



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Diseño de una metodología precisa y eficiente para la
modelización y mejora acústica de dispositivos
postratamiento con dos monolitos

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Ingeniería Industrial

AUTOR/A: Blanco Benavides, Daniel

Tutor/a: Denia Guzmán, Francisco David

CURSO ACADÉMICO: 2023/2024

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que me han acompañado a lo largo de mi formación académica, desde mi ingreso en el Grado de Tecnologías Industriales hasta la culminación de este Máster en Ingeniería Industrial.

En primer lugar, dar las gracias a mi tutor, Paco Denia, quien me brindó la oportunidad de realizar este trabajo bajo su guía en un tema relacionado con la automoción, una de mis grandes pasiones. Su constante apoyo, ayuda y disponibilidad para resolver cualquier duda que surgiera durante el desarrollo de este proyecto han sido fundamentales.

Asimismo, quiero expresar mi gratitud a mi familia, amigos y a Ángeles por su apoyo incondicional y su fe en mí, especialmente durante los momentos más difíciles. Sin su aliento y confianza, no habría sido posible llegar hasta aquí.

RESUMEN

En este Trabajo Fin de Máster se lleva a cabo el desarrollo e implementación de metodologías de simulación y optimización del comportamiento acústico de dispositivos postratamiento con dos monolitos en el sistema de escape de vehículos. Uno de ellos está asociado al catalizador y el otro al filtro de partículas, ambos habitualmente presentes en el sistema de escape de motores de combustión interna alternativos.

Si bien este problema es susceptible de ser abordado mediante la combinación del método de elementos finitos (MEF) en su versión 3D más general con algoritmos de optimización, el coste computacional asociado puede llegar a ser prohibitivo dado que, dependiendo del número de grados de libertad del problema, las simulaciones pueden requerir días o incluso semanas. Uno de los motivos fundamentales es la necesidad de aplicar el algoritmo (iterativo) de optimización cientos o miles de veces, lo cual a su vez implica la resolución del problema mediante elementos finitos 3D en cada una de las iteraciones. Para evitar estos inconvenientes en un problema de interés para el grupo de investigación en el que se enmarca el TFM, se desarrollará e implementará una metodología eficiente, precisa y de bajo coste computacional, con el objetivo de obtener la máxima atenuación sonora de dispositivos postratamiento con dos monolitos en los rangos de frecuencia de interés, habitualmente aquellos en los que el motor emite mayores niveles de ruido. Para ello, además del MEF, se combinarán de forma adecuada tres técnicas detalladas a continuación:

1. Ajuste modal analítico-numérico para la caracterización acústica de dispositivos postratamiento.
2. Optimización mediante algoritmos basados en gradiente, más eficientes desde un punto de vista computacional pero con un mayor riesgo de converger a óptimos locales.
3. Optimización basada en algoritmos genéticos, con un coste computacional en ocasiones considerable pero con mayores posibilidades de proporcionar óptimos globales.

La técnica de ajuste modal analítico-numérico será validada comparando los resultados obtenidos con ella frente a los resultados utilizando el MEF exclusivamente. Además, se llevará a cabo el estudio del efecto que tienen aspectos como la geometría del dispositivo, la presencia de hollín, la resistividad del catalizador, etc. en el comportamiento acústico del dispositivo postratamiento. Seguidamente, mediante una adecuada integración de las tres técnicas descritas anteriormente, se obtendrá como resultado final una herramienta computacional con la que se llevará a cabo un estudio detallado para determinar los parámetros óptimos de diseño desde un punto de vista acústico. En relación a este proceso de optimización, se consideran como variables de diseño las longitudes de las cámaras, la resistividad y porosidad del catalizador, el tipo de filtro antipartículas, la presencia de hollín, etc. en función del intervalo de frecuencias de interés.

Palabras clave: Comportamiento acústico; modelización; optimización; dispositivo postratamiento; catalizador; filtro de partículas; monolito; ajuste modal; elementos finitos; Ansys.

ABSTRACT

In this Master Thesis the development and implementation of simulation and optimisation methodologies of the acoustic behaviour of aftertreatment devices with two monoliths in the exhaust system of vehicles is carried out. One of them is associated with the catalytic converter and the other with the particulate filter, both of which are usually present in the exhaust system of reciprocating internal combustion engines.

Although this problem can be tackled by combining the finite element method (FEM) in its most general 3D version with optimisation algorithms, the associated computational cost can be prohibitive since, depending on the number of degrees of freedom of the problem, simulations can take days or even weeks. One of the fundamental reasons is the need to apply the (iterative) optimisation algorithm hundreds or thousands of times, which in turn implies solving the problem using 3D finite elements for each iteration. To avoid these drawbacks in a problem of interest to the research group in which the TFM is framed, an efficient, accurate and low computational cost methodology will be developed and implemented, with the aim of obtaining the maximum sound attenuation of after-treatment devices with two monoliths in the frequency ranges of interest, usually those in which the engine emits higher levels of noise. For this purpose, in addition to the FEM, three techniques detailed below will be combined in an appropriate way:

1. Analytical-numerical mode matching technique for the acoustic characterisation of after-treatment devices.
2. Optimisation using gradient-based algorithms, more efficient from a computational point of view but with a higher risk of converging to local optima.
3. Optimisation based on genetic algorithms, with a sometimes considerable computational cost but with greater possibilities of providing global optima.

The analytical-numerical mode matching technique will be validated by comparing the results obtained with it against the results using the FEM alone. In addition, the effect of aspects such as device geometry, soot presence, catalyst resistivity, etc. on the acoustic behaviour of the post-treatment device will be studied. Then, by means of a suitable integration of the three techniques described above, a computational tool will be obtained as a final result, with which a detailed study will be carried out to determine the optimal design parameters from an acoustic point of view. In relation to this optimisation process, the design variables considered are the length of the chambers, the resistivity and porosity of the catalyst, the type of particulate filter, the presence of soot, etc. depending on the frequency range of interest.

Keywords: Acoustic behaviour; modelling; optimisation; aftertreatment device; catalyst; particulate filter; monolith; mode matching; finite elements; Ansys.

RESUM

En aquest Treball Fi de Màster es duu a terme el desenvolupament i implementació de metodologies de simulació i optimització del comportament acústic de dispositius postractament amb dos monòlits al sistema d'escapament de vehicles. Un d'ells està associat al catalitzador i l'altre al filtre de partícules, tots dos habitualment presents al sistema d'escapament de motors de combustió interna alternatius.

Si bé aquest problema és susceptible de ser abordat mitjançant la combinació del mètode d'elements finits (MEF) en la seua versió 3D més general amb algorismes d'optimització, el cost computacional associat pot arribar a ser prohibitiu atès que, depenent del nombre de graus de llibertat del problema, les simulacions poden requerir dies o fins i tot setmanes. Un dels motius fonamentals és la necessitat d'aplicar l'algorisme (iteratiu) d'optimització centenars o milers de vegades, la qual cosa implica la resolució del problema mitjançant elements finits 3D en cadascuna de les iteracions. Per evitar aquests inconvenients en un problema d'interès per al grup de recerca en què s'emmarca el TFM, es desenvoluparà i implementarà una metodologia eficient, precisa i de baix cost computacional, amb l'objectiu d'obtenir la màxima atenuació sonora de dispositius postractament amb dos monòlits en els rangs de freqüència d'interès, habitualment aquells en què el motor emet més nivells de soroll. Per això, a més del MEF, es combinaran de forma adequada tres tècniques detallades a continuació:

1. Ajustament modal analític-numèric per a la caracterització acústica de dispositius postractament.
2. Optimització mitjançant algorismes basats en gradient, més eficients des d'un punt de vista computacional però amb més risc de convergir a òptims locals.
3. Optimització basada en algorismes genètics, amb un cost computacional a vegades considerable però amb més possibilitats de proporcionar òptims globals.

La tècnica d'ajustament modal analític-numèric serà validada comparant els resultats obtinguts amb aquesta en comparació als resultats utilitzant el MEF exclusivament. A més, es durà a terme l'estudi de l'efecte que tenen aspectes com la geometria del dispositiu, la presència de sutge, la resistivitat del catalitzador, etc. en el comportament acústic del dispositiu postractament. Seguidament, mitjançant una integració adequada de les tres tècniques descrites anteriorment, s'obtindrà com a resultat final una eina computacional amb la qual es durà a terme un estudi detallat per determinar els paràmetres òptims de disseny des d'un punt de vista acústic. En relació amb aquest procés d'optimització, es consideren com a variables de disseny les longituds de les càmeres, la resistivitat i la porositat del catalitzador, el tipus de filtre antipartícules, la presència de sutge, etc. segons l'interval de freqüències d'interès.

Paraules clau: Comportament acústic; modelització; optimització; dispositiu postractament; catalitzador; filtre de partícules; monòlit; ajustament modal; elements finits; Ansys.

Índice

1.	INTRODUCCIÓN	1
1.1	OBJETIVO DEL TRABAJO	1
1.2	MOTIVACIÓN.....	1
1.3	METODOLOGÍA UTILIZADA.....	1
2.	FUNDAMENTOS DE CATALIZADORES Y FILTRO ANTIPARTÍCULAS	3
2.1	ANTECEDENTES	3
2.2	CATALIZADOR.....	4
2.3	FILTRO ANTIPARTÍCULAS (FAP)	5
3.	FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA ACÚSTICA	7
3.1	INTRODUCCIÓN	7
3.2	DEFINICIÓN DE ACÚSTICA	7
3.3	TIPOS DE ONDAS	8
3.3.1	Según el movimiento de las partículas.....	8
3.3.2	Según su propagación	8
3.4	CARACTERÍSTICAS DE LA PERTUBACIÓN ACÚSTICA.....	9
3.5	MEDIOS DE PROPAGACIÓN.....	9
3.5.1	Aire	9
3.5.2	Medios sólidos y líquidos	10
3.6	ECUACIÓN DE ONDAS EN UNA DIMENSIÓN. ONDAS PLANAS	11
3.6.1	Deducción de la ecuación de ondas unidimensional	11
3.6.2	Solución	13
3.6.3	Energía de una onda.....	14
3.6.4	Impedancia.....	15
3.6.5	Escalas en decibelios	16
3.7	ECUACIÓN DE ONDAS EN TRES DIMENSIONES. ONDAS ESFÉRICAS.....	17
3.7.1	Forma general	17
3.7.2	Ondas esféricas armónicas.....	18
3.7.3	Impedancia en ondas esféricas armónicas.....	19
3.7.4	Intensidad y radicación.....	19
3.8	REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN DE ONDAS.....	20

3.8.1	Cambio de medio de propagación. Reflexión	20
3.8.2	Cambio de medio de propagación. Transmisión	22
3.8.3	Cambio de sección.....	23
3.8.4	Transmisión de sonido en particiones.....	25
3.8.5	Absorción.....	26
4.	MODELO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA.....	28
4.1	MODELO 3D/3D.....	28
4.2	MODELO 3D/1D. CATALIZADOR.....	29
4.3	MODELO DE ONDA 1D. FILTRO ANTIPÁRTICULAS (DPF).....	34
4.3.1	Sección porosa del DPF (II).....	35
4.3.2	Cálculo de constantes de propagación y matriz de dos puertos.....	36
4.3.3	Versión modificada del modelo 1D.....	41
4.3.4	Modelo del filtro completo	42
4.3.5	DPF con presencia de hollín	43
4.3.6	Modelos de DPF testeados.....	43
5.	COMPORTAMIENTO ACÚSTICO DEL SISTEMA	44
5.1	DISPOSITIVO CIRCULAR CON CONDUCTOS CENTRADOS	46
5.1.1	Efecto de la resistividad del catalizador	47
5.1.2	Efecto de la presencia de hollín	48
5.2	DISPOSITIVO CIRCULAR CON CONDUCTO DE SALIDA DESCENTRADO.....	49
5.2.1	Efecto de la resistividad del catalizador	50
5.2.2	Efecto de la presencia de hollín	50
5.3	EFFECTO DEL DESCENTRADO DEL CONDUCTO DE SALIDA EN EL DISPOSITIVO CIRCULAR.....	52
5.4	DISPOSITIVO ELÍPTICO CON CONDUCTOS CENTRADOS.....	53
5.4.1	Efecto de la excentricidad de la elipse	54
5.4.2	Efecto de la presencia de hollín	55
5.5	DISPOSITIVO ELÍPTICO CON CONDUCTO DE SALIDA DESCENTRADO.....	57
5.5.1	Efecto de la excentricidad de la elipse	57
5.5.2	Efecto de la presencia de hollín	58
5.6	EFFECTO DEL DESCENTRADO DEL CONDUCTO DE SALIDA EN EL DISPOSITIVO ELÍPTICO.....	60
5.7	DISPOSITIVOS CIRCULARES FRENTE A ELÍPTICOS.....	63

5.8	EFFECTO DE LA LONGITUD DE LOS MONOLITOS	65
5.9	CONCLUSIONES	67
6.	VALIDACIÓN DE LA METODOLOGÍA	68
6.1	MODELADO EN ANSYS WORKBENCH	68
6.2	RESULTADOS DE ANSYS APDL FRENTE ANSYS WORKBENCH	72
7.	CARACTERIZACIÓN ACÚSTICA MEDIANTE LA TÉCNICA DE AJUSTE MODAL HÍBRIDO ANALÍTICO- NUMÉRICO	74
7.1	VALIDACIÓN DE LA TÉCNICA DE AJUSTE MODAL HÍBRIDO ANALÍTICO-NUMÉRICO	74
7.1.1	Resultados obtenidos con la técnica de ajuste modal híbrido analítico numérico frente a los obtenidos con ANSYS APDL.....	76
8.	OPTIMIZACIÓN DEL COMPORTAMIENTO ACÚSTICO MEDIANTE ALGORITMOS BASADOS EN GRADIENTE Y GENÉTICO.....	89
8.1	ALGORITMO BASADO EN GRADIENTE.....	89
8.1.1	Algoritmo basado en gradiente “fmincon” en Matlab.....	90
8.2	ALGORITMO GENÉTICO	91
8.2.1	Algoritmo genético “ga” en Matlab	92
8.3	RESULTADOS.....	93
9.	CONCLUSIONES	100
10.	DESARROLLOS FUTUROS	102
	BIBLIOGRAFÍA	103
	PRESUPUESTO	105
	COSTES DE MEDIOS Y MATERIALES.....	105
	COSTE DE LAS UNIDADES DE OBRA.....	107
	PRESUPUESTO TOTAL.....	109
	PLANOS.....	110
	PLANO 1.....	111
	PLANO 2.....	112
	PLANO 3.....	113
	PLANO 4.....	114
	PLANO 5.....	115
	PLANO 6.....	116
	PLANO 7.....	117

PLANO 8.....	118
ANEXOS	119
ANEXO I: SCRIPT DE MATLAB. PROPIEDADES ACÚSTICAS DEL CATALIZADOR	119
ANEXO II: SCRIPT DE MATLAB. PROPIEDADES ACÚSTICAS DEL FILTRO ANTIPARTÍCULAS	123
ANEXO III: SCRIPT DE ANSYS APDL	130
ANEXO IV: SCRIPT DE MATLAB. AJUSTE MODAL	135
ANEXO V: SCRIPT DE MATLAB. OPTIMIZACIÓN DE LA PÉRDIDA DE TRANSMISIÓN ACÚSTICA.....	149

Índice de figuras

Figura 1. Límites de emisiones normativas EURO (AutoCrash, 2019).....	3
Figura 2. Reacciones presentes en un catalizador (de Prado, 2020)	4
Figura 3. Catalizador de una línea de escape (Prieto Amaya, 2021).....	4
Figura 4. Filtro antipartículas de un escape de un motor diésel (Ibáñez, 2014) (sffoundrymaterial, n.d.)	5
Figura 5. Proceso de quemado del hollín (Ibáñez, 2014)	6
Figura 6. Propagación de onda sonora en un conducto debido al movimiento de un pistón (Denia Guzmán, Francisco David, 2022)	7
Figura 7. Propagación de una onda progresiva (Denia Guzmán, Francisco David, 2022).....	8
Figura 8. Elemento infinitesimal.....	11
Figura 9. Intensidad sonora.....	14
Figura 10. Impedancia de radiación	16
Figura 11. Presión sonora y nivel de presión sonora (Ochoa Pérez & Bolaños, 1990)	17
Figura 12. Sistema en coordenadas esféricas (Denia Guzmán, Francisco David, 2022)	17
Figura 13. Radiación en campo libre y hemisférica sobre superficie reflectante	19
Figura 14. Reflexión y transmisión de ondas planas en dos medios de propagación (Denia Guzmán, Francisco David, 2022)	21
Figura 15. Reflexión y transmisión de ondas planas en un cambio de sección (Denia Guzmán, Francisco David, 2022)	23
Figura 16. Reflexión y transmisión de sonido a través de tres medios (Denia Guzmán, Francisco David, 2022).....	25
Figura 17. Modelo 3D/3D del monolito (Denia Guzmán, Antebas, Martínez-Casas, & Fuenmayor, 2009).	28
Figura 18. Modelo 3D/1D del catalizador (Denia Guzmán, Antebas, Martínez-Casas, & Fuenmayor, 2009).....	29
Figura 19. Estructura del DPF (Abom & Allam, 2005).	34
Figura 20. Secciones del DPF (Abom & Allam, 2005).	34
Figura 21. Flujo de gases a través del DPF (Abom & Allam, 2005).....	35
Figura 22. Partes que componen el sistema	44
Figura 23. Geometría y malla del dispositivo circular con conductos centrados (ANSYS APDL)	47
Figura 24. Geometría y malla del dispositivo circular con conducto de salida descentrado (ANSYS APDL)	49

Figura 25. Geometría y malla del dispositivo elíptico con conductos centrados (ANSYS APDL).....	54
Figura 26. Geometría y malla del dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado (ANSYS APDL)	57
Figura 27. Un cuarto de la geometría del dispositivo elíptico con conductos centrados (ANSYS Discovery).....	68
Figura 28. Un medio de la geometría del dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado (ANSYS Discovery)	68
Figura 29. Malla del dispositivo elíptico con conductos centrados (ANSYS Workbench).....	69
Figura 30. Malla del dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado (ANSYS Workbench) ...	69
Figura 31. Puertos de entrada y salida en catalizador y DPF (ANSYS Workbench).....	70
Figura 32. Puertos de entrada y salida en los conductos de entrada y salida (ANSYS Workbench).....	70
Figura 33. Paredes rígidas del modelo (ANSYS Workbench).....	71
Figura 34. Excitación en el conducto de entrada (ANSYS Workbench).....	71
Figura 35. Mallados de los dispositivos circulares con conductos centrados 1) y con conducto de salida descentrado 2)	75
Figura 36. Mallados de los dispositivos elípticos con conductos centrados 1) y con conducto de salida descentrado 2)	76
Figura 37. Flujo de individuos (Universidad de Sevilla, n.d.).....	92

Índice tablas

Tabla 1. Valores de las propiedades del aire a 20 °C y 101325 Pa	9
Tabla 2. Especificaciones de los filtros testeados (Abom & Allam, 2005).....	43
Tabla 3. Variables comunes del problema	44
Tabla 4. Propiedades geométricas del sistema con sección elíptica.....	46
Tabla 5. Resultados de la optimización con el algoritmo basado en gradiente	94
Tabla 6. Resultados de la optimización con el algoritmo basado en gradiente minimizando la desviación típica	94
Tabla 7. Resultados de la optimización con el algoritmo genético. Geometría 3) minimizando la desviación típica	94
Tabla 8. Coste de la UO 01	107
Tabla 9. Coste de la UO 02	108
Tabla 10. Coste de la UO 03	108
Tabla 11. Coste de la UO 04	108
Tabla 12. Coste de la UO 05.....	109
Tabla 13. Presupuesto total del proyecto	109

Índice gráficas

Gráfica 1. Pérdidas de transmisión según la resistividad del catalizador. Dispositivo circular con conductos centrados	47
Gráfica 2. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo circular con conductos centrados ($R1 = 1000 Pa \cdot s/m^2$)	48
Gráfica 3. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo circular con conductos centrados ($R2 = 1500 Pa \cdot s/m^2$)	48
Gráfica 4. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo circular con conductos centrados ($R3 = 2000 Pa \cdot s/m^2$)	49
Gráfica 5. Pérdidas de transmisión según la resistividad del catalizador. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado	50
Gráfica 6. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado ($R1 = 1000 Pa \cdot s/m^2$).....	51
Gráfica 7. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado ($R2 = 1500 Pa \cdot s/m^2$).....	51
Gráfica 8. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado ($R3 = 2000 Pa \cdot s/m^2$)	52
Gráfica 9. Efecto del descentrado del conducto de salida en los dispositivos circulares	53
Gráfica 10. TL conducto de salida descentrado – TL conducto de salida centrado. Dispositivo circular	53
Gráfica 11. Efecto de la excentricidad de la elipse en dispositivo elíptico con conductos centrados ..	54
Gráfica 12. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo elíptico con conductos centrados ($\epsilon1 = 0.75$)	55
Gráfica 13. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo elíptico con conductos centrados ($\epsilon2 = 0.85$)	56
Gráfica 14. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo elíptico con conductos centrados ($\epsilon3 = 0.90$)	56
Gráfica 15. Efecto de la excentricidad de la elipse en dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado.....	58
Gráfica 16. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado ($\epsilon1 = 0.75$)	59
Gráfica 17. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado ($\epsilon2 = 0.85$)	59
Gráfica 18. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado ($\epsilon3 = 0.90$)	60

Gráfica 19. Efecto del descentrado del conducto de salida en los dispositivos elípticos ($\epsilon_1 = 0.75$)	60
Gráfica 20. TL conducto de salida descentrado – TL conducto de salida centrado. Dispositivo elíptico ($\epsilon_1 = 0.75$)	61
Gráfica 21. Efecto del descentrado del conducto de salida en los dispositivos elípticos ($\epsilon_2 = 0.85$)	61
Gráfica 22. TL conducto de salida descentrado – TL conducto de salida centrado. Dispositivo elíptico ($\epsilon_2 = 0.85$)	62
Gráfica 23. Efecto del descentrado del conducto de salida en los dispositivos elípticos ($\epsilon_3 = 0.90$)	62
Gráfica 24. TL conducto de salida descentrado – TL conducto de salida centrado. Dispositivo elíptico ($\epsilon_3 = 0.90$)	63
Gráfica 25. Dispositivo circular frente a dispositivos elípticos con conductos centrados	64
Gráfica 26. Dispositivo circular frente a dispositivos elípticos con conductos de salida descentrados	64
Gráfica 27. Pérdidas de transmisión según la longitud del catalizador. Dispositivo circular con conductos centrados	65
Gráfica 28. Pérdidas de transmisión según la longitud del DPF. Dispositivo circular con conductos centrados	66
Gráfica 29. Pérdidas de transmisión según las longitudes del catalizador y del DPF. Dispositivo circular con conductos centrados	66
Gráfica 30. TL en APDL frente TL en Workbench. Dispositivo elíptico con conductos centrados	72
Gráfica 31. % Error en el cálculo de la TL en ANSYS APDL frente ANSYS Workbench. Dispositivo elíptico con conductos centrados	72
Gráfica 32. TL en APDL frente TL en Workbench. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado	73
Gráfica 33. Error en el cálculo de la TL en ANSYS APDL frente ANSYS Workbench. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado	73
Gráfica 34. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo circular con conductos centrados y sin presencia de hollín en el DPF	77
Gráfica 35. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conductos centrados y sin presencia de hollín en el DPF	77
Gráfica 36. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo circular con conductos centrados y con presencia de hollín en el DPF	78
Gráfica 37. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conductos centrados y con presencia de hollín en el DPF	78
Gráfica 38. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF	79

Gráfica 39. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF	79
Gráfica 40. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal (40 modos). Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF.....	80
Gráfica 41. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal (40 modos) frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF	80
Gráfica 42. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y con presencia de hollín en el DPF	81
Gráfica 43. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y con presencia de hollín en el DPF.....	81
Gráfica 44. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal (40 modos). Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y con presencia de hollín en el DPF	82
Gráfica 45. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal (40 modos) frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF	82
Gráfica 46. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo elíptico con conductos centrados y sin presencia de hollín en el DPF	83
Gráfica 47. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conductos centrados y sin presencia de hollín en el DPF.....	83
Gráfica 48. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo elíptico con conductos centrados y con presencia de hollín en el DPF.....	84
Gráfica 49. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conductos centrados y con presencia de hollín en el DPF	84
Gráfica 50. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF.....	85
Gráfica 51. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF	85
Gráfica 52. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal (40 modos). Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF.....	86
Gráfica 53. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal (40 modos) frente ANSYS APDL. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF	86
Gráfica 54. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y con presencia de hollín en el DPF	87
Gráfica 55. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y con presencia de hollín en el DPF.....	87
Gráfica 56. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal (40 modos). Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y con presencia de hollín en el DPF	88

Gráfica 57. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal (40 modos) frente ANSYS APDL. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y con presencia de hollín en el DPF	88
Gráfica 58. Optimización en el rango de frecuencia 700-800 Hz en el dispositivo circular con conductos centrados con ambos algoritmos.....	95
Gráfica 59. Optimización en el rango de frecuencia 700-800 Hz en el dispositivo circular con conducto de salida descentrado con ambos algoritmos.....	96
Gráfica 60. Optimización en el rango de frecuencia 600-700 Hz en el dispositivo elíptico con conductos centrados con ambos algoritmos.....	96
Gráfica 61. Optimización en el rango de frecuencia 850-1000 Hz en el dispositivo elíptico con conductos centrados con algoritmo basado en gradiente	97
Gráfica 62. Optimización en el rango de frecuencia 1250-1350 Hz en el dispositivo elíptico con conductos centrados con algoritmo basado en gradiente.....	98
Gráfica 63. Optimización en el rango de frecuencia 700-800 Hz en el dispositivo elíptico con conducto de salida descentrados con ambos algoritmos	98

1. INTRODUCCIÓN

1.1 OBJETIVO DEL TRABAJO

El objetivo del presente Trabajo Fin de Máster es modelizar acústicamente el sistema anticontaminación presente en la línea de escape de motores de combustión interna alternativos, formado por un catalizador y un filtro antipartículas (FAP). Habitualmente se ha caracterizado el comportamiento acústico mediante el uso del Método de Elementos Finitos, algo que conlleva mucho tiempo de cómputo. Por ello, se aplicará una metodología alternativa y fiable con el fin de reducir considerablemente el coste computacional de las diferentes simulaciones.

Se realizarán variaciones en las propiedades y en la geometría de ambos monolitos con el fin de estudiar la influencia que ello tiene en el valor de la pérdida de transmisión acústica (TL), cuyo valor se intenta aumentar para conseguir la mayor atenuación sonora posible.

Finalmente, una vez validado el modelo de cálculo, se utilizarán algoritmos de optimización que otorgarán valores de las propiedades y de la geometría de los monolitos son adecuados para disminuir el nivel sonoro lo máximo posible en un rango de frecuencias deseado.

1.2 MOTIVACIÓN

La simulación es una herramienta fundamental, ya que permite modelar situaciones y sistemas complejos para comprender su comportamiento, tomar decisiones informadas y prever resultados futuros. Sin embargo, uno de los desafíos constantes en el mundo de la simulación es la necesidad de disminuir el tiempo necesario para llevar a cabo estas simulaciones debido a que un ahorro de tiempo conlleva una reducción en los costes y permite realizar innovaciones más rápidamente. Para abordar esta necesidad se han utilizado algoritmos más eficientes y se han optimizado los procesos de simulación para acelerar el cálculo.

Por otro lado, resulta interesante diseñar parte del sistema de escape de vehículos con motor de combustión interna, ya que en los últimos años la Unión Europea ha endurecido la normativa respecto al nivel sonoro con el fin de reducir la contaminación acústica en zonas urbanas y mejorar la calidad de vida de las personas.

1.3 METODOLOGÍA UTILIZADA

La metodología principal que se ha empleado en este trabajo es la llamada ajuste modal, la cual permite calcular el campo acústico de ambos monolitos y con ello obtener la pérdida de transmisión acústica (TL), parámetro el cual informa sobre la atenuación acústica producida en el sistema. Este cálculo se realiza en el software MatLab.

Para validar la fiabilidad de la técnica utilizada, se compararán los resultados de la TL obtenidos mediante la técnica de ajuste modal con los resultados obtenidos con el Método de Elementos Finitos (procedimiento habitual de cálculo para estos problemas), empleando los softwares ANSYS APDL y ANSYS Workbench. Las propiedades de ambos monolitos han sido proporcionadas por el Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales de la UPV utilizando MatLab.

Una vez que la técnica ha sido validada, se propondrán distintas variantes en las propiedades y geometría de los monolitos con el fin de observar las consecuencias que tienen en la variación de la pérdida de transmisión.

Por último, se procederá a la optimización del sistema postratamiento estudiado para obtener la configuración idónea en el rango de frecuencias deseado, disminuyendo la TL lo máximo posible. Para ello se utilizarán las optimizaciones de los algoritmos basados en gradiente y los basados en algoritmos genéticos, comparando posteriormente los resultados y los tiempos de cálculo entre ambos métodos. Estos algoritmos están implementados en la biblioteca del software MatLab.

2. FUNDAMENTOS DE CATALIZADORES Y FILTRO ANTIPARTÍCULAS

En este apartado se va a explicar brevemente el funcionamiento y la importancia que tienen el catalizador y el filtro antipartículas (FAP) en la línea de escape de motores de combustión. En apartados posteriores se caracterizarán ambos elementos acústicamente.

2.1 ANTECEDENTES

Con el fin de reducir la contaminación ambiental, desde la Unión Europea se han desarrollado reglamentos que limitan las emisiones procedentes de turismos, vehículos comerciales ligeros y vehículos pesados, originando las normas EURO. Estas normas limitan las emisiones de óxido de nitrógeno (NO_x), monóxido de carbono (CO), dióxido de carbono (CO₂), hidrocarburos no quemados (HC) y las partículas en suspensión (PM).

Estas normativas han ido actualizándose desde su origen en la EURO 0 (año 1988) hasta la EURO 6 (última actualización en 2021) para vehículos ligeros, mientras que para vehículos pesados la normativa entró con la EURO I (año 1992) hasta la EURO VI (año 2013). Con cada una de estas actualizaciones la normativa se vuelve más estricta, por lo que con la entrada de la EURO 5 se obligó incorporar filtro de partículas a todos los vehículos de motorización diésel. Años más tarde, la normativa EURO 6 obligó a incorporar catalizadores en motores diésel y filtro de partículas en motores gasolina. Estas dos últimas normas, las cuales son las actualmente vigentes, están recogidas en el Reglamento 715/2007/CE.

Además, se está trabajando en introducir la normativa EURO 7, la cual rebajará los óxidos de nitrógeno de turismos diésel, autobuses y camiones; las partículas en suspensión en vehículos pesados y el monóxido de carbono en vehículos con motor gasolina (RACE, 2023) (Parlamento Europeo, 2007).

Límites de emisiones establecidos por cada norma Euro para los turismos							
Norma	Entrada en vigor	CO (g/km)	HCT (g/km)	NMHC	HCT+NO _x (g/km)	NO _x (g/km)	PM (g/km)
Motor diésel							
Euro 1**	01/07/92	2,72 (3,16)	----	----	0,97 (1,13)	----	0,14 (0,18)
Euro 2, IDI	01/01/96	1,0	----	----	0,7	----	0,08
Euro 2, DI	01/01/1996 ^a	1,0	----	----	0,9	----	0,10
Euro 3	01/01/00	0,64	----	----	0,56	0,50	0,05
Euro 4	01/01/05	0,50	----	----	0,30	0,25	0,025
Euro 5	01/09/09	0,50	----	----	0,23	0,18	0,005 ^c
Euro 6	01/09/14	0,50	----	----	0,17	0,08	0,005 ^c
Motor gasolina							
Euro 1**	01/04/92	2,72 (3,16)	----	----	0,97 (1,13)	----	----
Euro 2	01/01/96	2,2	----	----	0,5	----	----
Euro 3	01/01/00	2,30	0,20	----	----	0,15	----
Euro 4	01/01/05	1,0	0,10	----	----	0,08	----
Euro 5	01/09/09	1,0	0,10	0,068	----	0,06	0,005 ^{b,c}
Euro 6	01/09/14	1,0	0,10	0,068	----	0,06	0,005 ^{b,c}

■ CO: masa de monóxido de carbono; HCT: masa total de hidrocarburos; NO_x: masa de óxidos de nitrógeno; PM: masa de partículas, NMHC: masa de hidrocarburos no metanos.
IDI: inyección indirecta, DI: inyección directa.

Figura 1. Límites de emisiones normativas EURO (AutoCrash, 2019)

2.2 CATALIZADOR

El catalizador es una parte esencial de un sistema de escape de un vehículo y desempeña un papel fundamental en la reducción de emisiones contaminantes provenientes del motor. Es un dispositivo que utiliza reacciones químicas para convertir gases de escape contaminantes en sustancias menos perjudiciales antes de liberarlos a la atmósfera. La reacción química principal que ocurre en el catalizador es la conversión de monóxido de carbono (CO), óxidos de nitrógeno (NO_x) e hidrocarburos no quemados (HC) en dióxido de carbono (CO₂), nitrógeno (N₂) y agua (H₂O). Se deben dar altas temperaturas para que el catalizador trabaje a un rendimiento óptimo, entre 400 y 700 °C. Esto se logra de la siguiente forma:

1. Catalizador de reducción de NO_x: Este catalizador reduce los NO_x en N₂ y H₂O gracias a la reacción con el platino (Pt) y el rodio (Rh).
2. Catalizador de oxidación: Este catalizador convierte CO y HC en CO₂ y H₂O al oxidarlos en presencia de oxígeno (O₂), paladio (Pd) y platino (Pt).

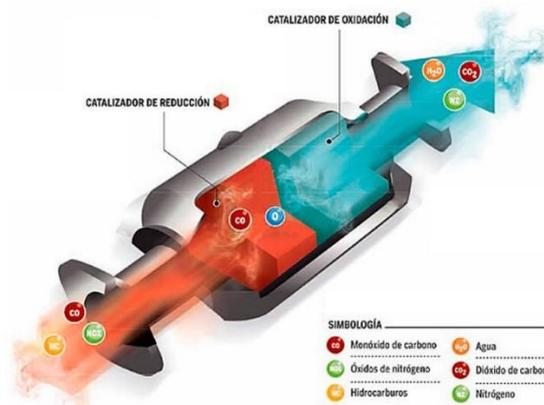


Figura 2. Reacciones presentes en un catalizador (de Prado, 2020)

Interiormente está formado por una matriz cerámica o metálica en forma de panel de abeja, la cual está impregnada de una resina que contiene los elementos nobles metálicos mencionados anteriormente. El tamaño de los orificios es del orden de μm , además de ser altamente porosa con el fin de proporcionar una gran área superficial que favorece a que las reacciones químicas tengan lugar. Esto está contenido en una caja de acero inoxidable y recubierto de una pantalla térmica debido a las altas temperaturas a las que está sometido (Prieto Amaya, 2021).



Figura 3. Catalizador de una línea de escape (Prieto Amaya, 2021)

Por lo tanto, la presencia del catalizador en motores de combustión es importante debido a que desempeña un papel crucial en la reducción de contaminantes perjudiciales liberados por el motor, aspecto que está muy controlado últimamente. Además, como elemento que forma parte del sistema de escape, sus propiedades y geometría serán influyentes en la reducción de ruido proveniente del motor.

2.3 FILTRO ANTIPARTÍCULAS (FAP)

El filtro antipartículas es una pieza muy importante para los vehículos con motor diésel, ya que ayuda a reducir la contaminación ambiental y a cumplir con las normativas de emisiones. Desde la entrada en vigor de la EURO 5, todos los vehículos de motor diésel deben llevar incorporado el FAP.

El filtro antipartículas está formado por un panel cerámico poroso que tiene muchos conductos o canales. Estos conductos están tapados por uno de sus extremos, de forma que el gas de escape tiene que pasar forzosamente por las paredes porosas del panel para salir por el otro lado. Así, las partículas quedan atrapadas en las paredes y se evita que salgan al exterior (Ibáñez, 2014).

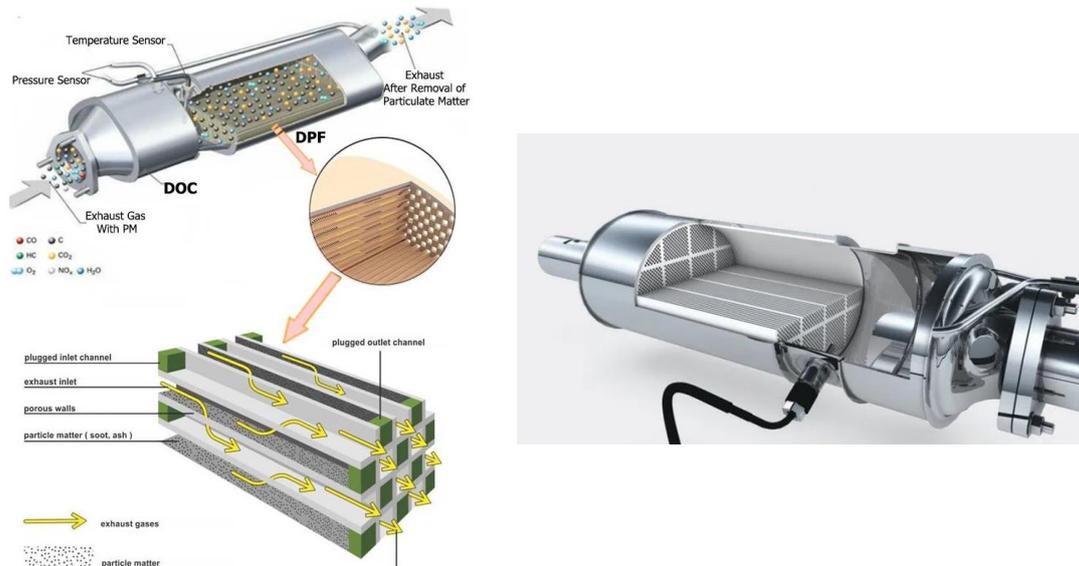


Figura 4. Filtro antipartículas de un escape de un motor diésel (Ibáñez, 2014) (sffoundrymaterial, n.d.)

Estas partículas se van acumulando en el filtro hasta que se alcanza un nivel de saturación y se procede al quemado del hollín. En casos de no eliminar estas partículas, el sistema de escape se colmataría y causaría una bajada en el rendimiento del vehículo. El quemado del hollín se puede dar de dos formas:

- 1. Regeneración activa:** La centralita del vehículo detecta una diferencia de presión entre la entrada y la salida del filtro mediante sensores de presión, procediendo a realizar la llamada regeneración activa del FAP. Para ello, la temperatura de los gases debe aumentar para conseguir el quemado del hollín atrapado mediante pirólisis. El aumento de temperatura se consigue inyectando algo más de combustible en las cámaras, permaneciendo rodando a un régimen de unas 2500 rpm durante unos 20 minutos para que la regeneración sea completa.

- 2. Regeneración pasiva:** El quemado del hollín se puede llevar a cabo cuando se circula a una velocidad elevada durante un largo periodo, ya que la temperatura de los gases de escape será más alta de lo normal.

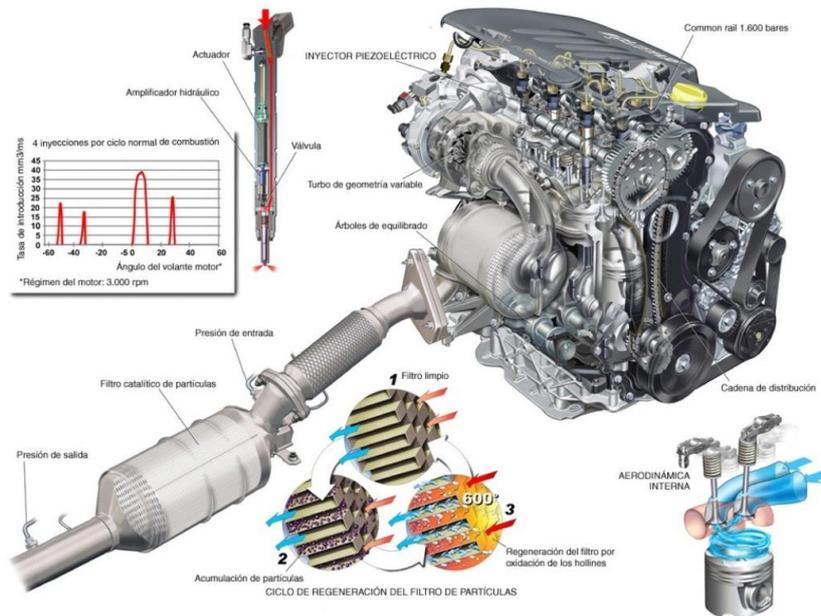


Figura 5. Proceso de quemado del hollín (Ibáñez, 2014)

Al igual que el catalizador, el FAP al formar parte del sistema de escape del vehículo, su geometría, propiedades, así como la presencia o no de hollín en él, influirá en la atenuación del ruido proveniente del motor.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA ACÚSTICA

3.1 INTRODUCCIÓN

En este apartado se van a introducir los fundamentos teóricos con el fin de caracterizar acústicamente el problema a tratar para así implementarlo en los distintos softwares de cálculo que se van a utilizar.

En primer lugar, se obtendrá de la ecuación de ondas en una dimensión (ondas planas) para obtener posteriormente la ecuación de ondas tridimensionales. Seguidamente, se introducirá la energía asociada a las ondas acústicas, la cual permitirá obtener la pérdida de transmisión (TL) que se produce en cada una de las geometrías que se van a tratar. Este resultado llevará a elaborar las conclusiones de la atenuación acústica que se produce en los distintos casos propuestos en este trabajo. Por último, se introducirán y caracterizarán los fenómenos acústicos que se producen al existir un cambio de condiciones en el medio de propagación de las ondas.

3.2 DEFINICIÓN DE ACÚSTICA

La Acústica es la rama de la física que se encarga del estudio del sonido, sus causas y fuentes, y la propagación de éste en regiones tanto abiertas como cerradas, tales como recintos, cavidades, conductos, etc.

El sonido se debe a una perturbación de presión en un medio elástico con capacidad de comprimirse. La perturbación no queda localizada en el punto en el que se origina, sino que se trasmite a los puntos colindantes, y así sucesivamente. El origen suele estar asociado, entre otros, a la vibración del medio por cualquier motivo.

La perturbación se transmite de unos puntos a otros durante el fenómeno de la propagación, siendo las características de ésta dependientes de las propiedades inerciales y elásticas del medio.

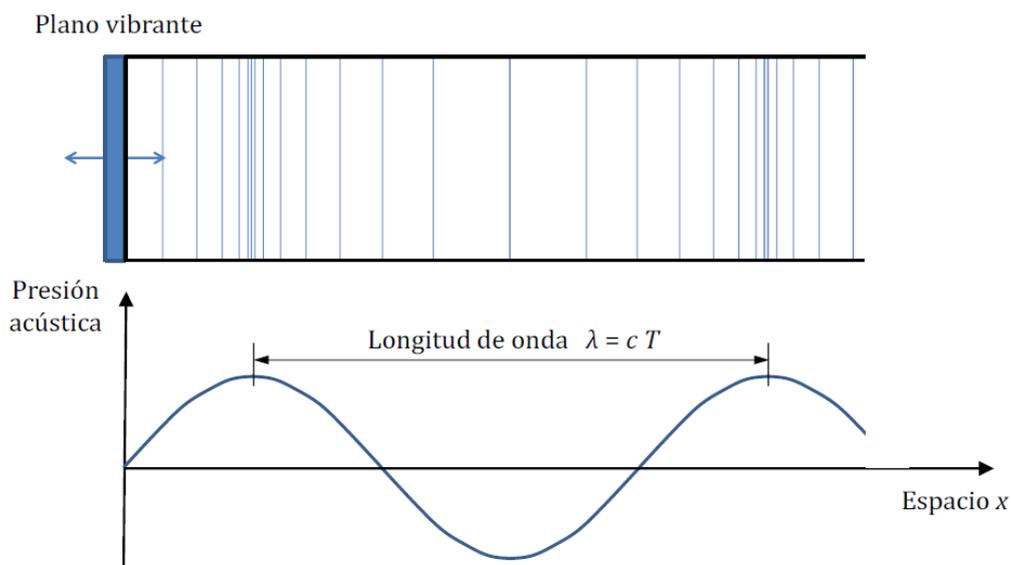


Figura 6. Propagación de onda sonora en un conducto debido al movimiento de un pistón (Denia Guzmán, Francisco David, 2022)

3.3 TIPOS DE ONDAS

3.3.1 Según el movimiento de las partículas

Existen dos tipos de ondas según el movimiento de las partículas:

- **Ondas longitudinales:** Son aquellas en las que la dirección del desplazamiento de las partículas alrededor de la posición de equilibrio es la misma que la dirección de propagación de la perturbación.
- **Ondas transversales:** Son aquellas en las que la dirección del desplazamiento de las partículas alrededor de la posición de equilibrio es perpendicular a la dirección de propagación de la perturbación.

3.3.2 Según su propagación

El campo acústico se puede representar matemáticamente mediante una descomposición de las ondas, denominadas como:

- **Ondas progresivas:** Su propagación se produce en sentido creciente de la coordenada espacial y puede definirse como una función $f(ct - x)$.

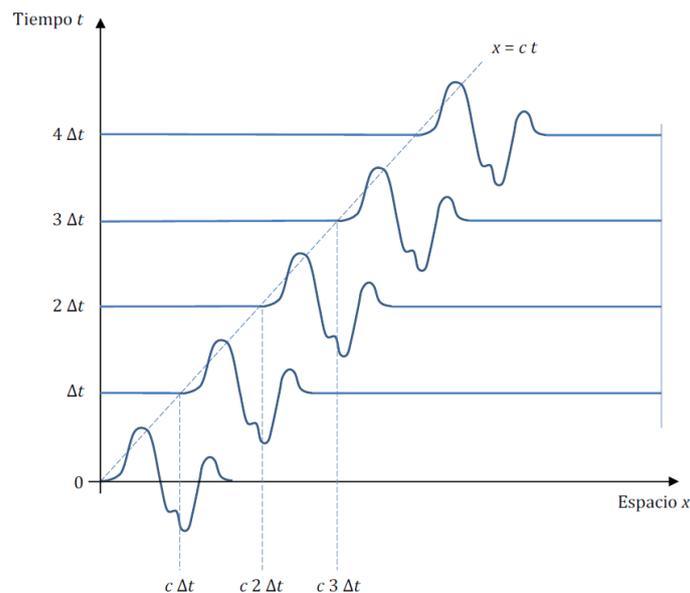


Figura 7. Propagación de una onda progresiva (Denia Guzmán, Francisco David, 2022)

- **Ondas regresivas:** Su propagación se produce en sentido decreciente de la coordenada espacial y puede definirse como una función $g(ct + x)$.
- **Ondas estacionarias:** En determinados casos, una combinación de una onda progresiva y una onda regresiva puede ocasionar una onda estacionaria, donde no existe transporte neto de energía y sus nodos permanecen inmóviles. Esto ocurre cuando ambas ondas son de la misma naturaleza con igual amplitud, longitud y frecuencia.

3.4 CARACTERÍSTICAS DE LA PERTUBACIÓN ACÚSTICA

La propagación de la perturbación afecta a propiedades como la presión, densidad, condensación, desplazamiento y velocidad de partículas, etc. Se propaga a través del medio a una velocidad característica de éste, denominada habitualmente c .

En general:

$$p_T = p_0 + p \quad (p \ll p_0) \quad (1)$$

$$\rho_T = \rho_0 + \rho \quad (\rho \ll \rho_0) \quad (2)$$

$$u_T = u_0 + u \quad (\text{en ausencia de flujo medio } u_0 = 0) \quad (3)$$

Siendo p_T , ρ_T y u_T los valores totales de la presión, densidad y velocidad, respectivamente; p_0 , ρ_0 y u_0 los valores medios de la presión, densidad y velocidad, respectivamente; mientras que p , ρ y u hacen referencia a los valores de la perturbación acústica.

Las características básicas que definen a las ondas acústicas son la frecuencia f y la longitud de onda λ .

3.5 MEDIOS DE PROPAGACIÓN

La propagación de una perturbación sonora se transmite a través de un medio, el cual puede ser sólido, líquido o gaseoso.

3.5.1 Aire

La propagación de la perturbación sonora depende en gran medida de las propiedades del gas, siendo éstas la densidad, la presión, la temperatura, el calor específico, la viscosidad y la conductividad térmica, donde éstas dos últimas se suelen excluir de muchos modelos. El medio más habitual de propagación es el aire, cuyos valores típicos para $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ y $p_0 = p_{atm} = 101325 \text{ Pa}$ son:

Densidad (ρ_0)	1.294 kg/m³
Calor específico (c_p)	1005 J/(kg · °C)
Viscosidad (μ)	1.82 · 10 ⁻⁵ Pa s
Conductividad térmica (k)	0.0257 W/(m · °C)

Tabla 1. Valores de las propiedades del aire a 20 °C y 101325 Pa

La densidad total (ρ_T) se puede obtener en función de la temperatura a través de la ecuación de estado de los gases perfectos:

$$\rho_T = \frac{p_T M_m}{RT} \quad (4)$$

Siendo $R = 8.314 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$ y $M_m = 0.02897 \text{ kg/mol}$, resultando que $\rho_T \approx \rho_0 = 101325 \text{ Pa}$.

Asumiendo que el proceso de propagación de la perturbación acústica es adiabático,

$$p_T = \alpha \rho_T^\gamma \quad (5)$$

se puede obtener la velocidad del sonido como:

$$c^2 = \left(\frac{dp_T}{d\rho_T} \right)_{adiabat} = \frac{\gamma p_T}{\rho_T} \approx \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \quad (6)$$

Con $\gamma = c_p/c_v = 1.4$ (exponente adiabático).

Sustituyendo ρ_T/p_T de la ecuación de estado de los gases perfectos (4) en (6), se obtiene que la velocidad del sonido es:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M_m}} \quad (7)$$

3.5.2 Medios sólidos y líquidos

La velocidad del sonido en un **medio sólido** se obtiene como:

- Medio homogéneo tridimensional:

$$c_p = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho_0(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad \text{Onda primaria (longitudinal)} \quad (8)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho_0}} \quad \text{Onda secundaria (transversal)} \quad (9)$$

- Sólidos longitudinales:

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \quad (10)$$

Siendo $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ el módulo de cizalladura del sólido, E el módulo elástico y ν el coeficiente de Poisson.

En un **medio líquido** la velocidad del sonido es obtenida mediante la siguiente fórmula:

$$c_l = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad (11)$$

Con el módulo de compresibilidad K :

$$K = -\frac{dp_T}{\frac{dV}{V}} = \frac{dp_T}{\frac{d\rho_T}{\rho_T}} \approx \frac{dp_0}{\frac{d\rho_0}{\rho_0}} \quad (12)$$

3.6 ECUACIÓN DE ONDAS EN UNA DIMENSIÓN. ONDAS PLANAS

El fenómeno de propagación de la perturbación se puede expresar en forma de ecuación de ondas a partir de las ecuaciones de la dinámica (Navier-Stokes/Euler), continuidad (conservación de la masa) y una ecuación de estado. Inicialmente se considera el caso más sencillo, el de ondas planas, buscando obtener una ecuación p como incógnita.

3.6.1 Deducción de la ecuación de ondas unidimensional

Se considera el siguiente elemento infinitesimal:

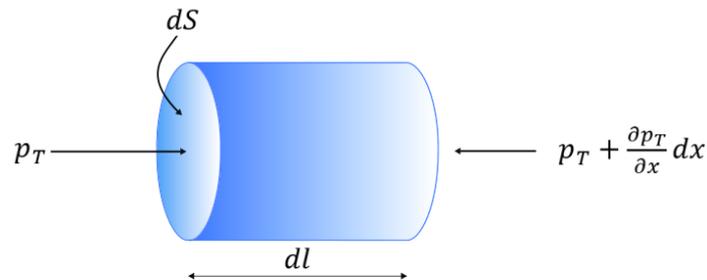


Figura 8. Elemento infinitesimal

- **Ecuación de Navier-Stokes (Euler):**

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dS = \rho_T dx dS \frac{du_T}{dt} \rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_T \frac{du_T}{dt} \quad (13)$$

Linealizando queda como:

$$\frac{du_T}{dt} = \frac{\partial u_T}{\partial t} + u_T \frac{\partial u_T}{\partial x} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_T = u_0 + u \\ u_0 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (14)$$

Sustituyendo (14) en (13) y siendo $\rho_0 \approx \rho_T$:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (15)$$

Quedan como incógnitas p y u y como variable conocida ρ_0 .

• **Ecuación de continuidad:**

$$\left(\left(\rho_T u + \frac{\partial \rho_T u}{\partial x} dx \right) - \rho_T u \right) dS = - \frac{\partial \rho_T}{\partial t} dx dS \quad (16)$$

Linealizando:

$$\frac{\partial \rho_T u}{\partial x} dx dS = - \frac{\partial \rho_T}{\partial t} dx dS \rightarrow \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (17)$$

Las incógnitas son ρ y u y como variable conocida ρ_0 .

• **Ecuación de estado**, tras aplicar serie de Taylor y linealizar:

$$p_T = p_T(\rho_T) \rightarrow p_0 + p = p_0 + \frac{dp_T}{d\rho_T} (\rho_T - \rho_0) \rightarrow p = \frac{dp_T}{d\rho_T} \rho = c^2 \rho \quad (18)$$

Teniendo como incógnitas ρ y p y como variable conocida c .

Por lo tanto, queda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (p , ρ y u).

Sustituyendo la ecuación de estado en la de continuidad resulta:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (19)$$

Derivando respecto al tiempo t se tiene que:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (20)$$

Derivando parcialmente respecto de x la ecuación de la dinámica resulta:

$$- \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \quad (21)$$

Combinando las ecuaciones (20) y (21) se obtiene finalmente la ecuación de onda con una sola incógnita:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (22)$$

Si la velocidad del medio de propagación no es nula ($u_0 \neq 0$), la ecuación resultante se conoce como ecuación de ondas convectiva, cuya expresión es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} \rightarrow \left(1 - \frac{u_0^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{2u_0}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \quad (23)$$

Donde la derivada total es la derivada parcial más el término convectivo:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \quad (24)$$

En este tipo de problemas es habitual recurrir al número de Mach $M = u_0/c$.

3.6.2 Solución

La solución de la ecuación de ondas planas para $u_0 = 0$ es de la forma:

$$p(x, t) = f(ct - x) + g(ct + x) \quad (25)$$

El tipo de solución más importante tiene naturaleza armónica, con frecuencia angular $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ (unidades: rad/s) y $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ número de onda. Se escribe como:

$$p(x, t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1) + B\cos(\omega t + kx + \varphi_2) \quad (26)$$

Representándola en forma compleja mediante la fórmula de Euler se tiene que:

$$p(x, t) = Ae^{j(\omega t - kx + \varphi_1)} + Be^{j(\omega t + kx + \varphi_2)} = \hat{A}e^{j(\omega t - kx)} + \hat{B}e^{j(\omega t + kx)} \quad (27)$$

Donde $\hat{A} = Ae^{j\varphi_1}$ y $\hat{B} = Be^{j\varphi_2}$ son las amplitudes complejas de onda. En general, el término $e^{j\omega t}$ se omite, utilizándose cuando se quiera conocer el valor instantáneo de la presión acústica. Por lo tanto, la presión acústica en función de x se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$p(x) = \hat{A}e^{-jkx} + \hat{B}e^{jkx} \quad (28)$$

La velocidad acústica se obtiene de la ecuación de Euler:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow -\frac{\partial p(x)}{\partial x} = \rho_0 j\omega u(x) \quad (29)$$

Desarrollando esta expresión se tiene que:

$$u(x) = -\frac{1}{\rho_0 j\omega} \cdot \frac{\partial p(x)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0 j\omega} \cdot (-jk\hat{A}e^{-jkx} + jk\hat{B}e^{jkx}) \quad (30)$$

Sustituyendo $k = \omega/c$:

$$u(x) = \frac{1}{\rho_0 c} \cdot (\hat{A}e^{-jkx} - \hat{B}e^{jkx}) \quad (31)$$

Donde $\rho_0 c = Z_0$ [rayl] es la impedancia característica del medio de propagación. Desarrollando se obtiene finalmente la expresión de la velocidad acústica en función de x .

$$u(x) = \frac{1}{Z_0} \cdot (\hat{A}e^{-jkx} - \hat{B}e^{jkx}) = \frac{\hat{A}e^{-jkx}}{Z_0} - \frac{\hat{B}e^{jkx}}{Z_0} \quad (32)$$

Por otro lado, el desplazamiento ξ se puede calcular como:

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} \rightarrow u(x) = j\omega \xi(x) \rightarrow \xi(x) = \frac{1}{j\omega Z_0} \cdot (\hat{A}e^{-jkx} - \hat{B}e^{jkx}) = \frac{u(x)}{j\omega} \quad (33)$$

3.6.3 Energía de una onda

Parte de la energía proveniente de la fuente sonora es suministrada a las partículas del medio de propagación cuando una onda incide sobre ellas. La energía acústica total está compuesta por energía cinética (asociada al movimiento de las partículas) y energía potencial (asociada a la compresibilidad del fluido), siendo su valor por unidad de volumen la llamada densidad de energía e :

$$e = \frac{1}{2} \rho_0 \left(u^2 + \frac{p^2}{\rho_0^2 c^2} \right) \quad (34)$$

Sabiendo que la relación entre presión y velocidad viene dada por la impedancia del medio $Z_0 = \rho_0 c$, es posible obtener la denominada densidad instantánea:

$$e = \rho_0 u^2 \quad (35)$$

Por otro lado, la energía por unidad de tiempo que fluye por una superficie unitaria perpendicular a la dirección de propagación se define como intensidad sonora, siendo su expresión:

$$I(t) = p(t)u(t) \rightarrow \vec{I}(t) = p(t)\vec{u}(t) \quad (\text{en } 3D) \quad (36)$$

Integrando la superficie S considerada se obtiene la potencia acústica:

$$Pot(t) = \int_S \vec{I}(t) d\vec{S} \quad (37)$$

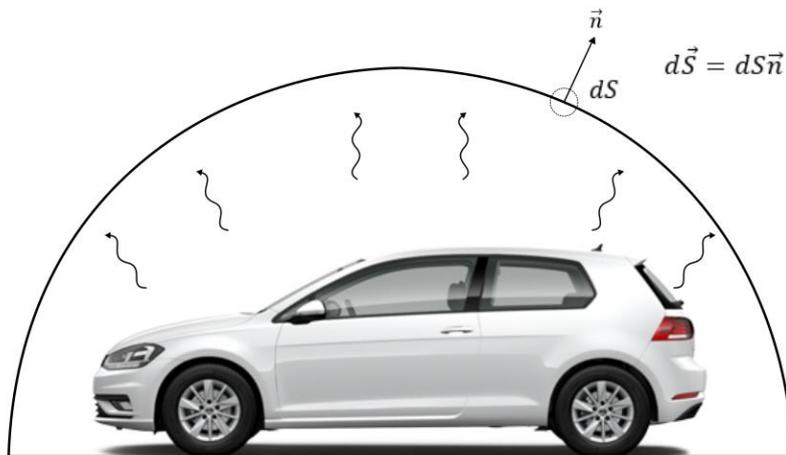


Figura 9. Intensidad sonora

Este cálculo puede realizarse mediante el Método de Elementos Finitos. En ensayos más rápidos y menos precisos se aproxima la integral a la siguiente suma:

$$Pot \approx \sum_i I_i S_i \quad (38)$$

En el caso de fuentes de naturaleza temporal en régimen estacionario es interesante obtener el promedio temporal. En el caso de ondas periódicas se considera el periodo T :

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt \quad \overline{Pot} = \frac{1}{T} \int_0^T Pot(t) dt \quad (39)$$

Para solución armónica, puede obtenerse la intensidad en un punto como:

$$I(t) = p(t)u(t) = Re(\hat{P}e^{j\omega t})Re(\hat{U}e^{j\omega t}) = \frac{1}{2}Re(\hat{P}\hat{U}^* + \hat{P}\hat{U}e^{j2\omega t}) \quad (40)$$

Considerando la integral a lo largo de un periodo se obtiene la intensidad activa:

$$\bar{I} = \frac{1}{2}Re(\hat{P}\hat{U}^*) \quad [W/m^2] \quad (41)$$

En el caso de ondas planas progresivas (o regresivas):

$$\bar{I} = \frac{1}{2}Re(\hat{P}\hat{U}^*) = \frac{1}{2\rho_0 c} Re(\hat{P}\hat{P}^*) = \frac{|\hat{P}|^2}{2\rho_0 c} = \frac{P_{eff}^2}{\rho_0 c} \quad (42)$$

Se puede obtener la presión eficaz P_{eff} como:

$$\frac{|\hat{P}|^2}{2\rho_0 c} = \frac{P_{eff}^2}{\rho_0 c} \rightarrow P_{eff} = \frac{|\hat{P}|}{\sqrt{2}} \quad (43)$$

3.6.4 Impedancia

En el apartado 3.6.2 ya se introdujo el concepto de la impedancia del medio de propagación. Esta impedancia se obtiene relacionando la presión acústica en el medio de propagación y la velocidad de la partícula, siendo la ecuación:

$$Z_0 = \rho_0 c \quad (\text{onda progresiva}) \quad Z_0 = -\rho_0 c \quad (\text{onda regresiva}) \quad [\text{rayl} = \text{kg}/(\text{m}^2\text{s})] \quad (44)$$

El concepto de impedancia es más amplio, ya que puede abarcar cualquier medio de propagación, no solamente el aire sino también materiales fonoabsorbentes como la fibra de vidrio, lana de basalto, etc. En estos casos la impedancia puede estar compuesta de una parte real R_{ABS} y una parte imaginaria X_{ABS} dependientes de la frecuencia.

$$Z_{ABS} = R_{ABS} + jX_{ABS} \quad (45)$$

También se puede hablar de la impedancia de radiación, la cual solamente se cumple en interfases:

$$Z_{RAD} = \frac{\hat{p}}{\hat{U}} \quad (46)$$

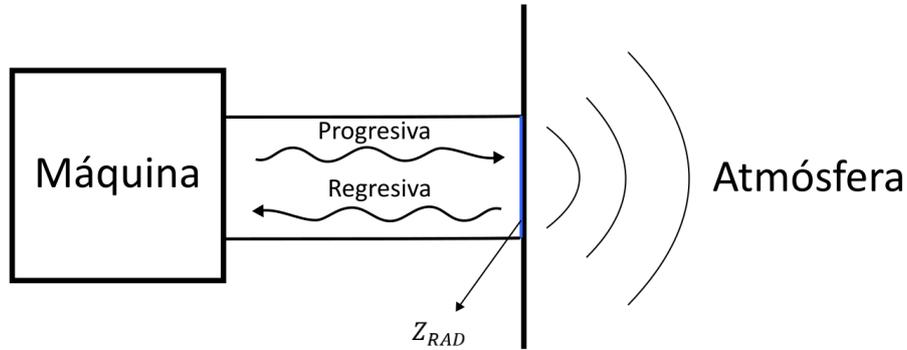


Figura 10. Impedancia de radiación

3.6.5 Escalas en decibelios

Para la cuantificación del sonido y su medida es habitual la utilización de escalas logarítmicas, ya que el rango de presiones e intensidades es muy amplio debido a que el rango aproximado entre el umbral de audición humano y el umbral del dolor es $[20 \mu Pa, 20 Pa]$. De esta manera se consigue “comprimir” estos rangos y obtener valores numéricos más “manejables”. Además, la respuesta del oído humano guarda cierta relación con la función logarítmica. La unidad de medida decibelio (dB) se emplea para expresar la relación entre dos magnitudes (IEEE, 2006), en este caso entre intensidades, potencias y presiones:

- Nivel de intensidad sonora:

$$L_I = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_{ref}}\right) \quad I_{ref} = 10^{-12} W/m^2 \quad (47)$$

- Nivel de potencia sonora:

$$L_W = 10 \cdot \log\left(\frac{Pot}{Pot_{ref}}\right) \quad Pot_{ref} = 10^{-12} W \quad (48)$$

- Nivel de presión sonora:

$$L_p = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{eff}}{P_{ref}}\right)^2 = 20 \cdot \log\left(\frac{P_{eff}}{P_{ref}}\right) \quad P_{ref} = 20 \cdot 10^{-6} Pa \quad (49)$$

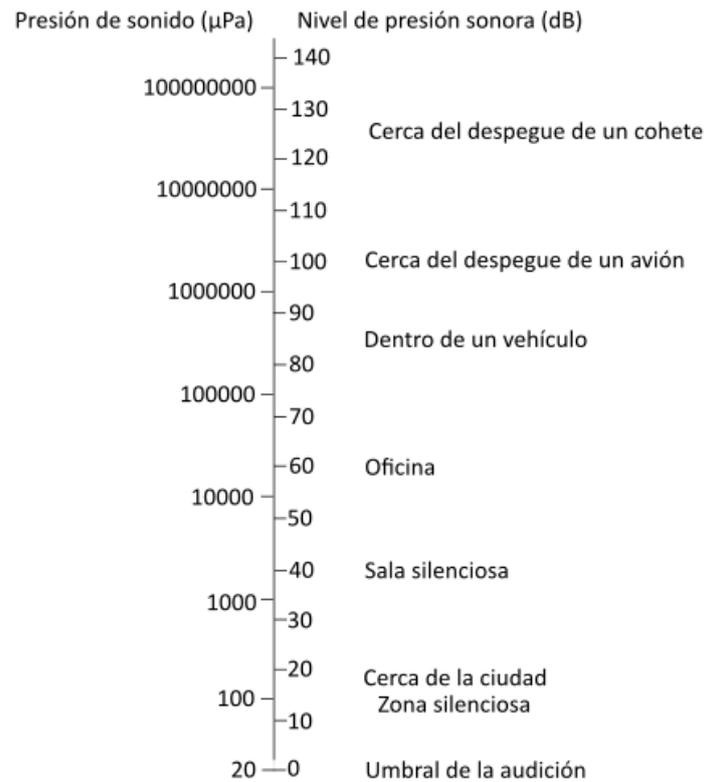


Figura 11. Presión sonora y nivel de presión sonora (Ochoa Pérez & Bolaños, 1990)

3.7 ECUACIÓN DE ONDAS EN TRES DIMENSIONES. ONDAS ESFÉRICAS.

3.7.1 Forma general

Se considera el caso general en el que la perturbación producida por una determinada fuente sonora se propaga en un espacio tridimensional. Combinando las ecuaciones de la dinámica y de continuidad en tres dimensiones con la ecuación de estado, de forma similar al apartado 3.6.2, se obtiene la ecuación de ondas en tres dimensiones:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \rightarrow \Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (50)$$

Para facilitar el tratamiento matemático del problema es conveniente considerar un sistema de referencia esférico (Figura 12), quedando la ecuación como:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (51)$$

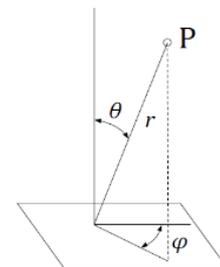


Figura 12. Sistema en coordenadas esféricas (Denia Guzmán, Francisco David, 2022)

En el caso de que las ondas tengan simetría esférica y no exista dependencia del campo acústico respecto a la coordenada polar θ ni la azimutal φ , la fuente se denomina radiador isótropo. En este caso la ecuación de ondas es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \quad (52)$$

Como la coordenada radial r es una variable independiente que no depende del tiempo, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \quad (53)$$

La función h viene dada por $h = p \cdot r$. Resolviendo la ecuación de forma similar al caso unidimensional se llega a que el producto $p \cdot r$ admite una representación matemática en forma de onda progresiva y regresiva:

$$p(r, t) = f(ct - r) + g(ct + r) \rightarrow p(r, t) = \frac{1}{r} f(ct - r) + \frac{1}{r} g(ct + r) \quad (54)$$

Donde el primer término representa una onda esférica divergente que parte de la fuente (situada en el origen) y se propaga con una velocidad c , donde su amplitud se reduce gradualmente al aumentar la coordenada radial r . El segundo término representa una onda similar que converge hacia el origen.

3.7.2 Ondas esféricas armónicas

En este apartado se considera el caso de ondas esféricas divergentes con comportamiento armónico, ya que las ondas convergentes tienen una menor importancia desde el punto de vista acústico y no suelen considerarse en muchos problemas relacionados con la radiación acústica. El campo de presión se puede escribir de forma:

$$p(r, t) = \hat{p} = \frac{\hat{A}}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (55)$$

La velocidad y el desplazamiento se obtienen de forma similar al caso unidimensional:

$$u(r, t) = \hat{u} = \left(\frac{1}{r} + jk \right) \frac{\hat{p}}{j\omega\rho_0} \quad (56)$$

$$\xi(r, t) = \hat{\xi} = - \left(\frac{1}{r} + jk \right) \frac{\hat{p}}{\omega^2\rho_0} \quad (57)$$

Los valores instantáneos de las variables acústicas son la parte real de las expresiones anteriores.

3.7.3 Impedancia en ondas esféricas armónicas

A diferencia de lo observado con ondas planas progresivas, la velocidad acústica no está en fase con la presión. La impedancia se calcula como:

$$\hat{z} = \frac{\hat{p}}{\hat{u}} = \frac{j\omega\rho_0}{\left(\frac{1}{r} + jk\right)} = \rho_0 c \frac{kr(kr + j)}{1 + k^2 r^2} = \rho_0 c \frac{kr}{\sqrt{1 + k^2 r^2}} e^{j\beta} \quad (58)$$

Donde $kr = 2\pi r/\lambda$ es el número de Helmholtz y el ángulo de fase de la impedancia (entre presión y velocidad) viene dado por:

$$\tan\beta = \frac{1}{kr} \quad (59)$$

Este ángulo varía entre 90° (valores bajos de kr) y 0° (valores altos de kr). Este valor cuantifica el producto de la distancia entre la fuente y la inversa de la longitud de onda, por lo que para valores del número de Helmholtz bajos se está cerca de la fuente y para valores altos se está lejos de ella.

Descomponiendo la impedancia en su parte real e imaginaria queda:

$$\hat{z} = \rho_0 c \frac{k^2 r^2}{1 + k^2 r^2} + j\rho_0 c \frac{kr}{1 + k^2 r^2} \quad (60)$$

Notar que para valores altos del número de Helmholtz la parte real de la impedancia tiende a $\rho_0 c$ y la parte imaginaria tiende a 0, por lo que una onda esférica se tiende a comportar como una onda plana a grandes distancias de la fuente.

3.7.4 Intensidad y radiación

La intensidad de una fuente sonora que radia energía de forma isótropa en el campo libre con una potencia Pot se obtiene como:

$$I = \frac{Pot}{S} = \frac{Pot}{4\pi r^2} \quad (61)$$

Un caso muy frecuente es encontrarse con superficies reflectantes, como por ejemplo donde se produce una radiación de tipo hemisférico, donde la intensidad es:

$$I = \frac{Pot}{S} = \frac{Pot}{2\pi r^2} \quad (62)$$

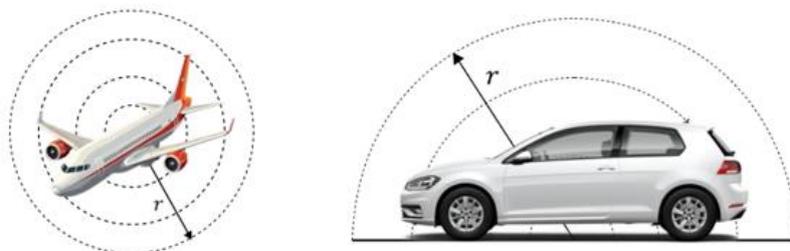


Figura 13. Radiación en campo libre y hemisférica sobre superficie reflectante

Por otro lado, la intensidad promedio a lo largo de un periodo se relaciona con el valor eficaz de la presión de la siguiente forma:

$$\bar{I} = \frac{A^2}{2\rho_0 c r^2} = \frac{P_{eff}^2}{\rho_0 c} \quad (63)$$

El valor pico de presión se puede obtener como:

$$P = \frac{A}{r} \quad (64)$$

La relación entre el valor eficaz de la presión y la potencia sonora es:

- Radiación en campo libre:

$$\frac{P_{eff}^2}{\rho_0 c} = \frac{Pot}{4\pi r^2} \quad (65)$$

- Radiación hemisférica sobre superficie reflectante:

$$\frac{P_{eff}^2}{\rho_0 c} = \frac{Pot}{2\pi r^2} \quad (66)$$

3.8 REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN DE ONDAS

Cuando una onda progresiva se propaga en un determinado medio y llega a una región de transición en la que se producen cambios en las condiciones existentes (distintos materiales, geometría, cambio de temperatura, etc.), se produce una onda reflejada que regresa al medio inicial y otra onda transmitida a la nueva región, la cual también puede experimentar nuevos fenómenos de reflexión y transmisión al alcanzar nuevas regiones.

3.8.1 Cambio de medio de propagación. Reflexión

Se consideran dos medios de propagación de la siguiente Figura, definidos por sus impedancias $Z_1 = \rho_1 c_1$ y $Z_2 = \rho_2 c_2$. Una onda progresiva se propaga por el medio 1 e incide sobre el plano de separación de ambos medios perpendicularmente. Esta onda incidente puede expresarse como:

$$p_i = \hat{P}_i e^{j(\omega t - k_1 x)} \quad (67)$$

Parte de esta onda incidente se refleja como una onda regresiva en el medio 1 y otra parte se transmite al medio 2:

$$p_r = \hat{P}_r e^{j(\omega t + k_1 x)} \quad \text{Onda reflejada} \quad p_t = \hat{P}_t e^{j(\omega t - k_2 x)} \quad \text{Onda transmitida} \quad (68)$$

Las tres ondas se caracterizan por tener la misma frecuencia, aunque al ser la velocidad del sonido diferente en el medio 2, el número de onda k_2 es distinto a k_1 .

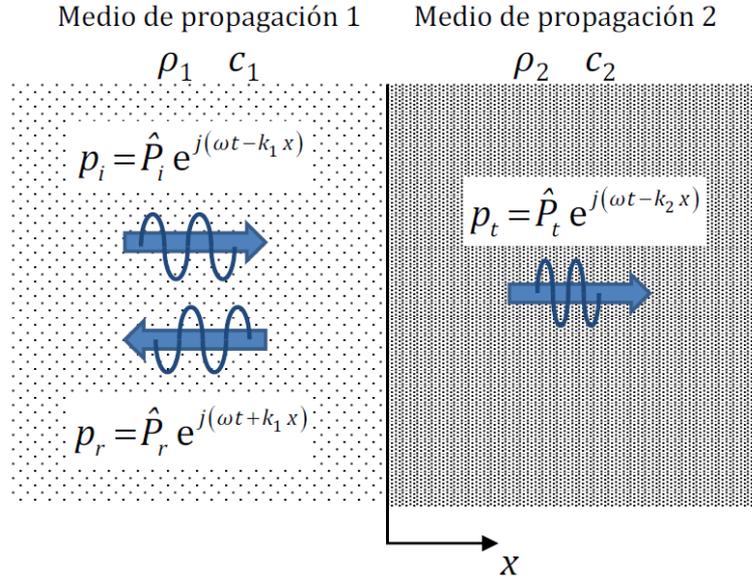


Figura 14. Reflexión y transmisión de ondas planas en dos medios de propagación (Denia Guzmán, Francisco David, 2022)

Las condiciones de contorno que se cumplen en el plano del cambio de medio ($x = 0$) son las de igualdad de presión y velocidad:

$$p_1 = p_2 \rightarrow p_i + p_r = p_t \quad u_1 = u_2 \rightarrow u_i + u_r = u_t \quad (69)$$

Donde,

$$p_1 = \hat{P}_i e^{j(\omega t - k_1 x)} + \hat{P}_r e^{j(\omega t + k_1 x)} \quad p_2 = p_t = \hat{P}_t e^{j(\omega t - k_2 x)} \quad (70)$$

$$u_1 = \frac{1}{Z_1} (\hat{P}_i e^{j(\omega t - k_1 x)} + \hat{P}_r e^{j(\omega t + k_1 x)}) \quad u_2 = \frac{1}{Z_2} \hat{P}_t e^{j(\omega t - k_2 x)} \quad (71)$$

Sustituyendo ($x = 0$) se tiene que:

$$p_1 = p_2 \rightarrow \hat{P}_i + \hat{P}_r = \hat{P}_t \quad u_1 = u_2 \rightarrow \frac{\hat{P}_i - \hat{P}_r}{Z_1} = \frac{\hat{P}_t}{Z_2} \quad (72)$$

Se define el coeficiente de reflexión R como la relación entre la onda reflejada e incidente, siendo su expresión.

$$R = \frac{\hat{P}_r}{\hat{P}_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (73)$$

Esta ecuación es válida tanto para impedancias reales como complejas. En caso de que las impedancias sean reales se pueden considerar tres casos extremos:

- $Z_2 \gg Z_1$ (por ejemplo, aire/agua): El coeficiente de reflexión se aproxima a 1, por lo que la onda reflejada está en fase con a la onda incidente.
- $Z_1 \gg Z_2$ (por ejemplo, agua/aire): El coeficiente de reflexión se aproxima a -1, por lo que la onda reflejada está en oposición de fase con la onda incidente.
- $Z_1 = Z_2$: El coeficiente de reflexión es 0, no reflejándose ninguna onda. La onda incidente se transmite en su totalidad al otro medio.

Se puede observar que el orden que presenten los distintos medios tiene influencia en el resultado.

Por otro lado, se suele utilizar el coeficiente de reflexión de potencia α_r , la cual relaciona la energía reflejada y la energía incidente:

$$\alpha_r = \frac{\overline{Pot}_r}{\overline{Pot}_i} = \frac{\overline{I}_r}{\overline{I}_i} = \left| \frac{\hat{P}_r}{\hat{P}_i} \right|^2 = \left| \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right|^2 = |R|^2 \quad (74)$$

En este caso, la ordenación de los medios no influye en el resultado de α_r .

3.8.2 Cambio de medio de propagación. Transmisión

Se define el coeficiente de transmisión T como la relación entre la onda transmitida y la onda incidente:

$$T = \frac{\hat{P}_t}{\hat{P}_i} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad (75)$$

Esta expresión es válida tanto para impedancias reales como complejas. En los casos en que las impedancias sean reales se pueden dar tres casos extremos:

- $Z_2 \gg Z_1$ (por ejemplo, aire/agua): El coeficiente de transmisión tiende a 2, por lo que la onda transmitida tiene aproximadamente el doble de amplitud de presión que la onda incidente.
- $Z_1 \gg Z_2$ (por ejemplo, agua/aire): El coeficiente de transmisión se aproxima a 0, por lo que no se transmite prácticamente nada a nivel de presión.
- $Z_1 = Z_2$: El coeficiente de transmisión es 1, no reflejándose ninguna onda. La onda incidente se transmite en su totalidad al otro medio.

Resaltar que el orden de los medios si influye en este resultado.

Trabajando en términos de energía acústica se define el coeficiente de transmisión de potencia α_t , la cual relaciona la energía transmitida y la energía incidente. En el caso de impedancias reales:

$$\alpha_t = \frac{\overline{Pot}_t}{\overline{Pot}_i} = \frac{\overline{I}_t}{\overline{I}_i} = \frac{|\hat{P}_t|^2 / (2\rho_2 c_2)}{|\hat{P}_i|^2 / (2\rho_1 c_1)} = |T|^2 \frac{Z_1}{Z_2} = 4 \frac{Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (76)$$

Teniendo en cuenta que la conservación de energía, la suma de la potencia reflejada y la transmitida debe coincidir con la potencia incidente.

$$\overline{Pot}_i = \overline{Pot}_r + \overline{Pot}_t \quad (77)$$

En el caso de que las impedancias sean complejas (materiales absorbentes) se puede obtener que el coeficiente de transmisión dividiendo la ecuación anterior entre \overline{Pot}_i :

$$1 = \frac{\overline{Pot}_r}{\overline{Pot}_i} + \frac{\overline{Pot}_t}{\overline{Pot}_i} = \alpha_r + \alpha_t \rightarrow \alpha_t = 1 - \alpha_r = 1 - |R^2| \quad (78)$$

En coeficiente de transmisión, por tanto, no depende de cómo se ordenen los medios.

Destacar la pérdida de transmisión TL , la cual indica la diferencia entre el nivel de la potencia acústica de la onda incidente y la onda reflejada. Se calcula como:

$$TL = 10 \log \frac{\overline{Pot}_i}{\overline{Pot}_t} = 10 \log \frac{1}{\alpha_t} \quad (79)$$

3.8.3 Cambio de sección

Los cambios de sección son utilizados en muchas ocasiones para disminuir el nivel sonoro, especialmente en sistemas de ventilación y aire acondicionado, motores, sistemas de escape de vehículos, diseño de edificios, etc. En la Figura 15 se muestra un cambio de sección formado por dos conductos con distinta área transversal:

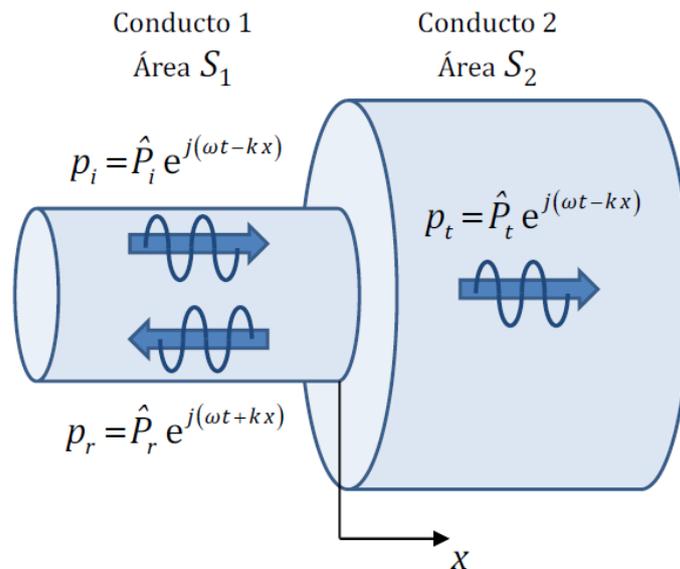


Figura 15. Reflexión y transmisión de ondas planas en un cambio de sección (Denia Guzmán, Francisco David, 2022)

En el plano de separación ($x = 0$) se cumplen las siguientes condiciones (únicamente a bajas frecuencias):

- Continuidad de presión:

$$p_1 = p_2 \rightarrow \hat{P}_i + \hat{P}_r = \hat{P}_t \quad (80)$$

- Continuidad de flujo másico acústico:

$$\rho_0 u_1 S_1 = \rho_0 u_2 S_2 \rightarrow \rho_0 \frac{\hat{P}_i - \hat{P}_r}{Z_0} S_1 = \rho_0 \frac{\hat{P}_t}{Z_0} S_2 \rightarrow (\hat{P}_i - \hat{P}_r) S_1 = \hat{P}_t S_2 \quad (81)$$

El coeficiente de reflexión R viene dado por:

$$R = \frac{\hat{P}_r}{\hat{P}_i} = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \quad (82)$$

Se pueden dar tres casos:

- $S_1 \geq S_2$: Los conductos forman una contracción y se tiene que $0 \leq R \leq 1$.
- $S_1 \leq S_2$: Los conductos forman una expansión y se tiene que $-1 \leq R \leq 0$.
- $S_1 = S_2$: No hay cambio geométrico, por lo que $R = 0$.

Por otro lado, el coeficiente de transmisión T se obtiene como:

$$T = \frac{\hat{P}_t}{\hat{P}_i} = \frac{2S_1}{S_1 + S_2} \quad (83)$$

Se pueden dar tres casos:

- $S_1 \geq S_2$: Los conductos forman una contracción y se tiene que $1 \leq T \leq 2$.
- $S_1 \leq S_2$: Los conductos forman una expansión y se tiene que $0 \leq T \leq 1$.
- $S_1 = S_2$: No hay cambio geométrico, por lo que $T = 1$.

Las potencias asociadas a las ondas presentes en el cambio de sección son:

$$\overline{Pot}_i = \bar{I}_i S_1 = \frac{|\hat{P}_i|^2 S_1}{2\rho_0 c} \quad \overline{Pot}_r = \bar{I}_r S_1 = \frac{|\hat{P}_r|^2 S_1}{2\rho_0 c} \quad \overline{Pot}_t = \bar{I}_t S_2 = \frac{|\hat{P}_t|^2 S_2}{2\rho_0 c} \quad (84)$$

Los coeficientes de reflexión y transmisión de potencia son, respectivamente:

$$\alpha_r = R^2 = \left(\frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \right)^2 \quad \alpha_t = T^2 \frac{S_2}{S_1} = \frac{4S_1 S_2}{(S_1 + S_2)^2} \quad (85)$$

Finalmente, la de pérdida de transmisión acústica viene dada por:

$$TL = 10 \log \frac{\overline{Pot}_i}{\overline{Pot}_t} = 10 \log \frac{\overline{Pot}_i}{\overline{Pot}_i - \overline{Pot}_r} = 10 \log \frac{1}{\alpha_t} = 10 \log \frac{(S_1 + S_2)^2}{4S_1 S_2} \quad (86)$$

3.8.4 Transmisión de sonido en particiones

Un caso de gran interés es el estudio de fenómenos sonoros de reflexión y transmisión a través de tres medios, especialmente cuando el primer y tercer medio son iguales.

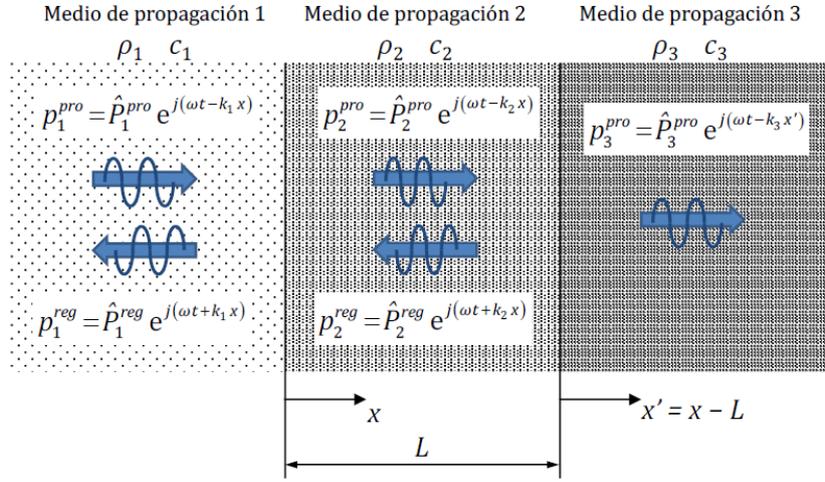


Figura 16. Reflexión y transmisión de sonido a través de tres medios (Denia Guzmán, Francisco David, 2022)

Mediante un planteamiento similar al de los anteriores apartados, sabiendo que en la interfaz entre los medios 1 y 2 ($x = 0$) se cumplen las condiciones de continuidad de presión y velocidad, y que en la interfaz entre los medios 2 y 3 ($x = L$ y $x' = 0$) se cumplen las mismas condiciones, se puede obtener la relación entre la onda incidente en el medio 1 y la transmitida en el medio 3:

$$T = \frac{\hat{p}_3^{pro}}{\hat{p}_1^{pro}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right) \cos(k_2 L) + j \frac{1}{2} \left(\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_3}\right) \sen(k_2 L)} \quad (87)$$

En caso de que las impedancias sean complejas, el coeficiente de transmisión de potencia se expresa como:

$$\alpha_t = \frac{\overline{Pot}_3^{pro}}{\overline{Pot}_1^{pro}} = \frac{|\hat{p}_3^{pro}|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z_3^*}\right)}{|\hat{p}_1^{pro}|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z_1^*}\right)} = |T|^2 \frac{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z_3^*}\right)}{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z_1^*}\right)} \quad (88)$$

Si las impedancias son reales, entonces queda:

$$\alpha_t = |T|^2 \frac{Z_1}{Z_3} = \frac{4 \frac{Z_1}{Z_3}}{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right)^2 \cos^2(k_2 L) + \left(\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_3}\right)^2 \sen^2(k_2 L)} \quad (89)$$

Además, si las impedancias de los medios 1 y 3 son iguales y la impedancia del medio 2 es mucho mayor que las demás (algo muy frecuente), la expresión anterior se puede escribir como:

$$\alpha_t = \frac{4}{4 \cos^2(k_2 L) + \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 \sin^2(k_2 L)} \quad (90)$$

Si el material y espesor de la partición, así como la frecuencia, permiten las aproximaciones $\cos(k_2 L) \approx 1$ y $\sin(k_2 L) \approx k_2 L$, se tiene:

$$\alpha_t = \frac{1}{1 + \left(\frac{Z_2}{2Z_1} k_2 L\right)^2} \quad (91)$$

Finalmente, si se utiliza la relación $k_2 = \omega/c_2 = 2\pi f/c_2$ y se define la masa superficial de la partición como $m_2 = \rho_2 L$, se tiene la ecuación ley de masa:

$$\alpha_t = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi f m_2}{Z_1}\right)^2} \quad (92)$$

3.8.5 Absorción

En la práctica los materiales utilizados son normalmente de tipo fonoabsorbente, tales como porosos, fibrosos, espumas, etc., cuyas impedancias son magnitudes complejas y dependientes de la frecuencia. Esto ocasiona desfases entre presión y velocidad debido a la gran superficie de fricción de estos materiales y a la disipación de energía acústica en forma de energía calorífica.

Las propiedades acústicas de estos materiales se pueden obtener de forma experimental o ajustándose a modelos empíricos o semiempíricos, como el de Delany y Bazley, entre otros. Mediante ensayos se pueden ajustar la impedancia característica y el número de onda con las siguientes expresiones, cuyos coeficientes se obtienen por ajuste matemático a resultados experimentales:

$$Z_{abs} = Z_{aire} \left(1 + a_5 \left(\frac{\rho_{aire} f}{R_{flujo}} \right)^{a_6} - j a_7 \left(\frac{\rho_{aire} f}{R_{flujo}} \right)^{a_8} \right) \quad (93)$$

$$k_{abs} = k_{aire} \left(1 + a_3 \left(\frac{\rho_{aire} f}{R_{flujo}} \right)^{a_4} - j a_1 \left(\frac{\rho_{aire} f}{R_{flujo}} \right)^{a_2} \right) \quad (94)$$

Donde Z_{aire} , k_{aire} y ρ_{aire} son las propiedades del aire localizado entre el material absorbente, f es la frecuencia y R_{flujo} es la resistividad a flujo estacionario.

A partir de los valores Z_{abs} y k_{abs} se pueden obtener las propiedades acústicas, las cuales son “equivalentes” desde el punto de vista acústico:

$$k_{abs} = \frac{\omega}{c_{abs}} \rightarrow c_{abs} = \frac{\omega}{k_{abs}} \quad Z_{abs} = \rho_{abs} c_{abs} \rightarrow \rho_{abs} = \frac{Z_{abs}}{c_{abs}} \quad (95)$$

Cuando se produce el cambio de medio de propagación de aire a material absorbente, la onda transmitida que atraviesa este último medio se disipa progresivamente, de manera que la energía acústica se convierte en calor. Por ello, el coeficiente de transmisión de potencia es frecuentemente interpretado como un coeficiente de absorción, lo cual solamente es cierto en algunas situaciones. Sin embargo, existe la posibilidad de que al material absorbente le suceda otro medio de propagación y este último reciba parte de energía acústica. En este caso, no toda la energía que penetra en el material absorbente se disipa, de manera que el coeficiente de absorción requiere procedimientos adecuados de medida y/o cuantificación. Dichos procedimientos se encuentran descritos en detalle en la normativa vigente detallada a continuación:

- Norma UNE-EN ISO 10534-1:2002. Acústica. Determinación del coeficiente de absorción acústica y de la impedancia acústica en tubos de impedancia. Parte 1: Método del rango de onda estacionaria. (ISO 10534-1:1996).
- Norma UNE-EN ISO 10534-2:2002. Acústica. Determinación del coeficiente de absorción acústica y de la impedancia acústica en tubos de impedancia. Parte 2: Método de la función de transferencia. (ISO 10534-2:1998) (Denia Guzmán, Francisco David, 2022).

4. MODELO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA

El cálculo acústico del problema planteado se puede realizar de dos formas:

- 1) Mediante la técnica utilizada habitualmente en la que se asume que el monolito se comporta como un material absorbente continuo y la propagación de ondas en su interior es tridimensional (modelo 3D/3D).
- 2) Mediante la técnica que asume que dentro de los monolitos solo existen ondas planas. Esta técnica consiste en sustituir los monolitos por matrices de transferencia (matrices de cuatro polos), de manera que se asume comportamiento acústico unidimensional en sus interiores (modelo 3D/1D). De esta forma, la solución del campo acústico puede ser tridimensional en los conductos, cámaras de entrada y salida, pero no se permite la existencia de modos de alto orden en los monolitos. Esta técnica es más realista, ya que los monolitos están formados por conductos capilares muy largos y de sección transversal reducida.

Ambas técnicas fueron comparadas con resultados experimentales, proporcionando la técnica 2) unos resultados más fiables (Denia Guzmán, Antebas, Martínez-Casas, & Fuenmayor, 2009).

Otra opción sería considerar solo la existencia de ondas planas en el sistema. Sin embargo, este método no proporciona resultados realistas a frecuencias altas, ya que el campo acústico en realidad es tridimensional.

En primer lugar, se va a caracterizar el catalizador y, posteriormente, el filtro antipartículas.

4.1 MODELO 3D/3D

Con esta técnica se asume que las ondas existentes son tridimensionales. Se definen las propiedades acústicas de impedancia y número de onda, las cuales son dependientes de la frecuencia. En la región de entrada y salida el medio de propagación es aire con densidad ρ_0 y velocidad del sonido c_0 , y el monolito, caracterizado por los valores equivalentes ρ_m y c_m (Denia Guzmán, Antebas, Martínez-Casas, & Fuenmayor, 2009).

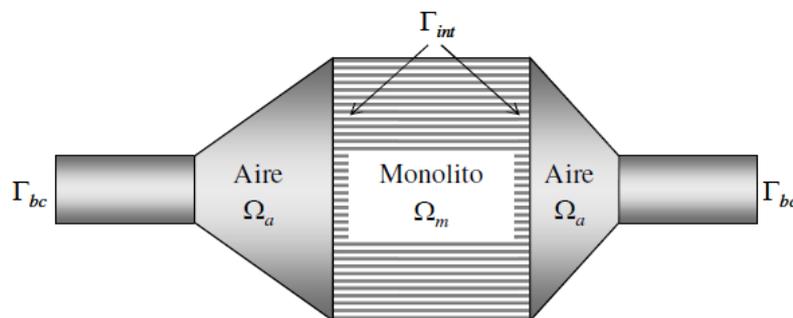


Figura 17. Modelo 3D/3D del monolito (Denia Guzmán, Antebas, Martínez-Casas, & Fuenmayor, 2009).

4.2 MODELO 3D/1D. CATALIZADOR

El modelo propuesto sustituye el monolito por una relación “nodo a nodo” de tipo unidimensional, la cual está representada por una matriz de cuatro polos T^m , relacionando cada punto de entrada al monolito con su correspondiente punto de salida (Denia Guzmán, Antebas, Martínez-Casas, & Fuenmayor, 2009). Esta técnica proporciona resultados más realistas y requiere de un menor coste computacional en comparación con el modelo 3D/3D.

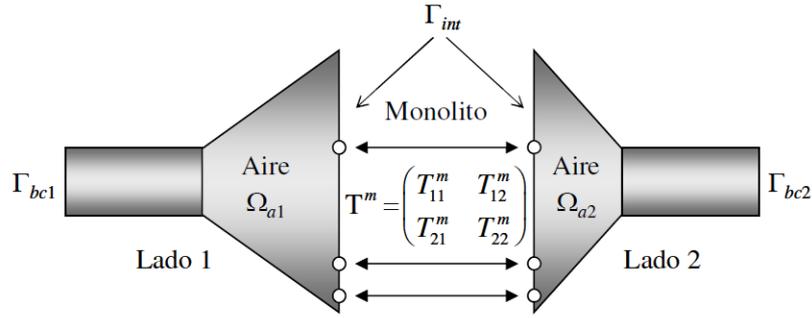


Figura 18. Modelo 3D/1D del catalizador (Denia Guzmán, Antebas, Martínez-Casas, & Fuenmayor, 2009).

En las regiones de entrada y salida se define el campo acústico mediante la resolución de la ecuación de Helmholtz, correspondiente a la ecuación de ondas particularizada a un campo acústico armónico:

$$\nabla^2 P + k_0^2 P = 0 \quad (96)$$

donde ∇^2 es el operador laplaciano, P es la presión acústica y $k_0 = \omega/c_0$ es el número de onda.

Para el aire, la interpolación de elementos finitos dentro de un elemento e proporciona:

$$P_a = N \tilde{P}_a^e \quad (97)$$

Siendo N el vector de función de forma.

Se utiliza el método de residuos ponderados junto con la formulación de Galerkin en cada una de las secciones de aire separadas por el monolito.

- Lado 1:

$$\sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \left(\int_{\Omega_{a1}^e} \nabla^T N \nabla N d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a1}^e} N^T N d\Omega \right) \tilde{P}_{a1}^e = \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{bc1}} N^T \frac{\partial P_{a1}}{\partial n} d\Gamma + \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} N^T \frac{\partial P_{a1}}{\partial n} d\Gamma \quad (98)$$

- Lado 2:

$$\sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \left(\int_{\Omega_{a2}^e} \nabla^T N \nabla N d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a2}^e} N^T N d\Omega \right) \tilde{P}_{a2}^e = \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{bc2}} N^T \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} d\Gamma + \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} N^T \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} d\Gamma \quad (99)$$

El monolito se sustituye por una matriz de cuatro polos, relacionando los campos acústicos de presión y velocidad a ambos lados de este mediante las siguientes expresiones:

$$P_{a1} = T_{11}^m P_{a2} - T_{12}^m \left(\frac{-1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} \right) \quad (100)$$

$$\frac{-1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial P_{a1}}{\partial n} = T_{21}^m P_{a2} - T_{22}^m \left(-\frac{1}{j\omega\rho_0} \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} \right) \quad (101)$$

Considerando la ecuación (100), queda que:

$$\frac{\partial P_{a2}}{\partial n} = \frac{j\omega\rho_0}{T_{12}^m} P_{a1} - \frac{j\omega\rho_0 T_{11}^m}{T_{12}^m} P_{a2} = j\omega\Pi_{21} P_{a1} - j\omega\Pi_{22} P_{a2} \quad (102)$$

Combinando las ecuaciones (101) y (102):

$$\frac{\partial P_{a1}}{\partial n} = -j\omega\Pi_{21} T_{22}^m P_{a1} + j\omega(\Pi_{22} T_{22}^m - \rho_0 T_{21}^m) P_{a2} = -j\omega\Pi_{11} P_{a1} + j\omega\Pi_{12} P_{a2} \quad (103)$$

• Para el lado 1, sustituyendo la ecuación (103) en el lado derecho de la ecuación (98), queda que:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \left(\int_{\Omega_{a1}^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a1}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right) \tilde{\mathbf{P}}_{a1}^e = \\ & = \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{bc1}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_{a1}}{\partial n} d\Gamma + \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T (-j\omega\Pi_{11} P_{a1} + j\omega\Pi_{12} P_{a2}) d\Gamma \end{aligned} \quad (104)$$

Operando, resulta:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \left(\left(\int_{\Omega_{a1}^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a1}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right) \tilde{\mathbf{P}}_{a1}^e + j\omega\Pi_{11} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \tilde{\mathbf{P}}_{a1}^e d\Gamma - \right. \\ & \left. - j\omega\Pi_{12} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \tilde{\mathbf{P}}_{a2}^e d\Gamma \right) = \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{bc1}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_{a1}}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (105)$$

Se puede expresar de forma compacta de la siguiente forma:

$$(\mathbf{K}_{a1} + j\omega\mathbf{C}_{a1} - \omega^2\mathbf{M}_{a1})\tilde{\mathbf{P}}_{a1} - j\omega\mathbf{C}_{a1a2}\tilde{\mathbf{P}}_{a2} = \mathbf{F}_{a1} \quad (106)$$

donde,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{a1} &= \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Omega_{a1}^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} d\Omega \\
 \mathbf{C}_{a1} &= \Pi_{11} \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \\
 \mathbf{M}_{a1} &= \frac{1}{c_0^2} \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Omega_{a1}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \\
 \mathbf{C}_{a1a2} &= \Pi_{12} \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \\
 \mathbf{F}_{a1} &= \sum_{e=1}^{N_{a1}^e} \int_{\Gamma_{a1}^e \cap \Gamma_{bc1}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_a}{\partial n} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{107}$$

- Para el lado 2, sustituyendo la ecuación (102) en la ecuación (99), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \left(\int_{\Omega_{a2}^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a2}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right) \tilde{\mathbf{P}}_{a2}^e = \\
 & = \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{bc2}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} d\Gamma + \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T (j\omega \Pi_{21} P_{a1} - j\omega \Pi_{22} P_{a2}) d\Gamma
 \end{aligned} \tag{108}$$

Operando:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \left(\left(\int_{\Omega_{a2}^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_{a2}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right) \tilde{\mathbf{P}}_{a2}^e + j\omega \Pi_{22} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \tilde{\mathbf{P}}_{a2}^e d\Gamma - \right. \\
 & \left. - j\omega \Pi_{21} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \tilde{\mathbf{P}}_{a1}^e d\Gamma \right) = \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{bc2}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_{a2}}{\partial n} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{109}$$

De forma compacta:

$$(\mathbf{K}_{a2} + j\omega \mathbf{C}_{a2} - \omega^2 \mathbf{M}_{a2}) \tilde{\mathbf{P}}_{a2} - j\omega \mathbf{C}_{a2a1} \tilde{\mathbf{P}}_{a1} = \mathbf{F}_{a2} \tag{110}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{a2} &= \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Omega_{a2}^e} \nabla^T \mathbf{N} \nabla \mathbf{N} d\Omega \\
 \mathbf{C}_{a2} &= \Pi_{22} \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \\
 \mathbf{M}_{a2} &= \frac{1}{c_0^2} \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Omega_{a2}^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \\
 \mathbf{C}_{a2a1} &= \Pi_{21} \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{int}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \\
 \mathbf{F}_{a2} &= \sum_{e=1}^{N_{a2}^e} \int_{\Gamma_{a2}^e \cap \Gamma_{bc2}} \mathbf{N}^T \frac{\partial P_a}{\partial n} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{111}$$

Con las ecuaciones (110) y (106) se puede escribir el sistema de ecuaciones final como:

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{a1} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{a2} \end{pmatrix} + j\omega \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{a1} & -\mathbf{C}_{a1a2} \\ -\mathbf{C}_{a2a1} & \mathbf{C}_{a2} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{a1} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{a2} \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \widetilde{\mathbf{P}}_{a1} \\ \widetilde{\mathbf{P}}_{a2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{a1} \\ \mathbf{F}_{a2} \end{Bmatrix} \tag{112}$$

Expresado de forma compacta es:

$$(\mathbf{K}_a + j\omega \mathbf{C}_a - \omega^2 \mathbf{M}_a) \widetilde{\mathbf{P}}_a = \mathbf{F}_a \tag{113}$$

Finalmente, la expresión de la matriz de cuatro polos que se introduce en las ecuaciones (100) y (101), la cual depende de las propiedades del monolito, es:

$$T^m = \begin{pmatrix} T_{11}^m & T_{12}^m \\ T_{21}^m & T_{22}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k_m L_m) & \frac{j\rho_m c_m \sin(k_m L_m)}{\phi} \\ \frac{j\phi \sin(k_m L_m)}{\rho_m c_m} & \cos(k_m L_m) \end{pmatrix} \tag{114}$$

donde L_m representa la longitud de los conductos capilares.

En ausencia de flujo medio, un conjunto de conductos capilares se puede caracterizar acústicamente por la densidad equivalente ρ_m (Allard, 1993) (Selamet, Easwaran, Novak, & Kach, 1998):

$$\rho_m = \rho_0 \left(1 + \frac{R\phi}{j\omega\rho_0} G_c(s) \right) \tag{115}$$

donde R es la resistividad estacionaria, ϕ es la porosidad del monolito y ω es la frecuencia angular. La función $G_c(s)$ se define como:

$$G_c(s) = \frac{-\frac{s}{4}\sqrt{-j}\frac{J_1(s\sqrt{-j})}{J_0(s\sqrt{-j})}}{1 - \frac{2}{s\sqrt{-j}}\frac{J_1(s\sqrt{-j})}{J_0(s\sqrt{-j})}} \quad (116)$$

Siendo J_0 y J_1 son las funciones de Bessel de primera especie y orden cero y uno, respectivamente, y s el número de onda tangencial, que se calcula mediante la siguiente expresión:

$$s = \alpha \sqrt{\frac{8\omega\rho_o}{R\phi}} \quad (117)$$

donde α depende de la geometría de la sección transversal del capilar.

La velocidad del sonido equivalente c_m se obtiene a partir de la densidad equivalente ρ_m y del módulo volumétrico K_m , el cual se expresa como:

$$K_m = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1)F} \quad (118)$$

siendo γ la relación de calores específicos, P_0 la presión ambiental media y F :

$$F = \frac{1}{1 + \frac{R\phi}{jPr\omega\rho_o} G_c(\sqrt{Pr} s)} \quad (119)$$

Donde Pr es el número de Prandtl:

$$Pr = \mu C_p / \kappa \quad (120)$$

siendo μ la viscosidad, C_p el calor específico a presión constante y κ la conductividad térmica.

Por lo tanto, teniendo en cuenta la relación $c_o = \sqrt{\gamma P_o / \rho_o}$, la velocidad del sonido equivalente se calcula como:

$$c_m = \sqrt{\frac{K_m}{\rho_m}} = \frac{c_o}{\sqrt{\left(1 + \frac{R\phi}{j\omega\rho_o} G_c(s)\right) (\gamma - (\gamma - 1)F)}} \quad (121)$$

4.3 MODELO DE ONDA 1D. FILTRO ANTIPÁRTICULAS (DPF)

El filtro antipartículas está formado por capilares de sección transversal reducida y de gran longitud, cuyos canales se encuentran cerrados por un lado y abiertos por otro. Por lo tanto, los gases pasan de un canal a otro debido a la permeabilidad de sus paredes. El acoplamiento entre estos canales a través de las paredes porosas se describe mediante la ley de Darcy.

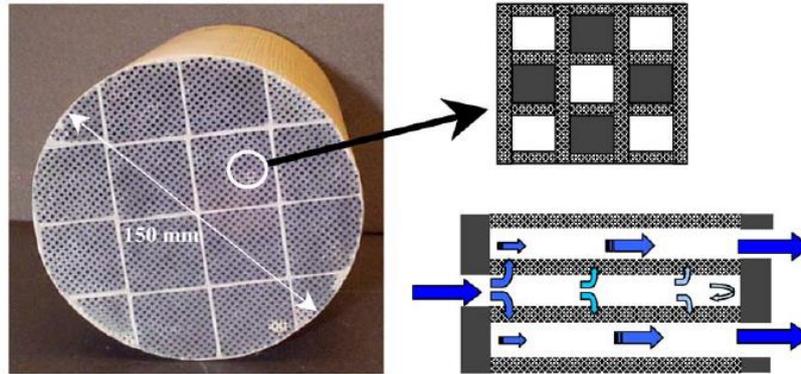


Figura 19. Estructura del DPF (Abom & Allam, 2005).

Allam y Abom (2005) propusieron un modelo para caracterizar acústicamente los filtros antipartículas, el cual supone que:

- Sólo se consideran ondas acústicas planas.
- La acústica lineal es válida.
- El número de Mach es bajo ($M < 0.1$).
- Los gradientes de temperatura y velocidad media del flujo en dirección axial son despreciables.
- No se consideran efectos por reacciones químicas.

En la Figura 20 se pueden distinguir varias secciones del DPF. La sección transversal de entrada (IN); los tubos cortos y estrechos con paredes duras e impermeables (I) y (III), colindantes con la entrada y la salida, respectivamente; la sección de filtro que consta de tubos estrechos con paredes porosas (II); y una sección transversal de salida (OUT).

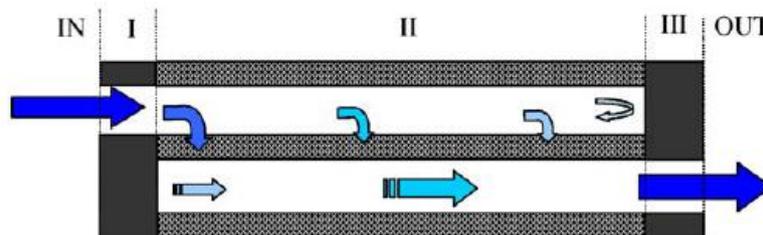


Figura 20. Secciones del DPF (Abom & Allam, 2005).

Para ondas planas, estas secciones se pueden describir mediante matrices de transferencia de dos puertos (T). La matriz de transferencia resultante para una unidad de filtrado es:

$$T_{DPF} = T_{IN}T_I T_{II}T_{III}T_{OUT} \quad (122)$$

4.3.1 Sección porosa del DPF (II)

Se supone que el caudal medio y las condiciones ambientales son homogéneas, siendo las ecuaciones de continuidad y momento, respectivamente:

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + U_{0j} \frac{\partial \rho_j}{\partial x} + \rho_{0j} \frac{\partial u_j}{\partial x} = (-1)^j \frac{4\rho_w}{d_{hj}} u_w \quad (123)$$

$$\rho_{0j} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_{0j} \frac{\partial}{\partial x} \right) u_j = - \frac{\partial p_j}{\partial x} - \alpha_j u_j \quad (124)$$

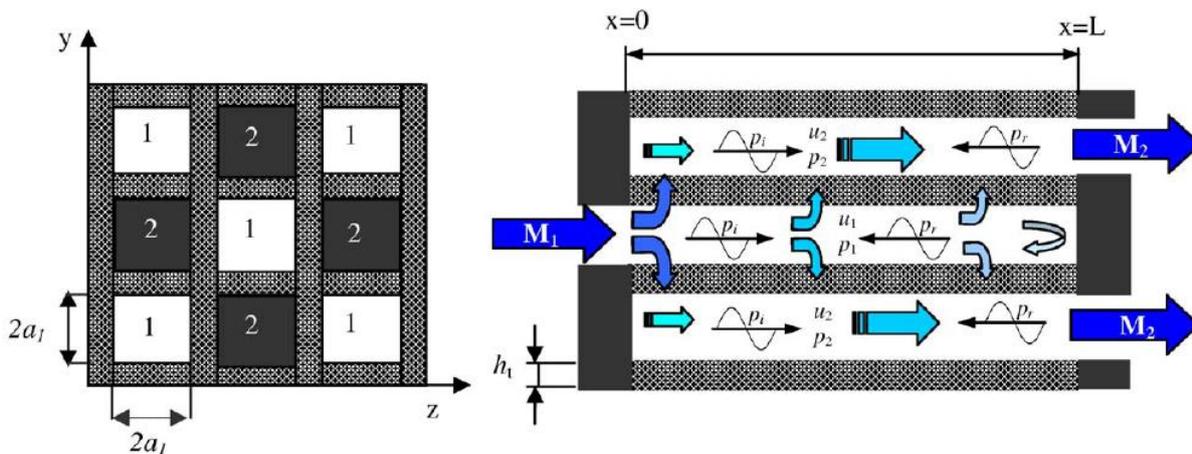


Figura 21. Flujo de gases a través del DPF (Abom & Allam, 2005).

Donde $j = 1, 2$, entrada y salida, respectivamente; u_o y ρ_o son la velocidad y la densidad media; u , ρ y p son las fluctuaciones de la velocidad, densidad y presión axial de las partículas; u_w es la fluctuación de la velocidad de las partículas a través de pared; ρ_w es la densidad del medio en la pared porosa; y d_h es el ancho de los canales cuadráticos. En el límite de canales muy estrechos y bajas frecuencias, se puede asumir flujo laminar y el factor de caída de presión será $\alpha = \mu \cdot \varepsilon / d_h^2$, donde μ es la viscosidad dinámica y ε es el factor de caída de presión del canal. Dado que el flujo local que pasa a través de las paredes es sólo una pequeña fracción del flujo medio axial total, el perfil de velocidad debe ser cercano al observado para el flujo laminar en un conducto cuadrático con paredes impermeables, lo que implica $\varepsilon = 28.45$. (Abom & Allam, 2005).

Como se ha comentado anteriormente, el acoplamiento entre los campos de los canales 1 y 2 se realiza a través de las paredes porosas. Dado que las paredes son muy delgadas, la resistencia al flujo en estado estacionario (ley de Darcy) se aplicará a los campos acústicos fluctuantes. Por ello, una resistencia de pared constante (R_w) (independiente de la frecuencia) se define como:

$$R_w u_w = p_1 - p_2 \quad (125)$$

Esta resistencia de la pared se puede vincular a las propiedades de la pared porosa y del gas mediante la siguiente expresión:

$$R_w = \frac{\mu_w h_t}{\sigma_w} \quad (126)$$

donde μ_w es la viscosidad dinámica a través de la pared, h_t y σ_w son el espesor y la permeabilidad de la pared, respectivamente.

Las ecuaciones de conservación linealizadas para momento, masa y energía, simplificadas para tuberías estrechas, según la variación armónica $e^{i\omega t}$, son:

$$\rho_{0j} \left(i\omega + U_{0j} \frac{\partial}{\partial x} \right) u_{xj} + \rho_{0j} \frac{\partial U_{0j}}{\partial x} u_{xj} = -\frac{\partial p_j}{\partial x} + -\mu_j \nabla_s^2 u_{xj}, \quad p_j = p_j(x, t) \quad (127)$$

$$\left(i\omega + U_{0j} \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho_j + \frac{\partial U_{0j}}{\partial x} \rho_j + \frac{\partial \rho_{0j}}{\partial x} u_{xj} + \rho_{0j} \nabla \cdot \mathbf{u}_j = 0 \quad (128)$$

$$\begin{aligned} \rho_{0j} c_{pj} \left(i\omega + U_{0j} \frac{\partial}{\partial x} \right) T_j + \rho_{0j} c_{pj} \frac{\partial T_{0j}}{\partial x} u_{xj} + U_{0j} c_{pj} \frac{\partial T_{0j}}{\partial x} \rho_j = \\ = \left(i\omega + U_{0j} \frac{\partial}{\partial x} \right) p_j + \frac{\partial P_{0j}}{\partial x} u_{xj} + k_{thj} \nabla_s^2 T_j, \quad T_j = T_j(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (129)$$

Se supone la hipótesis de que el gas es ideal y se desprecian las reacciones químicas. La ley de los gases ideales en forma linealizada acarrea que:

$$p_j = \left(\frac{p_j}{R_j T_{0j}} \right) - \left(\frac{p_{0j} T_j}{T_{0j}} \right) \quad p_j = p_j(x, y, z, t) \quad (130)$$

Donde $j = 1, 2$, entrada y salida, respectivamente; \mathbf{u} es la velocidad acústica de la partícula; p , T y ρ son la presión, la temperatura y la densidad acústicas; μ es el coeficiente de viscosidad; k_{th} es la conductividad térmica del fluido; R es la constante del gas, C_p es el coeficiente del calor específico a presión constante; p_0 , T_0 y ρ_0 son la presión, la temperatura y la densidad ambiente; U_0 es la velocidad media axial del flujo; ∇_s^2 es el Laplaciano sobre la sección transversal del canal.

Las condiciones de contorno que se satisfacen en las paredes son $u_w = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = -\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2$ y $T = 0$ donde \mathbf{n} es el vector normal de salida en la pared del canal.

4.3.2 Cálculo de constantes de propagación y matriz de dos puertos

El problema se resuelve aplicando un enfoque de segmentación, el cual consiste en que la sección del filtro se divide en varios elementos en serie y en cada elemento se supone que el estado de flujo medio y los gradientes del estado de flujo medio son constantes. Cuando el número de segmentos se acerque a infinito, mayor será la precisión del resultado.

Para resolver las ecuaciones en cada segmento se supone que los campos tienen la siguiente forma:

$$p_j = A_j e^{-i\Gamma k_1 x}, \quad u_{xj} = H_j(y, z)p_j, \quad T_j = F_j(y, z)p_j \quad (131)$$

donde A_j es una constante arbitraria, $k = \omega/c$ es el número de onda, Γ es la constante de propagación y $0 \leq y \leq 2a_j$, $0 \leq z \leq 2a_j$.

Sustituyendo las expresiones (131) en la ecuación (127) y operando, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 H_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_j}{\partial z^2} - \beta_j^2 H_j = -\frac{i\Gamma k_1}{\mu_j} \quad (132)$$

Siendo β_j^2 :

$$\beta_j^2 = i \left(1 - \Gamma M_j + \frac{1}{i\omega} \frac{\partial U_{0j}}{\partial x} \right) s_j^2 \quad (133)$$

Donde M_j es el número de Mach y s_j es el número de onda de corte:

$$M_j = U_{0j}/c_1 \quad (134)$$

$$s_j = \sqrt{\rho_{0j}\omega / u_j} \quad (135)$$

Usando las ecuaciones (130), (131) y (133) en la ecuación (129) y operando, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 F_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_j}{\partial z^2} - \sigma_j^2 F_j = \sigma_{0j}^2 + \sigma_{1j}^2 H_j \quad (136)$$

donde,

$$\sigma_j^2 = i\xi_j^2 s_j^2 \left(1 - \Gamma M_j - \frac{U_{0j}}{i\omega T_{0j}} \frac{\partial T_{0j}}{\partial x} \right) \quad (137)$$

$$\sigma_{0j}^2 = \frac{-i\omega \left(1 - \Gamma M_j - \frac{C_{pj} U_{0j}}{i\omega R_j T_{0j}} \frac{\partial T_{0j}}{\partial x} \right)}{k_{thj}}, \quad \sigma_{1j}^2 = \frac{1}{k_{thj}} \left(\rho_{0j} C_{pj} \frac{\partial T_{0j}}{\partial x} - \frac{\partial P_{0j}}{\partial x} \right) \quad (138)$$

Siendo ξ_j^2 el número de Prandtl:

$$\xi_j^2 = \left(\frac{\mu_j C_{pj}}{k_{thj}} \right) \quad (139)$$

La solución de la ecuación (132) se obtiene utilizando una serie de Fourier:

$$H_j(y, z) = \sum_{m,n} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi y}{2a_j}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{2a_j}\right), \quad m, n = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (140)$$

Solo se incluyen términos simétricos, ya que la distribución de la presión es simétrica sobre la sección transversal y todos los términos satisfacen la condición de contorno de muro antideslizante. Los coeficientes a_{mn} se calculan mediante la siguiente expresión:

$$a_{mn} = \frac{16ik_1\Gamma}{\pi^2 mn \mu_j \beta_j^2 \alpha_{mn}(\beta_j a_j)} \quad (141)$$

donde,

$$\alpha_{mn}(\beta_j a_j) = \frac{(1 + \pi^2)}{4(\beta_j a_j)^2 (m^2 + n^2)} \quad (142)$$

De la misma manera, mediante serie de Fourier, se puede resolver la ecuación (136):

$$F_j(y, z) = \sum_{m,n} b_{mn} \sin\left(\frac{m\pi y}{2a_j}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{2a_j}\right), \quad m, n = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (143)$$

Los coeficientes b_{mn} se calculan con la siguiente expresión:

$$b_{mn} = -\frac{1}{\sigma_j^2 \alpha_{mn}(\sigma_j a_j)} \left(\frac{16\sigma_{0j}^2}{\pi^2 mn} + \sigma_{1j}^2 a_{mn} \right) \quad (144)$$

Se utiliza la ecuación de conservación de masa (128) para obtener una ecuación de valor propio para el número de onda desconocido:

$$\left(i\omega + U_{0j} \frac{\partial}{\partial x} \right) \langle \rho_j \rangle + \frac{\partial U_{0j}}{\partial x} \langle \rho_j \rangle + \frac{\partial \rho_{0j}}{\partial x} \langle u_{xj} \rangle + \rho_{0j} \langle \nabla \cdot u_j \rangle = 0 \quad (145)$$

Donde $\langle f \rangle = (1/a_j^2) \iint_{2a_j x 2a_j} f \, dy dz$. El primer y segundo término de la ecuación (145) se puede escribir de la siguiente forma, utilizando las ecuaciones de los gases ideales (125) y (130):

$$\langle \rho_j \rangle = \frac{\langle p_j \rangle}{R_j T_{0j}} - \frac{\rho_{0j} \langle T_j \rangle}{T_{0j}} = \frac{p_j}{R_j T_{0j}} (1 - \rho_{0j} R_j \langle F_j \rangle) \quad (146)$$

La función F_j sobre la sección transversal del canal se puede calcular usando las ecuaciones (143) y (144):

$$\langle F_j \rangle = \sum_{m,n} \frac{4b_{mn}}{mn\pi^2} \quad (147)$$

Utilizando la ecuación (131), el tercer término de la ecuación (145) se puede expresar como:

$$\langle u_{xj} \rangle = p_j \langle H_j \rangle \quad (148)$$

donde H_j se obtiene mediante las ecuaciones (140) y (141):

$$\langle F_j \rangle = \sum_{m,n} \frac{4a_{mn}}{mn\pi^2} \quad (149)$$

El último término de la ecuación (145) se puede reescribir mediante la fórmula de Gauss como:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u}_j \rangle = \frac{1}{4a_j^2} \iint_{2a_j \times 2a_j} \left(\frac{\partial u_{xj}}{\partial x} + \nabla_s \cdot \mathbf{u}_j \right) dydz = \frac{\partial \langle u_{xj} \rangle}{\partial x} + \frac{1}{4a_j^2} \oint_{C_j} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j ds \quad (150)$$

donde C_j es la curva alrededor del perímetro del canal. Introduciendo el término de la velocidad acústica en la pared u_w en el último término, se tiene que:

$$\oint_{C_j} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j ds = (-1)^{j-1} \oint_{C_j} u_w ds = (-1)^{j-1} 8a_j \overline{u_w} \quad (151)$$

siendo el término $\overline{u_w}$ el valor medio a lo largo del perímetro. Utilizando la ley de Darcy, ecuación (125), esta expresión se puede escribir de la siguiente forma:

$$\oint_{C_j} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j ds = (-1)^{j-1} \frac{8a_j(p_1 - p_2)}{R_w} \quad (152)$$

El valor medio no aparece debido a que la presión acústica es constante en la sección transversal. Introduciendo el campo de presión de la ecuación (131) en el primer término de la ecuación (150), queda:

$$\frac{\partial \langle u_{xj} \rangle}{\partial x} = \langle H_j \rangle \frac{\partial p_j}{\partial x} = -i\Gamma k_1 \langle H_j \rangle p_j \quad (153)$$

Utilizando las ecuaciones (146) y (153), junto con la expresión de la presión, la ecuación (145), se puede expresar como:

$$\left[\frac{1}{R_j T_{0j}} \left(i\omega - i\Gamma k_1 U_{0j} + \frac{\partial U_{0j}}{\partial x} \right) (1 - \rho_{0j} R_j \langle F_j \rangle) + \left(\frac{\partial \rho_{0j}}{\partial x} - i\Gamma k_1 \rho_{0j} \right) \langle H_j \rangle \right] A_j + (-1)^{j-1} \frac{2\rho_{0j}(A_1 - A_2)}{a_j R_w} = 0 \quad (154)$$

Esta ecuación representa un sistema de ecuaciones lineales homogéneo para las amplitudes de las ondas de presión A_1 y A_2 en los canales 1 y 2, el cual se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} K_{11} + K_{21} & -K_{21} \\ K_{22} & K_{12} - K_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (155)$$

Donde,

$$K_{1j} = \left[\frac{R_w a_j}{2\rho_{0j} R_j T_{0j}} \left(i\omega - i\Gamma k_1 U_{0j} + \frac{\partial U_{0j}}{\partial x} \right) (1 - \rho_{0j} R_j \langle F_j \rangle) + \frac{R_w a_j}{2\rho_{0j}} \left(\frac{\partial \rho_{0j}}{\partial x} - i\Gamma k_1 \rho_{0j} \right) \langle H_j \rangle \right] \quad (156)$$

$$K_{2j} = (-1)^{j-1}$$

A cada una de las raíces o valores propios hay un modo 2D correspondiente (vector propio) \mathbf{e}_n . Usando estos valores propios y modos, la expresión general para el campo del sonido en la sección del filtro se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} \widehat{p}_1(x) \\ \widehat{p}_2(x) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^4 \widehat{a}_n e^{-ik_1 \Gamma_n x} \mathbf{e}_n \quad (157)$$

Los términos \widehat{a}_n son las amplitudes modales. A partir de esta ecuación, los flujos volumétricos acústicos se pueden obtener utilizando la ecuación (131) después de haber integrado sobre el área de la sección transversal del canal:

$$\begin{pmatrix} \widehat{q}_1(x) \\ \widehat{q}_2(x) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^4 \widehat{a}_n e^{-ik_1 \Gamma_n x} \mathbf{e}'_n \quad (158)$$

Donde $\mathbf{e}'_{j,n} = 4a_j^2 \langle H_{j,n} \rangle \mathbf{e}_{j,n}$. Las ecuaciones (157) y (158) se utilizan para obtener la matriz de transferencia de cuatro polos para la sección del filtro. Primero se puede escribir la siguiente relación entre p y q y las amplitudes modales:

$$\begin{pmatrix} \widehat{p}_1(x) \\ \widehat{p}_2(x) \\ \widehat{q}_1(x) \\ \widehat{q}_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ik_1 \Gamma_1 x} \mathbf{e}_1 & e^{-ik_1 \Gamma_2 x} \mathbf{e}_2 & e^{-ik_1 \Gamma_3 x} \mathbf{e}_3 & e^{-ik_1 \Gamma_4 x} \mathbf{e}_4 \\ e^{-ik_1 \Gamma_1 x} \mathbf{e}'_1 & e^{-ik_1 \Gamma_2 x} \mathbf{e}'_2 & e^{-ik_1 \Gamma_3 x} \mathbf{e}'_3 & e^{-ik_1 \Gamma_4 x} \mathbf{e}'_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 \\ \widehat{a}_2 \\ \widehat{a}_3 \\ \widehat{a}_4 \end{pmatrix} \quad (159)$$

Introduciendo la función $\mathbf{H}(x)$ en la matriz (159), la matriz de cuatro polos \mathbf{S} en la sección del filtro, la cual se extiende desde $x = 0$ hasta $x = L$, viene dada por:

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}(0)\mathbf{H}^{-1}(L) \quad (160)$$

La matriz \mathbf{S} de cuatro polos se puede utilizar en una matriz \mathbf{T} de dos polos utilizando las condiciones de contorno de la pared rígida en los canales 1 y 2, es decir, $\hat{q}_2(0) = 0$ y $\hat{q}_1(L) = 0$. Derivando, se puede obtener:

$$\begin{pmatrix} \widehat{p}_1(x) \\ \widehat{q}_1(x) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \widehat{p}_2(L) \\ \widehat{q}_2(L) \end{pmatrix}; \quad \text{con } T = \begin{pmatrix} S_{12} - S_{42}S_{11}/S_{41} & S_{14} - S_{44}S_{11}/S_{41} \\ S_{32} - S_{42}S_{31}/S_{41} & S_{34} - S_{44}S_{31}/S_{41} \end{pmatrix} \quad (161)$$

Para conseguir el flujo volumétrico acústico total se deben sumar todos los canales abiertos (N) en la entrada ($x = 0$) y en la salida ($x = L$). Esto implica que la matriz \mathbf{T}_{II} de dos puertos para toda la sección de filtro (incluidos todos los canales) está relacionada con la matriz \mathbf{T} en la ecuación (161) mediante:

$$T_{II} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12}/N \\ NT_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \quad (162)$$

En el caso sin flujo, dado que el número de Mach es pequeño en la sección del filtro (< 0.1), una buena aproximación es tender a 0 en el modelo acústico. De esta forma, es posible obtener una solución analítica del problema de valores propios. En filtros limpios a temperatura ambiente, la sección transversal y la velocidad del sonido también se supondrán constantes en el filtro. Con estas simplificaciones, los números de onda y los vectores propios se obtienen mediante:

$$\begin{cases} K_1 = -K_2 = k, \\ K_3 = -K_4 = k\sqrt{1 - 8iB/k}, \end{cases} \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (163)$$

4.3.3 Versión modificada del modelo 1D

Se puede asumir un campo de ondas termoviscosas planas con características definidas por la solución de Kirchhoff para una tubería cilíndrica. Esta versión de Kirchhoff del modelo 1-D se obtiene eliminando el factor de fricción viscosa α_j y sustituyendo los siguientes valores por la velocidad del sonido (c_j) y la densidad (ρ_{0j}), en las ecuaciones del trabajo de la referencia (Abom & Allam, 2005):

$$\rho_j = \frac{\rho_{0j}}{(1 - F(s_j))} \quad (164)$$

$$c_j = c_{0j}^{ad} \frac{(1 - F(s_j))^{1/2}}{[1 + (\gamma - 1)F(\xi_j s_j)]^{1/2}} \quad (165)$$

donde c_{0j}^{ad} es la velocidad del sonido adiabática en el canal j y,

$$F(s) = \frac{2}{s\sqrt{-i}} \frac{J_1(\sqrt{-i}s)}{J_0(\sqrt{-i}s)} \quad (166)$$

J es la función de Bessel de primera especie. Para obtener un radio equivalente para el modelo de Kirchhoff se ha utilizado el radio hidráulico ($= aj$).

4.3.4 Modelo del filtro completo

Para las secciones de entrada y de salida, así como las secciones I y III (ver Figura 20), se necesitan modelos de dos polos. Estas dos últimas se pueden definir mediante el modelo de Dokumaci para el sonido en canales estrechos. Sin embargo, dada la pequeña longitud de las secciones I y III (menos de 10 mm), es posible agregar estas secciones como una corrección final a las secciones de entrada y salida. Las secciones de entrada y salida representan una constricción y una expansión de área, respectivamente, donde tanto los campos acústicos como los de flujo cercanos pueden influir en la transmisión de ondas planas. Se puede utilizar un modelo de impedancia concentrada para las secciones de entrada y salida, incluidos los tubos cortos adyacentes. Esto implica que:

$$T_X = \begin{pmatrix} 1 & Z_X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (167)$$

donde,

$$X = IN + I \quad X = III + OUT \quad (168)$$

$$Z_X = r_X + iY_x \quad (169)$$

Existen formas alternativas de formular las condiciones de acoplamiento acústico en las secciones de entrada y salida. Una forma es asumir la conservación de la energía en la entrada y la conservación del momento en la salida donde hay separación del flujo. Para el caso de números de Mach pequeños, estos supuestos conducen a dos puertos con la misma estructura que en la ecuación:

$$Z_X = \begin{cases} Z_{IN}M_{IN}(1/m_{IN}^2 - 1) + iY_I, \\ 2Z_{OUT}M_{OUT}(1 - 1/m_{OUT}) + iY_{III} \end{cases} \quad (170)$$

siendo,

$$Z_{IN} = \rho_{IN}c_{IN}/A_{IN} \quad Z_{OUT} = \rho_{OUT}c_{OUT}/A_{OUT} \quad (171)$$

Las pérdidas de transmisión del filtro se pueden obtener de la siguiente expresión:

$$TL = 10 \log_{10} \left\{ \left(\frac{1 + M_{IN}}{1 + M_{OUT}} \right)^2 \frac{Z_{IN}}{4Z_{OUT}} \left| T_{11} + \frac{T_{12}}{Z_{OUT}} + Z_{IN}T_{21} + \frac{Z_{IN}T_{22}}{Z_{OUT}} \right|^2 \right\} \quad (172)$$

Donde M_{IN} y M_{OUT} son los números de Mach y Z_{IN} y Z_{OUT} son las impedancias de onda acústica.

4.3.5 DPF con presencia de hollín

Cuando en el filtro existe presencia de hollín, se supone que este tiene un espesor respecto a la carga de hollín, suponiendo que este es de una décima parte del espesor de la pared y una permeabilidad $\sigma_{soot} = 1.5 \cdot 10^{-14}$. La resistencia de la pared resultante con la carga de hollín viene dada por (Allam & Abom, 2006):

$$R_w = \mu_w \left(\frac{h_t}{\sigma_w} + \frac{h_{soot}}{\sigma_{soot}} \right) \quad (173)$$

4.3.6 Modelos de DPF testeados

Las especificaciones de los filtros antipartículas incluidos en la formulación (Abom & Allam, 2005) que fueron testeados son: EX80: (200/14); EX80: (100/17); RC: (200/12) y RC: (200/20), donde $(x = y)$ representa el número de celdas por pulgada cuadrada/espesor de pared en pulgadas multiplicado por 1000. En la Tabla 2 se presenta un resumen de los datos de los filtros:

Tipo de filtro	Ancho de los canales $d_h \times 10^3 (m)$	Espesor de las paredes $h_t \times 10^4 (m)$	Permeabilidad $\sigma_w \times 10^{13} (m^2)$	$n \times 10^{-5} \left(\frac{\text{canales}}{m^2} \right)$	R_1 (Ns/m ³)	R_2 (Ns ² /m ⁴)
EX 200/14	1.44	3.55	2.5	3.10	184.1	39.2
EX 100/17	2.11	4.30	2.5	1.55	199.8	30.9
RC 200/12	1.50	3.04	25	3.87	87.1	29.2
RC 200/20	1.30	5.08	25	2.48	233.3	41.6

Tabla 2. Especificaciones de los filtros testeados (Abom & Allam, 2005)

La impedancia R_1 se relaciona con la impedancia en la pared R_w mediante la siguiente expresión:

$$R_w = 4R_1 d_{h1} LN/A \quad (174)$$

El coeficiente de flujo cuadrático R_2 está relacionado con la separación del flujo en las secciones de entrada/salida y el flujo "turbulento" del canal. Los números de Reynolds en la entrada/salida están por encima del valor crítico, lo que implica la existencia de flujo turbulento en al menos una parte de los canales de entrada y salida. Sin embargo, dado que la velocidad del flujo presenta una disminución a lo largo de los canales de entrada y un aumento a lo largo de los canales de salida, debido al flujo a través de las paredes porosas, también hay una sección de flujo laminar. En condiciones de funcionamiento y con una temperatura aproximada de 500 °C, la viscosidad cinemática (suponiendo una presión estática sin cambios) aumentará con un factor cercano a 4. El número de Reynolds en las secciones de entrada/salida disminuirá a valores en el rango de 500 a 1000. Esto significa que existirá flujo laminar en todas partes de los canales y la única caída de presión cuadrática posible proviene de la separación del flujo en las aberturas de entrada y salida. Suponiendo un flujo medio incompresible, esto implica (Abom & Allam, 2005):

$$R_2 = \begin{cases} \rho_{IN}(1 - 1 - m_{IN})^2/4, \\ \rho_{OUT}(1 - 1 - m_{OUT})^2/2, \end{cases} \quad (175)$$

donde m_{IN} y m_{OUT} son la relación de área abierta en la entrada y salida, respectivamente.

5. COMPORTAMIENTO ACÚSTICO DEL SISTEMA

Ya modelizado el sistema compuesto por el catalizador y el filtro antipartículas, se calcula mediante ANSYS APDL la pérdida de transmisión (TL) en varias geometrías, variando además sus propiedades y considerando la presencia o no de hollín. Previo a este cálculo, se calculan las matrices de transferencia de ambos monolitos según las propiedades de estos utilizando el programa Matlab (scripts en Anexo I y Anexo II). Una vez se calculan las matrices de transferencia, estas se exportan para ser utilizadas en ANSYS APDL (macro en Anexo III). Todos los cálculos se realizan con las siguientes variables en común:

Densidad del aire (ρ_0)	1.225 kg/m ³
Velocidad del sonido (c)	340.255 m/s
Frecuencia inicial (f_{ini})	10 Hz
Frecuencia final (f_{fin})	3000 Hz
Incremento de frecuencia (Δf)	10 Hz
Radios de los conductos de entrada (R_{IN}) y salida (R_{OUT})	0.0258 m
Longitud de los conductos de entrada (L_{IN}) y de salida (L_{OUT})	0.1 m
Radio de la cámara (R_{Chamb})	0.1275 m
Longitud de las cámaras de entrada (L_b), la intermedia (L_d) y de salida (L_f)	0.05 m
Longitud del catalizador (L_c)	0.075 m
Longitud del DPF (L_e)	0.15 m

Tabla 3. Variables comunes del problema

El modelo está formado por las siguientes partes, visibles en la Figura 22:

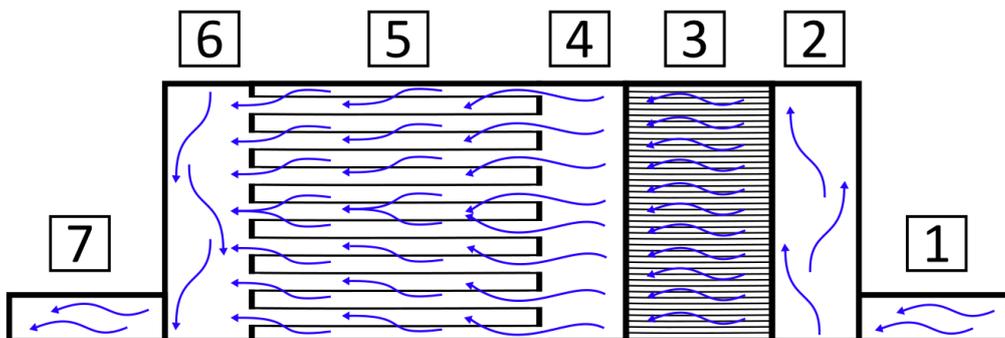


Figura 22. Partes que componen el sistema

- | | | |
|------------------------|--------------------------|---------------------|
| 1. Conducto de entrada | 2. Cámara de entrada | 3. Catalizador |
| 4. Cámara intermedia | 5. Filtro antipartículas | 6. Cámara de salida |
| 7. Conducto de salida | | |

Las geometrías propuestas para el cálculo son:

- Dispositivo circular con conductos centrados.
- Dispositivo circular con conducto de salida descentrado.
- Dispositivo elíptico con conductos centrados.
- Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado.

La distancia de descentrado del conducto de salida se calcula para que el conducto de salida caiga sobre la línea nodal (presión nula) del primer modo radial de orden superior (modos de orden superior son modos tridimensionales, es decir, no son de onda plana, aparecen cuando la frecuencia va aumentando). Esto permite mantener un nivel razonable de TL al haber ubicado el conducto de salida en una zona de baja presión acústica.

La distancia de descentrado para el caso del dispositivo circular se calcula como:

$$x_c = 0.6276R = 0.6276 \cdot 0.1275 = 0.08 \text{ m} \quad (176)$$

En el caso de conductos descentrados para la sección elíptica, la siguiente ecuación permite calcular de manera aproximada la frecuencia natural de dicho modo:

$$(f_c \rho / c_0)_{2,1} = -1.2285 \cdot 10^{-4} + 0.4895\varepsilon + 0.0284\varepsilon^2 + 0.2098\varepsilon^3 - 0.0781\varepsilon^4 - 0.1172\varepsilon^5 + 0.0794\varepsilon^6 \quad (177)$$

Con las siguientes expresiones se puede obtener la distancia de descentrado (x_c) y su coordenada elíptica correspondiente:

$$x_c = \rho \cos(v_c) \quad (178)$$

$$v_c = 0.7851 + 0.0076\varepsilon + 0.3502\varepsilon^2 - 0.0533\varepsilon^3 + 0.9358\varepsilon^4 - 1.5667\varepsilon^5 + 0.6556\varepsilon^6 \quad (179)$$

Siendo ε la excentricidad y ρ la semidistancia focal (Denia Guzmán, Francisco David; Fuenmayor Fernández, Francisco Javier; Albelda Vitoria, José, 2001).

Se van a considerar tres casos de diferentes excentricidades: $\varepsilon = 0.75; 0.85; 0.90$.

Considerando que el área transversal de la cámara del sistema con sección circular (A_c) es igual al de sección elíptica (A_e), mediante el siguiente sistema de ecuaciones y con las ecuaciones (177) y (178) se puede obtener los offsets:

$$A_c = \pi R_{chamb}^2 = 0.0510705155 \text{ m}^2 = A_e \quad (180)$$

$$\begin{cases} ab\pi = A_e \\ \varepsilon = \rho/a \\ \rho^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$$

Quedando un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, donde a y b son los semiejes mayor y menor de la elipse, respectivamente. Por lo tanto, las propiedades geométricas para los casos de sección elíptica son:

Excentricidad ε	Semieje mayor a (m)	Semieje menor b (m)	Semidistancia focal ρ (m)	Distancia de descentrado x_c (m)
0.75	0.1567709789	0.1036942558	0.1175782342	0.0629040163
0.85	0.1756687203	0.0925392407	0.1493184123	0.0739794601
0.90	0.1931175684	0.0841779965	0.1738058116	0.0828353109

Tabla 4. Propiedades geométricas del sistema con sección elíptica

Los planos de cada uno de los dispositivos modelados se pueden encontrar en la sección Planos, página 110.

Además, en cada uno de ellos se va a considerar el efecto que ocasiona la presencia o no de hollín en el filtro antipartículas.

El tamaño de elemento en la malla transversal es $h = \lambda_{min}/20$, siendo λ_{min} la mínima longitud de onda, que se obtiene al principio de la macro dividiendo la velocidad del sonido por la frecuencia máxima de cálculo. Por tanto, la malla utiliza 20 elementos cuadráticos por longitud de onda en el caso más desfavorable, lo cual garantiza que el error de discretización va a ser más que aceptable. El tamaño longitudinal de los elementos es de 0.01 m, más que suficiente también.

5.1 DISPOSITIVO CIRCULAR CON CONDUCTOS CENTRADOS

Para el caso del dispositivo circular con conductos centrados, primero se va a comparar el efecto que tiene la resistividad del catalizador en el resultado de la pérdida de transmisión (TL). Seguidamente, se comparará el efecto que tiene la presencia de hollín o no en el filtro antipartículas. Dada la doble simetría de la geometría, se ha modelado únicamente un cuarto del dispositivo. En la siguiente Figura 23 se puede observar la geometría y la malla creada en ANSYS APDL:

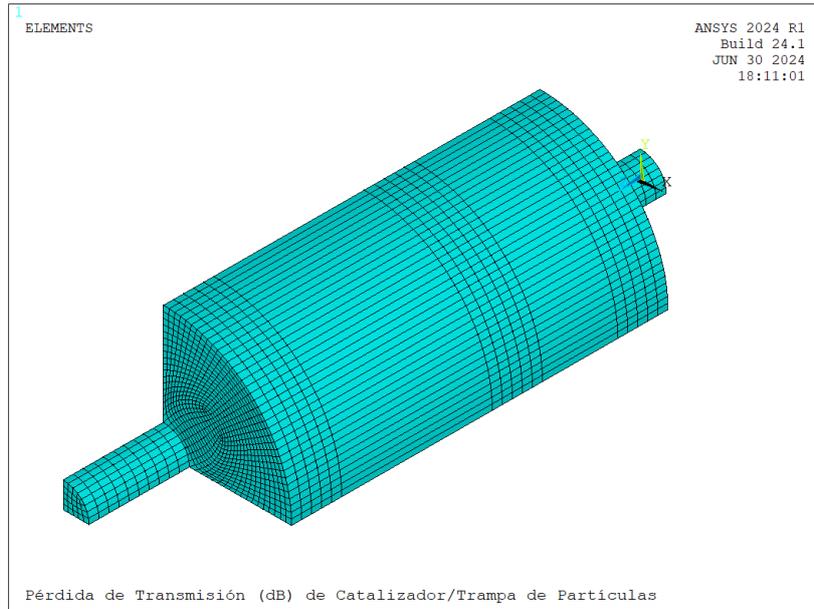
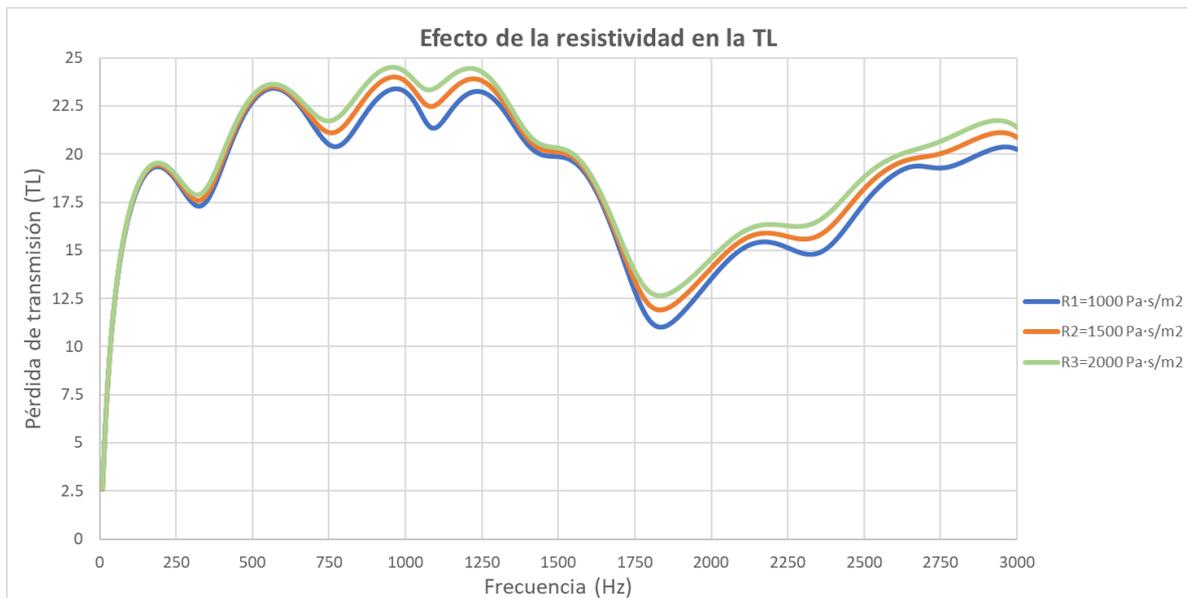


Figura 23. Geometría y malla del dispositivo circular con conductos centrados (ANSYS APDL)

5.1.1 Efecto de la resistividad del catalizador

Se realizarán tres cálculos, donde las resistividades en cada uno de ellos serán: $R_1 = 1000 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$, $R_2 = 1500 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ y $R_3 = 2000 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$. No se ha considerado en ninguno de ellos que exista hollín en el DPF. En la Gráfica 1 se pueden observar los resultados de la pérdida de transmisión (TL):

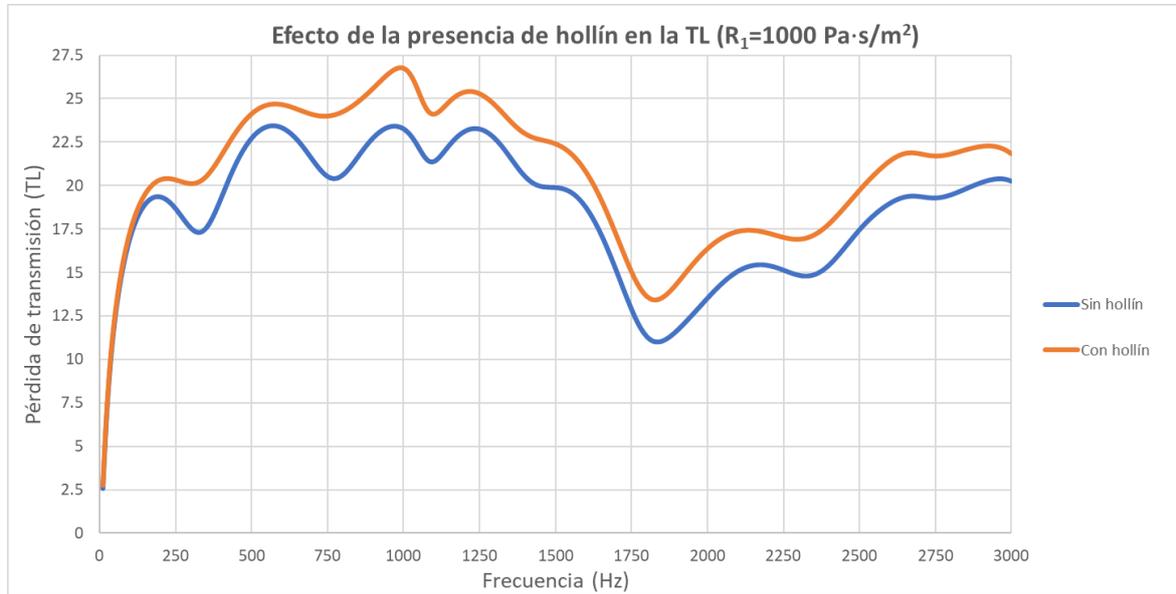


Gráfica 1. Pérdidas de transmisión según la resistividad del catalizador. Dispositivo circular con conductos centrados

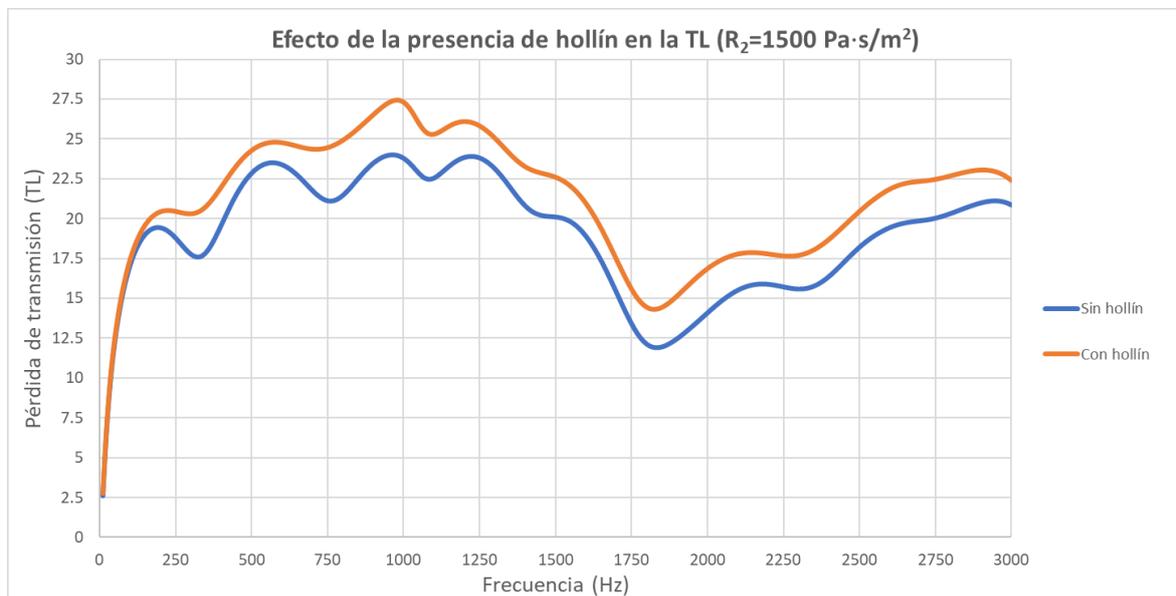
Se puede observar que, a mayor resistividad del catalizador, mayor es la pérdida de transmisión. Este fenómeno se aprecia sobre todo en los rangos de frecuencias de 750 Hz hasta los 1250 Hz y de 1750 Hz hasta los 3000 Hz, donde se encuentran zonas con valles localizados. En los rangos de frecuencia restantes (baja y media frecuencia), la mejora de la atenuación acústica es prácticamente inapreciable.

5.1.2 Efecto de la presencia de hollín

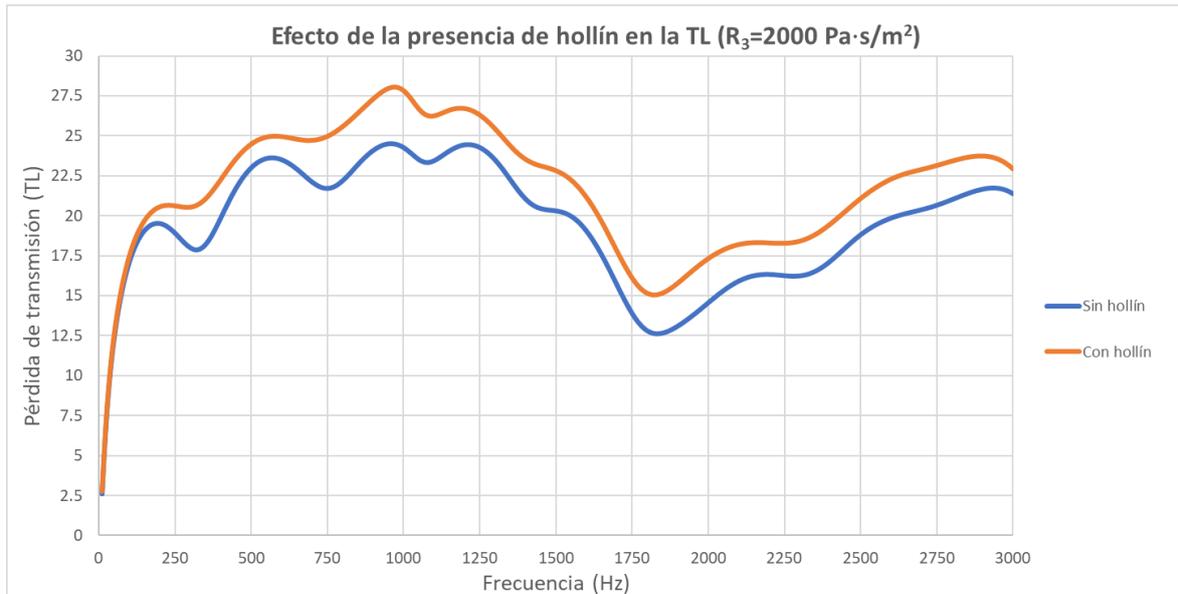
Para comprobar el efecto que tiene la existencia o no de hollín en las paredes del filtro antipartículas sobre la TL , se van a realizar tres casos comparativos, cada uno para cada resistividad mencionada en el apartado anterior.



Gráfica 2. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo circular con conductos centrados ($R_1 = 1000 Pa \cdot s/m^2$)



Gráfica 3. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo circular con conductos centrados ($R_2 = 1500 Pa \cdot s/m^2$)



Gráfica 4. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo circular con conductos centrados ($R_3 = 2000 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$)

En los tres casos la presencia de hollín en el DPF ocasiona que la pérdida de transmisión acústica sea mayor en todo el barrido de frecuencia. En la zona de 0 Hz a 120 Hz este efecto es prácticamente inapreciable.

5.2 DISPOSITIVO CIRCULAR CON CONDUCTO DE SALIDA DESCENTRADO

En esta sección se va a proceder de igual manera que en la anterior. Se comparará el efecto que conlleva variar la resistividad del catalizador y de la presencia o no de hollín en el filtro antipartículas en la pérdida de transmisión acústica. En este caso se ha modelado la mitad de la geometría dada la simetría de esta. La geometría y la malla del dispositivo circular con conducto de salida descentrados es la de la Figura 24:

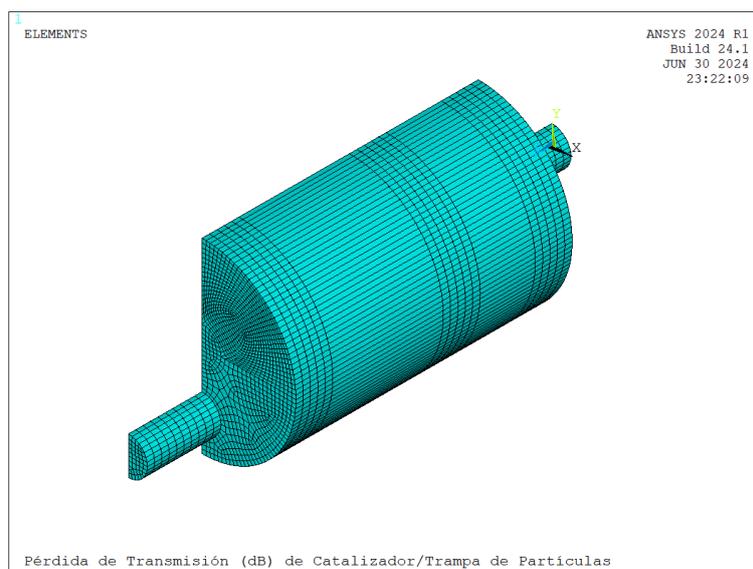
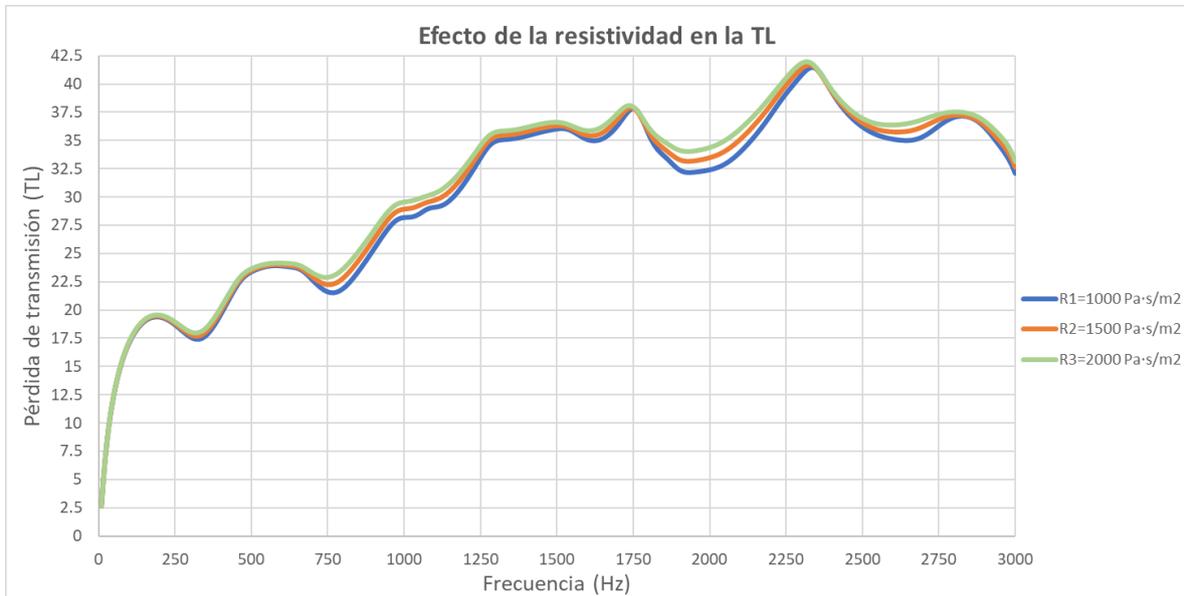


Figura 24. Geometría y malla del dispositivo circular con conducto de salida descentrado (ANSYS APDL)

5.2.1 Efecto de la resistividad del catalizador

Las resistividades del catalizador a comparar son: $R_1 = 1000 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$, $R_2 = 1500 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ y $R_3 = 2000 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$. No se ha considerado en ninguno de ellos que exista hollín en el DPF. En la Gráfica 5 se pueden observar los resultados de la pérdida de transmisión (TL):

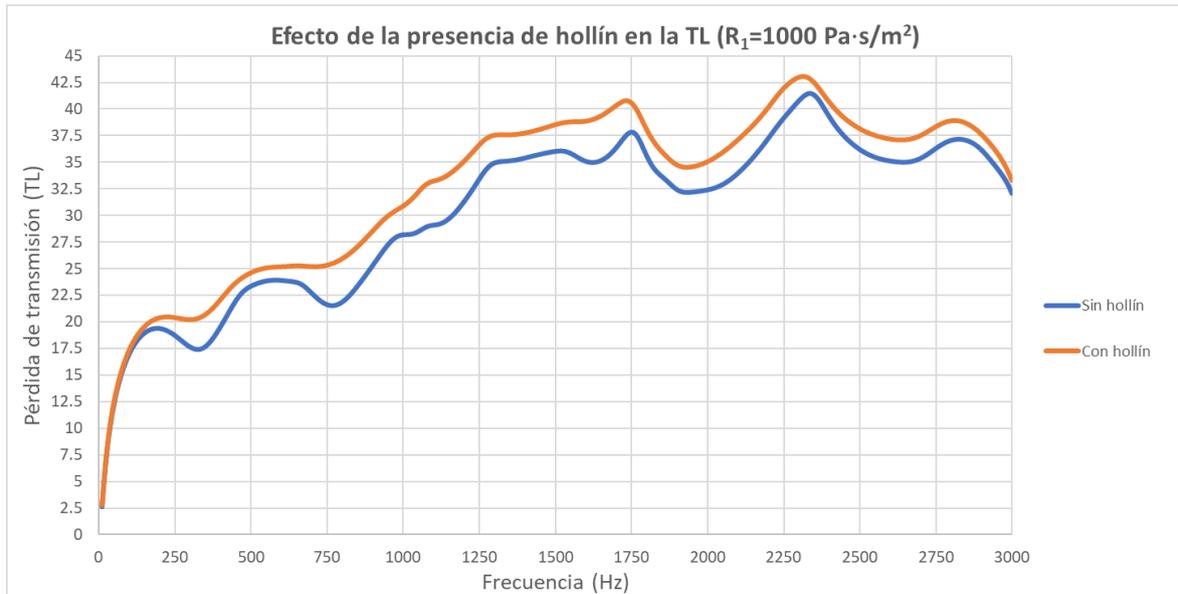


Gráfica 5. Pérdidas de transmisión según la resistividad del catalizador. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado

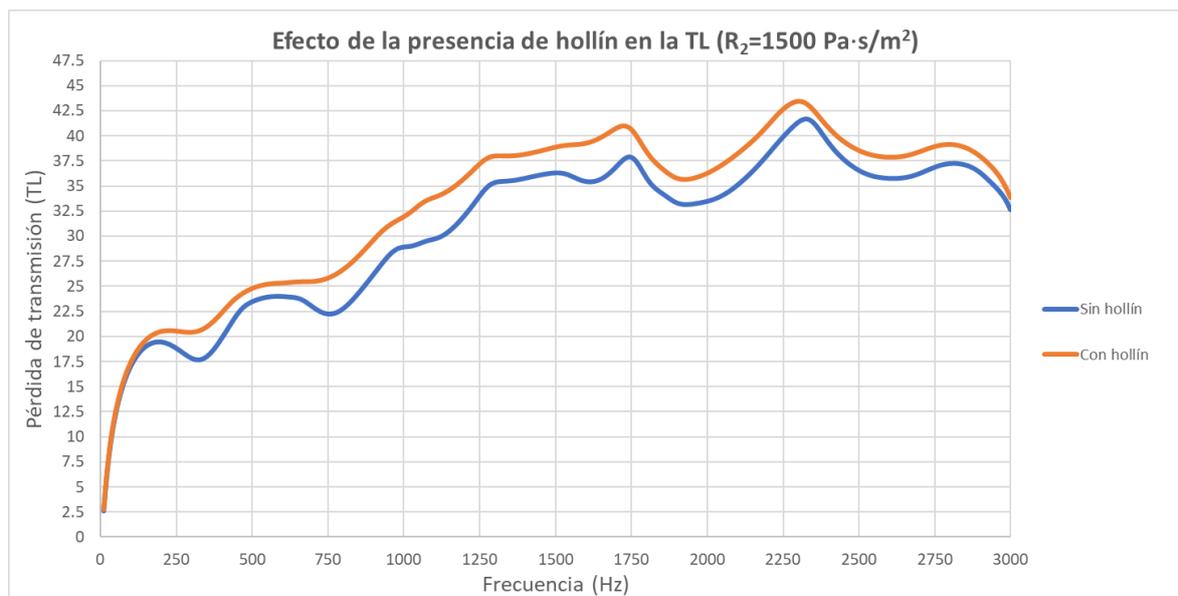
A medida que la resistividad del catalizador aumenta, también lo hace la pérdida de transmisión. Este efecto es notable en los valles más pronunciados, de 1750 Hz a 2250 Hz y de 2500 Hz a 2750 Hz. También es apreciable desde los 750 Hz hasta los 1250 Hz. En los rangos de frecuencia restantes apenas se aprecia una mejora en la atenuación acústica.

5.2.2 Efecto de la presencia de hollín

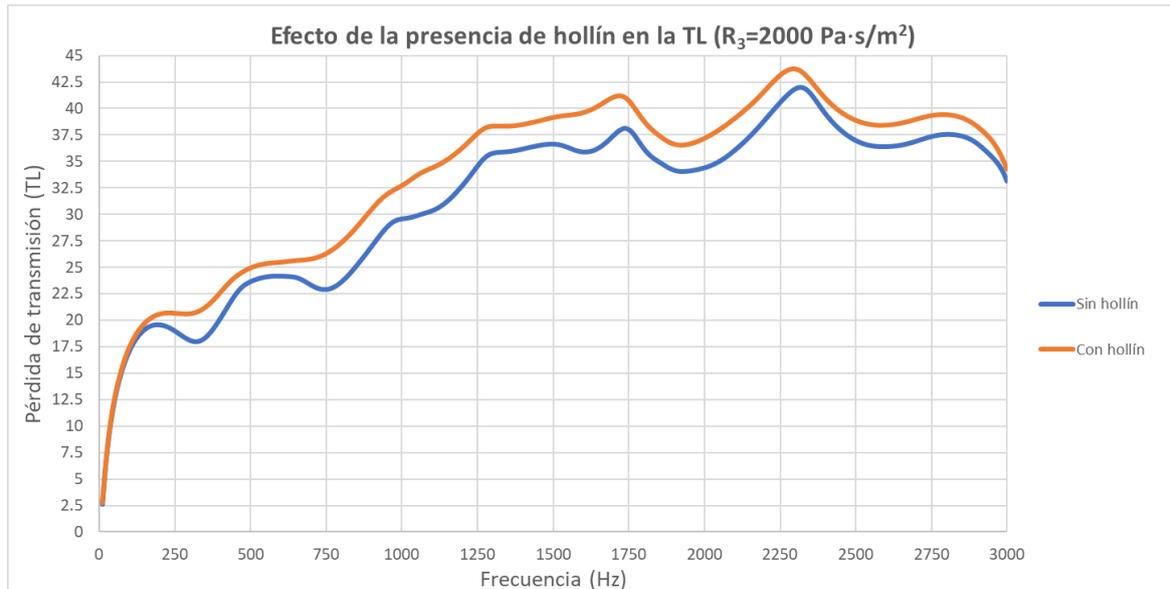
En las siguientes Gráficas se va a comparar el efecto que tiene la existencia de hollín en las paredes de los canales del filtro antipartículas. Se consideran las tres resistividades del catalizador anteriormente mencionadas.



Gráfica 6. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado ($R_1 = 1000 \text{ Pa}\cdot\text{s}/\text{m}^2$)



Gráfica 7. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado ($R_2 = 1500 \text{ Pa}\cdot\text{s}/\text{m}^2$)

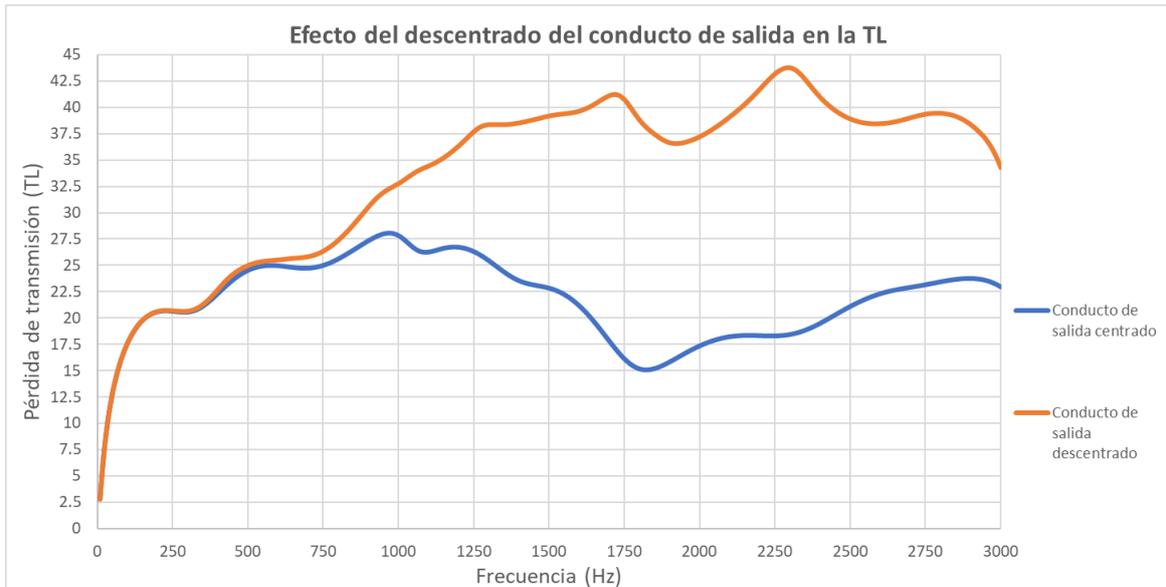


Gráfica 8. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado ($R_3 = 2000 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$)

Se puede observar que, para los tres casos comparados, la presencia de hollín en el filtro antipartículas ocasiona una mejor atenuación acústica del sistema. Esto es claramente apreciable en todo el rango de frecuencias considerado, a excepción de los 0 Hz a los 120 Hz, donde la TL es prácticamente igual.

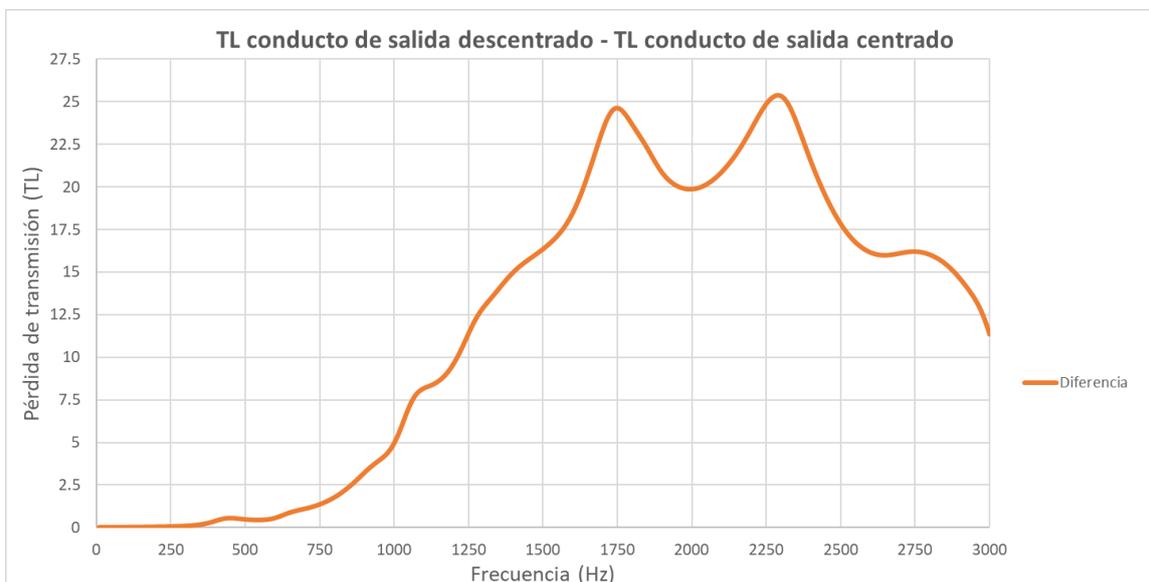
5.3 EFECTO DEL DESCENTRADO DEL CONDUCTO DE SALIDA EN EL DISPOSITIVO CIRCULAR

Para observar la diferencia en la pérdida de transmisión acústica (TL) debido a la ubicación del conducto de salida de gases, se van a comparar los casos en los que se obtiene una mayor pérdida de transmisión acústica cuando el conducto de salida está centrado y cuando no lo está. Para ello, en la siguiente Gráfica se muestran los resultados de las TL obtenidas para una resistividad del catalizador de $R = 2000 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ y considerando presencia de hollín en el DPF:



Gráfica 9. Efecto del descentrado del conducto de salida en los dispositivos circulares

El efecto en la pérdida de transmisión acústica al descentrar el conducto de salida de gases es bastante considerable. Se puede apreciar en la Gráfica 9 que en todo el rango de frecuencias, a excepción de 0 Hz a 500 Hz donde los resultados son prácticamente iguales, la TL es bastante mayor al descentrar el conducto de salida. En la Gráfica 10 se ha calculado la diferencia entre ambos casos para observarlo con mayor claridad, llegando a obtener una pérdida de transmisión de alrededor de 25 dB mayor.



Gráfica 10. TL conducto de salida descentrado – TL conducto de salida centrado. Dispositivo circular

5.4 DISPOSITIVO ELÍPTICO CON CONDUCTOS CENTRADOS

En el caso del dispositivo elíptico con conductos centrados se establece que la resistividad del catalizador es $R = 1500 Pa \cdot s/m^2$. En primer lugar, se estudia el efecto que tiene la excentricidad (ε) en el resultado de la pérdida de transmisión acústica. Seguidamente, se compara la TL en función de

la presencia o no de hollín en el DPF. Se ha modelado un cuarto de geometría debido a la doble simetría de esta. La geometría y la malla creada en ANSYS APDL se muestra en la Figura 25:

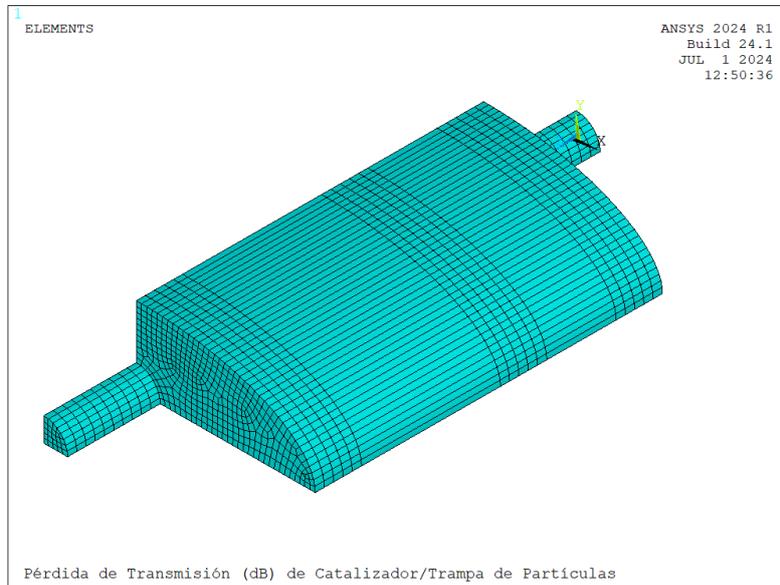
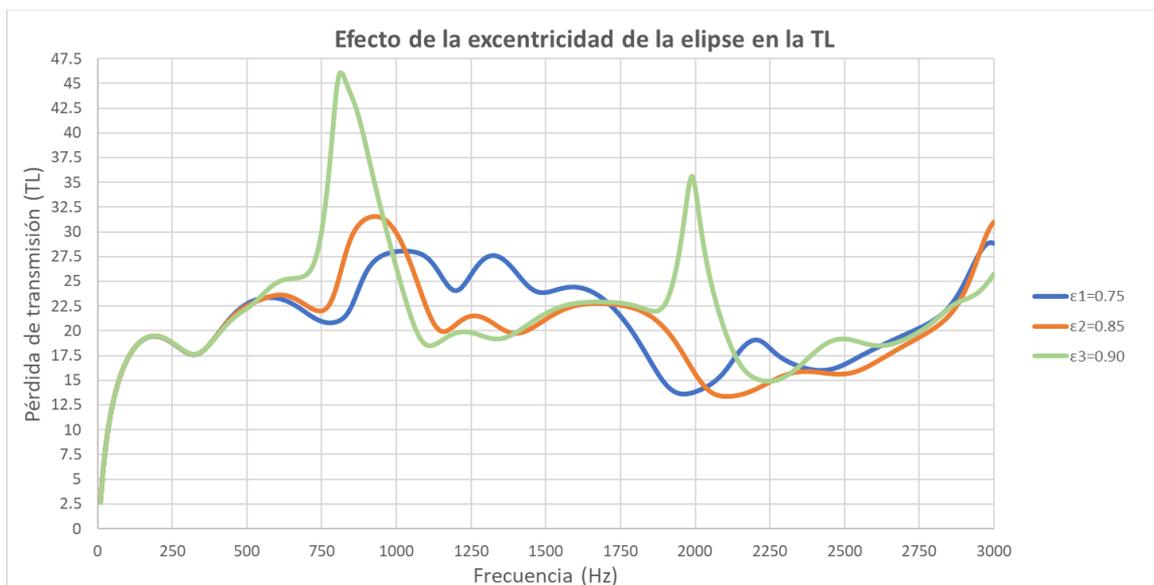


Figura 25. Geometría y malla del dispositivo elíptico con conductos centrados (ANSYS APDL)

5.4.1 Efecto de la excentricidad de la elipse

Para estudiar el efecto que tiene variar la excentricidad de la elipse se realizan tres cálculos para ser comparados entre ellos. Las excentricidades consideradas son: $\epsilon_1 = 0.75$, $\epsilon_2 = 0.85$ y $\epsilon_3 = 0.90$. Las demás características geométricas se calcularon en la Tabla 3 y no se considera existencia de hollín en el filtro antipartículas. En la Gráfica 11 se puede observar la pérdida de transmisión obtenido para el barrido en frecuencia considerado:



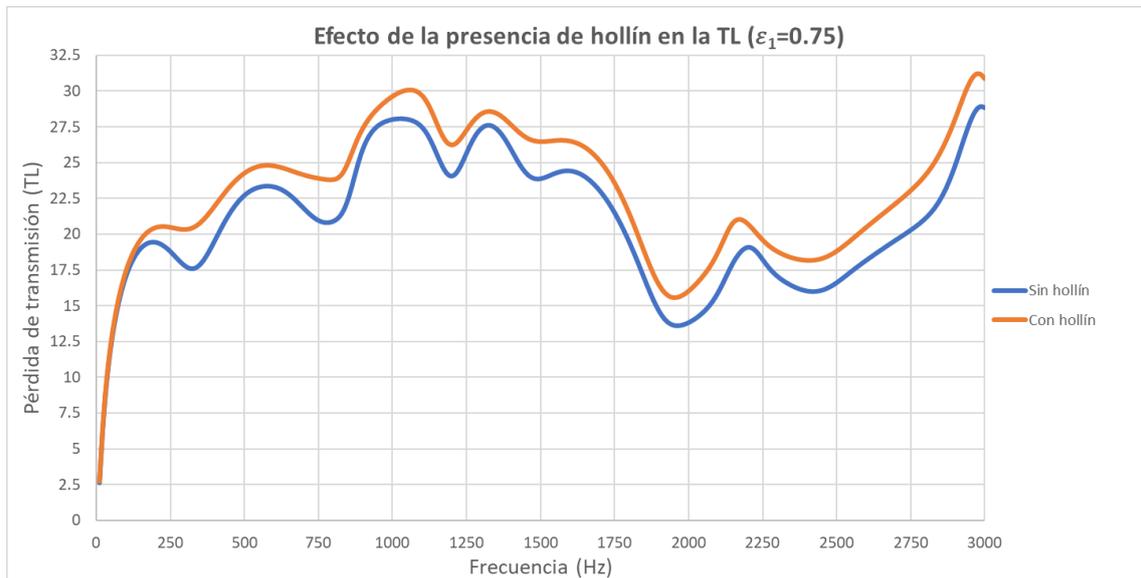
Gráfica 11. Efecto de la excentricidad de la elipse en dispositivo elíptico con conductos centrados

Desde los 0 Hz hasta los 500 Hz las tres geometrías presentan un comportamiento similar. A partir de ahí hasta los 1000 Hz, conforme la excentricidad aumenta, la TL también lo hace. Esto es apreciable

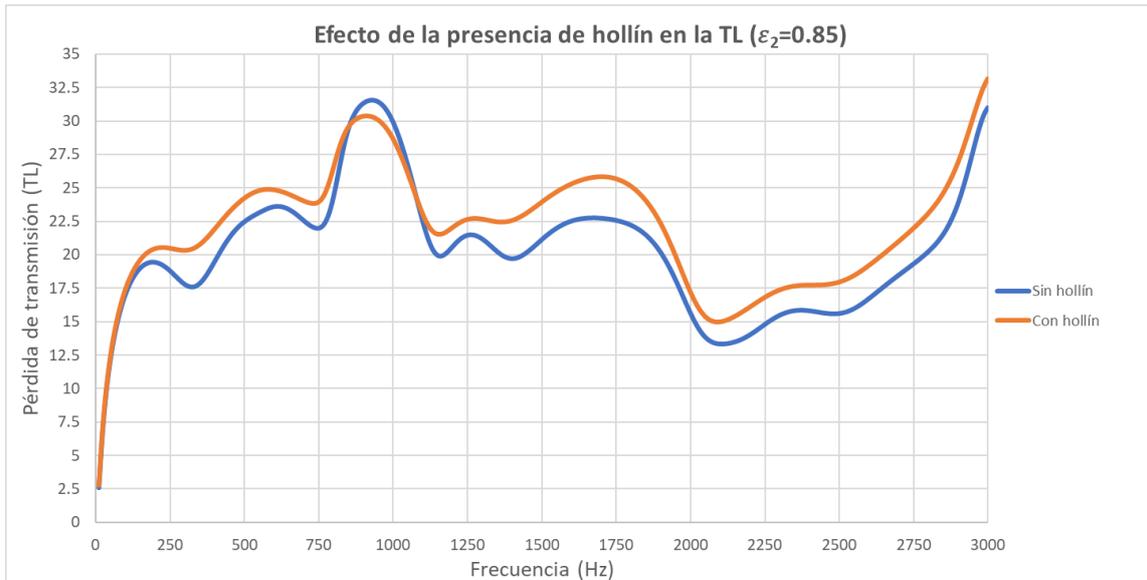
sobre todo para el caso de $\varepsilon_3 = 0.90$, donde se presenta un pico alrededor de los 850 Hz, llegando a un $TL = 46 \text{ dB}$, mientras que para $\varepsilon_2 = 0.85$ se alcanza un pico alrededor de los 900 Hz ($TL = 31 \text{ dB}$). Desde los 1000 Hz hasta los 1750 Hz, la pérdida de transmisión acústica para $\varepsilon_1 = 0.75$ es mayor que para $\varepsilon_2 = 0.85$, y esta última mayor que para $\varepsilon_3 = 0.90$. Seguidamente, para el caso de $\varepsilon_3 = 0.90$ se vuelve a presentar otro pico en 2000 Hz, alcanzando $TL = 35.6 \text{ dB}$, teniendo una mejor atenuación acústica que los otros dos casos hasta los 2150 Hz, donde para $\varepsilon_1 = 0.75$ se presenta un pequeño pico que alcanza $TL = 19 \text{ dB}$ en 2220 Hz. Hasta los 3000 Hz el comportamiento acústico de las tres geometrías es bastante similar.

5.4.2 Efecto de la presencia de hollín

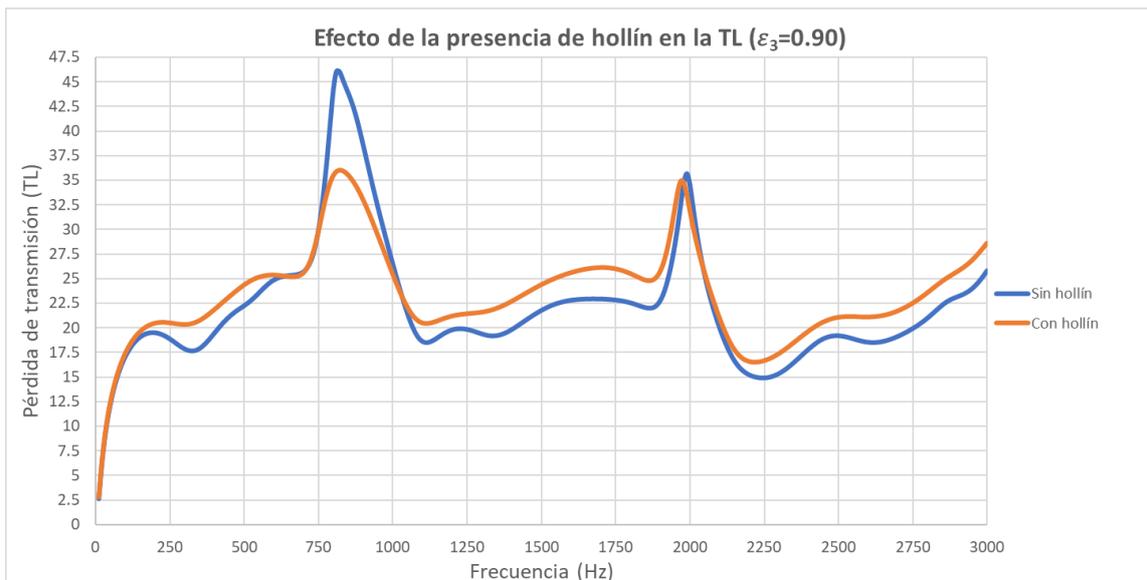
Para estudiar el efecto que tiene en la pérdida de transmisión acústica la existencia o no de hollín en las paredes del DPF, se realizan tres Gráficas comparativas para cada una de las excentricidades anteriormente calculadas.



Gráfica 12. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo elíptico con conductos centrados ($\varepsilon_1 = 0.75$)



Gráfica 13. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo elíptico con conductos centrados ($\epsilon_2 = 0.85$)



Gráfica 14. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo elíptico con conductos centrados ($\epsilon_3 = 0.90$)

En los tres casos, por lo general, la existencia de hollín en el DPF ocasiona una mayor atenuación acústica. Esto no es así para $\epsilon_3 = 0.90$, ya que en el pico que presenta alrededor de 850 Hz la pérdida de transmisión es menor cuando hay hollín en el DPF. Esto mismo también ocurre alrededor del pico de los 2000 Hz, donde ambas TLs se igualan prácticamente. Para $\epsilon_2 = 0.85$ se presenta un pico en los 900 Hz, siendo la pérdida de transmisión acústica mayor cuando no existe hollín en el DPF.

5.5 DISPOSITIVO ELÍPTICO CON CONDUCTO DE SALIDA DESCENTRADO

En esta sección se va a proceder de manera similar a la anterior, es decir, se establece una $R = 1500 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ para todos los casos. Se estudia el efecto en la pérdida de transmisión debido a la excentricidad de la elipse y a la presencia de hollín en el DPF. En este caso, dada la simetría, se modela la mitad de la geometría. A continuación, se puede observar en la Figura 26 el mallado y la geometría modelada en ANSYS APDL:

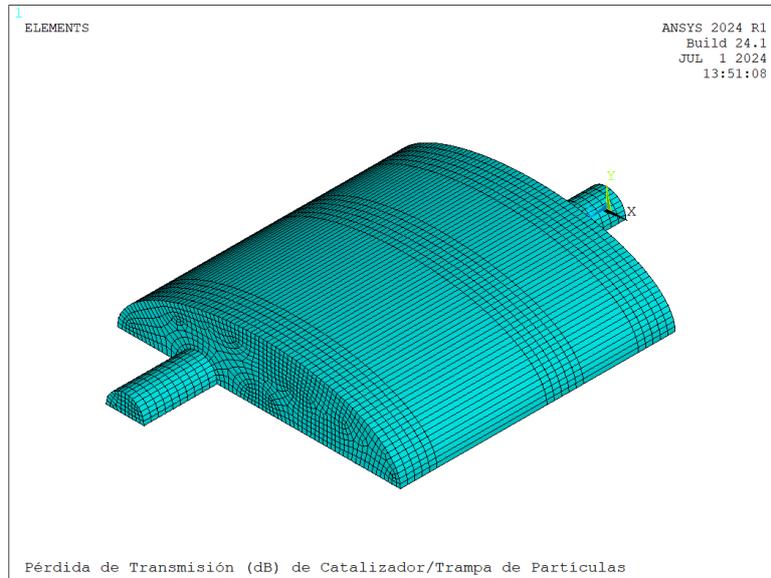
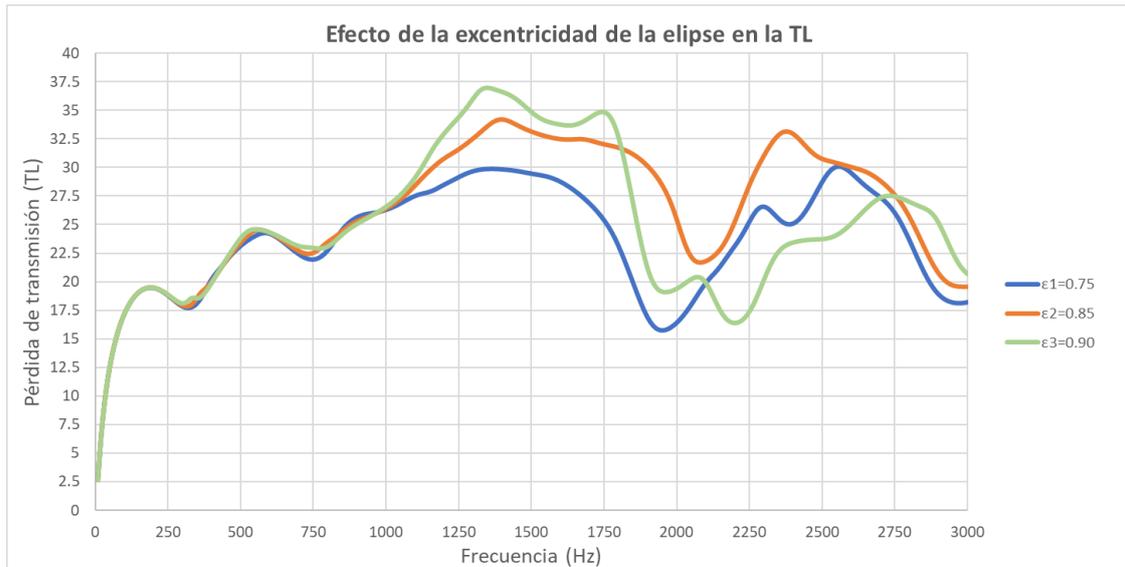


Figura 26. Geometría y malla del dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado (ANSYS APDL)

5.5.1 Efecto de la excentricidad de la elipse

Al igual que para los casos en el que el conducto de salida estaba centrado, se consideran tres excentricidades para ser comparadas entre ellas: $\varepsilon_1 = 0.75$, $\varepsilon_2 = 0.85$ y $\varepsilon_3 = 0.90$. El offset del conducto de salida se calculó en la Tabla 3 y no se considera existencia de hollín en el filtro antipartículas. En la Gráfica se 15 puede observar la pérdida de transmisión obtenido para el barrido en frecuencia considerado:

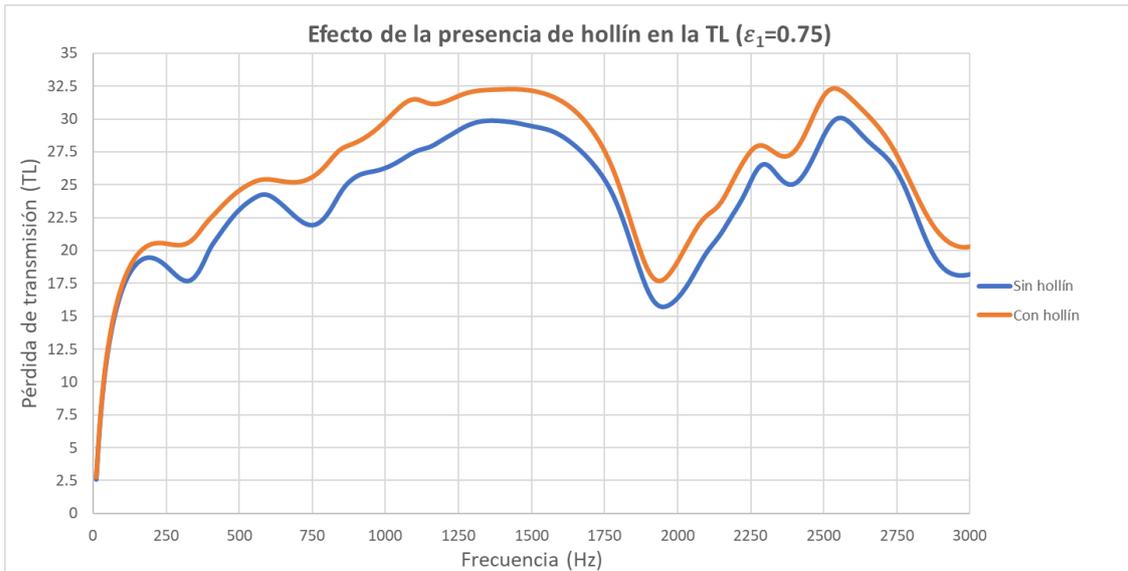


Gráfica 15. Efecto de la excentricidad de la elipse en dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado

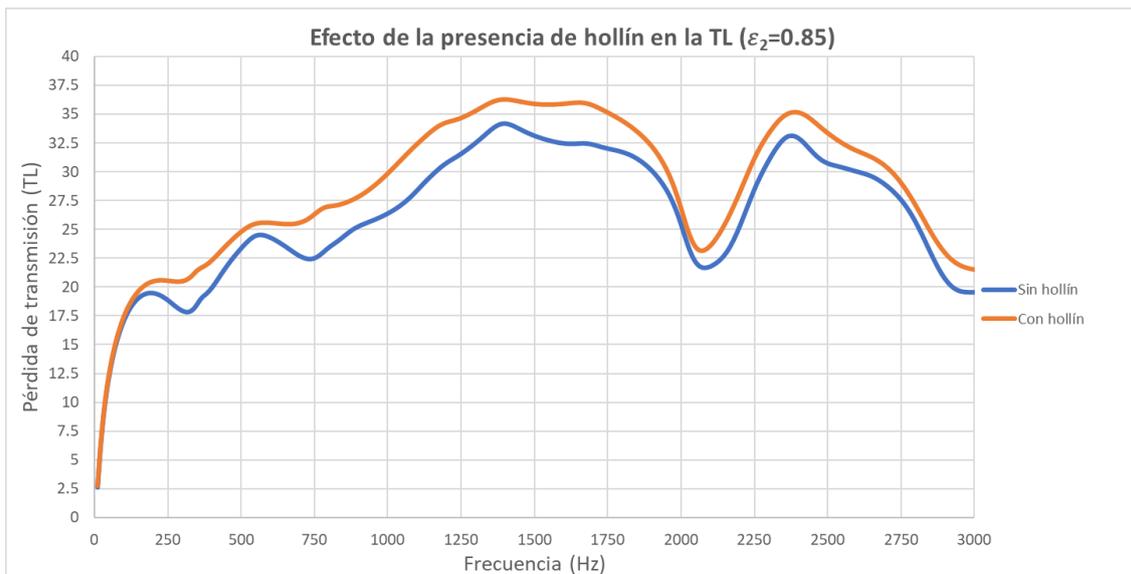
Se puede observar que en el rango de frecuencia desde 0 Hz hasta los 1000 Hz la atenuación acústica es similar en los tres casos modelados. Desde los 1000 Hz hasta los 3000 Hz, para $\varepsilon_2 = 0.85$ la pérdida de transmisión acústica es mayor que para $\varepsilon_1 = 0.75$, sobre todo en frecuencias medias. Para $\varepsilon_3 = 0.90$, desde los 1000 Hz hasta los 1800 Hz, la TL es la mayor obtenida. A partir de ahí, decrece y es menor que para $\varepsilon_2 = 0.85$ hasta los 2750 Hz. Comparando los modelos con excentricidades 1 y 3, la 3 se mantiene mayor desde los 0 Hz hasta los 2100 Hz y desde los 2700 Hz hasta la frecuencia final, 3000 Hz.

5.5.2 Efecto de la presencia de hollín

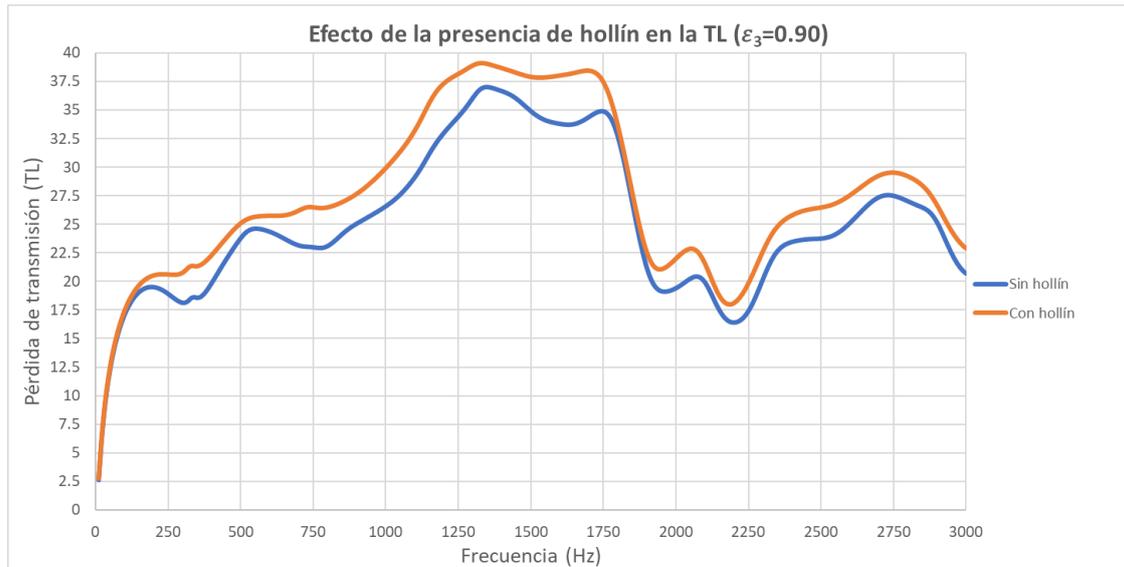
Para estudiar el efecto que tiene en la pérdida de transmisión acústica la existencia o no de hollín en las paredes del DPF, se realizan tres Gráficas comparativas para cada una de las excentricidades anteriormente calculadas:



Gráfica 16. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado ($\epsilon_1 = 0.75$)



Gráfica 17. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado ($\epsilon_2 = 0.85$)

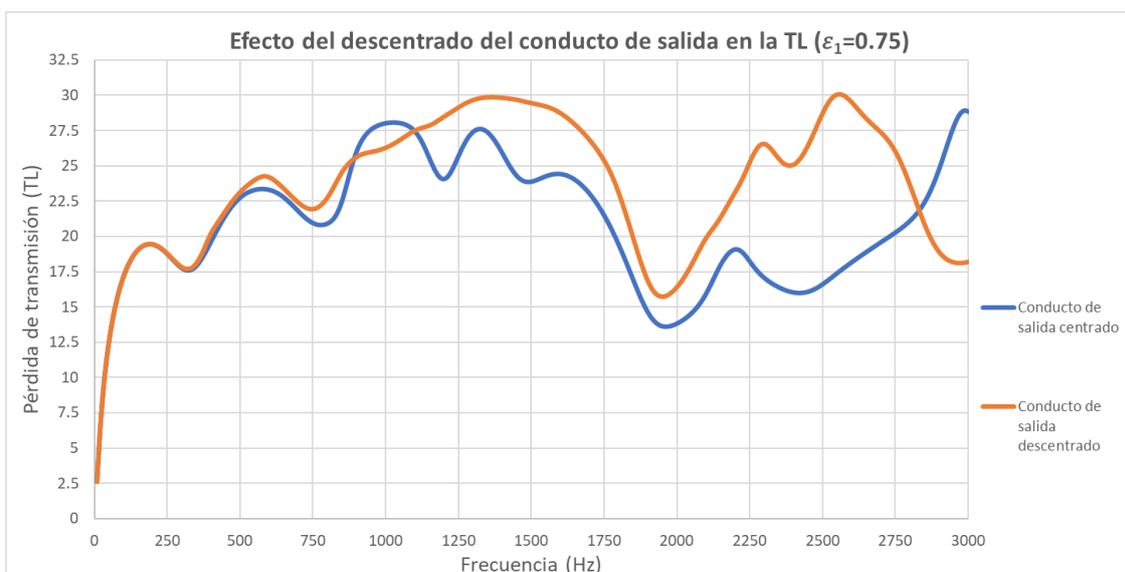


Gráfica 18. Pérdidas de transmisión según la presencia o no de hollín en el DPF. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado ($\varepsilon_3 = 0.90$)

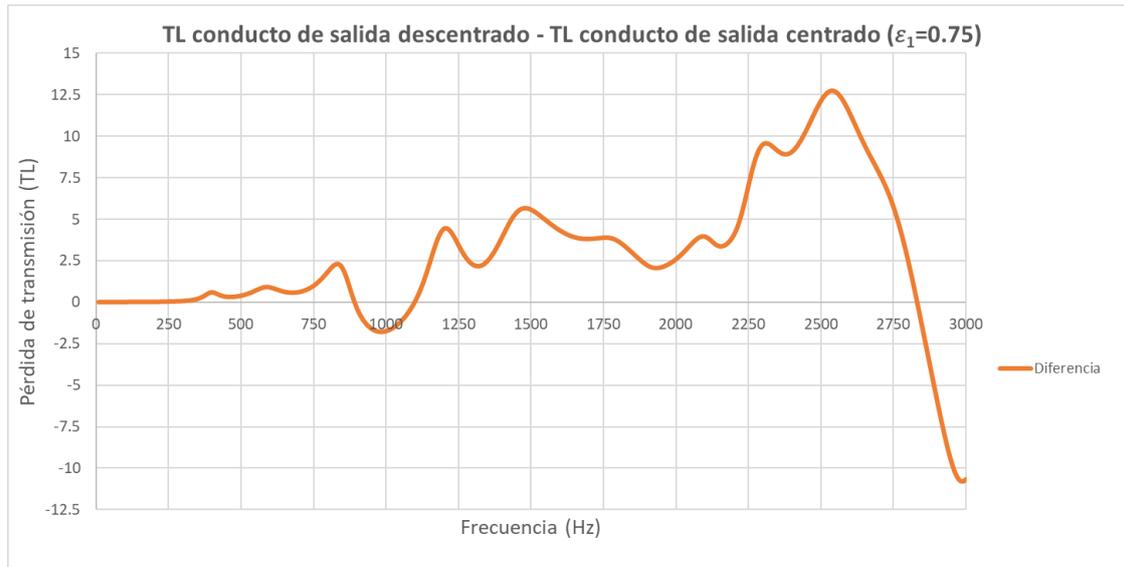
En los tres casos se produce un comportamiento similar en la atenuación acústica al existir hollín en el DPF, siendo esta mayor cuando hay hollín. Este efecto se ve reducido en la zona decreciente de las curvas, alrededor de los 1800 Hz para $\varepsilon_1 = 0.75$ y $\varepsilon_3 = 0.90$ y en torno a los 2000 Hz para $\varepsilon_2 = 0.85$.

5.6 EFECTO DEL DESCENTRADO DEL CONDUCTO DE SALIDA EN EL DISPOSITIVO ELÍPTICO

Para observar la diferencia en la pérdida de transmisión acústica (TL) debido a la ubicación del conducto de salida de gases, se van a comparar tres casos para cada una de las excentricidades tratadas en las secciones anteriores para el dispositivo elíptico. La resistividad del catalizador se establece en $R = 1500 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ y no se considera presencia de hollín en el DPF.

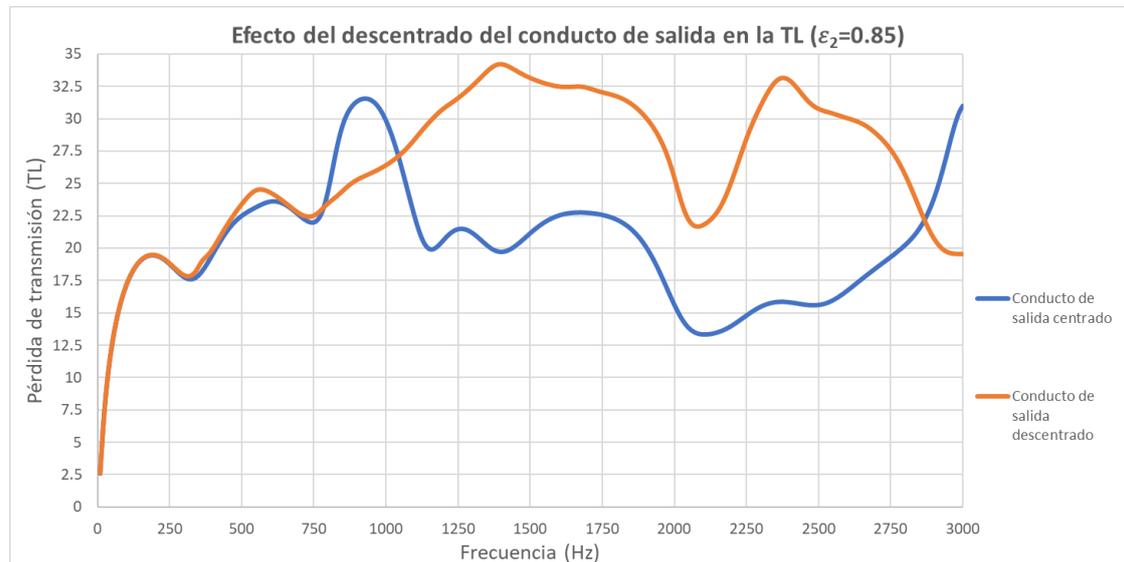


Gráfica 19. Efecto del descentrado del conducto de salida en los dispositivos elípticos ($\varepsilon_1 = 0.75$)

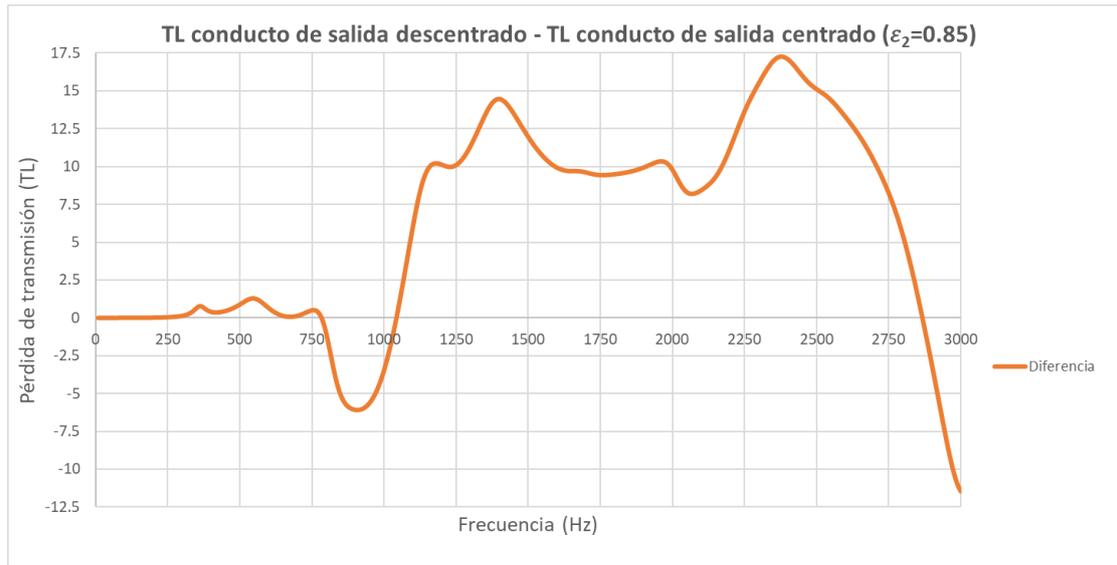


Gráfica 20. TL conducto de salida descentrado – TL conducto de salida centrado. Dispositivo elíptico ($\epsilon_1 = 0.75$)

En las Gráficas 19 y 20 se puede observar que descentrar el tubo de salida provoca un aumento considerable de la pérdida de transmisión acústica a medias y altas frecuencias (excepto de 2830 Hz hasta los 3000 Hz). También se puede apreciar que en la zona cercana a los 1000 Hz la atenuación acústica es mejor para el caso en el que no se encuentra el conducto de salida descentrado, ya que presenta un pequeño pico en la TL . Desde los 0 Hz hasta los 750 Hz las pérdidas de transmisión acústicas son prácticamente iguales.

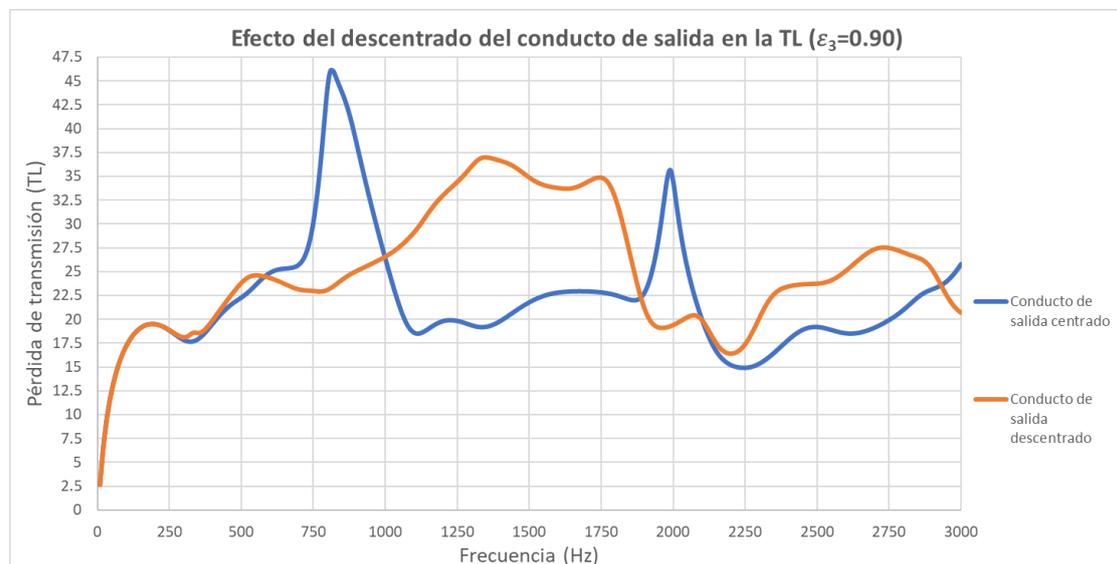


Gráfica 21. Efecto del descentrado del conducto de salida en los dispositivos elípticos ($\epsilon_2 = 0.85$)

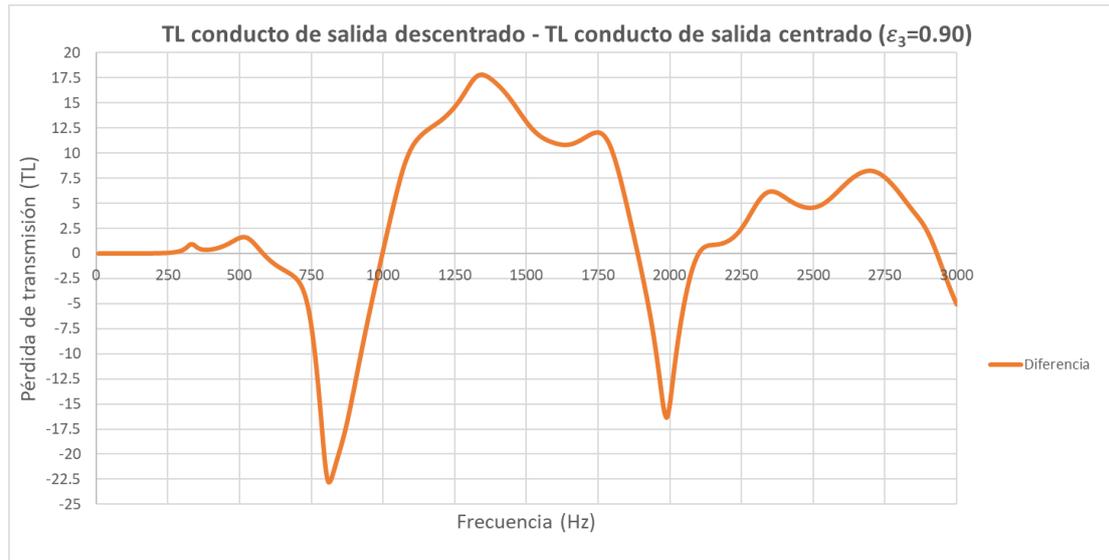


Gráfica 22. TL conducto de salida descentrado – TL conducto de salida centrado. Dispositivo elíptico ($\epsilon_2 = 0.85$)

En las Gráficas 21 y 22 se observa que el comportamiento acústico es similar desde los 0 Hz hasta los 750 Hz. Alrededor de los 900 Hz se presenta un pico de pérdida de transmisión acústica para el caso en el que los conductos están centrados, haciendo que la atenuación sea mejor en este caso. En la banda de frecuencia restante, el hecho de descentrar el conducto de salida provoca una mejor atenuación acústica, apreciable considerablemente en medias y altas frecuencias (excepto de 2880 Hz hasta los 3000 Hz).



Gráfica 23. Efecto del descentrado del conducto de salida en los dispositivos elípticos ($\epsilon_3 = 0.90$)

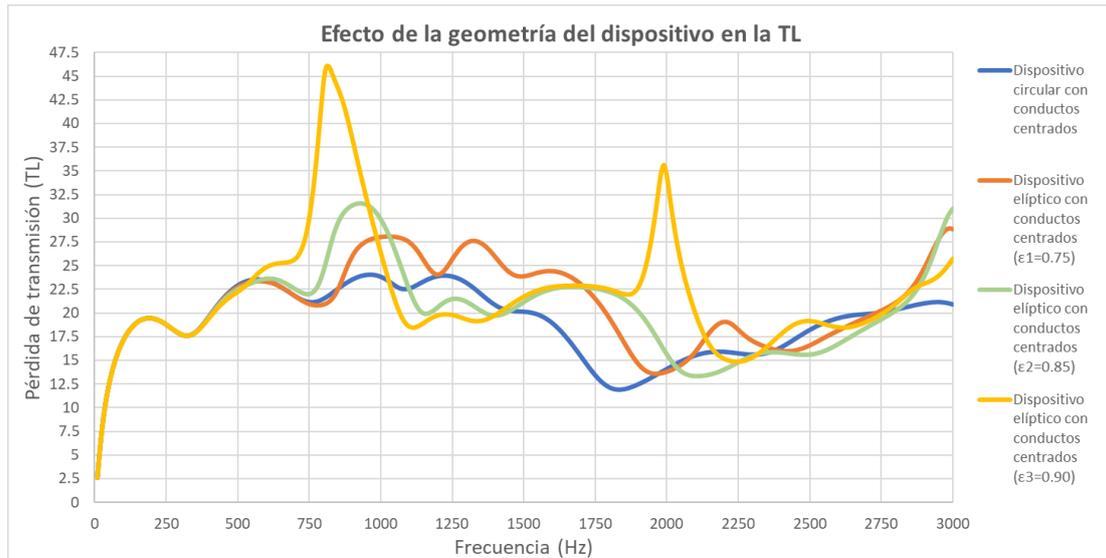


Gráfica 24. TL conducto de salida descentrado – TL conducto de salida centrado. Dispositivo elíptico ($\epsilon_3 = 0.90$)

Para $\epsilon_3 = 0.90$, descentrar el conducto de salida proporciona una mejor atenuación acústica desde los 1000 Hz hasta los 1890 Hz y desde los 2100 Hz hasta los 2930 Hz. En los rangos restantes de frecuencia la TL es bastante mayor para el caso en el que los conductos están centrados, ya que se presentan unos picos de TL muy pronunciados.

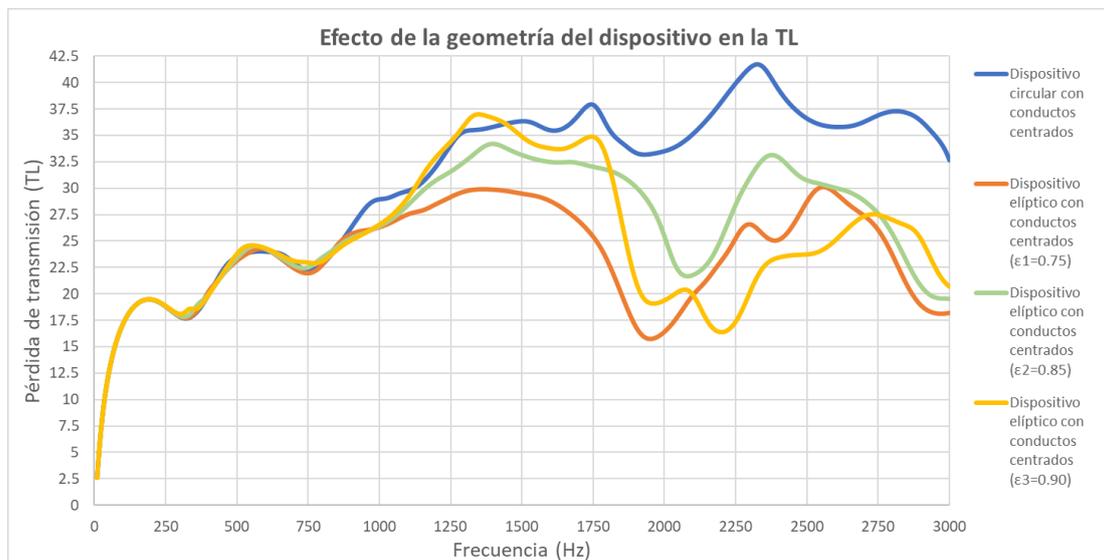
5.7 DISPOSITIVOS CIRCULARES FRENTE A ELÍPTICOS

En esta sección se procede a comparar el resultado obtenido en la pérdida de transmisión acústica para los dispositivos circulares frente a los elípticos. Para ello, se representa la TL resultante en los modelos de conductos centrados por un lado y de conducto de salida descentrado por otro. Para todos los cálculos se considera que la resistividad del catalizador es $R = 1500 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ y que no existe hollín en el DPF. En la Gráfica 25 se muestran las TL para los casos de dispositivo circular y elípticos con excentricidades $\epsilon_1 = 0.75$, $\epsilon_2 = 0.85$ y $\epsilon_3 = 0.90$, todos ellos con los conductos centrados. En la Gráfica 26 se procede de igual forma, pero con los conductos de salida descentrados.



Gráfica 25. Dispositivo circular frente a dispositivos elípticos con conductos centrados

En la Gráfica 25 se aprecia que la atenuación acústica es menor, en general, para el dispositivo circular frente a los elípticos. El comportamiento es similar desde los 0 Hz hasta los 500 Hz y desde los 2000 Hz hasta los 2750 Hz no se observan grandes diferencias en la TL . El dispositivo circular atenúa mejor el sonido desde los 1100 Hz (aproximadamente) hasta los 1400 Hz frente a los dispositivos elípticos con excentricidades $\varepsilon_2 = 0.85$ y $\varepsilon_3 = 0.90$.

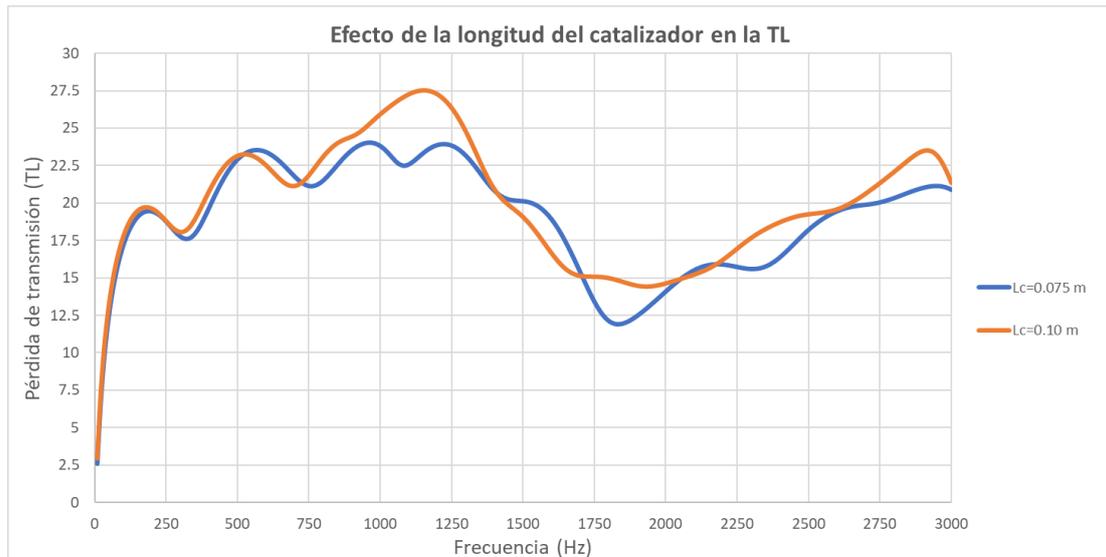


Gráfica 26. Dispositivo circular frente a dispositivos elípticos con conductos de salida descentrados

En la Gráfica 26 se observa un comportamiento muy similar desde los 0 Hz hasta los 800 Hz. A partir de ahí hasta la frecuencia final, en el dispositivo circular la pérdida de transmisión es mayor en todo el rango de frecuencias, a excepción de un pequeño pico que presenta la curva para el dispositivo elíptico con $\varepsilon_3 = 0.90$.

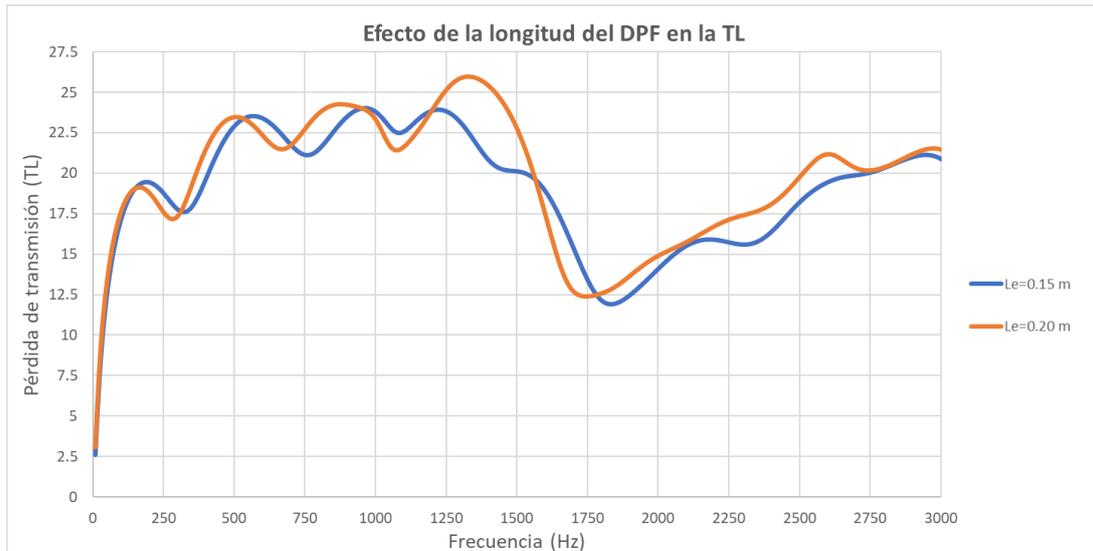
5.8 EFECTO DE LA LONGITUD DE LOS MONOLITOS

En esta sección se va a estudiar en efecto que tiene en la pérdida de transmisión variar la longitud de los monolitos. Para ello, primero se resolverá un caso aumentando la longitud del catalizador en 0.025 m, seguidamente otro caso aumentando la longitud del DPF en 0.05 m y, por último, aumentando la longitud de ambos. Para este estudio se utilizará el dispositivo circular con conductos centrados, con una resistividad del catalizador de $R = 1500 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ y sin presencia de hollín en el DPF. A continuación se muestran las Gráficas que representan la pérdida de transmisión acústica en función de la frecuencia:



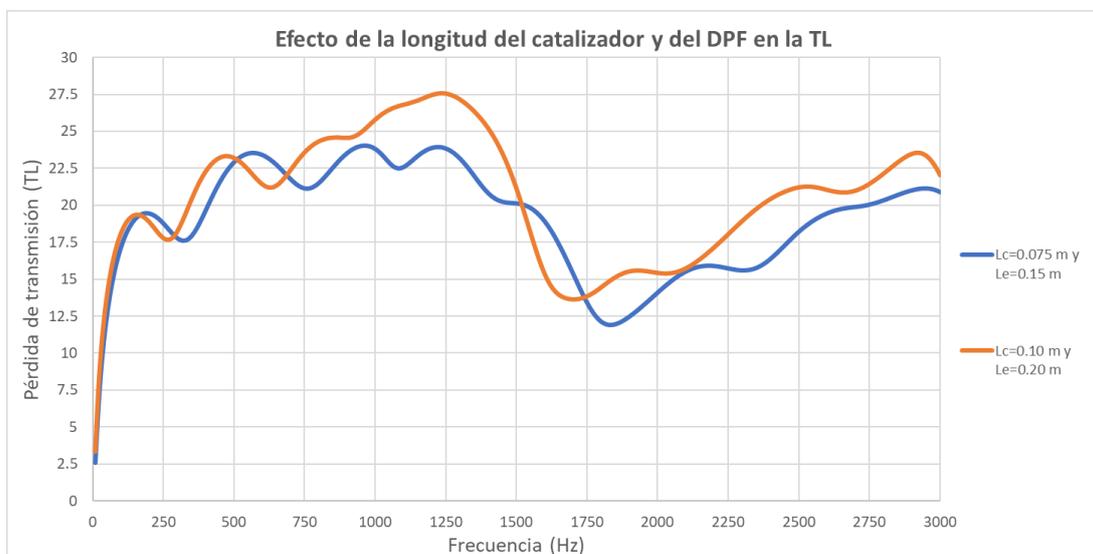
Gráfica 27. Pérdidas de transmisión según la longitud del catalizador. Dispositivo circular con conductos centrados

Se puede observar que en el rango de baja frecuencia la curva calculada con una mayor longitud del catalizador está desplazada hacia la izquierda (de 250 Hz a 750 Hz). Entre los 750 Hz y los 1400 Hz la pérdida de transmisión acústica mejora notablemente al aumentar la longitud del catalizador, ya que se intercambia un valle por un pico. De 1400 Hz a 1700 Hz atenuación acústica es peor en el caso una mayor longitud del catalizador, siendo debido al desplazamiento de la curva. A partir de ahí hasta la frecuencia máxima de estudio, la atenuación acústica es mejor para una mayor longitud del catalizador debido a que a muy altas frecuencias una mayor longitud implica más disipación de energía acústica en forma de calor y, por tanto, una mayor TL .



Gráfica 28. Pérdidas de transmisión según la longitud del DPF. Dispositivo circular con conductos centrados

En caso de aumentar la longitud del DPF ocurre algo similar, ya que la curva se ve desplazada hacia la izquierda en el rango de baja frecuencia. Alrededor de 1080 Hz se presenta un valle en el que la atenuación es peor al aumentar la longitud del DPF, pero la pérdida de transmisión aumenta considerablemente sobre los 1350 Hz. A muy alta frecuencia la mejora de la atenuación acústica debido a la mayor disipación de energía acústica en forma de calor no es muy notoria en este caso.



Gráfica 29. Pérdidas de transmisión según las longitudes del catalizador y del DPF. Dispositivo circular con conductos centrados

Al aumentar la longitud de ambos monolitos, se produce un efecto combinado de ambos. La curva en baja frecuencia se ve desplazada hacia frecuencias menores. La zona donde la geometría original presenta valles, aumentar la longitud de los monolitos conlleva que la pérdida de transmisión aumente en estas zonas. Esto es claramente apreciable sobre los 1250 Hz, donde se intercambia un valle por un pico. Por otro lado, para muy alta frecuencia se produce una mejora en la atenuación acústica debido a la disipación de energía acústica en forma de calor.

5.9 CONCLUSIONES

En los dispositivos circulares, tanto con el conducto de salida centrado como descentrado, se ha estudiado la influencia que tiene la resistividad R del catalizador en la pérdida de transmisión acústica. En rangos de frecuencia medios y altos, la TL es mayor a medida que la resistividad del catalizador también lo es, ya que se produce un aumento de la disipación de la energía acústica en forma de calor.

El efecto en la pérdida de transmisión acústica debido al hollín existente en el DPF se ha estudiado en todas las geometrías consideradas, ocasionando que la TL sea mayor cuando en las paredes del filtro antipartículas hay presencia de hollín. Esto se debe al aumento de la resistividad (R_w) de las paredes porosas del DPF, ocasionando que se produzca una mayor disipación de la energía acústica en forma de calor. Solo existen dos excepciones para los dispositivos elípticos con conductos centrados en los que la atenuación acústica es mayor sin presencia de hollín en el DPF: Para $\varepsilon_2 = 0.85$ en un pico de TL alrededor de los 900 Hz y para $\varepsilon_3 = 0.90$ en los picos cercanos a los 850 Hz y 2000 Hz.

En cuanto al descentrado del conducto de salida, se obtiene una mayor TL cuando se coloca el centro del conducto salida sobre la línea nodal (presión nula) del primer modo radial de orden superior, evitando la aparición de modos de orden superior (tridimensionales, no son de onda plana). Esto permite mantener un nivel razonable de TL al haber ubicado el conducto de salida en una zona de baja presión acústica. Este fenómeno es notorio claramente en el dispositivo circular, siendo mayor la pérdida de transmisión acústica en todo el rango de frecuencias considerado. Para los dispositivos elípticos, por lo general también se obtiene una mejor atenuación acústica al desplazar el centro del conducto de salida, a excepción de los picos mencionados anteriormente en las geometrías de $\varepsilon_2 = 0.85$ y $\varepsilon_3 = 0.90$.

Por otro lado, los cambios geométricos (sección y excentricidad) no proporcionan una tendencia clara. Si se puede objetar que a muy baja frecuencia las TL s se parecen, ya que las geometrías tienen la misma sección total. Las diferencias entre ellas van a medida que aumenta la frecuencia y empiezan a propagarse modos de orden superior. Según los rangos de frecuencia que se consideren, unas geometrías proporcionan mejores resultados que otras.

Por último, se ha estudiado la influencia que tiene aumentar la longitud de los monolitos. Aumentar cualquier longitud de estos ocasiona dos efectos: El primero, que en la zona de baja frecuencia la curva de TL se desplace a frecuencias menores. Esto sucede debido a que al tener el dispositivo una mayor longitud, las cúpulas de atenuación se estrechan. Por ello, según el rango en el que se desee mejorar la atenuación acústica, se puede jugar con la longitud del monolito para desplazar la curva a un rango adecuado de frecuencia. El segundo, el aumento de la pérdida de transmisión acústica en valles y en el rango de muy alta frecuencia, ya que una mayor longitud implica más disipación de energía acústica en forma de calor y, por tanto, una mayor TL .

6. VALIDACIÓN DE LA METODOLOGÍA

Con el fin de comprobar que los resultados obtenidos en ANSYS APDL son válidos, se van a comparar estos con los resultados obtenidos mediante el cálculo con ANSYS Workbench. Este software presenta una interfaz más intuitiva y permite modelar la geometría como si de un programa de dibujo convencional se tratase.

6.1 MODELADO EN ANSYS WORKBENCH

En primer lugar, se modela la geometría mediante ANSYS Discovery, donde las secciones de color naranja corresponden con el catalizador y el filtro antipartículas:

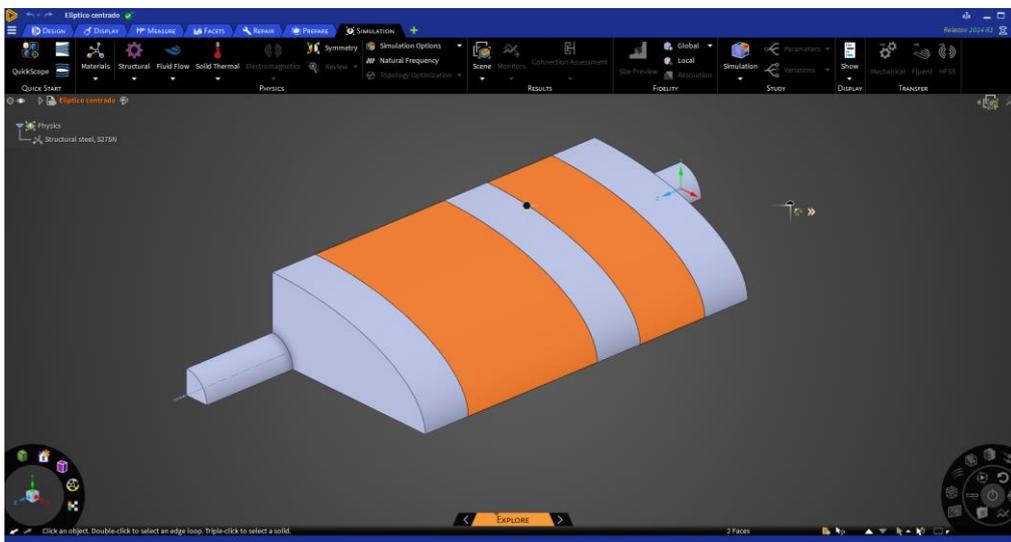


Figura 27. Un cuarto de la geometría del dispositivo elíptico con conductos centrados (ANSYS Discovery)

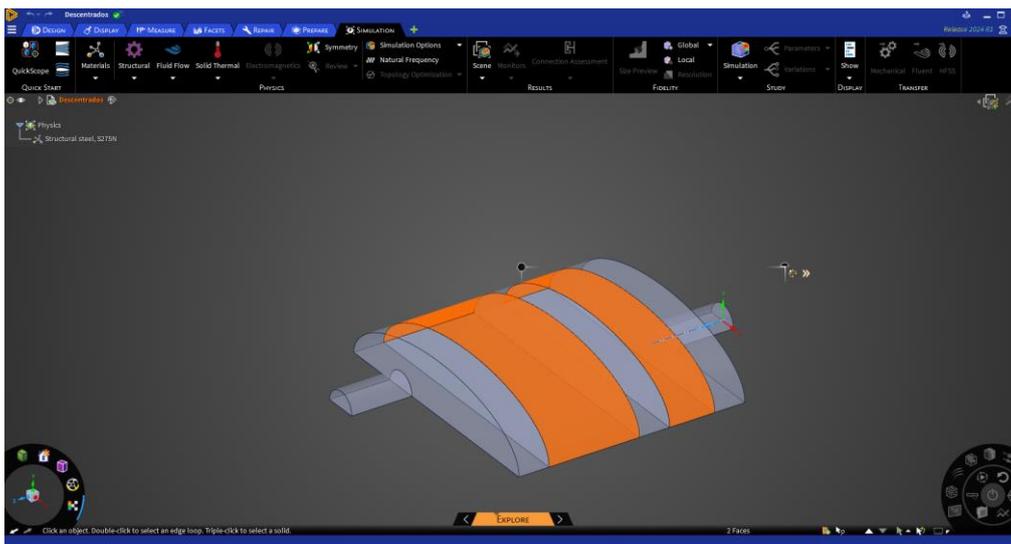


Figura 28. Un medio de la geometría del dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado (ANSYS Discovery)

A continuación, para realizar el análisis se selecciona un estudio “Harmonic Acoustics” con el fin de modelar el comportamiento acústico del dispositivo. Una vez seleccionado, se definen los materiales y sus propiedades, siendo las del aire: Densidad $\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$ y velocidad del sonido $c = 340.255 \text{ m/s}$.

La geometría se malla únicamente en las partes que no son los monolitos catalizador ni DPF, por lo que se hace uso del mallado “MultiZone” que proporciona ANSYS Workbench. De esta forma, es posible mallar todos los sólidos a excepción de los monolitos, en los cuales se aplican las matrices de transferencia. El tamaño de los elementos se establece en 0.01 m y se debe asegurar un mallado continuo entre las diferentes secciones del dispositivo. Las mallas obtenidas para geometría son las siguientes:

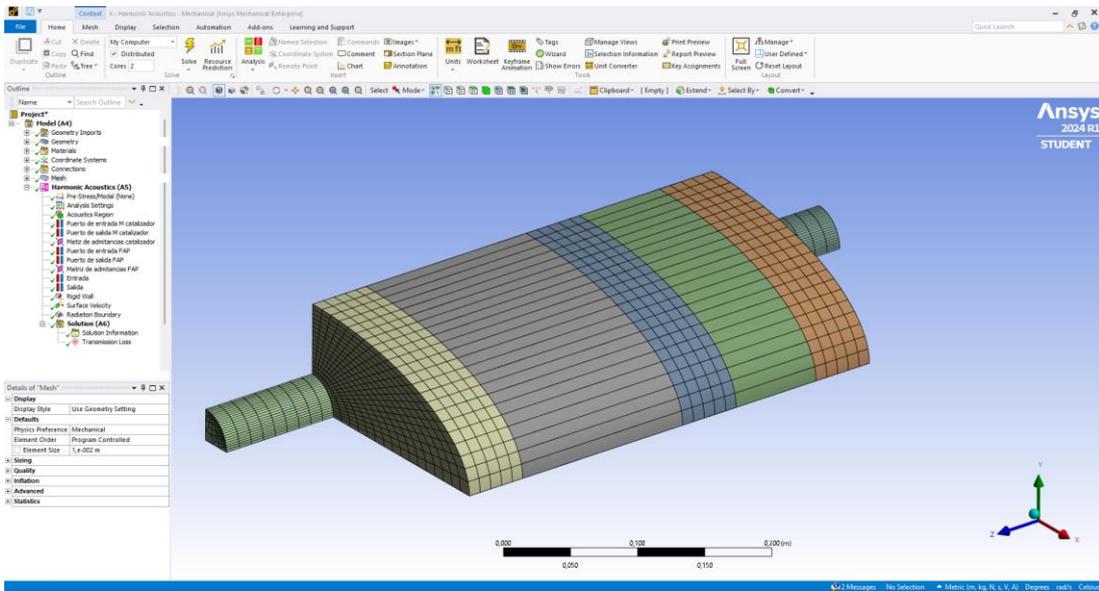


Figura 29. Malla del dispositivo elíptico con conductos centrados (ANSYS Workbench)

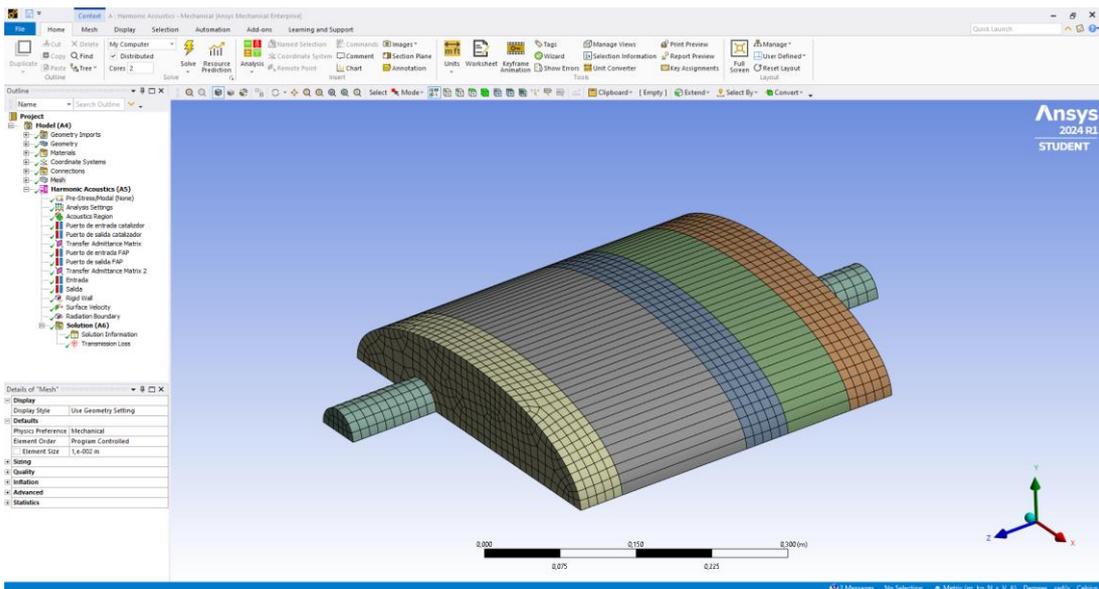


Figura 30. Malla del dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado (ANSYS Workbench)

Posteriormente, se seleccionan todas las partes del dispositivo como región acústica a calcular, estableciendo que el aire se propaga a través de estas. Las propiedades de los monolitos se establecen mediante sus respectivas matrices de transferencia, las cuales se introducen en el software definiendo puertos de entrada y salida en cada monolito mediante la opción “Port”:

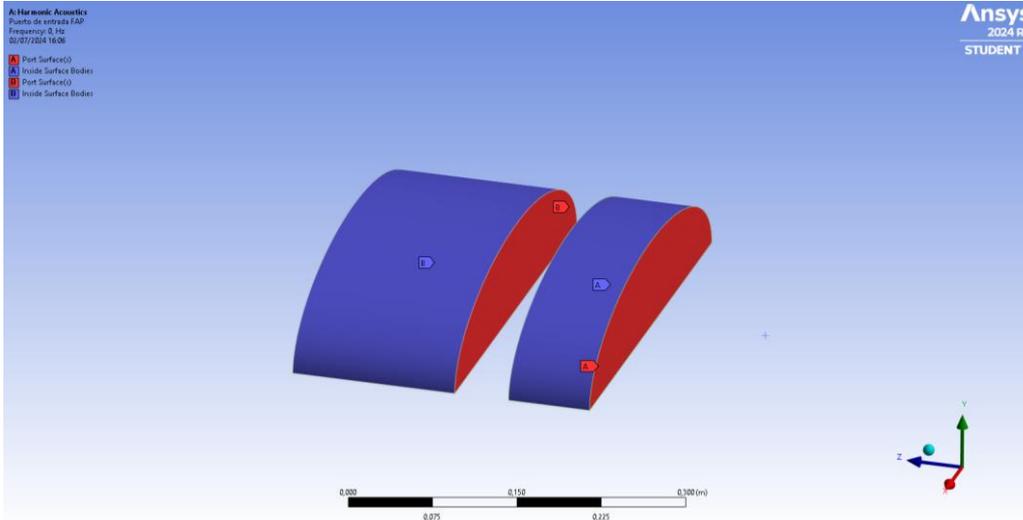


Figura 31. Puertos de entrada y salida en catalizador y DPF (ANSYS Workbench)

De esta forma se tienen cuatro puertos para cada monolito, pudiendo definir las matrices de transferencia de cuatro polos a través de la opción “Transfer admittance Matrix”. Se introducen los valores de las matrices calculados anteriormente con la rutina de Matlab.

Seguidamente, se definen los puertos de entrada y salida del dispositivo:

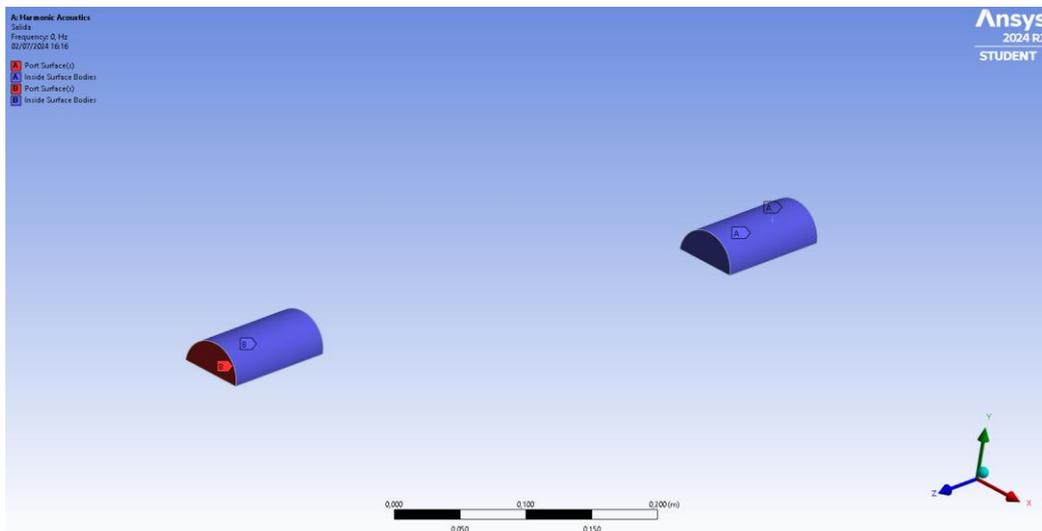


Figura 32. Puertos de entrada y salida en los conductos de entrada y salida (ANSYS Workbench)

Todas las paredes del dispositivo que no se han definido como puertos se establecen como paredes rígidas mediante la opción “Rigid Wall”:

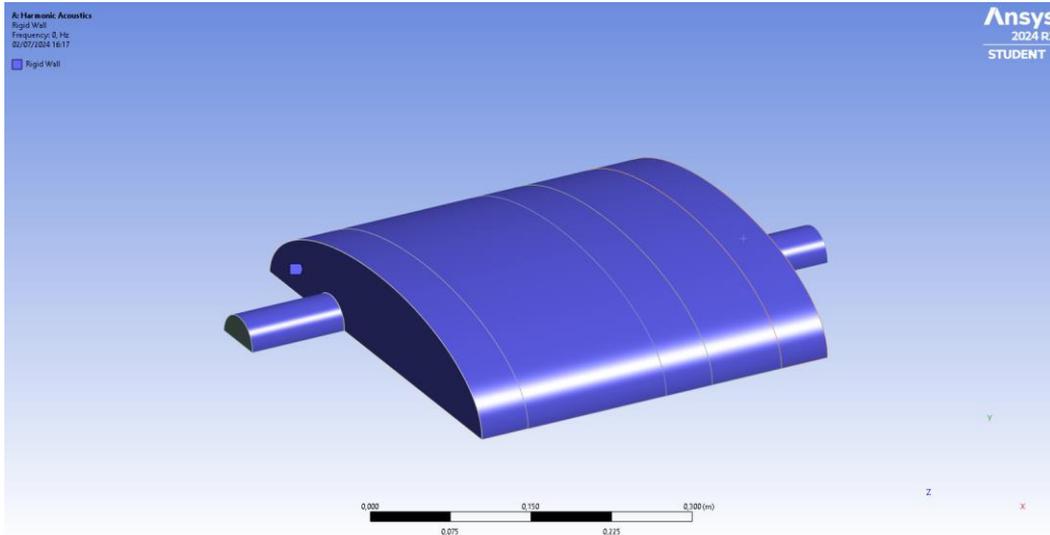


Figura 33. Paredes rígidas del modelo (ANSYS Workbench)

Después, mediante la opción “Surface Velocity”, se excita el conducto de entrada mediante una onda acústica armónica con una velocidad de -1 m/s (de signo negativo, ya que el eje Z se considera como referencia para propagación):

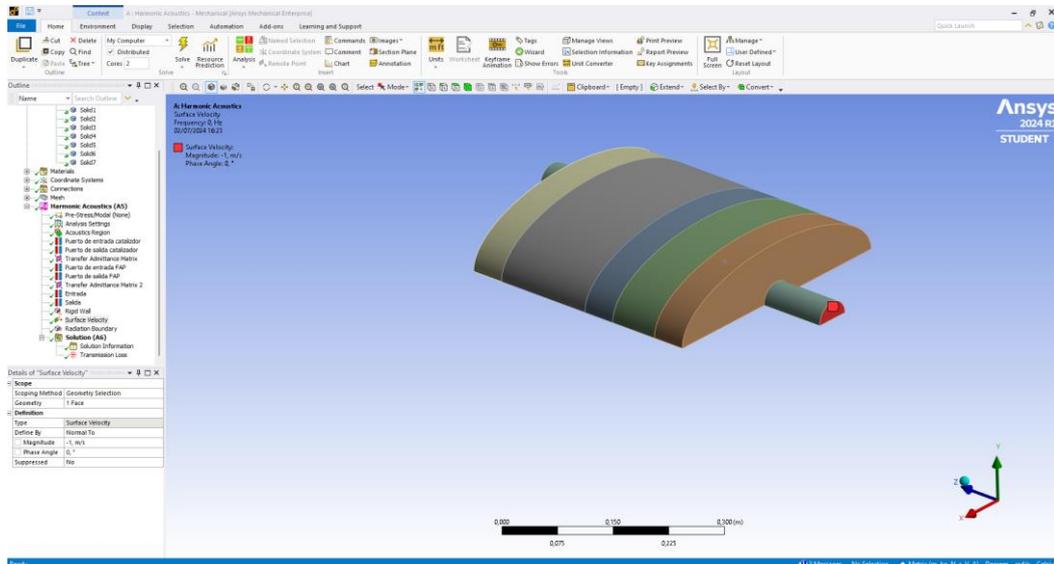


Figura 34. Excitación en el conducto de entrada (ANSYS Workbench)

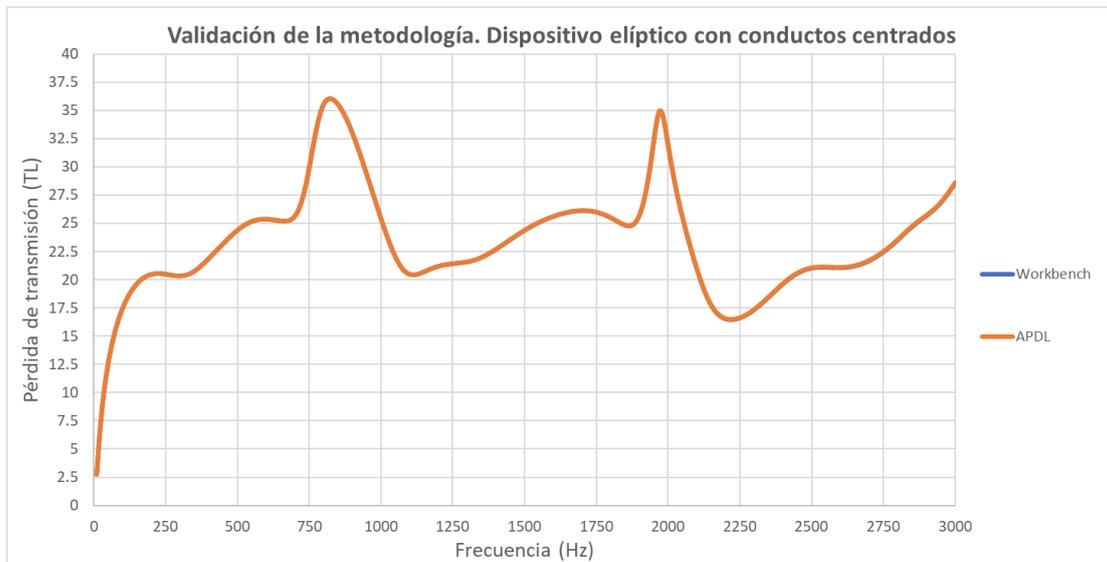
Se impone en la salida la condición de contorno para que la salida sea anecoica, consiguiendo que no se reflejen ondas en el interior del dispositivo. Esto se consigue con la opción “Radiation Boundary” seleccionando las superficies de entrada y salida del aire.

Por último, con la opción “Analysis Settings” se establece que la solución se realice en el rango de frecuencia de 0 Hz a 3000 Hz con un intervalo de 300, obteniéndose una solución cada 10 Hz. En la

etapa “Solution” se indica que se calcule la pérdida de transmisión (“Transmission Loss”) desde el puerto de entrada hasta el puerto de salida.

6.2 RESULTADOS DE ANSYS APDL FRENTE ANSYS WORKBENCH

Una vez obtenidos los resultados de la pérdida de transmisión (TL) en ANSYS Workbench en la etapa “Results”, se procede a comparar las TL s obtenidas en APDL frente a las obtenidas en Workbench. Los resultados que se van a comparar para la validación son los obtenidos para los dispositivos elípticos, con una resistividad del catalizador de $R = 1500 Pa \cdot s/m^2$ y con hollín en el DPF, tanto para el conducto de salida centrado como descentrado.



Gráfica 30. TL en APDL frente TL en Workbench. Dispositivo elíptico con conductos centrados

Para los cálculos realizados en el dispositivo elíptico con conductos centrados ambas curvas están prácticamente superpuestas. Con el fin de observar la diferencia con más detalle entre ambos softwares se calcula el % de error relativo cometido $Error(\%) = \left(\frac{|TL_{APDL} - TL_{Workbench}|}{TL_{Workbench}} \right) \cdot 100$, considerando que el resultado arrojado por el Workbench es el correcto:



Gráfica 31. % Error en el cálculo de la TL en ANSYS APDL frente ANSYS Workbench. Dispositivo elíptico con conductos centrados

El error cometido es prácticamente inapreciable, ya que el máximo que se ha cometido es de un 0.234 %.



Ambas curvas están prácticamente superpuestas y no se aprecian diferencias significativas en ningún rango de frecuencia. Al igual que en el caso anterior, se representa la curva del error cometido:



Para el caso del dispositivo elíptico con el conducto de salida descentrado se ha obtenido un mayor % de error, pero aun así sigue siendo poco significativo, donde el máximo cometido del 0.0694 %.

En conclusión, el modelo implementando en ANSYS APDL se puede dar como válido al obtener un error muy bajo frente a los cálculos realizados en ANSYS Workbench.

7. CARACTERIZACIÓN ACÚSTICA MEDIANTE LA TÉCNICA DE AJUSTE MODAL HÍBRIDO ANALÍTICO-NUMÉRICO

Con el objetivo de encontrar una metodología que permita obtener resultados precisos a la vez que se consigue reducir el coste computacional, en el Trabajo de investigación elaborado por Denia Guzmán (2018) se desarrolla una técnica llamada “ajuste modal híbrido analítico-numérico”, la cual proporciona resultados fiables con un tiempo de cómputo reducido en comparación con el MEF.

Primero se resuelve numéricamente mediante elementos finitos un problema de autovalores cuadrático asociado a la ecuación de ondas en la sección transversal de los conductos en un dominio 2D. Para ello se utiliza una malla 2D de dicha sección, con lo que el coste computacional es bajo en comparación con una malla 3D. En segundo lugar, esta solución numérica se combina, mediante superposición modal, con la solución analítica de la ecuación de ondas a lo largo de la dimensión longitudinal (perpendicular a la sección transversal) de los conductos que forman el catalizador. Aplicando las condiciones de compatibilidad en las discontinuidades geométricas (continuidad de presión y velocidad acústica), determinadas por las expansiones/contracciones entre conductos y las cámaras correspondientes, así como en las interfaces de las cámaras a ambos lados de los monolitos, se obtiene el campo acústico completo en todos los conductos que forman el dispositivo de postratamiento catalizador y filtro de partículas (conductos de entrada y salida, cámaras y monolitos). Una vez se conoce por completo el campo acústico en todos los conductos, se obtiene la pérdida de transmisión acústica (TL). El resultado de aplicar estas técnicas es un método tan preciso como elementos finitos en tres dimensiones, pero con un coste computacional mucho menor ya que elementos finitos solamente se aplica en 2D.

En general, las ondas pueden ser tridimensionales en todos los conductos, sobre todo a medida que aumenta la frecuencia (a frecuencias bajas la propagación es inicialmente en forma de ondas planas). Las únicas regiones donde se asume que siempre existen ondas planas, aunque las frecuencias sean altas, son las correspondientes a los monolitos del catalizador y del filtro de partículas. Ello se debe a que están formados por miles de conductos capilares de sección transversal muy pequeña en comparación con su longitud. En dichos conductos capilares no hay espacio para que se desarrollen ondas tridimensionales. Como se ha procedido anteriormente, dado que en el interior del monolito solamente hay ondas planas, su comportamiento acústico se puede modelizar con relativa sencillez mediante una matriz de transferencia o de cuatro polos, que relaciona las presiones y velocidades acústicas en la interfaz de un lado del monolito con las presiones y velocidades acústicas de la interfaz correspondiente al otro lado del monolito.

7.1 VALIDACIÓN DE LA TÉCNICA DE AJUSTE MODAL HÍBRIDO ANALÍTICO-NUMÉRICO

Con el fin de verificar la validación de esta técnica, se procede a comparar los resultados obtenidos anteriormente en ANSYS APDL con los resultados obtenidos con la técnica de ajuste modal (script en Anexo IV). Para ello, se compararán ocho casos:

- 1) Dispositivo circular con conductos centrados y sin hollín en el DPF.
- 2) Dispositivo circular con conductos centrados y con hollín en el DPF.
- 3) Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y sin hollín en el DPF.
- 4) Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y con hollín en el DPF.
- 5) Dispositivo elíptico con conductos centrados y sin hollín en el DPF.
- 6) Dispositivo elíptico con conductos centrados y con hollín en el DPF.
- 7) Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y sin hollín en el DPF.
- 8) Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y con hollín en el DPF.

En todos ellos se considera que la resistividad del catalizador es $R = 1500 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ y que en los dispositivos de sección elíptica la excentricidad es $\varepsilon = 0.90$. Las propiedades del aire y las geométricas son las recogidas en las Tablas 2 y 3 del Apartado 5.

Las mallas 2D utilizadas para cada geometría son las siguientes:

- 1) **Dispositivo circular con conductos centrados:** Debido a la doble simetría, solo se modela un cuarto de la geometría. El tamaño de elemento establecido es de 0.005 m en los conductos de entrada y salida y de 0.01 m en las cámaras. La malla está compuesta por 315 elementos y 1000 nodos.
- 2) **Dispositivo circular con conductos de salida descentrado:** En este caso se modela un medio de la geometría debido a la simetría que presenta. El tamaño de elemento establecido es de 0.005 m en los conductos de entrada y salida y de 0.01 m en las cámaras. La malla está compuesta por 579 elementos y 1820 nodos.

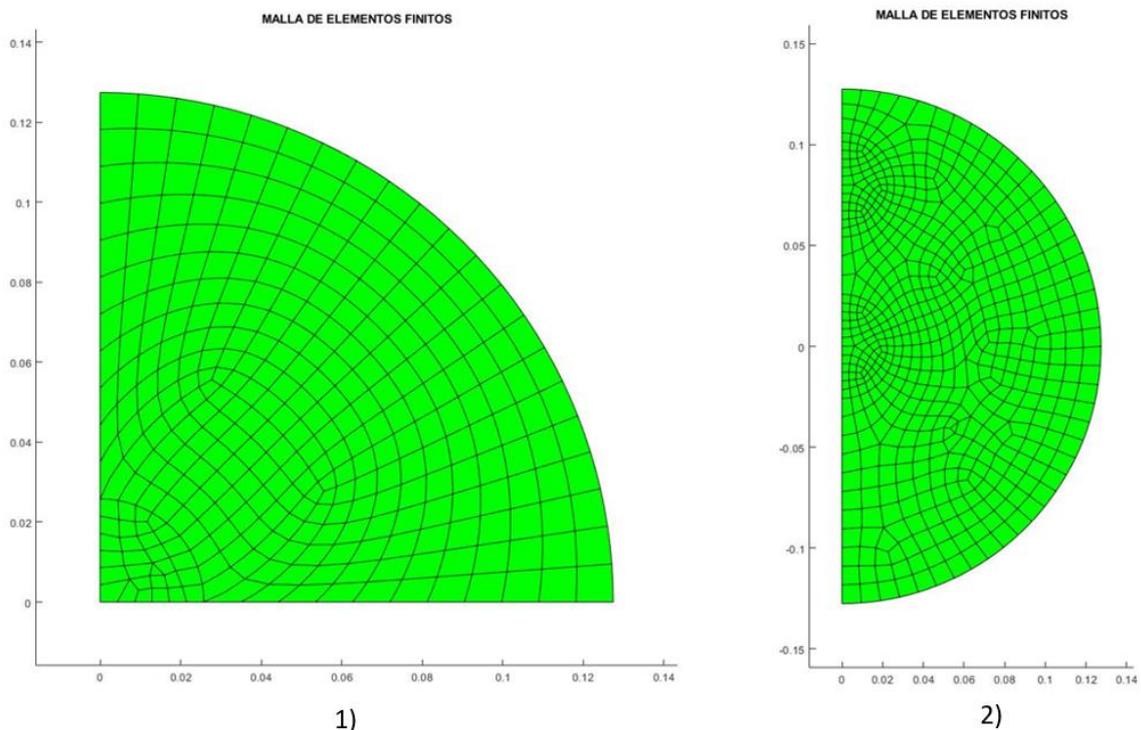


Figura 35. Mallados de los dispositivos circulares con conductos centrados 1) y con conducto de salida descentrado 2)

- 3) **Dispositivo elíptico con conductos centrados:** Debido a la doble simetría, solo se modela un cuarto de la geometría. El tamaño de elemento establecido es de 0.005 m en los conductos de entrada y salida y de 0.01 m en las cámaras. La malla está compuesta por 180 elementos y 597 nodos.
- 4) **Dispositivo elíptico con conductos de salida descentrado:** En este caso se modela un medio de la geometría debido a la simetría que presenta. El tamaño de elemento establecido es de 0.005 m en los conductos de entrada y salida y de 0.01 m en las cámaras. La malla está compuesta por 458 elementos y 1469 nodos.

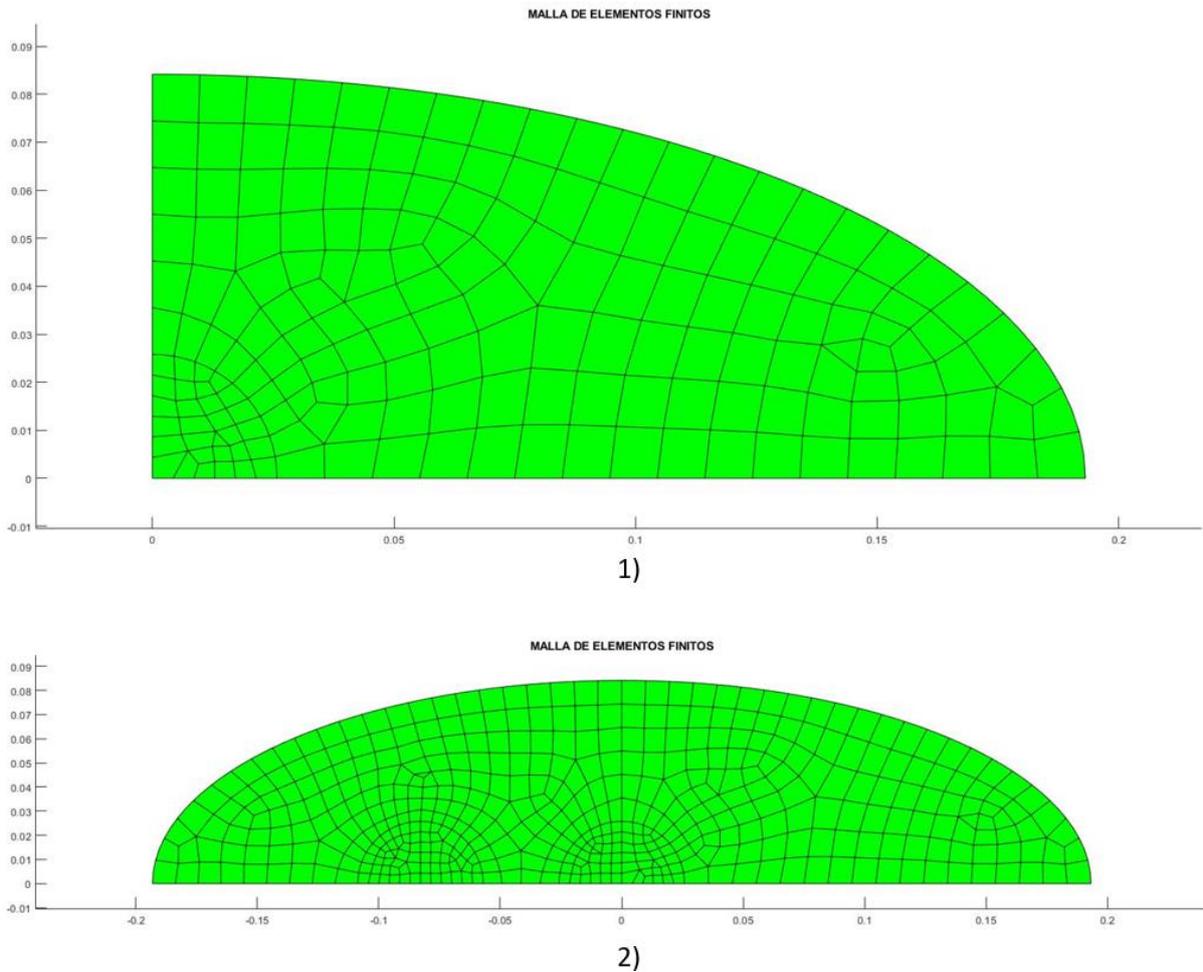


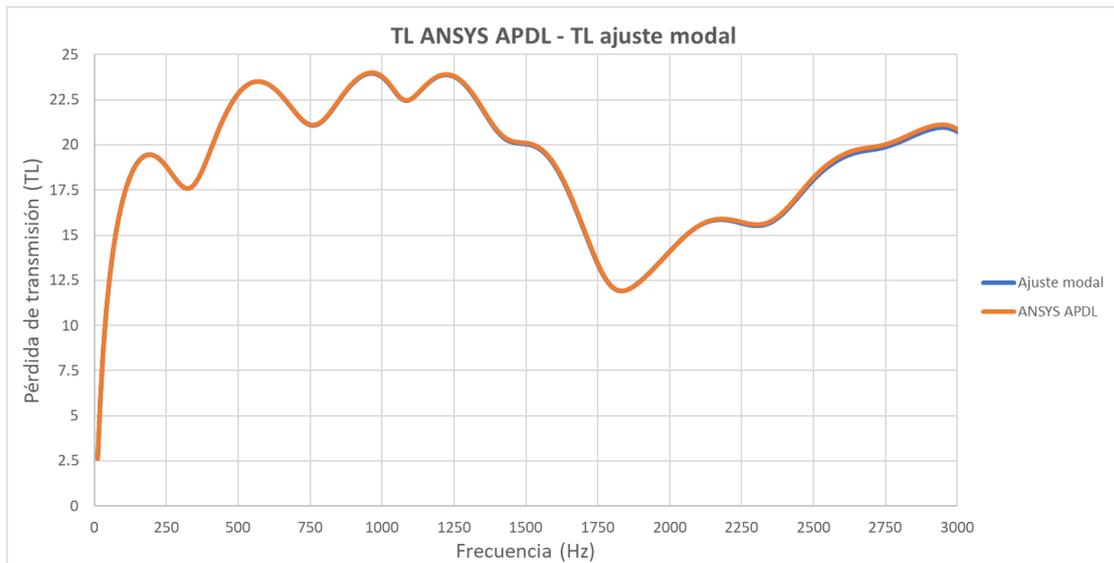
Figura 36. Mallados de los dispositivos elípticos con conductos centrados 1) y con conducto de salida descentrado 2)

7.1.1 Resultados obtenidos con la técnica de ajuste modal híbrido analítico numérico frente a los obtenidos con ANSYS APDL

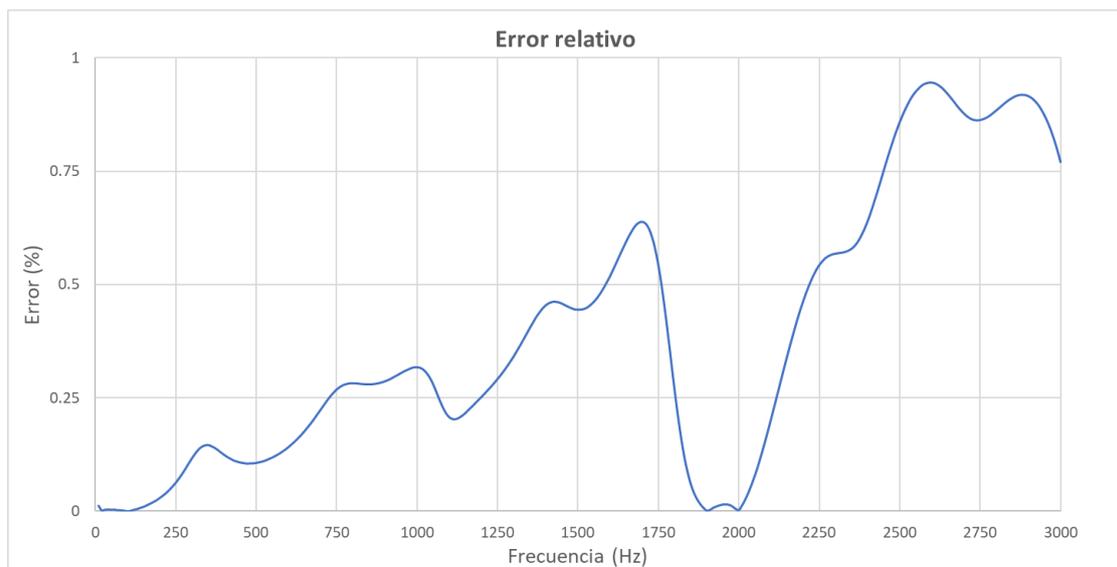
A continuación, se presentan las Gráficas que comparan para cada caso considerado los resultados obtenidos con cada una de las técnicas y el error relativo asociado. El error relativo se calcula teniendo en cuenta que el valor exacto de la TL es el obtenido mediante ANSYS APDL:

$$Error(\%) = \left(\frac{|TL_{APDL} - TL_{ajuste\ modal}|}{TL_{APDL}} \right) \cdot 100 \quad (181)$$

1) Dispositivo circular con conductos centrados y sin hollín en el DPF:



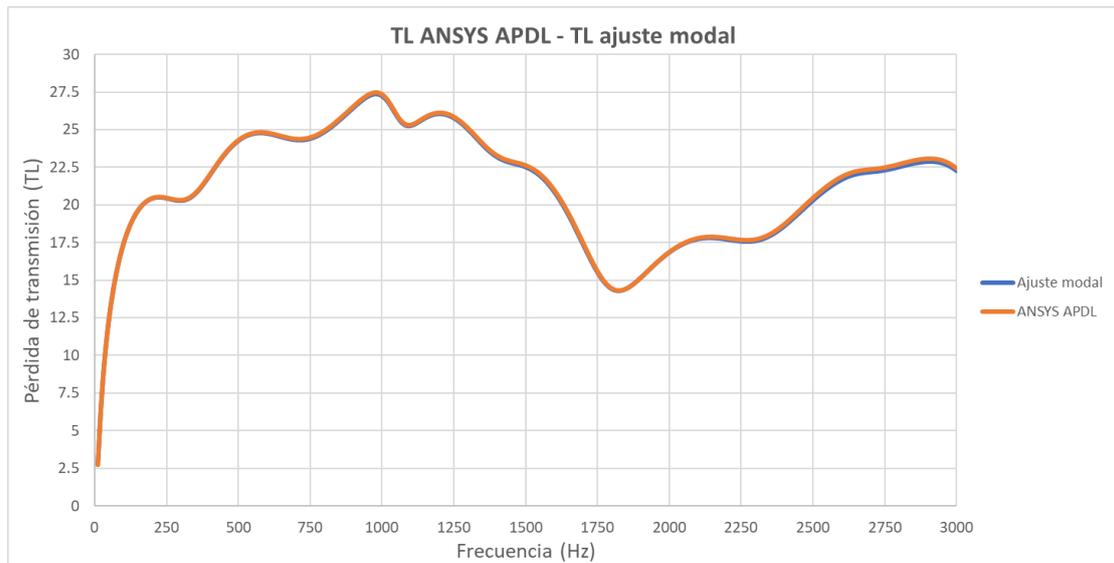
Gráfica 34. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo circular con conductos centrados y sin presencia de hollín en el DPF



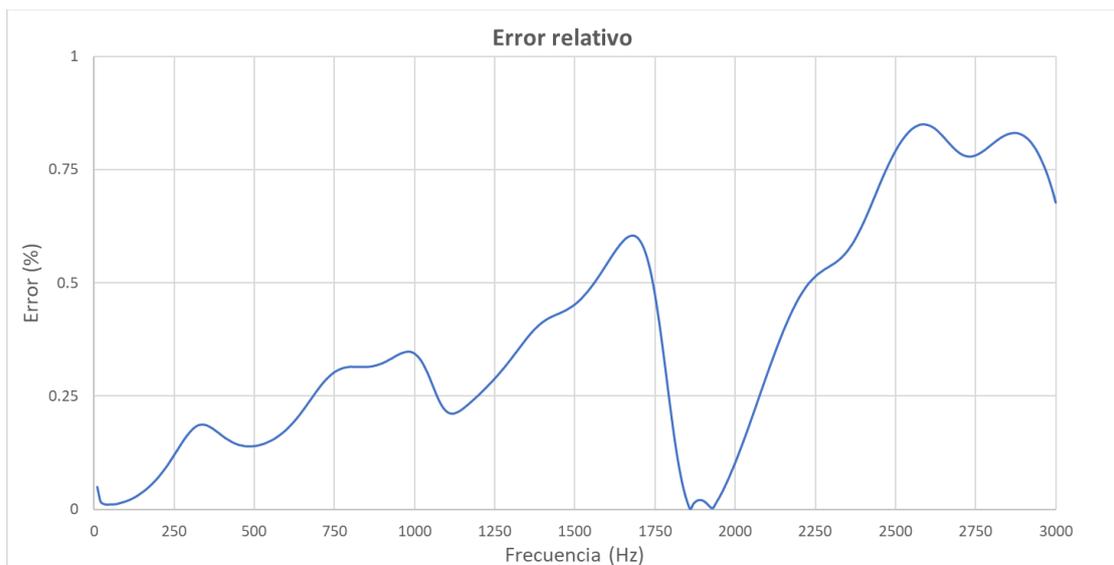
Gráfica 35. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conductos centrados y sin presencia de hollín en el DPF

El resultado arrojado haciendo uso de la técnica de ajuste modal es prácticamente el mismo que el obtenido mediante ANSYS APDL. Se puede observar algo de discrepancia entre las pérdidas de transmisión a muy altas frecuencias, donde el error relativo es del 0.945 %.

2) Dispositivo circular con conductos centrados y con hollín en el DPF:



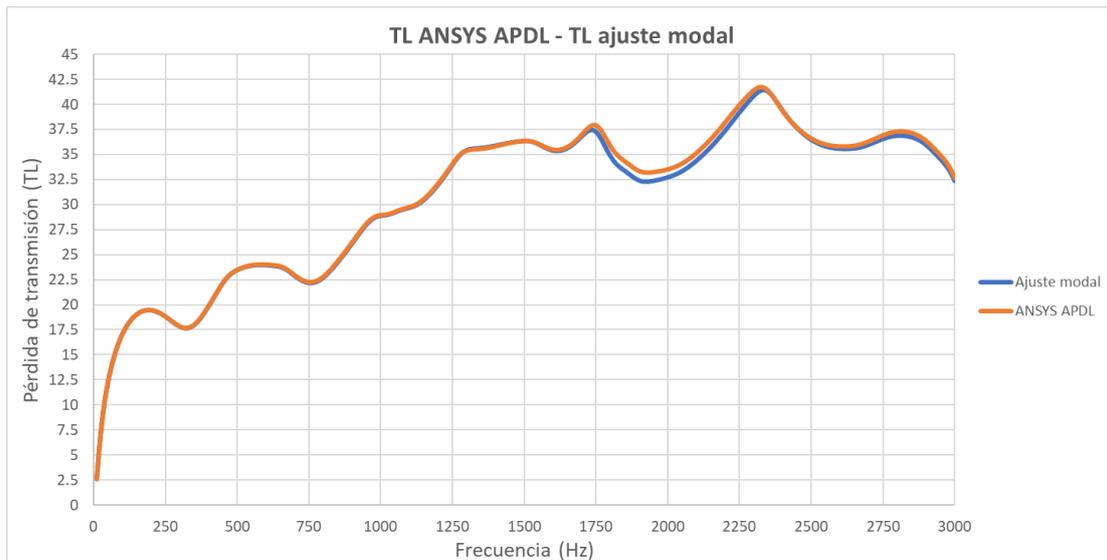
Gráfica 36. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo circular con conductos centrados y con presencia de hollín en el DPF



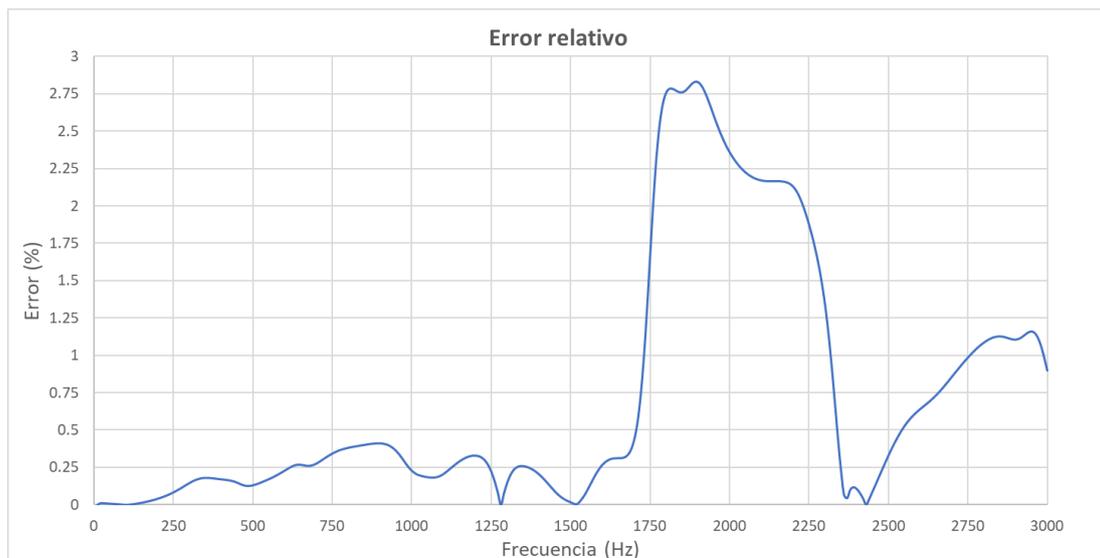
Gráfica 37. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conductos centrados y con presencia de hollín en el DPF

Ambas curvas de TL están casi superpuestas, excepcionando el rango de muy alta frecuencia, obteniendo un error relativo máximo del 0.85 %.

3) Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y sin hollín en el DPF:

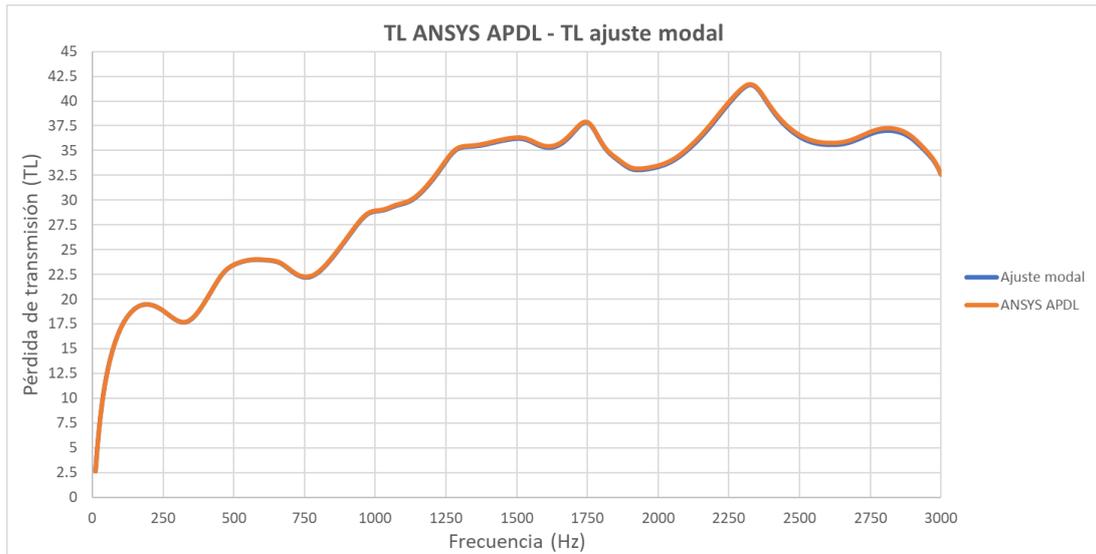


Gráfica 38. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF

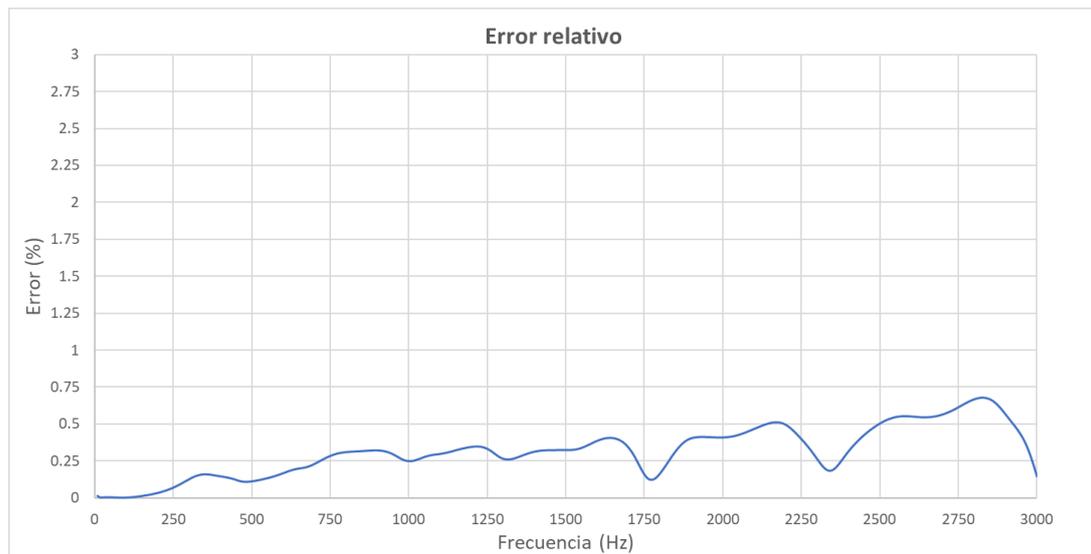


Gráfica 39. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF

En este caso ambas TLs son prácticamente iguales, pero en el rango de 1750 Hz a 2300 Hz el error es considerable, llegando a un máximo de 2.828 %. Esta discrepancia se debe al número de modos de presión transversal considerados utilizado en la técnica de ajuste modal, ya que las mallas de APDL están bastante refinadas. En este caso, el número de modos es de 20. Si se aumenta a 40 el número de modos, el coste computacional es mayor, pero el resultado obtenido es más preciso:



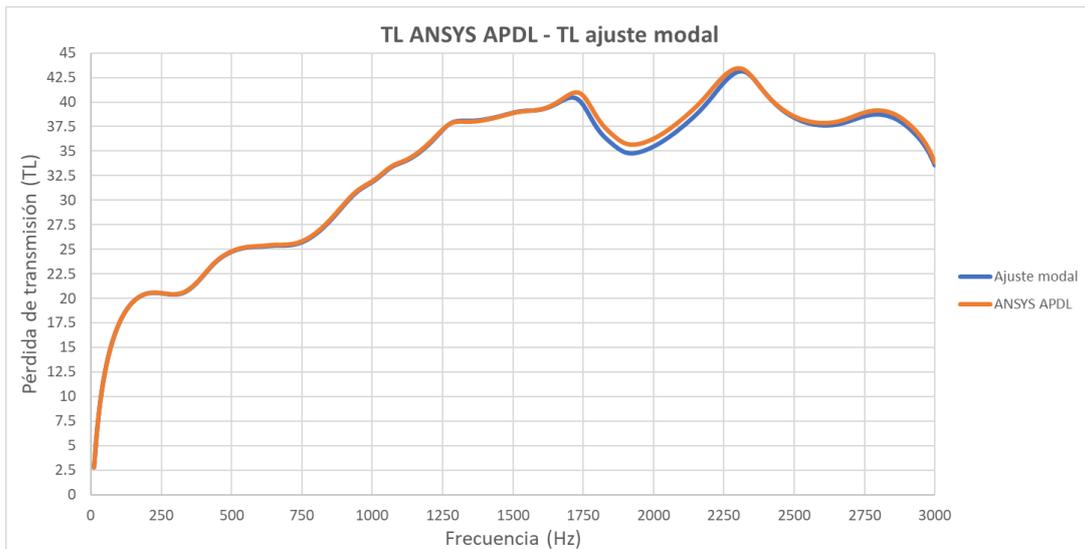
Gráfica 40. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal (40 modos). Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF



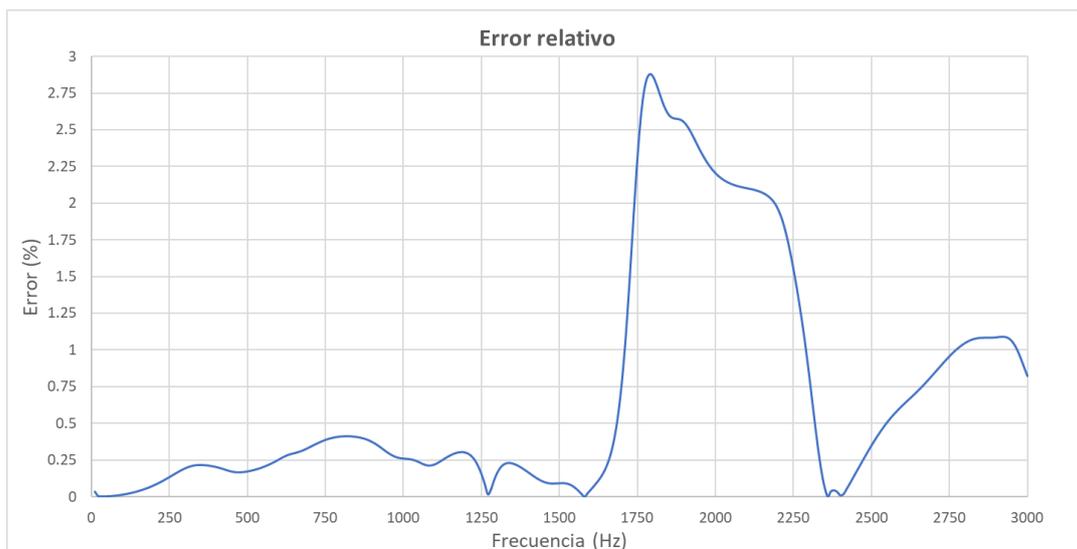
Gráfica 41. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal (40 modos) frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF

Al aumentar el número de modos las discrepancias entre ambas curvas son prácticamente inapreciable, llegando a obtener un error relativo máximo de tan solo el 0.678 %.

4) Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y con hollín en el DPF:

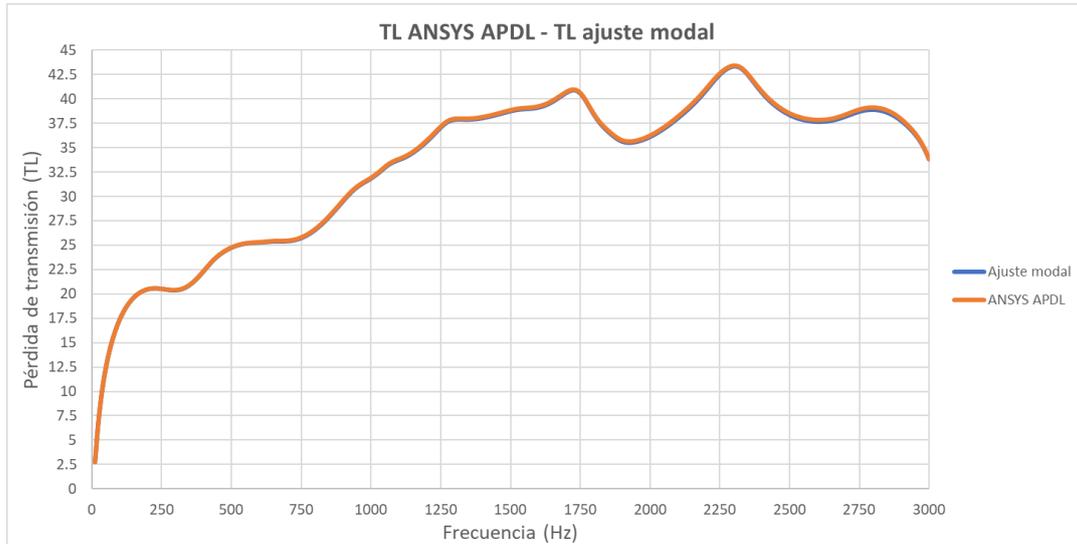


Gráfica 42. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y con presencia de hollín en el DPF

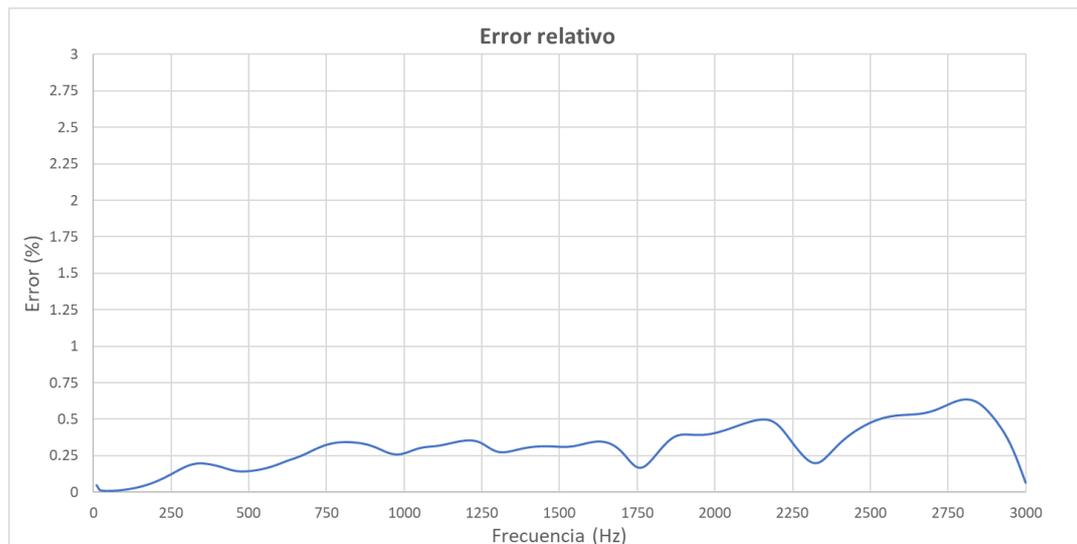


Gráfica 43. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y con presencia de hollín en el DPF

Ocurre algo muy similar al caso 3), ya que se obtiene un error relativo considerable en el rango de frecuencia de 1750 Hz a 2300 Hz. Aumentando el número de modos a 40, se obtiene que:



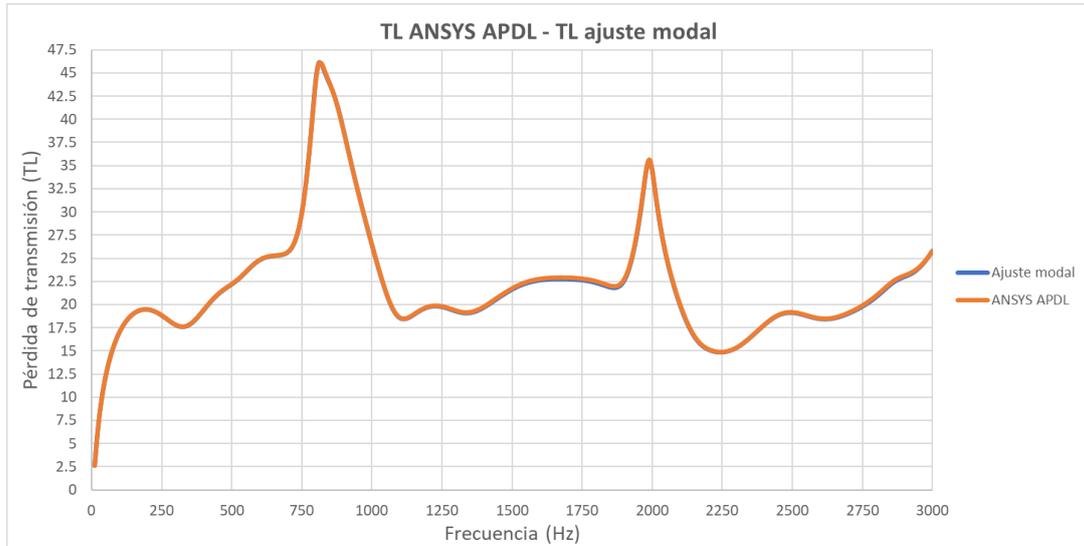
Gráfica 44. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal (40 modos). Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y con presencia de hollín en el DPF



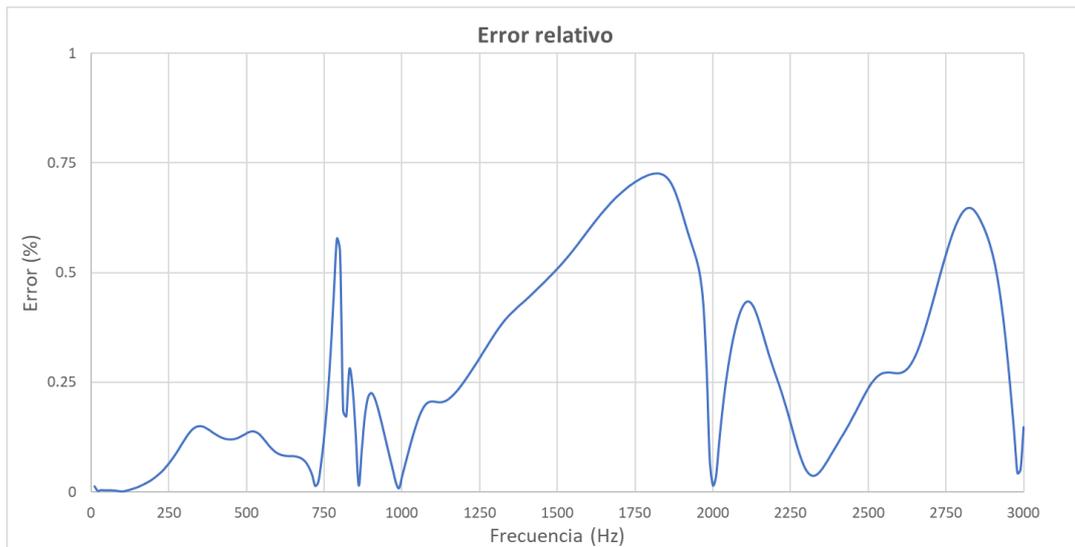
Gráfica 45. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal (40 modos) frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF

Al aumentar el número de modos, ambas pérdidas de transmisión acústica son muy próximas entre ellas. El error relativo máximo obtenido es del 0.636 %.

5) Dispositivo elíptico con conductos centrados y sin hollín en el DPF:



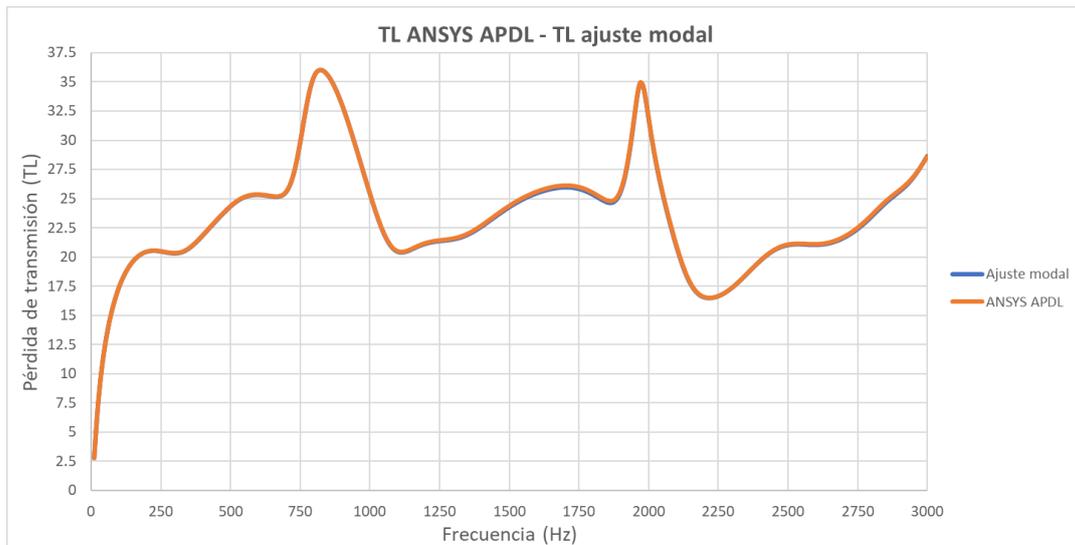
Gráfica 46. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo elíptico con conductos centrados y sin presencia de hollín en el DPF



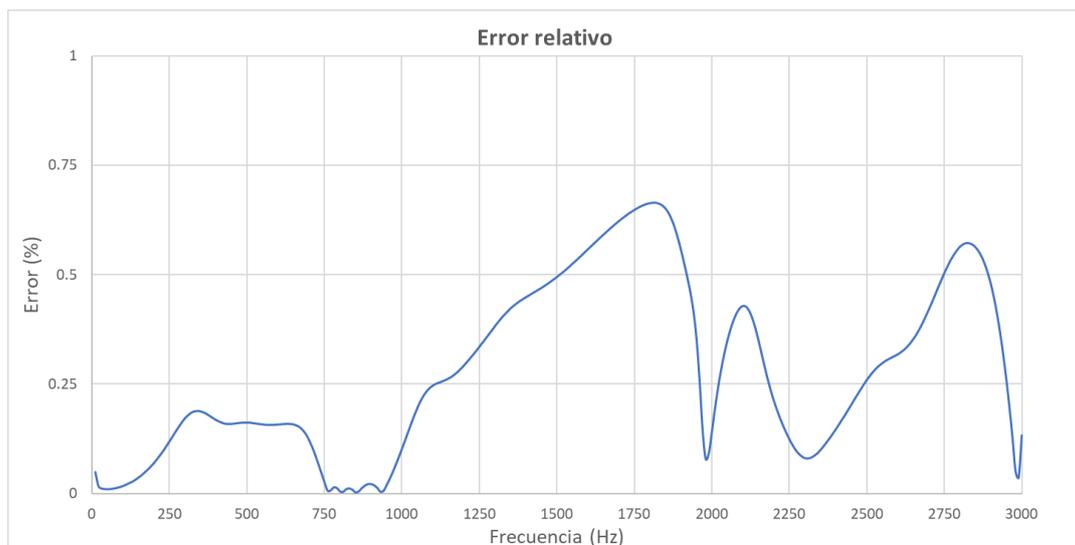
Gráfica 47. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conductos centrados y sin presencia de hollín en el DPF

En este caso las curvas están prácticamente superpuestas y el error relativo máximo cometido es solamente del 0.726 %.

6) Dispositivo elíptico con conductos centrados y con hollín en el DPF:



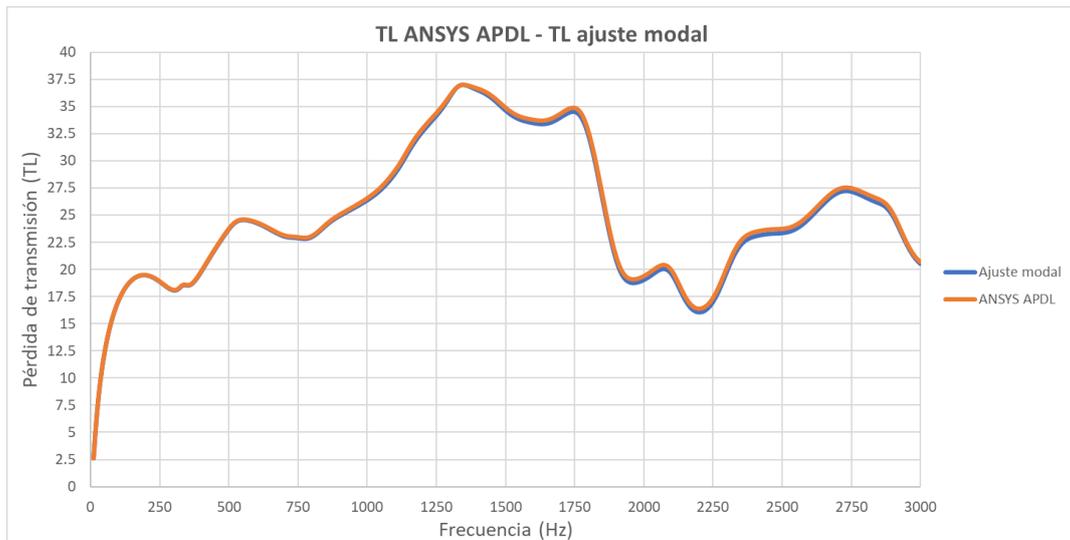
Gráfica 48. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo elíptico con conductos centrados y con presencia de hollín en el DPF



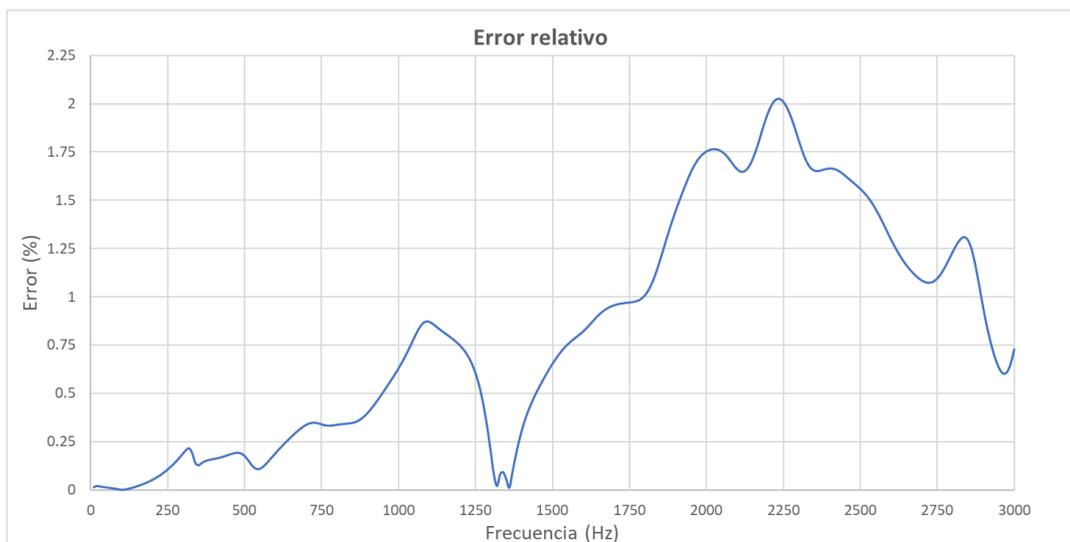
Gráfica 49. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo circular con conductos centrados y con presencia de hollín en el DPF

Las pérdidas de transmisión acústicas obtenidas con ambos métodos son muy próximas entre sí en todo el rango de frecuencia considerado. El error relativo máximo es del 0.664 %.

7) Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y sin hollín en el DPF:

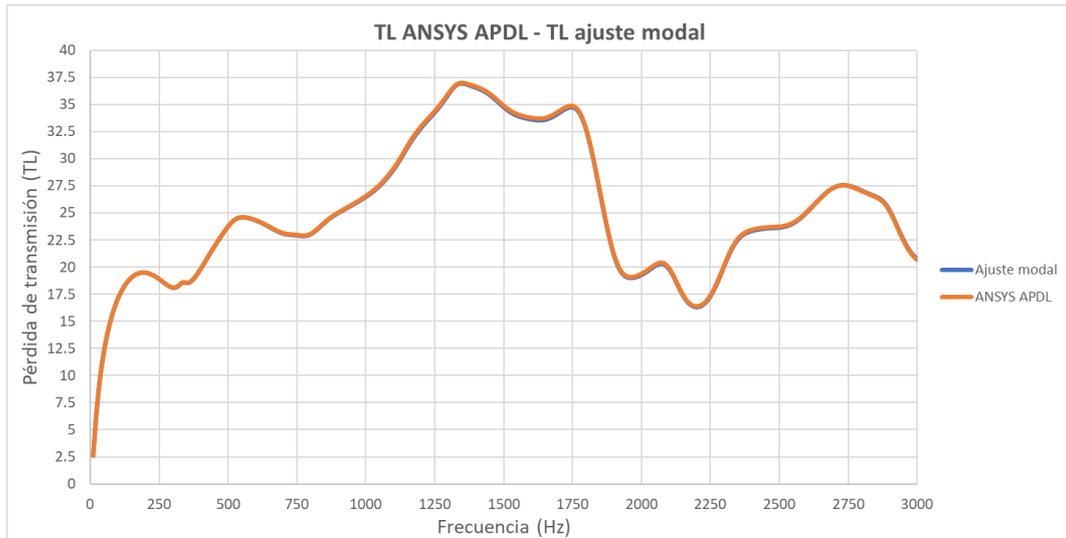


Gráfica 50. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF

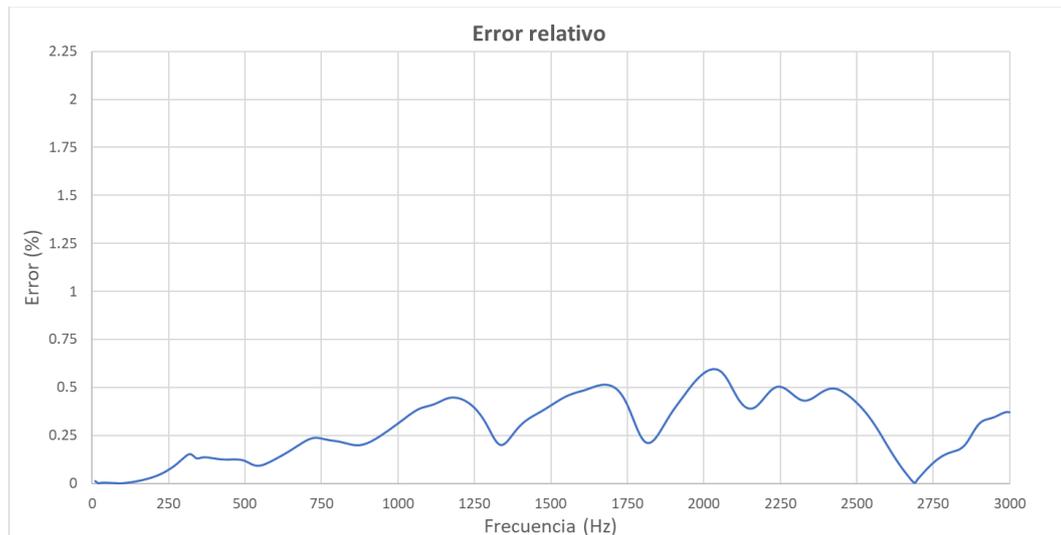


Gráfica 51. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF

Se puede apreciar en la Gráfica 50 y 51 la existencia de una diferencia notable en el rango de frecuencia 1750 Hz a 2850 Hz, por lo que se aumenta el número de modos a 40. El resultado obtenido es el siguiente:



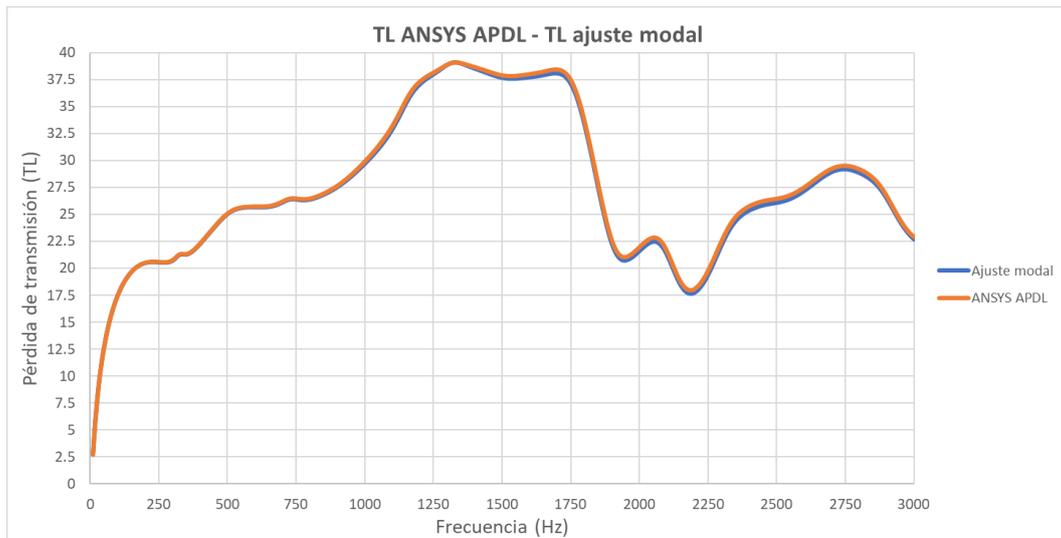
Gráfica 52. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal (40 modos). Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF



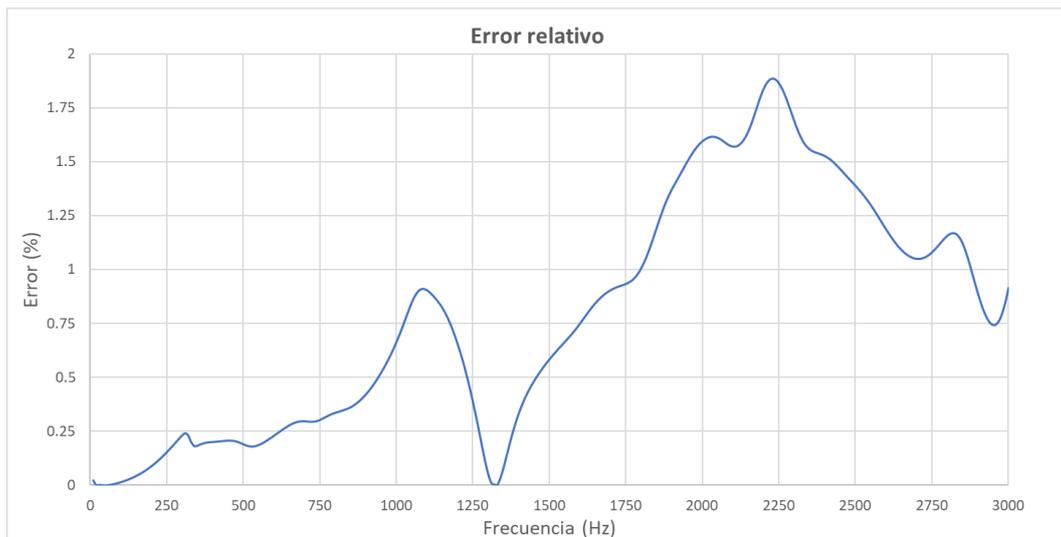
Gráfica 53. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal (40 modos) frente ANSYS APDL. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y sin presencia de hollín en el DPF

Al aumentar el número de modos de presión transversal, ambas curvas de TL son prácticamente coincidentes y se ha conseguido disminuir el error máximo cometido a 0.596 %.

8) Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y con hollín en el DPF:

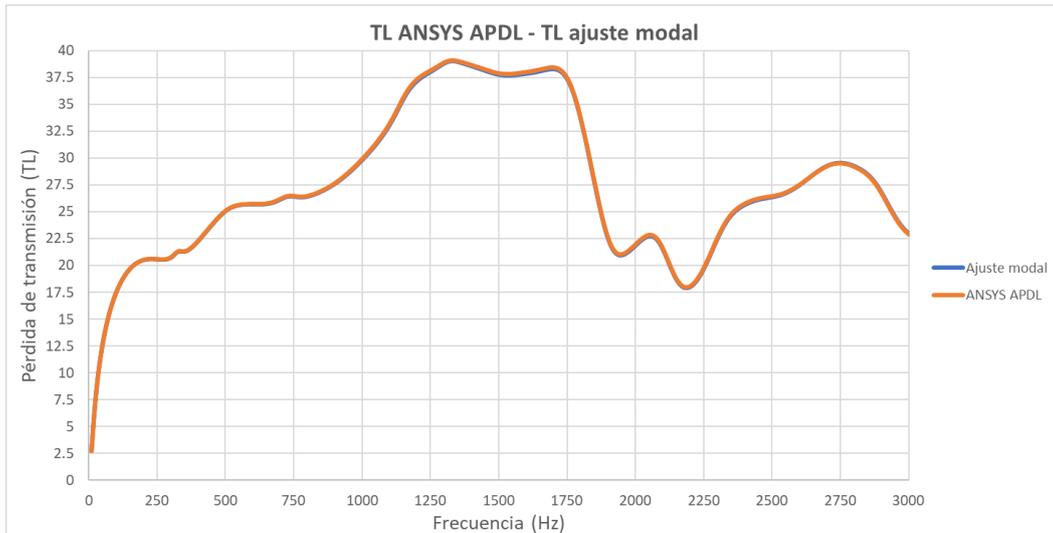


Gráfica 54. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y con presencia de hollín en el DPF

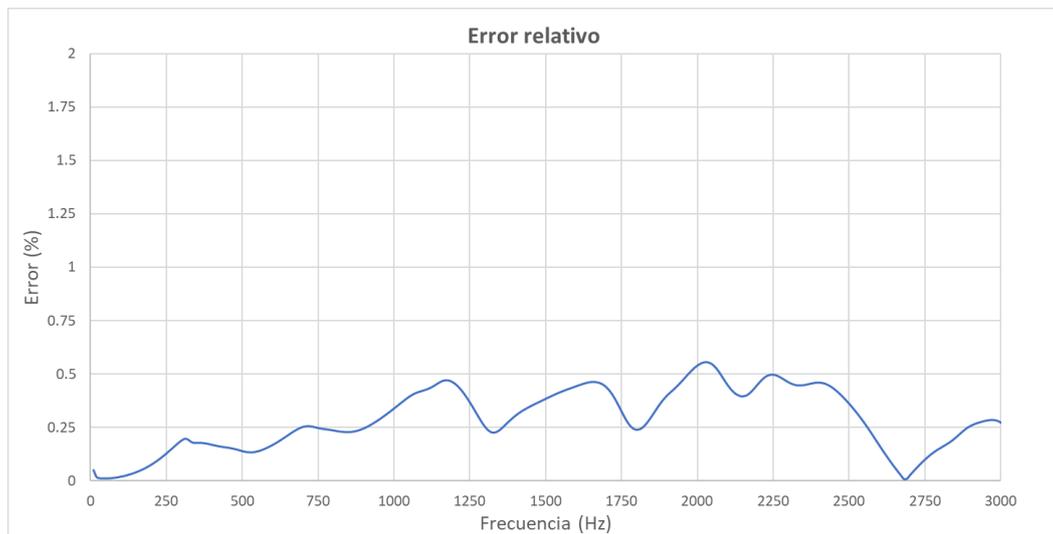


Gráfica 55. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal frente ANSYS APDL. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y con presencia de hollín en el DPF

Ocurre algo muy similar al caso anterior, ya que para altas frecuencias existe alguna discrepancia entre ambas curvas. El error relativo máximo cometido es del 1.888 %, por lo que se procede a aumentar el número de modos a 40.



Gráfica 56. TL en APDL frente TL usando técnica ajuste modal (40 modos). Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y con presencia de hollín en el DPF



Gráfica 57. Error en el cálculo de la TL usando técnica ajuste modal (40 modos) frente ANSYS APDL. Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y con presencia de hollín en el DPF

Aumentando el número de modos de presión transversal se consigue disminuir el error relativo máximo al 0.555 %, haciendo que los resultados obtenidos con ambas metodologías sean muy próximos entre sí.

Por lo tanto, con el estudio realizado en esta sección se puede afirmar que la técnica ajuste modal híbrido analítico-numérico es una metodología que proporciona resultados precisos y fiables, disminuyendo el coste computacional considerablemente frente a métodos convencionales de cálculo (unas diez veces menor). Dada la gran ventaja que ocasiona en tiempo y recursos computacionales, esta técnica se va a utilizar para optimizar acústicamente el dispositivo en unos rangos de frecuencia de trabajo, haciendo que la pérdida de transmisión acústica aumente.

8. OPTIMIZACIÓN DEL COMPORTAMIENTO ACÚSTICO MEDIANTE ALGORITMOS BASADOS EN GRADIENTE Y GENÉTICO

Demostrado que la metodología implementada para el cálculo acústico de dispositivos postratamiento con dos monolitos es fiable, precisa y que requiere un tiempo de cálculo no excesivo, se procede a continuación a optimizar la atenuación sonora del sistema en un rango de frecuencia establecido. Para ello se van a utilizar dos algoritmos incluidos en Matlab, llamados algoritmo basado en gradiente y algoritmo genético, los cuales permiten hallar las variables de diseño del dispositivo para obtener una mayor atenuación sonora. Estos algoritmos permiten tanto maximizar como minimizar la función objetivo considerada. En este caso, se utiliza una minimización del valor negativo de la pérdida de transmisión acústica ($-TL$).

El objetivo es buscar el mínimo de una función $f(x)$ teniendo en cuenta límites y restricciones sobre las variables que componen el problema:

$$\min_x f(x) \text{ tal que } \begin{cases} c(x) \leq 0 \\ ceq(x) = 0 \\ A \cdot x \leq b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \leq x \leq ub \end{cases} \quad (182)$$

donde b y beq son vectores, A y Aeq son matrices, $c(x)$ y $ceq(x)$ son funciones que devuelven vectores y $f(x)$ es una función que devuelve un escalar. $f(x)$, $ceq(x)$ y $f(x)$ pueden ser funciones no lineales. x , lb y ub se pueden pasar como vectores o matrices (Mathworks, n.d.).

Se consideran como variables de diseño a optimizar las siete siguientes:

- $x(1)$: longitud de cámara de entrada L_b .
- $x(2)$: longitud de monolito de catalizador L_c .
- $x(3)$: longitud de cámara intermedia L_d .
- $x(4)$: longitud de monolito de trampa de partículas L_e .
- $x(5)$: longitud de cámara de salida L_f .
- $x(6)$: resistividad de monolito de catalizador.
- $x(7)$: porosidad de monolito de catalizador.

8.1 ALGORITMO BASADO EN GRADIENTE

Este algoritmo determinista es una herramienta poderosa para encontrar mínimos locales y globales de funciones multivariables. El gradiente de una función, representado por las derivadas parciales, indica la dirección de mayor incremento de la función.

$$\nabla f(\Phi) = \left[\frac{\partial f(\Phi)}{\partial f(\Phi_1)}, \dots, \frac{\partial f(\Phi)}{\partial f(\Phi_n)} \right] \quad (183)$$

Para optimizar, se busca un punto donde el gradiente sea nulo, verificando si el mínimo obtenido es local o global mediante la matriz Hessiana.

$$\nabla f(\Phi_{opt}) = \left(\frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi} \right) \Big|_{\Phi=\Phi_{opt}} = 0 \quad (184)$$

Las ventajas de este algoritmo son la eficiencia computacional, ya que requiere menos evaluaciones que otros métodos de optimización; la precisión y la rápida convergencia para alcanzar una solución óptima. Las desventajas son su sensibilidad a mínimos locales y que requiere la realización de derivadas, las cuales, según su complejidad, pueden llevar a un coste computacional muy alto.

8.1.1 Algoritmo basado en gradiente “fmincon” en Matlab

El algoritmo basado en gradiente se encuentra implementado en la biblioteca de Matlab (script en Anexo V). La función “fmincon” busca encontrar el mínimo de una función multivariable no lineal restringida (Mathworks, n.d.). La sintaxis de este algoritmo es:

$$[x, fval] = \text{fmincon}(\text{fun}, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, nonlcon, options) \quad (185)$$

Donde los argumentos de entrada significan:

- **fun**: Es la función objetivo (lineal o no) que se desea minimizar, devolviendo un escalar.
- **x0**: Son los valores iniciales que toman las variables de las que depende el problema para iniciar la iteración. Se introduce mediante un vector o matriz real.
- **A**: Es una matriz real de dimensiones $M \times N$ en la se introducen las restricciones de desigualdad lineal. M es el número de desigualdades y N es el número de variables.
- **b**: Es un vector real en el que se introducen las restricciones de desigualdad lineal.
- **Aeq**: Es una matriz real de dimensiones $M \times N$ en la se introducen las restricciones de igualdad lineal. M es el número de igualdades y N es el número de variables.
- **beq**: Es un vector real en el que se introducen las restricciones de igualdad lineal.
- **lb**: Son los límites inferiores de las variables de las que depende el problema. Se introduce mediante una matriz o vector real.
- **ub**: Son los límites superiores de las variables de las que depende el problema. Se introduce mediante una matriz o vector real.
- **nonlcon**: Está relacionado con las desigualdades no lineales especificados como un identificador de función o un nombre de función. *nonlcon* es una función que acepta un vector x y devuelve dos vectores, $c(x)$ y $ceq(x)$. $c(x)$ es el vector de restricciones de desigualdad no lineales de x y $ceq(x)$ es el vector de restricciones de igualdad no lineales de x .
- **options**: Minimiza con las opciones introducidas, configuradas mediante *optimoptions*.

Por otro lado, los argumentos de salida que proporciona la función son:

- **x**: Es la solución proporcionada por la función de minimización. Puede ser un vector o matriz real, indicando los valores óptimos de las variables de las que depende el problema.
- **fval**: Es el valor de la función objetivo en la solución, devuelto como un número real.

Para la optimización de la pérdida de transmisión acústica de los dispositivos, la sintaxis utilizada es el siguiente:

$$[x, fval] = fmincon(@objetivo, x0, [], [], [], [], lb, ub, [], options)$$

El argumento de la función “@objetivo” es el valor medio o el medio minimizando la desviación típica de la TL de signo negativo, $x0$ son las variables de diseño mencionadas en el inicio de esta sección, $lb = [0.025 \ 0.050 \ 0.025 \ 0.100 \ 0.025 \ 750.00 \ 0.70]$ (cotas inferiores de las variables de diseño) y $ub = [0.100 \ 0.150 \ 0.100 \ 0.200 \ 3000.0 \ 0.95]$ (cotas superiores de las variables de diseño). Las opciones que se han introducido son las siguientes: `options = optimoptions(@fmincon,'Display','iter','Algorithm','interior-point')`, donde el algoritmo seleccionado es el de “interior-point”, garantizando que los valores iniciales de las variables estén entre los límites establecidos en lb y ub . “Display” es el nivel de visualización, se ha seleccionado la opción “iter” la cual muestra la salida en cada iteración y emite el mensaje de salida predeterminado. Dado que no se han impuesto restricciones de igualdad ni desigualdad se introduce “[]” en dichos campos.

8.2 ALGORITMO GENÉTICO

Desarrollado inicialmente por John Henry Holland y popularizado por David Goldberg en los años 1980, este algoritmo estocástico se basa en la selección natural. Simula el proceso evolutivo, generando nuevas soluciones a partir de una población inicial mediante operadores de cruzamiento y mutación. Este enfoque permite encontrar soluciones múltiples y potencialmente óptimas en problemas complejos y de gran dimensionalidad (Universidad de Sevilla, n.d.).

Su funcionamiento es el siguiente (Universidad de Sevilla, n.d.):

- En primer lugar, se origina la población inicial generando un conjunto de N individuos, los cuales podrían ser solución al problema.
- Estos individuos son evaluados mediante una función que estima la calidad de la solución representada. Esta función es la denominada función de adaptación.
- Con esta situación inicial se procede a realizar una serie de iteraciones, donde en cada una de ellas se simula la creación de una nueva generación de individuos a partir de la población anterior. En cada iteración se suceden tres fases: selección, reproducción y reemplazo.
 - Selección: Se escogen N conjuntos de individuos “criadores” en función de la aptitud de los mismo, cada uno de los cuales puede ser elegido más de una vez.
 - Reproducción: De la población intermedia formada se escoge un grupo de individuos, llamados progenitores, los cuales son sometidos a transformaciones, en virtud de las cuales se generan S nuevos individuos que constituyen la descendencia. Estos descendientes son evaluados posteriormente.
 - Reemplazo: La nueva población estará formada por N supervivientes de entre los $N + S$ supervivientes que suman la población auxiliar y descendencia, efectuado en la fase de reemplazo.

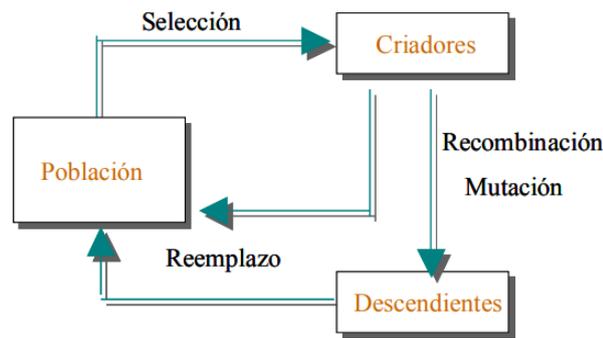


Figura 37. Flujo de individuos (Universidad de Sevilla, n.d.)

- Un proceso de los llamados elitistas siempre mantendrá en la población a los mejores R individuos obtenidos hasta el momento.
- A través de ciclos reproductivos, las soluciones de las poblaciones compiten entre ellas para evaluar cuál es la mejor (la que mejor resultado otorga).

Las ventajas de este algoritmo son la exploración global, reduciendo la probabilidad de quedar atrapado en mínimos locales; su flexibilidad, ya que puede ser utilizado en gran variedad de problemas (funciones objetivo no diferenciales o discontinuas); y su adaptabilidad. Sus desventajas son un gran coste computacional y una convergencia lenta.

8.2.1 Algoritmo genético “ga” en Matlab

El algoritmo genético se encuentra implementado en la biblioteca de Matlab (script en Anexo V). La función “ga” busca encontrar el mínimo de una función mediante este algoritmo (Mathworks, n.d.). La sintaxis de este algoritmo es:

$$[x, fval] = ga(fun, nvars, A, b, Aeq, beq, lb, ub, nonlcon, options) \quad (186)$$

Donde los argumentos de entrada significan:

- **fun**: Es la función objetivo (lineal o no) que se desea minimizar, devolviendo un escalar.
- **nvars**: Número de variables de las que depende la optimización de la función objetivo.
- **A**: Es una matriz real de dimensiones $M \times N$ en la se introducen las restricciones de desigualdad lineal. M es el número de desigualdades y N es el número de variables.
- **b**: Es un vector real en el que se introducen las restricciones de desigualdad lineal.
- **Aeq**: Es una matriz real de dimensiones $M \times N$ en la se introducen las restricciones de igualdad lineal. M es el número de igualdades y N es el número de variables.
- **beq**: Es un vector real en el que se introducen las restricciones de igualdad lineal.
- **lb**: Son los límites inferiores de las variables de las que depende el problema. Se introduce mediante una matriz o vector real.
- **ub**: Son los límites superiores de las variables de las que depende el problema. Se introduce mediante una matriz o vector real.
- **nonlcon**: Está relacionado con las desigualdades no lineales especificados como un identificador de función o un nombre de función. *nonlcon* es una función que acepta un vector x y devuelve

dos vectores, $c(x)$ y $ceq(x)$. $c(x)$ es el vector de restricciones de desigualdad no lineales de x y $ceq(x)$ es el vector de restricciones de igualdad no lineales de x .

- **options**: Minimiza con las opciones introducidas, configuradas mediante *optimoptions*.

Por otro lado, los argumentos de salida que proporciona la función son:

- **x**: Es la solución proporcionada por la función de minimización. Puede ser un vector o matriz real, indicando los valores óptimos de las variables de las que depende el problema.
- **fval**: Es el valor de la función objetivo en la solución, devuelto como un número real.

Para la optimización de la pérdida de transmisión acústica de los dispositivos, la sintaxis utilizada es el siguiente:

$$[x, fval] = ga(@objetivo, nvar, [], [], [], [], lb, ub, [], options)$$

El argumento de la función “@objetivo” es el valor medio o el medio minimizando la desviación típica de la TL de signo negativo, $nvar = 7$ (número de variables de diseño mencionadas en el inicio de esta sección), $lb = [0.025 \ 0.050 \ 0.025 \ 0.100 \ 0.025 \ 750.00 \ 0.70]$ (cotas inferiores de las variables de diseño) y $ub = [0.100 \ 0.150 \ 0.100 \ 0.200 \ 3000.0 \ 0.95]$ (cotas superiores de las variables de diseño). Las opciones que se han introducido son las siguientes: `options = optimoptions('ga','ConstraintTolerance',1e-6,'Display',... 'iter','FunctionTolerance',1e-6,... 'PlotFcn', @gaplotbestf)`, donde se ha fijado la tolerancia respecto al cumplimiento de las restricciones no lineales (“ConstraintTolerance”) en $1 \cdot 10^{-6}$. Con “FunctionTolerance” se impone el fin de la optimización si el cambio relativo promedio en el valor de la función de mejor aptitud durante las generaciones es menor que $1 \cdot 10^{-6}$. “Display” es el nivel de visualización, se ha seleccionado la opción “iter” la cual muestra la salida en cada iteración y emite el mensaje de salida predeterminado. Por último, con “PlotFcn” se trazan los cálculos realizados por el algoritmo, donde “@gaplotbestf” permite trazar el mejor valor y la puntuación media de cada generación.

8.3 RESULTADOS

A continuación, se van a mostrar los resultados de las optimizaciones realizadas con ambos algoritmos para varios casos. Las geometrías optimizadas son las circulares y las elípticas con el conducto de salida tanto centrado como descentrado, con una resistividad del catalizador de $R = 1500 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$, con las propiedades del aire y geométricas recogidas en la Tabla 3 y Tabla 4 (excentricidad $\varepsilon = 0.9$ para la geometría elíptica) y sin tener en cuenta existencia de hollín en el DPF. El rango de frecuencia seleccionado para optimizar la TL es de 700-800 Hz, ya que se ha considerado que, a priori, en la práctica corresponde al de mayor ruido proveniente de la fuente (motor de combustión interna alternativo). Para el dispositivo de sección elíptica con conductos centrados se ha considerado optimizar la pérdida de transmisión para tres rangos de frecuencias diferentes, ya que en 700-800 Hz existe un pico de TL . Estos rangos son 600-700 Hz, 850-1000 Hz y 1250-1350 Hz. El primer caso se ha realizado tanto con el algoritmo “fmincon” como con el algoritmo “ga”, mientras que los dos últimos se ha realizado únicamente con el algoritmo “fmincon” debido al alto coste computacional que requiere el algoritmo “ga”.

Diseño de una metodología precisa y eficiente para la modelización y mejora acústica de dispositivos postratamiento con dos monolitos

La geometría 1) es la circular con conductos centrados, la 2) la circular con conducto de salida descentrado, 3) la elíptica con conductos centrados y 4) la elíptica con conducto de salida descentrado. En las Tablas 5, 6 y 7 se muestran los resultados obtenidos para cada una de las optimizaciones realizadas:

RESULTADOS DE LAS VARIABLES OPTIMIZADAS CON EL ALGORITMO BASADO EN GRADIENTE										
Geometría	Rango de f (Hz)	L_b (m)	L_c (m)	L_d (m)	L_e (m)	L_f (m)	Resistividad (Pa·s/m ²)	Porosidad	TL medio (dB)	Tiempo (s)
1)	700-800	0.088843	0.150000	0.100000	0.200000	0.100000	2999.999913	0.700000	33.5323	1717.89
2)	700-800	0.088272519	0.149998286	0.099997677	0.199999838	0.099999836	2999.991178	0.700002583	34.7714	4878.29
3)	600-700	0.025131667	0.079657608	0.026181612	0.187486537	0.070743635	1873.305874	0.94063737	52.3646	1049.29
3)	850-1000	0.074205188	0.073233443	0.068447628	0.100783432	0.029359396	1874.981723	0.922707002	58.2714	1140.51
3)	1250-1350	0.025000017	0.149999993	0.099999978	0.199999993	0.099999999	2999.999726	0.949999946	28.8354	368.55
4)	700-800	0.087389109	0.149998167	0.099997505	0.199999782	0.099999817	2999.991445	0.70000265	34.0793	3482.84

Tabla 5. Resultados de la optimización con el algoritmo basado en gradiente

RESULTADOS DE LAS VARIABLES OPTIMIZADAS CON EL ALGORITMO BASADO EN GRADIENTE MINIMIZANDO LA DESVIACIÓN TÍPICA										
Geometría	Rango de f (Hz)	L_b (m)	L_c (m)	L_d (m)	L_e (m)	L_f (m)	Resistividad (Pa·s/m ²)	Porosidad	TL medio (dB)	Tiempo (s)
3)	600-700	0.025000002	0.085310342	0.025000002	0.100000003	0.085875187	750.000366	0.949999968	44.3678	703.48
3)	850-1000	0.064670501	0.065979520	0.099999999	0.100000001	0.025000000	2334.925291	0.949999997	47.3451	1556.84

Tabla 6. Resultados de la optimización con el algoritmo basado en gradiente minimizando la desviación típica

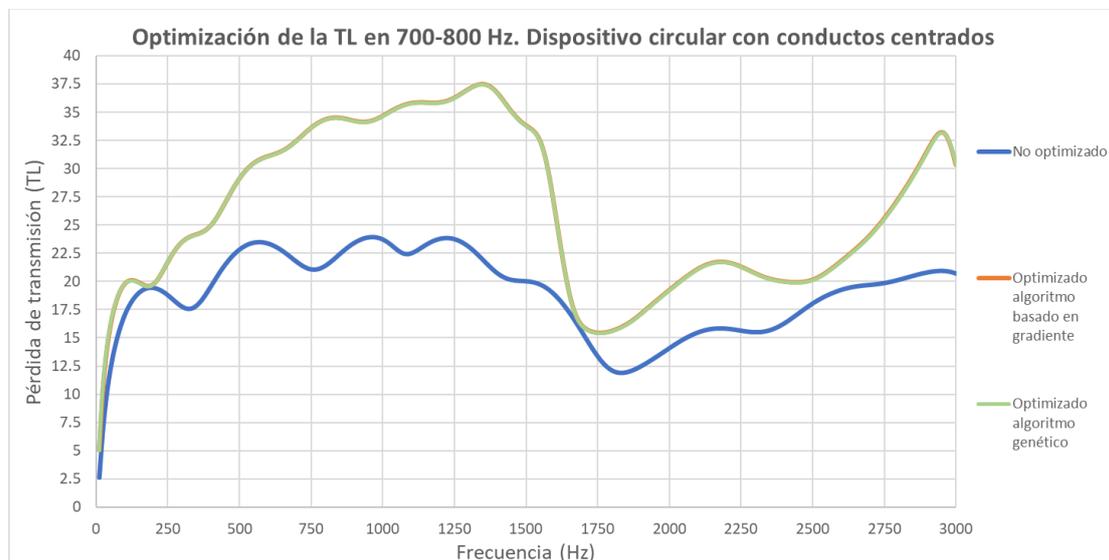
RESULTADOS DE LAS VARIABLES OPTIMIZADAS CON EL ALGORITMO GENÉTICO. GEOMETRÍA 3) MINIMIZANDO DESVIACIÓN TÍPICA										
Geometría	Rango de f (Hz)	L_b (m)	L_c (m)	L_d (m)	L_e (m)	L_f (m)	Resistividad (Pa·s/m ²)	Porosidad	TL medio (dB)	Tiempo (s)
1)	700-800	0.088844	0.149996	0.099987	0.199997	0.099997	2999.999976	0.700011	33.5319	147806.31
2)	700-800	0.08830442	0.14999792	0.09999308	0.19999608	0.099996122	2999.999	0.700005507	34.7710	888063.71
3)	600-700	0.02632413	0.09108148	0.02638093	0.1006147	0.069588458	2979.87495	0.949984836	42.6173	52980.69
4)	700-800	0.08741822	0.14999999	0.09998556	0.19999727	0.099989948	2999.99999	0.700018	34.0788	518549.58

Tabla 7. Resultados de la optimización con el algoritmo genético. Geometría 3) minimizando la desviación típica

Destacar la diferencia en el coste computacional entre un algoritmo y otro. Utilizando el algoritmo basado en gradiente se ha tardado, en el caso más desfavorable, 1 hora y 21 minutos, mientras que en el caso más desfavorable utilizando el algoritmo genético se ha demorado 10 días, 6 horas y 30 minutos.

Una vez obtenidos los resultados de las optimizaciones llevadas a cabo, se procede a resolver el problema acústico mediante la técnica de ajuste modal híbrido analítico-numérico para cada caso considerando los nuevos valores de las variables de las Tablas 5, 6 y 7. Los casos que han sido optimizados con ambos algoritmos serán representados conjuntamente con la curva de TL original, de forma que se pueda observar si un algoritmo ofrece mejores resultados que el otro y si se produce una mejora en la atenuación acústica de los dispositivos. Los resultados obtenidos de las curvas de la TL son los siguientes:

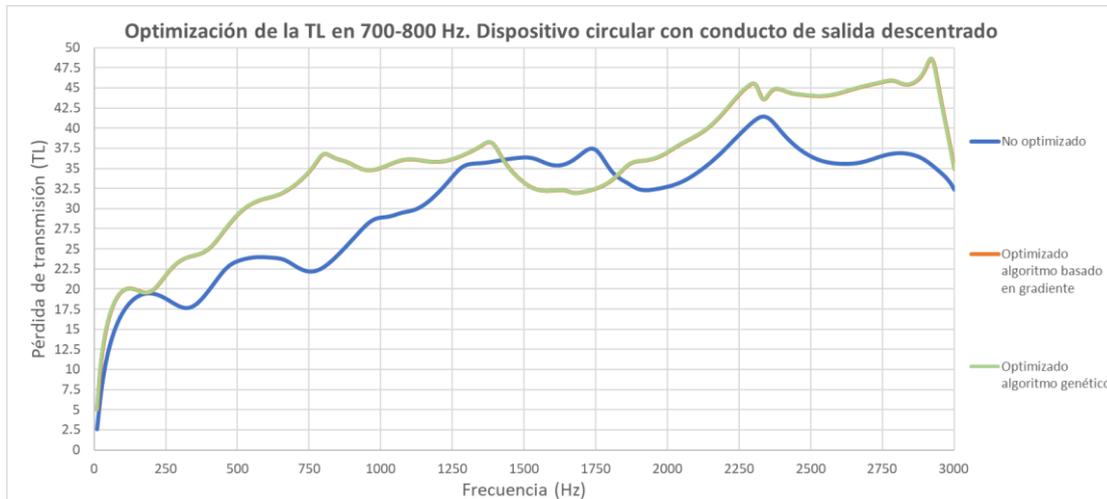
- Optimización en el rango de frecuencia 700-800 Hz en el dispositivo circular con conductos centrados:



Gráfica 58. Optimización en el rango de frecuencia 700-800 Hz en el dispositivo circular con conductos centrados con ambos algoritmos

En este caso ambos algoritmos ofrecen prácticamente el mismo resultado, ya que ambas curvas de TL están superpuestas. Aunque únicamente se ha establecido mejorar la atenuación acústica en el rango de frecuencia de 700 Hz a 800 Hz, los valores de la pérdida de transmisión acústica son mayores para todo el rango de frecuencia de estudio. Esto no siempre ocurre así, ya que al optimizar en un intervalo concreto de frecuencias, los resultados suelen empeorar en otras frecuencias. Se aprecia una gran mejora desde los 250 Hz hasta los 1600 Hz y desde los 2750 Hz hasta los 3000 Hz, llegando a casi doblar el valor de la pérdida de transmisión acústica en el rango de media frecuencia frente a la geometría original.

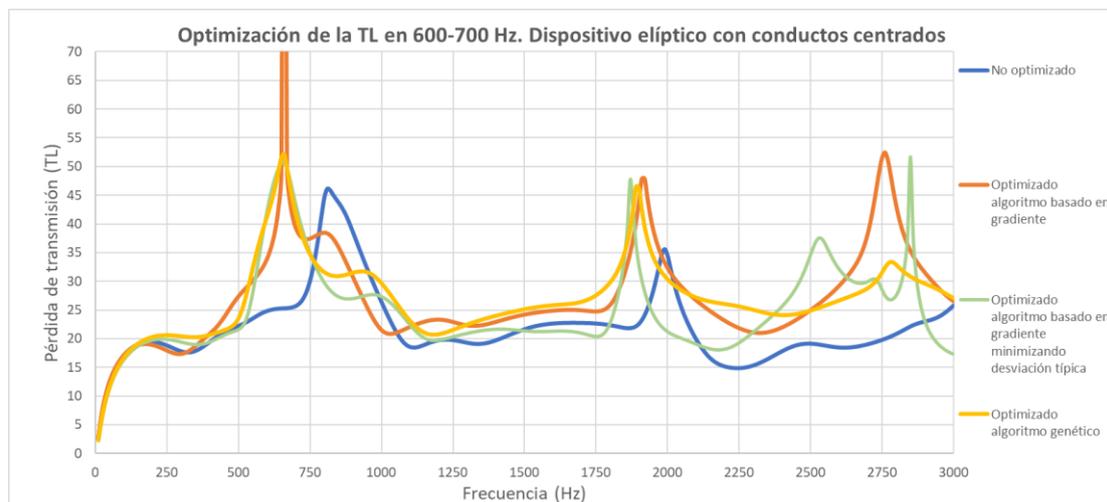
- Optimización en el rango de frecuencia 700-800 Hz en el dispositivo circular con conducto de salida descentrado:



Gráfica 59. Optimización en el rango de frecuencia 700-800 Hz en el dispositivo circular con conducto de salida descentrado con ambos algoritmos

Ambos algoritmos ofrecen casi el mismo resultado, mejorando la atenuación acústica en casi todo el rango de frecuencia de estudio. Se aprecia una gran mejora en el rango de optimización establecido de 700 Hz a 800 Hz y de 2500 Hz a 2930 Hz. Únicamente empeora la pérdida de transmisión acústica de 1440 Hz a 1830 Hz frente a la geometría original.

- Optimización en el rango de frecuencia 600-700 Hz en el dispositivo elíptico con conductos centrados:

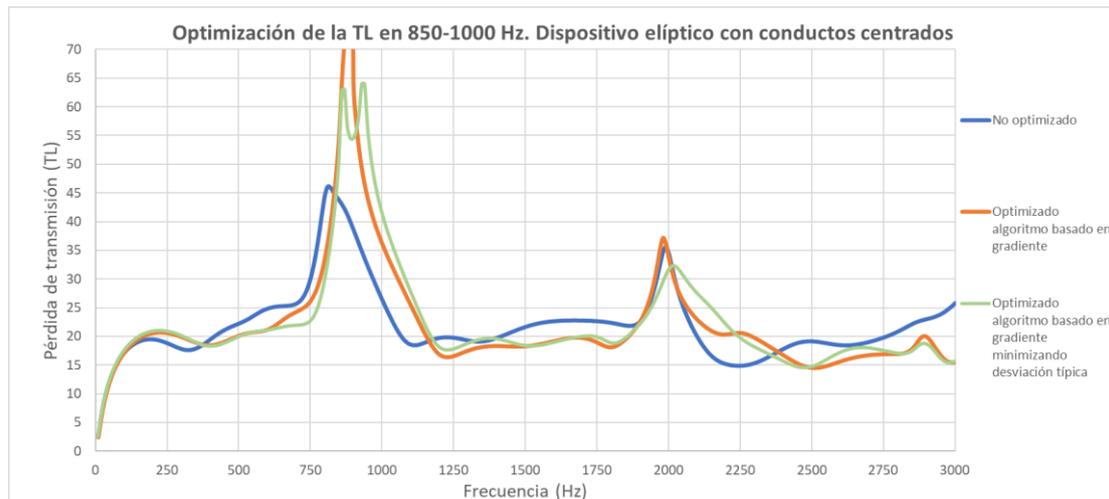


Gráfica 60. Optimización en el rango de frecuencia 600-700 Hz en el dispositivo elíptico con conductos centrados con ambos algoritmos

En este caso se han representado cuatro curvas, ya que minimizando el valor medio de la TL con el algoritmo basado en gradiente se ha obtenido una TL muy abrupta en una zona muy puntual (curva naranja), llegando a un valor de pico 164.73 dB. Esto en general no interesa, sino que es preferible que el TL sea elevado en una banda de frecuencia de mayor anchura. Por ello, se minimiza el valor medio

de la TL menos su desviación típica (curva verde). Ambos algoritmos mejoran considerablemente la atenuación acústica en el rango establecido (600-700 Hz), pero no ofrecen los mismos resultados, ya que de 750 Hz hasta 2380 Hz se obtiene mayor pérdida de transmisión acústica al optimizar con el algoritmo genético, mientras que para muy altas frecuencias el algoritmo basado en gradiente ofrece una mejor optimización. Comparando ambas optimizaciones con la solución original, se obtiene una mejor atenuación acústica en todo el rango de estudio excepto de 750 Hz a 950 Hz.

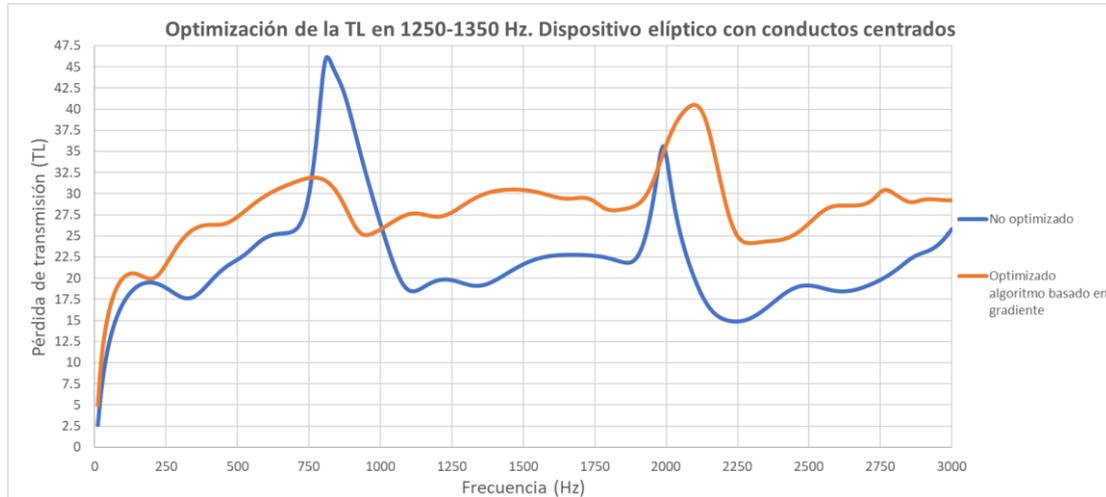
- Optimización en el rango de frecuencia 850-1000 Hz en el dispositivo elíptico con conductos centrados:



Gráfica 61. Optimización en el rango de frecuencia 850-1000 Hz en el dispositivo elíptico con conductos centrados con algoritmo basado en gradiente

Ocurre un caso similar al optimizar la minimización del valor medio de la TL , produciendo un pico de 160.95 dB (curva naranja). Por ello, se procede a minimizar el valor medio de la TL menos su desviación típica (curva verde). Se observa una clara mejora en el rango establecido a optimizar frente a la curva original, pero se obtienen peores valores en gran parte del rango de estudio (de 400 Hz a 840 Hz, de 1180 Hz a 2030 Hz y de 2360 Hz a 3000 Hz).

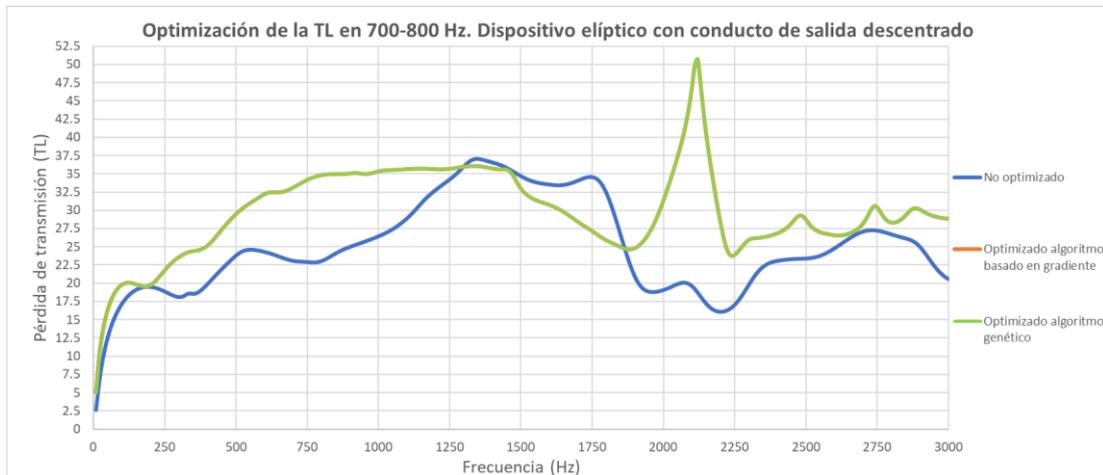
- Optimización en el rango de frecuencia 1250-1350 Hz en el dispositivo elíptico con conductos centrados:



Gráfica 62. Optimización en el rango de frecuencia 1250-1350 Hz en el dispositivo elíptico con conductos centrados con algoritmo basado en gradiente

En este caso se ha propuesto modificar la zona de media frecuencia, mejorando la atenuación considerablemente dicha zona. El nuevo valor de pérdida de transmisión acústica es mayor que el original en todo el rango de frecuencia a excepción de 750 Hz a 1000 Hz, ya que la curva original presenta un pico de TL en este rango. En definitiva, la atenuación acústica ha mejorado tanto en media como en alta frecuencia frente a la geometría original.

- Optimización en el rango de frecuencia 700-800 Hz en el dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado:



Gráfica 63. Optimización en el rango de frecuencia 700-800 Hz en el dispositivo elíptico con conducto de salida descentrados con ambos algoritmos

Ambos algoritmos de optimización convergen y arrojan prácticamente el mismo resultado. Además de mejorar la TL considerablemente en el rango de frecuencia establecido, también se mejora en gran parte del rango de frecuencia de estudio, a excepción de 1300 Hz a 1860 Hz. Destacar la gran mejora

que se produce también en la atenuación acústica en el rango de 1870 Hz a 2240 Hz, ya que mientras la curva original presenta un valle, la curva optimizada presenta un pico de alta atenuación acústica.

9. CONCLUSIONES

En este Trabajo Fin de Máster, se ha desarrollado e implementado una metodología de simulación y optimización para mejorar el comportamiento acústico de dispositivos postratamiento en sistemas de escape de motores de combustión interna, específicamente aquellos que incluyen un catalizador y un filtro de partículas (DPF). El enfoque propuesto tiene como objetivo maximizar la atenuación sonora en los rangos de frecuencia de mayor emisión de ruido del motor, abordando los desafíos del costo computacional mediante una combinación de técnicas eficientes.

El problema de la optimización acústica en sistemas de escape es susceptible de ser tratado mediante el método de elementos finitos (MEF) en su versión 3D más general, combinado con algoritmos de optimización, pudiendo ser el costo computacional de este enfoque prohibitivo debido al elevado número de grados de libertad del problema y la necesidad de aplicar el algoritmo de optimización iterativo múltiples veces. Para superar estos inconvenientes, se ha desarrollado una metodología eficiente, precisa y de bajo costo computacional basada en la técnica de ajuste modal.

Antes de haber expuesto esta técnica, se han desarrollado los modelos del comportamiento acústico de ambos monolitos mediante la creación de matrices de transferencia o cuatro polos que describen su comportamiento acústico en función de sus propiedades y geometrías y en función de las propiedades del medio. Una vez creadas las matrices de transferencia para ambos monolitos, se ha estudiado mediante la resolución del problema acústico con ANSYS APDL la influencia en la pérdida de transmisión acústica (TL) que tiene la resistividad del catalizador, la existencia de hollín en el DPF, las características geométricas y la longitud de los monolitos. De este estudio se han sacado varias conclusiones:

- La resistividad del catalizador tiene un impacto significativo en la TL , especialmente en rangos de frecuencia medios y altos. Una mayor resistividad del catalizador aumenta la disipación de energía acústica en forma de calor, aumentando así la TL .
- El hollín acumulado en las paredes del DPF incrementa la TL , ya que aumenta la resistividad de las paredes porosas, resultando en una mayor disipación de energía acústica.
- El descentrado del conducto de salida mejora la pérdida de transmisión acústica al colocar el centro del conducto sobre la línea nodal del primer modo radial de orden superior, evitando así la aparición de modos tridimensionales superiores.
- Los cambios en la sección y la excentricidad no muestran una tendencia clara en la TL a frecuencias bajas, pero a frecuencias más altas, donde se propagan modos de orden superior, las diferencias son más notables.
- Aumentar la longitud de cualesquiera de los monolitos desplaza la curva de la TL hacia frecuencias menores en la zona de baja frecuencia. Para la zona de altas frecuencias, a mayor longitud de los monolitos, mayor es la TL , ya que hay más disipación de energía acústica en forma de calor.

El tiempo de cómputo necesario para resolver estos problemas es considerable dependiendo de la geometría del modelo, ya que se hace uso del MEF. Con el fin de comprobar que la implementación de las macros de ANSYS APDL es correcta, se ha utilizado el software ANSYS Workbench, el cual ofrece

un entorno más amigable y sencillo para modelar el problema. La comparación entre los resultados ofrecidos por ambos programas de simulación ha sido prácticamente idéntica.

Para reducir el coste computacional se ha utilizado una técnica basada en ajuste modal híbrido analítico-numérico, la cual permite caracterizar acústicamente los dispositivos postratamiento de manera precisa y eficiente, combinando métodos analíticos para la propagación axial y numéricos para la caracterización de la sección transversal (problema 2D). La validación de esta técnica se ha realizado comparando sus resultados con los obtenidos exclusivamente mediante el MEF.

Una vez validada esta técnica con un coste computacional reducido, se ha desarrollado una herramienta computacional capaz de determinar los parámetros óptimos de diseño desde un punto de vista acústico. Se ha procedido a la optimización de la TL en un rango de frecuencia establecido a priori, que en la práctica correspondería al de mayor ruido proveniente de la fuente (motor de combustión interna alternativo). Las variables de diseño para llevar a cabo la optimización son: Las longitudes de las cámaras y de los monolitos y la resistividad y la porosidad del catalizador. Para ello, se ha hecho uso de los algoritmos de optimización basado en gradiente y genético que están implementados en la biblioteca de Matlab. Ambos algoritmos han convergido y dan resultados muy similares entre sí, consiguiendo que la atenuación acústica mejore en los rangos de frecuencias establecidos. Además, según el caso, la pérdida de transmisión acústica ha llegado a ser mayor en frecuencias que no han sido optimizadas y menor en otras. Destacar la diferencia entre el coste computacional entre ambos algoritmos, ya que el algoritmo basado en gradiente se mostró eficiente en términos de tiempo computacional, tardando alrededor de 1 hora y 21 minutos en el peor de los casos, mientras que el algoritmo genético es más costoso en términos computacionales (hasta 10 días y 6 horas en el peor caso).

El trabajo ha demostrado que es posible mejorar significativamente la atenuación acústica de los dispositivos postratamiento en sistemas de escape de motores de combustión interna mediante una combinación de técnicas de simulación y optimización eficientes. Las metodologías desarrolladas no solo han reducido el costo computacional, sino que también han proporcionado una herramienta robusta para el diseño acústico óptimo, considerando factores críticos como la resistividad del catalizador, la acumulación de hollín en el DPF y la geometría del dispositivo. Destacar la gran variedad de posibilidades a la hora de reducir el ruido en una zona de frecuencia considerada, ya que se pueden modelar múltiples geometrías buscando aumentar la pérdida de transmisión acústica. Esto se debe a que algunas geometrías trabajarán mejor en unos rangos de frecuencia y otras lo harán mejor en otro.

En definitiva, este trabajo proporciona una base sólida para futuras mejoras en el diseño acústico de sistemas postratamiento, contribuyendo a la reducción del ruido emitido por los motores de combustión interna y mejorando el impacto ambiental y la comodidad acústica.

10. DESARROLLOS FUTUROS

Existen diversas áreas que pueden explorarse y desarrollarse en el futuro para mejorar aún más los resultados y ampliar el alcance del TFM. A continuación, se proponen algunos futuros desarrollos potenciales:

1. Desarrollar algoritmos de optimización más robustos y adaptativos que puedan manejar variaciones en las condiciones operativas del motor, como cambios en la velocidad del motor, carga y temperatura. Resaltar la importancia de la temperatura del medio, ya que este trabajo se ha realizado con una temperatura constante del aire de 15 °C.
2. Realizar pruebas experimentales más extensas para validar los modelos y las técnicas de optimización desarrolladas. Esto podría incluir la construcción de prototipos de dispositivos postratamiento optimizados y su evaluación en condiciones reales de operación.
3. Investigar y desarrollar nuevos materiales para los catalizadores y filtros antipartículas que tengan propiedades acústicas mejoradas, como materiales con mayor capacidad de absorción acústica, manteniendo su eficacia en la reducción de emisiones.
4. Implementar técnicas de optimización multicriterio que consideren no solo la atenuación acústica, sino también otros factores relevantes como la reducción de emisiones, el costo de fabricación y la durabilidad del dispositivo. Esto proporcionaría soluciones de diseño más equilibradas y prácticas para su implementación industrial.
5. Ampliar el alcance de las simulaciones para incluir el sistema completo de escape, desde el motor hasta el escape final, considerando la interacción entre diferentes componentes del sistema y su impacto en la atenuación acústica global.

BIBLIOGRAFÍA

- Abom, M., & Allam, S. (2005). Acoustic modelling and testing of diesel particulate filters. *Elsevier*, 255–273.
- Allam, S., & Abom, M. (2006). Sound propagation in an array of narrow porous channels with application to diesel particulate filters. *JOURNAL OF VIBRATION*, 882-901.
- Allard, J. F. (1993). *Propagation of Sound in Porous Media*. Elsevier.
- AutoCrash. (09 de 05 de 2019). *RACE*. Recuperado el 29 de 04 de 2024, de <https://www.revistaautocrash.com/que-son-las-normas-euro-y-por-que-evolucionan/>
- de Prado, D. (07 de 02 de 2020). *GasComunnity*. (GasComunnity) Recuperado el 17 de 9 de 2023, de <https://gascommunity.com/como-funciona-el-convertidor-catalitico-o-catalizador/>
- Denia Guzmán, F. D., Antebas, A. G., Martínez-Casas, J., & Fuenmayor, F. J. (2009). Modelado numérico de comportamiento acústico de catalizadores. Influencia de la técnica de acoplamiento conducto/monolito en la predicción de la atenuación sonora. *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*.
- Denia Guzmán, Francisco David. (2018). *Trabajo original de investigación*. Valencia.
- Denia Guzmán, Francisco David. (2022). *Vibraciones y acústica. Bloque de acústica*. UPV.
- Denia Guzmán, Francisco David; Fuenmayor Fernández, Francisco Javier; Albelda Vitoria, José. (2001). Acoustic behaviour of elliptical chamber mufflers. *Journal of Sound and Vibration*, 401-421.
- Ibáñez. (09 de 05 de 2014). *motorpasion*. Recuperado el 05 de 11 de 2023, de <https://www.motorpasion.com/compactos/el-ocaso-del-diesel-el-filtro-de-particulas>
- IEEE. (2006). *IEEE Standard Definitions for Selected Quantities, Units, and Related Terms, with Special Attention to the International System of Units (SI)*.
- Mathworks. (n.d.). *Mathworks*. Obtenido de <https://es.mathworks.com/help/gads/ga.html>
- Mathworks. (n.d.). *Mathworks*. Obtenido de <https://es.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>
- Ochoa Pérez, J. M., & Bolaños, F. (1990). *Medida y control de ruido*. Barcelona: MARCOMBO.
- Parlamento Europeo. (20 de 06 de 2007). *eur-lex.europa.eu*. Recuperado el 29 de 04 de 2024, de <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/ES/TXT/PDF/?uri=CELEX:32007R0715>
- Prieto Amaya, Á. (30 de 06 de 2021). *autonocion*. (autonocion) Recuperado el 17 de 09 de 2023, de <https://www.autonocion.com/el-catalizador-que-es-partes-componentes-y-funcionamiento/>
- RACE. (21 de 08 de 2023). *race.es*. Recuperado el 29 de 04 de 2024, de <https://www.race.es/normativa-euro-6>
- Selamet, A., Easwaran, V., Novak, J., & Kach, R. (1998). *Wave attenuation in catalytic converters: Reactive versus dissipative effects*. *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 103.

sffoundrymaterial. (n.d.). *sffoundrymaterial*. Recuperado el 05 de 11 de 2023, de <http://es.sffoundrymaterial.com/honeycomb-ceramic/diesel-particulate-filter/soot-particulate-filter.html>

Universidad de Sevilla. (n.d.). *Los algoritmos genéticos, alegoría de la evolución natural*.

PRESUPUESTO

Esta sección presenta el desglose de los costos del proyecto. El presupuesto se ha dividido en varias unidades de obra, cada una representando una fase esencial del trabajo. Como este proyecto de investigación no incluye ensayos experimentales, los costos calculados se limitan a los equipos informáticos, el mobiliario de oficina, el software utilizado y la mano de obra requerida.

Este presupuesto es orientativo, ya que no ha sido posible contabilizar el consumo eléctrico de los medios utilizados debido a que no siempre trabajan a plena carga. Por lo general, a la hora de realizar cálculos con el ordenador, este trabaja a casi máxima potencia, por lo que se considerará un consumo de procesador (i7 9750H) + tarjeta gráfica (RTX 2060 portátil) de 100 W. A este consumo también se le añade el del monitor auxiliar (20 W) y el del flexo (5 W).

Las unidades de obra de las que se compone el presupuesto son:

- **UO 01:** Búsqueda y lectura de información.
- **UO 02:** Realización de cálculos en ANSYS APDL y ANSYS Workbench.
- **UO 03:** Realización de cálculos en Matlab.
- **UO 04:** Realización de la memoria y los planos.
- **UO 05:** Revisión del proyecto.

COSTES DE MEDIOS Y MATERIALES

Los medios y materiales que no han sido comprados para ser exclusivamente utilizados para este proyecto, se han calculados sus costes de amortización según el coste y vida útil de estos.

Mano de obra

Se ha considerado que este trabajo ha sido realizado por un Ingeniero Industrial Junior, cuyo salario anual bruto según convenio de Murcia (lugar donde se ha realizado el trabajo) es de 24363.34 €. Considerando una jornada laboral de 40 h/semana y que un año tiene 52 semanas, el coste €/h de trabajo del ingeniero es:

$$\frac{24363.34 \text{ €}}{2080 \text{ h}} = 11.71 \text{ €/h}$$

Ordenador portátil MSI GF65 Thin

El coste de este ordenador fue de 1000 €. Trabajando 40 h/semana durante una vida útil de 8 años, esto son 16640 h, por lo que el coste por unidad de tiempo es:

$$\frac{1000 \text{ €}}{16640 \text{ h}} = 0.06 \text{ €/h}$$

Ratón Ozone neon X50

El precio de este ratón es de 35 €. Se considera una vida útil de 2 años, que trabajando 40 h/semana durante se tiene un precio/hora de:

$$\frac{35 \text{ €}}{4160 \text{ h}} = 0.008 \text{ €/h}$$

Monitor auxiliar

El monitor que ha sido utilizado es el Benq GW2480, el cual tiene un coste de 100 €. Se considera que tendrá la misma vida útil que el ordenador:

$$\frac{100 \text{ €}}{16640 \text{ h}} = 0.006 \text{ €/h}$$

Silla de oficina

La silla Kitsune tiene un coste de 160 €. Se ha considerado una vida útil de 5 años trabajando durante 40 h/semana, por lo que:

$$\frac{160 \text{ €}}{10400 \text{ h}} = 0.015 \text{ €/h}$$

Escritorio y flexo

El precio del escritorio es de 400 € y el del flexo es de 30 €. A ambos se le considera una vida útil de 10 años.

$$\frac{430 \text{ €}}{20800 \text{ h}} = 0.02 \text{ €/h}$$

Material de oficina

Incluye material de escritura, folios, impresiones, etc. Se ha tomado un coste aproximado del 0.05% del coste total de las unidades de obra.

Internet

El coste del internet es de 40 €/mes.

Electricidad

Se considera tomar el coste medio de este año, el cual ronda los 0.09114 €/MWh.

Licencias de los softwares

Por un lado, se ha utilizado Microsoft Word y Microsoft Excel, los cuales tienen un precio de 99 €/año. Trabajando 40 h/semana durante un año queda que:

$$\frac{99 \text{ €}}{2080 \text{ h}} = 0.048 \text{ €/h}$$

El coste de la licencia de ANSYS ronda 30000 €/año según los paquetes seleccionados. Supone un coste por unidad horaria de:

$$\frac{30000 \text{ €}}{2080 \text{ h}} = 14.423 \text{ €/h}$$

El coste de la licencia de Matlab es de 900 €/año. Considerando las 40 h/semana durante un año se tiene que:

$$\frac{900 \text{ €}}{2080 \text{ h}} = 0.432 \text{ €/h}$$

Por último, se ha utilizado AutoCad para la realización de los planos. El coste de una licencia de este software es de 557 €/año.

$$\frac{557 \text{ €}}{2080 \text{ h}} = 0.268 \text{ €/h}$$

Mantenimiento de materiales y equipos

Se ha considerado un coste del 1% del coste de las unidades de obra para el mantenimiento de los equipos y materiales utilizados.

COSTE DE LAS UNIDADES DE OBRA

En esta sección se han calculado los costes asociados a cada unidad de obra del proyecto.

UO 01		BÚSQUEDA Y LECTURA DE INFORMACIÓN			
Orden	Descripción	Ud.	Medición	Coste/ud (€)	Coste total (€)
1.1	Ingeniero Industrial Junior	h	30	11.71	351.30
1.2	Ordenador	h	30	0.06	1.80
1.3	Ratón	h	30	0.008	0.24
1.4	Monitor auxiliar	h	30	0.006	0.18
1.5	Silla de oficina	h	30	0.015	0.45
1.6	Escritorio y flexo	h	30	0.02	0.60
1.7	Electricidad	kWh	3.75	0.09114	0.34
1.8	Microsoft Office	h	5	0.048	0.24
Coste total UO 01 (€)					355.15

Tabla 8. Coste de la UO 01

UO 02 REALIZACIÓN DE CÁLCULOS EN ANSYS APDL Y ANSYS WORKBENCH					
Orden	Descripción	Ud.	Medición	Coste/ud (€)	Coste total (€)
2.1	Ingeniero Industrial Junior	h	15	11.71	175.65
2.2	Ordenador	h	15	0.06	0.90
2.3	Ratón	h	15	0.008	0.12
2.4	Monitor auxiliar	h	15	0.006	0.09
2.5	Silla de oficina	h	15	0.015	0.23
2.6	Escritorio y flexo	h	15	0.02	0.30
2.7	Electricidad	kWh	1.875	0.09114	0.17
2.8	Microsoft Office	h	2	0.048	0.10
2.9	ANSYS	h	13	14.423	187.50
Coste total UO 02 (€)					365.05

Tabla 9. Coste de la UO 02

UO 03 REALIZACIÓN DE CÁLCULOS EN MATLAB					
Orden	Descripción	Ud.	Medición	Coste/ud (€)	Coste total (€)
2.1	Ingeniero Industrial Junior	h	460	11.71	5386.60
2.2	Ordenador	h	460	0.06	27.60
2.3	Ratón	h	460	0.008	3.68
2.4	Monitor auxiliar	h	460	0.006	2.76
2.5	Silla de oficina	h	460	0.015	6.90
2.6	Escritorio y flexo	h	460	0.02	9.20
2.7	Electricidad	kWh	56.25	0.09114	5.13
2.8	Microsoft Office	h	5	0.048	0.24
2.9	Matlab	h	455	14.423	6562.47
Coste total UO 03 (€)					12004.57

Tabla 10. Coste de la UO 03

UO 04 REALIZACIÓN DE LA MEMORIA Y LOS PLANOS					
Orden	Descripción	Ud.	Medición	Coste/ud (€)	Coste total (€)
2.1	Ingeniero Industrial Junior	h	100	11.71	1171.00
2.2	Ordenador	h	100	0.06	6.00
2.3	Ratón	h	100	0.008	0.80
2.4	Monitor auxiliar	h	100	0.006	0.60
2.5	Silla de oficina	h	100	0.015	1.50
2.6	Escritorio y flexo	h	100	0.02	2.00
2.7	Electricidad	kWh	12.5	0.09114	1.14
2.8	Microsoft Office	h	100	0.048	4.80
2.9	AutoCad	h	4	0.268	1.07
Coste total UO 04 (€)					1188.91

Tabla 11. Coste de la UO 04

UO 05	REVISIÓN DEL PROYECTO				
Orden	Descripción	Ud.	Medición	Coste/ud (€)	Coste total (€)
2.1	Ingeniero Industrial Junior	h	10	11.71	117.10
2.2	Ordenador	h	10	0.06	0.60
2.3	Ratón	h	10	0.008	0.08
2.4	Monitor auxiliar	h	10	0.006	0.06
2.5	Silla de oficina	h	10	0.015	0.15
2.6	Escritorio y flexo	h	10	0.02	0.20
2.7	Electricidad	kWh	1.25	0.09114	0.11
2.8	Microsoft Office	h	100	0.048	4.80
Coste total UO 05 (€)					123.10

Tabla 12. Coste de la UO 05

PRESUPUESTO TOTAL

El coste total del presupuesto de ejecución consta del precio de la suma de las diferentes unidades de obra más el coste del material de oficina y mantenimiento de materiales y equipos y dos meses de internet. A este sumatorio se le aplica adicionalmente un 13% de gastos generales y un 6% de beneficio industrial y, por último, un IVA del 21%:

REALIZACION DE LA MEMORIA Y LOS PLANOS	
Descripción	Coste (€)
UO 01: Búsqueda y lectura de información	355.15
UO 02: Realización de cálculos en ANSYS APDL y ANSYS Workbench	365.05
UO 03: Realización de cálculos en Matlab	12004.57
UO 04: Realización de la memoria y los planos	1188.91
UO 05: Revisión del proyecto	123.10
Coste total UO (€)	14036.79
Material de oficina (0.5%)	70.18
Mantenimiento de materiales y equipos (1%)	140.36
Internet	80.00
Presupuesto de ejecución material (€)	14327.34
Gastos generales (13%)	1862.55
Beneficio industrial (6%)	859.64
Presupuesto de ejecución por contrata (€)	17049.54
IVA (21%)	3580.40
PRESUPUESTO TOTAL DEL PROYECTO (€)	20629.94

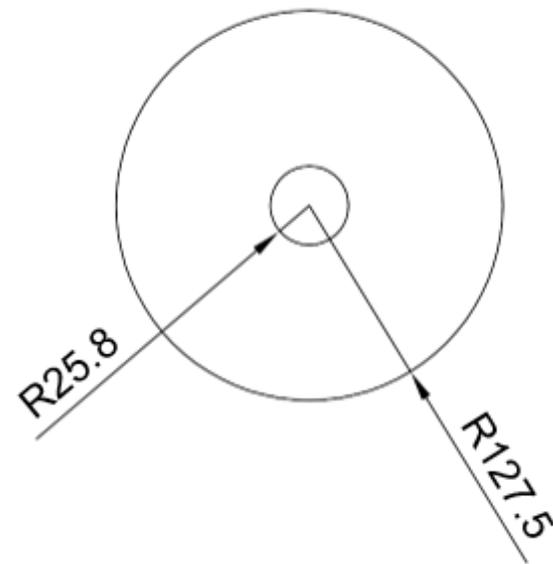
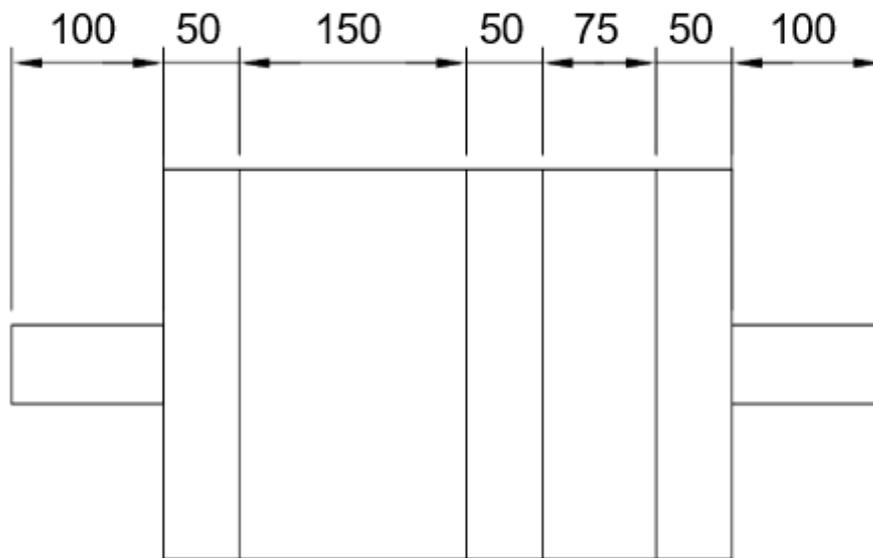
Tabla 13. Presupuesto total del proyecto

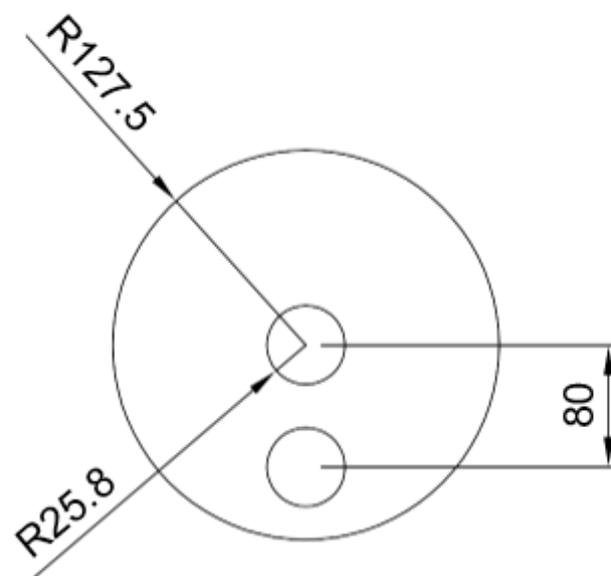
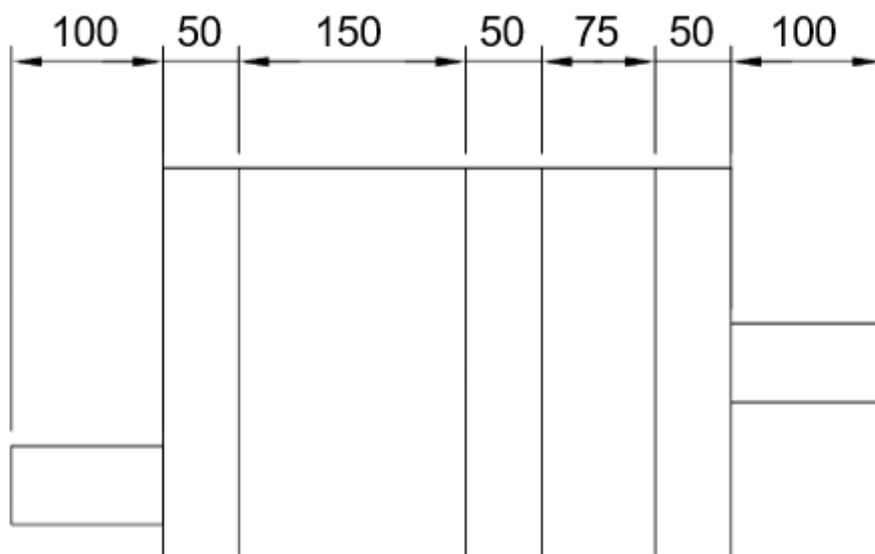
El presupuesto del proyecto asciende a **VEINTE MIL SEISCIENTOS VEINTINUEVE EUROS CON NOVENTA Y CUATRO CÉNTIMOS.**

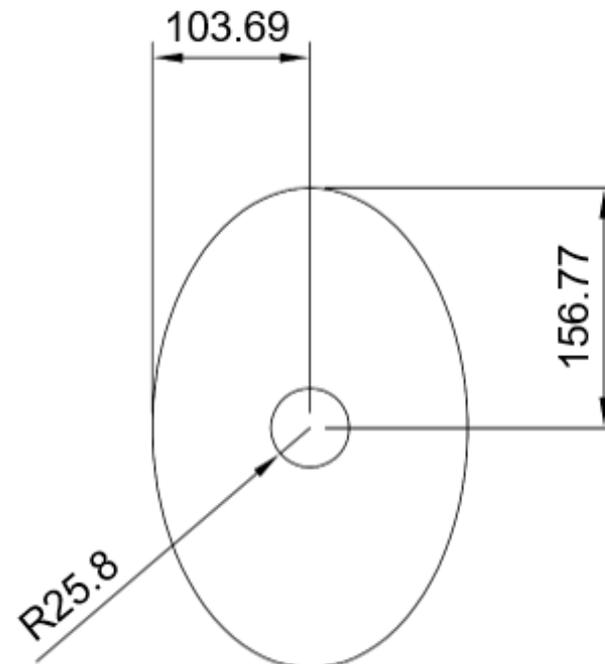
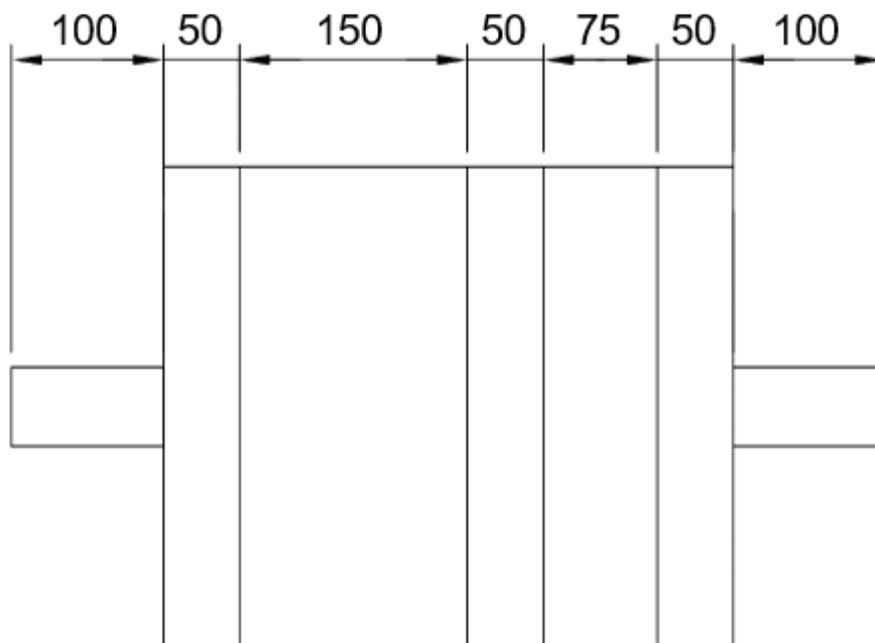
PLANOS

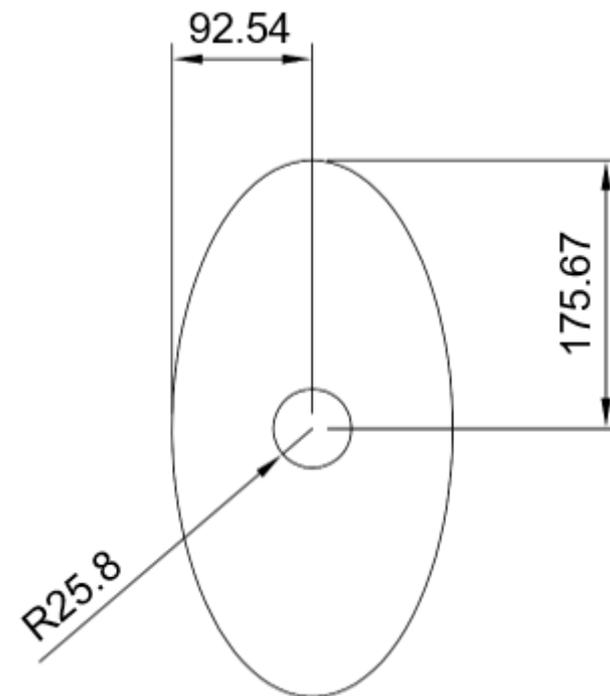
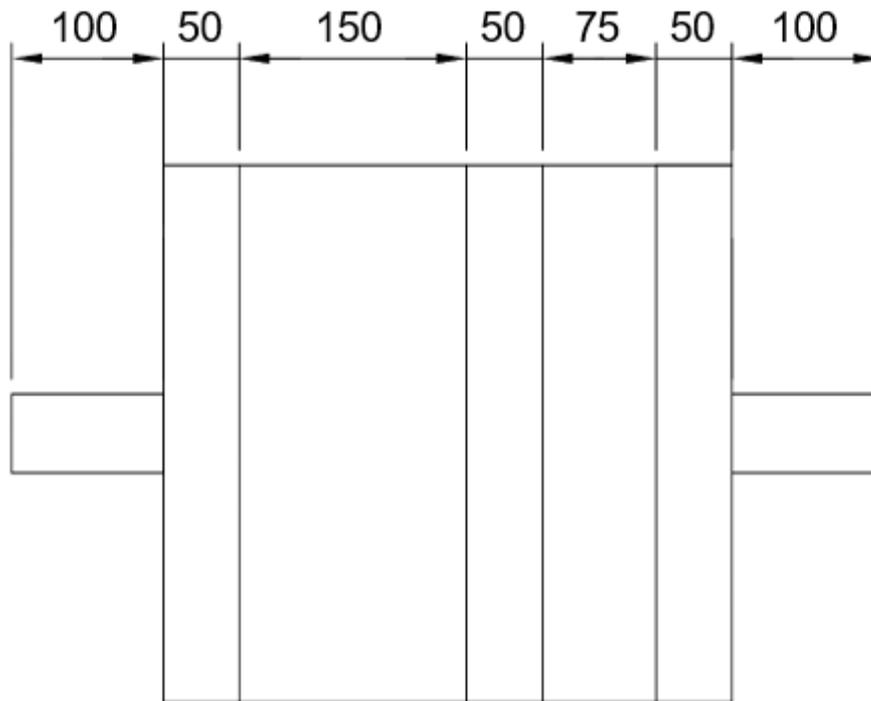
En esta sección se presentan los planos de los dispositivos postratamiento estudiados antes de ser optimizados para mejorar su atenuación acústica. Las unidades de las acotaciones están en mm.

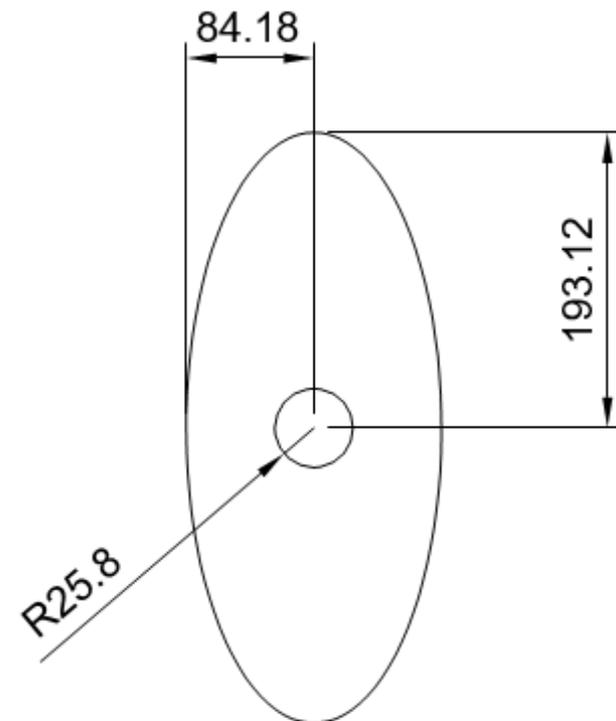
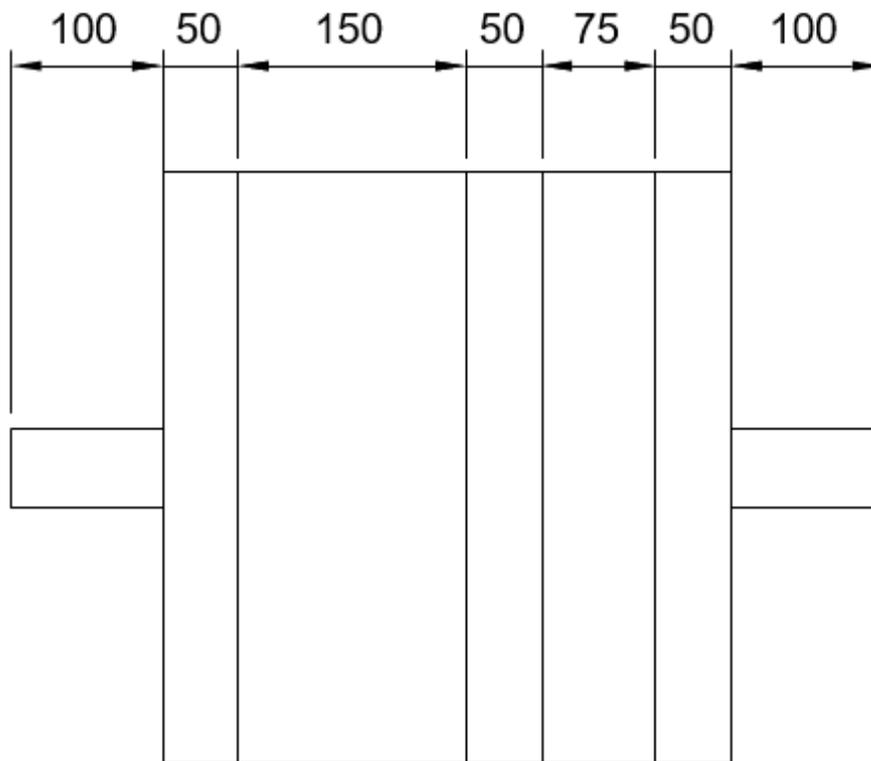
- **Plano 1:** Dispositivo circular con conductos centrados.
- **Plano 2:** Dispositivo circular con conducto de salida descentrado.
- **Plano 3:** Dispositivo elíptico con conductos centrados y $\varepsilon = 0.75$.
- **Plano 4:** Dispositivo elíptico con conductos centrados y $\varepsilon = 0.85$.
- **Plano 5:** Dispositivo elíptico con conductos centrados y $\varepsilon = 0.90$.
- **Plano 6:** Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y $\varepsilon = 0.75$.
- **Plano 7:** Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y $\varepsilon = 0.85$.
- **Plano 8:** Dispositivo elíptico con conducto de salida descentrado y $\varepsilon = 0.90$.

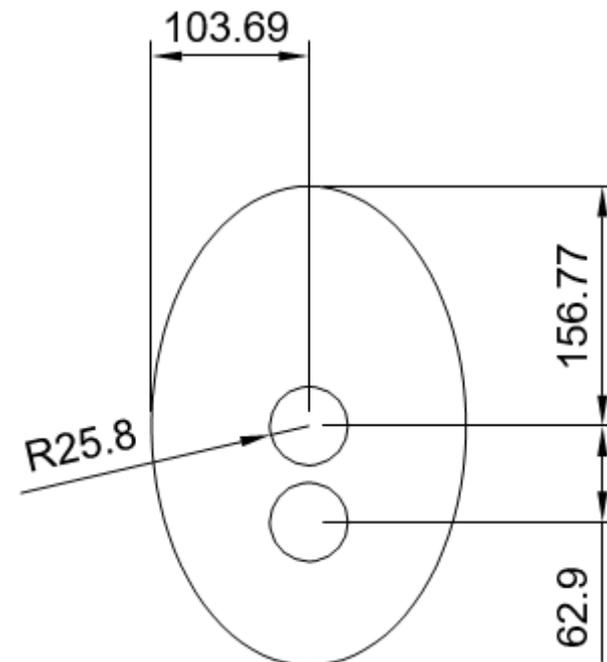
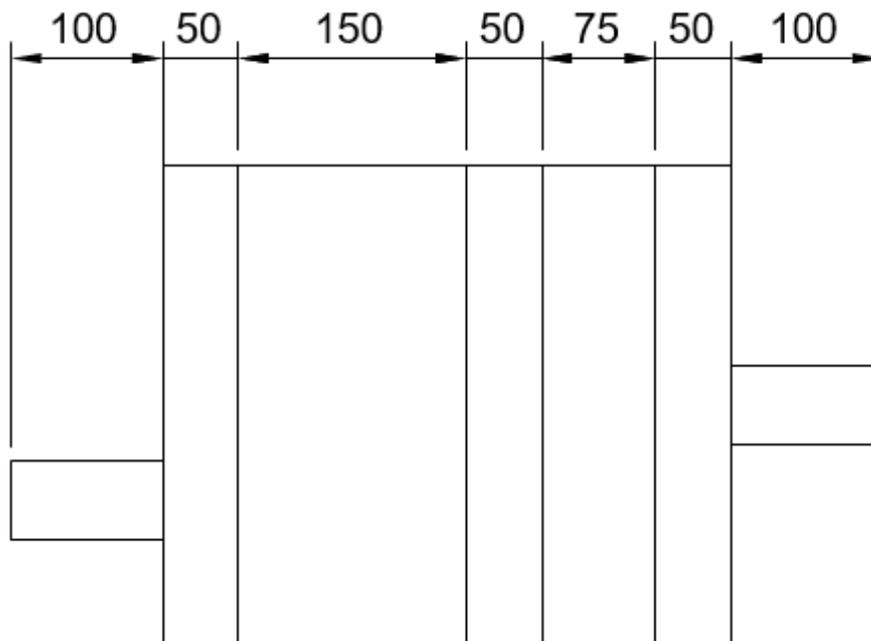


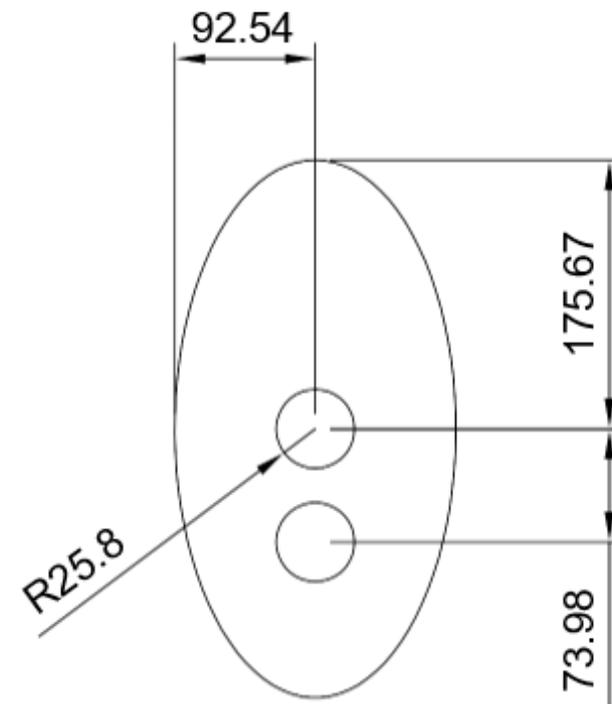
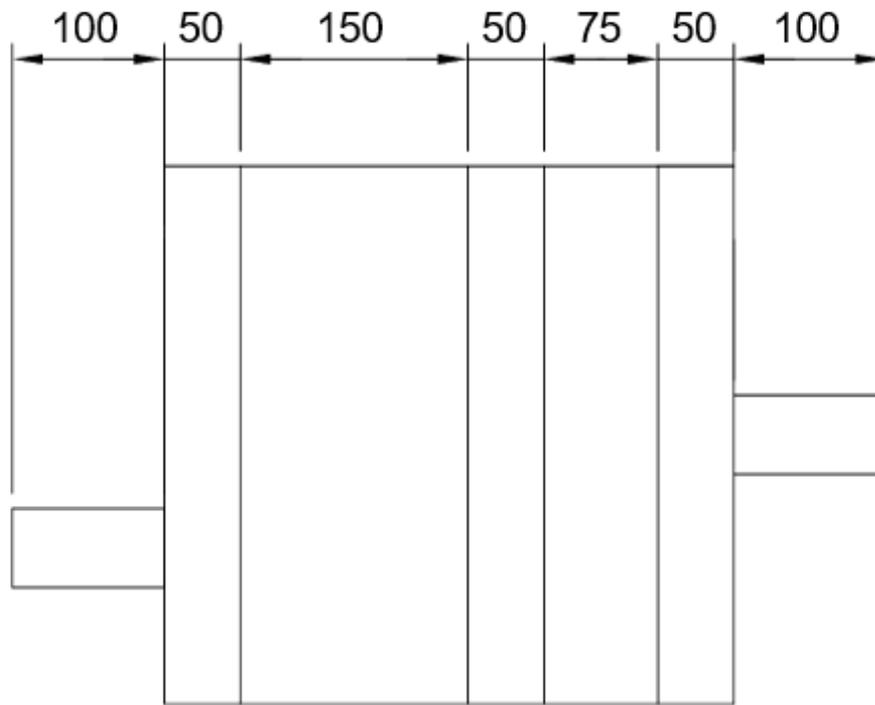


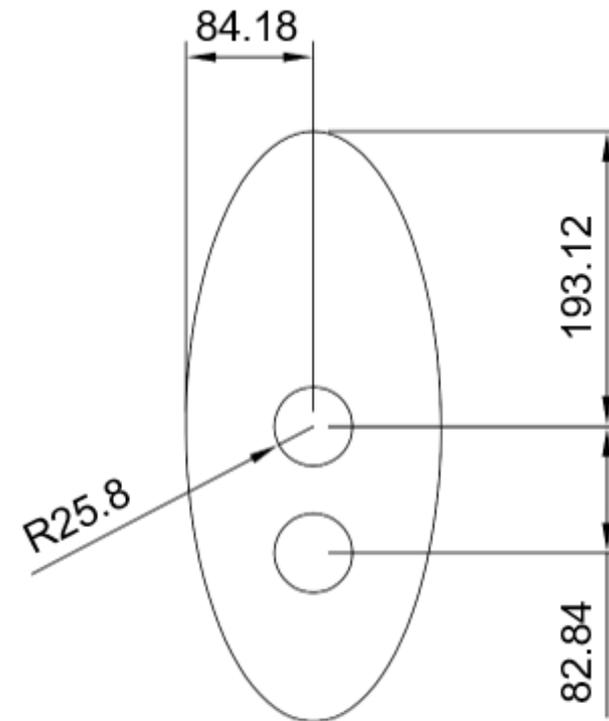
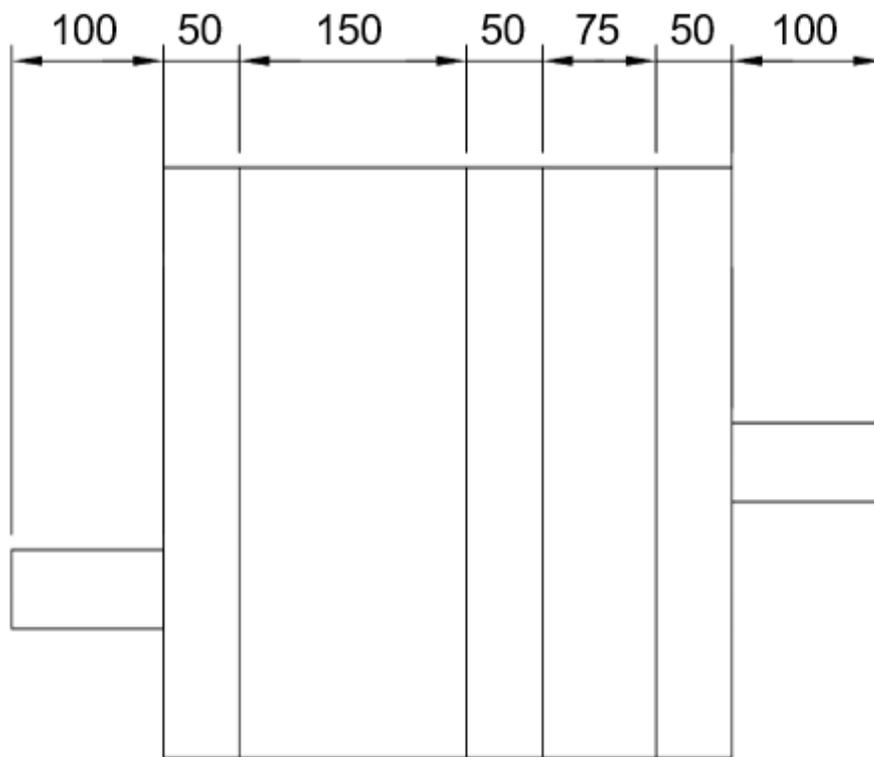












ANEXOS

ANEXO I: SCRIPT DE MATLAB. PROPIEDADES ACÚSTICAS DEL CATALIZADOR

La rutina Principal.m genera el fichero con las propiedades acústicas del monolito del catalizador. Las frecuencias de cálculo y propiedades se especifican en la rutina variab:

PRINCIPAL.M

```
clear all

load variab

% Monolito de catalizador (modelo 3D conductos/1D monolito).
% =====

lc=variab(6); % Longitud del monolito

% Frecuencias de análisis
% =====

fini=variab(1);      % frecuencia inicial
ffin=variab(2);     % frecuencia final
deltaf=variab(3);   % Incremento de frecuencia

% =====
% =====
% Propiedades del aire
% =====
% =====

temp=variab(13);    % Temperatura (°C)
if temp== -1 % Se introducen los valores directamente
    caire=variab(4); % Velocidad del sonido en el aire
    rhoaire=variab(5); % Densidad del aire
end
if temp~= -1 % Se calculan en función de la temperatura
    caire = (1.4*8.314*(temp+273.15)/0.02897)^0.5;
    rhoaire = 101325*0.02897/(8.314*(temp+273.15));
end
% =====
% =====
% Propiedades del monolito. Modelo de Allard
% =====
% =====

resis=variab(7); % Resistividad del monolito (realmente debería ser función de la
temperatura)
poro=variab(8); % Porosidad del monolito
alpha=variab(9); % Factor geométrico del capilar
```

```
if temp== -1 % Se introducen los valores directamente
    visco=variab(10); % Viscosidad
    kappa=variab(11); % Conductividad térmica
    Cp=variab(12); % Calor específico a presión constante
end
if temp~= -1 % Se calculan en función de la temperatura
    visco = 1.458e-6*(temp+273.15)^1.5/(temp+273.15+110.4) ; % Ecuación de
    Sutherland; viscosidad dinámica
    kappa = 0.023635+7.562892e-5*temp-2.523277e-8*temp^2+4.648739e-12*temp^3;
% Conductividad térmica. Ajuste con Mathcad entre 0°C y 1000 °C
    Cp = 1.00734e3-0.059809*temp+8.879379e-4*temp^2-1.055691e-6*temp^3+4.044381e-
    10*temp^4; % Calor específico a presión constante. Ajuste con Mathcad entre 0°C
    y 1000 °C
end
prandtl=visco*Cp/kappa; % Número de Prandtl

% Barrido en frecuencia
% =====

monolito=fopen('matriz_cc.txt','w');

NB=(ffin-fini)/deltaf+1;

for nf=1:NB

    frec=deltaf*(nf-1)+fini;
    w=2*pi*frec;
    'Frecuencia ='
    frec
    kaire=w/caire; % Número de onda del aire

    % ---- Caracterización del monolito. Modelo de Allard

    rj=(-1j)^0.5;
    ss=alpha*(8*w*rhoaire/(resis*poro))^0.5;
    gc1=(-ss/4*rj*besselj(1,ss*rj)/besselj(0,ss*rj))/(1-
    2/(ss*rj)*besselj(1,ss*rj)/besselj(0,ss*rj));
    rhom=rhoaire+resis*poro*gc1/(1j*w); % Densidad acústica equivalente del
    monolito
    sss=ss*(prandtl)^0.5;
    gc2=(-sss/4*rj*besselj(1,sss*rj)/besselj(0,sss*rj))/(1-
    2/(sss*rj)*besselj(1,sss*rj)/besselj(0,sss*rj));
    denomin=((1+poro*resis*gc1/(1j*w*rhoaire))*(1.4-(1.4-
    1)/(1+poro*resis*gc2/(1j*w*rhoaire*prandtl))))^0.5;
    cm=caire/denomin; % Velocidad del sonido equivalente del monolito
    km=w/cm; % Número de onda equivalente del monolito

    % ---- Cuatro polos de la matriz de transferencia para conectar las dos caras
    del monolito

    T11=cos(km*lc);
    T12=1j*rhom*cm*sin(km*lc)/poro;
    T21=1j*poro*sin(km*lc)/(rhom*cm);
    T22=cos(km*lc);

    % ---- Cálculo de matriz de admitancia
```

```

%
% u1=T21*p2+T22*u2=T22/T12*p1+(T21-T22*T11/T12)*p2
% u2=p1/T12-T11/T12*p2
% u2=(-1/T12)*p1+(T11/T12)*p2 % Cambio de signo

y11r=real(T22/T12);
y11i=imag(T22/T12);
y12r=real(T21-T22*T11/T12);
y12i=imag(T21-T22*T11/T12);
y21r=real(-1/T12);
y21i=imag(-1/T12);
y22r=real(T11/T12);
y22i=imag(T11/T12);

% Escritura de fichero para Ansys
%
% tb,perf,2,,ymat
% tbfield,freq,frequ
% tldata,1,y11r,y11i,y12r,y12i,y21r,y21i
% tldata,7,y22r,y22i
%

fprintf(monolito,'%s','tbfield,freq,');
fprintf(monolito,'%i\r\n',freq);
fprintf(monolito,'%s','tldata,1,');
fprintf(monolito,'% .10e',y11r); fprintf(monolito,'%s',' , ');
fprintf(monolito,'% .10e',y11i); fprintf(monolito,'%s',' , ');
fprintf(monolito,'% .10e',y12r); fprintf(monolito,'%s',' , ');
fprintf(monolito,'% .10e',y12i); fprintf(monolito,'%s',' , ');
fprintf(monolito,'% .10e',y21r); fprintf(monolito,'%s',' , ');
fprintf(monolito,'% .10e\r\n',y21i);
% Continúa
fprintf(monolito,'%s','tldata,7,');
fprintf(monolito,'% .10e',y22r); fprintf(monolito,'%s',' , ');
fprintf(monolito,'% .10e\r\n',y22i);

end % Fin del barrido en frecuencia

fclose(monolito);

```

VARIAB

```

% Fichero con las variables del problema de catalizador
% Genera la tabla de propiedades de monolito que lee Ansys
% =====
%
%=====
% Frecuencias de análisis
% =====
%
10 % Frecuencia inicial
3000 % Frecuencia final
10 % Incremento de frecuencia
%

```

```
%=====
% Velocidad del sonido y densidad del aire en los capilares
% También pueden calcularse en función de la temperatura (ver final del fichero)
%=====
%
340.255 % Velocidad del sonido en el aire
1.225  % Densidad del aire
%
%=====
% Longitud de monolito
%=====
%
0.075  % Longitud del monolito
%
%=====
% Propiedades del monolito
% La viscosidad, conductividad y calor específico también pueden calcularse en
función de la temperatura (ver final del fichero)
%=====
%
1500  % Resistividad (realmente debería ser función de la temperatura; de momento
solamente se puede utilizar el valor que se introduzca aquí)
0.88  % Porosidad
1.14  % Factor geométrico (1 para capilar circular; 1.07 para capilar cuadrado;
1.14 para capilar triangular)
0.00001802 % Viscosidad dinámica
0.02476 % Conductividad térmica
1007  % Calor específico a presión constante
%
%=====
% Temperatura (propiedades del aire y del monolito)
%=====
%
-1 % Temperatura (-1 ==> se meten los valores de arriba directamente; distinto de
-1 ==> se calculan con la ley de gas perfecto y otras interpolaciones)
%
```

ANEXO II: SCRIPT DE MATLAB. PROPIEDADES ACÚSTICAS DEL FILTRO ANTIPARTÍCULAS

La rutina Principal.m genera el fichero con las propiedades acústicas del monolito del filtro antipartículas. Las frecuencias de cálculo y propiedades se especifican en la rutina variab y se hace uso de las rutinas complementarias monolito_2.m y monolito_3.m

PRINCIPAL.M

```
clear all

% =====
% MODELO DE MONOLITO: Allam y Abom, Journal of Sound and Vibration, 2005, 2006
% Modelo con flujo (solamente efecto en cambios de sección)
% =====
% Trampa de partículas - DPF; monolito (modelo 3D/1D).
% Generación de tablas de Ansys.
% =====

% Definición de variables del problema
% =====

load variab

lc=variab(6); % Longitud del monolito

%=====
% Número de Mach (solamente efecto local en entrada y salida de capilares)
%=====
%
M_IN=variab(7); % Corresponde al valor de la cámara contigua al monolito

% Definición de variables del problema
% =====

% Frecuencias de análisis
% =====

fini=variab(1);      % frecuencia inicial
ffin=variab(2);     % frecuencia final
deltaf=variab(3);   % Incremento de frecuencia

% =====
% =====
% Propiedades del aire y del monolito
% =====
% =====
Temp=variab(14);    % Temperatura (°C)

monolito_2 % Ver código

% Barrido en frecuencia
% =====
```

```
monolito=fopen('matriz_dpf.txt','w');  
monolito_3 % Ver código (extraído de programa de ajuste_modal)  
fclose(monolito);
```

VARIAB

```
% Fichero con las variables del problema de la trampa de partículas - DPF  
% Genera la tabla de propiedades de monolito que lee Ansys  
% =====  
%  
%=====  
% Frecuencias de análisis  
% =====  
%  
10      % Frecuencia inicial  
3000    % Frecuencia final  
10      % Incremento de frecuencia  
%  
%=====  
% Velocidad del sonido y densidad del aire en los capilares  
% También pueden calcularse en función de la temperatura (ver final del fichero)  
%=====  
%  
340.255 % Velocidad del sonido en el aire  
1.225   % Densidad del aire  
%  
%=====  
% Longitud de monolito  
%=====  
%  
0.15    % Longitud del monolito  
%  
%=====  
% Número de Mach (solamente efecto local en entrada y salida de capilares)  
%=====  
%  
0.02  
%  
%=====  
% Tipo de monolito y propiedades del monolito (algunas también pueden calcularse  
en función de la temperatura (ver final del fichero)  
%=====  
%  
1 % Hay cuatro modelos disponibles en monolito_2.m correspondientes a la tabla  
2 del artículo de Sabry Allam y Mats Abom, Journal of Sound and Vibration (2005)  
%  
%=====  
% Realmente el valor de Am no afecta. Al trabajar con n (canales por m2), Am  
aparece en el numerador y denominador  
0.025535257787460 % Sección (área transversal) del monolito (para obtener número  
total de canales)
```

```
%
%=====
%
0 % ¿Hay hollín? No ==> 0; Sí ==>1
0.00001802 % Viscosidad dinámica
0.02476 % Conductividad térmica
1007 % Calor específico a presión constante
%
%=====
% Temperatura °C (propiedades del aire y del monolito)
%=====
%
-1 % Temperatura °C (-1 ==> se meten los valores de arriba directamente; distinto
de -1 ==> se calculan a esa temperatura con la ley de gas perfecto y otras
interpolaciones)
%
```

MONOLITO_2.M

```
% =====
% MODELO DE MONOLITO: Allam y Abom, JSV, 2005, 2006
% Modelo con flujo (solamente efecto en cambios de sección)
% =====

% Gas perfecto
gamma=1.4;
Rgas=8.314;
Mm=0.02897;
Patm=101325;

if Temp==-1 % Se introducen los valores de las propiedades directamente; no se
calculan en función de la temperatura.
    c0ini=variab(4); % Velocidad del sonido en el aire
    rho0ini=variab(5); % Densidad del aire
    Z0ini=rho0ini*c0ini; % Impedancia característica
    mu=variab(11); % Viscosidad
    cond=variab(12); % Conductividad térmica
    cp=variab(13); % Calor específico a presión constante
end

if Temp~-1 % Se calculan las propiedades en función de la temperatura.
    c0ini=sqrt(gamma*Rgas*(Temp+273.15)/Mm); % Velocidad del sonido. En los
capilares se modifica con la teoría de Kirchhoff
    rho0ini=Patm*Mm/(Rgas*(Temp+273.15)); % Densidad del aire. En los capilares
se modifica con la teoría de Kirchhoff
    Z0ini=rho0ini*c0ini; % Impedancia característica
    mu=1.45793*10^-6*(Temp+273.15)^1.5/(Temp+273.15+110.4); % Viscosidad
dinámica (Sutherland)
    cond = 0.023635+7.562892e-5*Temp-2.523277e-8*Temp^2+4.648739e-12*Temp^3;
% Ajuste con Mathcad entre 0°C y 1000 °C
    cp = 1.00734e3-0.059809*Temp+8.879379e-4*Temp^2-1.055691e-
6*Temp^3+4.044381e-10*Temp^4; % Ajuste con Mathcad entre 0°C y 1000 °C
end
prandtl=mu*cp/cond; % Número de Prandtl
```

```
% Tipo y área del monolito (Tabla 2 de artículo de Allam y Abom, Journal of Sound  
and Vibration, 2005).  
  
Tipo_m=variab(8);  
Am=variab(9); % Área total del monolito (influye en resultados intermedios, no en  
el final al trabajar con canales/m^2).  
  
if Tipo_m==1  
    % Tipo 1 (EX 200/14)  
    dh=0.00144; % Dimensión canal (lado)  
    ht=0.000355; % Espesor canal (pared porosa)  
    sigmaw=2.5*10^-13; % Permeabilidad (pared porosa)  
    lX=0.005; % Longitud de extremos (end correction - mass plug). Valor supuesto.  
    n=3.1*10^5; % Canales por metro cuadrado; Para este tipo es consistente con  
el valor 200  
end  
  
if Tipo_m==2  
    % Tipo 2 (EX 100/17)  
    dh=0.00211; % Dimensión canal (lado)  
    ht=0.00043; % Espesor canal (pared porosa)  
    sigmaw=2.5*10^-13; % Permeabilidad (pared porosa)  
    lX=0.005; % Longitud de extremos (end correction - mass plug). Valor supuesto.  
    n=1.55*10^5; % Canales por metro cuadrado; Para este tipo es consistente con  
el valor 100  
end  
  
if Tipo_m==3  
    % Tipo 3 (RC 200/12)  
    dh=0.0015; % Dimensión canal (lado)  
    ht=0.000304; % Espesor canal (pared porosa)  
    sigmaw=25*10^-13; % Permeabilidad (pared porosa)  
    lX=0.005; % Longitud de extremos (end correction - mass plug). Valor supuesto.  
    n=3.87*10^5; % Canales por metro cuadrado; Para este tipo NO es consistente  
con el valor 200  
end  
  
if Tipo_m==4  
    % Tipo 4 (RC 200/20)  
    dh=0.0013; % Dimensión canal (lado)  
    ht=0.000508; % Espesor canal (pared porosa)  
    sigmaw=25*10^-13; % Permeabilidad (pared porosa)  
    lX=0.005; % Longitud de extremos (end correction - mass plug). Valor supuesto.  
    n=2.48*10^5; % Canales por metro cuadrado; Para este tipo NO es consistente  
con el valor 200  
end  
  
Nt=n*Am; % Canales totales;  
N=Nt/2; % Canales abiertos en cada lado  
  
% Presencia de hollín  
hollin=variab(10);  
if hollin==0  
    Rw=mu*(ht/sigmaw); % Resistencia de pared (a partir de ley de Darcy)  
end
```

```
if hollin==1
    h_soot=ht/10; % Espesor de capa de hollín
    sigma_soot=1.5*10^-14; % Permeabilidad de capa de hollín
    Rw=mu*(ht/sigmaw+h_soot/sigma_soot); % Resistencia de pared (a partir de ley
de Darcy)
end

% Cambio de sección de cámara central izquierda a DPF
m_IN=(N*dh^2)/Am;

% Cambio de sección de DPF a cámara central derecha
m_OUT=m_IN;
M_OUT=M_IN; % Número de Mach en cámara contigua al monolito, salida

% Condiciones de conservación de energía y momento
Z_IN=Z0ini/Am;
Z_OUT=Z_IN;
% Término resistivo
r_IN=Z_IN*M_IN*(1/m_IN^2-1);
r_OUT=2*Z_OUT*M_OUT*(1-1/m_OUT);

% Resultados analíticos de Allam y Abom (ecuación 23, JSV 2005 DPF)
% Vectores propios sin flujo
e1=[1;1];
e2=e1;
e3=[1;-1];
e4=e3;
```

MONOLITO_3.M

```
% Propiedades de monolito de DPF en función de la frecuencia
% Código extraído de la rutina de ajuste modal con monolito (modelo 3D/1D).
% =====

% Barrido en frecuencia
% =====

caire=c0ini;
rhoaire=rho0ini;

Lm=lc; % Longitud del monolito

NB=(ffin-fini)/deltaf+1;

for nf=1:NB

    frec=deltaf*(nf-1)+fini;
    w=2*pi*frec;
    'Frecuencia ='
    frec
    kaire=w/caire; % Número de onda del aire

    % ---- Caracterización del monolito. Allam y Abom (Kirchhoff)
```

```

% Modelo de Kirchhoff (ver artículo con modificaciones JSV 2006 de Sabry Allam
y Mats Abom)
s=dh/2*sqrt(rho0ini*w/mu); % Número de onda de cortadura. El valor dh/2 no
está claro pero da bien.
psi=sqrt(prandtl);

Fs=2/(s*sqrt(-1i))*besselj(1,s*sqrt(-1i))/besselj(0,s*sqrt(-1i));
FPs=2/(psi*s*sqrt(-1i))*besselj(1,psi*s*sqrt(-1i))/besselj(0,psi*s*sqrt(-
1i));

c0=c0ini*sqrt(1-Fs)/sqrt(1+(gamma-1)*FPs); % Velocidad en los capilares
rho0=rho0ini/(1-Fs); % Densidad en los capilares

B=c0*rho0/(dh*Rw);

k0=w/c0;
k0prima=k0;
Z0=rho0*c0;

K1=k0;
K2=-K1;
K3=k0*sqrt(1-8i*B/k0);
K4=-K3;
e1prima=e1*dh^2/(Z0*k0prima/K1); % Igual a e1prima=e1*dh^2/Z0
e2prima=e2*dh^2/(Z0*k0prima/K2); % Igual a e2prima=-e2*dh^2/Z0. Cambio de
signo de velocidad, onda regresiva
e3prima=e3*dh^2/(Z0*k0prima/K3); % Atención a la definición de impedancia Z
para los modos atenuados 3 y 4
e4prima=e4*dh^2/(Z0*k0prima/K4); % Atención a la definición de impedancia Z
para los modos atenuados 3 y 4
H0=[e1 e2 e3 e4;e1prima e2prima e3prima e4prima]; % Matriz H0 de ecuación 20
HL=[e1*exp(-1i*K1*Lm) e2*exp(-1i*K2*Lm) e3*exp(-1i*K3*Lm) e4*exp(-
1i*K4*Lm);e1prima*exp(-1i*K1*Lm) e2prima*exp(-1i*K2*Lm) e3prima*exp(-1i*K3*Lm)
e4prima*exp(-1i*K4*Lm)]; % Matriz HL de ecuación 20
S=H0*inv(HL); % Matriz S
T=[S(1,2)-S(4,2)*S(1,1)/S(4,1) S(1,4)-S(4,4)*S(1,1)/S(4,1);S(3,2)-
S(4,2)*S(3,1)/S(4,1) S(3,4)-S(4,4)*S(3,1)/S(4,1)]; % Matriz T para presión y flujo
volumétrico. Ecuación 21.
TII=[T(1,1) T(1,2)/N;N*T(2,1) T(2,2)]; % Matriz T para presión y flujo
volumétrico con todos los canales abiertos de un lado. Ecuación 22.

TI_plug=[1 r_IN+1i*rho0ini*w*1X/(N*dh^2);0 1]; % Conservación de energía
TIII_plug=[1 r_OUT+1i*rho0ini*w*1X/(N*dh^2);0 1]; % Conservación de momento

T_v_f_IN=[1 0;0 1/Am]; % Cambio velocidad/flujo volumétrico
T_v_f_OUT=[1 0;0 Am]; % Cambio velocidad/flujo volumetrico

TDPF=T_v_f_IN*TI_plug*TII*TIII_plug*T_v_f_OUT; % Matrices
T_v_f_IN*TI(plug)*TII*TIII(plug)*T_v_f_OUT

% Conductos de entrada, salida y contiguos a DPF

% ---- Cuatro polos de la matriz de transferencia para conectar las dos caras
del monolito

T11=TDPF(1,1);

```

```
T12=TDPF(1,2);
T21=TDPF(2,1);
T22=TDPF(2,2);

% ---- Cálculo de matriz de admitancia
%
%  $u_1 = T_{21} * p_2 + T_{22} * u_2 = T_{22} / T_{12} * p_1 + (T_{21} - T_{22} * T_{11} / T_{12}) * p_2$ 
%  $u_2 = p_1 / T_{12} - T_{11} / T_{12} * p_2$ 
%  $u_2 = (-1 / T_{12}) * p_1 + (T_{11} / T_{12}) * p_2$  % Cambio de signo

y11r=real(T22/T12);
y11i=imag(T22/T12);
y12r=real(T21-T22*T11/T12);
y12i=imag(T21-T22*T11/T12);
y21r=real(-1/T12);
y21i=imag(-1/T12);
y22r=real(T11/T12);
y22i=imag(T11/T12);

% Escritura de fichero para Ansys
%
% tb,perf,2,,ymat
% tbfield,freq,frequ
% tbddata,1,y11r,y11i,y12r,y12i,y21r,y21i
% tbddata,7,y22r,y22i
%

fprintf(monolito,'%s','tbfield,freq,');
fprintf(monolito,'%i\r\n',freq);
fprintf(monolito,'%s','tbddata,1,');
fprintf(monolito,'% .10e',y11r); fprintf(monolito,'%s',' , ');
fprintf(monolito,'% .10e',y11i); fprintf(monolito,'%s',' , ');
fprintf(monolito,'% .10e',y12r); fprintf(monolito,'%s',' , ');
fprintf(monolito,'% .10e',y12i); fprintf(monolito,'%s',' , ');
fprintf(monolito,'% .10e',y21r); fprintf(monolito,'%s',' , ');
fprintf(monolito,'% .10e\r\n',y21i);
% Continúa
fprintf(monolito,'%s','tbddata,7,');
fprintf(monolito,'% .10e',y22r); fprintf(monolito,'%s',' , ');
fprintf(monolito,'% .10e\r\n',y22i);

end % Fin del barrido en frecuencia
```

ANEXO III: SCRIPT DE ANSYS APDL

Como ejemplo se muestra la macro utilizada en ANSYS APDL para el dispositivo circular con conducto de salida descentrado:

```
! *****
!
! Geometría de sección transversal elíptica
! Conductos descentrados (salida)
! Problema con un plano de simetría: se modela 1/2 de la geometría
!
! *****
/title, Pérdida de Transmisión (dB) de Catalizador/Trampa de Partículas
/PREP7
/view,1,1,1,1
rho=1.225           ! Densidad del aire (debe ser consistente con los
datos utilizados en los monolitos)
c0=340.255         ! Velocidad del sonido (debe ser consistente con los
datos utilizados en los monolitos)
z0=rho*c0         ! Impedancia característica del aire (se utiliza para
imponer impedancia anecoica)
f_fin=3000         ! Máxima frecuencia de cálculo)
f_ini=10           ! Frecuencia inicial (la final ya está arriba)
deltaf=10         ! Incremento de frecuencia
Nfrec=(f_fin-f_ini)/deltaf+1 ! Número de frecuencias de cálculo
lambda_min=c0/f_fin ! Mínima longitud de onda a la máxima frecuencia
p=1               ! Excitación en sección de entrada. Se puede poner otro
valor. Lo hace bien igualmente.
vn=-p/(rho*c0)   ! Velocidad normal de excitación
                 ! Definición de elementos y materiales
et,1,183         ! Cuadrilátero cuadrático estructural 2D (solamente
para mallar secciones transversales y extruir)
et,2,220,,1     ! Hexaedro acústico de 20 nodos (interpolación
cuadrática)
mp,dens,1,rho    ! Material (regiones de aire)
mp,sonc,1,c0
!
! ***** CATALIZADOR *****
! Cálculo de propiedades de monolito de catalizador (modelo de Allard)
! Se lee la matriz de transferencia (calculada con Matlab como matriz de
admitancias) para reemplazar monolito de catalizador
! En Matlab se deben utilizar las mismas propiedades, datos, frecuencias, etc.
que en el cálculo armónico de Ansys
!
! El modelo de matriz de transferencia en Ansys solamente admite hexaedros y
prismas
mp,dens,2,rho    ! Aire en los capilares
mp,sonc,2,c0
!
tb,perf,2,,ymat ! Matriz de admitancias
!
/INPUT,'matriz_cc','txt' ! Lectura de fichero creado por Matlab
!
! *****
!
! ***** TRAMPA (DPF) *****
```

```
! Cálculo de propiedades de monolito de DPF (modelo de Sabry Allam y Mats Abom,
Journal of Sound and Vibration, 2005 y 2006)
! Se lee la matriz de transferencia (calculada con Matlab como matriz de
admitancias) para reemplazar monolito de DPF
! En Matlab se deben utilizar las mismas propiedades, datos, frecuencias, etc.
que en el cálculo armónico de Ansys
!
! El modelo de matriz de transferencia en Ansys solamente admite hexaedros y
prismas
mp,dens,3,rho           ! Aire en los capilares
mp,sonc,3,c0
!
tb,perf,3,,ymat        ! Matriz de admitancias
!
/INPUT,'matriz_dpf','txt' ! Lectura de fichero creado por Matlab
!
! *****
! Creación de modelo sólido
rinlet=0.0258          ! Conducto de entrada
linlet=0.1
! Cámaras de expansión, monolitos y contracción
a=0.1931175684         ! Semieje mayor de la elipse
b=0.0841779965         ! Semieje menor de la elipse

lchamb1=0.05
lmonolit_cc=0.075      ! Catalizador, longitud ficticia, se reemplaza por
matriz
lchamb2=0.05
lmonolit_dpf=0.15     ! Trampa de partículas, longitud ficticia, se reemplaza
por matriz
lchamb3=0.05
! Conducto de salida
routlet=0.0258
loutlet=0.1
offset=0.0828353109
!
! Secciones transversales
!
! Keypoints
distancia=0.1         ! Distancia a origen de áreas transversales para
posterior extrusión (para evitar solapes)
!
k,1,,,-distancia
k,2,rinlet,,-distancia
k,3,a,,-distancia
k,4,b,-distancia
k,5,rinlet,-distancia
k,6,-rinlet,,-distancia
k,7,-(offset-routlet),,-distancia
k,8,-offset,,-distancia
k,9,-(offset+routlet),,-distancia
k,10,-offset,routlet,-distancia
k,11,-a,,-distancia
!
! Líneas
!
l,1,2
```

```
1,2,3
! Sistema elíptico para definir la línea exterior
!
cswpla,11,1,b/a
csys,11
1,3,4
csys,0           ! Vuelta al sistema cartesiano
!
1,4,5
1,5,1
larc,2,5,1,rinlet
1,1,6
larc,6,5,1,rinlet
1,6,7
1,7,8
1,8,9
1,8,10
larc,9,10,8,routlet
larc,10,7,8,routlet
1,9,11
! Sistema elíptico para definir la línea exterior
!
cswpla,11,1,b/a
csys,11
1,11,4
csys,0           ! Vuelta al sistema cartesiano
!
! Áreas: entrada
!
al,1,6,5
al,5,7,8
!
! Áreas: salida
!
al,10,12,14
al,11,13,12
!
! Áreas: cámara
!
al,2,3,4,6
al,4,8,9,14,13,15,16
!
!
type,1
mat,1
!
! Mallado de geometría transversal
h=lambda_min/20           ! 20 elementos por (mínima) longitud de onda (refinar
para obtener mayor precisión)
esize,h
amesh,all
!
! Copia de áreas para extrusión posterior
agen,2,1,2,1,,distancia
agen,2,1,6,1,,distancia+linlet
agen,2,1,6,1,,distancia+linlet+lchamb1
agen,2,1,6,1,,distancia+linlet+lchamb1+lmonolit_cc
agen,2,1,6,1,,distancia+linlet+lchamb1+lmonolit_cc+lchamb2
```

```
agen,2,1,6,1,,,distancia+linlet+lchamb1+lmonolit_cc+lchamb2+lmonolit_dpf
agen,2,3,4,1,,,distancia+linlet+lchamb1+lmonolit_cc+lchamb2+lmonolit_dpf+lchamb3
!
! Extrusión
type,2                                ! Elemento acústico 220 en toda la malla
mat,1
!
extopt,esize,linlet*100              ! Conducto de entrada
extopt,aclear,1
VEXT,7,8,1,,,linlet

extopt,esize,lchamb1*100             ! Cámara 1
extopt,aclear,1
VEXT,9,14,1,,,lchamb1

mat,2
extopt,esize,1                        ! Monolito de catalizador - CC
extopt,aclear,1
VEXT,15,20,1,,,lmonolit_cc

mat,1
extopt,esize,lchamb2*100            ! Cámara 2
extopt,aclear,1
VEXT,21,26,1,,,lchamb2

mat,3
extopt,esize,1                        ! Monolito de trampa de partículas - DPF
extopt,aclear,1
VEXT,27,32,1,,,lmonolit_dpf

mat,1
extopt,esize,lchamb3*100            ! Cámara 3
extopt,aclear,1
VEXT,33,38,1,,,lchamb3

extopt,esize,loutlet*100            ! Conducto de salida
extopt,aclear,1
VEXT,39,40,1,,,loutlet

aclear,1,6,1                          ! Borrado de resto de malla con elemento 183
adel,1,6,1,1                          ! Borrado de resto de áreas, líneas y keypoints
utilizadas en extrusión

nummrg,all
numcmp,all
eplot
!
! ***** CATALIZADOR *****
! Monolito. Definición de puertos para conexión con
matriz de admitancia
esel,s,mat,,2
nsle,s
nsel,s,loc,z,linlet+lchamb1
sf,all,port,3                          ! Puerto de entrada al monolito
nsel,s,loc,z,linlet+lchamb1+lmonolit_cc
sf,all,port,4                          ! Puerto de salida del monolito
alls
```

```

!
! ***** TRAMPA (DPF) *****
! Monolito. Definición de puertos para conexión con
matriz de admitancia
esel,s,mat,,3
nsle,s
nsel,s,loc,z,linlet+lchamb1+lmonolit_cc+lchamb2
sf,all,port,5 ! Puerto de entrada al monolito
nsel,s,loc,z,linlet+lchamb1+lmonolit_cc+lchamb2+lmonolit_dpf
sf,all,port,6 ! Puerto de salida del monolito
alls
!
! *****
!
nsel,s,loc,z,0 ! Nodos en la sección de entrada
sf,all,port,1 ! Puerto de entrada del dispositivo postratamiento
catalizador/trampa de partículas
!
! Las dos siguientes líneas permiten que se aplique una velocidad cuya parte
progresiva
! tiene asociada la presión p definida arriba. Si no se hace así no funciona.
!
sf,all,shld,vn ! Velocidad normal de excitación
sf,all,impd,z0 ! Condición de impedancia en la entrada
!
nsel,s,loc,z,linlet+lchamb1+lmonolit_cc+lchamb2+lmonolit_dpf+lchamb3+loutlet
! Nodos en la sección de salida
sf,all,port,2 ! Puerto de salida del catalizador
sf,all,inf ! Radiación en la salida. Impedancia anecoica en la
salida (no vuelve energía al dispositivo postratamiento catalizador/trampa de
partículas)
alls
fini
! Cálculo de solución

/solu
antype,harmic
hropt,auto
kbc,1
harf,0,f_fin
nsub,Nfrec ! Frecuencias de cálculo especificadas al inicio
solve
finish
! post-processing
/post1
spower,1,2 ! Cálculo de potencia sonora (puertos 1 y 2: entrada
y salida del dispositivo postratamiento catalizador/trampa de partículas)
plst,CAT_DPF_transfer_elip_offset0102,a2p,t1 ! TL - pérdida de transmisión
fini

```

ANEXO IV: SCRIPT DE MATLAB. AJUSTE MODAL

El programa a ejecutar es Principal.m y las variables (frecuencias de cálculo, propiedades del aire, número de modos para la superposición modal, longitudes de cámaras y monolitos, propiedades de monolitos, temperatura, etc.) se especifican en el archivo variab:

PRINCIPAL.M

```
clear all
clf
tic

% Catalizador + Trampa de Partículas
% Sección transversal arbitraria con monolitos (modelo 3D/1D).
% Técnica de ajuste modal híbrida analítica-numérica.
% =====

% Definición de la geometría, modelo, etc.
% =====

% Definición de propiedades y variables del problema
% =====

load variab

% =====
% =====
% Definición del modelo de elementos finitos
% =====
% =====

global xyE topE xyS topS;

% Topología de la sección de entrada

load xy2E % tubo central
load top2E % tubo central
load xy3E % cámara
load top3E % cámara

% Topología de la sección de salida

load xy2S % tubo central
load top2S % tubo central
load xy3S % cámara
load top3S % cámara

% Globalización de parámetros.
% Genera matrices con todos los nodos y elementos ordenados
% =====

n2E = size(xy2E,1);
n12E = size(top2E,1);
n3E = size(xy3E,1);
```

```
nel3E = size(top3E,1);
nnpeE = size(top2E,2)-1;

n2S = size(xy2S,1);
nel2S = size(top2S,1);
n3S = size(xy3S,1);
nel3S = size(top3S,1);
nnpeS = size(top2S,2)-1;

[xyE, topE]=globaliza1(xy2E,xy3E,top2E,top3E);
nE=size(xyE,1);
nelE=size(topE,1);

[xyS, topS]=globaliza1(xy2S,xy3S,top2S,top3S);
nS=size(xyS,1);
nelS=size(topS,1);

% figure
% d_malla(nelE,nnpeE,xyE,topE) % Dibuja la malla de entrada
% pause

% figure
% d_malla(nelS,nnpeS,xyS,topS) % Dibuja la malla de salida
% pause

% Puntos de integración
% =====

ngauss2= 2;
g2(1)= -1/sqrt(3);
g2(2)= -g2(1);
h2(1)= 1.0;
h2(2)= h2(1);

% Puntos de integración
% =====

ngauss3= 3;
g3(1)= -sqrt(3/5);
g3(2)= 0.0;
g3(3)= -g3(1);
h3(1)= 5/9;
h3(2)= 8/9;
h3(3)= h3(1);

% Puntos de integración
% =====

ngauss4= 4;
g4(1)= -0.861136311594953;
g4(2)= -0.339981043584856;
g4(3)= -g4(2);
g4(4)= -g4(1);
h4(1)= 0.347854845137454;
h4(2)= 0.652145154862546;
h4(3)= h4(2);
h4(4)= h4(1);
```

```
% Número de modos
% =====

Modos=variab(6); % Número máximo de modos. Corresponde a la sección completa de
la cámara.

% Modificar esto se si desea utilizar diferentes modos por conducto

Nmod=Modos;
Nmoda=10;
Nmodg=10;

% Longitudes de las cámaras y los monolitos
% Secciones de conductos entrada/salida (cálculo del TL)
% =====

lb=variab(7); % Longitud del tramo de expansión de la cámara
lc=variab(8); % Longitud del monolito de catalizador
ld=variab(9); % Longitud del tramo central de aire
le=variab(10); % Longitud del monolito de trampa de partículas
lf=variab(11); % Longitud del tramo de contracción de la cámara

Sent=variab(23); % Sección del conducto de entrada
Ssal=variab(24); % Sección del conducto de salida

% Definición de variables del problema
% =====

% Frecuencias de análisis
% =====

fini=variab(1); % frecuencia inicial
ffin=variab(2); % frecuencia final
deltaf=variab(3); % Incremento de frecuencia

% =====
% =====
% Propiedades del aire
% =====
% =====
temp=variab(22); % Temperatura (°C)
if temp==-1 % Se introducen los valores directamente
    caire=variab(4); % Velocidad del sonido en el aire
    rhoaire=variab(5); % Densidad del aire
end
if temp~-1 % Se calculan en función de la temperatura
    caire = (1.4*8.314*(temp+273.15)/0.02897)^0.5;
    rhoaire = 101325*0.02897/(8.314*(temp+273.15));
end
% =====
% =====
% Propiedades del monolito de catalizador. Modelo de Allard
% =====
% =====
resis=variab(12); % Resistividad del monolito (realmente debería ser función de
la temperatura)
```

```
poro=variab(13); % Porosidad del monolito
alpha=variab(14); % Factor geométrico del capilar
if temp==-1 % Se introducen los valores directamente
    visco=variab(15); % Viscosidad
    kappa=variab(16); % Conductividad térmica
    Cp=variab(17); % Calor específico a presión constante
end
if temp~-1 % Se calculan en función de la temperatura
    visco = 1.458e-6*(temp+273.15)^1.5/(temp+273.15+110.4) ; % Ecuación de
Sutherland; viscosidad dinámica
    kappa = 0.023635+7.562892e-5*temp-2.523277e-8*temp^2+4.648739e-12*temp^3;
% Conductividad térmica. Ajuste con Mathcad entre 0°C y 1000 °C
    Cp = 1.00734e3-0.059809*temp+8.879379e-4*temp^2-1.055691e-6*temp^3+4.044381e-
10*temp^4; % Calor específico a presión constante. Ajuste con Mathcad entre 0°C
y 1000 °C
end
prandtl=visco*Cp/kappa; % Número de Prandtl
%
% =====
% =====
% Propiedades del monolito de trampa de partículas. Modelo de Allam y Abom
% Se mantiene la redefinición de algunas propiedades
% Puede aprovecharse si se implementan monolitos con diferentes
% temperaturas
% =====
% =====
%=====
% Número de Mach (solamente efecto local en entrada y salida de capilares de
% trampa de partículas)
%=====
%
M_IN=variab(18); % Corresponde al valor de la cámara contigua al monolito

monolito_2 % Ver código

% =====
% =====
% ELEMENTOS FINITOS. MATRICES DE MASA Y RIGIDEZ (ACÚSTICAS)
% =====
% =====
% Matrices para la sección de ENTRADA
% =====
% ---- Matrices de rigidez

[KA_A2E]=mat_k2(nel2E,xyE,top2E,ngauss4,g4,h4,nE); % Tubo central
[KA_A23E]=mat_k2_k3(nel3E,xyE,top3E,ngauss4,g4,h4,KA_A2E,nE); % Cámara (incluye
tubo central)

% ---- Matriz de masa

[MA_A2E]=mat_m2(nel2E,xyE,top2E,ngauss4,g4,h4,nE); % Tubo central
[MA_A23E]=mat_m2_m3(nel3E,xyE,top3E,ngauss4,g4,h4,MA_A2E,nE); % Cámara (incluye
tubo central)

% Matrices para la sección de SALIDA
% =====
% ---- Matrices de rigidez
```

```
[KA_A2S]=mat_k2(nel2S,xyS,top2S,ngauss4,g4,h4,nS); % Tubo central
[KA_A23S]=mat_k2_k3(nel3S,xyS,top3S,ngauss4,g4,h4,KA_A2S,nS); % Cámara (incluye
tubo central)

% ---- Matriz de masa m2

[MA_A2S]=mat_m2(nel2S,xyS,top2S,ngauss4,g4,h4,nS); % Tubo central
[MA_A23S]=mat_m2_m3(nel3S,xyS,top3S,ngauss4,g4,h4,MA_A2S,nS); % Cámara (incluye
tubo central)

% Cálculo de autovalores y autovectores (conducto de pared rígida)
% Sección de entrada
% =====

mat_K1E = KA_A2E(xy2E(:,1),xy2E(:,1)); % Submatriz de rigidez con nodos de
conducto de entrada
mat_K23E= KA_A23E; % Sección de entrada completa

mat_M1E = MA_A2E(xy2E(:,1),xy2E(:,1)); % Submatriz de masa con nodos de conducto
de entrada
mat_M23E = MA_A23E; % Sección de entrada completa

% Matriz de cálculo = inv(M)*K

% mat1E = mat_M1E\mat_K1E; % Parece que no proporciona ortogonalidad con matriz
de masa
% mat23E = mat_M23E\mat_K23E; % Parece que no proporciona ortogonalidad con
matriz de masa

%[V1E,D1E]=eig(full(mat1E)); % Autovalores reales. Son  $kt^2$  (en sección circular
es  $(\alpha/R)^2$ )
%[V23E,D23E]=eig(full(mat23E));
%[V1E,D1E]=eig(mat1E); % Autovalores reales. Son  $kt^2$  (en sección circular es
 $(\alpha/R)^2$ )
%[V23E,D23E]=eig(mat23E);
% Los métodos anteriores no proporcionan ortogonalidad respecto a la matriz de
masa (?)
[V1E,D1E]=eig(mat_K1E,mat_M1E); % Autovalores reales. Son  $kt^2$  (en sección
circular es  $(\alpha/R)^2$ )
[V23E,D23E]=eig(mat_K23E,mat_M23E);

% ---- Ordenación de los autovalores y los autovectores

D1E=diag(D1E);
D23E=diag(D23E);

Value1E=D1E;
[Sorted1E,Index1E]=sort(Value1E,'ascend');

D1E=D1E(Index1E);
V1E=V1E(:,Index1E);

Value23E=D23E;
[Sorted23E,Index23E]=sort(Value23E,'ascend');

D23E=D23E(Index23E);
```

```

V23E=V23E(:,Index23E);
V23E_r=V23E(xy2E(:,1),1:size(xy2E,1)); % Valores en los nodos de la sección
de entrada

% Sección de salida
% =====

mat_K1S = KA_A2S(xy2S(:,1),xy2S(:,1)); % Submatriz de rigidez con nodos de
conducto de salida
mat_K23S= KA_A23S; % Sección de salida completa

mat_M1S = MA_A2S(xy2S(:,1),xy2S(:,1)); % Submatriz de masa con nodos de conducto
de salida
mat_M23S = MA_A23S; % Sección de salida completa

% Matriz de cálculo = inv(M)*K

%mat1S = mat_M1S\mat_K1S; % Parece que no proporciona ortogonalidad con matriz
de masa
%mat23S = mat_M23S\mat_K23S; % Parece que no proporciona ortogonalidad con
matriz de masa

%[V1S,D1S]=eig(full(mat1S)); % Autovalores reales. Son  $kt^2$  (en sección circular
es  $(\alpha/R)^2$ )
%[V23S,D23S]=eig(full(mat23S));
%[V1S,D1S]=eig(mat1S); % Autovalores reales. Son  $kt^2$  (en sección circular es
 $(\alpha/R)^2$ )
%[V23S,D23S]=eig(mat23S);
% Los métodos anteriores no proporcionan ortogonalidad respecto a la matriz de
masa (?)
[V1S,D1S]=eig(mat_K1S,mat_M1S); % Autovalores reales. Son  $kt^2$  (en sección
circular es  $(\alpha/R)^2$ )
[V23S,D23S]=eig(mat_K23S,mat_M23S);

% ---- Ordenación de los autovalores y los autovectores

D1S=diag(D1S);
D23S=diag(D23S);

Value1S=D1S;
[Sorted1S,Index1S]=sort(Value1S,'ascend');

D1S=D1S(Index1S);
V1S=V1S(:,Index1S);

Value23S=D23S;
[Sorted23S,Index23S]=sort(Value23S,'ascend');

D23S=D23S(Index23S);
V23S=V23S(:,Index23S);
V23S_r=V23S(xy2S(:,1),1:size(xy2S,1)); % Valores en los nodos de la sección
de salida

% =====
% =====
% AJUSTE MODAL. GENERACIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES.
% Se toma como base el programa para geometrías circulares (artículo JCAM

```

```
% 330 (2018) 995-1006
% Los sistemas de referencia cambian. Las integrales analíticas se
% reemplazan por las de EF (matrices de masa y modos de presión).
% =====
% =====

ajuste_modal

% =====
% =====

compTime=toc

for nf=1:(ffin-fini)/deltaf+1
    frec_d(nf)=fini+(nf-1)*deltaf;
end

plot(frec_d,TL,'b')
axis([0 ffin 0 max(TL)+10])

save TL TL -ascii % Guarda el TL en un archivo
%save time compTime -ascii % Guarda el tiempo de cálculo
```

VARIAB

```
% Fichero con las variables del problema de catalizador + trampa de partículas
% =====
%
%=====
% Frecuencias de análisis
% =====
%
10      % Frecuencia inicial
3000   % Frecuencia final
10     % Incremento de frecuencia
%
%=====
% Propiedades del aire (ver temperatura al final del fichero)
%=====
%
340.255 % Velocidad del sonido en el aire
1.225 % Densidad del aire
%
%=====
% Número de Modos
%=====
%
20
%
%=====
% Longitudes de la cámara y el monolito: catalizador + trampa de partículas
%=====
%
0.05   % Longitud del tramo de expansión de la cámara
```

```
0.075 % Longitud del monolito de catalizador
0.05  % Longitud del tramo central de aire
0.15  % Longitud del monolito de trampa de partículas
0.05  % Longitud del tramo de contracción de la cámara
%
%=====
% Propiedades del monolito de catalizador (ver temperatura al final del fichero)
%=====
%
1500          % Resistividad (debería ser función de la temperatura).
Pendiente.
0.88          % Porosidad
1.14          % Factor geométrico (1 para capilar circular; 1.07 para
capilar cuadrado; 1.14 para capilar triangular)
%
%=====
% Propiedades del aire a utilizar en modelos de monolito (catalizador y trampa)
%=====
%
0.00001802   % Viscosidad dinámica
0.02476      % Conductividad térmica
1007         % Calor específico a presión constante
%
%=====
% Propiedades del monolito de trampa de partículas (ver temperatura al final del
fichero)
%=====
%
% Número de Mach (solamente efecto local en entrada y salida de capilares)
%=====
%
0.02
%
%=====
% Tipo de monolito y propiedades del monolito
% Algunas también pueden calcularse en función de la temperatura (ver final del
fichero)
%=====
%
1 % Hay cuatro modelos disponibles en monolito_2.m correspondientes a la tabla
2 del artículo de Sabry Allam y Mats Abom, Journal of Sound and Vibration (2005)
%
%=====
% Realmente el valor de Am no afecta. Al trabajar con n (canales por m2), Am
aparece en el numerador y denominador
0.025535257787460 % Sección (área transversal) del monolito (para obtener número
total de canales)
%
%=====
%
0          % ¿Hay hollín? No ==> 0; Sí ==>1
%
%=====
% Temperatura (propiedades del aire y del monolito)
%=====
%
```

```

15 %-1 % Temperatura (-1 ==> se meten los valores de arriba directamente; distinto
de -1 ==> se calculan con la ley de gas perfecto y otras interpolaciones)
%
%=====
% Secciones de entrada/salida para cálculo de TL y adaptación de número de modos
en cada conductos (si se desea)
%=====
0.00066564 % Sección del conducto de entrada
0.00066564 % Sección del conducto de salida
    
```

AJUSTE_MODAL.M

```

% Ajuste modal con dos monolitos (modelo 3D/1D).
% Técnica de ajuste modal híbrida analítica-numérica.
% =====

% Barrido en frecuencia
% =====

NB=(ffin-fini)/deltaf+1;

for nf=1:NB

    frec=deltaf*(nf-1)+fini;
    w=2*pi*frec;
    'Frecuencia ='
    frec
    kaire=w/caire; % Número de onda del aire

    % ---- Caracterización del monolito de catalizador en frecuencia. Modelo de
    Allard

    rj=(-1j)^0.5;
    ss=alpha*(8*w*rhoaire/(resis*poro))^0.5;
    gc1=(-ss/4*rj*besselj(1,ss*rj)/besselj(0,ss*rj))/(1-
    2/(ss*rj)*besselj(1,ss*rj)/besselj(0,ss*rj));
    rhom=rhoaire+resis*poro*gc1/(1j*w); % Densidad acústica equivalente del
    monolito
    sss=ss*(prandtl)^0.5;
    gc2=(-sss/4*rj*besselj(1,sss*rj)/besselj(0,sss*rj))/(1-
    2/(sss*rj)*besselj(1,sss*rj)/besselj(0,sss*rj));
    denomin=((1+poro*resis*gc1/(1j*w*rhoaire))*(1.4-(1.4-
    1)/(1+poro*resis*gc2/(1j*w*rhoaire*prandtl))))^0.5;
    cm=caire/denomin; % Velocidad del sonido equivalente del monolito
    km=w/cm; % Número de onda equivalente del monolito

    % ---- Cuatro polos de la matriz de transferencia para conectar las dos
    % caras del monolito del catalizador

    T11CC=cos(km*lc);
    T12CC=1j*rhom*cm*sin(km*lc)/poro;
    T21CC=1j*poro*sin(km*lc)/(rhom*cm);
    T22CC=cos(km*lc);

    % ---- Caracterización del monolito de trampa de partículas. Modelo de
    
```

```

% Allam y Abom (Kirchhoff)
% ---- Caracterización del monolito. Allam y Abom (Kirchhoff)

% Modelo de Kirchhoff (ver artículo JSV 2006 de Sabry Allam y Mats Abom)
s=dh/2*sqrt(rho0ini*w/mu); % Número de onda de cortadura. El valor dh/2 no
está claro pero da bien.
psi=sqrt(prandtl);

Fs=2/(s*sqrt(-1i))*besselj(1,s*sqrt(-1i))/besselj(0,s*sqrt(-1i));
FPs=2/(psi*s*sqrt(-1i))*besselj(1,psi*s*sqrt(-1i))/besselj(0,psi*s*sqrt(-
1i));

c0=c0ini*sqrt(1-Fs)/sqrt(1+(gamma-1)*FPs); % Velocidad en los capilares
rho0=rho0ini/(1-Fs); % Densidad en los capilares

B=c0*rho0/(dh*Rw);

k0=w/c0;
k0prima=k0;
Z0=rho0*c0;

K1=k0;
K2=-K1;
K3=k0*sqrt(1-8i*B/k0);
K4=-K3;
e1prima=e1*dh^2/(Z0*k0prima/K1); % Igual a e1prima=e1*dh^2/Z0
e2prima=e2*dh^2/(Z0*k0prima/K2); % Igual a e2prima=-e2*dh^2/Z0. Cambio de
signo de velocidad, onda regresiva
e3prima=e3*dh^2/(Z0*k0prima/K3); % Atención a la definición de impedancia Z
para los modos atenuados 3 y 4
e4prima=e4*dh^2/(Z0*k0prima/K4); % Atención a la definición de impedancia Z
para los modos atenuados 3 y 4
H0=[e1 e2 e3 e4;e1prima e2prima e3prima e4prima]; % Matriz H0 de ecuación 20
HL=[e1*exp(-1i*K1*le) e2*exp(-1i*K2*le) e3*exp(-1i*K3*le) e4*exp(-
1i*K4*le);e1prima*exp(-1i*K1*le) e2prima*exp(-1i*K2*le) e3prima*exp(-1i*K3*le)
e4prima*exp(-1i*K4*le)]; % Matriz HL de ecuación 20
S=H0*inv(HL); % Matriz S
T=[S(1,2)-S(4,2)*S(1,1)/S(4,1) S(1,4)-S(4,4)*S(1,1)/S(4,1);S(3,2)-
S(4,2)*S(3,1)/S(4,1) S(3,4)-S(4,4)*S(3,1)/S(4,1)]; % Matriz T para presión y flujo
volumétrico. Ecuación 21.
TII=[T(1,1) T(1,2)/N;N*T(2,1) T(2,2)]; % Matriz T para presión y flujo
volumétrico con todos los canales abiertos de un lado. Ecuación 22.

TI_plug=[1 r_IN+1i*rho0ini*w*lx/(N*dh^2);0 1]; % Conservación de energía
TIII_plug=[1 r_OUT+1i*rho0ini*w*lx/(N*dh^2);0 1]; % Conservación de momento

T_v_f_IN=[1 0;0 1/Am]; % Cambio velocidad/flujo volumétrico
T_v_f_OUT=[1 0;0 Am]; % Cambio velocidad/flujo volumetrico

TDPF=T_v_f_IN*TI_plug*TII*TIII_plug*T_v_f_OUT; % Matrices
T_v_f_IN*TI(plug)*TII*TIII(plug)*T_v_f_OUT

% Conductos de entrada, salida y contiguos a trampa de partículas

% ---- Cuatro polos de la matriz de transferencia para conectar las dos
% caras del monolito de trampa de partículas

```

```

T11DPF=TDPF(1,1);
T12DPF=TDPF(1,2);
T21DPF=TDPF(2,1);
T22DPF=TDPF(2,2);

% Números de onda axiales en conductos y cámaras

for i=1:Modos
    if kaire^2 >= D1E(i)
        kz1E(i)=(kaire^2-D1E(i))^0.5;
    end
    if kaire^2 < D1E(i)
        kz1E(i)=-(kaire^2-D1E(i))^0.5;
    end
    if kaire^2 >= D23E(i)
        kz23E(i)=(kaire^2-D23E(i))^0.5;
    end
    if kaire^2 < D23E(i)
        kz23E(i)=-(kaire^2-D23E(i))^0.5;
    end
    if kaire^2 >= D1S(i)
        kz1S(i)=(kaire^2-D1S(i))^0.5;
    end
    if kaire^2 < D1S(i)
        kz1S(i)=-(kaire^2-D1S(i))^0.5;
    end
    if kaire^2 >= D23S(i)
        kz23S(i)=(kaire^2-D23S(i))^0.5;
    end
    if kaire^2 < D23S(i)
        kz23S(i)=-(kaire^2-D23S(i))^0.5;
    end
end

% Ensamblado de las ecuaciones y resolución del sistema final de
% ecuaciones de ajuste modal (código analítico artículo JCAM adaptado)
% =====

Matriz=zeros(6*Nmod+Nmoda+Nmodg,6*Nmod+Nmoda+Nmodg);           % Matriz de
coeficientes
Vector=zeros(6*Nmod+Nmoda+Nmodg,1);                             % Vector de términos
independientes

% Presión. Sección de entrada. Onda plana incidente
Vector(1,1)=-V1E(:,1)'*mat_M1E*V1E(:,1); % De la condición de presión. Lado
derecho de la ecuación (ver artículo JCAM).
% Presión en cambio de sección A/B
for ic=1:Nmoda % Bucle de ajuste modal
    % Presión en la expansión. Modos de conducto de entrada.
    % Ortogonalidad. No hay bucle de modos en la superposición
    Matriz(ic,ic)=V1E(:,ic)'*mat_M1E*V1E(:,ic);           % Regresivos. Lado
izquierdo de la ecuación (ver artículo JCAM).

% Presión en la expansión. Modos de cámara de entrada.
for in=1:Nmod % Bucle de modos de la superposición

```

```

        Matriz(ic,in+Nmoda)=-V23E_r(:,in)*mat_M1E*V1E(:,ic);           %
Progresivos. Pasados del lado derecho al izquierdo de la ecuación (ver artículo
JCAM).
        Matriz(ic,in+Nmod+Nmoda)=-V23E_r(:,in)*mat_M1E*V1E(:,ic);     %
Regresivos. Pasados del lado derecho al izquierdo de la ecuación (ver artículo
JCAM).
    end
end

% Velocidad. Sección de entrada. Onda plana incidente
for ic=1:Nmod % Bucle de ajuste modal
    Vector(ic+Nmoda,1)=-kz1E(1)*V1E(:,1)*mat_M1E*V23E_r(:,ic); % Lado
derecho de la ecuación (ver artículo JCAM)
end
% Velocidad en cambio de sección A/B
for ic=1:Nmod % Bucle de ajuste modal
    % Velocidad en la expansión. Modos de conducto de entrada.
    for in=1:Nmoda % Bucle de modos de la superposición
        kz1E_i=kz1E(in);
        Matriz(ic+Nmoda,in)=-kz1E_i*V1E(:,in)*mat_M1E*V23E_r(:,ic); %
Regresivos. Lado izquierdo de la ecuación (ver artículo JCAM).
    end
    % Velocidad en la expansión. Modos de cámara de entrada.
    % Ortogonalidad. No hay bucle de modos en la superposición
    kz23E_i=kz23E(ic);
    Matriz(ic+Nmoda,ic+Nmoda)=-kz23E_i*V23E(:,ic)*mat_M23E*V23E(:,ic); %
Progresivos. Lado izquierdo de la ecuación (ver artículo JCAM).

Matriz(ic+Nmoda,ic+Nmod+Nmoda)=+kz23E_i*V23E(:,ic)*mat_M23E*V23E(:,ic); %
Regresivos. Lado izquierdo de la ecuación (ver artículo JCAM).
end

% =====
% Acoplamiento de presión y velocidad a ambos lados del monolito del
% catalizador
% =====
% Monolito de catalizador
for ic=1:Nmod % Ortogonalidad. No hay bucle de modos en la superposición
    kz23E_i=kz23E(ic);
    kz23S_i=kz23S(ic); % Se mantienen las secciones. kz23E = kz23S.
    % Da igual utilizar kz23E = kz23S en los monolitos (misma
    % sección)
    % ===== Acoplamiento con T11, T12, T21 y T22 de
    % catalizador
    % Presión
    Matriz(ic+Nmod+Nmoda,ic+Nmoda)=+exp(-j*kz23E_i*lb); %
Progresivos, lado izquierdo de la ecuación (ver artículo JCAM), aguas arriba.
    Matriz(ic+Nmod+Nmoda,ic+Nmod+Nmoda)=+exp(j*kz23E_i*lb); %
Regresivos, lado izquierdo de la ecuación (ver artículo JCAM), aguas arriba.
    Matriz(ic+Nmod+Nmoda,ic+2*Nmod+Nmoda)=-T11CC-
T12CC*kz23S_i/(rhoaire*w); % Progresivos, lado izquierdo de la ecuación (ver
artículo JCAM), aguas abajo.
    Matriz(ic+Nmod+Nmoda,ic+3*Nmod+Nmoda)=-
T11CC+T12CC*kz23S_i/(rhoaire*w); % Regresivos, lado izquierdo de la ecuación (ver
artículo JCAM), aguas abajo.

% Velocidad

```

```

    Matriz(ic+2*Nmod+Nmoda,ic+Nmoda)=+kz23E_i/(rhoaire*w)*exp(-
j*kz23E_i*1b); % Progresivos, ídem.
    Matriz(ic+2*Nmod+Nmoda,ic+Nmod+Nmoda)=-
kz23E_i/(rhoaire*w)*exp(j*kz23E_i*1b); % Regresivos, ídem.
    Matriz(ic+2*Nmod+Nmoda,ic+2*Nmod+Nmoda)=-T21CC-
T22CC*kz23S_i/(rhoaire*w); % Progresivos, ídem.
    Matriz(ic+2*Nmod+Nmoda,ic+3*Nmod+Nmoda)=-
T21CC+T22CC*kz23S_i/(rhoaire*w); % Regresivos, ídem.
    % ===== Fin de acoplamiento con T11, T12, T21 y T22 de
    % catalizador
end

% =====
% Acoplamiento de presión y velocidad a ambos lados del monolito de
% trampa de partículas
% =====
% Monolito de trampa de partículas
for ic=1:Nmod % Ortogonalidad. No hay bucle de modos en la superposición
    kz23E_i=kz23E(ic);
    kz23S_i=kz23S(ic); % Se mantienen las secciones. kz23E = kz23S.
    % Da igual utilizar kz23E = kz23S en los monolitos (misma
    % sección)
    % ===== Acoplamiento con T11, T12, T21 y T22 de trampa
    % de partículas
    % Presión
    Matriz(ic+3*Nmod+Nmoda,ic+2*Nmod+Nmoda)=+exp(-j*kz23E_i*1d); %
Progresivos, lado izquierdo de la ecuación (ver artículo JCAM), aguas arriba.
    Matriz(ic+3*Nmod+Nmoda,ic+3*Nmod+Nmoda)=+exp(j*kz23E_i*1d); %
Regresivos, lado izquierdo de la ecuación (ver artículo JCAM), aguas arriba.
    Matriz(ic+3*Nmod+Nmoda,ic+4*Nmod+Nmoda)=-T11DPF-
T12DPF*kz23S_i/(rhoaire*w); % Progresivos, lado izquierdo de la ecuación (ver
artículo JCAM), aguas abajo.
    Matriz(ic+3*Nmod+Nmoda,ic+5*Nmod+Nmoda)=-
T11DPF+T12DPF*kz23S_i/(rhoaire*w); % Regresivos, lado izquierdo de la ecuación
(ver artículo JCAM), aguas abajo.

    % Velocidad
    Matriz(ic+4*Nmod+Nmoda,ic+2*Nmod+Nmoda)=+kz23E_i/(rhoaire*w)*exp(-
j*kz23E_i*1d); % Progresivos, ídem.
    Matriz(ic+4*Nmod+Nmoda,ic+3*Nmod+Nmoda)=-
kz23E_i/(rhoaire*w)*exp(j*kz23E_i*1d); % Regresivos, ídem.
    Matriz(ic+4*Nmod+Nmoda,ic+4*Nmod+Nmoda)=-T21DPF-
T22DPF*kz23S_i/(rhoaire*w); % Progresivos, ídem.
    Matriz(ic+4*Nmod+Nmoda,ic+5*Nmod+Nmoda)=-
T21DPF+T22DPF*kz23S_i/(rhoaire*w); % Regresivos, ídem.
    % ===== Fin de acoplamiento con T11, T12, T21 y T22
end

% Presión en cambio de sección F/G
for ic=1:Nmodg % Bucle de ajuste modal
    % Presión en la contracción. Modos de conducto de salida G.
    % Ortogonalidad. No hay bucle de modos en la superposición
    Matriz(ic+5*Nmod+Nmoda,ic+6*Nmod+Nmoda)=V1S(:,ic)'*mat_M1S*V1S(:,ic);
% Progresivos. Lado derecho de la ecuación (ver artículo JCAM).

    % Presión en la contracción. Modos de cámara de salida F.
    for in=1:Nmod % Bucle de modos de la superposición

```

```
        kz23S_i=kz23S(in);
        Matriz(ic+5*Nmod+Nmoda,in+4*Nmod+Nmoda)=-
V23S_r(:,in)'*mat_M1S*V1S(:,ic)*exp(-j*kz23S_i*lf); % Progresivos. Lado derecho
de la ecuación (ver artículo JCAM).
        Matriz(ic+5*Nmod+Nmoda,in+5*Nmod+Nmoda)=-
V23S_r(:,in)'*mat_M1S*V1S(:,ic)*exp(j*kz23S_i*lf); % Regresivos. Lado derecho de
la ecuación (ver artículo JCAM).
    end
end

% Velocidad en cambio de sección F/G
for ic=1:Nmod % Bucle de ajuste modal
    % Velocidad en la contracción. Modos de conducto de salida G.
    for in=1:Nmodg % Bucle de modos de la superposición
        kz1S_i=kz1S(in);

Matriz(ic+Nmodg+5*Nmod+Nmoda,in+6*Nmod+Nmoda)=kz1S_i*V1S(:,in)'*mat_M1S*V23S_r(
,ic); % Progresivos. Lado derecho de la ecuación (ver artículo JCAM).
        end
        % Velocidad en la contracción. Modos de cámara de salida F.
        % Ortogonalidad. No hay bucle de modos en la superposición
        kz23S_i=kz23S(ic);
        Matriz(ic+Nmodg+5*Nmod+Nmoda,ic+4*Nmod+Nmoda)=-
kz23S_i*V23S(:,ic)'*mat_M23S*V23S(:,ic)*exp(-j*kz23S_i*lf); % Progresivos. Lado
derecho de la ecuación (ver artículo JCAM).

Matriz(ic+Nmodg+5*Nmod+Nmoda,ic+5*Nmod+Nmoda)=+kz23S_i*V23S(:,ic)'*mat_M23S*V23S
(:,ic)*exp(j*kz23S_i*lf); % Regresivos. Lado derecho de la ecuación (ver artículo
JCAM).
    end

    Sol=Matriz\Vector;

TL(nf,1)=10*log10((Sent*abs(1*V1E(1,1))^2)/(Ssal*abs(Sol(6*Nmod+Nmoda+1)*V1S(1,1
))^2)); % Tiene en cuenta áreas distintas, así como posibles normalizaciones
modales diferentes de 1

end % Fin del barrido en frecuencia
```

ANEXO V: SCRIPT DE MATLAB. OPTIMIZACIÓN DE LA PÉRDIDA DE TRANSMISIÓN ACÚSTICA

El código a ejecutar es principal_fmin.m o principal_ga según el algoritmo de optimización que se quiera utilizar.

PREVIO_AJUSTE_MODAL.M

```
% Catalizador + Trampa de Partículas
% Sección transversal arbitraria con monolitos (modelo 3D/1D).
% Técnica de ajuste modal híbrida analítica-numérica.
% =====

% Definición de la geometría, modelo, etc.
% =====

% Definición de propiedades y variables del problema
% =====

load variab

% =====
% =====
% Definición del modelo de elementos finitos
% =====
% =====

global xyE topE xyS topS;

% Topología de la sección de entrada

load xy2E % tubo central
load top2E % tubo central
load xy3E % cámara
load top3E % cámara

% Topología de la sección de salida

load xy2S % tubo central
load top2S % tubo central
load xy3S % cámara
load top3S % cámara

% Globalización de parámetros.
% Genera matrices con todos los nodos y elementos ordenados
% =====

n2E = size(xy2E,1);
nel2E = size(top2E,1);
n3E = size(xy3E,1);
nel3E = size(top3E,1);
nnpeE = size(top2E,2)-1;
```

```
n2S = size(xy2S,1);
nel2S = size(top2S,1);
n3S = size(xy3S,1);
nel3S = size(top3S,1);
nnpeS = size(top2S,2)-1;

[xyE,topE]=globaliza1(xy2E,xy3E,top2E,top3E);
nE=size(xyE,1);
nelE=size(topE,1);

[xyS,topS]=globaliza1(xy2S,xy3S,top2S,top3S);
nS=size(xyS,1);
nelS=size(topS,1);

% figure
% d_malla(nelE,nnpeE,xyE,topE) % Dibuja la malla de entrada
% pause

% figure
% d_malla(nelS,nnpeS,xyS,topS) % Dibuja la malla de salida
% pause

% Puntos de integración
% =====

ngauss2= 2;
g2(1)= -1/sqrt(3);
g2(2)= -g2(1);
h2(1)= 1.0;
h2(2)= h2(1);

% Puntos de integración
% =====

ngauss3= 3;
g3(1)= -sqrt(3/5);
g3(2)= 0.0;
g3(3)= -g3(1);
h3(1)= 5/9;
h3(2)= 8/9;
h3(3)= h3(1);

% Puntos de integración
% =====

ngauss4= 4;
g4(1)= -0.861136311594953;
g4(2)= -0.339981043584856;
g4(3)= -g4(2);
g4(4)= -g4(1);
h4(1)= 0.347854845137454;
h4(2)= 0.652145154862546;
h4(3)= h4(2);
h4(4)= h4(1);

% Número de modos
% =====
```

```
global Modos Nmod Nmoda Nmodg;

Modos=variab(6); % Número máximo de modos. Corresponde a la sección completa de
la cámara.

% Modificar esto se si desea utilizar diferentes modos por conducto

Nmod=Modos;
Nmoda=10;
Nmodg=10;

% Longitudes de las cámaras y los monolitos
% Secciones de conductos entrada/salida (cálculo del TL)
% =====

%lb=variab(7); % Longitud del tramo de expansión de la cámara ==> pasa a ser
x(1)
%lc=variab(8); % Longitud del monolito de catalizador ==> pasa a ser x(2)
%ld=variab(9); % Longitud del tramo central de aire ==> pasa a ser x(3)
%le=variab(10); % Longitud del monolito de trampa de partículas ==> pasa a ser
x(4)
%lf=variab(11); % Longitud del tramo de contracción de la cámara ==> pasa a ser
x(5)

global Sent Ssal;

Sent=variab(16); % Sección del conducto de entrada
Ssal=variab(17); % Sección del conducto de salida

% Definición de variables del problema
% =====

% Frecuencias de análisis
% Rango de frecuencias de optimización
% =====

global ffin fini deltaf TL TLmedio;

fini=variab(1); % Frecuencia inicial del intervalo de optimización
ffin=variab(2); % Frecuencia final del intervalo de optimización
deltaf=variab(3); % Incremento de frecuencia

% =====
% =====
% Propiedades del aire
% =====
% =====

global temp caire rhoaire;

temp=variab(15); % Temperatura (°C)
if temp==-1 % Se introducen los valores directamente
caire=variab(4); % Velocidad del sonido en el aire
rhoaire=variab(5); % Densidad del aire
end
if temp~-1 % Se calculan en función de la temperatura
```

```

caire = (1.4*8.314*(temp+273.15)/0.02897)^0.5;
rhoaire = 101325*0.02897/(8.314*(temp+273.15));
end
% =====
% =====
% Propiedades del monolito de catalizador. Modelo de Allard
% =====
% =====

global alpha visco kappa Cp prandtl;

%resis=variab(12); % Resistividad del monolito (realmente debería ser función
de la temperatura) ==> pasa a ser x(6)
%poro=variab(13); % Porosidad del monolito ==> pasa a ser x(7)

alpha=variab(7); % Factor geométrico del capilar
if temp==-1 % Se introducen los valores directamente
    visco=variab(8); % Viscosidad
    kappa=variab(9); % Conductividad térmica
    Cp=variab(10); % Calor específico a presión constante
end
if temp~-1 % Se calculan en función de la temperatura
    visco = 1.458e-6*(temp+273.15)^1.5/(temp+273.15+110.4) ; % Ecuación de
Sutherland; viscosidad dinámica
    kappa = 0.023635+7.562892e-5*temp-2.523277e-8*temp^2+4.648739e-12*temp^3;
% Conductividad térmica. Ajuste con Mathcad entre 0°C y 1000 °C
    Cp = 1.00734e3-0.059809*temp+8.879379e-4*temp^2-1.055691e-6*temp^3+4.044381e-
10*temp^4; % Calor específico a presión constante. Ajuste con Mathcad entre 0°C
y 1000 °C
end
prandtl=visco*Cp/kappa; % Número de Prandtl
%
% =====
% =====
% Propiedades del monolito de trampa de partículas. Modelo de Allam y Abom
% Se mantiene la redefinición de algunas propiedades
% Puede aprovecharse si se implementan monolitos con diferentes
% temperaturas
% =====
% =====
%=====
% Número de Mach (solamente efecto local en entrada y salida de capilares de
% trampa de partículas)
%=====
%
global M_IN;

M_IN=variab(11); % Corresponde al valor de la cámara contigua al monolito

global Temp c0ini rho0ini;
global mu cond cp;
global gamma lX e1 e2 e3 e4 r_IN r_OUT;
global Am dh Rw N;

Temp=temp; % Temperatura (°C)

```

```
monolito_2 % Ver código

% =====
% =====
% ELEMENTOS FINITOS. MATRICES DE MASA Y RIGIDEZ (ACÚSTICAS)
% =====
% =====
% Matrices para la sección de ENTRADA
% =====
% ---- Matrices de rigidez

[KA_A2E]=mat_k2(nel2E,xyE,top2E,ngauss4,g4,h4,nE); % Tubo central
[KA_A23E]=mat_k2_k3(nel3E,xyE,top3E,ngauss4,g4,h4,KA_A2E,nE); % Cámara (incluye
tubo central)

% ---- Matriz de masa

[MA_A2E]=mat_m2(nel2E,xyE,top2E,ngauss4,g4,h4,nE); % Tubo central
[MA_A23E]=mat_m2_m3(nel3E,xyE,top3E,ngauss4,g4,h4,MA_A2E,nE); % Cámara (incluye
tubo central)

% Matrices para la sección de SALIDA
% =====
% ---- Matrices de rigidez

[KA_A2S]=mat_k2(nel2S,xyS,top2S,ngauss4,g4,h4,nS); % Tubo central
[KA_A23S]=mat_k2_k3(nel3S,xyS,top3S,ngauss4,g4,h4,KA_A2S,nS); % Cámara (incluye
tubo central)

% ---- Matriz de masa m2

[MA_A2S]=mat_m2(nel2S,xyS,top2S,ngauss4,g4,h4,nS); % Tubo central
[MA_A23S]=mat_m2_m3(nel3S,xyS,top3S,ngauss4,g4,h4,MA_A2S,nS); % Cámara (incluye
tubo central)

% Cálculo de autovalores y autovectores (conducto de pared rígida)
% Sección de entrada
% =====

global D1E D23E D1S D23S V1E mat_M1E V23E_r V23E mat_M23E;
global V1S mat_M1S V23S_r V23S mat_M23S;

mat_K1E = KA_A2E(xy2E(:,1),xy2E(:,1)); % Submatriz de rigidez con nodos de
conducto de entrada
mat_K23E= KA_A23E; % Sección de entrada completa

mat_M1E = MA_A2E(xy2E(:,1),xy2E(:,1)); % Submatriz de masa con nodos de conducto
de entrada
mat_M23E = MA_A23E; % Sección de entrada completa

% Matriz de cálculo = inv(M)*K

% mat1E = mat_M1E\mat_K1E; % Parece que no proporciona ortogonalidad con matriz
de masa
% mat23E = mat_M23E\mat_K23E; % Parece que no proporciona ortogonalidad con
matriz de masa
```

```
%[V1E,D1E]=eig(full(mat1E)); % Autovalores reales. Son  $kt^2$  (en sección circular es  $(\alpha/R)^2$ )
%[V23E,D23E]=eig(full(mat23E));
%[V1E,D1E]=eig(mat1E); % Autovalores reales. Son  $kt^2$  (en sección circular es  $(\alpha/R)^2$ )
%[V23E,D23E]=eig(mat23E);
% Los métodos anteriores no proporcionan ortogonalidad respecto a la matriz de masa (?)
[V1E,D1E]=eig(mat_K1E,mat_M1E); % Autovalores reales. Son  $kt^2$  (en sección circular es  $(\alpha/R)^2$ )
[V23E,D23E]=eig(mat_K23E,mat_M23E);

% ---- Ordenación de los autovalores y los autovectores

D1E=diag(D1E);
D23E=diag(D23E);

Value1E=D1E;
[Sorted1E,Index1E]=sort(Value1E,'ascend');

D1E=D1E(Index1E);
V1E=V1E(:,Index1E);

Value23E=D23E;
[Sorted23E,Index23E]=sort(Value23E,'ascend');

D23E=D23E(Index23E);
V23E=V23E(:,Index23E);
V23E_r=V23E(xy2E(:,1),1:size(xy2E,1)); % Valores en los nodos de la sección de entrada

% Sección de salida
% =====

mat_K1S = KA_A2S(xy2S(:,1),xy2S(:,1)); % Submatriz de rigidez con nodos de conducto de salida
mat_K23S= KA_A23S; % Sección de salida completa

mat_M1S = MA_A2S(xy2S(:,1),xy2S(:,1)); % Submatriz de masa con nodos de conducto de salida
mat_M23S = MA_A23S; % Sección de salida completa

% Matriz de cálculo =  $\text{inv}(M)*K$ 

%mat1S = mat_M1S\mat_K1S; % Parece que no proporciona ortogonalidad con matriz de masa
%mat23S = mat_M23S\mat_K23S; % Parece que no proporciona ortogonalidad con matriz de masa

%[V1S,D1S]=eig(full(mat1S)); % Autovalores reales. Son  $kt^2$  (en sección circular es  $(\alpha/R)^2$ )
%[V23S,D23S]=eig(full(mat23S));
%[V1S,D1S]=eig(mat1S); % Autovalores reales. Son  $kt^2$  (en sección circular es  $(\alpha/R)^2$ )
%[V23S,D23S]=eig(mat23S);
% Los métodos anteriores no proporcionan ortogonalidad respecto a la matriz de masa (?)
```

```
[V1S,D1S]=eig(mat_K1S,mat_M1S); % Autovalores reales. Son  $kt^2$  (en sección  
circular es  $(\alpha/R)^2$ )  
[V23S,D23S]=eig(mat_K23S,mat_M23S);  
  
% ---- Ordenación de los autovalores y los autovectores  
  
D1S=diag(D1S);  
D23S=diag(D23S);  
  
Value1S=D1S;  
[Sorted1S,Index1S]=sort(Value1S,'ascend');  
  
D1S=D1S(Index1S);  
V1S=V1S(:,Index1S);  
  
Value23S=D23S;  
[Sorted23S,Index23S]=sort(Value23S,'ascend');  
  
D23S=D23S(Index23S);  
V23S=V23S(:,Index23S);  
V23S_r=V23S(xy2S(:,1),1:size(xy2S,1)); % Valores en los nodos de la sección  
de salida
```

PRINCIPAL_FMIN.M

```
% Catalizador+trampa de partículas  
% Sección transversal arbitraria con dos monolitos (modelo 3D/1D).  
% Técnica de ajuste modal híbrida analítica-numérica.  
% Función objetivo: TL (se minimiza el valor medio cambiado de signo  
% en el rango de frecuencias de interés).  
% =====  
  
clear all  
clf  
  
tic  
  
% Lectura de datos, mallados, cálculo de problema de autovalores  
% =====  
  
previo_ajuste_modal  
  
% Optimización  
% =====  
% Variables de optimización:  
% x(1) longitud de cámara de entrada Lb  
% x(2) longitud de monolito de catalizador Lc  
% x(3) longitud de cámara intermedia Ld  
% x(4) longitud de monolito de trampa de partículas Le  
% x(5) longitud de cámara de salida Lf  
% x(6) resistividad de monolito de catalizador  
% x(7) porosidad de monolito de catalizador
```

```
options = optimoptions(@fmincon,'Display','iter','Algorithm','interior-point');

lb=[0.025 0.050 0.025 0.100 0.025 750.00 0.70]; % Cota inferior
ub=[0.100 0.150 0.100 0.200 0.100 3000.0 0.95]; % Cota superior
% Valores iniciales
x0=0.5*(ub+lb);

[x,fval] = fmincon(@objetivo,x0,[],[],[],[],lb,ub,[],options)
toc
```

PRINCIPAL_GA.M

```
% Catalizador+trampa de partículas
% Sección transversal arbitraria con dos monolitos (modelo 3D/1D).
% Técnica de ajuste modal híbrida analítica-numérica.
% Función objetivo: TL (se minimiza el valor medio cambiado de signo
% en el rango de frecuencias de interés).
% =====

clear all
clf

tic

% Lectura de datos, mallados, cálculo de problema de autovalores
% =====

previo_ajuste_modal

% Optimización
% =====
% Variables de optimización:
% x(1) longitud de cámara de entrada Lb
% x(2) longitud de monolito de catalizador Lc
% x(3) longitud de cámara intermedia Ld
% x(4) longitud de monolito de trampa de partículas Le
% x(5) longitud de cámara de salida Lf
% x(6) resistividad de monolito de catalizador
% x(7) porosidad de monolito de catalizador

options = optimoptions('ga','ConstraintTolerance',1e-6,'Display',...
    'iter','FunctionTolerance',1e-6,...
    'PlotFcn', @gaplotbestf);

lb=[0.025 0.050 0.025 0.100 0.025 750. 0.70]; % Cota inferior
ub=[0.100 0.150 0.100 0.200 0.100 3000 0.95]; % Cota superior
nvar=7; % Número de variables a optimizar

[x,fval] = ga(@objetivo,nvar,[],[],[],[],lb,ub,[],options)

toc
```

OBJETIVO.M

```
% Catalizador+trampa de partículas
% Sección transversal arbitraria con dos monolitos (modelo 3D/1D).
% Técnica de ajuste modal híbrida analítica-numérica.
% Función objetivo: TL (se minimiza el valor medio cambiado de signo
% en el rango de frecuencias de interés).
% =====

function f = objetivo(x)

global Modos Nmod Nmoda Nmodg;
global Sent Ssal;
global ffin fini deltaf TL TLmedio;

global temp caire rhoaire;
global alpha visco kappa Cp prandtl;

global Temp c0ini rho0ini M_IN;
global mu cond cp;
global gamma lX e1 e2 e3 e4 r_IN r_OUT;
global Am dh Rw N;

global D1E D23E D1S D23S V1E mat_M1E V23E_r V23E mat_M23E;
global V1S mat_M1S V23S_r V23S mat_M23S;

% =====
% =====
% AJUSTE MODAL. GENERACIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES.
% Se toma como base el programa para geometrías circulares (artículo JCAM
% 330 (2018) 995-1006)
% Los sistemas de referencia cambian. Las integrales analíticas se
% reemplazan por las de EF (matrices de masa y modos de presión).
% =====
% =====

ajuste_modal

% =====
% Definición de función objetivo
% TL medio con signo negativo (Matlab minimiza)
% =====

f = -mean(TL); % Valor medio del TL con signo menos
%f = -(mean(TL)+1/std(TL)); % Valor medio del TL más inversa de desviación típica
(con signo menos)
%f = -(0.4*mean(TL)-0.6*std(TL)); % Valor medio del TL menos desviación típica
(Tesis Borja). Con signo menos.
```