

# A vueltas con la modelización del vaciado de depósitos

## Engaged in the revolution of solid modeling for tank drainage

Juan-Carlos Cortés López, Elena López Navarro, Cristina-Luisovna Pérez, Rafael-Jacinto Villanueva  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA.  
jccortes@mat.upv.es, ellona1@upvnet.upv.es, cperdiu@upv.es, rjvillan@imm.upv.es

---

### Abstract

*Presentamos el estudio general de un problema clásico de vaciado de depósitos cuya forma es un sólido de revolución y que tiene un agujero circular en su base por donde se desaloja el líquido. Para ello, obtenemos la ecuación diferencial que describe la altura del líquido contenido en el depósito en cada instante temporal,  $h(t)$ , así como el tiempo de vaciado,  $T$ . Ambas respuestas se dan en términos de las características geométricas de la curva de revolución que genera la forma sólida del depósito. Aunque se proporcionan respuestas explícitas de  $h(t)$  (en el caso de un cilindro) y de  $T$  (en el caso de un cilindro, un cono truncado y una esfera), mostramos que, en general, no es posible obtener expresiones explícitas de ambas cantidades. Para ilustrar esta última situación se muestran dos ejemplos donde describimos una metodología computacional para determinar  $h(t)$  y  $T$ , la cual es fácilmente adaptable para abordar el caso general de cualquier curva de revolución admisible. En la discusión de los distintos resultados que se obtienen a lo largo del trabajo se hace uso de diferentes estrategias propias del proceso de Resolución de Problemas, como el análisis de lo particular a lo general, el estudio de casos límites, la coherencia de la interpretación física de la respuesta a partir del análisis de la sensibilidad de la misma ante el cambio de uno de los parámetros del modelo, etc., que están diseñadas para ayudar a que las ideas expuestas a lo largo del artículo puedan aprovecharse en el aula.*

*We present a comprehensive analysis of a classical problem related to emptying tanks, which have a shape resembling a solid of revolution and feature a circular hole at their base through which the liquid is discharged. In this work, we derive the differential equation describing the liquid height within the tank at any given time,  $h(t)$ , and the total emptying time,  $T$ . Both solutions are expressed in terms of the geometric characteristics of the revolution curve that generates the tank's volume. While we provide explicit expressions for  $h(t)$  (in the case of a cylinder) and for  $T$  (in the case of a cylinder, a truncated cone, and a sphere), we demonstrate that, in general, obtaining explicit expressions for both quantities is not always feasible. To illustrate this, we present two examples and describe a computational methodology for determining  $h(t)$  and  $T$ , which is easily adaptable to address the general case of any permissible revolution curve. We employ various problem-solving strategies to discuss the results obtained throughout the study. These include analyzing from the particular to the general, examining limiting cases, and ensuring coherence in the physical interpretation of the response by analyzing its sensitivity to changes in the model's parameters, among others. These strategies are designed to facilitate the understanding of the ideas presented in the article and their application in an educational setting.*

---

**Palabras clave:** Modelización, vaciado de un depósito, ley de Torricelli, principio de Bernoulli, tiempo de vaciado, ecuaciones diferenciales ordinarias con variables separables, sólidos de revolución, métodos numérico-computacionales.

**Keywords:** Modeling, emptying of a tank, Torricelli's law, Bernoulli's principle, emptying time, ordinary differential equations with separable variables, solids of revolution, numerical-computational methods.

## 1. Motivación

Los ejercicios de modelización matemática ofrecen a los estudiantes la oportunidad de conectar la teoría dada en clase con su aplicación en problemas físicos -en un sentido amplio- de interés. En este trabajo presentamos el estudio de un problema clásico sobre la modelización del vaciado de depósitos cuyo análisis permite relacionar los conocimientos básicos que se adquieren en la asignatura de Física con técnicas básicas para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) y el cálculo del volumen de un cuerpo sólido generado por la revolución de una curva alrededor de un eje. Las ideas que exponemos han surgido del trabajo en el aula y generalizan los resultados que encontramos en los textos clásicos sobre EDOs que abordan el estudio del vaciado de depósitos, tales como el cilindro, el cono (truncado) o la esfera.

La introducción a la modelización matemática de este tipo de problemas tiene importantes ventajas, como su sencilla representación e interpretación geométrica, cercana a la intuición de los estudiantes, o como el hecho de que puedan formularse a través del primer tipo de EDOs que se suele estudiar en cualquier curso introductorio de Cálculo, a saber, las EDOs de variables separables. Además, como veremos, el estudio en el aula de este tipo de modelos es muy versátil ya que admite la posibilidad de modificar la geometría del tanque, lo que puede adaptar el nivel de complejidad del problema planteado, y con ello tener la oportunidad de tender la diversidad de niveles de conocimiento que normalmente nos encontramos en la práctica en el aula entre el alumnado. Posteriormente, en la subsección 5 se contextualiza con mayor detalle entornos de aprendizaje y estrategias para trabajar en el aula el modelo objeto de estudio en este trabajo.

En el Capítulo 1 del libro *Differential Equations with Boundary-Value Problems* (Zill, D. G., & Cullen, M. R., 2008). se plantea la modelización del proceso de vaciado de un depósito cilíndrico de dimensiones (radio y altura) conocidas lleno de agua que tiene un orificio circular en su base. Más concretamente, se pide determinar la altura del líquido en cada instante. En este contexto, se recurre al principio físico de Torricelli sobre dinámica de fluidos, el cual establece que la velocidad  $v$  del flujo de un líquido a través de un orificio en la base de un recipiente lleno hasta una altura  $h$  es análoga a la velocidad de un cuerpo en caída libre desde dicha altura. A partir de dicho principio, se deriva una expresión para la velocidad con la que disminuye la altura  $h$  del líquido en el depósito cilíndrico. También se indica que la expresión obtenida es aplicable a tanques con secciones transversales de área variable, en concreto, en el ejercicio 14 de este mismo capítulo, se propone determinar la EDO para un tanque en forma de cono invertido, la cual puede obtenerse simplemente utilizando el teorema de semejanza de los triángulos rectángulos cuyos catetos están definidos por los radios de una sección transversal y la base del cono, por una parte, y por las correspondientes alturas, por otra parte, y cuyas hipotenusas están determinadas sobre la generatriz del cono.

En el mismo contexto, en el artículo titulado *Modelo matemático del llenado de recipientes* (Marmolejo, E., & Riestra, J. A. 2013), los autores tratan un problema similar: el de llenado de recipientes. El estudio se orienta al análisis de dos tipos particulares de recipientes generados por revolución de una curva, el cilindro (con área transversal constante y cuya curva generadora es una recta de pendiente nula) y el cono (con área transversal que varía linealmente con el radio de dicha sección y cuya curva generadora es una recta de pendiente no nula).

El objetivo del presente trabajo es la generalización del estudio anterior para modelizar el vaciado de depósitos obtenidos por la revolución de una función estrictamente positiva arbitraria. De esta manera podemos tratar depósitos con geometrías bastante variadas, que incluyen el cilindro y el cono como casos particulares. Además, determinaremos el tiempo de vaciado del depósito analizando la coherencia de los resultados obtenidos en términos de la intuición física, lo que contribuye a formar a los estudiantes en la incorporación de estrategias de análisis de los resultados que se obtengan cada vez que se resuelven problemas cuyos resultados son

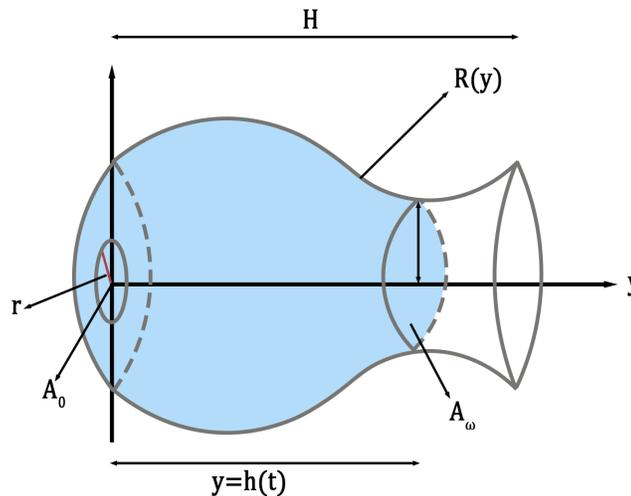


Figura 1: Volumen de un cuerpo de revolución generado por la función  $R(y)$  donde  $0 \leq y \leq H$ .

susceptibles de interpretación física y/o visualización geométrica.

## 2. Resolución del problema general

Para resolver el problema del vaciado de depósitos es clave adoptar un enfoque interdisciplinar. Aquí, no solo necesitamos entender principios básicos de Física, como la conservación de energía y los principios de Torricelli y de Bernoulli en Mecánica de Fluidos, sino también hacer uso de resultados matemáticos importantes del Cálculo Diferencial e Integral para estudiar problemas que involucran volúmenes de sólidos de revolución. Este tipo de problemas ayudan a desarrollar habilidades analíticas esenciales para abordar la modelización de problemas realistas y aplicar los conocimientos adquiridos en el aula.

Para calcular el volumen de un depósito cuyas secciones transversales no son constantes empleamos integrales definidas. Si el volumen se genera por la revolución de una función real positiva,  $R : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , que depende de la altura  $h \geq 0$ , entonces  $R(h)$  describe el radio del sólido dada una altura  $0 \leq h \leq H < \infty$ , donde  $H$  es la altura del recipiente (véase la Figura 1).

Claramente, en este contexto el área transversal a una altura  $h$  es (véase la Figura 1)

$$A_w(h) = \pi R^2(h), \quad (1)$$

por lo tanto el volumen del líquido en el interior de este recipiente viene dado por la siguiente integral definida cuyo intervalo de integración recorre todo el rango de variación de la altura hasta el valor de la misma, digamos  $h$ , en el que se desea obtener el volumen del líquido

$$V(h) := \int_0^h A_w(s) ds = \int_0^h \pi R^2(s) ds, \quad 0 \leq h \leq H < \infty. \quad (2)$$

Para el caso particular en que  $h = H > 0$ , el valor  $V(H) > 0$  representa el volumen del cuerpo de revolución (depósito en nuestro contexto) en cuestión.

Por otra parte, es intuitivo que la altura  $h$  del líquido que hay en el interior del recipiente decrece con el tiempo durante el proceso de vaciado. Por tanto, la altura  $h$  se puede considerar como una función del tiempo,  $h = h(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , siendo  $T$  el tiempo de vaciado del recipiente, es decir, se cumple que  $h(T) = 0$ . Además, como asumimos que el recipiente está lleno en el

instante  $t = 0$ , se cumple que  $h(0) = H$ . Entonces, en nuestro contexto de vaciado del depósito de revolución, la expresión (2) se puede reescribir como

$$V(t) \equiv V(h(t)) = \int_{h(T)}^{h(t)} A_w(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T < \infty, \quad (3)$$

donde con la notación inicial  $V(t)$  simplificamos la escritura y subrayamos la dependencia del volumen respecto del tiempo.

Si derivamos respecto del tiempo  $t$  la expresión (3), obtenemos la siguiente EDO

$$\frac{dV(t)}{dt} = A_w(h(t)) \frac{dh(t)}{dt}. \quad (4)$$

Para el vaciado del depósito, asumimos que nuestro depósito tiene un orificio circular de radio  $r$  en su base y, por tanto, su área es (véase Figura 1)

$$A_o = \pi r^2. \quad (5)$$

Para simplificar el análisis posterior, supondremos que el radio del orificio es muy pequeño en comparación con el diámetro de las secciones del depósito. Esta hipótesis es plausible en la mayoría de los casos prácticos, y se satisface en los ejemplos numéricos que posteriormente mostramos. Nótese que en este modelo asumimos que el depósito se llena completamente al principio con el orificio de desalojo del fluido tapado. Ahora, usando el principio de Torricelli como en (Zill, D. G., & Cullen, M. R. 2008), sabemos que la variación instantánea del volumen del depósito está modelizada por

$$\frac{dV(t)}{dt} = -A_o v_o(t), \quad (6)$$

donde  $v_o(t)$  es la velocidad del fluido al salir del depósito y  $V(t)$  es el volumen del líquido contenido en el depósito en el instante  $t$ . En adelante asumiremos que el fluido contenido en el depósito es incompresible (como, por ejemplo, el agua o el aceite), por lo que el término  $A_o v_o(t)$  del miembro derecho de la EDO (6), según la ecuación de conservación de la masa para fluidos incompresibles, cumple:  $A_o v_o(t) = A_w(h(t))v(t) = c$ , siendo  $A_w(h(t))$  el área de una sección a la altura  $h(t)$  y  $v(t)$  la velocidad del fluido a dicha altura. A la constante  $c$  se denomina caudal. Finalmente, cabe señalar que como hemos asumido que el área del orificio es muy pequeña respecto del área de las secciones, la velocidad  $v(t)$  y la altura  $h(t)$  varían muy despacio, con lo cual puede asumirse que para cada instante temporal  $t$  el flujo es estacionario, lo que nos a permitir aplicar la ley de Bernoulli, como veremos a continuación.

Ahora deduciremos la expresión de la velocidad  $v_o(t)$  en términos de la altura  $h(t)$ . Para ello, aplicaremos la conocida ley o trinomio de Bernoulli asumiendo ciertas hipótesis que simplifican el análisis. Recordemos que el principio de Bernoulli afirma que para un flujo no viscoso y estacionario de un fluido incompresible se cumple que  $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = k$ , siendo  $P$  la presión,  $\rho$  la densidad del fluido,  $v$  la velocidad,  $y$  la cota y  $k$  una constante. Esta relación puede aplicarse para la sección de área  $A_w(h)$  del depósito que está lleno a una altura  $h = h(t)$ , y donde la velocidad del fluido es  $v(t)$  y la presión es  $P$ , obteniéndose:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2(t) + \rho g h(t) = k.$$

Del mismo modo, el principio de Bernoulli también puede aplicarse para la sección de área  $A_o$  correspondiente a la salida del fluido por el orificio inferior cuya velocidad de salida hemos

denotado anteriormente por  $v_o(t)$ , donde la presión es la atmosférica,  $P_a$ , e  $y = 0$  (tomando el fondo del depósito como nivel de referencia), lo que conduce

$$P_a + \frac{1}{2}\rho v_o^2(t) = k.$$

De ambas relaciones se obtiene

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2(t) + \rho gh(t) = P_a + \frac{1}{2}\rho v_o^2(t),$$

es decir,

$$v_o^2(t) = v^2(t) + 2\frac{P - P_a}{\rho} + 2gh(t).$$

Asumiremos que el depósito está abierto, con lo cual  $P = P_a$ . Además, como hemos asumido que el área,  $A_o$ , del orificio de desalojo es mucho menor que el área,  $A_w(h(t))$ , de la sección del depósito a la altura  $h(t)$ , y teniendo en cuenta que, como ya hemos indicado antes,  $A_w(h(t))v(t) = A_o v_o(t)$  (por la ecuación de conservación de la masa para fluidos incompresibles), se deduce que  $v(t) \ll v_o(t)$ . Por tanto,  $v^2(t)$  es despreciable frente  $v_o^2(t)$ , de donde se obtiene

$$v_o^2(t) = 2gh(t),$$

es decir,

$$v_o(t) = \sqrt{2gh(t)}. \quad (7)$$

**Nota 1** Aunque en la exposición anterior hemos deducido la relación (7) tratando a partir de resultados de dinámica de fluidos, nos parece oportuno señalar que en algunos textos de EDOs que contienen aplicaciones a la modelización matemática (Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. 2012, Zill, D. G., & Cullen, M. R., 2008), esta relación se justifica aplicando el principio de la conservación de energía que indica que en cada instante  $t$  se cumple

$$\frac{1}{2}mv^2(t) = mgh(t),$$

de donde es inmediato obtener la velocidad

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)}.$$

Reemplazando esta velocidad en la expresión (6), obtenemos

$$\frac{dV(t)}{dt} = -A_o\sqrt{2gh(t)}. \quad (8)$$

Ahora podemos igualar las expresiones (4) y (8), ya que ambas nos dan la velocidad con la que decae el volumen del líquido en un mismo depósito

$$A_w(h(t))\frac{dh(t)}{dt} = -A_o\sqrt{2gh(t)}.$$

En esta expresión podemos reemplazar  $A_w(h(t))$  y  $A_o$  por sus expresiones en función del radio, dadas en (1) y (5), respectivamente, de lo que resulta

$$\pi R^2(h)\frac{dh(t)}{dt} = -\pi r^2\sqrt{2gh(t)},$$

que es una EDO en variables separables (Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. 2012). Para resolverla, primero separaremos las dos variables  $h = h(t)$  y  $t$ , obteniendo, después de simplificar, la siguiente EDO en variables separadas

$$R^2(h) \frac{dh}{\sqrt{h}} = -r^2 \sqrt{2g} dt.$$

Para resolverla basta integrar cada miembro en el intervalo de integración correspondiente

$$\int_H^h \frac{R^2(y)}{\sqrt{y}} dy = -r^2 \sqrt{2g} \int_0^t dy.$$

Es importante observar la correspondencia entre los extremos de integración en la expresión anterior: en la integral de la derecha los extremos corresponden a tiempos y en la integral de la izquierda aparecen los valores correspondientes de las alturas del líquido contenido en el tanque. Integrando la parte derecha, se obtiene

$$\int_H^h y^{-\frac{1}{2}} R^2(y) dy = -kt, \quad t \in [0, T], \quad k := r^2 \sqrt{2g}. \quad (9)$$

Esta expresión proporciona una solución semiexplícita (en términos de una integral) del problema. En la práctica, y como veremos después con varios ejemplos, dada una función  $R = R(y)$  que determina el radio del depósito de revolución a una altura  $y$ , si somos capaces primero de calcular una primitiva de la función  $y^{-\frac{1}{2}} R^2(y)$  y, en segundo lugar -después de aplicar la regla de Barrow- de despejar el valor de  $h = h(t)$ , obtendremos entonces una fórmula explícita de la altura del líquido en el interior del depósito en el instante  $t$ .

En el caso en que no sea posible la obtención de la citada primitiva, el problema puede igualmente abordarse aplicando técnicas de cuadratura (como, por ejemplo, la regla de Simpson), mientras que, si siendo posible la obtención de una primitiva, no fuéramos capaces de resolver explícitamente la ecuación algebraica no lineal en  $h$  resultante, entonces, podemos utilizar métodos numéricos iterativos (como, por ejemplo, el método de Newton) para dar una respuesta aproximada al problema. Cualquiera de los dos casos son susceptibles de poder aprovecharse en el aula para profundizar en otros contenidos matemáticos que se abordan en muchos cursos universitarios donde se explican también las EDOs con aplicaciones a la modelización. Como se verá más adelante, en este trabajo ilustraremos el segundo escenario. En cualquier caso, es de nuevo un buen momento para subrayar la notable riqueza formativa del modelo para poder aprovecharlo en una extensa variedad de contextos en el aula donde queramos trabajar el problema con un menor o mayor nivel de dificultad, así como las correspondientes técnicas matemáticas requeridas para proporcionar una respuesta del mismo.

### 3. Analizando la solución y ciertas cantidades de interés obtenidas a partir de ella

Como se recomienda en textos de referencia sobre Estrategias para la Resolución de Problemas (Polya, G. 2014, de Guzmán Ozamiz, M. 2019, Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. 1989), una vez obtenida la solución de un determinado problema resulta particularmente formativa la tarea de analizar la solución desde las distintas perspectivas ) que admita el contexto del problema. En nuestro caso pasamos a analizar la solución, es decir, la altura del líquido en el interior del depósito, como función de los parámetros  $r$  y  $H$ . También analizaremos el tiempo de vaciado del depósito, el cual puede deducirse fácilmente a partir de la solución. Primero realizaremos este análisis en el caso particular en el que el depósito es un cilindro, y posteriormente abordaremos el caso general.

### 3.1. Análisis del depósito cilíndrico

A partir de la expresión (9) para determinar la altura de un líquido en un cilindro es suficiente imponer que  $R(h) = c$ ,  $c > 0$ , ya que, en este caso sabemos que el área transversal del depósito es constante a cualquier altura del mismo (el cilindro es un cuerpo de revolución que se genera por una función constante). Entonces, substituyendo  $R(h) = c > 0$  en (9) se obtiene

$$\int_H^h y^{-\frac{1}{2}} c^2 dy = -kt.$$

En este caso, el integrando admite como primitiva

$$F(y) = 2c^2 \sqrt{y}, \quad (10)$$

y la integral definida es fácil de calcular, resultando la siguiente expresión:

$$2c^2(\sqrt{h} - \sqrt{H}) = -kt.$$

Obsérvese que la altura  $h = h(t)$  es fácil de despejar usando álgebra elemental, obteniéndose la siguiente expresión explícita de la altura del líquido en un cilindro de altura  $H$ , radio  $c$  y con un orificio en su base de radio  $r$  en función del tiempo  $t$ :

$$h(t) = \left( \sqrt{H} - \frac{kt}{2c^2} \right)^2, \quad t \in [0, T], \quad k = r^2 \sqrt{2g}, \quad (11)$$

donde recuérdese que  $T$  es el tiempo de vaciado. Comprobemos la consistencia de esta expresión. En primer lugar, observemos que poniendo  $t = 0$  en la expresión (11) se obtiene  $h(0) = H$ , lo cual nos indica que inicialmente el depósito está lleno, tal y como habíamos supuesto al inicio para resolver el problema.

Ahora vamos a determinar el valor de  $T$ , es decir, el tiempo total de vaciado del tanque. Para ello basta imponer  $h(T) = 0$  en (11):

$$\left( \sqrt{H} - \frac{kT}{2c^2} \right)^2 = 0.$$

Resolviendo para  $T$  se obtiene:

$$T = 2 \left( \frac{c}{r} \right)^2 \sqrt{\frac{H}{2g}}, \quad (12)$$

donde hemos substituido el valor de  $k = r^2 \sqrt{2g}$  para realizar un análisis del tipo *ceteris paribus* o de sensibilidad, es decir, cómo cambia el tiempo de vaciado  $T$  cuando varía (normalmente esta variación se hace aumentando) uno de los parámetros  $H$ ,  $c$ , y  $r$ , manteniendo el resto constantes. A partir de la expresión (12), se observa:

- Al aumentar solo la altura  $H$  del cilindro,  $T$  aumenta. Este aumento es lógico, ya que un cilindro más alto tiene un volumen mayor y, por lo tanto, tardará más en vaciarse. Notese, que aquí  $H$  aparece en una raíz cuadrada. Entóndes si aumentamos  $H$  de un  $X\%$ ,  $T$  aumentará solamente de un  $(\sqrt{1+X} - 1)\%$ . Por ejemplo si aumentamos  $H$  de  $10\%$  obtendremos una augumentación de  $T$  de solo  $4.8\%$  aproximadamente.
- Al aumentar solo el radio  $c$  del cilindro, también se observa un aumento en  $T$ , como cabe esperar desde el punto de vista intuitivo, ya que, al generar un cilindro con un volumen más grande, cabe más líquido y el tiempo de vaciado aumenta. Además, al estar  $c$  elevado al cuadrado, si lo aumentamos de un  $X\%$ ,  $T$  aumentará de un  $(2X + X^2)\%$ . Por ejemplo, si aumentamos el radio  $c$  un  $10\%$ , tendremos que  $T$  aumentará de un  $21\%$ .

- Al aumentar el radio  $r$  del orificio por donde se desaloja el líquido, el tiempo de vaciado disminuye, debido a que el flujo del líquido a través del orificio aumenta. Al estar al cuadrado en la ecuación de  $T$ , cuando aumentamos  $r$  solo de un  $X\%$ ,  $T$  disminuye de un  $\frac{X(X+2)}{(X+1)^2}\%$ . Esto significa que si, por ejemplo, aumentamos  $r$  de un  $10\%$  notaremos una disminución de  $T$  de aproximadamente un  $17\%$ .

Este sencillo análisis, que puede también realizarse en términos de la monotonía (crecimiento/-decrecimiento) de  $T$  como función del parámetro que se varía, en nuestro análisis, aumentándolo, corrobora que la expresión obtenida para  $T$  satisface el comportamiento intuitivo esperado acerca de la variación de  $T$ . Es interesante señalar ahora que, en el análisis anterior, también podría haberse realizado un estudio de lo que en de Guzman)de Guzmán Ozamiz, M. (2019) se denomina el *estudio de casos límite*. Por ejemplo, si  $r = 0$  -caso límite para el radio del agujero por donde se desaloja el líquido- el tiempo de vaciado, según (12), es  $T = \infty$ , que se corresponde con el hecho de que si no hay orificio, nunca se podrá vaciar el cilindro.

### 3.2. Análisis de la solución general

Como en el caso del cilindro, lo primero que vamos a hacer es comprobar que la fórmula general (9) satisface nuestra hipótesis de partida, esto es, que inicialmente el depósito está lleno y  $h(0) = H$ . Para ello, vamos a reescribir (9) mostrando explícitamente en el extremo superior de integración la dependencia temporal de la altura del líquido contenido en el depósito:

$$\int_H^{h(t)} y^{-\frac{1}{2}} R^2(y) dy = -kt, \quad t \in [0, T], \quad k = r^2 \sqrt{2g}. \tag{13}$$

Entonces observemos que cuando  $t = 0$ , el término derecho de (13) es  $-k \cdot 0 = 0$  y el término izquierdo es una integral definida de una función positiva por lo que para que dicha integral sea nula se debe cumplir que su dominio de integración tenga medida nula, es decir,  $h(t = 0) = H$ , tal y como queríamos probar.

Ahora calcularemos el tiempo de vaciado del depósito. Para ello, en primer lugar observemos que como el miembro de la derecha de la expresión (13) existe siempre (recordemos que asumimos que  $T < \infty$ ), entonces el miembro de la izquierda, es decir, la integral definida, también existirá siempre. Claramente el tiempo de vaciado  $T$  se corresponde con  $h(T) = 0$ , por tanto substituyendo esta condición en (13), obtenemos

$$\int_H^{h(T)=0} y^{-\frac{1}{2}} R^2(y) dy = -kT, \quad k = r^2 \sqrt{2g},$$

es decir,

$$\int_0^H y^{-\frac{1}{2}} R^2(y) dy = kT, \quad k = r^2 \sqrt{2g}. \tag{14}$$

Sea  $F(y)$  una primitiva de la integral (indefinida) anterior, es decir,

$$\frac{dF(y)}{dy} = y^{-\frac{1}{2}} R^2(y), \tag{15}$$

entonces, aplicando la regla de Barrow, la expresión (14) se puede expresar como

$$F(H) - F(0) = kT,$$

y entonces el tiempo de vaciado está dado por

$$T = \frac{F(H) - F(0)}{k} = \frac{F(H) - F(0)}{r^2 \sqrt{2g}}. \tag{16}$$

Observemos que como  $y^{-\frac{1}{2}}R^2(y) \geq 0$ ,  $y \in [0, H]$ , entonces por (15),  $F(y)$  es creciente, y por tanto, según (16),  $T \geq 0$ , es decir, el tiempo de vaciado está bien definido. Finalmente, es inmediato comprobar que la expresión general del tiempo de vaciado obtenido en (16) reproduce correctamente el valor calculado anteriormente para el caso del cilindro. Para ello basta sustituir la expresión  $F(y) = 2c^2\sqrt{y}$ , dada en (10), en (16) y chequear que se corresponde con el valor de  $T$  dado en (12).

Cerramos esta sección incluyendo en el Cuadro 1 las expresiones de la altura  $h = h(t)$  del líquido en el interior del depósito en el instante  $t$  y el tiempo de vaciado  $T$  en distintos tipos de depósitos generados por revolución de una curva  $R(h)$ , a saber, el cono y la esfera truncados. Omitimos los detalles técnicos del cálculo de  $h = h(t)$  y de  $T$  para este tipo de depósitos porque se procede del mismo modo que para el caso del cilindro, el cual ha sido anteriormente explicado con detalle. En cualquier caso bastaría con aplicar las expresiones (9) y (16) para  $h = h(t)$  y  $T$ , respectivamente, teniendo en cuenta el valor correspondiente de  $F(y)$  obtenido por integración, según (15), dada la función  $R(y)$  que genera el depósito. En el Cuadro 1 también especificamos los valores de dichas funciones  $R(y)$ .

## 4. Ejemplos

En este apartado ilustraremos los resultados teóricos obtenidos antes para diferentes formas del depósito. La ventaja que tenemos al disponer de resultados completamente generales es que no solo podemos simular los casos que se abordan en la mayoría de textos que tratan el vaciado de depósitos, como el cilindro o el cono truncado (Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. 2012, Zill, D. G., & Cullen, M. R., 2008), sino cualquier otra forma que deseemos fijando una función  $R(y)$  adecuada que defina el radio de la sección transversal. En otras palabras, gracias a la fórmula general podemos hacer simulaciones numéricas para ilustrar el vaciado de depósitos con formas de interés. Nosotros aquí elegiremos depósitos con forma de vaso y de copa. En todos los ejemplos tomaremos  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  (metros por segundos al cuadrado). Esto nos impone que el tiempo se mida en segundos (s) y las longitudes en metros (m).

Para ilustrar los ejemplos gráficamente usamos el software *Wolfram Mathematica*® (Wolfram Research, Inc. 2023). Dada una función  $R(y)$  y valores de los parámetros  $H > 0$  y  $r > 0$ , para obtener la altura  $h$  del líquido dentro del depósito en cada instante  $t$ , utilizaremos la expresión (9). Una vez calculada  $h = h(t)$ , también implementaremos una función que determine el tiempo de vaciado  $T$ , resolviendo la ecuación algebraica  $h(T) = 0$  (observemos que también se puede obtener  $T$  a partir de la expresión (16) conocida la primitiva  $F(y)$  que cumple (15)). La implementación de estas dos funciones se detalla en el Apéndice.

| Forma del depósito         | Parámetros   | $R(y) = R(h(t)), 0 \leq y \leq H$       | $h(t)$   | $T$   |
|----------------------------|--|---|--|---|
| General                    | $H$ : altura del depósito<br>$g$ : gravedad<br>$r$ : radio del orificio ( $r > 0$ )  | $R(y) > 0, R(0) > r$                    | $h(t)$ tal que se verifique:<br>$\int_H^{h(t)} y^{-\frac{1}{2}} R^2(y) dy = -r^2 \sqrt{2gt}$   | $\frac{F(H) - F(0)}{r^2 \sqrt{2g}}$   |
| Cilindro (Figura 2)        | $c$ : radio del cilindro<br>( $r < R(0) = c$ )   | $R(y) = c$                              | $h(t) = \left( \sqrt{H} - \frac{r^2 \sqrt{2gt}}{2c^2} \right)^2$   | $2 \left( \frac{c}{r} \right)^2 \sqrt{\frac{H}{2g}}$  |
| Cono truncado (Figura 3)   | $B$ : radio de la base grande<br>( $r < R(0) = B$ )<br>$m$ : pendiente del depósito conico<br>( $m > 0$ )<br>$b$ : radio de la base pequeña<br>( $B - mH = R(H) = b$ ) | $R(y) = B - my$                         | $h(t)$ tal que se verifique:<br>$2B^2(\sqrt{h(t)} - \sqrt{H}) + \frac{4}{3}B(-h(t))^{3/2} + H^{3/2}m + \frac{2}{5}(h(t))^{5/2} - H^{5/2}m^2 = -r^2 \sqrt{2gt}$ | $\frac{\sqrt{H}(2B^2 - \frac{4}{3}BHm + \frac{2}{5}(Hm)^2)}{r^2 \sqrt{2g}}$                         |
| Esfera truncada (Figura 4) | $R_e$ : radio de la esfera ( $R_e > 0$ )<br>$l$ : altura de truncación<br>( $0 < l < 2R_e$ )   | $R(y) = \sqrt{R_e^2 - (y + l - R_e)^2}$ | $h(t)$ tal que se verifique:<br>$\int_H^{h(t)} \frac{y(2R_e - y - 2l) + l(2R_e - l)}{\sqrt{y}} dy = -r^2 \sqrt{2gt}$   | $\frac{\sqrt{H}(-\frac{40}{5}H^2 - 2l^2 + 4lR + H(-\frac{40}{3}l + \frac{40}{3}R))}{r^2 \sqrt{2g}}$ |

Cuadro 1: Formulas para el modelado del vaciado de depósitos de forma general y para los casos del cilindro, cono truncado, y esfera truncada. Los parámetros del depósito de forma general (fila en gris) se aplican a todos las demás formas. En esta tabla asumimos que  $t \in [0, T]$ , donde  $T$  es el tiempo de vaciado y por lo tanto que  $h(t) \in [0, H]$ . En el cálculo de  $T$  (dentro del caso general),  $F$  representa una primitiva de la integral  $\int y^{-\frac{1}{2}} R^2(y) dy$ .

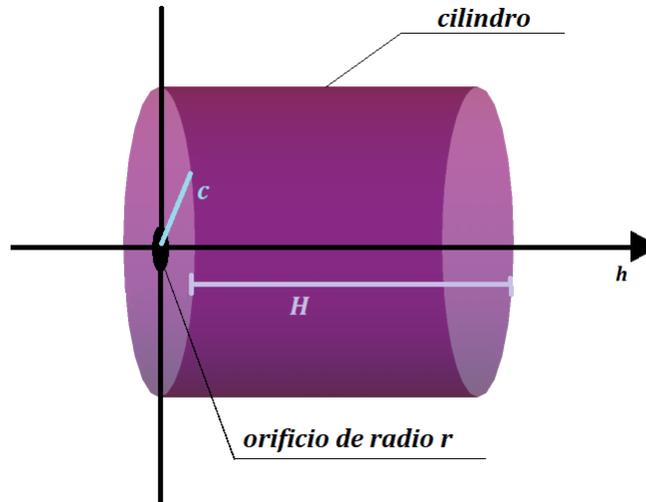


Figura 2: Depósito en forma de cilindro.

#### 4.1. Ejemplo 1: Depósito en forma de vaso

En este ejemplo queremos generar un depósito que tenga forma de vaso. Por supuesto, los vasos pueden ser de muchas formas y podríamos usar infinitas funciones para modelizar nuestro vaso. En este ejemplo usaremos la función  $R(y) = 2 + \sqrt{y}$ , porque nos genera un volumen de forma agradable cuando  $y$  varía entre 0 y 10. Entonces, tomamos la altura del depósito  $H = 10$  m, y elegimos un radio del orificio de descarga  $r = 0.01$  m (obsérvese que este tiene que ser muy inferior a  $R(0) = 2$  m, para que se satisfagan las hipótesis físicas expuestas en la Sección 2 y poder aplicar los resultados obtenidos en dicha sección). Con toda esta información prefijada ya podemos determinar que el tiempo de vaciado  $T$  es, según (14), la solución de la siguiente ecuación

$$\int_0^{10} y^{-\frac{1}{2}}(2 + \sqrt{y})^2 dy = 0.01^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.8} \cdot T = 4.42719 \times 10^{-4}T,$$

de donde  $T = 195113$  s que equivale a 54 horas, 11 minutos y 52 segundos aproximadamente. Para calcular la altura  $h = h(t)$  del líquido que hay en el depósito en cada instante  $t$ , según (9), basta resolver la siguiente ecuación en  $h$ :

$$\frac{2}{3} \left( h^{2/3} + 12\sqrt{h} + 6h - 22\sqrt{10} - 60 \right) = \int_{10}^h y^{-\frac{1}{2}}(2 + \sqrt{y})^2 dy = -4.42719 \times 10^{-4}t,$$

$$h > 0, t \in (0, 195113),$$

donde el intervalo de variación de  $t$  ha sido determinado a partir de la interpretación física del problema y el tiempo total de vaciado anteriormente calculado. Aunque, como ya se ha comentado en el desarrollo teórico mostrado en el apartado anterior, el problema puede conducir a la resolución de ecuaciones no resolubles en forma exacta para la determinación explícita de la función  $h = h(t)$ , tal y como ocurre en este ejemplo. Esto no supone un problema desde el punto de vista práctico porque gracias al uso de asistentes computacionales adecuados - como Mathematica<sup>©</sup> (Wolfram Research, Inc. 2023)- podemos obtener la solución numérica, así como la visualización dinámica de los resultados usando el comando `Manipulate`. En la Figura 5 mostramos el vaciado del depósito en forma de vaso con los datos anteriormente descritos en diferentes instantes temporales. En la Figura 6, mostramos una captura de pantalla

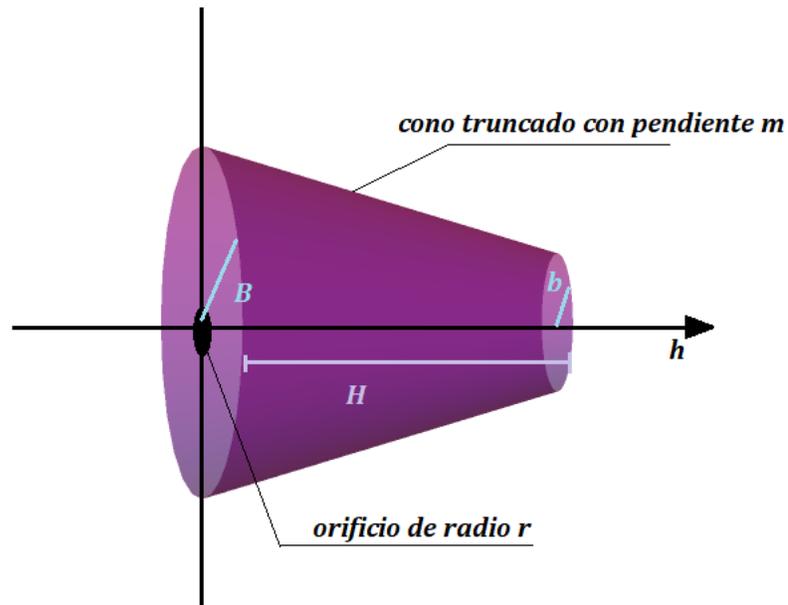


Figura 3: Depósito en forma de cono truncado.

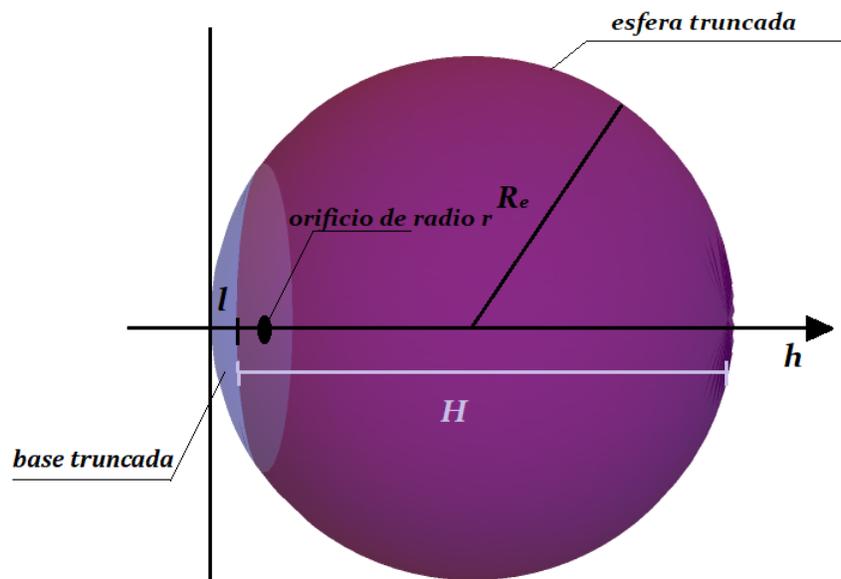


Figura 4: Depósito en forma de esfera truncada (en violeta) con la base truncada (en azul).

del notebook de Mathematica<sup>©</sup> (Wolfram Research, Inc. 2023). implementado y accesible en este [repositorio de Github](#). A partir de las ideas mostrados en este enlace es sencillo crear un notebook interactivo en Mathematica<sup>©</sup> (Wolfram Research, Inc. 2023) que permita al alumno ver de manera interactiva cómo se va vaciando el depósito.

#### 4.2. Ejemplo 2: Depósito en forma de copa

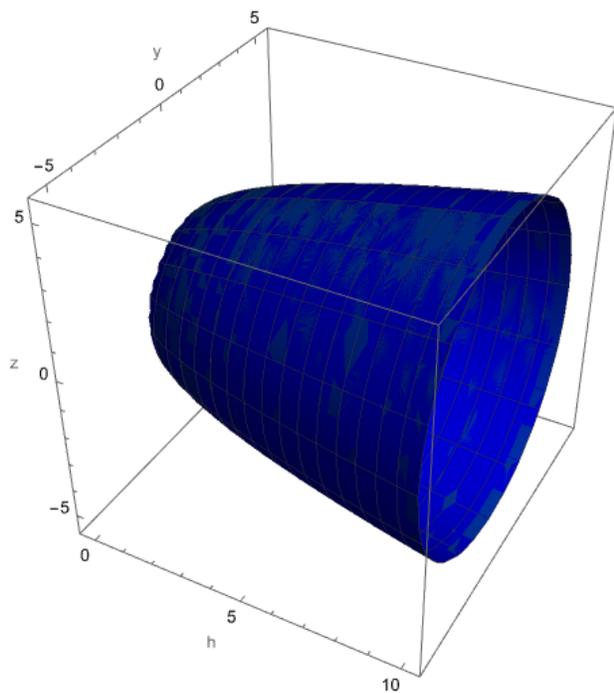
En el segundo ejemplo que presentamos queremos generar un depósito en forma de copa. Aquí también es importante notar que una copa puede ser de muchas formas, incluyendo formas no simétricas que no entran en el alcance de este trabajo. Para generar una copa decidimos usar la función  $R(y) = (y - 0.5)^3 + 0.3$ , la cual, para  $y$  entre 0 y 1 nos produce por rotación un volumen en forma de copa. Entonces, obsérvese que estamos tomando como altura de nuestro depósito  $H = 1$  m, y dada esta elección vemos que si tomamos un orificio de radio  $r = 0.002$  m ( $r \ll R(0) = 0.175$  m) el tiempo de vaciado es  $T = 8477.04$  s que corresponde a 2 horas 21 minutos y 17 segundos aproximadamente. Este tiempo de vaciado parece razonable para un ejemplo interactivo donde se puede observar la dinámica de vaciado del líquido en cuestión. En este ejemplo para calcular la altura  $h = h(t)$  del líquido que hay en la copa en cada instante  $t$ , según (9), hay que resolver la siguiente ecuación en  $h$ :

$$\begin{aligned} \int_1^h y^{-\frac{1}{2}} ((y - 0.5)^3 + 0.3)^2 dy &= \frac{5h^{9/2}}{6} - \frac{19h^{7/2}}{35} + \frac{3h^{5/2}}{200} + \frac{7h^{3/2}}{40} + \frac{2h^{13/2}}{13} - \frac{6h^{11/2}}{11} \\ &+ \frac{49\sqrt{h}}{800} - \frac{360643}{2402400} \\ &= -1.77088 \times 10^{-5}t, \quad h > 0, \quad t \in (0, 8477.04), \end{aligned}$$

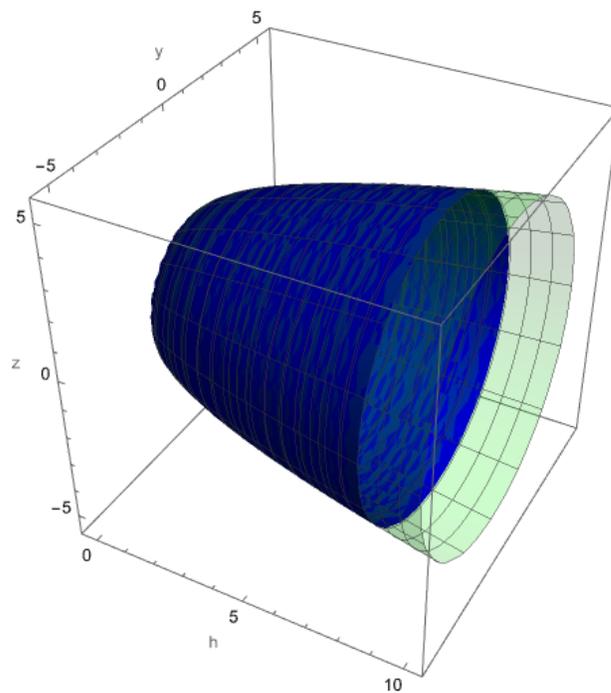
donde el intervalo de variación de  $t$  fue determinado a partir de la interpretación física del problema que nos permitió deducir que la copa llena tardará 8477.04 s en vaciarse. En este ejemplo tenemos un polinomio de grado 13/2, que nos lleva a una ecuación cuya solución exacta no podemos determinar. Por eso, como en ejemplo anterior hacemos uso de herramientas computacionales -como Mathematica<sup>©</sup> (Wolfram Research, Inc. 2023) - para obtener la solución numérica junto con una visualización dinámica de los resultados usando el comando `Manipulate`. En la Figura 7 se presentan capturas en distintos instantes temporales que muestran la visualización dinámica del proceso de vaciado de la copa, generado a partir de los datos previamente descritos. La versión interactiva es también accesible a través del notebook mencionado previamente (accesible en este [repositorio de Github](#)).

### 5. Implementación del problema en el aula: de los casos particulares al caso general.

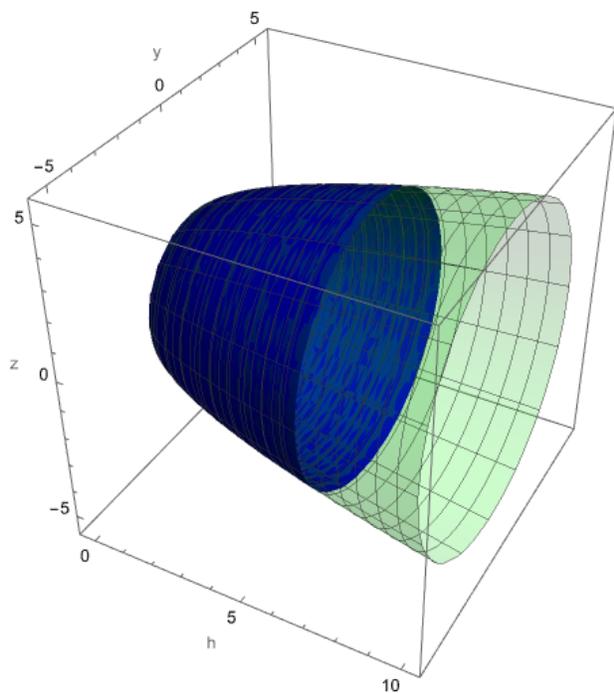
Como profesores de un departamento de Matemática Aplicada en una universidad de enseñanzas técnicas consideramos que el modelo estudiado tiene especial interés en un primer curso de titulaciones de ingenierías donde habitualmente se cursan de forma simultánea la asignatura de Física general, con contenidos básicos sobre Dinámica de Fluidos, y la asignatura de Matemáticas, con contenidos cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución por integración y de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). No obstante, los contenidos del trabajo son también de interés en titulaciones de Ciencias, como los grados de Física y Matemáticas, donde se estudian como mayor profundidad las EDOs y donde el estudio de modelos basados en este



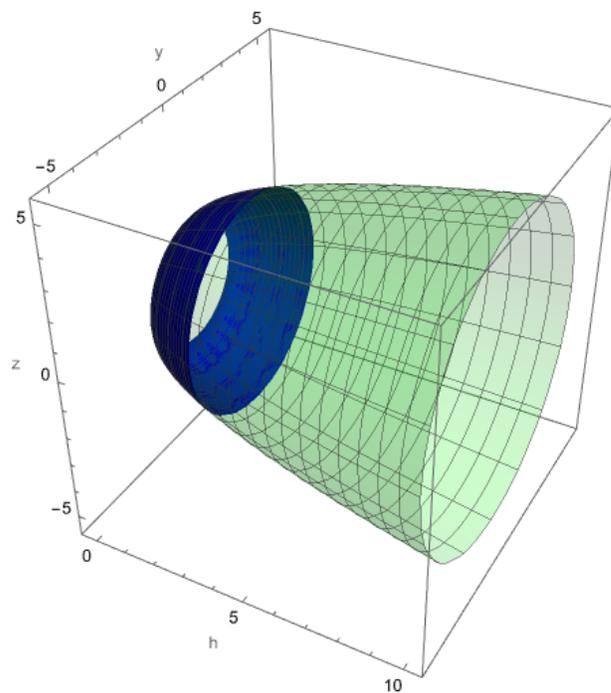
(a)  $t = 0$  horas



(b)  $t = 10$  horas



(c)  $t = 20$  horas



(d)  $t = 40$  horas

Figura 5: Variación en el tiempo  $t$  (s) del volumen de un líquido (en azul) en un depósito en forma de vaso (en verde) de altura  $H = 10$  m con un orificio de radio  $r = 0.01$  m. Ejemplo 1: El depósito en forma de vaso.

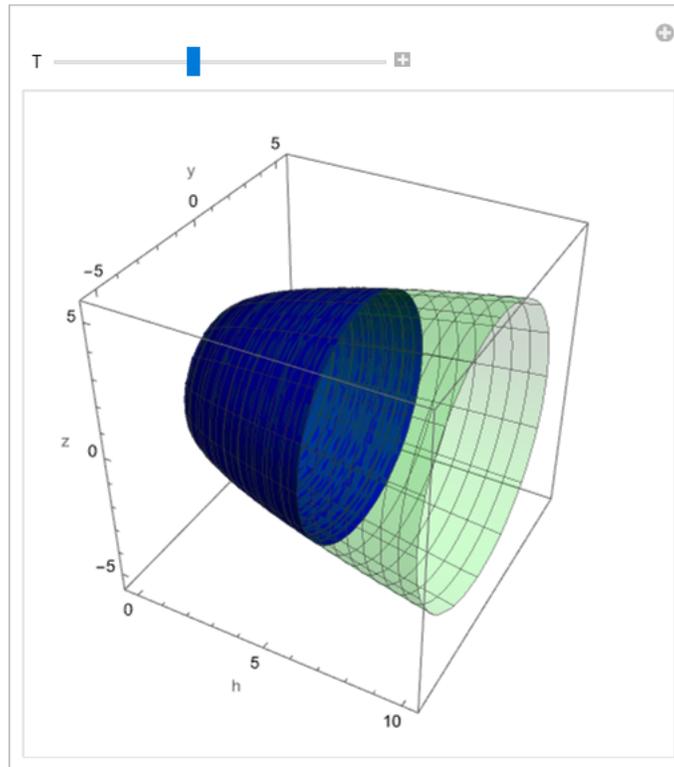


Figura 6: Captura de pantalla de la ventana interactiva en el Notebook de Mathematica<sup>®</sup> para el Ejemplo 1: El depósito en forma de vaso.

tipo de ecuaciones complementan muy bien la formación teórica sobre la que se suele poner un mayor énfasis formativo en detrimento de las aplicaciones.

Para introducir el modelo en el aula, dentro de un primer curso donde se estudien EDOs en Matemáticas y Dinámica de Fluidos en Física, proponemos el siguiente plan de trabajo secuenciado en el tiempo, que idealmente debería estar coordinado entre ambas asignaturas. Indicamos al final de cada ítem la asignatura en la que deberían introducirse los siguientes contenidos correspondientes a los preliminares necesarios para estudiar el modelo:

- (i) Estudio de la ecuación de continuidad (incluyendo los conceptos de flujo y caudal) y el posterior estudio del principio de Bernoulli que relaciona la diferencia de presión entre dos puntos de un tubo de flujo con las variaciones de altura. Asignatura: Física.
- (ii) Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución por integración. Asignatura: Matemáticas.
- (iii) Integración de EDOs por el método de separación de variables. Asignatura: Matemáticas.

Una vez que el alumno esté familiarizado con estos prerrequisitos, sugerimos abordar el estudio del modelo mediante el siguiente plan orientado a analizar en primer lugar casos donde no es necesario aplicar resultados sobre el volumen de cuerpo de revolución para, posteriormente, hacer uso de dichos resultados que permitirán generalizar el estudio a depósitos de forma más generales. En todos los casos que se enumeran se trabajará el cálculo de la altura  $h(t)$  del líquido en el instante  $t$  y el cálculo del tiempo  $T$  de vaciado.

- 1 Estudio del vaciado del depósito en forma de cilindro, el cual, al tener secciones transversales constantes, facilita el estudio sin tener que aplicar resultados de cálculo de volúmenes por integración. Se obtendrán las fórmulas exactas para  $h(t)$  y  $T$ .

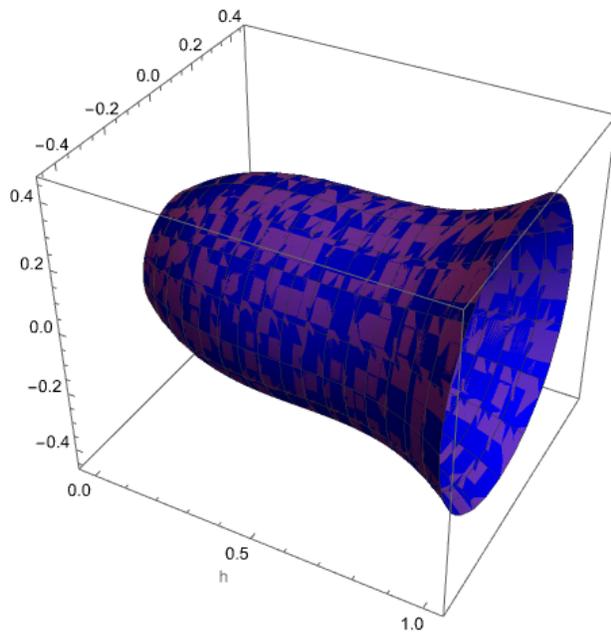
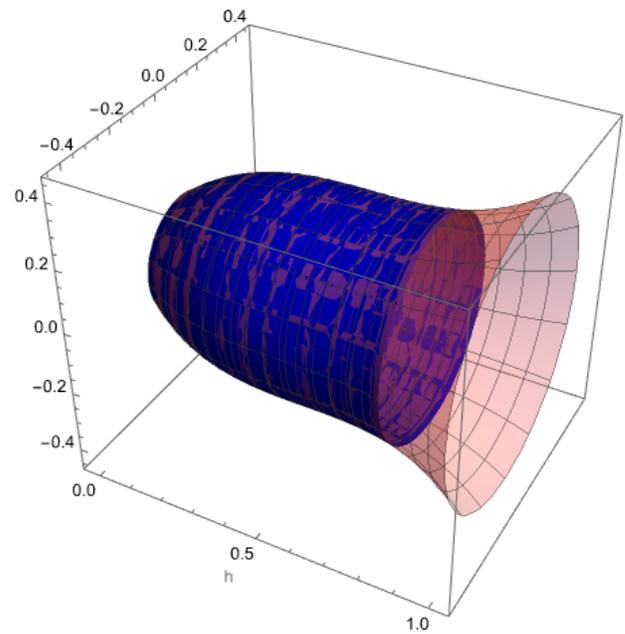
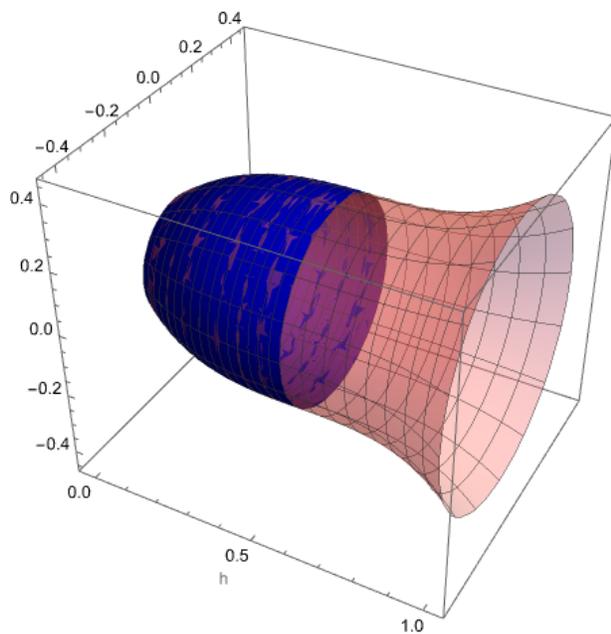
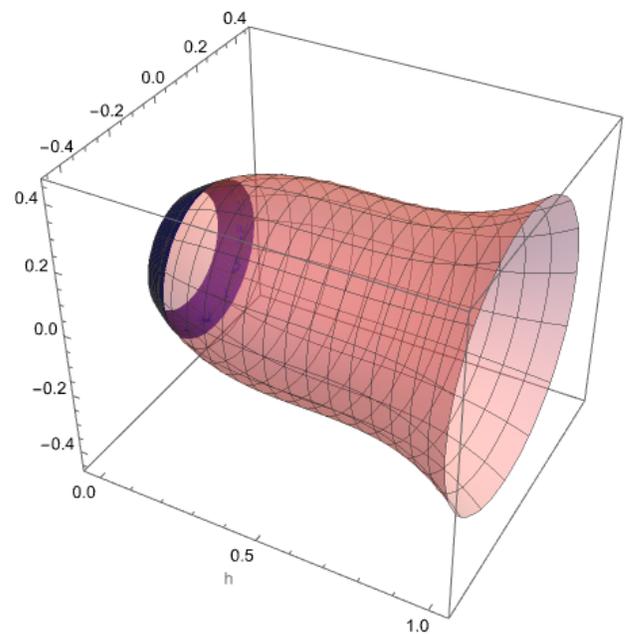
(a)  $t = 0$  minutos(b)  $t = 30$  minutos(c)  $t = 60$  minutos (1 hora)(d)  $t = 120$  minutos (2 horas)

Figura 7: Variación en el tiempo  $t$  (s) del volumen de un líquido (en azul) en un depósito en forma de copa (en rosa) de altura  $H = 1$  m con un orificio de radio  $r = 17.5$  cm. Ejemplo 2: El depósito en forma de copa.

- 2 Estudio del vaciado del depósito en forma de cono truncado. Aunque aquí las secciones no son constantes, es sencillo abordar el problema usando la semejanza de triángulos que se puede trazar sobre las secciones del depósito, evitando, como en el caso anterior la aplicación del cálculo de volúmenes por integración. Para  $h(t)$  se obtendrá una ecuación algebraica no lineal que se resolverá haciendo uso de algún asistente numérico, y para  $T$  se obtendrá una expresión exacta.
- 3 Estudio del vaciado del depósito en forma de esfera truncada. Aquí proponemos abordar el problema con los conocimientos adquiridos sobre cálculo de volúmenes por integración. Para  $h(t)$  se obtendrá una ecuación algebraica no lineal que se resolverá haciendo uso de algún asistente numérico, y para  $T$  se obtendrá una expresión exacta.
- 4 Estudio del vaciado del depósito en forma de cuerpo de revolución de una curva arbitraria (como los casos mostrados en los Ejemplos 1 y 2). Tanto para  $h(t)$  como para  $T$  se obtendrán relaciones simbólicas que requerirán, en general, de algún asistente numérico para aproximar la solución en distintos escenarios prácticos que se propondrán entre los que considerarán los casos abordados anteriormente (cilindro, cono y esfera truncados).
- 5 Para trabajar la competencia del análisis crítico, se propondrán dos estrategias: en primer lugar, analizar si las fórmulas teóricas obtenidas en el paso 4 son coherentes en casos límite de algunos de los parámetros (por ejemplo, agujero de desalajo cerrado, es decir, con radio  $r = 0$ ), y, en segundo lugar, si los resultados que se obtengan mediante un análisis de sensibilidad de las fórmulas teóricas concuerdan con la intuición física.

## 6. Conclusiones

La modelización del vaciado de depósitos es una temática tratada en libros de ecuaciones diferenciales. El estudio de este tipo de problemas involucra la combinación de leyes físicas básicas con resultados matemáticos, lo que le confiere para el aula un importante atractivo interdisciplinar que se debería aprovechar. En este trabajo hemos centrado nuestro estudio en depósitos que se generan a partir de la revolución de una curva adecuada, y hemos podido ver que los resultados que obtenemos generalizan los que se suelen encontrar en algunos de los principales textos de referencia sobre ecuaciones diferenciales donde solo se abordan formas particulares (el cilindro y el cono truncado). Precisamente, la generalización aportada en este trabajo permite afrontar el problema desde diferentes niveles de dificultad matemática. Asimismo, pretendemos mostrar la potencialidad de estas ideas para poder trabajarlas en el aula, y contribuir con ello a dotar de ejemplos concretos y a su vez variados. El nivel de profundización que permite este sencillo modelo combina aspectos tanto teóricos como del uso del ordenador para simular el proceso físico del vaciado de un depósito, y creemos que sin duda puede servir para motivar el estudio de otras variantes de este interesante problema que no aparecen en los textos académicos, pero que son susceptibles de ser analizadas con algunas de las herramientas expuestas en este trabajo. Entre nuestros objetivos próximos está el estudio de alguna de estas variantes.

## Agradecimientos

Cristina Luisovna Pérez ha sido beneficiada con una beca FPU21 (Formación de Profesorado Universitario 2021) del Ministerio de Universidades.

Queremos agradecer a nuestro compañero, Marcos Llamazares López, por su ayuda desinteresada en la fundamentación física del modelo. También extendemos este agradecimiento al revisor anónimo por sus sugerencias que nos han ayudado a mejorar la versión final del artículo.

## Referencias

-  Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). *Elementary differential equations* (TENTH ed.). Wiley. doi:10.2307/2310742
-  de Guzmán Ozamiz, M. (2019). *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. PIRÁMIDE.
-  Marmolejo, E., & Riestra, J. A. (2013). *Modelo matemático del llenado de recipientes*. Modeling in Science Education and Learning, 6 (2)(13). doi:10.4995/mse1.2013.1943
-  Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. Labor.
-  Polya, G. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton Science Library. doi:10.2307/j.ctvc773pk
-  Wolfram Research, Inc. (2023). *Mathematica, Version 13.3*. Retrieved from <https://www.wolfram.com/mathematica> Champaign, IL.
-  Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2008). *Differential equations with boundary-value problems* (SEVENTH ed.). CENGAGE Learning.

## Apéndice

Código 1.1: Función que determina la altura del líquido en un tiempo t

---

```

1 height[H_, r_, t_, fun_] := Block[{der, h},
2   der = -(2*9.8)^(1/2)*r^2*t;
3   FindRoot[Integrate[fun[s]^2/Sqrt[s], {s, H, h}, Assumptions -> H >= h > 0] == der, {h, H/2}]

```

---

Código 1.2: Función que determina cuándo se vacía el depósito

---

```

1 TVaciado[H_, r_, fun_] := NSolve[Integrate[fun[s]^2/Sqrt[s], {s, H, 0}] == -(2*9.8)^(1/2)*r^2*t, t][[1]]

```

---