdot p + g(a, b) \cdot (1 - p) = v(a), \\ g(b, b) \cdot p + g(a, b) \cdot (1 - p) = v(b), \\ g(a, b) \in \text{sign}(u(b) - u(a)). \end{array} \right.$$

Como  $g$  es antisimétrica obtenemos que

$$v(a) = g(a, b)(1 - p), \quad v(b) = g(a, b)(1 - p) \text{ y } g(a, b) \in \text{sign}(u(b) - u(a)).$$

El siguiente resultado nos ayudará a demostrar un resultado de conservación de la masa del flujo variación total.

**Proposición 4.1.9.** *Para todas  $(u, v) \in \Delta_1$  se tiene:*

$$- \sum_{x \in V} d_x v(x) w(x) \leq TV(w) \quad \forall w \in BV(V, \nu) \cap L^2(V, \nu), \quad (4.15)$$

y además

$$- \sum_{x \in V} d_x v(x) u(x) = TV(u).$$

**Demostración:**

La segunda parte de la proposición se tiene por el Teorema 4.1.7. Probemos la primera parte de la proposición. Como  $-v \in \partial \mathcal{F}(u)$ , dada  $w \in BV(V, \nu)$  se tiene

$$- \sum_{x \in V} d_x v(x) w(x) \leq \mathcal{F}(u + v) - \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(w).$$

Dada  $w \in BV(V, \nu) \cap L^2(V, \nu)$  se tiene que  $\mathcal{F}(w) = TV(w)$ , por lo que tenemos el resultado que queríamos probar.  $\square$

Gracias a la teoría desarrollada en el capítulo 3 y el apéndice A de [13] y el Teorema de Brezis-Komura A.2.15 podemos enunciar el siguiente resultado de existencia y unicidad de soluciones de (4.7):

**Teorema 4.1.10.** *Para toda función  $u_0 \in L^2(V, \nu)$  y todo  $T > 0$ , existe una única solución del problema (4.14) en  $(0, T)$  en el siguiente sentido:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} u \in W^{1,1}(0, T; L^2(V, \nu)), & \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{en } L^2(V, \nu) \text{ y} \\ u_t(t, \cdot) - \Delta_1 u(t) \ni 0 & \text{para casi todo } t \in (0, T). \end{array} \right.$$



De hecho, por la completa acretividad del operador (veáse ?? y [13, Teorema 3.19]) se tiene la siguiente contracción y el siguiente principio del máximo en cualquier espacio  $L^q(V, \nu)$  con  $1 \leq q \leq \infty$ :

$$\|(u(t) - v(t))^+\|_{L^q(V, \nu)} \leq \|(u_0 - v_0)^+\|_{L^q(V, \nu)} \quad \forall 0 < t < T,$$

para cualquier par de soluciones  $u$  y  $v$  del problema (4.14) con datos iniciales  $u_0$  y  $v_0$  respectivamente.

**Definición 4.1.11.** Dada  $u_0 \in L^2(V, \nu)$ , denotamos por  $e^{-t\Delta_1}u_0$  a la única solución del problema (4.14). Al semigrupo  $\{e^{-t\Delta_1}\}_{t \geq 0}$  en  $L^2(V, \nu)$  lo llamamos el flujo variación total.

Como habíamos anticipado, veamos que el flujo variación total conserva la masa.

**Proposición 4.1.12.** El flujo variación total satisface que para todo  $t \geq 0$  y toda función  $u_0 \in L^1(V, \nu) \cap L^2(V, \nu)$ ,

$$\sum_{x \in V} d_x e^{-t\Delta_1} u_0(x) = \sum_{x \in V} d_x u_0(x).$$

**Demostración:**

Por las Proposiciones 4.0.7 y 4.1.9 tenemos:

$$-\frac{d}{dt} \sum_{x \in V} d_x e^{-t\Delta_1} u_0(x) \leq TV(1) = 0,$$

y por otro lado

$$\frac{d}{dt} \sum_{x \in V} d_x e^{-t\Delta_1} u_0(x) \leq TV(-1) = 0.$$

Por tanto

$$\frac{d}{dt} \sum_{x \in V} d_x e^{-t\Delta_1} u_0(x) = 0,$$

y, en consecuencia,

$$\sum_{x \in V} d_x e^{-t\Delta_1} u_0(x) = \sum_{x \in V} d_x u_0(x) \text{ para todo } t \geq 0.$$

□

## 4.2. Comportamiento asintótico del flujo variación total

Así como con la ecuación del calor, vamos a estudiar el comportamineto asintótico del flujo variación total y veremos que tiende a un valor constante, pero además veremos que si el grafo  $(V, \omega)$  cumple una cierta desigualdad de Poincaré entonces el flujo alcanza este valor límite en un tiempo finito.

**Proposición 4.2.1.** *Para toda función  $u_0 \in L^1(V, \nu) \cap L^2(V, \nu)$  existe al menos una función*

$$u_\infty \in \{u \in L^1(V, \nu) \cap L^2(V, \nu) : 0 \in \Delta_1(u)\}$$

tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t\Delta_1} u_0 = u_\infty \text{ en } L^2(V, \nu).$$

Además,

(i) Si  $\nu(V) = +\infty$  entonces  $u_\infty = 0$ .

(ii) Si  $\nu$  es una medida de probabilidad, entonces

$$u_\infty = \sum_{x \in V} d_x u_0(x).$$

**Demostración:**

Como  $\mathcal{F}$  es una función propia y semicontinua inferiormente en  $L^2(V, \nu)$  que alcanza su mínimo en la función 0 y, además  $\mathcal{F}$  es una función par, por [6, Teorema 5], tenemos que el límite fuerte en  $L^2(V, \nu)$  de  $e^{-t\Delta_1} u_0$  existe y es un mínimo de  $\mathcal{F}$ , es decir, existe al menos una función

$$u_\infty \in \{u \in L^1(V, \nu) \cap L^2(V, \nu) : 0 \in \Delta_1(u)\}.$$

Ahora, como  $0 \in \Delta_1(u_\infty)$ , se tiene que  $TV(u_\infty) = 0$ . Por tanto, por la Proposición 4.0.7 se tiene que  $u_\infty$  es constante, digamos que  $u_\infty = c$ . Supongamos que  $\nu(V) = +\infty$ , entonces, como  $u_\infty \in L^1(V, \nu)$ , se tiene que tener que

$$\sum_{x \in V} d_x u_\infty(x) = \sum_{x \in V} d_x \cdot c = c \cdot \nu(V) < +\infty,$$

por lo que se tiene que tener que  $c = 0$ . Si  $\nu$  es una medida de probabilidad, por la Proposición 4.1.12 se tiene:

$$u_\infty = \sum_{x \in V} d_x u_0(x).$$

□

Ahora que ya conocemos el valor límite del flujo variación total, vamos a estudiar la velocidad de convergencia del flujo a ese valor.

Si  $(V, \omega)$  satisface una  $p$ -desigualdad de Poincaré (ver la definición 3.1.5), vamos a denotar

$$\lambda_{(V, \omega)}^p = \inf \left\{ \frac{TV(u)}{\|u\|_{L^p(V, \nu)}} : \|u\|_{L^p(V, \nu)} \neq 0, \nu(u) = 0 \right\}.$$

Recordemos que  $\nu(u) = \sum_{x \in V} d_x u(x)$ .

**Teorema 4.2.2.** *Supongamos que  $\nu$  es una medida de probabilidad. Si  $(V, \omega)$  satisface una 1-desigualdad de Poincaré, entonces, para toda función  $u_0 \in L^2(V, \nu)$*

$$\|e^{-t\Delta_1} u_0 - \nu(u_0)\|_{L^1(V, \nu)} \leq \frac{1}{2 \cdot \lambda_{(V, \omega)}^1} \cdot \frac{\|u_0\|_{L^2(V, \nu)}^2}{t} \text{ para todo } t > 0.$$

**Demostración:**

Sea  $u_0 \in L^2(V, \nu)$ . Por la teoría desarrollada en [13, Apéndice A] podemos afirmar que

$$\|e^{-t\Delta_1}u - \nu(u_0)\|_{L^1(V, \nu)} \leq \|u - \nu(u_0)\|_{L^1(V, \nu)}, \quad u \in L^2(V, \nu), t \geq 0.$$

En particular, si denotamos  $v(t) = e^{-t\Delta_1}u_0 - \nu(u_0)$  y  $u(t) = e^{-t\Delta_1}u_0$ ,

$$\|v(t)\|_{L^1(V, \nu)} \leq \|v(s)\|_{L^1(V, \nu)} \quad \text{para } t \geq s. \quad (4.16)$$

Por la Proposición 4.1.12,  $\nu(u(t)) = \nu(u_0)$  para todo  $t \geq 0$ , por lo que gracias a la 1-desigualdad de Poincaré se tiene

$$\lambda_{(V, \omega)}^1 \|v(s)\|_{L^1(V, \nu)} \leq TV(v(s)), \quad s \geq 0. \quad (4.17)$$

Esta desigualdad es claramente cierta si  $\|v(s)\|_{L^1(V, \nu)} = 0$ . Por tanto, por (4.16) y (4.17)

$$t\|v(t)\|_{L^1(V, \nu)} \leq \int_0^t \|v(s)\|_{L^1(V, \nu)} ds \leq \frac{1}{\lambda_{(V, \omega)}^1} \int_0^t TV(v(s)) ds, \quad t \geq 0. \quad (4.18)$$

Por otro lado, por la Proposición 4.1.9,

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e^{-t\Delta_1}u_0\|_{L^2(V, \nu)}^2 = - \sum_{x \in V} d_x e^{-t\Delta_1}u_0 \frac{d}{dt} e^{-t\Delta_1}u_0 = TV(e^{-t\Delta_1}u_0),$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|e^{-t\Delta_1}u_0\|_{L^2(V, \nu)}^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(V, \nu)}^2 &\leq - \int_0^t TV(e^{-s\Delta_1}u_0) ds \\ &= - \int_0^t TV(v(s)) ds, \end{aligned}$$

lo que implica

$$\int_0^t TV(v(s)) ds \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(V, \nu)}^2, \quad t \geq 0.$$

Por tanto, por (4.18),

$$\|v(t)\|_{L^1(V, \nu)} \leq \frac{1}{2 \cdot \lambda_{(V, \omega)}^1} \cdot \frac{\|u_0\|_{L^2(V, \nu)}^2}{t}, \quad t > 0,$$

lo que concluye la prueba.  $\square$

Con este Teorema ya tenemos un resultado de velocidad de convergencia del flujo variación total si nuestro grafo satisface una 1-desigualdad de Poincaré. Resulta que podemos mejorar las conclusiones si el grafo cumple una 2-desigualdad de Poincaré.

**Teorema 4.2.3.** *Supongamos que  $\nu$  es una medida de probabilidad. Si  $(V, \omega)$  satisface una 2-desigualdad de Poincaré, entonces, para toda función  $u_0 \in L^2(V, \nu)$*

$$\|e^{-t\Delta_1}u_0 - \nu(u_0)\|_{L^2(V, \nu)} \leq \left( \|u_0 - \nu(u_0)\|_{L^2(V, \nu)} - \lambda_{(V, \omega)}^2 t \right)^+ \text{ para todo } t \geq 0,$$

donde  $(\cdot)^+$  denota la parte positiva de la función, es decir,  $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ . En consecuencia,

$$e^{-t\Delta_1}u_0 = \nu(u_0) \quad \forall t \geq \tilde{t} = \frac{\|u_0 - \nu(u_0)\|_{L^2(V, \nu)}}{\lambda_{(V, \omega)}^2}.$$

**Demostración:**

Sea  $u_0 \in L^2(V, \nu)$ . Denotemos por  $u(t) = e^{-t\Delta_1}u_0$  y  $v(t) = u(t) - \nu(u_0)$ . Por el Teorema 4.1.7, es fácil ver que  $\Delta_1 u(t) = \Delta_1 v(t)$  (dado que  $\text{sign}(u(y) - u(x)) = \text{sign}(v(y) - v(x))$  para todo  $x, y \in V$ ). Por tanto se tiene

$$\frac{d}{dt}v(t) \in \Delta_1 v(t), \quad t > 0.$$

Notemos también que  $v(t) \in BV(V, \nu)$ , de hecho, por [5, Teorema 3.7] se tiene que  $v(t) \in D(\Delta_1) \subset BV(V, \nu)$  para todo  $t > 0$ .

Por el Teorema 3.0.2, existe  $g_t \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$  antisimétrica con  $\|g_t\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1$  tal que

$$\frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} g_t(x, y) \omega_{xy} = \frac{d}{dt}v(t)(x) \text{ para todo } x \in V \text{ y todo } t > 0, \quad (4.19)$$

y además

$$- \sum_{x, y \in V} g_t(x, y) v(t)(x) \omega_{xy} = \mathcal{F}(v(t)) = TV(v(t)) \text{ para todo } t > 0. \quad (4.20)$$

Multiplicando (4.19) por  $v(t)(x)d_x$  y sumando en todos los  $x \in V$ , por (4.20) se tiene que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{x \in V} (d_x v(t)(x))^2 + TV(v(t)) = 0.$$

Por la Proposición 4.1.12,  $\nu(u(t)) = \nu(u_0)$  para todo  $t \geq 0$ , y, como  $(V, \omega)$  satisface una 2-desigualdad de Poincaré, se tiene:

$$\lambda_{(V, \omega)}^2 \|v(t)\|_{L^2(V, \nu)} \leq TV(v(t)) \text{ para todo } t \geq 0.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{L^2(V, \nu)}^2 + \lambda_{(V, \omega)}^2 \|v(t)\|_{L^2(V, \nu)}^2 \leq 0 \text{ para todo } t \geq 0.$$

Integrando esta ecuación diferencial ordinaria, obtenemos

$$\|v(t)\|_{L^2(V, \nu)} \leq \left( \|v(0)\|_{L^2(V, \nu)} - \lambda_{(V, \omega)}^2 t \right)^+ \text{ para todo } t \geq 0,$$

es decir,

$$\|u(t) - \nu(u_0)\|_{L^2(V,\nu)} \leq \left( \|u_0 - \nu(u_0)\|_{L^2(V,\nu)} - \lambda_{(V,\omega)}^2 t \right)^+ \text{ para todo } t \geq 0,$$

como queríamos probar.  $\square$

Gracias a la Proposición 3.1.6, podemos enunciar el siguiente Corolario:

**Corolario 4.2.4.** *Sea  $(V, \omega)$  un grafo con pesos finito. Entonces para toda función  $u_0 \in L^2(V, \nu)$ ,*

$$\|e^{-t\Delta_1} u_0 - \nu(u_0)\|_{L^2(V,\nu)} \leq \lambda_{(V,\omega)}^2 (\tilde{t} - t)^+,$$

donde

$$\tilde{t} = \frac{\|u_0 - \nu(u_0)\|_{L^2(V,\nu)}}{\lambda_{(V,\omega)}^2}.$$

Por consiguiente,

$$e^{-t\Delta_1} u_0 = \nu(u_0) \text{ para todo } t \geq \tilde{t}.$$

Hemos de observar que tanto en el Teorema 4.2.2 como en el Teorema 4.2.3, si suponemos que  $\nu(V) = \infty$ , tomando  $u_0 \in L^2(V, \nu) \cap L^1(V, \nu)$  con  $\nu(u_0) = 0$ , podemos proceder de forma similar para obtener las mismas conclusiones cambiando  $\nu(u_0)$  por 0. Es decir, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 4.2.5.** *Sea  $(V, \omega)$  un grafo con pesos con  $\nu(V) = \infty$ . Sea  $u_0 \in L^2(V, \nu) \cap L^1(V, \nu)$  con  $\nu(u_0) = 0$ .*

(I) *Si  $(V, \omega)$  satisface una 1-desigualdad de Poincaré, entonces*

$$\|e^{-t\Delta_1} u_0\|_{L^1(V,\nu)} \leq \frac{1}{2 \cdot \lambda_{(V,\omega)}^1} \cdot \frac{\|u_0\|_{L^2(V,\nu)}^2}{t} \text{ para todo } t > 0.$$

(II) *Si  $(V, \omega)$  satisface una 2-desigualdad de Poincaré, entonces*

$$\|e^{-t\Delta_1} u_0\|_{L^2(V,\nu)} \leq \left( \|u_0\|_{L^2(V,\nu)} - \lambda_{(V,\omega)}^2 t \right)^+ \text{ para todo } t \geq 0.$$

### 4.3. La constante de Cheeger y los conjuntos calibrables

**Definición 4.3.1.** *Dado  $\Omega \subset V$  con  $0 < \nu(\Omega) < \nu(V)$ , definimos la constante de Cheeger de  $\Omega$  como*

$$h_1(\Omega) = \inf \left\{ \frac{P(E)}{\nu(E)} : E \subset \Omega, \nu(E) > 0 \right\}. \quad (4.21)$$

*Diremos que  $E \subset \Omega$  es un conjunto de Cheeger de  $\Omega$  si  $E$  minimiza (4.21), es decir, si*

$$h_1(\Omega) = \frac{P(E)}{\nu(E)}.$$

*Diremos además que  $\Omega$  es calibrable si  $\Omega$  es un conjunto de Cheeger de sí mismo.*

Para simplificar la notación, dado  $\Omega \subset V$  con  $0 < \nu(\Omega) < \nu(V)$ , definimos

$$\lambda_\Omega = \frac{P(\Omega)}{\nu(\Omega)}.$$

En esta sección veremos la relación de los conjuntos de Cheeger con el 1-Laplaciano. De hecho veremos que el hecho de que un conjunto  $\Omega$  sea calibrable es equivalente a que cierta función esté en  $\Delta_1 \chi_\Omega$ .

Para ver este resultado, antes debemos estudiar dos Lemas previos.

**Lema 4.3.2.** *Sea  $\Omega \subset V$  con  $0 < \nu(\Omega) < \nu(V)$ . Supongamos que existe una constante  $\lambda > 0$  y una función  $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tau(x) = 1$  para cada  $x \in \Omega$  y*

$$-\lambda\tau \in \Delta_1 \chi_\Omega \text{ en } V.$$

*Entonces  $\lambda = \lambda_\Omega$ .*

**Demostración:**

Por el Teorema 4.1.7, existe una función  $g \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$  antisimétrica con  $\|g\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1$  tal que

$$-\frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} g(x, y) \omega_{xy} = \lambda\tau(x) \quad \text{para todo } x \in V$$

y

$$-\sum_{x, y \in V} g(x, y) \chi_\Omega(x) \omega_{xy} = \mathcal{F}(\chi_\Omega) = P(\Omega),$$

donde en la última igualdad hemos usado la Proposición 4.2. Por tanto,

$$\begin{aligned} \lambda\nu(\Omega) &= \sum_{x \in V} d_x \lambda\tau(x) \chi_\Omega(x) \\ &= -\sum_{x \in V} d_x \left( \frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} g(x, y) \omega_{xy} \right) \chi_\Omega(x) \\ &= P(\Omega). \end{aligned}$$

Por consiguiente se tiene que

$$\lambda = \frac{P(\Omega)}{\nu(\Omega)} = \lambda_\Omega,$$

como queríamos probar.  $\square$

**Lema 4.3.3.** *Sea  $\Omega \subset V$  con  $0 < \nu(\Omega) < \nu(V)$  y  $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $\tau(x) = 1$  para todo  $x \in \Omega$ . Entonces:*

$$-\lambda_\Omega \tau \in \Delta_1 \chi_\Omega \text{ en } V \iff -\lambda_\Omega \tau \in \Delta_1 0 \text{ en } V. \quad (4.22)$$

**Demostración:**

La implicación hacia la derecha se tiene fácilmente dado que, dada  $u \in L^2(V, \nu)$ ,

$$\partial\mathcal{F}(u) \subset \partial\mathcal{F}(0).$$

Veamos el recíproco. Por el Teorema 4.1.7, existe una función  $g \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$  antisimétrica con  $\|g\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1$  tal que

$$-\lambda_\Omega \tau(x) = -\frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} g(x, y) \omega_{xy} \text{ para todo } x \in V.$$

Multiplicando esta ecuación por  $d_x \chi_\Omega(x)$ , sumando en  $x \in V$  y usando que  $g$  es antisimétrica llegamos a:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \lambda_\Omega \nu(\Omega) = \lambda_\Omega \sum_{x \in V} d_x \tau(x) \chi_\Omega(x) \\ &= - \sum_{x, y \in V} g(x, y) \chi_\Omega(x) \omega_{xy} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} g(x, y) (\chi_\Omega(y) - \chi_\Omega(x)) \omega_{xy} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} |\chi_\Omega(y) - \chi_\Omega(x)| \omega_{xy} = TV(\chi_\Omega) = P(\Omega), \end{aligned}$$

donde hemos usado la Proposición 4.2 en la última igualdad. Por tanto, la desigualdad anterior es en realidad una igualdad, por lo que se ha de tener que  $g(x, y) \in \text{sign}(\chi_\Omega(y) - \chi_\Omega(x))$  para  $(\nu \otimes m_x)$  - casi todo punto  $(x, y) \in V \times V$ , por lo que

$$-\lambda_\Omega \tau \in \Delta_1 \chi_\Omega \text{ en } V$$

como queríamos ver.  $\square$

Ya podemos enunciar y demostrar el resultado que habíamos anticipado al iniciar esta sección, que nos va a dar condiciones necesarias y suficientes para ver cuándo un conjunto es calibrable.

**Teorema 4.3.4.** *Sea  $\Omega \subset V$  con  $0 < \nu(\Omega) < \nu(V)$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i)  $\Omega$  es calibrable,

(ii) existe  $\lambda > 0$  y una función  $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\tau(x) = 1$  para todo  $x \in \Omega$  tal que

$$-\lambda \tau \in \Delta_1 \chi_\Omega \text{ en } V, \tag{4.23}$$

(iii)

$$-\lambda_\Omega \tau^* \in \Delta_1 \chi_\Omega \text{ en } V,$$

con  $\tau^*$  definida como:

$$\tau^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega, \\ -\frac{1}{\lambda_\Omega} m_x(\Omega) & \text{si } x \in V \setminus \Omega. \end{cases}$$

**Demostración:**

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) : Trivial.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Supongamos que existe una función  $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\tau \equiv 1$  en  $\Omega$  y satisfaciendo (4.23). Por el Lema 4.3.2 se debe tener que  $\lambda = \lambda_\Omega$ . Por el Teorema 4.1.7, ha de existir una función  $g \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$  con  $\|g\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1$  tal que

$$-\frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} g(x, y) \omega_{xy} = \lambda_\Omega \tau(x) \text{ para todo } x \in V,$$

y además

$$-\sum_{x, y \in V} g(x, y) \chi_\Omega(x) \omega_{xy} = \mathcal{F}(\chi_\Omega) = P(\Omega).$$

Sea  $F \subset \Omega$  con  $\nu(F) > 0$ . Entonces, como  $g$  es antisimétrica:

$$\begin{aligned} \lambda_\Omega \nu(F) &= \lambda_\Omega \sum_{x \in V} d_x \tau(x) \chi_F(x) \\ &= - \sum_{x, y \in V} g(x, y) \chi_F(x) \omega_{xy} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} g(x, y) (\chi_F(y) - \chi_F(x)) \omega_{xy} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} |\chi_F(y) - \chi_F(x)| \omega_{xy} = P(F), \end{aligned}$$

por lo que

$$\lambda_\Omega \leq \frac{P(F)}{\nu(F)} = \lambda_F \text{ para todo } F \subset \Omega \text{ con } \nu(F) > 0,$$

por lo que  $h_1(\Omega) = \lambda_\Omega$  y, por tanto,  $\Omega$  es calibrable.

(i)  $\Rightarrow$  (iii) : Dada una función  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ , vamos a denotar

$$E_t(u) = \{x \in V : u(x) > t\}.$$

Es fácil ver que para toda función  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  y todo  $x \in V$  se tiene:

$$u(x) = \int_0^\infty \chi_{E_t(u)}(x) dt - \int_{-\infty}^0 (1 - \chi_{E_t(u)}(x)) dt.$$

Supongamos que  $\Omega$  es calibrable. Veamos que, con  $\tau^*$  como en el enunciado del Teorema se tiene que  $-\lambda_\Omega \tau^* \in \Delta_1 0$ , es decir,

$$\lambda_\Omega \tau^* \in \partial \mathcal{F}(0). \tag{4.24}$$

Por el Lema 4.3.3, esto es equivalente a que  $\lambda_\Omega \tau^* \in \Delta_1 \chi_\Omega$ , que es lo que queremos ver.



Sea  $w \in L^2(V, \nu)$  con  $\mathcal{F}(w) < +\infty$ . Por un lado, tenemos que

$$w(x) = \int_0^\infty \chi_{E_t(w)}(x) dt - \int_{-\infty}^0 (1 - \chi_{E_t(w)}(x)) dt,$$

y por otro lado

$$\sum_{x \in V} d_x \tau^*(x) = \sum_{x \in \Omega} d_x - \frac{1}{\lambda_\Omega} \sum_{x \in V} d_x m_x(\Omega) = \nu(\Omega) - \frac{1}{\lambda_\Omega} P(\Omega) = \nu(\Omega) - \nu(\Omega) = 0,$$

por lo que

$$\sum_{x \in V} d_x \lambda_\Omega \tau^*(x) w(x) = \lambda_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{x \in V} d_x \tau^*(x) \chi_{E_t(w)}(x) dt. \quad (4.25)$$

Ahora, usando que  $\Omega$  es calibrable y que  $\tau^* \equiv 1$  en  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} & \lambda_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{x \in V} d_x \tau^*(x) \chi_{E_t(w)}(x) dt \\ & \lambda_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(E_t(w) \cap \Omega) dt + \lambda_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{x \in E_t(w) \setminus \Omega} d_x \tau^*(x) dt \\ & \leq \int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t(w) \cap \Omega) dt + \lambda_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{x \in E_t(w) \setminus \Omega} d_x \tau^*(x) dt. \end{aligned}$$

Por la Proposición 4.0.4 y la fórmula de coárea:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t(w) \cap \Omega) dt \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t(w) \cap \Omega) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t(w) \setminus \Omega) dt \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} 2L(E_t(w) \setminus \Omega, E_t(w) \cap \Omega) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t(w) \setminus \Omega) dt \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} 2L(E_t(w) \setminus \Omega, E_t(w) \cap \Omega) dt \\ & = \mathcal{F}(w) - \int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t(w) \setminus \Omega) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} 2L(E_t(w) \setminus \Omega, E_t(w) \cap \Omega) dt. \end{aligned}$$

Sea

$$I = - \int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t(w) \setminus \Omega) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} 2L(E_t(w) \setminus \Omega, E_t(w) \cap \Omega) dt.$$

Si vemos que  $I \leq 0$  entonces ya tendríamos (4.24) y por tanto ya habríamos probado la implicación que queremos. Como

$$\begin{aligned} P(E_t(w) \setminus \Omega) & = L(E_t(w) \setminus \Omega, V \setminus (E_t(w) \setminus \Omega)) \\ & = L(E_t(w) \setminus \Omega, (E_t(w) \cap \Omega) \cup (V \setminus E_t(w))) \\ & = L(E_t(w) \setminus \Omega, E_t(w) \cap \Omega) + L(E_t(w) \setminus \Omega, V \setminus E_t(w)) \end{aligned}$$

y además  $\tau^*(x) = -\frac{1}{\lambda_\Omega} m_x(\Omega)$  para  $x \notin \Omega$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} I &= - \int_{-\infty}^{+\infty} L(E_t(w) \setminus \Omega, V \setminus E_t(w)) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} L(E_t(w) \setminus \Omega, E_t(w) \cap \Omega) dt \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{x \in E_t(w) \setminus \Omega} \sum_{y \in \Omega} \omega_{xy} dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} L(E_t(w) \setminus \Omega, E_t(w) \cap \Omega) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} L(E_t(w) \setminus \Omega, \Omega) dt \leq 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado que si  $A, B \subset \Omega$ , entonces  $L(A, B) \leq L(A, \Omega)$ . Por tanto  $I \leq 0$  como queríamos ver, lo que concluye la prueba de esta implicación y por tanto del Teorema.  $\square$

Vamos a ver ahora que el hecho de que un conjunto de vértices sea calibrable depende únicamente del conjunto en sí mismo, y no de las propiedades del conjunto total de vértices  $V$ .

**Proposición 4.3.5.** *Sea  $\Omega \subset V$  con  $0 < \nu(\Omega) < \nu(V)$ . Entonces  $\Omega$  es calibrable si y solo si existe una función antisimétrica  $g : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$|g(x, y)| \leq 1 \quad \text{para } (\nu \otimes m_x)\text{-casi todo punto } (x, y) \in \Omega \times \Omega,$$

y

$$\lambda_\Omega = -\frac{1}{d_x} \sum_{y \in \Omega} g(x, y) \omega_{xy} + 1 - m_x(\Omega), \quad \text{para } x \in \Omega.$$

**Demostración:**

Supongamos que  $\Omega$  es calibrable. Por el Teorema 4.3.4 esto es equivalente a que exista una función  $g \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$  antisimétrica con  $g(x, y) \in \text{sign}(\chi_\Omega(y) - \chi_\Omega(x))$  en  $(\nu \otimes m_x)$ -casi todo punto  $(x, y) \in \Omega \times \Omega$  que satisface

$$-\frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} g(x, y) \omega_{xy} = \lambda_\Omega \quad \text{para todo } x \in \Omega,$$

y

$$m_x(\Omega) = \frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} g(x, y) \omega_{xy} \quad \text{para todo } x \in V \setminus \Omega.$$

Por tanto, dado  $x \in \Omega$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \lambda_\Omega &= -\frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} g(x, y) \omega_{xy} = -\frac{1}{d_x} \sum_{y \in \Omega} g(x, y) \omega_{xy} - \frac{1}{d_x} \sum_{y \in V \setminus \Omega} g(x, y) \omega_{xy} \\ &= -\frac{1}{d_x} \sum_{y \in \Omega} g(x, y) \omega_{xy} + m_x(V \setminus \Omega) = -\frac{1}{d_x} \sum_{y \in \Omega} g(x, y) \omega_{xy} + 1 - m_x(\Omega), \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $g(x, y) = -1$  si  $x \in \Omega$  e  $y \in V \setminus \Omega$ . Por lo que ya tenemos la función que queríamos.

Recíprocamente, supongamos que existe una función  $g$  en  $\Omega \times \Omega$  que satisfice las hipótesis del Teorema. Por el Teorema 4.3.4, para ver que  $\Omega$  es calibrable basta hallar una función  $\tilde{g}$  antisimétrica con  $\tilde{g}(x, y) \in \text{sign}(\chi_\Omega(y) - \chi_\Omega(x))$  tal que

$$\begin{cases} -\lambda_\Omega = \frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} \tilde{g}(x, y) \omega_{xy} & x \in \Omega \\ m_x(\Omega) = \frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} \tilde{g}(x, y) \omega_{xy} & x \in V \setminus \Omega. \end{cases} \quad (4.26)$$

Como se ha de tener que  $\tilde{g}(x, y) = -1$  si  $x \in \Omega$  e  $y \notin \Omega$  y  $\tilde{g}(x, y) = 1$  si  $x \notin \Omega$  e  $y \in \Omega$ , la ecuación (4.26) es equivalente a

$$\begin{cases} -\lambda_\Omega = \frac{1}{d_x} \sum_{y \in \Omega} \tilde{g}(x, y) \omega_{xy} - m_x(V \setminus \Omega) & x \in \Omega \\ m_x(\Omega) = \frac{1}{d_x} \sum_{y \in V \setminus \Omega} \tilde{g}(x, y) \omega_{xy} + m_x(\Omega) & x \in V \setminus \Omega. \end{cases}$$

Tomando  $\tilde{g}(x, y) = g(x, y)$  si  $x, y \in \Omega$  se ve que se cumple la primera igualdad, y definiendo  $\tilde{g}(x, y) = 0$  si  $x, y \in V \setminus \Omega$  se cumple la segunda igualdad, lo que concluye la prueba.  $\square$

**Definición 4.3.6.** Diremos que un par  $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times L^2(V, \nu)$  es un autopar del operador  $-\Delta_1$  en  $V$  si

- (i)  $\|u\|_{L^1(V, \nu)} = 1$  y
- (ii) existe  $\xi \in \text{sign}(u)$  (en el sentido de que  $\xi(x) \in \text{sign}(u(x))$  para todo  $x \in V$ ) tal que

$$\lambda \xi \in \partial \mathcal{F}(u) = -\Delta_1 u.$$

Diremos que  $u$  es una autofunción de  $-\Delta_1$  y que  $\lambda$  es un autovalor de  $-\Delta_1$  asociado a  $u$ .

Podemos observar que si tenemos un autopar  $(\lambda, u)$  de  $\Delta_1$  entonces  $(\lambda, -u)$  también es un autopar de  $\Delta_1$ . Además, por el Teorema 4.1.7 sabemos que el hecho de que  $(\lambda, u)$  sea un autopar de  $-\Delta_1$  es equivalente a que exista una función antisimétrica  $g \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$  con  $\|g\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1$  tal que:

$$\begin{cases} -\sum_{y \in V} g(x, y) \frac{\omega_{xy}}{d_x} = \lambda \xi(x) & \text{para todo } x \in V, \\ g(x, y) \in \text{sign}(u(y) - u(x)) & \text{para } (\nu \otimes m_x) - \text{casi todo punto } (x, y) \in V \times V. \end{cases} \quad (4.27)$$

Por otro lado, como  $\lambda = TV(u)$ , se ha de tener que

$$\begin{aligned} \lambda &= TV(u) = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} |u(y) - u(x)| \omega_{xy} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} (|u(y)| + |u(x)|) \omega_{xy} = \|u\|_{L^1(V, \nu)} = 1, \end{aligned}$$

por tanto,

$$0 \leq \lambda \leq 1.$$

Asimismo, gracias al Teorema 4.3.4 podemos deducir la siguiente relación entre los conjuntos calibrables y los autopares de  $-\Delta_1$ .

**Teorema 4.3.7.** *Sea  $\Omega \subset V$  con  $0 < \nu(\Omega) < \nu(V)$ . Se tiene:*

(i) *Si  $(\lambda_\Omega, \frac{1}{\nu(\Omega)\chi_\Omega})$  es un autopar de  $-\Delta_1$ , entonces  $\Omega$  es calibrable.*

(ii) *Si  $\Omega$  es calibrable y*

$$m_x(\Omega) \leq \lambda_\Omega \quad \text{para todo } x \in V \quad (4.28)$$

*entonces  $(\lambda_\Omega, \frac{1}{\nu(\Omega)\chi_\Omega})$  es un autopar de  $-\Delta_1$ .*

**Demostración:**

(i): Como  $(\lambda_\Omega, \frac{1}{\nu(\Omega)\chi_\Omega})$  es un autopar de  $-\Delta_1$ , existe una  $\xi \in \text{sign}(\chi_\Omega)$  tal que  $-\lambda_\Omega \xi \in \Delta_1(\chi_\Omega)$ . Por tanto, por el Teorema 4.3.4  $\Omega$  es calibrable.

(ii): Si  $\Omega$  es calibrable, por el Teorema 4.3.4 se tiene que

$$-\lambda_\Omega \tau^* \in \Delta_1 \chi_\Omega \quad \text{en } V,$$

con

$$\begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega \\ -\frac{1}{\lambda_\Omega} m_x(\Omega) & \text{si } x \in V \setminus \Omega. \end{cases}$$

Por (4.28),  $\tau^* \in \text{sign}(\chi_\Omega)$ , por lo que  $(\lambda_\Omega, \frac{1}{\nu(\Omega)\chi_\Omega})$  es un autopar de  $-\Delta_1$ . □

## 4.4. La constante de Cheeger y la variación total

En esta sección vamos a ver la relación entre la constante de Cheeger de todo el grafo con la variación total de un cierto espacio de funciones. De hecho, veremos que podemos caracterizar esta constante de Cheeger como el ínfimo de la variación total de estas funciones. Además, probaremos una desigualdad de Cheeger con el hueco espectral del laplaciano, lo que nos permitirá ver que la constante de Cheeger del grafo es positiva si y solo si se cumple una desigualdad de Poincaré o una desigualdad isoperimétrica.

Vamos a asumir que la medida  $\nu$  asociada a  $(V, \omega)$  es una medida de probabilidad.

**Definición 4.4.1.** *Diremos que  $(V, \omega)$  satisface una desigualdad isoperimétrica si existe una constante  $\lambda > 0$  tal que*

$$\lambda \min\{\nu(D), 1 - \nu(D)\} \leq P(D) \quad \text{para todo } D \subset V. \quad (4.29)$$

Se puede ver fácilmente que si  $(V, \omega)$  satisface una desigualdad de Poincaré (ver Definición 3.1.1), entonces, dado  $D \subset V$ , tomando  $f = \chi_D$  se puede ver que

$$\text{Var}_\nu(f) = \nu(D)(1 - \nu(D))$$

y que

$$H(f) = \frac{1}{2}P(D),$$

por lo que la desigualdad de Poincaré nos dice que

$$\lambda\nu(D)(1 - \nu(D)) \leq \frac{1}{2}P(D).$$

Ahora, usando el hecho de que si  $x \in [0, 1]$ , entonces

$$\min\{x, 1 - x\} \leq 2x(1 - x) \leq 2\min\{x, 1 - x\},$$

por lo que la desigualdad de Poincaré implica que  $(V, \omega)$  satisface una desigualdad isoperimétrica. Recíprocamente, la desigualdad isoperimétrica implica que

$$\lambda\nu(D)(1 - \nu(D)) \leq P(D).$$

Recordemos que la constante de Cheeger del grafo  $(V, \omega)$  se define como

$$h(V) = \inf \left\{ \frac{P(D)}{\nu(D)} : D \subset V, 0 < \nu(D) \leq \frac{1}{2} \right\}. \quad (4.30)$$

Podemos ver por (4.1) que  $h(V) \leq 1$ . Además, si  $h(V) > 0$ , entonces  $h(V)$  es la mejor constante en la desigualdad isoperimétrica (4.29).

**Definición 4.4.2.** Dada una función  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ , decimos que  $\mu \in \mathbb{R}$  es una mediana de  $u$  si

$$\nu(\{x \in V : u(x) < \mu\}) \leq \frac{1}{2} \quad y \quad \nu(\{x \in V : u(x) > \mu\}) \leq \frac{1}{2}.$$

Al conjunto de medianas de  $u$  lo denotaremos  $med_\nu(u)$ .

**Proposición 4.4.3.** Dada una función  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\mu \in med_\nu(u) \Leftrightarrow -\nu(\{u = \mu\}) \leq \nu(\{u > \mu\}) - \nu(\{u < \mu\}) \leq \nu(\{u = \mu\}).$$

**Demostración:**

Supongamos que  $\mu \in med_\nu(u)$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= \nu(\{u > \mu\}) + \nu(\{u < \mu\}) + \nu(\{u = \mu\}) \\ &\leq \nu(\{u < \mu\}) + \nu(\{u = \mu\}) + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

por lo que

$$\nu(\{u < \mu\}) + \nu(\{u = \mu\}) \geq \frac{1}{2} \geq \nu(\{u > \mu\}),$$

de lo que se sigue la primera desigualdad. La segunda se tiene de forma análoga.

Recíprocamente, supongamos que se tienen las dos desigualdades de la derecha. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} 1 &= \nu(\{u > \mu\}) + \nu(\{u < \mu\}) + \nu(\{u = \mu\}) \\ &\leq 2(\nu(\{u < \mu\}) + \nu(\{u = \mu\})) = 2(1 - \nu(\{u > \mu\})), \end{aligned}$$

por tanto,

$$1 \leq 2 - 2\nu(\{u > \mu\}),$$

de lo que se sigue que

$$\nu(\{u > \mu\}) \leq \frac{1}{2}.$$

Usando la otra desigualdad obtendríamos la desigualdad análoga para  $u < \mu$ , por lo que se tiene que  $\mu \in \text{med}_\nu(u)$  como queríamos ver.  $\square$

De esta última proposición se sigue fácilmente que

$$0 \in \text{med}_\nu(u) \Leftrightarrow \exists \xi \in \text{sign}(u) \text{ tal que } \sum_{x \in V} d_x \xi(x) = 0. \quad (4.31)$$

**Definición 4.4.4.** *Vamos a denotar*

$$\Pi(V) = \{u \in L^1(V, \nu) : \|u\|_{L^1(V, \nu)} = 1 \text{ y } 0 \in \text{med}_\nu(u)\}$$

y

$$\lambda_1^m(V) = \inf \{TV(u) : u \in \Pi(V)\}. \quad (4.32)$$

Vamos a probar ahora un resultado que nos va a dar una caracterización variacional de la constante de Cheeger de  $V$  en términos de la variación total de las funciones en  $\Pi(V)$ . El resultado es el siguiente:

**Teorema 4.4.5.** *Se tiene la siguiente caracterización de la constante de Cheeger:*

$$h(V) = \lambda_1^m(V).$$

**Demostración:**

Sea  $D \subset V$  con  $0 < \nu(D) \leq \frac{1}{2}$ , entonces  $0 \in \text{med}_\nu(\chi_D)$ . Por tanto,

$$\lambda_1^m(V) \leq TV\left(\frac{1}{\nu(D)}TV(\chi_D)\right) = \frac{P(D)}{\nu(D)},$$

tomando ínfimos en  $D$  se tiene que

$$\lambda_1^m(V) \leq h(V).$$

Probemos la desigualdad contraria. Sea  $u \in \Pi(V)$ , es decir,  $u \in L^1(V, \nu)$  con  $\|u\|_{L^1(V, \nu)} = 1$  y  $0 \in \text{med}_\nu(u)$ . Denotando por  $E_t(u) = \{x \in V : u(x) > t\}$ , por

la fórmula de coárea se tiene

$$\begin{aligned}
TV(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t(u)) dt = \int_0^{+\infty} P(E_t(u)) dt + \int_{-\infty}^0 P(V \setminus E_t(u)) dt \\
&\geq h(V) \int_0^{+\infty} \nu(E_t(u)) dt + h(V) \int_{-\infty}^0 \nu(V \setminus E_t(u)) dt \\
&= h(V) \left( \sum_{x \in V} d_x u^+(x) + \sum_{x \in V} d_x u^-(x) \right) \\
&= h(V) \|u\|_{L^1(V, \nu)} = h(V).
\end{aligned}$$

Tomando ínfimos en  $u$  obtenemos

$$\lambda_1^m(V) \geq h(V)$$

como queríamos ver, lo que concluye la prueba.  $\square$

Recordemos que en el capítulo 2 probamos las siguientes desigualdades de Cheeger para el primer autovalor no nulo del laplaciano de un grafo con pesos con un conjunto de vértices finito:

$$\frac{h(V)^2}{2} \leq \lambda_1 \leq 2h(V),$$

donde  $\lambda_1$  era el primer autovalor no nulo de Laplaciano del grafo. Vamos a probar ahora que se tiene una desigualdad parecida con el hueco espectral del Laplaciano.

**Teorema 4.4.6.** *Se tiene la siguiente desigualdad de Cheeger:*

$$\frac{h(V)^2}{2} \leq \text{gap}(\mathcal{L}) \leq 2h(V).$$

**Demostración:**

Sea  $(f_n)_n \subset L^2(V, \nu)$  con  $\nu(f_n) = 0$  para todo  $n$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2H(f_n)}{\|f_n\|_{L^2(V, \nu)}^2} = \text{gap}(\mathcal{L}).$$

Consideremos  $\mu_n \in \text{med}_\nu(f_n)$ , entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
4H(f_n) &= \sum_{x,y \in V} (f_n(y) - \mu_n - (f_n(x) - \mu_n))^2 \omega_{xy} \\
&= \sum_{x,y \in V} [(f_n(y) - \mu_n)^+ - (f_n(x) - \mu_n)^+ \\
&\quad - ((f_n(y) - \mu_n)^- - (f_n(x) - \mu_n)^-)]^2 \omega_{xy} \\
&= \sum_{x,y \in V} ((f_n(y) - \mu_n)^+ - (f_n(x) - \mu_n)^+)^2 \omega_{xy} \\
&\quad + \sum_{x,y \in V} ((f_n(y) - \mu_n)^- - (f_n(x) - \mu_n)^-)^2 \omega_{xy} \\
&\quad - 2 \sum_{x,y \in V} ((f_n(y) - \mu_n)^+ - (f_n(x) - \mu_n)^+) \times \\
&\quad \times ((f_n(y) - \mu_n)^- - (f_n(x) - \mu_n)^-) \omega_{xy}.
\end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$- \sum_{x,y \in V} ((f_n(y) - \mu_n)^+ - (f_n(x) - \mu_n)^+) \cdot ((f_n(y) - \mu_n)^- - (f_n(x) - \mu_n)^-) \omega_{xy} \geq 0,$$

y, por otro lado, como  $\nu(f_n) = 0$  se tiene:

$$\sum_{x \in V} f_n^2(x) d_x \leq \sum_{x \in V} (f_n(x) - \mu_n)^2 d_x.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{4H(f_n)}{\|f_n\|_{L^2(V,\nu)}^2} &\geq \frac{\sum_{x,y \in V} ((f_n(y) - \mu_n)^+ - (f_n(x) - \mu_n)^+)^2 \omega_{xy}}{\sum_{x \in V} ((f_n(x) - \mu_n)^+)^2 d_x + \sum_{x \in V} ((f_n(x) - \mu_n)^-)^2 d_x} \\
&\quad + \frac{\sum_{x,y \in V} ((f_n(y) - \mu_n)^- - (f_n(x) - \mu_n)^-)^2 \omega_{xy}}{\sum_{x \in V} ((f_n(x) - \mu_n)^-)^2 d_x + \sum_{x \in V} ((f_n(x) - \mu_n)^+)^2 d_x}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{a+b}{c+d} \geq \min \left\{ \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right\} \quad \text{para } a, b, c, d \in \mathbb{R}^+,$$

y que

$$\sum_{x \in V} ((f_n(x) - \mu_n)^+)^2 d_x + \sum_{x \in V} ((f_n(x) - \mu_n)^-)^2 d_x > 0,$$

podemos asumir sin pérdida de generalidad que

$$\sum_{x \in V} ((f_n(x) - \mu_n)^+)^2 > 0,$$



y que

$$\frac{4H(f_n)}{\|f_n\|_{L^2(V,\nu)}^2} \geq \frac{\sum_{x,y \in V} ((f_n(y) - \mu_n)^+ - (f_n(x) - \mu_n)^+)^2 \omega_{xy}}{\sum_{x \in V} ((f_n(x) - \mu_n)^+)^2 d_x}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{x,y \in V} |((f_n(y) - \mu_n)^+)^2 - ((f_n(x) - \mu_n)^+)^2| \omega_{xy} \\ & \leq \left( \sum_{x,y \in V} ((f_n(y) - \mu_n)^+ - (f_n(x) - \mu_n)^+)^2 \omega_{xy} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times \left( \sum_{x,y \in V} ((f_n(y) - \mu_n)^+ + (f_n(x) - \mu_n)^+)^2 \omega_{xy} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, es fácil ver que

$$\sum_{x,y \in V} ((f_n(y) - \mu_n)^+ + (f_n(x) - \mu_n)^+)^2 \omega_{xy} \leq 4 \sum_{x \in V} ((f_n(x) - \mu_n)^+)^2 d_x.$$

Por tanto:

$$\frac{4H(f_n)}{\|f_n\|_{L^2(V,\nu)}^2} \geq \left( \frac{\frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} |((f_n(y) - \mu_n)^+)^2 - ((f_n(x) - \mu_n)^+)^2| \omega_{xy}}{\sum_{x \in V} ((f_n(x) - \mu_n)^+)^2 d_x} \right)^2.$$

Como  $0 \in \text{med}_\nu(f_n)$ , por el Teorema 4.4.5 obtenemos:

$$(h(V))^2 \leq \frac{4H(f_n)}{\|f_n\|_{L^2(V,\nu)}^2}.$$

Tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$ , conseguimos

$$(h(V))^2 \leq 2\text{gap}(\mathcal{L}).$$

Veamos la otra desigualdad, para ello asumamos que  $\text{gap}(\mathcal{L}) > 0$  (si  $\text{gap}(\mathcal{L}) = 0$ , por la desigualdad que hemos probado se tendría que  $h(V) = 0$ , por lo que sería trivial). Si  $\text{gap}(\mathcal{L}) > 0$ , se tiene por (4.29) y la observación posterior que:

$$\min\{\nu(D), 1 - \nu(D)\} \leq \frac{2}{\text{gap}(\mathcal{L})} P(D) \quad \text{para todo } D \subset V \text{ con } 0 < \nu(D) < 1,$$

de lo que se sigue que

$$\text{gap}(\mathcal{L}) \leq 2h(V),$$

como queríamos ver, lo que concluye la prueba.  $\square$

Una consecuencia inmediata de este Teorema es el siguiente Corolario:

**Corolario 4.4.7.** *Sea  $A \subset V$  con  $\nu(A) = \frac{1}{2}$  y sea  $u = \chi_A - \chi_{V \setminus A}$ . Entonces:*

(I)  $h(V) = \frac{P(A)}{\nu(A)} \Leftrightarrow u = \chi_A - \chi_{V \setminus A}$  minimiza (4.32).

(II)  $u$  minimiza (4.32) y  $\text{gap}(\mathcal{L}) = 2h(V) \Leftrightarrow u$  minimiza (3.6).

Agrupando todos estos resultados podemos enunciar el siguiente resultado:

**Teorema 4.4.8.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a)  $(V, \omega)$  satisface una desigualdad de Poincaré,
- (b)  $\text{gap}(\mathcal{L}) > 0$ ,
- (c)  $(V, \omega)$  satisface una desigualdad isoperimétrica,
- (d)  $h(V) > 0$ .

## 4.5. La constante de Cheeger y los autovalores del 1-Laplaciano

En esta sección vamos a estudiar la relación de los distintos autovalores del 1-Laplaciano con la constante de Cheeger del grafo. Además veremos una cota para esta constante de Cheeger en términos de los autovalores no nulos del 1-Laplaciano. Por último, veremos que si la constante de Cheeger de un grafo es un autovalor del 1-Laplaciano, entonces tendremos que un cierto conjunto y su complementario son calibrables.

Vamos a asumir de nuevo que la medida  $\nu$  es una medida de probabilidad, si bien todos los resultados que vamos a ver son ciertos siempre que la medida sea finita dado que los valores de  $\lambda_\Omega = \frac{P(\Omega)}{\nu(\Omega)}$  y los autovalores de  $-\Delta_1$  permanecen igual.

**Proposición 4.5.1.** *Sea  $(\lambda, u)$  un autopar de  $-\Delta_1$ . Entonces:*

- (I)  $\lambda = 0 \Leftrightarrow u$  es constante, es decir,  $u = 1$  o  $u = -1$ .
- (II)  $\lambda \neq 0 \Leftrightarrow$  existe  $\xi \in \text{sign}(u)$  tal que  $\sum_{x \in V} \xi(x) d_x = 0$ .

**Demostración:**

1.  $(\Rightarrow)$  Supongamos  $\lambda = 0$ . Entonces existe una función  $\xi \in \text{sign}(u)$  tal que

$$TV(u) = \sum_{x \in V} u(x) \lambda \xi(x) d_x = 0.$$

Por 4.0.7, se tiene que  $u$  es constante, además, por ser autofunción,  $\|u\|_{L^1(V, \nu)} = 1$ . Por tanto  $u = 1$  o  $u = -1$ .

$(\Leftarrow)$  Si  $u$  es constante, por 4.0.7  $TV(u) = 0$ . Por tanto,  $\lambda = TV(u) = 0$ .

2. ( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\lambda = 0$ , por lo anterior esto implica que  $u = \pm 1$ , lo que contradice la existencia de  $\xi \in \text{sign}(u)$  tal que  $\sum_{x \in V} d_x \xi(x) = 0$ .
- ( $\Rightarrow$ ) Existe una función  $\xi \in \text{sign}(u)$  y una función  $g(x, y) \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$  antisimétrica con  $\|g\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1$  satisfaciendo (4.27), por tanto, por la anitismetría de  $g(x, y)$  se tiene:

$$\lambda \sum_{x \in V} \xi(x) d_x = - \sum_{x, y \in V} g(x, y) \omega_{xy} = 0.$$

Como  $\lambda \neq 0$ , se ha de tener que

$$\sum_{x \in V} \xi(x) d_x = 0.$$

□

Podemos observar que tanto  $(0, 1)$  como  $(0, -1)$  son autopares de  $-\Delta_1$ . Gracias a (4.31) podemos enunciar el siguiente Corolario inmediato de la proposición:

**Corolario 4.5.2.** *Si  $(\lambda, u)$  es un autopar de  $-\Delta_1$ , entonces*

$$\lambda \neq 0 \Leftrightarrow 0 \in \text{med}_\nu(u).$$

En particular, observamos que si  $\lambda \neq 0$  es un autovalor de  $\Delta_1$ , entonces va a existir una autofunción  $u$  asociada a  $\lambda$  tal que el conjunto de nivel  $E_0(u)$  tiene medida  $\nu$  positiva, lo cual nos será muy útil más adelante. De hecho, para cualquier autofunción  $u$  asociada a  $\lambda$ , o bien  $u$  o bien  $-u$  cumplirá esta condición.

**Proposición 4.5.3.** *Sea  $t \geq 0$ . Si  $(\lambda, u)$  es un autopar de  $-\Delta_1$  con  $\lambda > 0$  y  $\nu(E_t(u)) > 0$ , entonces  $(\lambda, \frac{1}{\nu(E_t(u))} \chi_{E_t(u)})$  es un autopar de  $-\Delta_1$ ,  $\lambda = \lambda_{E_t(u)}$  y  $E_t(u)$  es calibrable. Además,  $\nu(E_t(u)) \leq \frac{1}{2}$ .*

**Demostración:**

Por el Corolario 4.5.2,  $\nu(E_0(u)) \leq \frac{1}{2}$  y, por tanto,  $\nu(E_t(u)) \leq \frac{1}{2}$  para todo  $t \geq 0$ . Por otro lado, como  $(\lambda, u)$  es un autopar, existe una función  $\xi \in \text{sign}(u)$  y  $g \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$  antisimétrica con  $g(x, y) \in \text{sign}(u(y) - u(x))$  tal que

$$- \sum_{y \in V} g(x, y) \frac{\omega_{xy}}{d_x} = \lambda \xi(x) \quad \text{para todo } x \in V.$$

Sea  $t \geq 0$  tal que  $\nu(E_t(u)) > 0$ , entonces:

$$\xi(x) \begin{cases} = 1 & \text{si } x \in E_t(u), \\ \in [-1, 1] & \text{si } x \in V \setminus E_t(u), \end{cases}$$

por lo que  $\xi \in \text{sign}(\chi_{E_t(u)})$ . Por otro lado,

$$g(x, y) \begin{cases} \in [-1, 1] & \text{si } x, y \in E_t(u), \\ = -1 & \text{si } x \in E_t(u), y \in V \setminus E_t(u), \\ = 1 & \text{si } x \in V \setminus E_t(u), y \in E_t(u), \\ \in [-1, 1] & \text{si } x, y \in V \setminus E_t(u), \end{cases}$$

por lo que  $g(x, y) \in \text{sign}(\chi_{E_t(u)}(y) - \chi_{E_t(u)}(x))$ . Por tanto,  $(\lambda, \frac{1}{\nu(E_t(u))}\chi_{E_t(u)})$  es un autopar de  $-\Delta_1$ . Por el Teorema 4.3.4 y el Teorema 4.3.7 se tiene que  $\lambda = \lambda_{E_t(u)}$  y que  $E_t(u)$  es calibrable, como queríamos probar.  $\square$

Veamos ahora que podemos acotar la constante de Cheeger por cad uno de los autovalores de  $-\Delta_1$ .

**Teorema 4.5.4.** *Si  $\lambda \neq 0$  es un autovalor de  $-\Delta_1$ , entonces*

$$h(V) \leq \lambda.$$

**Demostración:**

Por la Proposición 4.5.3 y la observación anterior a la misma, se tiene que  $0 < \nu(E_0(u)) \leq \frac{1}{2}$  y además, por (4.2) se tiene

$$h(V) \leq \frac{P(E_0(u))}{\nu(E_0(u))} = TV \left( \frac{1}{\nu(E_0(u))}\chi_{E_0(u)} \right) = \lambda.$$

$\square$

De hecho, en el caso de grafos finitos, se tiene que el primer autovalor no nulo de  $\Delta_1$  es precisamente la constante de Cheeger del grafo  $h(V)$  (ver [8]). Si bien no vamos a probar ese resultado, sí vamos a ver que cuando el ínfimo en (4.30) se alcanza, se tiene que la constante de Cheeger del grafo  $h(V)$  es un autovalor de  $-\Delta_1$ .

**Teorema 4.5.5.** *Sea  $\Omega \subset V$  con  $0 < \nu(\Omega) \leq \frac{1}{2}$ . Entonces:*

- (I) *Si  $\Omega$  y  $V \setminus \Omega$  son calibrables, entonces  $(\lambda_\Omega, \frac{1}{\nu(\Omega)}\chi_\Omega)$  es un autopar de  $-\Delta_1$ .*
- (II) *Si  $h(V) = \lambda_\Omega$ , entonces  $\Omega$  y  $V \setminus \Omega$  son calibrables.*
- (III) *Si  $h(V) = \lambda_\Omega$ , entonces  $(\lambda_\Omega, \frac{1}{\nu(\Omega)}\chi_\Omega)$  es un autopar de  $-\Delta_1$ .*

**Demostración:**

Lo primero que debemos observar es que como  $\nu(\Omega) \leq \frac{1}{2}$ ,

$$\lambda_{V \setminus \Omega} \leq \lambda_\Omega. \tag{4.33}$$

(I): Por la Proposición 4.3.5, como  $\Omega$  y  $V \setminus \Omega$  son calibrables, existen funciones  $g_1$  en  $\Omega \times \Omega$  y  $g_2$  en  $(V \setminus \Omega) \times (V \setminus \Omega)$  antisimétricas tales que

$$-1 \leq g_1(x, y) \leq 1 \quad \text{para } (\nu \otimes m_x) \text{-casi todo punto } (x, y) \in \Omega \times \Omega,$$

$$-1 \leq g_2(x, y) \leq 1 \quad \text{para } (\nu \otimes m_x)\text{-casi todo punto } (x, y) \in (V \setminus \Omega) \times (V \setminus \Omega),$$

y que además cumplen

$$\lambda_\Omega = -\frac{1}{d_x} \sum_{y \in \Omega} g_1(x, y) \omega_{xy} + 1 - m_x(\Omega) \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad (4.34)$$

y

$$\lambda_{V \setminus \Omega} = -\frac{1}{d_x} \sum_{y \in V \setminus \Omega} g_2(x, y) \omega_{xy} + 1 - m_x(V \setminus \Omega) \quad \text{para todo } x \in V \setminus \Omega. \quad (4.35)$$

Por tanto, tomando

$$g(x, y) = \begin{cases} g_1(x, y) & \text{si } x, y \in \Omega, \\ -1 & \text{si } x \in \Omega, y \in V \setminus \Omega, \\ 1 & \text{si } x \in V \setminus \Omega, y \in \Omega, \\ -g_2(x, y) & \text{si } x, y \in V \setminus \Omega, \end{cases}$$

tendríamos que  $g(x, y) \in \text{sign}(\chi_\Omega(y) - \chi_\Omega(x))$ , además, por (4.34),

$$\lambda_\Omega = -\frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} g(x, y) \omega_{xy} \quad \text{para todo } x \in \Omega,$$

y, por (4.33) y (4.35),

$$-\lambda_\Omega \leq -\lambda_{V \setminus \Omega} = -\frac{1}{d_x} \sum_{y \in V} g(x, y) \omega_{xy} \leq \lambda_\Omega \quad \text{para todo } x \in V \setminus \Omega.$$

Por tanto, por (4.27), obtenemos que  $(\lambda_\Omega, \frac{1}{\nu(\Omega)} \chi_\Omega)$  es un autopar de  $-\Delta_1$ .

(II): Como  $h(V) = \frac{P(\Omega)}{\nu(\Omega)}$  y  $0 < \nu(\Omega) \leq \frac{1}{2}$ , tenemos que  $h(V) = h_1(\Omega) = \frac{P(\Omega)}{\nu(\Omega)}$ , por lo que  $\Omega$  es calibrable. Supongamos que  $V \setminus \Omega$  no lo es, es decir, que existe un conjunto  $E \subset V \setminus \Omega$  tal que  $\nu(E) < \nu(V \setminus \Omega)$  y

$$\lambda_E < \lambda_{V \setminus \Omega}.$$

Por (4.33), esto implica que  $\nu(E) > \frac{1}{2}$  ya que si no

$$h(V) \leq \lambda_E < \lambda_{V \setminus \Omega} \leq \lambda_\Omega = h(V),$$

que es una contradicción. Además,  $\nu(E) < \nu(V \setminus \Omega)$  y  $\lambda_E < \lambda_{V \setminus \Omega}$ , por lo que

$$P(E) < P(V \setminus \Omega) = P(\Omega).$$

Sin embargo, como  $\nu(E) > \frac{1}{2}$ , se ha de tener que  $\nu(V \setminus E) \leq \frac{1}{2}$  y, observando que  $\nu(\Omega) \leq \nu(V \setminus E)$  dado que  $E \subset V \setminus \Omega$ , llegamos a que

$$\lambda_{V \setminus E} = \frac{P(E)}{\nu(V \setminus E)} < \frac{P(\Omega)}{\nu(\Omega)} = h(V),$$

lo cual es una contradicción. Por tanto,  $V \setminus \Omega$  es calibrable.

(III): Esta afirmación es una consecuencia directa de (i) y (ii).

□

Como consecuencia de este resultado, tenemos el siguiente Corolario:

**Corolario 4.5.6.** *Si  $h(V)$  es un autovalor positivo de  $-\Delta_1$ , entonces, para cualquier autofunción  $u$  asociada a  $h(V)$  y cualquier  $t \geq 0$  tal que  $\nu(E_t(u)) > 0$ ,  $\left(h(V), \frac{1}{\nu(E_t(u))} \chi_{E_t(u)}\right)$  es un autopar de  $-\Delta_1$ ,  $\nu(E_t(u)) \leq \frac{1}{2}$  y*

$$h(V) = \lambda_{E_t(u)}.$$

*Además, tanto  $E_t(u)$  como  $V \setminus E_t(u)$  son calibrables.*

## Capítulo 5

# Modelo ROF en $L^2(V, \nu)$

En este capítulo, vamos a estudiar el modelo ROF con término de fidelidad en  $L^2(V, \nu)$ , donde vamos a asumir que  $\nu$  es una medida de probabilidad. Este modelo se ha usado ampliamente en el tratamiento de imágenes, en concreto, se ha usado para limpiar imágenes con ruido. En nuestro contexto, vamos a tener una imagen con ruido  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , y queremos obtener la imagen sin ruido  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , que estarán relacionadas mediante

$$f = u + n,$$

donde  $n$  es el término de ruido. El modelo ROF que vamos a estudiar es el siguiente:

$$\min \left\{ TV(u) + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_{L^2(V, \nu)}^2 : u \in L^2(V, \nu) \right\}, \quad (5.1)$$

donde  $f \in L^2(V, \nu)$  y  $\lambda > 0$  es un parámetro de escala que medirá la diferencia entre  $f$  y  $u$ . Para simplificar la notación, escribiremos:

$$\mathcal{G}(u, f, \lambda) = TV(u) + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_{L^2(V, \nu)}^2, \quad u \in L^2(V, \nu).$$

Lo primero que vamos a probar, es precisamente que existe una única función en  $L^2(V, \nu)$  que minimice  $\mathcal{G}(\cdot, f, \lambda)$ , y además vamos a caracterizarla como la solución de una ecuación usando el 1-Laplaciano.

**Teorema 5.0.1.** *Para toda  $f \in L^2(V, \nu)$  y  $\lambda > 0$ , existe una única función minimizante  $u_\lambda$  del problema (5.1). Además,  $u_\lambda$  es la única solución del problema*

$$\lambda(u - f) \in \Delta_1(u). \quad (5.2)$$

*Por tanto,  $u_\lambda \in L^2(V, \nu)$  es la solución del problema (5.1) si y solo si existe una función  $g \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$  antisimétrica tal que*

$$\lambda(u_\lambda - f) = \operatorname{div}_G(g) \quad (5.3)$$

*y*

*$g(x, y) \in \operatorname{sign}(u_\lambda(y) - u_\lambda(x))$  para  $(\nu \otimes m_x)$  - casi todo punto  $(x, y) \in V \times V$ .*

**Demostración:**

Sea  $f \in L^2(V, \nu)$ , y sea  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(V, \nu)$  una sucesión minimizante de (5.1), es decir,

$$\alpha = \inf \{ \mathcal{G}(u, f, \lambda) : u \in L^2(V, \nu) \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}(u_n, f, \lambda).$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^2(V, \nu)}^2 &\leq \|u_n - f\|_{L^2(V, \nu)}^2 + \|f\|_{L^2(V, \nu)}^2 \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \mathcal{G}(u_n, f, \lambda) + \|f\|_{L^2(V, \nu)}^2, \end{aligned}$$

por lo que  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(V, \nu)$  es una sucesión acotada. Por tanto, podemos asumir, puede que restringiéndonos a una subsucesión, que

$$u_n \rightharpoonup u_\lambda \quad \text{débilmente en } L^2(V, \nu).$$

Por tanto, por la semicontinuidad de la norma en  $L^2(V, \nu)$  respecto a la convergencia débil de  $L^2(V, \nu)$  y por el Corolario 4.1.4,

$$\mathcal{G}(u, f, \lambda) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}(u_n, f, \lambda) = \alpha,$$

por lo que efectivamente  $u_\lambda$  es una función minimizante de (5.1). La unicidad se obtiene a partir de la convexidad de  $TV(\cdot)$  y la convexidad estricta de  $\|\cdot\|_{L^2(V, \nu)}^2$ .

Como  $u_\lambda$  minimiza 5.1, tenemos que  $0 \in \partial \mathcal{G}(u_\lambda, f, \lambda)$ . Ahora, denotando por  $\Phi(u) = \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_{L^2(V, \nu)}^2$ , por [5, Corolario 2,11] se tiene:

$$\partial \mathcal{G}(u, f, \lambda) = \partial \mathcal{F}(u) + \partial \Phi(u), \quad (5.4)$$

por lo que

$$0 \in \partial \mathcal{G}(u_\lambda, f, \lambda) = \partial \mathcal{F}(u_\lambda) + \lambda(u_\lambda - f),$$

como afirmábamos en (5.2). Por otro lado, (5.3) se sigue del Teorema 4.1.7.  $\square$

Vamos a introducir un espacio de funciones que son la divergencia de alguna función en  $X^2(V, \nu)$ , donde veremos que podemos acotar la norma de la diferencia entre la función objetivo y la imagen con ruido.

**Definición 5.0.2.** *Denotaremos*

$$G(V, \nu) = \{ f \in L^2(V, \nu) : \exists z \in X^2(V, \nu) : f = \text{div}_G(z) \}, \quad (5.5)$$

el cual consideraremos con la norma

$$\|f\|_* = \inf \{ \|z\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} : f = \text{div}_G(z) \}.$$

Siguiendo la prueba del Teorema 4.1.7 podemos ver que

$$\|f\|_* = \sup \left\{ \left| \sum_{x \in V} d_x f(x) u(x) \right| : u \in L^2(V, \nu), TV(u) \leq 1 \right\}, \quad (5.6)$$



y

$$\partial\mathcal{F}(u) = \left\{ v \in G(V, \nu) : \|v\|_* \leq 1, \sum_{x \in V} d_x u(x) v(x) = \mathcal{F}(u) \right\}. \quad (5.7)$$

Por esta última igualdad, y el Teorema 5.0.1,  $u_\lambda$  es solución del problema (5.1) si y solo si

$$\begin{cases} f - u_\lambda \in G(V, \nu), \\ \|f - u_\lambda\|_* \leq \frac{1}{\lambda} \text{ y} \\ \lambda \sum_{x \in V} d_x (f(x) - u_\lambda(x)) u_\lambda(x) = TV(u_\lambda). \end{cases} \quad (5.8)$$

De (5.8), se sigue el siguiente resultado:

**Proposición 5.0.3.** *Sea  $f \in L^2(V, \nu)$  y  $\lambda > 0$ . Entonces  $u_\lambda = 0$  es solución del problema (5.1) si y solo si*

$$f \in G(V, \nu) \text{ y además } \|f\|_* \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Si  $f \in G(V, \nu)$  con  $\|f\|_* > \frac{1}{\lambda}$ , entonces  $u_\lambda$  está caracterizada por:

$$\|f - u_\lambda\|_* = \frac{1}{\lambda}$$

y

$$\lambda \sum_{x \in V} d_x (f(x) - u_\lambda(x)) u_\lambda(x) = TV(u_\lambda).$$

**Demostración:**

La primera parte se sigue de (5.8). Sea  $f \in G(V, \nu)$  con  $\|f\|_* > \frac{1}{\lambda}$ , por (5.8),

$$\|\lambda(f - u_\lambda)\|_* \leq 1 \text{ y } \lambda \sum_{x \in V} d_x (f(x) - u_\lambda(x)) u_\lambda(x) = TV(u_\lambda).$$

Como  $\|f\|_* > \frac{1}{\lambda}$ , sabemos que  $u_\lambda \neq 0$ , por tanto, por (5.6) tenemos:

$$\|\lambda(f - u_\lambda)\|_* \geq \frac{\lambda}{TV(u_\lambda)} \sum_{x \in V} d_x (f(x) - u_\lambda(x)) u_\lambda(x) = 1.$$

Por consiguiente,

$$\|f - u_\lambda\|_* = \frac{1}{\lambda},$$

lo que concluye la prueba.  $\square$

El modelo ROF que estamos estudiando nos ha llevado a la siguiente  $(BV, L^2)$ -descomposición de la imagen con ruido  $f$ :

$$\begin{cases} f = u_\lambda + v_\lambda, \\ (u_\lambda, v_\lambda) = \underset{(u, v) \in L^2(V, \nu) \times L^2(V, \nu)}{\operatorname{argmin}} \left\{ TV(u) + \frac{\lambda}{2} \|v\|_{L^2(V, \nu)}^2 : f = u + v \right\}. \end{cases}$$

Agrupando todos los resultado que hemos visto en esta parte, obtenemos:

**Corolario 5.0.4.** Sea  $f \in L^2(V, \nu)$  y  $\lambda > 0$ . Para la  $(BV, L^2)$ -descomposición  $(u_\lambda, v_\lambda)$  de  $f$  se tiene:

$$(I) \quad v_\lambda \in G(V, \nu), \|v_\lambda\|_* \leq \frac{1}{\lambda} \text{ y } \lambda \sum_{x \in V} v_\lambda(x) u_\lambda(x) = TV(u_\lambda).$$

$$(II) \quad u_\lambda = 0 \text{ si y solo si } v_\lambda = f.$$

(III) Si  $f \in G(V, \nu)$  con  $\|f\|_* > \frac{1}{\lambda}$ , entonces

$$\|v_\lambda\|_* = \frac{1}{\lambda} \text{ y además } \lambda \sum_{x \in V} v_\lambda(x) u_\lambda(x) = TV(u_\lambda).$$

**Proposición 5.0.5.** Sea  $f \in L^2(V, \nu)$ . Si  $u_\lambda$  es la única solución de (5.1), entonces

$$\sum_{x \in V} d_x u_\lambda(x) = \sum_{x \in V} d_x f(x).$$

**Demostración:**

Por (5.3), se tiene que

$$\lambda(u_\lambda - f) = \text{div}_G(g).$$

Por tanto, integrando respecto de  $\nu$  y usando la fórmula de Green (4.3) con  $u = 1$  y  $z = g$ , obtenemos:

$$\sum_{x \in V} d_x(u_\lambda(x) - f(x)) = \sum_{x \in V} \text{div}_G(g)(x) = 0,$$

de donde se sigue el resultado.  $\square$

Vamos a construir ahora un minimizante de (5.1) para  $f = bu$ , donde  $u$  es una función de  $L^2(V, \nu)$  que cumple una determinada ecuación involucrando al 1-Laplaciano.

**Proposición 5.0.6.** Sean  $\lambda, b > 0$ . Si  $u \in L^2(V, \nu)$  es solución de

$$-u \in \Delta_1 u, \tag{5.9}$$

entonces  $u_\lambda = (b - \frac{1}{\lambda})^+ u$  es un minimizante de (5.1) con  $f = bu$ . Recíprocamente, si  $(b - \frac{1}{\lambda}) u$  minimiza (5.1) con  $f = bu$ , entonces  $u$  es solución de (5.9).

**Demostración:**

Sea  $a = (b - \frac{1}{\lambda})^+$  y sea  $u \in L^2(V, \nu)$  una solución de (5.9). Supongamos que  $b > \frac{1}{\lambda}$ , por lo que  $a = b - \frac{1}{\lambda}$ . Entonces

$$\lambda(au - f) = \lambda(au - bu) = -u \in \Delta_1(u) = \Delta_1(au).$$

Por tanto, por el Teorema 5.0.1,  $au$  minimiza (5.1). Supongamos ahora que  $b \leq \frac{1}{\lambda}$ , por lo que  $a = 0$ . Como  $u$  es solución de (5.9), por el Teorema 4.1.7, existe una función  $g \in L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)$  antisimétrica tal que

$$-div_G(g) = u$$

y

$$g(x, y) \in sign(u(y) - u(x)) \quad \text{para } (\nu \otimes m_x) - \text{casi todo punto } (x, y) \in V \times V.$$

Si elegimos  $z = \lambda bg$ , entonces  $\|z\|_{L^\infty(V \times V, \nu \otimes m_x)} \leq 1$  y

$$-\frac{1}{\lambda} div_G(z) = -b div_G(g) = bu = f$$

y

$$z(x, y) \in sign(0) \quad \text{para } (\nu \otimes m_x) - \text{casi todo punto } (x, y) \in V \times V.$$

Por tanto,

$$-\lambda f = -\lambda bu \in \partial \mathcal{F}(0),$$

y, por el Teorema 5.0.1, 0 es una solución del problema (5.1) con  $f = bu$ .

Supongamos ahora que  $(b - \frac{1}{\lambda})u$  minimiza (5.1) con  $f = bu$ . Entonces, por el Teorema 5.0.1,

$$-\lambda \left( \left( b - \frac{1}{\lambda} \right) u - bu \right) \in \partial \mathcal{F} \left( \left( b - \frac{1}{\lambda} \right) u \right),$$

pero  $-\lambda \left( \left( b - \frac{1}{\lambda} \right) u - bu \right) = -u$  y  $\partial \mathcal{F} \left( \left( b - \frac{1}{\lambda} \right) u \right) = \partial \mathcal{F}(u)$ , por lo que  $u$  es solución de (5.9).  $\square$

## 5.1. El método de descenso del gradiente para el modelo ROF

En esta sección vamos a demostrar que podemos aproximar la solución del problema (5.1) mediante la solución del siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} v_t \in \Delta_1(v(t)) - \lambda(v(t) - f) & \text{en } (0, T) \times V, \\ v(0, x) = v_0(x) & \text{para } x \in V, \end{cases} \quad (5.10)$$

con  $v_0$  cumpliendo

$$\sum_{x \in V} d_x v_0(x) = \sum_{x \in V} d_x f(x).$$

Usando (5.4), podemos reescribir (5.10) como el siguiente problema de Cauchy abstracto en  $L^2(V, \nu)$ :

$$v'(t) + \partial \mathcal{G}(v(t), f, \lambda) \ni 0 \quad v(0) = v_0. \quad (5.11)$$

Como  $\mathcal{G}(\cdot, f, \lambda)$  es convexa y semicontinua inferiormente, podemos afirmar que, dado un dato inicial  $v_0 \in L^2(V, \nu)$ , el problema (5.11) tiene una única solución fuerte  $v(t)$  (ver [5]). Por tanto, si definimos la solución de (5.11) como una función  $v \in C(0, T; L^2(V, \nu)) \cap W_{loc}^{1,1}(0, T; L^2(V, \nu))$  tal que  $v(0, x) = v_0(x)$  y que cumpla

$$\lambda(v(t) - f) + v_t(t) \in \Delta_1(v(t)) \quad \text{para casi todo } t \in (0, T),$$

podemos enunciar el siguiente resultado:

**Teorema 5.1.1.** *Para toda función  $v_0 \in L^2(V, \nu)$ , existe una única solución fuerte del problema (5.11) en  $(0, T)$  para todo  $T > 0$ .*

De hecho, vamos a ver que la solución del problema (5.11) conserva la masa, es decir, que conserva la media del dato  $f$ .

**Proposición 5.1.2.** *Sea  $f \in L^2(V, \nu)$  y sea  $v(t)$  la solución del problema (5.11) con dato inicial  $v_0$  satisfaciendo*

$$\sum_{x \in V} d_x v_0(x) = \sum_{x \in V} d_x f(x).$$

Entonces,

$$\sum_{x \in V} d_x v(t)(x) = \sum_{x \in V} d_x f(x) \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

**Demostración:**

Tenemos

$$v_t + \lambda(v(t) - f) \in \Delta_1(v(t)).$$

Si integramos respecto de  $\nu$  y después respecto de  $t$ , usando que  $\sum_{x \in V} d_x v_0(x) = \sum_{x \in V} d_x f(x)$ , obtenemos:

$$\lambda \int_0^t \sum_{x \in V} d_x v(s)(x) ds - \lambda t \sum_{x \in V} d_x f(x) + \sum_{x \in V} d_x v(t)(x) - \sum_{x \in V} d_x f(x) = 0.$$

Por tanto, la función  $z(t) = \int_0^t \sum_{x \in V} d_x v(s)(x) ds$  satisface la ecuación diferencial

$$\begin{cases} z'(t) + \lambda z(t) = (\lambda t + 1) \sum_{x \in V} d_x f(x), \\ z(0) = 0, \end{cases}$$

cuya solución es  $z(t) = t \sum_{x \in V} d_x f(x)$ . Por tanto,

$$\sum_{x \in V} d_x v(t)(x) = \sum_{x \in V} d_x f(x),$$

como queríamos probar.  $\square$

Por último, vamos a enunciar y probar el resultado que nos permite afirmar que la solución del problema (5.11),  $v(t)$ , se aproxima a la solución del problema (5.1) cuando  $t$  tiende a infinito.

**Teorema 5.1.3.** *Sea  $f \in L^2(V, \nu)$  y sea  $v(t)$  la solución del problema (5.11) para  $v_0 \in L^2(V, \nu)$  tal que  $\sum_{x \in V} d_x v_0(x) = \sum_{x \in V} d_x f(x)$ . Entonces,*

$$\|v(t) - u_\lambda\|_{L^2(V, \nu)} \leq \|v_0 - u_\lambda\|_{L^2(V, \nu)} \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (5.12)$$

donde  $u_\lambda$  es la única función minimizante de (5.1).

**Demostración:**

Tenemos

$$v_t + \lambda(v(t) - f) \in \Delta_1(v(t)),$$

y, por el Teorema 5.0.1,

$$\lambda(u_\lambda - f) \in \Delta_1(u_\lambda).$$

Como por la Proposición A.2.13  $-\Delta_1$  es un operador monótono en  $L^2(V, \nu)$ , obtenemos

$$\sum_{x \in V} d_x ((v(t)(x) - u_\lambda(x))(-v_t(t)(x) - \lambda(v(t)(x) - f(x)) - (-\lambda(u_\lambda(x) - f(x)))) \geq 0,$$

de lo que se sigue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{x \in V} d_x (v(t)(x) - u_\lambda(x))^2 + \lambda \sum_{x \in V} d_x (v(t)(x) - u_\lambda(x))^2 \leq 0.$$

Integrando esta desigualdad llegamos a (5.12), como queríamos.  $\square$

# Apéndice A

## Complementos de Análisis Convexo

### A.1. Introducción a los operadores multivaluados

En este apéndice vamos a introducir algunos conceptos de análisis convexo que usaremos a lo largo de las distintas secciones. En este apéndice siempre consideraremos que  $H$  es un espacio de Hilbert real.

Vamos a considerar aplicaciones de la forma

$$A : H \rightarrow 2^H.$$

A estas aplicaciones las llamaremos *operadores*. El objetivo de este apéndice será dar las definiciones básicas sobre estos operadores y, dado un operador  $A$ , estudiar el siguiente problema de evolución:

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) \ni f(t) & t \in (0, T), \\ u(0) = x, \end{cases}$$

donde  $f : (0, T) \rightarrow H$  es una función y  $x \in H$ . Las demostraciones de los resultados no probados que hay en este apéndice se pueden encontrar en [13].

Dado un operador  $A$  y  $x \in H$ , denotaremos por  $Ax$  al valor de  $A$  en  $x$ ,  $D(A) = \{x \in H : Ax \neq \emptyset\}$  es el *dominio efectivo* de  $A$  y  $R(A) = \bigcup \{Ax : x \in D(A)\}$  el *rango* de  $A$ . Podemos observar que todo operador  $A$  define el siguiente conjunto en  $H \times H$ , llamado la *gráfica* de  $A$ :

$$G(A) = \{(x, y) \in H \times H : y \in Ax\}.$$

Recíprocamente, todo subconjunto  $G$  de  $H \times H$  determina un único operador  $A$  definido como:

$$y \in Ax \Leftrightarrow (x, y) \in G.$$

Según el contexto, identificaremos un operador con su gráfica. Dados dos operadores  $A$  y  $B$ , y un escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , podemos definir los siguientes operadores:

$$(A + B)x = Ax + Bx,$$

$$(\lambda A)x = \lambda(Ax),$$

$$A^{-1}x = \{y \in H : x \in Ay\}.$$

Además, definimos el *cierre* de  $A$  (denotado como  $\bar{A}$ ) como el operador definido de la siguiente forma:

$$y \in \bar{A}x \Leftrightarrow \exists y_n \in Ax_n : x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y,$$

es decir,  $\bar{A}$  es la clausura de la gráfica de  $A$ .

Para continuar, vamos a introducir la siguiente notación:

**Definición A.1.1.** *Dado un intervalo real  $I$ , definimos:*

- $C(I; H) = \{f : I \rightarrow H : f \text{ continua}\},$
- $L^1(I; H) = \{f : I \rightarrow H : \int_I \|f(t)\| dt < +\infty\},$
- $L^1_{loc}(I; H) = \{f : I \rightarrow H : f \in L^1([a, b]; H) \text{ para todo intervalo } [a, b] \subset I\}$
- $W^{1,1}(I; H) = \{f : I \rightarrow H : f = f(0) + \int_0^t h(s) ds \text{ para algún } h \in L^1(I; H)\}.$

**Definición A.1.2.** *Dado el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) \ni f(t), & t \in (0, T) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

donde  $A$  es un operador en  $H$  y  $f : (0, T) \rightarrow H$ , decimos que una función  $u : [0, +\infty) \rightarrow H$  es solución fuerte del problema (A.1) si

- (i)  $u \in C([0, +\infty); H) \cap W^{1,1}((0, +\infty); H)$  y
- (ii)  $u$  satisface (A.1).

## A.2. Soluciones leves y operadores acretivos

A grandes rasgos, el concepto de solución leve del problema (A.1) es simplemente una función  $u \in C([0, T]; X)$  que es el límite uniforme de soluciones del problema discretizado en el tiempo. Este concepto de solución es clásico desde el punto de vista del análisis numérico. Veamos su definición formal:

**Definición A.2.1.** *Sea  $\varepsilon > 0$ . Una  $\varepsilon$ -discretización de  $u' + Au \ni f$  en  $[a, b]$  es una partición  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$  y una sucesión finita  $f_1, f_2, \dots, f_N$  de elementos de  $H$  tales que*

$$a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq b, \text{ con}$$

$$t_i - t_{i-1} \leq \varepsilon, i = 1, 2, \dots, N, t_0 - a \leq \varepsilon \text{ y } b - t_N \leq \varepsilon,$$

y

$$\sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(s) - f_i\| ds \leq \varepsilon.$$

Denotaremos a esta discretización  $D_A(t_0, \dots, t_N; f_1, \dots, f_N)$ .

Una solución de la discretización  $D_A(t_0, \dots, t_N; f_1, \dots, f_N)$  es una función  $v : [t_0, t_N] \rightarrow H$  constante a trozos cuyos valores  $v(t_0) = v_0$ ,  $v(t) = v_i$  para  $t \in (t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, \dots, N$ , satisfacen

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Av_i \ni f_i, i = 1, \dots, N.$$

Una solución leve de  $u' + Au \ni f$  en  $[a, b]$  es una función continua  $u \in C([a, b]; H)$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe una  $\varepsilon$ -discretización  $D_A(t_0, \dots, t_N; f_1, \dots, f_N)$  de  $u' + Au \ni f$  en  $[a, b]$  con una solución  $v$  que satisface

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \varepsilon \text{ para } t_0 \leq t \leq t_N.$$

**Definición A.2.2.** Sea  $I$  un intervalo en  $\mathbb{R}$  y  $f \in L_{loc}^1(I; H)$ . Una solución leve de  $u' + Au \ni f$  en  $I$  es una función continua  $u \in C(I; H)$  cuya restricción a cada subintervalo compacto de  $I$  es una solución leve de  $u' + Au \ni f$  en  $[a, b]$ .

**Teorema A.2.3.** Sea  $I$  un intervalo en  $\mathbb{R}$ ,  $f \in L_{loc}^1(I; H)$  y  $u$  una solución fuerte de  $u' + Au \ni f$  en  $I$ . Entonces  $u$  es una solución leve de  $u' + Au \ni f$  en  $I$ .

**Definición A.2.4.** Dado un subconjunto  $D$  de  $H$ , una familia de aplicaciones  $S(t) : D \rightarrow D$  con  $t \geq 0$  es un semigrupo fuertemente continuo en  $D$  si

- $S(t + s)x = S(t)S(s)x$ , para todos  $t, s \geq 0, x \in D$
- $\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x$  para todo  $x \in D$ .

Si  $S(t)$  es lineal para todo  $t \geq 0$ , es decir,  $S(t) \in \mathcal{L}(X)$  para todo  $t \geq 0$ , decimos que la familia  $(S(t))_t$  es un  $C_0$ -semigrupo y, en este caso, definimos su generador infinitesimal  $B$  como

$$Bx = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ para } x \in D(B),$$

$$\text{donde } D(B) = \left\{ x \in X : \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \right\}.$$

Dado un operador  $A$ , podemos definir un semigrupo fuertemente continuo  $(S^A(t))_{t \geq 0}$  definido de la siguiente forma:

$$D(S^A) = \{x \in H : \exists! \text{ solución leve } u_x \text{ de } u' + Au \ni f \text{ en } (0, +\infty) \text{ con } u_x(0) = x\},$$

y para  $t \geq 0$  y  $x \in D(S^A)$ ,

$$S^A(t)x = u_x(t).$$



Para obtener resultados de existencia y unicidad de soluciones (lo que veremos que nos permitirá ver cuándo un operador lineal  $A$  es el generador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo) debemos estudiar el concepto de operador acretivo.

**Definición A.2.5.** *Un operador  $A$  en  $H$  es acretivo si*

$$\|x - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x} + \lambda(y - \hat{y})\|, \text{ para todo } \lambda > 0 \text{ y } (x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in A$$

**Definición A.2.6.** *Diremos que un operador  $A$  en un espacio de Hilbert  $H$  es monótono si*

$$(x - \hat{x}|y - \hat{y}) \geq 0$$

para todos  $x, \hat{x}, y, \hat{y}$  tales que  $y \in Ax$  y  $\hat{y} \in A\hat{x}$ .

*Diremos que  $A$  es monótono maximal si no tiene ninguna extensión monótona propia.*

Gracias a [13, Corolario A.9], podemos afirmar lo siguiente:

**Proposición A.2.7.** *Un operador  $A$  en  $H$  es acretivo si y solo si es monótono.*

La acretividad de un operador es importante dado que nos da unicidad de soluciones fuertes del problema asociado y, más concretamente, del problema A.1. El resultado es el siguiente:

**Teorema A.2.8.** *Sean  $f, \hat{f} \in L^1(0, T; H)$ . Sea  $A$  un operador en  $H$  y  $w \in \mathbb{R}$  tales que  $A + wI$  es acretivo, con  $I$  el operador identidad, y sean  $u$  y  $\hat{u}$  soluciones fuertes de  $u' + Au \ni f$  y  $\hat{u}' + A\hat{u} \ni \hat{f}$  respectivamente en  $[0, T]$ . Entonces,*

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\| \leq e^{wt} \|u(0) - \hat{u}(0)\| + \int_0^t e^{w(t-s)} \|f(s) - \hat{f}(s)\| ds,$$

para todo  $t \in [0, T]$ . En particular, las soluciones fuertes de A.1 son únicas.

**Definición A.2.9.** *Decimos que un operador  $A$  en  $H$  es  $m$ -acretivo si  $A$  es acretivo y  $R(I + \lambda A) = H$  para todo  $\lambda > 0$ , donde  $I$  es el operador identidad.*

**Teorema de Minty** *Sea  $A$  un operador acretivo en  $H$ . Entonces  $A$  es  $m$ -acretivo si y solo si  $A$  es monótono maximal.*

Uno de los principales ejemplos de operadores monótonos maximales es el de las subdiferenciales de funciones convexas que vamos a introducir ahora.

**Definición A.2.10.** *Dada una función  $\varphi : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ , decimos que el dominio efectivo de  $\varphi$  es:*

$$D(\varphi) = \{x \in H : \varphi(x) \neq +\infty\}.$$

Resulta que del hecho de que el dominio efectivo de  $\varphi$  sea vacío o no se pueden extraer muchas propiedades sobre  $\varphi$  y, en particular sobre  $\partial\varphi$  (ver Definición A.2.12). Para aliviar la notación, vamos a introducir algunos conceptos:

**Definición A.2.11.** Dado un espacio de Hilbert  $H$  y una función  $\varphi : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ , decimos que  $\varphi$  es:

- *propia*: si  $D(\varphi) = \{x \in H : \varphi(x) \neq +\infty\} \neq \emptyset$ .
- *convexa*: si  $\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \forall t \in [0, 1]$  y  $\forall x, y \in D(\varphi)$ .
- *semicontinua inferiormente en  $x_0 \in H$* : si

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \geq \varphi(x_0).$$

Es fácil ver que, si definimos el epígrafo de  $\varphi$  como  $Epi(\varphi) = \{(x, r) \in H \times \mathbb{R} : r \geq \varphi(x)\}$ , se tiene que  $\varphi$  es convexa (respectivamente semicontinua inferiormente) si y solo si  $Epi(\varphi)$  es convexo (respectivamente semicontinuo inferiormente).

**Definición A.2.12.** Dado un espacio de Hilbert  $H$  y una función  $\varphi : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ , definimos la subdiferencial de  $\varphi$  como el operador  $\partial\varphi : D(\varphi) \rightarrow 2^H$  definido de la siguiente forma:

$$w \in \partial\varphi(z) \Leftrightarrow \varphi(x) - \varphi(z) \geq (w, x - z) \quad \forall x \in D(\varphi).$$

**Proposición A.2.13.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $\varphi$  una función  $\varphi : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ . Entonces  $\partial\varphi$  es un operador monótono.

**Demostración:**

Sean  $z, \hat{z}, w, \hat{w} \in H$  tales que  $w \in \partial\varphi(z)$  y  $\hat{w} \in \partial\varphi(\hat{z})$ , entonces

$$\varphi(z) \geq \varphi(\hat{z}) + (\hat{w}|z - \hat{z})$$

y

$$\varphi(\hat{z}) \geq \varphi(z) + (w|\hat{z} - z).$$

Sumando estas dos desigualdades llegamos a que

$$0 \geq (\hat{w} - w|z - \hat{z}),$$

o, lo que es lo mismo,

$$(z - \hat{z}|w - \hat{w}) \geq 0,$$

como queríamos probar.  $\square$

**Teorema A.2.14** (Teorema de Lumer-Phillips). *El operador  $-A$  es el generador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo de contracciones lineales  $(S(t))_{t \geq 0}$  en  $H$  si y solo si  $A$  es lineal,  $m$ -acretivo y  $\overline{D(A)} = H$ . Además, se tiene la fórmula exponencial de Hille-Yoshida*

$$S(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} x.$$

En el caso particular de que el operador sea la subdiferencial de una función convexa y semicontinua inferiormente, entonces tendremos existencia y unicidad de soluciones fuertes del problema A.1. En particular, se tiene el siguiente resultado (véase [3] y [5]):

**Teorema A.2.15** (Teorema de Brezis-Komura). *Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $\varphi : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$  una función propia, convexa y semicontinua inferiormente tal que  $\min \varphi = 0$ . Supongamos que  $f \in L^2(0, T; H)$  y  $u_0 \in \overline{D(\partial\varphi)}$ , entonces el problema*

$$\begin{cases} u' + \partial\varphi(u) \ni f & \text{en } [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

*tiene una única solución fuerte.*

# Bibliografía

- [1] Fuensanta Andreu-Vaillo, Vicent Caselles y José M Mazón. *Parabolic quasilinear equations minimizing linear growth functionals*. Vol. 223. Springer Science & Business Media, 2004.
- [2] Alexandru T Balaban. «Applications of graph theory in chemistry». En: *Journal of chemical information and computer sciences* 25.3 (1985), págs. 334-343.
- [3] Viorel Barbu. *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*. Springer, 1976.
- [4] Haim Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Vol. 2. 3. Springer, 2011.
- [5] Haim Brézis. «Operateurs maximaux monotones—North Holland». En: *Math. Stud.* 5 (1973), págs. 1-183.
- [6] Ronald E Bruck Jr. «Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space». En: *Journal of Functional Analysis* 18.1 (1975), págs. 15-26.
- [7] Thomas Bühler y Matthias Hein. «Spectral clustering based on the graph p-Laplacian». En: *Proceedings of the 26th annual international conference on machine learning*. 2009, págs. 81-88.
- [8] Kung-Ching Chang. «Spectrum of the 1-Laplacian and Cheeger's constant on graphs». En: *Journal of Graph Theory* 81.2 (2016), págs. 167-207.
- [9] Meng Cheng, Muhammad Reza Kahar Aziz y Tad Matsumoto. «Integrated factor graph algorithm for DOA-based geolocation and tracking». En: *IEEE Access* 8 (2020), págs. 49989-49998.
- [10] Leonhard Euler. «Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis». En: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (1741), págs. 128-140.
- [11] Wenjun Jiang et al. «Understanding graph-based trust evaluation in online social networks: Methodologies and challenges». En: *Acm Computing Surveys (Csur)* 49.1 (2016), págs. 1-35.
- [12] Jose M Mazon, Marcos Solera y Julian Toledo. «The heat flow on metric random walk spaces». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 483.2 (2020), pág. 123645.

- 
- [13] José M Mazón, Marcos Solera-Diana y J Julián Toledo-Melero. *Variational and Diffusion Problems in Random Walk Spaces*. Vol. 103. Springer Nature, 2023.
- [14] Rada Mihalcea y Dragomir Radev. *Graph-based natural language processing and information retrieval*. Cambridge university press, 2011.
- [15] Parham Moradi, Sajad Ahmadian y Fardin Akhlaghian. «An effective trust-based recommendation method using a novel graph clustering algorithm». En: *Physica A: Statistical mechanics and its applications* 436 (2015), págs. 462-481.
- [16] Seth A Myers et al. «Information network or social network? The structure of the Twitter follow graph». En: *Proceedings of the 23rd international conference on world wide web*. 2014, págs. 493-498.
- [17] Mark EJ Newman, Duncan J Watts y Steven H Strogatz. «Random graph models of social networks». En: *Proceedings of the national academy of sciences* 99.suppl\_1 (2002), págs. 2566-2572.
- [18] Georgios A Pavlopoulos et al. «Bipartite graphs in systems biology and medicine: a survey of methods and applications». En: *GigaScience* 7.4 (2018), giy014.
- [19] Satu Elisa Schaeffer. «Graph clustering». En: *Computer science review* 1.1 (2007), págs. 27-64.
- [20] Lei Tang y Huan Liu. «Graph mining applications to social network analysis». En: *Managing and mining graph data* (2010), págs. 487-513.
- [21] Nicolas Garcia Trillos et al. «Consistency of cheeger and ratio graph cuts». En: *arXiv preprint arXiv:1411.6590* (2014).
- [22] Ahmet Tuysuzoglu et al. «Graph-cut based discrete-valued image reconstruction». En: *IEEE Transactions on Image Processing* 24.5 (2015), págs. 1614-1627.
- [23] Xuan Zhang et al. «Heterogeneous Graph Attention Network for User Geolocation». En: *PRICAI 2021: Trends in Artificial Intelligence*. Ed. por Duc Nghia Pham et al. Cham: Springer International Publishing, 2021, págs. 433-447. ISBN: 978-3-030-89363-7.