

Cuerda que Desliza sobre una Mesa: Modelo Complejo vs. Modelo Simple

Rope that Slides on a Table: Complex Model vs. Simple Model

Luis G. Cabral-Rosetti, Adriana Castillo Rosas
TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO (TECNM).
lcabral@ciidet.edu.mx, acastillo@ciidet.edu.mx

Abstract

En la Enseñanza de la Dinámica Newtoniana a nivel universitario solemos construir Modelos Mecánicos para la comprensión de la situación Física estudiada. Por lo regular construimos primeramente modelos simples (toy models) que posteriormente iremos sofisticando con la intención de crear un modelo más complejo y por tanto más realista al final. Aseguramos con ello que el modelo sofisticado es mejor que el modelo simple (Estrategia de Modelización Progresiva, EMP). ¿Esto es siempre así?. Presentamos aquí la construcción de Dos Modelos Mecánicos (uno Sofisticado y otro Simple) para estudiar el Movimiento de una Cuerda Masiva que Resbala sobre una Mesa con y sin Fricción Seca y mostramos que los principales resultados obtenidos en el modelo simple son tan buenos y generales como los obtenidos del modelo sofisticado. Lo anterior nos muestra como poder estudiar el problema de la Cuerda que Desliza por una Mesa en diferentes estadios de la Educación Universitaria sin detrimento de la comprensión completa del problema planteado. Como complemento a lo anterior discutimos también la versión Lagrangiana del Problema, así como una posible generalización al problema planteado.

In the Teaching of Newtonian Dynamics at the University Level we usually build Mechanical Models to understand the Physical situation studied. Usually, we first build simple models that we will later become more sophisticated with the intention of creating a more complex and therefore more realistic model in the end. We thus ensure that the sophisticated model is better than the simple model (Progressive Modeling Strategy, EMP). Is this always like this? We present here the construction of Two Mechanical Models (one Sophisticated and the other Simple) to study the Movement of a Massive Rope Sliding on a Table with and without Dry Friction and we show that the main results obtained in the simple model are as good and general as those obtained from the sophisticated model. The above shows us how to study the problem of the Rope that Slides across a Table in different stages of University Education without detriment to the complete understanding of the problem posed. As a complement to the above, we also discuss the Lagrangian version of the Problem, as well as a possible generalization to the problem posed.

Palabras clave: modelo matemático, enseñanza de la mecánica, ciencias físicas, formación profesional, ingeniería, mecánica Lagrangiana.

Keywords: mathematical model, teaching of mechanics, physical sciences, vocational training, engineering, Lagrangian mechanics.

1. Introducción

La enseñanza de la Mecánica, siendo una piedra angular en la formación de los futuros científicos e ingenieros, históricamente ha enfrentado desafíos significativos debido a la naturaleza compleja de los fenómenos físicos involucrados. La comprensión de conceptos tales como la Cinemática (traslacional y rotacional), la Dinámica (traslacional y rotacional) y la Conservación de la Energía, del Momento Lineal y Angular, que constituyen la base Teórica de la Mecánica, a menudo ha resultado ser un terreno complejo para los estudiantes. En respuesta a esta complejidad inherente, la Didáctica de la Mecánica basada en Modelos emerge como una directriz de innovación educativa, mostrando un posible camino hacia un aprendizaje más accesible, participativo y contextualmente relevante (Honoré, 1982), (Gatti, 2008). En este sentido, la Mecánica Basada en Modelos no solo aborda los desafíos tradicionales asociados con la enseñanza de esta disciplina, sino que también busca transformar fundamentalmente la experiencia educativa para los estudiantes. La utilización de modelos como herramientas centrales en el proceso de aprendizaje no solo simplifica la representación de fenómenos complejos, sino que también proporciona a los estudiantes un medio para interactuar activamente con conceptos abstractos tales como partícula, campo, cuerpo rígido, energía, momento de una fuerza, etc.. Al hacerlo, se busca transmitir conocimientos, y por otro lado cultivar habilidades críticas, fomentando una comprensión profunda y sostenible de los principios mecánicos estudiados. Este enfoque se dirige tanto a los aspectos teóricos de la Mecánica, como a la vinculación de manera más estrecha de la teoría con la aplicación práctica. La Didáctica de la Mecánica basada en Modelos reconoce la importancia de trascender los límites del aula y proporcionar a los estudiantes las herramientas necesarias para abordar desafíos del mundo real. En ese sentido, este enfoque no solo busca transmitir información, sino también inspirar la exploración y el descubrimiento científico, transformando a los estudiantes en aprendices activos de la Mecánica (Justi, 2006). Aunado a lo anterior, es crucial considerar que el enfoque contribuye al desarrollo de habilidades críticas que son esenciales en la formación del Ingeniero y Científico contemporáneo. La Didáctica de la Mecánica basada en Modelos no solo es una Evolución en la Enseñanza de la Mecánica, sino también un catalizador para el desarrollo de una nueva generación de estudiantes creativos, capaces de enfrentar los desafíos científicos y tecnológicos de manera informada y reflexiva. Algunas de las características más relevantes de la Didáctica de la Mecánica basada en Modelos son:

1. Didáctica de la Mecánica basada en Modelos. La Didáctica de la Mecánica basada en modelos implica el uso activo de representaciones simplificadas y abstractas de sistemas físicos para facilitar la comprensión de conceptos mecánicos. Estos modelos pueden variar desde simples representaciones gráficas hasta simulaciones computacionales avanzadas, brindando a los estudiantes un conjunto diverso de herramientas para explorar y comprender fenómenos complejos.
2. Ventajas de utilizar Modelos en la Enseñanza de la Mecánica
 - a) Visualización: La representación visual de modelos permite a los estudiantes visualizar conceptos abstractos, haciendo que la Mecánica sea más accesible y tangible.
 - b) Interactividad: La posibilidad de interactuar con modelos ya sea física o virtualmente, fomenta la participación consiente de los estudiantes, mejorando la retención del conocimiento.
 - c) Abordaje de la Complejidad: Los modelos proporcionan una forma simplificada de abordar sistemas mecánicos complejos, permitiendo a los estudiantes descomponer y comprender cada componente por separado antes de integrar el conocimiento.

3. Ejemplos Prácticos:

- a) Simulaciones Computacionales: Plataformas interactivas que permiten a los estudiantes explorar fenómenos mecánicos en un entorno virtual, facilitando la experimentación sin restricciones físicas.
- b) Maquetas y Experimentos Físicos: La construcción y manipulación de maquetas físicas proporciona una experiencia táctil que complementa la comprensión teórica, permitiendo a los estudiantes conectar la teoría con la práctica.

Por tanto, la Didáctica de la Mecánica Basada en Modelos representa un cambio significativo en la forma en que enseñamos y aprendemos esta disciplina, pues al integrar modelos en el proceso educativo se abre la puerta a un aprendizaje más interactivo, significativo y aplicado. Este enfoque no solo aborda los desafíos inherentes a la enseñanza de la Mecánica, sino que también prepara a los estudiantes para enfrentar, en principio, problemas del mundo real mediante la aplicación de conocimientos adquiridos de manera más efectiva (Clement, 2000; Oliva, 2019). La Didáctica de la Mecánica Basada en Modelos no solo transforma la forma en que se presenta la información, sino que también empodera a los estudiantes para que se conviertan en pensadores autónomos, críticos y reflexivos en el campo de la Física, y en especial en el de la Mecánica (Justi y Gilbert, 2002; Schwarz, 2009; Windschitl, Thompson y Braaten, 2008).

2. Construcción y Aplicación de Modelos

A continuación, estudiamos el Problema de una Cuerda que Resbala sobre una Mesa con y sin Fricción, para ello planteamos dos modelos. El primer modelo (Modelo A) resuelve explícitamente las Ecuaciones Diferenciales correspondientes y estudia la Evolución Temporal de la Cuerda y encuentra las Principales Cantidades Dinámica válidas para todo tiempo. El segundo modelo (Modelo B) es un modelo simple que obtiene de “manera efectiva” la Velocidad y la Aceleración del sistema y que coinciden con los resultados del Modelo A, cuando se evalúan dichas cantidades en el Tiempo Total de Deslizamiento de la Cuerda. Lo anterior servirá para estudiar (modelar) un problema complicado en el Primer Año de Estudios Universitarios en Ingeniería y Ciencias, sin necesidad de conocer las técnicas de resolución de Ecuaciones Diferenciales (Spiegel y Abellanas, 1998).

2.1. Modelo A

Partiendo con Velocidad Inicial nula $v_0 = v(t = 0) = 0$, una Cuerda Uniforme (de Densidad Lineal de Masa λ constante) de Longitud Total L y que cuelga un trozo de longitud l ($0 \leq l \leq L$) sobre el borde de una mesa plana Sin Fricción, ver Figura 1. Calcule a) la Posición, la Rapidez, la Aceleración, el Tirón y el Tiempo en que la Cuerda se Desliza Completamente de la Mesa bajo la influencia de la gravedad terrestre. Realice lo anterior por medio de la Conservación de la Energía, b) Si consideramos ahora que entre la Mesa y la Cuerda existe Fricción Sólido-Sólido con un Coeficiente de Fricción Cinética Coulombica μ_k , hallar la Posición, la Rapidez, la Aceleración, el Tirón y el Tiempo en que la Cuerda se Desliza Completamente de la Mesa (Spiegel, 1980; Greiner, 1989). Aplicar el Teorema del Trabajo y la Energía para estudiar el Caso con Fricción. Finalmente tender los límites correspondientes ($\mu_k \rightarrow 0$) para recuperar los Casos Sin Fricción del Inciso a). Comparar algunos de los principales resultados obtenidos con el Modelo B.

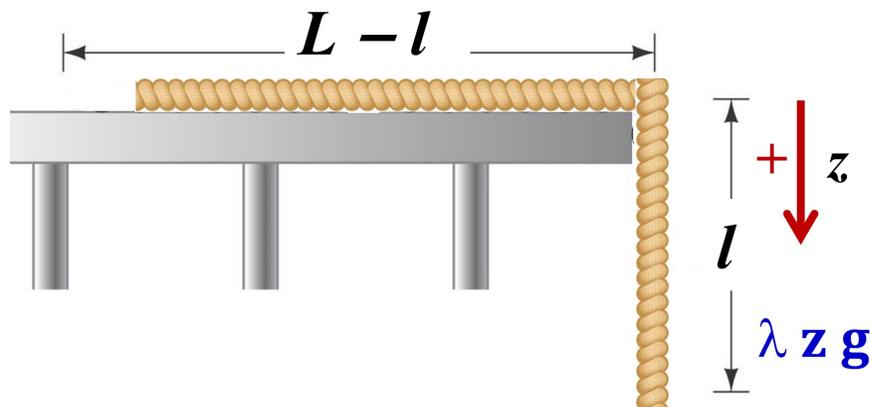


Figura 1: Representación esquemática general del Modelo A. La cuerda de longitud total L y de longitud colgante l , con Densidad Lineal de Masa λ constante, descansa sobre una Mesa Horizontal (con y sin fricción) y está a punto de Romper Inercia y comenzar a moverse hacia abajo.

Modelo A₁: Caso Sin Fricción

La forma de proceder con este Modelo Complejo es semejante a lo que se hizo en el Modelo 6 del trabajo (Cabral-Rosetti y Castillo, 2022). La Longitud de la Fracción de la Cuerda que Cuelga Verticalmente hacia abajo se denota por z y la Masa por Unidad de Longitud de la Cuerda constante es λ . La Fuerza que actúa sobre el Trozo de Cuerda de longitud z es básicamente su peso, es decir:

$$F = mg = \lambda z g \dots (1.1a)$$

teniendo en cuenta que la Masa Total M de la cuerda en términos de Densidad Lineal de Masa λ vale:

$$M = \lambda L \dots (1.2a)$$

Poniendo la Ec. (1.2a) en la Ec. (1.1a) en la Segunda Ley de Newton, hallamos la Ecuación de Movimiento de la Cuerda, es decir:

$$\lambda L a(z) = \lambda z g \Rightarrow a(z) = \frac{g}{L} z \dots (1.3a) \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{g}{L} z} \dots (1.3b)$$

La Ec. (1.3b) es una “Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Segundo Orden” y su solución es el “Caso 1” Ec. (24.7) del libro (Spiegel y Abellanas, 1998).

$$\boxed{24.7} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + A \frac{dy}{dx} + B y = 0, \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad \overbrace{r^2 + Ar + B = 0}^{\text{Polinomio Característico}} \quad \text{con } r_1, r_2 \in \mathbb{R} \quad \text{y } r_1 \neq r_2$$

$$\boxed{\text{Caso 1}} \quad y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

Que en nuestro caso, el Polinómico Característico sería:

$$r^2 - \frac{g}{L}r = 0 \Rightarrow r = \frac{\pm \sqrt{-4(1)\left(-\frac{g}{L}\right)}}{2(1)} = \pm \frac{\pm \sqrt{g/L}}{\pm 2} \Rightarrow$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} r_1 = +\sqrt{g/L} & \dots (1.4a) \\ r_2 = -\sqrt{g/L} & \dots (1.4b) \end{cases}$$

Por lo tanto, la Solución General de la Ecuación Diferencial Ec. (1.3b) será:

$$z(t) = c_1 e^{\sqrt{g/L}t} + c_2 e^{-\sqrt{g/L}t} \dots (1.5a)$$

Derivando con respecto del tiempo la Ec. (1.5a) tenemos

$$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt} \left\{ c_1 e^{\sqrt{g/L}t} + c_2 e^{-\sqrt{g/L}t} \right\} \Rightarrow \dot{z}(t) = c_1 \sqrt{\frac{g}{L}} e^{\sqrt{g/L}t} - c_2 \sqrt{\frac{g}{L}} e^{-\sqrt{g/L}t} \dots (1.5b)$$

donde c_1 y c_2 son Dos Constantes de Integración, las cuales se determinan a partir de las Condiciones Iniciales del Problema. Es decir, aplicando la Condición Inicial para la Posición Inicial del Trozo de Cuerda que sobresale de la Mesa en el Instante Inicial en la Ec. (1.5a) tenemos que:

$$z(t=0) = l = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 + c_2 = l \dots (1.6a)$$

y usando la Condición Inicial para la Velocidad Inicial del Trozo de Cuerda que sobresale de la Mesa en el Instante Inicial en la Ec. (1.5b) llegamos a:

$$v_z(t=0) = \dot{z}(t=0) = 0 = c_1 \sqrt{g/L} - c_2 \sqrt{g/L} \Rightarrow c_1 - c_2 = 0 \dots (1.6b)$$

Sumando las Ecs. (1.6a) y (1.6b) tenemos que:

$$c_1 + c_2 + c_1 - c_2 = l \Rightarrow 2c_1 = l \Rightarrow c_1 = l/2 \dots (1.6c)$$

Poniendo la Ec. (1.6c) en la Ec. (1.6b) hallamos que:

$$l/2 - c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = l/2 \dots (1.6d)$$

es decir, las constantes " c_1 " y " c_2 " son iguales.

Poniendo los resultados (1.6c) y (1.6d) en la Ec. (1.5a) tendremos que:

$$z(t) = \frac{l}{2} e^{\sqrt{g/L}t} + \frac{l}{2} e^{-\sqrt{g/L}t} = l \left(\frac{e^{\sqrt{g/L}t} + e^{-\sqrt{g/L}t}}{2} \right) \dots (1.6e)$$

Recordando la definición de las Funciones Hiperbólicas Ec. (8.1) y (8.2) pág. 31 del libro (Spiegel y Abellanas, 1998).

$$\boxed{8.1} \quad \sinh x \equiv \frac{1}{2} (e^x - e^{-x});$$

$$\boxed{8.2} \quad \cosh x \equiv \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

Usando la Ec. (8.2) en la Ec. (1.6e) encontramos que la Posición de la Cuerda para Todo Tiempo t es:

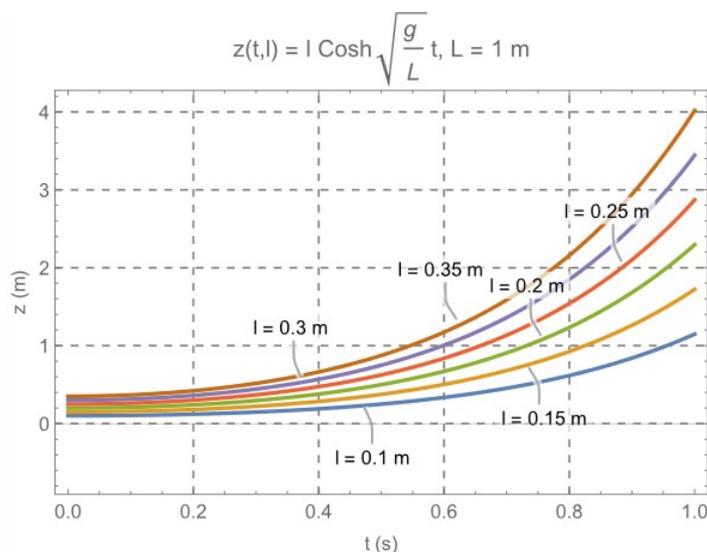


Figura 2: Gráfica de la Posición de la Cuerda como función del Tiempo z vs. t , para una Longitud de la Cuerda de $L = 1\text{m}$, Ec. (1.7a), Modelo A_1 : Caso Sin Fricción.

$$z(t, l) = l \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) \dots (1.7a)$$

Poniendo los resultados (1.6c) y (1.6d) en la Ec. (1.5b), y aplicando la Ec.(8.1) hallamos la Velocidad de la Cuerda para cualquier Tiempo t :

$$\dot{z}(t, l) = \left(\frac{l}{2}\right) \sqrt{\frac{g}{L}} e^{\sqrt{g/L} t} - \left(\frac{l}{2}\right) \sqrt{\frac{g}{L}} e^{-\sqrt{g/L} t} = l \sqrt{\frac{g}{L}} \left(\frac{e^{\sqrt{g/L} t} - e^{-\sqrt{g/L} t}}{2}\right) \quad \boxed{8.1} \Rightarrow$$

$$v_z(t, l) = \dot{z}(t, l) = l \sqrt{\frac{g}{L}} \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) \dots (1.7b)$$

Derivando la Velocidad de la Cuerda Ec. (1.7b) hallamos la Aceleración de la Cuerda:

$$a_z(t, l) = \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ l \sqrt{\frac{g}{L}} \sinh \sqrt{\frac{g}{L}} t \right\} = l \sqrt{\frac{g}{L}} \cosh \sqrt{\frac{g}{L}} t \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right) = l \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow$$

$$a_z(t, l) = \ddot{z}(t, l) = l \frac{g}{L} \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) \dots (1.7c)$$

Derivando la Aceleración de la Cuerda Ec. (1.7c) hallamos el Tirón de la Cuerda:

$$j_z(t, l) = \frac{d}{dt} a_z(t, l) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{gl}{L} \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) \right\} = \left(\frac{gl}{L}\right) \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) \Rightarrow$$

$$j_z(t, l) = \ddot{\dot{z}}(t, l) = l \frac{g}{L} \sqrt{\frac{g}{L}} \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) \dots (1.7d)$$

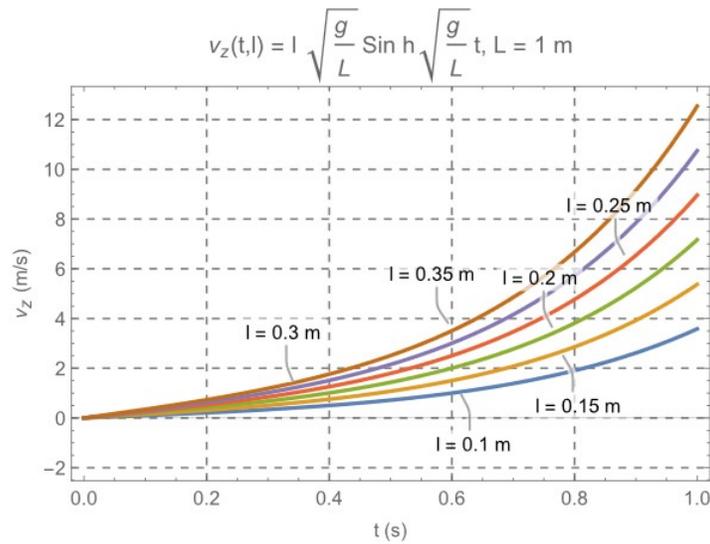


Figura 3: Gráfica de la Rapidez de la Cuerda como función del Tiempo v_z vs. t , para una Longitud de la Cuerda de $L = 1\text{m}$, Ec. (1.7b), Modelo A_1 : Caso Sin Fricción.

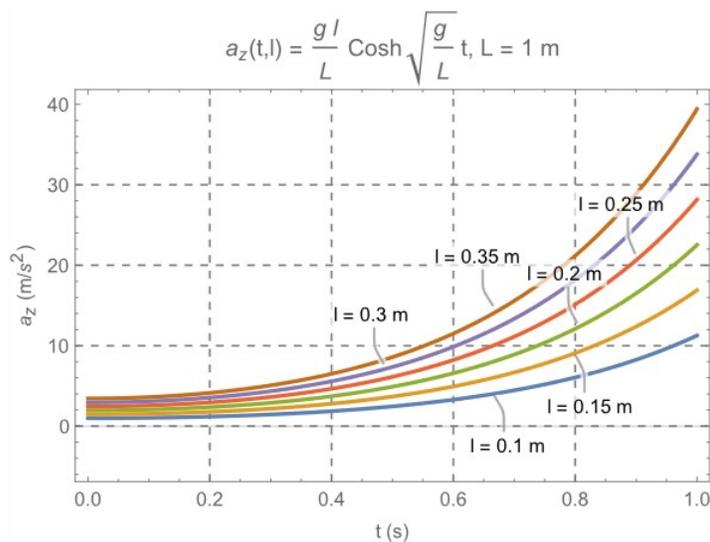


Figura 4: Gráfica de la Aceleración de la Cuerda como función del Tiempo a_z vs. t , para una Longitud de la Cuerda de $L = 1\text{m}$ y para diferentes longitudes de la parte colgante de la cuerda l , Ec. (1.7c), Modelo A_1 : Caso Sin Fricción.

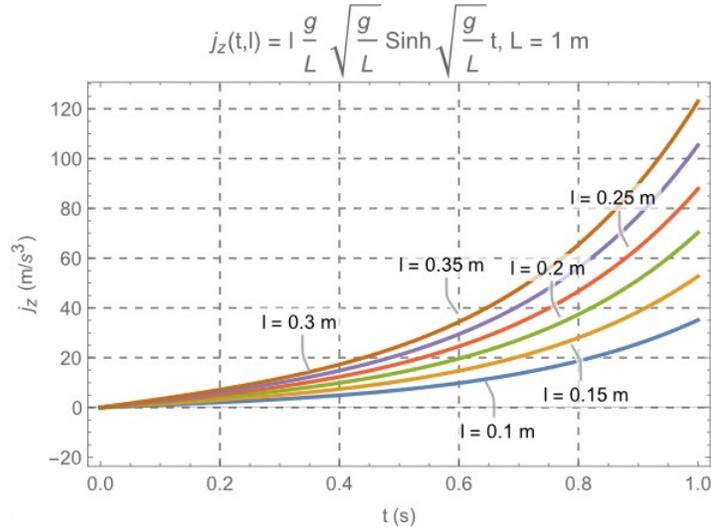


Figura 5: Gráfica del Tirón de la Cuerda como función del Tiempo j_z vs. t , para una Longitud de la Cuerda de $L = 1\text{m}$ y para diferentes longitudes de la parte colgante de la cuerda l , Ec. (1.7c), Modelo A_1 : Caso Sin Fricción.

NOTA 1.1: De los resultados anteriores notamos que el Tirón de la Cuerda está relacionado con la Velocidad de esta. De igual manera, la Aceleración de la Cuerda, está relacionada con la Posición de la cuerda de la siguiente manera:

$$\boxed{j_z(t, l) = \frac{g}{L} v_z(t, l)} \dots (1.7e) \quad \& \quad \boxed{a_z(t, l) = \frac{g}{L} z(t, l)} \dots (1.7f)$$

De la Ec. (1.7a) tenemos Una Condición para el “Tiempo Total de Deslizamiento T_t de la Cuerda”, es decir:

$$z(T_t) = l \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}} T_t\right) \stackrel{8.2}{\Rightarrow} L = \frac{l}{2} \left(e^{\sqrt{g/L} T_t} + e^{-\sqrt{g/L} T_t} \right) \Rightarrow$$

Para hallar dicha “Condición”, definimos la cantidad “ x ” como:

$$\boxed{x \equiv e^{\sqrt{g/L} T_t}} \dots (1.8a)$$

Notemos que x es una Cantidad Sin Dimensiones Físicas. De tal manera que lo anterior nos queda como:

$$L = \frac{l}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \Rightarrow \frac{2L}{l} = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \left(-\frac{2L}{l} \right) x + 1 = 0 \dots (1.8b)$$

Usando la “Formula General” para obtener la solución general de la “Ecuación Cuadrática” anterior tendremos que:

$$x_{1,2} = \frac{-\left(-\frac{2L}{l}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{2L}{l}\right)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{\frac{2L}{l} \pm 2\sqrt{\frac{L^2}{l^2} - 1}}{2} \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{L}{l} \pm \sqrt{\frac{L^2}{l^2} - 1} = \frac{L}{l} \pm \frac{1}{l} \sqrt{L^2 - l^2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{l} \left(L + \sqrt{L^2 - l^2} \right)} \dots (1.8c)$$

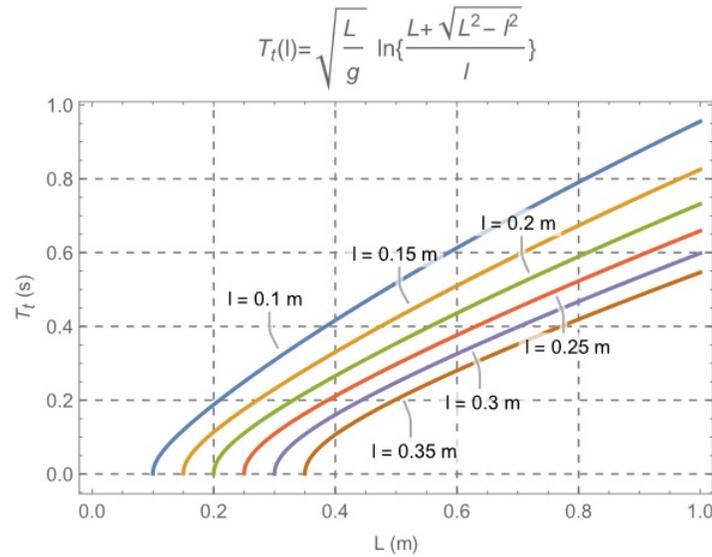


Figura 6: Gráfica del Tiempo Total de Deslizamiento Sin Fricción de la Cuerda T_t vs. La Longitud de la Cuerda L , para diferentes longitudes de la parte colgante de la cuerda l , Ec. (1.8d), Modelo A₁: Caso Sin Fricción.

en donde directamente nos hemos deshecho de la segunda raíz, pues ello nos llevaría a considerar “tiempos negativos” y eso es claramente un “sin sentido”.

Poniendo la raíz (1.8c) en la definición Ec. (1.8a) encontramos:

$$\frac{1}{l} \left(L + \sqrt{L^2 - l^2} \right) = e^{\sqrt{g/L} T_t} \quad \text{Logaritmizando} \quad \Rightarrow \quad \ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l} \right\} = \ln \left\{ e^{\sqrt{g/L} T_t} \right\} \Rightarrow$$

$$\sqrt{g/L} T_t = \ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l} \right\} \Rightarrow \boxed{T_t(l) = \sqrt{\frac{L}{g}} \ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l} \right\}} \dots (1.8d)$$

NOTA 1.2: El “Tiempo Total de Deslizamiento T_t de la Cuerda” Ec. (1.8d), corresponde con la Ec. [4] del trabajo (Behroozi, F. 1997), corresponde con la Ec. [20.14] del texto (Greiner, W. 1989), corresponde al Problema Propuesto [3.85] del texto (Spiegel, M. R. 1980), ver (Franco A., 2015) y corresponde a Question 11.31, Eq. (1) del texto (De Lande, O. L. y Pierrus, J. 2010, p.p. 390-393).

NOTA 1.3: Una forma alternativa de hallar el “Tiempo total de Deslizamiento T_t ” de la Cuerda lo encontramos en el APENDICE A de este trabajo.

Para poder comparar nuestros resultados con otros trabajos de investigación, definimos el Parámetro Adimensional κ como:

$$\boxed{\kappa \equiv \frac{l}{L}} \dots (1.8e)$$

La Ec. (1.8d) se transforma entonces en:

$$\begin{aligned} T_t \left(\kappa \equiv \frac{l}{L} \right) &= \sqrt{\frac{L}{g}} \ln \left\{ \frac{L}{l} + \frac{\sqrt{L^2 - l^2}}{l} \right\} = \sqrt{\frac{L}{g}} \ln \left\{ \frac{L}{l} + \sqrt{\frac{L^2 (1 - \frac{l^2}{L^2})}{l^2}} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{L}{g}} \ln \left\{ \frac{1}{\kappa} + \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa} \right)^2 \left(1 - \frac{l^2}{L^2} \right)} \right\} = \sqrt{\frac{L}{g}} \ln \left\{ \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \sqrt{(1 - \kappa^2)} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

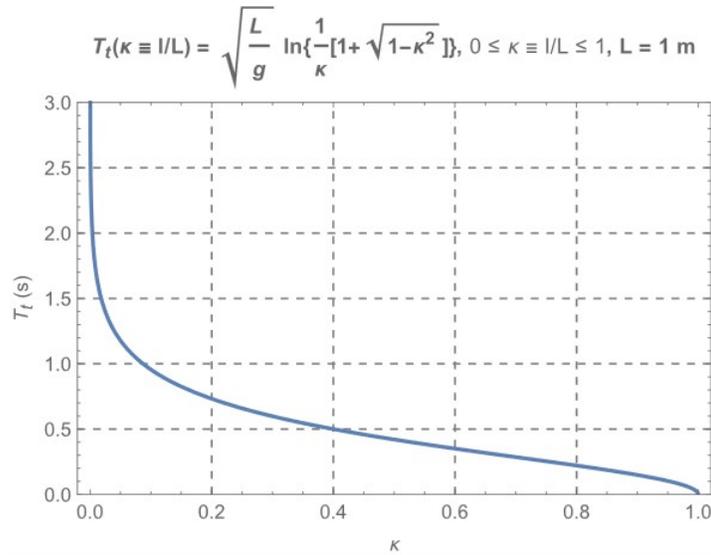


Figura 7: Gráfica del Tiempo Total de Deslizamiento Sin Fricción de la Cuerda T_t vs. el Parámetro Adimensional κ , Ec. (1.8f), Modelo A_1 : Caso Sin Fricción.

$$T_t \left(\kappa \equiv \frac{l}{L} \right) = \sqrt{\frac{L}{g}} \ln \left\{ \frac{1}{\kappa} \left[1 + \sqrt{1 - \kappa^2} \right] \right\} \dots (1.8f)$$

La Ec. (1.8f) corresponde con la Ec. (4) del trabajo de (Behroozi, F., 1997).

Por otro lado, queremos hallar una expresión de la “Rapidez de la Cuerda” en términos de la posición para poder hacer comparaciones más adelante con el Modelo B. Evaluamos la Velocidad de la Cuerda Ec. (1.7b) en el “Tiempo Total de Deslizamiento T_t ” hallado en la Ec. (1.8d), usando la definición de la “Función Seno Hiperbólico” Ec. (8.1) pág. 31 del libro (Spiegel y Abellanas, 1998), es decir:

$$v_z(T_t) = \dot{z}(T_t) = l \sqrt{\frac{g}{L}} \sinh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} T_t \right) \quad \boxed{8.1} \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = l \sqrt{\frac{g}{L}} \left[\frac{1}{2} \left\{ e^{\sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{\frac{L}{g}} \ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l} \right\}} - e^{-\sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{\frac{L}{g}} \ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l} \right\}} \right\} \right] \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \left[e^{\ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l} \right\}} - \frac{1}{e^{\ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l} \right\}}} \right] \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \left[\frac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l} - \frac{1}{\frac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l}} \right] = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \left[\frac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l} - \frac{l}{L + \sqrt{L^2 - l^2}} \right] \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \left[\frac{(L + \sqrt{L^2 - l^2})^2 - l^2}{l(L + \sqrt{L^2 - l^2})} \right] \Rightarrow v_z(T) = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \left[\frac{L^2 + 2L\sqrt{L^2 - l^2} + L^2 - l^2 - l^2}{l(L + \sqrt{L^2 - l^2})} \right]$$

$$v_z(T_t) = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \left[\frac{2(L^2 + L\sqrt{L^2 - l^2} - l^2)}{\lambda(L + \sqrt{L^2 - l^2})} \right] \Rightarrow v_z(T) = \sqrt{\frac{g}{L}} \left[\frac{L^2 - l^2 + L\sqrt{L^2 - l^2}}{L + \sqrt{L^2 - l^2}} \right]$$

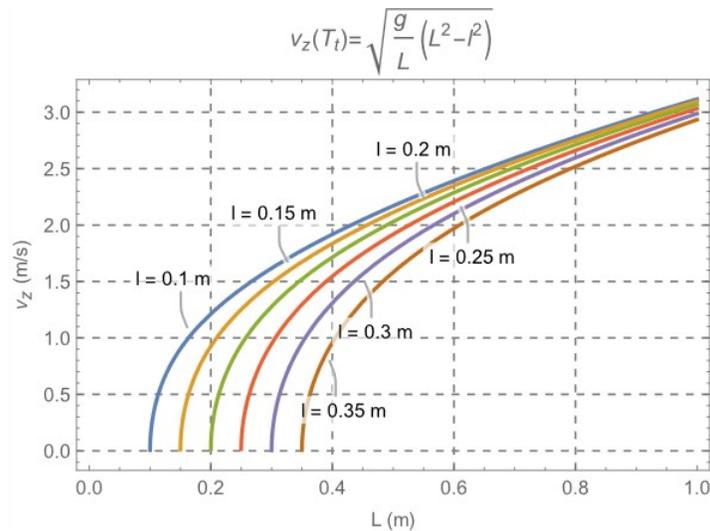


Figura 8: Gráfica de la Rapidez de la Cuerda Sin Fricción, Evaluada en el Tiempo Total de Deslizamiento, como función la Longitud Total de la Cuerda y de la Longitud Colgante de la mesa, Ec. (1.9), Modelo A1: Caso Sin Fricción. Comparar con la Fig. 26 y la Ec. (2.25) del Modelo B.

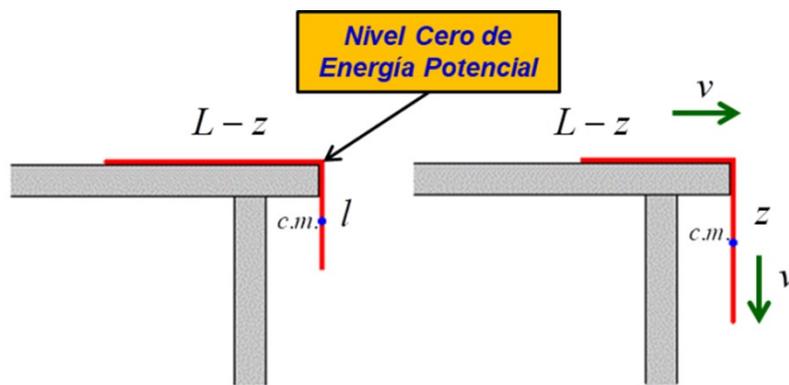


Figura 9: Representación esquemática del deslizamiento de la cuerda sobre la mesa, mostrando la dirección del movimiento, así como el Nivel Cero de Energía Potencial de la Cuerda.

$$v_z(T_t) = \sqrt{\frac{g}{L} \left[\frac{\sqrt{L^2 - l^2} \sqrt{L^2 - l^2} + L \sqrt{L^2 - l^2}}{L + \sqrt{L^2 - l^2}} \right]} \Rightarrow v_z(T) = \sqrt{\frac{g}{L} \left[\frac{\sqrt{L^2 - l^2} (\sqrt{L^2 - l^2} + L)}{L + \sqrt{L^2 - l^2}} \right]}$$

$$v_z(T_t) = \sqrt{\frac{g}{L} (L^2 - l^2)} \dots (1.9)$$

La Ec. (1.9), es la “Velocidad de la Cuerda, evaluada en el Tiempo Total de Deslizamiento”. Comparar esta expresión con la Ec. (2.25) del Modelo B

¿Se Conserva la Energía Mecánica en el Sistema?

Situado el Nivel Cero de Energía Potencial en el borde de la mesa, procedemos a hacer un “Balance Energético” de la Cuerda Flexible (Prato D. y Gleiser R., 1982), (Franco A., 2015).

Si pensamos en términos de “Fuerzas”, las únicas Fuerzas Externas que actúan sobre la Cuerda son: la gravedad en la parte vertical de la cuerda (el peso de la cuerda) y la Fuerza de Reacción Normal de la Mesa y el Peso de la Cuerda en la parte horizontal de la Mesa, las cuales se cancelan entre ellas y no realizan trabajo. Y como la Gravedad (es decir, el peso vertical de la cuerda) es una Fuerza Conservativa, es natural suponer que la “Energía Mecánica

del Sistema se Conserve”.

Como estamos hablando de una Cuerda Flexible, por tanto, debemos hacer referencia al “Centro de Masas del Sistema” (c.m.), ver la Fig. 7.

$$\Delta E = 0 \Rightarrow E_f - E_i = 0 \Rightarrow (K + U)_{inicial} = (K + U)_{final} \dots (1.10)$$

Inicialmente solo tenemos Energía Potencial Inicial de la Parte de Cuerda que cuelga del Borde de la Mesa (pues Parte del Reposo) con masa igual a λl .

$$U_{inicial} = -m_2 g \left(\frac{l}{2}\right) = -\lambda g \left(\frac{l}{2}\right) \Rightarrow \boxed{U_{inicial} = -\lambda g \left(\frac{l^2}{2}\right)} \dots (1.11)$$

La Energía Cinética Final de Toda la Cuerda con masa λl , es:

$$K_{final} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2} m_c v^2 = \frac{1}{2} \lambda L v^2 \Rightarrow \boxed{K_{final} = \frac{1}{2} \lambda L v^2} \dots (1.12a)$$

La Energía Potencial Final de la Cuerda es

$$U_{final} = -m_2 g L \left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow \boxed{U_{final} = -\lambda g \left(\frac{L^2}{2}\right)} \dots (1.13a)$$

Poniendo la información de las Ecs. (1.11), (1.12a) y (1.13a) en la Ec. (1.10) tendremos que la “Velocidad Final de la Cuerda” es:

$$\begin{aligned} K_{inicial} + U_{inicial} &= K_{final} + U_{final} \Rightarrow 0 - \lambda g \left(\frac{l^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \lambda L v^2 - \lambda g \left(\frac{L^2}{2}\right) \Rightarrow \\ -gl^2 &= Lv^2 - gL^2 \Rightarrow Lv^2 = g(L^2 - l^2) \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - l^2)}} \dots (1.14) \end{aligned}$$

Como era de esperarse. Comparar este resultado que se obtiene del “Análisis Energético” Ec. (1.14) con el obtenido previamente en la Ec. (1.9) por medio de un “Análisis Dinámico” de la situación planteada.

NOTA 1.4: La Ec. (1.14), al igual que la Ec. (1.9) corresponde a la Ec. (2.25) la cual encontraremos más adelante en el Modelo B.

NOTA 1.5: Comprobación del “Balance Energético”: Usando ahora el resultado de la “Velocidad de la Cuerda”, dado por la Ec. (1.7b) para todo tiempo “t”. La Energía Cinética de la Cuerda dada por la Ec. (1.12a) se transforma en:

$$K_{final} = \frac{1}{2} \lambda L v^2 \stackrel{(1.7b)}{=} \frac{1}{2} \lambda L \left[l \sqrt{\frac{g}{L}} \sinh \sqrt{\frac{g}{L}} t \right]^2 = \frac{1}{2} \lambda \frac{g}{L} \left[l^2 \sinh^2 \sqrt{\frac{g}{L}} t \right] \Rightarrow$$

Usando la relación Ec. (8.11), pág. 31 de la Trigonometría Hiperbólica del libro (Spiegel y Abellanas, 1998).

$$\boxed{8.11} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

La Energía Cinética Final, la podremos reescribir usando la Posición de la Cuerda dada por la Ec. (1.7a), quedándonos como

$$\begin{aligned} K_{final} &= \frac{1}{2} \lambda l^2 g \left[\cosh^2 \sqrt{\frac{g}{L}} t - 1 \right] \stackrel{(1.7a)}{=} \frac{1}{2} \lambda g \left[l^2 \left(\frac{z^2}{l^2} - 1 \right) \right] = \frac{1}{2} \lambda g (z^2 - l^2) \Rightarrow \\ &\boxed{K_{final} = \frac{1}{2} \lambda g (z^2 - l^2)} \dots (1.12b) \end{aligned}$$

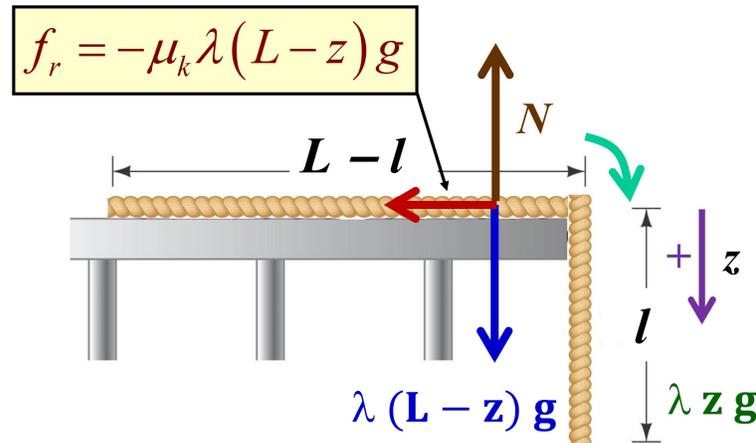


Figura 10: Representación esquemática del Caso B2 Con Fricción. La Cuerda de longitud total “ L ” y de longitud colgante “ l ”, con Densidad Lineal de Masa λ constante, descansa sobre una Mesa Horizontal (con fricción) y está a punto de Romper Inercia y comenzar a moverse hacia abajo.

De las Ecs. (1.11) y (1.13a) las “Energías Potenciales” inicial y final de la Cuerda serán (notemos que hicimos $L \rightarrow z$, para ser consistente con esta notación):

$$U_{inicial} = -\lambda g \left(\frac{l^2}{2} \right) \dots (1.13b) \quad ; \quad U_{final} = -\lambda g \left(\frac{z^2}{2} \right) \dots (1.13c)$$

Usando las Ecs. (1.13b), (1.13c) y (1.12b), la “Conservación de la Energía” se expresa finalmente como:

$$E_f - E_i = 0 \Rightarrow K_{inicial} + U_{inicial} = K_{final} + U_{final} \Rightarrow 0 - \lambda g \left(\frac{l^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \lambda g (z^2 - l^2) - \lambda g \left(\frac{z^2}{2} \right)$$

$$\left[\frac{1}{2} \lambda g (z^2 - l^2) \equiv \frac{1}{2} \lambda g (z^2 - l^2) \right] \dots (1.15)$$

La expresión (1.15) confirma la Conservación de la Energía del Sistema para el Caso I, Sin Fricción. Tal y como era de esperarse.

Modelo A₂: Caso con Fricción

Para introducir la “Fuerza de Rozamiento Cinética de Tipo Coulombico” en nuestro análisis, debemos tomar en cuenta que la “Longitud de la Parte de la Cuerda en Contacto con la Mesa” es “ $L - z$ ”, por tanto, la masa correspondiente de este Trozo de Cuerda vendrá de modificar la Ec. 1.2a) adecuadamente, es decir:

$$\tilde{m} = \lambda (L - z) \dots (1.2b)$$

Por tanto, la “Fuerza de Rozamiento Cinética” del Trozo de Cuerda en Contacto con la Mesa será:

$$f_r = -\mu_k N = -\mu_k \tilde{m} g = -\mu_k g \overbrace{(M - m)}^{\text{Cuerda en la Mesa}} = -\mu_k g \overbrace{[\lambda (L - z(t))]}^{\tilde{m}} \Rightarrow$$

$$\left[f_r = -\mu_k g \lambda [L - z(t)] \right] \dots (1.16)$$

Por tanto, la “Fuerza Neta” que actúa sobre el Trozo de Cuerda que está sobre la mesa de longitud “ $L - z$ ” son: su “Peso” y la “Fuerza de Rozamiento Cinética” es decir:

$$F = mg + f_r = \lambda z g - \mu_k \lambda g [L - z(t)] \Rightarrow \lambda L a(z) = \lambda z g - \mu_k \lambda g [L - z(t)] \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{g}{L} z(t) - \frac{\mu_k g}{L} [L - z(t)] \Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{g}{L} (1 + \mu_k) z(t) - \mu_k g \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{g}{L} [(1 + \mu_k) z(t) - \mu_k L]} \dots (1.17a)$$

NOTA 1.6: Cuando hacemos $\mu_k \rightarrow 0$ en la Ec. (1.17a), recuperamos el caso de la “Ecuación de Movimiento de la Cuerda Sin Fricción” Ec. (1.3b), como debe de ser.

NOTA 1.7: Comparar la Ecuación de Movimiento Ec. (1.17a) con la que se hallará en la Ec. (2.21a) del Modelo B.

Vemos que la Ec. (1.17a) es una “Ecuación Diferencial Lineal No Homogénea de Segundo Orden” y su Solución General viene dada por la suma de la solución de la Ecuación Diferencial Homogénea (“Caso 1” de la Ec. (24.7), pág. 92 del libro Spiegel y Abellanas (1998) más una Solución Particular de la Ecuación Diferencial No Homogénea. La Ecuación Diferencial Homogénea será:

$$\boxed{\frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{g}{L} (1 + \mu_k) z_1} \dots (1.17b)$$

Es claro que si hacemos $\mu_k \rightarrow 0$ en la Ec. (1.17b), tenemos la Ec. (1.3b) del Caso Sin Fricción. Por este hecho, usamos la solución obtenida en la Ec. (1.5a) y la Adaptamos Adecuadamente, es decir:

$$\boxed{z_1(t) = z_{homogenea}(t) = c_3 e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} + c_4 e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t}} \dots (1.17c)$$

Una Solución Particular de la Ec. (1.17a) se obtiene simplemente haciendo que $\ddot{z} = 0$, y hallamos que:

$$0 = \frac{g}{L} (1 + \mu_k) z - \mu_k g \Rightarrow \boxed{z_2(t) = z_{particular}(t) = \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} = cte.} \dots (1.17d)$$

Por tanto, la Solución General la obtenemos sumando las soluciones (1.17c) y (1.17d), es decir:

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) \Rightarrow \boxed{z(t) = c_3 e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} + c_4 e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} + \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k}} \dots (1.17e)$$

Confirmación de que la Ec. (1.17e) es solución general de la “Ecuación Diferencial Lineal No Homogénea de Segundo Orden” (1.17a). Derivando una y dos veces la Ec. (1.17e) tendremos que:

$$\boxed{\dot{z}(t) = c_3 \sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} - c_4 \sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t}} \dots (1.18a)$$

$$\boxed{\ddot{z}(t) = c_3 \frac{g}{L} (1 + \mu_k) e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} + c_4 \frac{g}{L} (1 + \mu_k) e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t}} \dots (1.18b)$$

Poniendo las Ecs. (1.17e) y (1.18b) en la “Ecuación Diferencial de Movimiento” Ec. (1.17a) comprobamos que:

$$c_3 \frac{g}{L} (1 + \mu_k) e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} - c_4 \frac{g}{L} (1 + \mu_k) e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} =$$

$$\frac{g}{L} (1 + \mu_k) \left[c_3 e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} + c_4 e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} + \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} \right] - \mu_k g$$

$$c_3 \frac{g}{L} (1 + \mu_k) e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} - c_4 \frac{g}{L} (1 + \mu_k) e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} =$$

$$c_3 \frac{g}{L} (1 + \mu_k) e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} - c_4 \frac{g}{L} (1 + \mu_k) e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} + \frac{g}{L} (1 + \mu_k) \left[\frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} \right] - \mu_k g$$

Efectivamente la Ec. (1.17e) es la Solución General de la “Ecuación Diferencial Lineal No Homogénea de Segundo Orden” Ec. (1.17a).

A continuación (procederemos como antes) a determinas los valores de las constantes c_3 y c_4 mediante la Aplicación de las Condiciones Iniciales, es decir, usando las Ecs. (1.17e) y (1.18a) tendremos:

$$z(t=0) = c_3 + c_4 + \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} = l \Rightarrow \boxed{c_3 + c_4 = l - \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k}} \dots (1.19a)$$

$$\dot{z}(t=0) = c_3 \sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu_k)} - c_4 \sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu_k)} = (c_3 - c_4) \sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu_k)} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{z}(t=0) = c_3 - c_4 = 0} \dots (1.19b)$$

Para Resolver el Sistemas de Ecuaciones, sumamos las Ecs. (1.19a) y (1.19b):

$$c_3 + c_4 + c_3 - c_4 = l - \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} + 0 \Rightarrow 2c_3 = l - \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} \Rightarrow$$

$$\boxed{c_3 = \frac{l}{2} - \frac{\mu_k L}{2(1 + \mu_k)}} \dots (1.19c) \quad \& \quad \boxed{c_4 = \frac{l}{2} - \frac{\mu_k L}{2(1 + \mu_k)}} \dots (1.19d)$$

NOTA 1.8: Es claro que si calculamos el Límite cuando $\mu_k \rightarrow 0$ en las Ecs. (1.19c) y (1.19d), recuperamos el valor de las constantes Sin Fricción Ecs. (1.6c) y (1.6d) halladas previamente para el Modelo A₁: Caso Sin Fricción.

De esta manera, poniendo las Ecs. (1.19c) y (1.19d) en la Ec. (1.17e), hallamos la Solución General de la “Ecuación Diferencial Lineal No Homogénea de Segundo Orden” Ec. (1.17a).

$$z(t) = \left(\frac{l}{2} - \frac{\mu_k L}{2(1 + \mu_k)} \right) e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} + \left(\frac{l}{2} - \frac{\mu_k L}{2(1 + \mu_k)} \right) e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} + \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} \Rightarrow$$

$$z(t) = \left(\frac{l}{2} - \frac{\mu_k L}{2(1 + \mu_k)} \right) \left[e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} \right] + \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} \Rightarrow$$

$$z(t) = \left(\frac{l + \mu_k [l - L]}{(1 + \mu_k)} \right) \overbrace{\left[\frac{e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t}}{2} \right]}^{8.2 \quad \cosh \sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} + \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} \Rightarrow$$

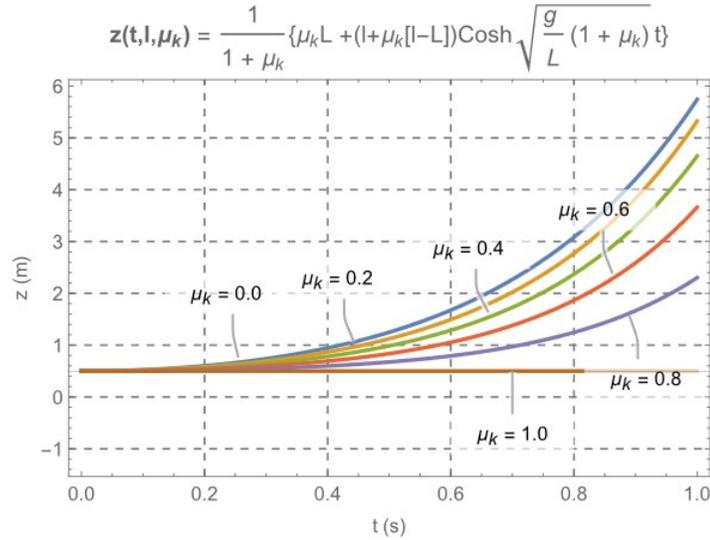


Figura 11: Gráfica de la Posición de la Cuerda como función del Tiempo z vs. t , para una longitud de la parte colgante de la cuerda de $l = 0.5$ m, y diferentes valores del Coeficiente de Fricción Cinética μ_k , Ec. (1.20a), Modelo A_2 : Caso Con Fricción.

$$z(t) = \left(\frac{l + \mu_k [l - L]}{1 + \mu_k} \right) \cosh \sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} t + \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} \Rightarrow$$

$$z(t, l, \mu_k) = \frac{1}{1 + \mu_k} \left\{ \mu_k L + (l + \mu_k [l - L]) \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} t \right) \right\} \dots (1.20a)$$

¿Cuál es el resultado de la Ec. (1.20a) cuando calculamos el límite $\mu_k \rightarrow 0$?

$$z(t, l, \mu_k \rightarrow 0) = \lim_{\mu_k \rightarrow 0} z(t, l, \mu_k)$$

$$(1.20a) \quad = \lim_{\mu_k \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 + \mu_k} \left\{ \mu_k L + (l + \mu_k [l - L]) \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} t \right) \right\} \right]$$

$$z(t, l, \mu_k \rightarrow 0) = l \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right) \dots (1.7a)$$

Encontramos la Posición de la Cuerda Ec. (1.7a) del Modelo A_1 : Caso Sin Fricción, como debe de ser.

Poniendo las Ecs. (1.19c) y (1.19d) en la Ec. (1.18a), podemos hallar la Rapidez de la Cuerda para el Modelo A_2 : Caso Con Fricción, es decir:

$$v_z(t) = \dot{z}(t) = \left(\frac{l}{2} - \frac{\mu_k L}{2(1 + \mu_k)} \right) \sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} e^{\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} t} - \left(\frac{l}{2} - \frac{\mu_k L}{2(1 + \mu_k)} \right) \sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} e^{-\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} t} \Rightarrow$$

$$v_z(t) = \dot{z}(t) = \frac{1}{2} \left(l - \frac{\mu_k L}{(1 + \mu_k)} \right) \sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} \left[e^{\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} t} \right] \Rightarrow$$

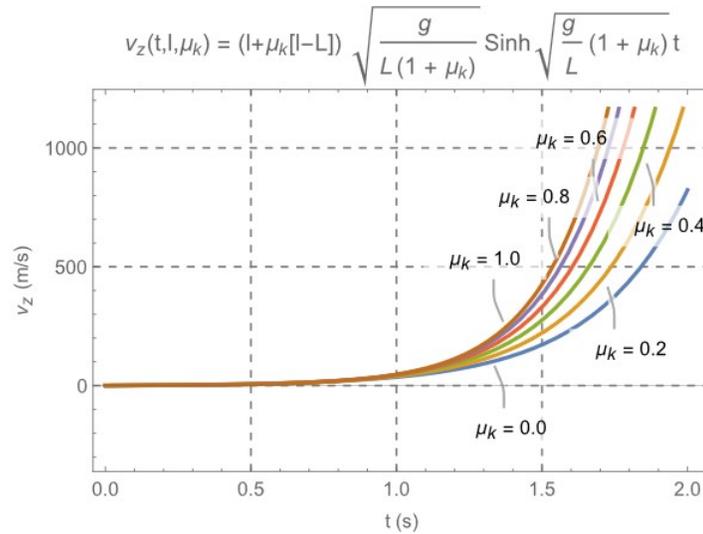


Figura 12: Gráfica de la Rapidez de la Cuerda como función del Tiempo v_z vs. t , para una longitud de la parte colgante de la cuerda de $l = 0.5$ m, y diferentes valores del Coeficiente de Fricción Cinética μ_k , Ec. (1.20b), Modelo A₂: Caso Con Fricción.

$$v_z(t) = \dot{z}(t) = \left(\frac{l + l\mu_k - \mu_k L}{\sqrt{(1 + \mu_k)}\sqrt{(1 + \mu_k)}} \right) \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{(1 + \mu_k)} \left[\frac{e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu_k)} t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu_k)} t}}{2} \right] \Rightarrow$$

$$v_z(t, l, \mu_k) = \dot{z}(t, \mu_k) = (l + \mu_k [l - L]) \sqrt{\frac{g}{L(1 + \mu_k)}} \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu_k)} t\right) \dots (1.20b)$$

¿Cuál es el resultado de la Ec. (1.20b) cuando calculamos el límite $\mu_k \rightarrow 0$?

$$v_z(t, l, \mu_k \rightarrow 0) = \lim_{\mu_k \rightarrow 0} v_z(t, l, \mu_k) \stackrel{(1.20b)}{=} \lim_{\mu_k \rightarrow 0} \left[(l + \mu_k [l - L]) \sqrt{\frac{g}{L(1 + \mu_k)}} \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu_k)} t\right) \right]$$

$$v_z(t, l, \mu_k \rightarrow 0) = l \sqrt{\frac{g}{L}} \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) \dots (1.7b)$$

Encontramos la Velocidad de la Cuerda Ec. (1.7b) del Modelo A₁: Caso Sin Fricción, como debe de ser

NOTA 1.9: Comparar la expresión Ec. (1.20b) válida para todo “ t ”, con la Ec. (2.23) válida cuando la última parte de la cuerda abandona la mesa del Modelo B.

De igual manera que antes, poniendo las Ecs. (1.19c) y (1.19d) en la Ec. (1.18b), podemos hallar la Aceleración de la Cuerda para el Modelo A₂: Caso Con Fricción, es decir:

$$a_z(t) = \ddot{z}(t) = \left(\frac{l}{2} - \frac{\mu_k L}{2(1 + \mu_k)} \right) \frac{g}{L} (1 + \mu_k) e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu_k)} t} + \left(\frac{l}{2} - \frac{\mu_k L}{2(1 + \mu_k)} \right) \frac{g}{L} (1 + \mu_k) e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu_k)} t} \Rightarrow$$

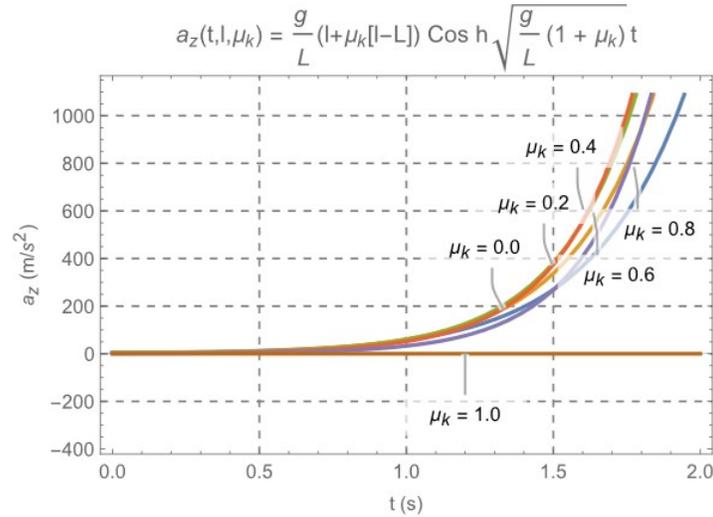


Figura 13: Gráfica de la Aceleración de la Cuerda como función del Tiempo a_z vs. t , para una longitud de la parte colgante de la cuerda de $l = 0.5$ m, y diferentes valores del Coeficiente de Fricción Cinética μ_k , Ec. (1.20c), Modelo A_2 : Caso Con Fricción.

$$a_z(t) = \ddot{z}(t) = \left(\frac{l + l\mu_k - \mu_k L}{(1 + \mu_k)} \right) \frac{g(1 + \mu_k)}{L} \overbrace{\left[\frac{e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t}}{2} \right]}^{8.2 \operatorname{cosh} \sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} t} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_z(t, l, \mu_k) = \ddot{z}(t, l, \mu_k) = \frac{g}{L} (l + \mu_k [l - L]) \operatorname{Cosh} \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} t \right)} \dots (1.20c)$$

¿Cuál es el resultado de la Ec. (1.20c) cuando calculamos el límite $\mu_k \rightarrow 0$?

$$a_z(t, l, \mu_k \rightarrow 0) = \lim_{\mu_k \rightarrow 0} a_z(t, l, \mu_k) \stackrel{(1.20c)}{=} \lim_{\mu_k \rightarrow 0} \left[\frac{g}{L} (l + \mu_k [l - L]) \operatorname{Cosh} \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} t \right) \right]$$

$$\boxed{a_z(t, l, \mu_k \rightarrow 0) = \frac{gl}{L} \operatorname{Cosh} \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right)} \dots (1.7c)$$

Encontramos la Aceleración de la Cuerda Ec. (1.7c) del Modelo A_1 : Caso Sin Fricción, como debe de ser.

Derivando la Aceleración de la Cuerda Ec. (1.20c) hallamos el Tirón de la Cuerda:

$$j_z(t) = \frac{da_z(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{g}{L} (l + \mu_k [l - L]) \operatorname{Cosh} \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} t \right) \right\}$$

$$= \frac{g}{L} (l + \mu_k [l - L]) \sinh \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} t \right) \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} t \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{j_z(t, l, \mu_k) = \dot{z}'(t, l, \mu_k) = \frac{g}{L} (l + \mu_k [l - L]) \sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} \sinh \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} t \right)} \dots (1.20d)$$

¿Cuál es el resultado de la Ec. (1.20d) cuando calculamos el límite $\mu_k \rightarrow 0$?

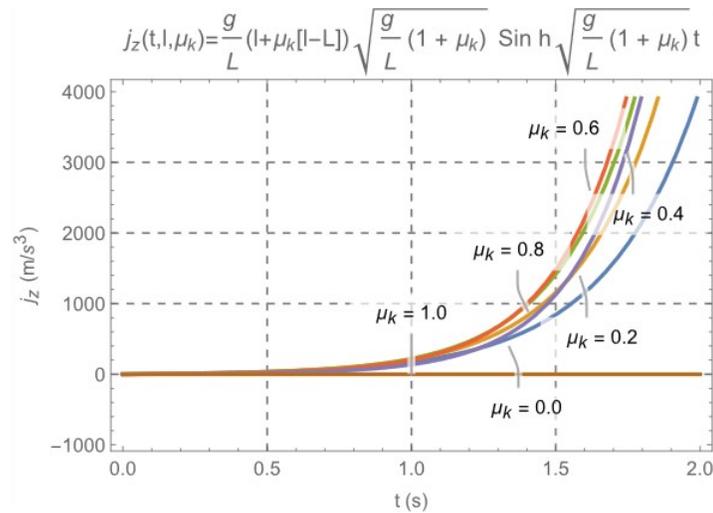


Figura 14: Gráfica del Tirón de la Cuerda como función del Tiempo j_z vs. t , para una longitud de la parte colgante de la cuerda de $l = 0.5$, y diferentes valores del Coeficiente de Fricción Cinética μ_k , Ec. (1.20d), Modelo A_2 : Caso Con Fricción.

$$j_z(t, l, \mu_k \rightarrow 0) = \lim_{\mu_k \rightarrow 0} j_z(t, l, \mu_k)$$

$$(1.20d) \quad = \lim_{\mu_k \rightarrow 0} \left[\frac{g}{L} (l + \mu_k [l - L]) \sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} \sinh \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} t \right) \right]$$

$$j_z(t, l, \mu_k \rightarrow 0) = l \frac{g}{L} \sqrt{\frac{g}{L}} \sinh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right) \dots (1.7d)$$

Encontramos el Tirón de la Cuerda Ec. (1.7d) del Modelo A_1 : Caso Sin Fricción, como debe de ser.

NOTA 1.10: De los resultados anteriores Ecs. (1.20a), (1.20b), (1.20c) y (1.20d), notamos que el Tirón de la Cuerda está relacionado con la Velocidad de esta. De igual manera, la Aceleración de la Cuerda, está relacionada con la Posición de la Cuerda, de la siguiente manera:

$$j_z(t) = \frac{g}{L} (1 + \mu_k) v_z(t) \dots (1.20e)$$

&

$$a_z(t) = \frac{g}{L} [(1 + \mu_k) z(t) - \mu_k L] \dots (1.20f)$$

Claramente cuando hacemos el límite cuando $\mu_k \rightarrow 0$ en las Ecs. (1.20e) y (1.20f), recuperamos las relaciones entre el Tirón y la Velocidad de la Cuerda Ec. (1.7e) y la relación que existe entre la Aceleración y la Posición de la Cuerda Ec. (1.7f) del Modelo A_1 : Caso Sin Fricción, previamente visto. Notemos también que la Ec. (1.20f) corresponde justamente a la Ecuación del Movimiento de la Cuerda sobre una Mesa con Fricción Seca Ec. (1.17a) del Modelo A_2 : Caso Con Fricción

NOTA 1.11: Comprobación, si ponemos el valor de “ $z(t)$ ” dado por la Ec. (1.20a) en la Ecuación de Movimiento de la Cuerda Ec. (1.17a), encontramos la Aceleración del Sistema, es decir la Ec. (1.20c), tal y como debe ser.

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{g}{L} \cancel{(1 + \mu_k)} \left[\frac{1}{\cancel{1 + \mu_k}} \left\{ \mu_k L + (l + \mu_k [l - L]) \cosh \sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} t \right\} \right] - \mu_k g \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{g}{L} (\mu_k L) + \frac{g}{L} (l + \mu_k [l - L]) \cosh \sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k) t} - \mu_k g \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{g}{L} (l + \mu_k [l - L]) \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k) t} \right)} \dots (1.20c)$$

Para poder hallar el nuevo “Tiempo Total de Deslizamiento “ T_t ” de la Cuerda con Fricción”, procederemos de forma análoga a como lo hicimos en el Modelo A₁: Caso Sin Fricción.

Es decir, partiendo de la Ec. (1.20a) y usando la Ec. (8.2) del libro (Spiegel y Abellanas, 1998) tenemos Una Nueva Condición para el “Tiempo Total de Deslizamiento “ T_t ” de la Cuerda con Fricción”, es decir:

$$z(T_t) = \frac{1}{1 + \mu_k} \left\{ \mu_k L + (l + \mu_k [l - L]) \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k) T_t} \right) \right\} \quad \boxed{8.2} \Rightarrow$$

$$L = \left(\frac{l}{2} - \frac{\mu_k L}{2(1 + \mu_k)} \right) \left[e^{\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k) T_t}} + e^{-\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k) T_t}} \right] + \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k}$$

Para hallar la Nueva Condición, definimos:

$$\boxed{y \equiv e^{\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k) T_t}}} \dots (1.21a)$$

es claro que si hacemos que $\mu_k \rightarrow 0$ en la Ec. (1.21a), recuperamos la Ec. (1.8a) del Modelo A₁: Caso Sin Fricción. Por tanto, lo anterior nos queda como

$$L = \left(\frac{l}{2} - \frac{\mu_k L}{2(1 + \mu_k)} \right) \left(y + \frac{1}{y} \right) + \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} \Rightarrow L - \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} = \frac{1}{2} \left(l - \frac{\mu_k L}{(1 + \mu_k)} \right) \left(y + \frac{1}{y} \right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{1 + \mu_k} \right) [L(1 + \mu_k) - \mu_k L] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \mu_k} \right) [l(1 + \mu_k) - \mu_k L] \left(y + \frac{1}{y} \right) \Rightarrow$$

$$2[L(1 + \mu_k) - \mu_k L] = [l(1 + \mu_k) - \mu_k L] \left(\frac{y^2 + 1}{y} \right) \Rightarrow$$

$$2[L(1 + \mu_k) - \mu_k L] y = [l(1 + \mu_k) - \mu_k L] (y^2 + 1) \Rightarrow$$

$$[l(1 + \mu_k) - \mu_k L] y^2 - 2[L(1 + \mu_k) - \mu_k L] y + [l(1 + \mu_k) - \mu_k L] = 0 \Rightarrow$$

$$y^2 - 2 \left[\frac{L(1 + \mu_k) - \mu_k L}{l(1 + \mu_k) - \mu_k L} \right] y + 1 = 0 \Rightarrow y^2 - 2 \left[\frac{L + L\mu_k - \mu_k L}{l + \mu_k(l - L)} \right] y + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{y^2 + \left[-\frac{2L}{l + \mu_k(l - L)} \right] y + 1 = 0} \dots (1.21b)$$

Claramente, si hacemos que $\mu_k \rightarrow 0$ en la Ec. (1.21b), recuperamos la Ec. (2.8b) del Modelo A₁: Caso Sin Fricción. La “Ecuación Cuadrática” (1.21b) tiene como solución:

$$y_{1,2} = \frac{- \left[-\frac{2L}{l + \mu_k(l - L)} \right] \pm \sqrt{\left[-\frac{2L}{l + \mu_k(l - L)} \right]^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \Rightarrow$$

$$y_{1,2} = \frac{\frac{2L}{l + \mu_k(l - L)} \pm \sqrt{\frac{L^2}{[l + \mu_k(l - L)]^2} - 1}}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 y_{1,2} &= \frac{L}{l + \mu_k (l - L)} \pm \sqrt{\frac{L^2}{[l + \mu_k (l - L)]^2} - 1} \Rightarrow \\
 y_{1,2} &= \frac{L}{l + \mu_k (l - L)} \pm \frac{1}{l + \mu_k (l - L)} \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} \Rightarrow \\
 \boxed{y} &= \frac{1}{l + \mu_k (l - L)} \left(L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} \right) \dots (1.21c)
 \end{aligned}$$

Si hacemos que $\mu_k \rightarrow 0$ en la Ec. (1.21c), recuperamos la Ec. (1.8c) del Modelo A₁: Caso Sin Fricción. Como antes, nos deshacemos de la raíz negativa, pues ello nos llevaría a considerar “Tiempos Negativos”.

Poniendo la raíz positiva (1.21c) en la definición (1.21a) encontramos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{l + \mu_k (l - L)} \left(L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} \right) &= e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} T_t} \quad \text{Logaritmizando} \Rightarrow \\
 \ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}}{l + \mu_k (l - L)} \right\} &= \ln \left\{ e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)} T_t} \right\} \Rightarrow \\
 \sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu_k)} T_t &= \ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}}{l + \mu_k (l - L)} \right\} \Rightarrow \\
 \boxed{T_t(l, \mu_k)} &= \sqrt{\frac{L}{g(1 + \mu_k)}} \ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}}{l + \mu_k (l - L)} \right\} \dots (1.21d)
 \end{aligned}$$

NOTA 1.12: El “Tiempo Total de Deslizamiento T_t de la Cuerda con Fricción” Ec. (1.21d), corresponde con la Ec. [12] del trabajo (Behroozi, F. 1997), corresponde con la Ec. [20.23] del texto (Greiner, W. 1989), corresponde al Problema [3.85] del texto (Spiegel, M. R. 1980), (Franco A., 2015) y corresponde a Question 11.31, Eq. (11) del texto (De Lande, O. L. y Pierrus, J. 2010, p.p. 390-393).

Si en la Ec. (1.21d) hacemos que $\mu_k \rightarrow 0$, recuperamos la Ec. (1.8d) del Modelo A₁: Caso Sin Fricción. Es claro también que este nuevo Tiempo de Deslizamiento Ec. (1.21d) es claramente más grande que el Tiempo de Deslizamiento Sin Fricción Ec. (1.8d), del Modelo A₁: Caso Sin Fricción, lo cual lo podemos observar en la gráfica Fig. 6.

Para comparar nuestros resultados con otros trabajos de investigación, usamos el Parámetro Adimensional “ κ ”, Ec. (1.8e) en la Ec. (1.21d), y para ello definimos

$$\begin{aligned}
 A &\equiv \frac{1}{l + \mu_k (l - L)} = \frac{1}{l + \mu_k \left(1 - \frac{L}{l}\right)} = \frac{1}{l \left[1 + \mu_k \left(1 - \frac{L}{l}\right)\right]} = \frac{1}{l \left[1 + \mu_k \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\right]} \\
 &= \frac{1}{l \left[1 + \mu_k \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\right]} = \frac{1}{l \left[1 + \mu_k \frac{1}{\kappa} (\kappa - 1)\right]} = \frac{1}{l \left[\frac{1}{\kappa} \{\kappa + \mu_k (\kappa - 1)\}\right]} = \frac{1}{\frac{l}{\kappa} [\kappa + \mu_k (\kappa - 1)]} \\
 \boxed{A} &= \frac{\kappa}{l [\kappa + \mu_k (\kappa - 1)]} \dots (1.21e)
 \end{aligned}$$

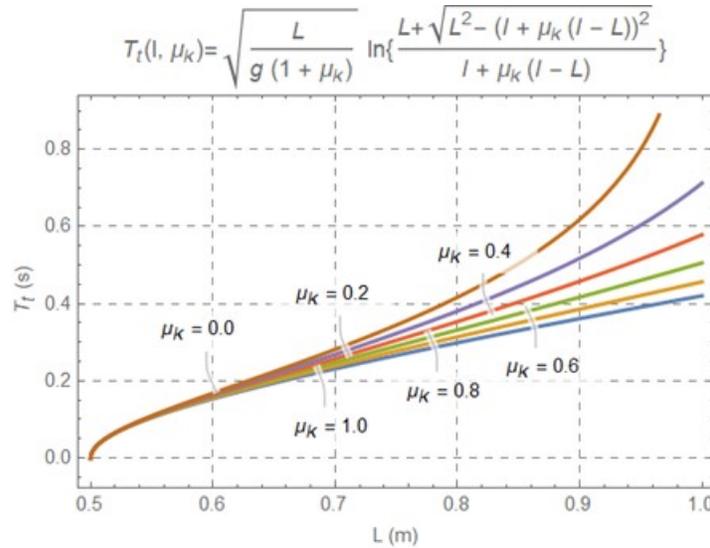


Figura 15: Gráfica del Tiempo Total de Deslizamiento T_t de la Cuerda con Fricción T_t vs. L , para una longitud de la parte colgante de la cuerda de $l = 0.5$ m, y para diferentes valores del Coeficiente de Rozamiento Cinético μ_k , Ec. (1.21d), Modelo A_2 : Caso Con Fricción.

$$\begin{aligned} B &\equiv L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l - L)]^2} = \\ L + \sqrt{L^2 - \left[l + L\mu_k\left(\frac{l}{L} - 1\right)\right]^2} &= L + \sqrt{L^2 - \left[L\left\{\frac{l}{L} + \mu_k(\kappa - 1)\right\}\right]^2} \\ &= L + \sqrt{L^2 - L^2[\kappa + \mu_k(\kappa - 1)]^2} = L + L\sqrt{1 - [\kappa + \mu_k(\kappa - 1)]^2} \Rightarrow \\ &\boxed{B = L \left\{ 1 + \sqrt{1 - [\kappa + \mu_k(\kappa - 1)]^2} \right\}} \dots (1.21f) \end{aligned}$$

El argumento del Logaritmo Natural de la Ec. (1.21d) corresponde al producto de los resultados parciales Ecs. (1.21e) y (1.21f), es decir:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \left(\frac{\kappa}{l[\kappa + \mu_k(\kappa - 1)]} \right) \left(L \left\{ 1 + \sqrt{1 - [\kappa + \mu_k(\kappa - 1)]^2} \right\} \right) \Rightarrow \\ A \cdot B &= \frac{L}{l} \left(\frac{\kappa}{[\kappa + \mu_k(\kappa - 1)]} \right) \left(\left\{ 1 + \sqrt{1 - [\kappa + \mu_k(\kappa - 1)]^2} \right\} \right) \Rightarrow \\ A \cdot B &= \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\kappa}{\kappa + \mu_k(\kappa - 1)} \right) \left(1 + \sqrt{1 - [\kappa + \mu_k(\kappa - 1)]^2} \right) \Rightarrow \\ &\boxed{A \cdot B = \frac{1 + \sqrt{1 - [\kappa + \mu_k(\kappa - 1)]^2}}{\kappa + \mu_k(\kappa - 1)}} \dots (1.21g) \end{aligned}$$

Poniendo la Ec. (1.21g) en el Argumento del Logaritmo Natural de la Ec. (1.21d) tendremos finalmente que:

$$\boxed{T_t(\kappa, \mu_k) = \sqrt{\frac{L}{g(1 + \mu_k)}} \ln \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - [\kappa + \mu_k(\kappa - 1)]^2}}{\kappa + \mu_k(\kappa - 1)} \right\}} \dots (1.21h)$$

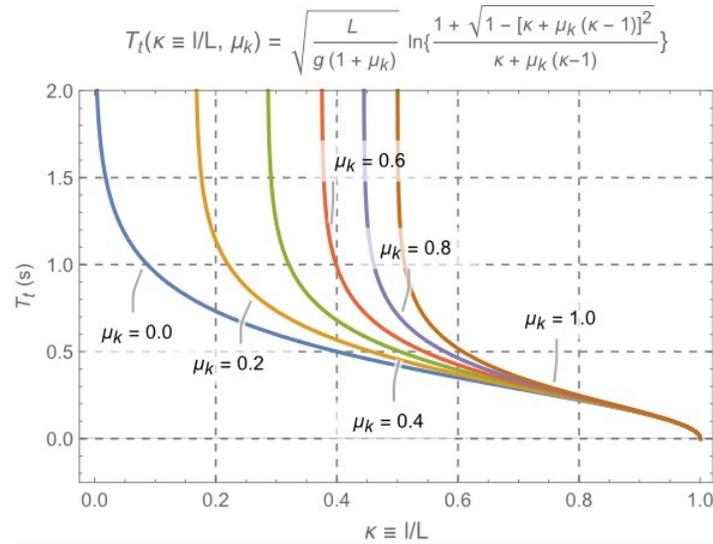


Figura 16: Gráfica del Tiempo Total de Deslizamiento Con Fricción de la Cuerda T_t vs. el Parámetro Adimensional κ , Ec. (1.21h), Modelo A_2 : Caso Con Fricción. Ver el APÉNDICE B.

La Ec. (1.21h) corresponde con la Ec. (12) del trabajo de (Behroozi, F., 1997), ver el APÉNDICE B.

¿Qué sucede cuando hacemos que $\mu_k \rightarrow 0$ y sustituimos el valor de “ κ ” en la Ec. (1.21h)?

$$T_t(\kappa, \mu_k \rightarrow 0)|_{\kappa=l/L} = \lim_{\mu_k \rightarrow 0} \left[\sqrt{\frac{L}{g(1 + \mu_k)}} \ln \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - [\kappa + \mu_k(\kappa - 1)]^2}}{\kappa + \mu_k(\kappa - 1)} \right\} \right] \Rightarrow$$

$$T_t(\kappa, \mu_k \rightarrow 0)|_{\kappa=l/L} = \left[\sqrt{\frac{L}{g}} \ln \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - \kappa^2}}{\kappa} \right\} \right]_{\kappa=l/L} \Rightarrow$$

$$T_t(\kappa, \mu_k \rightarrow 0)|_{\kappa=l/L} = \sqrt{\frac{L}{g}} \ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l} \right\} \dots (1.8f)$$

Con lo que recuperamos la Ec. (1.8f) del Caso Sin Fricción, como debe de ser.

De la Ecuación de Movimiento (1.17a), vemos que la cuerda comienza a deslizarse solo cuando $\ddot{z} > 0$, es decir,

$$\frac{g}{L}(1 + \mu_k)l - \mu_k g > 0 \Rightarrow \frac{g}{L}(1 + \mu_k)l > \mu_k g \Rightarrow l > \left(\frac{\mu_k}{1 + \mu_k} \right) L \dots (1.22a)$$

Y la **máxima longitud** “ l ” de la cuerda que puede colgar sin que se caiga de la mesa (compatible con el reposo), será cuando:

$$\frac{g}{L}(1 + \mu_s)l - \mu_s g \leq 0 \Rightarrow \frac{g}{L}(1 + \mu_s)l \leq \mu_s g \Rightarrow l \leq \left(\frac{\mu_s}{1 + \mu_s} \right) L \dots (1.22b)$$

NOTA 1.13: La condición (1.22b) la encontraremos de nuevo más adelante en el Modelo B, cuando cambiamos $\mu_k \rightarrow \mu_s$ para poder considerar el Reposo y/o la Velocidad Constante de la Cuerda.

Por otro lado, para poder hacer comparaciones de la “Rapidez de la Cuerda” evaluaremos la Ec. (1.20b) en el “Tiempo Total de Deslizamiento T_t de la Cuerda con Fricción” hallado en la Ec. (1.21d), es decir:

$$v_z(T_t) = \frac{(l + \mu_k [l - L])}{2} \sqrt{\frac{g}{L(1 + \mu_k)}} \times \left[e^{\sqrt{\frac{g}{L(1 + \mu_k)}} \sqrt{L/g(1 + \mu_k)} \ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}}{l + \mu_k (l - L)} \right\}} - e^{-\sqrt{\frac{g}{L(1 + \mu_k)}} \sqrt{L/g(1 + \mu_k)} \ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}}{l + \mu_k (l - L)} \right\}} \right] \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \frac{(l + \mu_k [l - L])}{2} \sqrt{\frac{g}{L(1 + \mu_k)}} \left[e^{\ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}}{l + \mu_k (l - L)} \right\}} - \frac{1}{e^{\ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}}{l + \mu_k (l - L)} \right\}}} \right] \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \frac{(l + \mu_k [l - L])}{2} \sqrt{\frac{g}{L(1 + \mu_k)}} \left[\frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}}{l + \mu_k (l - L)} - \frac{1}{\frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}}{l + \mu_k (l - L)}} \right] \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \frac{(l + \mu_k [l - L])}{2} \sqrt{\frac{g}{L(1 + \mu_k)}}$$

$$\left[\frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}}{l + \mu_k (l - L)} - \frac{l + \mu_k (l - L)}{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}} \right] \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \frac{(l + \mu_k [l - L])}{2} \sqrt{\frac{g}{L(1 + \mu_k)}} \left\{ \frac{\left[L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} \right]^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}{[l + \mu_k (l - L)] \left[L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} \right]} \right\} \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \frac{(l + \mu_k [l - L])}{2} \sqrt{\frac{g}{L(1 + \mu_k)}} \times$$

$$\left\{ \frac{L^2 + 2L\sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} + L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}{[l + \mu_k (l - L)] \left[L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} \right]} \right\} \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \frac{\cancel{(l + \mu_k [l - L])}}{2} \sqrt{\frac{g}{L(1 + \mu_k)}} \times$$

$$\left\{ \frac{2L^2 + 2L\sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} - 2[l + \mu_k (l - L)]^2}{\cancel{[l + \mu_k (l - L)]} \left[L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} \right]} \right\} \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \sqrt{\frac{g}{L(1+\mu_k)}} \times \left\{ \frac{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2 + L\sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2}}{[L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2}]} \right\} \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \sqrt{\frac{g}{L(1+\mu_k)}} \times \left\{ \frac{\sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2} \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2} + L\sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2}}{[L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2}]} \right\} \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \sqrt{\frac{g}{L(1+\mu_k)}} \times \left\{ \frac{\sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2} \left(\sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2} + L \right)}{[L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2}]} \right\} \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \sqrt{\frac{g}{L(1+\mu_k)}} \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2} = \sqrt{\frac{g}{L} \left\{ \frac{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2}{(1+\mu_k)} \right\}} \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \sqrt{\frac{g}{L} \left\{ \frac{(L - [l + \mu_k(l-L)])(L + [l + \mu_k(l-L)])}{(1+\mu_k)} \right\}} \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \sqrt{\frac{g}{L} \left\{ \frac{(L - l - \mu_k l + \mu_k L)(L + l + \mu_k l - \mu_k L)}{(1+\mu_k)} \right\}} \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \sqrt{\frac{g}{L} \left\{ \frac{(L[1+\mu_k] - l[1+\mu_k l])(L[1-\mu_k] + l[1+\mu_k])}{(1+\mu_k)} \right\}} \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \sqrt{\frac{g}{L} \left\{ \frac{[1+\mu_k](L-l)(L[1-\mu_k] + l[1+\mu_k])}{(1+\mu_k)} \right\}} \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \sqrt{\frac{g}{L} \{(L-l)(L[1-\mu_k] + l[1+\mu_k])\}} = \sqrt{\frac{g}{L} \{(L-l)(L - L\mu_k + l + l\mu_k)\}}$$

$$v_z(T_t) = \sqrt{\frac{g}{L} \{(L-l)[(L+l) - \mu_k(L-l)]\}} \Rightarrow$$

$$v_z(T_t) = \sqrt{\frac{g}{L} [(L^2 - l^2) - \mu_k(L - l^2)]} \dots (1.23)$$

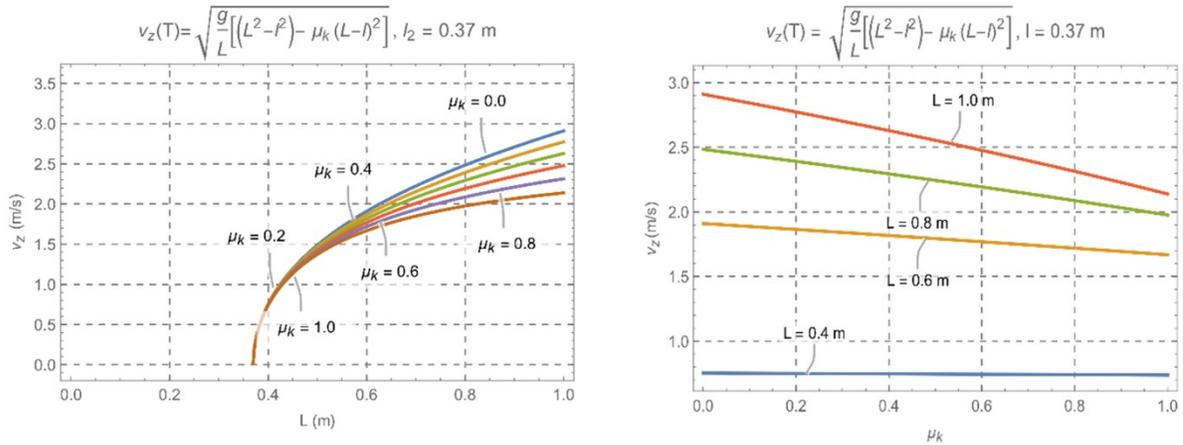


Figura 17: Panel de la izquierda y derecha, gráficas de la Rapidez de la Cuerda como función de la longitud Colgante l , longitud Total L y Coeficiente de Rozamiento Cinético μ_k Ec. (1.23), evaluada en el Tiempo Total de Deslizamiento T_t de la Cuerda con Fricción v_z vs. L y v_z vs. μ_k , del Modelo A₂: Caso Con Fricción respectivamente, para $l = 0.37$ m. Comparar con la Fig. 23 del Modelo B

NOTA 1.14: La Ec. (1.23) corresponderá exactamente a la Ec. (2.23) que se hallará en el Modelo B. Ver las gráficas correspondientes de la Ec. (2.23), Fig. 5.

De forma análoga, evaluaremos la Aceleración de la Cuerda Modelo A₂: Caso Con Fricción Ec. (1.20c) en el “Tiempo Totac de Deslizamiento “ T_t ” de la Cuerda con Fricción” hallado en la Ec. (1.21d), es decir:

$$a_z(T_t) = \frac{g}{2L} (l + \mu_k [l - L]) \times \left\{ e^{\frac{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)}}{\sqrt{L/g(1+\mu_k)}} \ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2}}{l + \mu_k(l-L)} \right\}} + e^{-\frac{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_k)}}{\sqrt{L/g(1+\mu_k)}} \ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2}}{l + \mu_k(l-L)} \right\}} \right\} \Rightarrow$$

$$a_z(T_t) = \frac{g}{2L} (l + \mu_k [l - L]) \left\{ e^{\ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2}}{l + \mu_k(l-L)} \right\}} + \frac{1}{e^{\ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2}}{l + \mu_k(l-L)} \right\}}} \right\} \Rightarrow$$

$$a_z(T_t) = \frac{g}{2L} (l + \mu_k [l - L]) \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2}}{l + \mu_k(l-L)} + \frac{1}{\frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2}}{l + \mu_k(l-L)}} \right\} \Rightarrow$$

$$a_z(T_t) = \frac{g}{2L} (l + \mu_k [l - L]) \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2}}{l + \mu_k(l-L)} + \frac{l + \mu_k(l-L)}{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2}} \right\} \Rightarrow$$

$$a_z(T_t) = \frac{g}{2L} (l + \mu_k [l - L]) \left\{ \frac{\left[L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2} \right]^2 + [l + \mu_k(l-L)]^2}{[l + \mu_k(l-L)] \left[L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k(l-L)]^2} \right]} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 a_z(T_t) &= \frac{g}{2L} (l + \mu_k [l - L]) \times \\
 &\left\{ \frac{L^2 + 2L\sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} + L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2 + [l + \mu_k (l - L)]^2}{[l + \mu_k (l - L)] \left[L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} \right]} \right\} \Rightarrow \\
 a_z(T_t) &= \frac{g}{2L} (l + \mu_k [l - L]) \times \\
 &\left\{ \frac{2L^2 + 2L\sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} - [l + \mu_k (l - L)]^2 + [l + \mu_k (l - L)]^2}{[l + \mu_k (l - L)] \left[L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} \right]} \right\} \Rightarrow \\
 a_z(T_t) &= g \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}}{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}} \right\}^1 \Rightarrow \boxed{a_z(T_t) = g} \dots (1.24)
 \end{aligned}$$

La Ec. (1.24) nos dice simplemente que cuando se ha consumido un Tiempo Total “ T_t ” de Deslizamiento y la Cuerda ya no está sobre la mesa, ella está cayendo libremente con la “Aceleración de la Gravedad Terrestre”, tal y como debe de ser.

¿Dónde está la Cuerda una vez que ha transcurrido un Tiempo Total “ T_t ” de Deslizamiento?. Tomando la Ec. (1.20a) para la Posición de la Cuerda y evaluándola en el “Tiempo Total de Deslizamiento” Ec. (1.21d) tendremos:

$$z(T_t) = \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} + \frac{(l + \mu_k [l - L])}{1 + \mu_k} \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) T_t \right)$$

Vemos que la expresión funcional (cosh) es la misma que para la aceleración, (ver el desarrollo que se hizo en la Ec. (1.24), utilizando la relación existente entre las “Funciones Hiperbólicas” y la “Función Exponencial” Ec. (8.2)), por tanto, tomando el desarrollo hecho para la Cuerda hasta antes de la cancelación masiva, tendremos:

$$\begin{aligned}
 z(T_t) &= \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} + \frac{(l + \mu_k [l - L])}{2(1 + \mu_k)} \times \\
 &\left\{ \frac{L^2 + 2L\sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} + L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2 + [l + \mu_k (l - L)]^2}{[l + \mu_k (l - L)] \left[L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} \right]} \right\} \Rightarrow \\
 z(T_t) &= \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} + \frac{(l + \mu_k [l - L])}{2(1 + \mu_k)} \times \\
 &\left\{ \frac{2L^2 + 2L\sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} - [l + \mu_k (l - L)]^2 + [l + \mu_k (l - L)]^2}{[l + \mu_k (l - L)] \left[L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} \right]} \right\} \Rightarrow \\
 z(T_t) &= \frac{\mu_k L}{1 + \mu_k} + \frac{L}{(1 + \mu_k)} \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2}}{\left[L + \sqrt{L^2 - [l + \mu_k (l - L)]^2} \right]} \right\} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

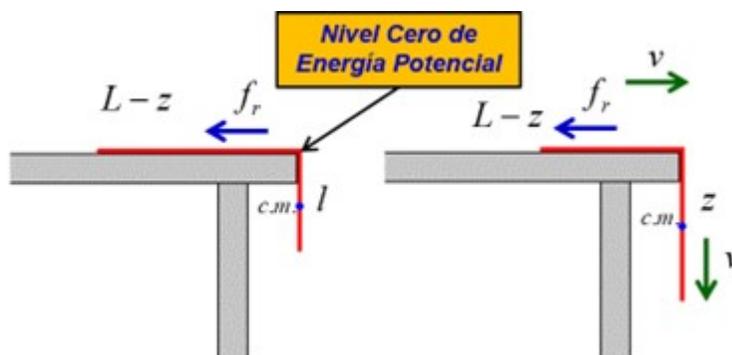


Figura 18: Representación esquemática del deslizamiento de la Cuerda sobre la Mesa con Fricción, mostrando la dirección del movimiento, así como el Nivel Cero de Energía Potencial de la Cuerda.

$$z(T_t) = \frac{\mu_k L}{(1 + \mu_k)} + \frac{L}{(1 + \mu_k)} = \frac{\mu_k L + L}{(1 + \mu_k)} = \frac{L(1 + \mu_k)}{(1 + \mu_k)} \Rightarrow \boxed{z(T_t) = L} \dots (1.25)$$

La Ec. (1.25) nos dice que cuando se ha consumido un Tiempo Total “ T_t ” de Deslizamiento y la Cuerda mide exactamente la Longitud Total de la misma “ L ” y está cayendo en “Caída Libre” tal y como debe de ser.

¿Se Cumple el Teorema Trabajo-Energía en este Caso?

Finalmente, para aplicar el “Teorema del Trabajo y la Energía”, procederemos de forma semejante a como lo hicimos en el Modelo A_1 : Caso Sin Fricción (Prato D. y Gleiser R., 1982), y siguiendo a (Franco A., 2015). Situamos el Nivel Cero de Energía Potencial en el borde de la mesa, tal y como aparece en la Fig. 18.

El “Teorema Trabajo-Energía” dice que:

$$W_{inicial \rightarrow final} = \Delta E \Rightarrow \boxed{W_{inicial \rightarrow final} = (K + U)_{final} - (K + U)_{inicial}} \dots (1.26)$$

Por lo tanto, procedemos a calcular el “Trabajo Mecánico”, realizados por la “Fuerza Disipativa de Rozamiento” en los Puntos Inicial y Final, ver la Fig. 14, es decir:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_{z(0)=l}^z \vec{f}_k \cdot dz' = \int_{z(0)=l}^z |\vec{f}_k| |dz'| \cos 180^\circ = - \int_{z(0)=l}^z f_k dz' \quad (1.16)$$

$$= - \int_{z(0)=l}^z \mu_k \lambda (L - z') g dz'$$

$$W_{i \rightarrow f} = -\mu_k \lambda g \int_{z(0)=l}^z (L - z') dz' \Rightarrow u = L - z' \Rightarrow du = -dz' \Rightarrow$$

$$W_{i \rightarrow f} = \mu_k \lambda g \int_{z(0)=l}^z (L - z') (-dz') = \mu_k \lambda g \left[\frac{1}{2} (L - z')^2 \right] \Big|_{z(0)=l}^z \Rightarrow$$

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2} \mu_k \lambda g [(L - z)^2 - (L - l)^2] \Rightarrow$$

$$W_{i \rightarrow f} = \mu_k \lambda g \left[\frac{1}{2} (L^2 - 2zL + z^2) - \frac{1}{2} (L^2 - 2lL + l^2) \right] \Rightarrow$$

$$W_{i \rightarrow f} = \mu_k \lambda g \left[\frac{1}{2} L^2 - zL + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} L^2 + lL - \frac{1}{2} l^2 \right] \Rightarrow$$

$$W_{i \rightarrow f} = \mu_k \lambda g \left[-z \left(L + \frac{1}{2} z \right) + l \left(L - \frac{1}{2} l \right) \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{W_{i \rightarrow f} = -\mu_k \lambda g \left(L + \frac{1}{2} z \right) z + \mu_k \lambda g \left(L - \frac{1}{2} l \right) l} \dots (1.27)$$

La Ec. (1.27) está en acuerdo con lo reportado en (Franco A., 2015).

Como antes, tomamos el Nivel Cero de Energía Potencial en el Borde de la Mesa, y hacemos referencia al “Centro de Masas del Sistema” (c.m.). Es obvio que cuando desaparece el rozamiento ($\mu_k \rightarrow 0$), el Trabajo hecho por la Fuerza de Rozamiento es Nulo.

Las Energías Potenciales Final e Inicial, son iguales que antes (Caso Sin Fricción) Ecs. (1.13b) y (1.13c)

$$\boxed{U_{inicial} = -\lambda g \left(\frac{l^2}{2} \right)} \dots (1.13b) \quad ; \quad \boxed{U_{final} = -\lambda g \left(\frac{z^2}{2} \right)} \dots (1.13c)$$

La que sí cambia, es la Energía Cinética Final, lo cual se ve reflejado en la Rapidez por la Presencia de la Fricción. Usando el resultado de la “Velocidad de la Cuerda”, dado por la Ec. (1.20b), la Energía Cinética de la Cuerda dada por la Ec. (1.12a) modificada adecuadamente se transforma en:

$$K_{final} = \frac{1}{2} \lambda L v^2 \stackrel{(1.20b)}{=} \frac{1}{2} \lambda L \left[(l + \mu_k [l - L]) \sqrt{\frac{g}{L(1 + \mu_k)}} \sinh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) t \right) \right]^2 \Rightarrow$$

$$K_{final} = \frac{1}{2} \lambda L \left[(l + \mu_k [l - L])^2 \left[\frac{g}{L(1 + \mu_k)} \right] \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) t \right) \right] \Rightarrow$$

Usando de nuevo la relación Ec. (8.11), pág. 31 de la Trigonometría Hiperbólica del libro (Spiegel y Abellanas, 1998) tenemos:

$$K_{final} = \frac{\lambda g (l + \mu_k [l - L])^2}{2(1 + \mu_k)} \left[\cosh^2 \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) t \right) - 1 \right] \dots (1.28)$$

Por otro lado, sabemos que la Posición de la Cuerda viene de la Ec. (1.20a) y por tanto tenemos que:

$$z(1 + \mu_k) - \mu_k L = (l + \mu_k [l - L]) \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) t \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) t \right) = \frac{z(1 + \mu_k) - \mu_k L}{l + \mu_k [l - L]}} \dots (1.29)$$

Poniendo el resultado de Ec. (1.29) en la Ec. (1.28) de la Energía Cinética Final tendremos que:

$$K_{final} = \frac{\lambda g (l + \mu_k [l - L])^2}{2(1 + \mu_k)} \left[\left(\frac{z(1 + \mu_k) - \mu_k L}{l + \mu_k [l - L]} \right)^2 - 1 \right] \Rightarrow$$

$$K_{final} = \frac{\lambda g (l + \mu_k [l - L])^2}{2(1 + \mu_k)} \left\{ \frac{[z(1 + \mu_k) - \mu_k L]^2 - (l + \mu_k [l - L])^2}{(l + \mu_k [l - L])^2} \right\} \Rightarrow$$

$$K_{final} = \frac{\lambda g}{2(1 + \mu_k)} \{ [z(1 + \mu_k) - \mu_k L]^2 - (l + \mu_k [l - L])^2 \}$$

$$K_{final} = \frac{\lambda g}{2(1 + \mu_k)} \left\{ \left[(1 + \mu_k) \left\{ z - \frac{\mu_k L}{(1 + \mu_k)} \right\} \right]^2 - \left[(1 + \mu_k) \left\{ l - \frac{\mu_k L}{(1 + \mu_k)} \right\} \right]^2 \right\}$$

$$K_{final} = \frac{\lambda g(1 + \mu_k)^2}{2(1 + \mu_k)} \left\{ \left[z - \frac{\mu_k L}{(1 + \mu_k)} \right]^2 - \left[l - \frac{\mu_k L}{(1 + \mu_k)} \right]^2 \right\}$$

$$K_{final} = \frac{1}{2} \lambda g (1 + \mu_k) \left\{ \left[z - \frac{\mu_k}{(1 + \mu_k)} L \right]^2 - \left[l - \frac{\mu_k}{(1 + \mu_k)} L \right]^2 \right\} \dots (1.30)$$

NOTA 1.15: Si hacemos el Límite cuando $\mu_k \rightarrow 0$ en la Ec. (1.30) de la Energía Cinética Final, recuperamos inmediatamente el resultado de la Energía Cinética Final dado por la Ec. (1.12b) para el Caso A₁ Sin Resistencia.

Finalmente, poniendo los resultados dados por las Ecs. (1.13b), (1.13c) y (1.30) en la Ec. (1.27), concluimos que:

$$\begin{aligned} -\mu_k \lambda g \left(L + \frac{1}{2} z \right) z + \mu_k \lambda g \left(L - \frac{1}{2} l \right) l &= \frac{1}{2} \lambda g (1 + \mu_k) \times \\ \left\{ \left[z - \frac{\mu_k}{(1 + \mu_k)} L \right]^2 - \left[l - \frac{\mu_k}{(1 + \mu_k)} L \right]^2 \right\} - \lambda g \left(\frac{z^2}{2} \right) - 0 - \left[-\lambda g \left(\frac{l^2}{2} \right) \right] &\Rightarrow \\ -\mu_k \lambda g \left(L + \frac{1}{2} z \right) z + \mu_k \lambda g \left(L - \frac{1}{2} l \right) l &= \frac{1}{2} \lambda g (1 + \mu_k) \\ \left\{ \left[z - \frac{\mu_k}{(1 + \mu_k)} L \right]^2 - \left[l - \frac{\mu_k}{(1 + \mu_k)} L \right]^2 \right\} + \frac{\lambda}{2} g (l^2 - z^2) &\dots (1.31) \end{aligned}$$

La Ec. (1.31) está en acuerdo con lo reportado en (Franco A., 2015), cumpliéndose por tanto con el “Teorema Trabajo Energía”.

2.2. Modelo B

Colocamos una Cuerda Flexible de Densidad Lineal de Masa Constante λ y de longitud $L = 1$ m sobre una mesa de tal manera que parte de ella (l) cuelga por el extremo derecho de la mesa (ver la Fig. 15). Si el Coeficiente Estático de Rozamiento entre la mesa y la cuerda es de $\mu_s = 0.6$, y el Cinético es $\mu_k = 0.3$. Calcular: a) la máxima longitud l de la cuerda que puede colgar sin que se caiga de la mesa (compatible con el reposo), b) la velocidad de la cuerda en el momento en que no queda nada de ella sobre la mesa, c) usando el resultado obtenido en el inciso b), cual es la velocidad de la cuerda cuando Desaparece la Fricción, i.e. $\mu_{k,s} = 0$.

a) Calcular la máxima longitud l de la cuerda que puede colgar sin que se caiga de la mesa (compatible con el reposo)

Para resolver este problema echaremos mano del Modelo Simple de Dos Masas Puntuales unidas por una Cuerda Ideal que pasa por una Polea también Ideal, en una Mesa con Fricción, ver el Modelo 2 en (Cabral-Rosetti y Castillo, 2022).

Lo anterior, se explica mejor con el diagrama de la Fig. 16

Por lo tanto, construimos las Ecuaciones de Movimiento del Modelo Simple de Dos Masas Puntuales unidas por una Cuerda Ideal que pasa por una Polea también Ideal, en una Mesa con Fricción. Partiendo de los correspondientes Diagramas de Cuerpo Libre, es decir:

Bloque1

$$\sum_{Bloque1} F_x : T - f_s = m_1 \tilde{a} \dots (2.1)$$

$$\& \sum_{Bloque1} F_y : N - m_1 g = 0 \dots (2.2)$$

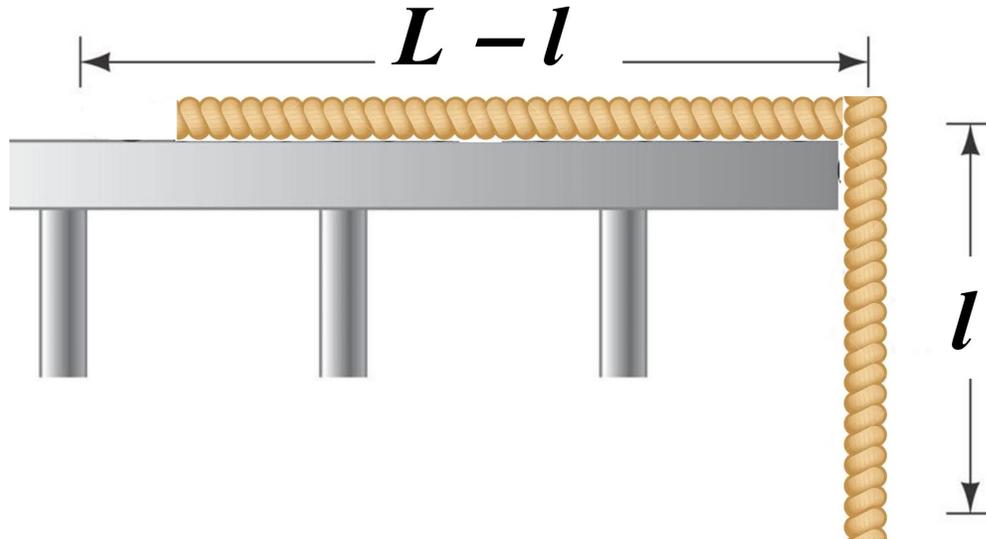


Figura 19: Representación esquemática del Modelo B. La Cuerda de longitud total “ L ” y de longitud colgante “ l ”, con Densidad Lineal de Masa λ constante, descansa sobre una Mesa con Fricción y está a punto de desplazarse (Romper Inercia) y comenzar a moverse hacia abajo.

donde \tilde{a} denota la “Aceleración en Potencia del Sistema”, pues estamos estudiando un Sistema Cuasi estático, es decir, A Punto de Romper Inercia. Ecuación complementaria (Ley de Coulomb para Rozamiento Sólido-Sólido):

$$f_s \leq \mu_s N \dots (2.3)$$

Bloque2

$$\sum_{Bloque2} F_x : = 0 \dots (2.4)$$

$$\& \sum_{Bloque2} F_y : T - m_2 g = - m_2 \tilde{a} \dots (2.5)$$

De la Ec. (2.2), hallamos la Reacción Normal de la Mesa sobre el Bloque 1, es decir:

$$N = m_1 g \dots (2.6)$$

Sustituyendo la Ec. (2.6) en la Ec. (2.3) y todo ello lo ponemos en la Ec. (2.1) para poder encontrar la Tensión de la Cuerda, es decir

$$T - \mu_s m_1 g = m_1 \tilde{a} \Rightarrow T = \mu_s m_1 g + m_1 \tilde{a} \dots (2.7)$$

Ponemos la Ec. (2.7) en la Ec. (2.5) para hallar la Aceleración del Sistema:

$$\mu_s m_1 g + m_1 \tilde{a} - m_2 g = - m_2 \tilde{a} \Rightarrow (m_2 - \mu_s m_1) g = (m_1 + m_2) \tilde{a} \Rightarrow \tilde{a} = \left(\frac{m_2 - \mu_s m_1}{m_1 + m_2} \right) g \dots (2.8)$$

NOTA 2.1 La Ec. (2.8) corresponde a la Ec. (26) del Modelo 2 en (Cabral-Rosetti y Castillo, 2022), pero aquí aparecen Dos Diferencias: \tilde{a} la Cuasi Aceleración del Sistema pues estamos antes de Romper Inercia y μ_s en lugar de μ_k , esto es debido a que aquí el Sistema está en inminencia de moverse.

Poniendo la Cuasi Aceleración Ec. (2.8) en la Ec. (2.7) hallamos la Tensión en la Cuerda:

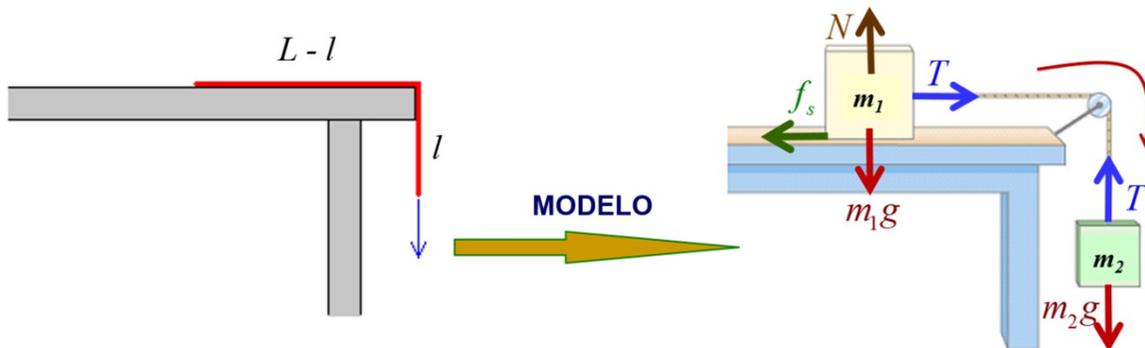


Figura 20: Diagrama esquemático donde se modela la Cuerda de Longitud total “L” y de longitud colgante “l” y con Densidad Lineal de Masa λ constante mediante el Modelo Simple de Dos Masas Puntuales unidas por una Cuerda Ideal que pasa por una Polea también Ideal, en una Mesa con Fricción ver el Modelo 2 en (Cabral-Rosetti y Castillo, 2022).

$$T = \mu_s m_1 g + m_1 \left(\frac{m_2 - \mu_s m_1}{m_1 + m_2} \right) g \Rightarrow T = \frac{\mu_s m_1^2 g + \mu_s m_1 m_2 g + m_1 m_2 g - \mu_s m_1^2 g}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$T = \left[\frac{m_1 m_2 (1 + \mu_s)}{m_1 + m_2} \right] g \dots (2.9)$$

NOTA 2.2 La Tensión de la Cuerda Ec. (2.9) corresponde a la Tensión de la Ec. (27) del Modelo 2 en (Cabral-Rosetti y Castillo, 2022), en donde hemos cambiado μ_s por μ_k , por las razones antes expuestas.

Como era de esperarse, si hacemos el Límite cuando $\mu_s \rightarrow 0$, en las Ecs. (2.8) y (2.9), recuperamos los Casos Conocidos del Modelo 1 vistos en (Cabral-Rosetti y Castillo, 2022).

Para el caso en que la Cuerda No Cae de la Mesa, entonces la Cuasi Aceleración es Cero, y de la Ec. (2.8) tendremos que:

$$0 = \left(\frac{m_2 - \mu_s m_1}{m_1 + m_2} \right) g \Rightarrow m_2 g - \mu_s m_1 g = 0 \Rightarrow m_2 g = \mu_s m_1 g \Rightarrow \boxed{m_2 = \mu_s m_1} \dots (2.10)$$

Como por Hipótesis la Cuerda es Homogénea tenemos que:

$$\lambda \equiv \frac{\text{Masa de la Cuerda}}{\text{Longitud de la Cuerda}} = \frac{M}{L} = cte.$$

Para cada parte de la Cuerda tenemos que:

$$\lambda = \frac{m_1}{L - l} \Rightarrow m_1 = \lambda (L - l) \dots (2.11)$$

Análogamente,

$$\lambda = \frac{m_2}{l} \Rightarrow m_2 = \lambda l \dots (2.12)$$

Poniendo la Ec. (2.11) y (2.12) en la Ec. (2.10) encontramos que:

$$\lambda l = \mu_s \lambda (L - l) \Rightarrow l = \mu_s (L - l) \dots (2.13)$$

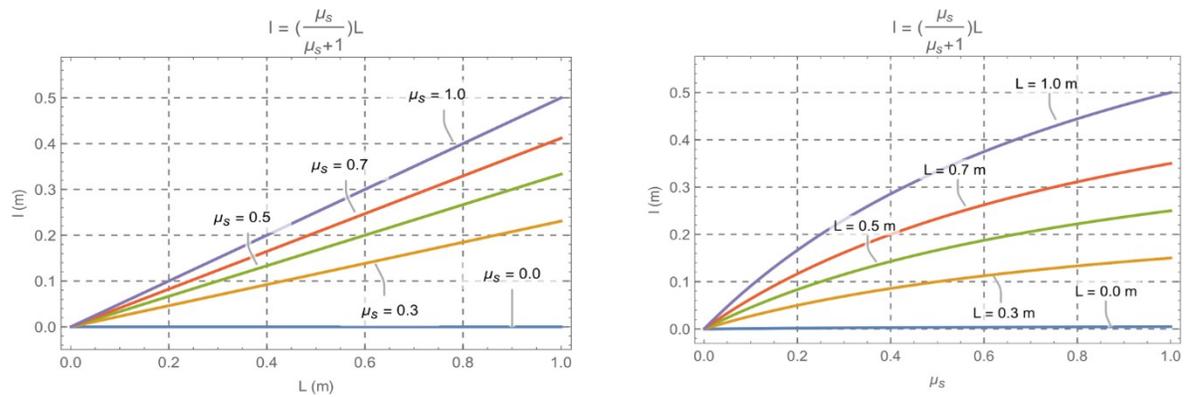


Figura 21: Panel de la izquierda y derecha, gráficas de la Longitud de la Cuerda Colgante l como función de L y μ_s Ec. (1.16a) l vs. L y l vs. μ_s , respectivamente, para Modelo B.

Por otro lado, de la figura sabemos que la Longitud Total de la Cuerda es:

$$L = (L - l) + l \dots (2.14)$$

De la Ec. (2.13) tenemos que:

$$(L - l) = \frac{l}{\mu_s} \dots (2.15)$$

Sustituyendo la Ec. (2.15) en la Ec. (2.14) llegamos finalmente a que:

$$L = \frac{l}{\mu_s} + l = l \left(\frac{1}{\mu_s} + 1 \right) = l \left(\frac{\mu_s + 1}{\mu_s} \right) \Rightarrow \boxed{l \leq \left(\frac{\mu_s}{\mu_s + 1} \right) L} \dots (2.16a)$$

NOTA 2.3: La condición encontrada en la Ec. (2.16a) corresponde a la Ec. (1.22b) del Modelo A₂: Caso Con Fricción, visto previamente.

Poniendo los Valores Numéricos del Problema en la Ec. (2.16a), hallamos la Longitud de la Cuerda que sobresale de la Mesa, sin que esta resbale.

$$l = \left(\frac{0.6}{0.6 + 1} \right) (100 \text{ cm}) \Rightarrow \boxed{l = 37.5 \text{ cm}} \dots (2.17)$$

NOTA 2.4: Hemos puesto el signo de desigualdad en la Ec. (2.16a) para valores menores que el encontrado con esas condiciones la Cuerda se haya en Reposo o en Movimiento con Rapidez constante (se está resbalando). Para valores con el signo de igualdad, la Cuerda está a punto de Romper la Inercia y Comenzaría a Moverse con Aceleración constante.

b) La Velocidad de la Cuerda en el momento en que no queda ninguna parte de la cuerda sobre la mesa.

A partir de la “Longitud Colgante” l dada por la Ec. (2.16a) la Cuerda Empieza a Caer Aceleradamente. Designemos ahora por “ z ” la “Porción Colgante de la Cuerda en cada Instante de Tiempo”.

Las Fuerzas que actúan sobre la cuerda son las mismas que antes, aunque ahora varían en magnitud, pues la cuerda se mueve sobre la Superficie Horizontal y como sabemos, el Rozamiento es ahora “Dinámico” y “No Estático” como antes. Por tanto, la Ec. (2.16a) se transforma en:

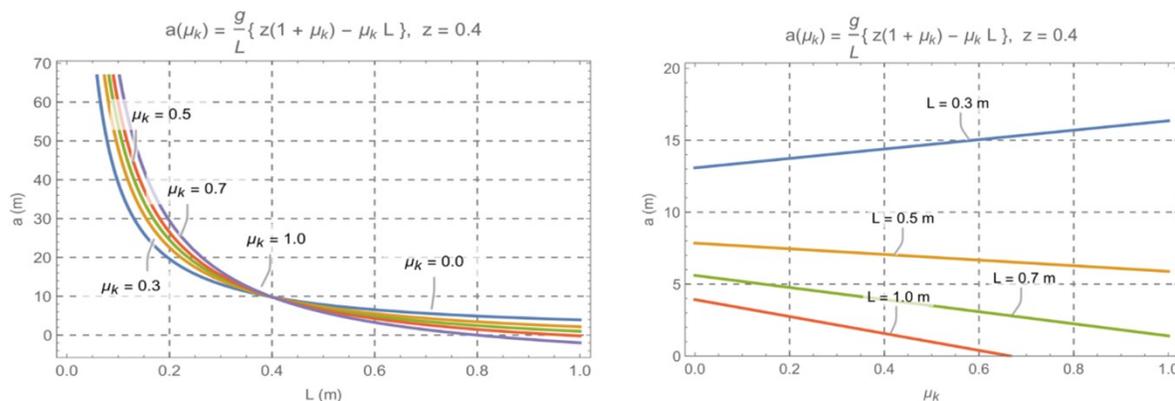


Figura 22: Panel de la izquierda y derecha, gráficas de la Aceleración de la Cuerda como función de la longitud Colgante z , L y μ_k Ec. (1.21a) a vs. L y a vs. μ_k , respectivamente, para $z = 0.4$ m., para Modelo B.

$$z = \left(\frac{\mu_s}{\mu_s + 1} \right) L \dots (2.16b)$$

Por tanto, la Ec. (2.12) se transforma en:

$$\lambda = \frac{m_2}{z} \Rightarrow m_2 = \lambda z \dots (2.18)$$

$$m_1 = \lambda (L - z) \dots (2.19) \Rightarrow m_1 + m_2 = \lambda (L - z) + \lambda z = \lambda L \dots (2.20)$$

Poniendo ahora las Ecs. (2.18), (2.19) y (2.20) y cambiando μ_s por μ_k en la Ec. (2.8) de la Aceleración ($\tilde{a} \rightarrow a$) tendremos:

$$a(t) = \left(\frac{m_2 - \mu_k m_1}{m_1 + m_2} \right) g = \left(\frac{\lambda z(t) - \mu_k \lambda (L - z(t))}{\lambda L} \right) g = \frac{g}{L} [z(t) - \mu_k (L - z(t))] \Rightarrow$$

$$a(t) = \frac{g}{L} [(1 + \mu_k) z(t) - \mu_k L] \dots (2.21a)$$

NOTA 2.5: De la Ec. (2.21a) es claro que la “Densidad Lineal de Masa de la Cuerda” desaparece, y el único vestigio que nos queda de la cuerda es su Longitud Total “ L ”.

NOTA 2.6: Observemos que, la Ec. (2.21a) corresponde exactamente con la Ec. (1.20f) del Modelo A₂: Caso Con Fricción. Es decir, encontramos la misma relación entre la Aceleración y la Posición de la Cuerda sin necesidad de hallar toda la resolución exacta del problema como en el Modelo A₂: Caso Con Fricción. Además, es la Ecuación de Movimiento Ec. (1.17a) del Modelo A₂: Caso Con Fricción.

La Ec. (2.21a) nos dice que la Aceleración es una Función de la Altura “ z ”. Por tanto, para poder hallar la Velocidad de la Cuerda, haremos uso de la Regla de Cadena, es decir:

$$a(z) = \frac{dv}{dt} \stackrel{R.C.}{=} \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = v \frac{dv}{dz} \dots (2.22)$$

Poniendo la Ec. (2.22) en la Ec. (2.21a) y Separando Variables para poder Integrar tendremos:

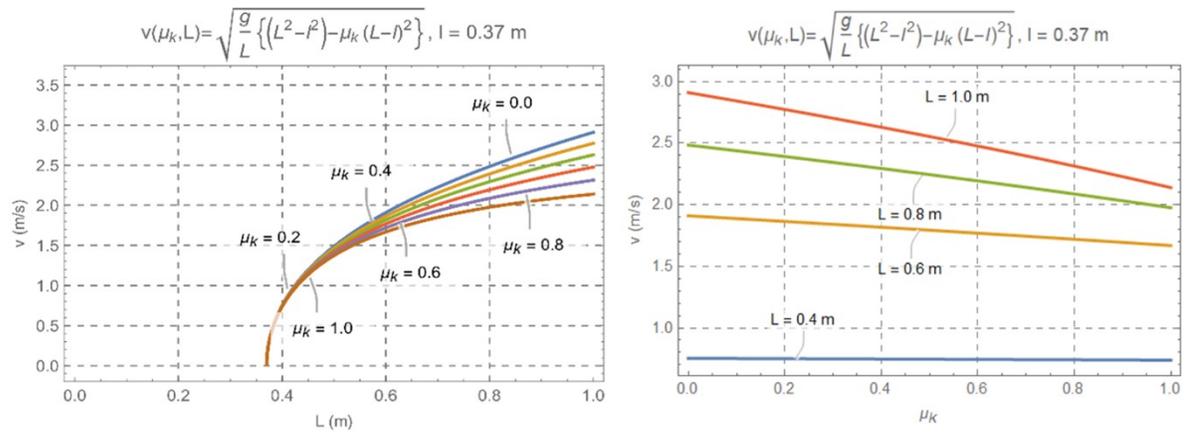


Figura 23: El Panel de la izquierda y de la derecha muestran gráficas de la Rapidez de la Cuerda como función de las longitudes l, L y μ_k Ec. (1.23) v vs. L y v vs. μ_k , respectivamente, para $l = 0.37$ m., para Modelo B. (Comparar ambas Figs. 12 del Modelo B con las Fig. 17 del Modelo A₂)

$$v \frac{dv}{dz} = \frac{g}{L} [z(1 + \mu_k) - \mu_k L] \Rightarrow \int_0^v v' dv' = \frac{g}{L} \left[(1 + \mu_k) \int_l^L z' dz' - \mu_k L \int_l^L dz' \right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} v'^2 \Big|_0^v = \frac{g}{L} \left[\frac{1}{2} (1 + \mu_k) z'^2 \Big|_l^L - \mu_k L z' \Big|_l^L \right] \Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = \frac{g}{L} \left[\frac{1}{2} (1 + \mu_k) (L^2 - l^2) - 2 \frac{1}{2} \mu_k L (L - l) \right] \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{g}{L} [(1 + \mu_k) (L^2 - l^2) - 2 \mu_k L (L - l)] = \frac{g}{L} [(1 + \mu_k) (L - l) (L + l) - 2 \mu_k L (L - l)]$$

$$v^2 = \frac{g}{L} (L - l) [(1 + \mu_k) (L + l) - 2 \mu_k L] = \frac{g}{L} (L - l) [L + l + \mu_k L + \mu_k l - \mu_k L - \mu_k L]$$

$$v^2 = \frac{g}{L} (L - l) [L + l + \mu_k l - \mu_k L] = \frac{g}{L} (L - l) [(L + l) - \mu_k (L - l)]$$

$$v^2 = \frac{g}{L} [(L - l) (L + l) - \mu_k (L - l) (L - l)]$$

y la Velocidad de la Cuerda en el Momento en que No Queda Ningún Eslabón sobre la Mesa es:

$$v(\mu_k, L) = \sqrt{\frac{g}{L} [(L^2 - l^2) - \mu_k(L - l)^2]} \dots (2.23)$$

NOTA 2.7: Observemos que, la Ec. (2.23) es la misma que la Ec. (1.23) del Modelo A₂: Caso Con Fricción, cuando evaluamos la Velocidad de la Cuerda en el Tiempo Total T_t de Caída. Es decir, encontramos la misma relación entre la Velocidad y la Longitud Total L y parcial l de la Cuerda sin necesidad de hallar toda la resolución exacta del problema como en el Modelo A₂: Caso Con Fricción.

O bien en términos de μ_s, μ_k y L , para ello hacemos uso de la Ec. (2.16b) en la Ec. (2.23)

$$v(\mu_k, L) = \sqrt{\frac{g}{L} \left\{ L^2 \left[1 - \left(\frac{\mu_s}{\mu_s + 1} \right)^2 \right] - \mu_k L^2 \left[1 - \left(\frac{\mu_s}{\mu_s + 1} \right) \right]^2 \right\}}$$

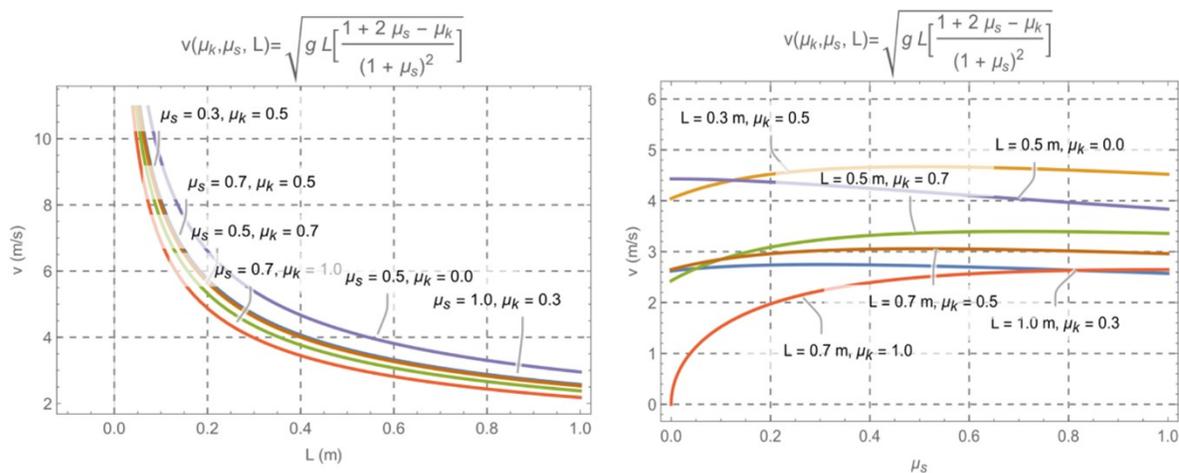


Figura 24: El Panel de la izquierda y de la derecha muestran gráficas de la Rapidez de la Cuerda como función de la Longitud de la Cuerda L , v vs. L y del Coeficiente de Rozamiento Estático v vs. μ_s , respectivamente, Ec. (2.24)., para Modelo B.

$$v(\mu_k, L) = \sqrt{gL \left\{ \left[1 - \left(\frac{\mu_s}{\mu_s + 1} \right)^2 \right] - \mu_k \left[1 - \left(\frac{\mu_s}{\mu_s + 1} \right) \right]^2 \right\}}$$

$$v(\mu_k, L) = \sqrt{gL \left\{ \left[1 - \left(\frac{\mu_s}{\mu_s + 1} \right) \right] \left[1 + \left(\frac{\mu_s}{\mu_s + 1} \right) \right] - \mu_k \left[1 - \left(\frac{\mu_s}{\mu_s + 1} \right) \right] \left[1 - \left(\frac{\mu_s}{\mu_s + 1} \right) \right] \right\}}$$

$$v(\mu_k, L) = \sqrt{gL \left[1 - \left(\frac{\mu_s}{\mu_s + 1} \right) \right] \left\{ \left[1 + \left(\frac{\mu_s}{\mu_s + 1} \right) \right] - \mu_k \left[1 - \left(\frac{\mu_s}{\mu_s + 1} \right) \right] \right\}}$$

$$v(\mu_k, L) = \sqrt{gL \left[\frac{\mu_s + 1 - \mu_s}{\mu_s + 1} \right] \left\{ \left[\frac{\mu_s + 1 + \mu_s}{\mu_s + 1} \right] - \mu_k \left[\frac{\mu_s + 1 - \mu_s}{\mu_s + 1} \right] \right\}}$$

$$v(\mu_k, L) = \sqrt{gL \left[\frac{1}{\mu_s + 1} \right] \left\{ \left[\frac{1 + 2\mu_s}{\mu_s + 1} \right] - \mu_k \left[\frac{1}{\mu_s + 1} \right] \right\}}$$

$$v(\mu_k, L) = \sqrt{\frac{gL}{(\mu_s + 1)^2} \{1 + 2\mu_s - \mu_k\}} = \sqrt{gL \left[\frac{1 + 2\mu_s - \mu_k}{(\mu_s + 1)^2} \right]}$$

$$v(\mu_k, \mu_s, L) = \sqrt{gL \left[\frac{1 + 2\mu_s - \mu_k}{(\mu_s + 1)^2} \right]} \dots (2.24)$$

c) Usando el resultado obtenido en el inciso b), cuál es la velocidad de la cuerda cuando $\mu_{k,s} \rightarrow 0$.

Vemos finalmente que, cuando No Existe Fricción entre la Cuerda y la Mesa $\mu_k = \mu_s \rightarrow 0$, la Velocidad de la Cuerda será partiendo de la Ec. (2.23)

$$v(L) = \sqrt{\frac{g}{L} (L^2 - l^2)} \dots (2.25)$$

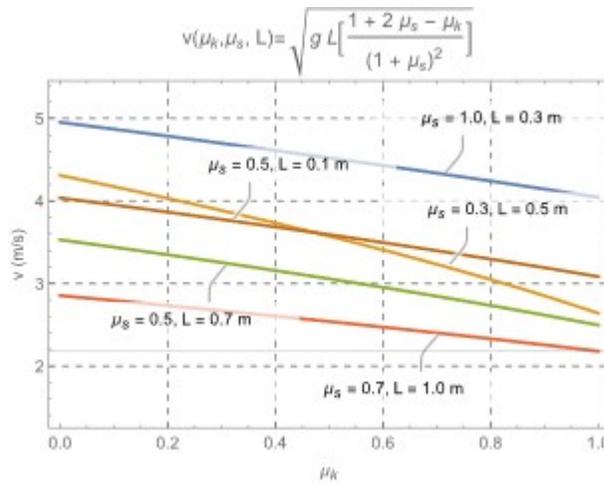


Figura 25: Gráfica de la Rapidez de la Cuerda como función del Coeficiente de Rozamiento Cinético v vs. μ_k , Ec. (2.24), para Modelo B.

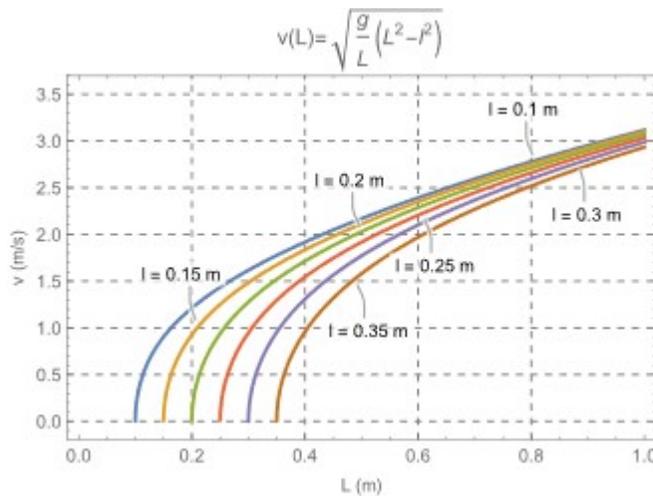


Figura 26: Gráfica de la Rapidez de la Cuerda como función de la Longitud Total de la cuerda y de la Longitud que sobresale de la mesa v vs. L , Ec. (2.25), para Modelo B. Comparar la Fig. 26 del Modelo B con las Fig. 7 del Modelo A₁: Caso Sin Fricción. Son las Mismas.

NOTA 2.8: Observemos que, la Ec. (2.25) es la misma que la Ec. (1.9) del Modelo A₁: Caso Sin Fricción, cuando evaluamos la Velocidad de la Cuerda en el Tiempo Total T de Caída. Es decir, encontramos la misma relación entre la Velocidad y las Longitudes Total L y Parcial l de la Cuerda sin necesidad de hallar toda la resolución exacta del problema como en el Modelo A₁: Caso Sin Fricción.

NOTA 2.9: El resultado (2.25), aparece como resultado del Problema 3.10.18 (Zill y Cullen, 2008).

NOTA 2.10: Ver el APÉNDICE E para ver una Generalización del Modelo B el cual proporciona las Principales Variables Dinámicas del Problema de una Cuerda que Resbala por un Plano Inclinado de Ángulo θ con Fricción.

3. Conclusiones

En el presente trabajo hemos resuelto completamente el Problema de la Cuerda que Resbala sobre una Mesa. Lo anterior lo hemos concretado en Dos Modelos. El primero de ellos (Modelo A), hemos resuelto el problema Sin Fricción y Con Fricción, integrando explícitamente las correspondientes Ecuaciones Diferenciales de Movimiento, hallando las principales cantidades dinámicas del problema (Posición, Velocidad, Aceleración y Tirón para todo tiempo) y la relación que guardan entre ellas. También hemos hallado el Tiempo Total de Deslizamiento de la Cuerda al Caer de la Mesa, comparando nuestros resultados con otros autores (ver los Apéndices A y B), y hemos comprobado en cada caso la Conservación de la Energía y el Teorema Trabajo-Energía respectivamente. Por otro lado, hemos construido un Modelo Muy Simple (Modelo B), que usa básicamente Dos Ingredientes Teóricos. Uno, el resultado del Modelo 2 del trabajo (Cabral-Rosetti y Castillo, 2022), y segundo, la suposición de que la Cuerda Flexible es Homogénea y de Densidad Lineal de Masa Constante $\lambda = M/L$. Con ello hemos sido capaces de reproducir algunos los Principales Resultados del Modelo A (Velocidad y Aceleración, en la caída), sin hacer todos los desarrollos matemáticos que se hicieron allí, ver las Ecs. (2.21a), (2.23) y (2.25), así como el Apéndice C. Es de llamar la atención la obtención los resultados correctos de las Ecs. (2.21a), (2.23) y (2.25), con tan solo aplicar la hipótesis de la Densidad Lineal de Masa Constante al Modelo 2 del trabajo (Cabral-Rosetti y Castillo, 2022). Lo anterior tiene una ventaja didáctica evidente. Este tipo de problemas que se suele proponer como ejercicio a los estudiantes de Ingeniería y Ciencias aparecen típicamente en los cursos de Mecánica Intermedia o Mecánica Avanzada, cuando los estudiantes tienen ya un dominio de las técnicas de Resolución de Ecuaciones Diferenciales (ver el Modelo A y Apéndice D). Sin embargo, nuestra propuesta (Modelo B) permite resolver un “Problema Complicado” en un Curso de Física General “sin hacer uso de matemáticas sofisticadas” obteniendo los Principales Resultados del ejercicio de forma correcta y abriendo el paso a la construcción futura de un modelo más refinado y sofisticado (Modelo A), propio de Cursos Universitarios Avanzados. Creemos que el estudio temprano del Modelo B en los Cursos de Física General (Mecánica), servirá como “entrenamiento a los alumnos” para Cursos de Mecánica Más Avanzados, en donde se plantean problemas cuya sofisticación matemática es manifiesta.

4. Apéndices

4.1. Apéndice A

Una forma alternativa (Behroozi, F. 1997), (De Lande, O. L. y Pierrus, J. 2010) de escribir la “Ecuación de Movimiento Ec. (1.3b) es como sigue:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{z}{\tau^2} = 0 \dots (A.1)$$

en donde hemos definido a “ τ ” como:

$$\tau \equiv \sqrt{\frac{L}{g}} \dots (A.2)$$

el cual es un “Tiempo Característico del Sistema”.

La Ec. (A.1) tiene como solución la Ec. (1.7a), que reescrita en términos de la Ec. (A.2) luce como:

$$z(t) = l \cosh \left(\frac{t}{\tau} \right) \dots (A.3)$$

El “Tiempo Total de Deslizamiento t_D ” durante el cual la cuerda se desplaza sobre la mesa se obtiene poniendo $z(t_D) = L$ en la Ec. (A.3), y esto da como resultado:

$$z(t_D) = L = l \cosh \frac{t_D}{\tau} \Rightarrow \cosh^{-1} \left\{ \cosh \left(\frac{t_D}{\tau} \right) \right\} = \cosh^{-1} \left\{ \frac{L}{l} \right\} \Rightarrow \frac{t_D}{\tau} = \cosh^{-1} \left(\frac{L}{l} \right) \Rightarrow$$

$$t_D = \tau \cosh^{-1} \left(\frac{L}{l} \right) \dots (A.4)$$

El resultado Ec. (A.4), se halla en la Ec. (1) de la Pregunta 11.31 de la referencia (de Lande y Pierrus, 2010). Pero, y ¿Qué relación tiene este tiempo “ t_D ” con el Tiempo de Deslizamiento “ T_t ” que obtuvimos en la Ec. (1.8d)? Para hallar esa relación, la Ec. (1.8d) la podemos reescribir como:

$$T_t = \sqrt{\frac{L}{g}} \ln \left\{ \frac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l} \right\} \Rightarrow T_t = \tau \ln \left\{ \frac{L}{l} + \sqrt{\frac{L^2 - l^2}{l^2}} \right\} \Rightarrow T_t = \tau \ln \left\{ \frac{L}{l} + \sqrt{\frac{L^2}{l^2} - 1} \right\}$$

$$T_t = \tau \ln \left\{ \frac{L}{l} + \sqrt{\left(\frac{L}{l} \right)^2 - 1} \right\} \Rightarrow T_t = \tau \cosh^{-1} \left(\frac{L}{l} \right) \dots (A.5a)$$

en donde hemos usado la Ec. (8.56), pág. 34 del libro (Spiegel y Abellanas, 1998).

$$\boxed{8.56} \quad \cosh^{-1} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad x \geq 1 \quad [\cosh^{-1} x > 0, \text{ es el valor principal}]$$

Finalmente identificamos que el Segundo Miembro de la Ec. (A.5) es justamente el tiempo “ t_D ” dado en la Ec. (A.4), por tanto, concluimos que:

$$\boxed{T_t = t_D} \dots (A.5b)$$

Es decir, nuestros resultados coinciden con los resultados de la referencia (de Lande y Pierrus, 2010). ¿Lo anterior podrá ser aplicado al Modelo A₂: Caso Con Fricción? Procedamos a analizar la Ecuación Diferencial de Movimiento del Caso con Fricción Ec. (1.17a), es decir:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{g}{L} [(1 + \mu_k) - \mu_k L] \Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{g}{L} z + \frac{g}{L} \mu_k z - \mu_k g \Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{g}{L} z - \frac{1}{L} (L - z) \mu_k g$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{z}{\tilde{\tau}^2} - \mu_k g} \dots (A.6)$$

en donde hemos definido a “ $\tilde{\tau}$ ” como:

$$\tilde{\tau} \equiv \sqrt{\frac{L}{g(1 + \mu_k)}} \dots (A.7)$$

el cual es un “Tiempo Característico del Sistema con Fricción”. Notemos que la Ec. (A.6) es posible convertirla en una Ecuación Similar a la Ec. (A.1) haciendo una “Transformación de Coordenadas”, es decir:

$$z' \equiv z - \tilde{\tau}^2 \mu_k g \dots (A.8)$$

Por tanto, usando la Ec. (A.8) en la Ec. (A.6) tendremos:

$$\frac{d^2}{dt^2} (z' + \tilde{\tau}^2 \mu_k g) = \frac{1}{\tilde{\tau}^2} (z' + \tilde{\tau}^2 \mu_k g) - \mu_k g \Rightarrow \frac{d^2 z'}{dt^2} - \frac{z'}{\tilde{\tau}^2} = 0 \dots (A.9)$$

La Ecuación de Movimiento (A.9), tiene exactamente la misma forma que la Ec. (A.1), por tanto, la solución de la Ec. (A.8) es idéntica a la encontrada en la Ec. (A.3), quedándonos:

$$z'(t) = z_0' \cosh \left(\frac{t}{\tilde{\tau}} \right) \dots (A.10)$$

donde z_0' se define como

$$z_0' \equiv z_0 - \tilde{\tau}^2 \mu_k g \dots (A.11)$$

cuyo “Tiempo Total de Deslizamiento Con Fricción de la Cuerda” es el mismo que hallamos en las Ec. (1.21d) o (1.21h), de nuestros cálculos.

4.2. Apéndice B

Para poder comparar nuestro resultado Ec. (1.21h) con el trabajo (Behroozi, F. 1997), empezamos definiendo:

$$x \equiv \kappa + \mu_k (\kappa - 1) \dots (B.1)$$

Por tanto, del Modelo A₂: Caso con Fricción la Ec. (1.21h) la reescribimos como:

$$T_t(\kappa, \mu_k) = \sqrt{\frac{L}{g(1 + \mu_k)}} \ln \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right\} \dots (B.2)$$

Trabajando el Argumento del Logaritmo en la Ec. (B.2) tenemos:

$$\begin{aligned} \ln \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right\} &= \ln \left\{ \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \right\} = \ln \left\{ \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}} \right\} = \ln \left\{ \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}} \right\} \Rightarrow \\ &= \ln \left\{ \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right\} = \ln \left\{ \frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1} \right\} = \ln \left\{ y + \sqrt{y^2 - 1} \right\} \dots (B.3) \end{aligned}$$

donde definimos:

$$y \equiv \frac{1}{x} \dots (B.4)$$

Por tanto, la Ec. (B2) nos quedará como:

$$T_t(\kappa, \mu_k) = \sqrt{\frac{L}{g(1 + \mu_k)}} \ln \left\{ y + \sqrt{y^2 - 1} \right\} \dots (B.5)$$

Recordando la relación entre las “Funciones Hiperbólicas Inversas” y el Logaritmo Natural Ec. (8.56) pág. 34 del libro (Spiegel y Abellanas, 1998).

$$\boxed{8.56} \quad \cosh^{-1}(z) = \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad z \geq 1 \quad [\cosh^{-1}(z) > 0, \text{ es el valor principal}]$$

Usando la Ec. (8.56) en la Ec. (B.5) encontramos que la “Tiempo de Deslizamiento Total de la Cuerda” es:

$$T_t(y, \mu_k) = \sqrt{\frac{L}{g(1 + \mu_k)}} \cosh^{-1}(y) \dots (B.6)$$

El “Tiempo Total T_t de Deslizamiento de la Cuerda” Ec. (B.6), corresponde con la Ec. (12) del trabajo (Behroozi, F. 1997). Claramente, cuando hacemos que Desaparezca la Ficción Seca ($\mu_k \rightarrow 0$), hallamos la Ec. (4) del citado trabajo

4.3. Apénice C

¿Son consistentes los Resultados Principales de los Casos sin Fricción y con Fricción encontrados en el Modelo A, con los hallados en el Modelo B?

A) Caso Sin Fricción:

La Aceleración de la Cuerda dada por la Ec. (2.21a) en el Modelo B cuándo hacemos que la Fricción Desaparezca ($\mu_k \rightarrow 0$), se convierte en:

$$\boxed{a(z) = \frac{g}{L} z} \dots (C.1)$$

La cual corresponde a la “Ecuación de Movimiento de la Cuerda” Ec. (1.3a), del Modelo A₁: Caso Sin Fricción, como debe de ser. Vemos que, efectivamente las Ecs. (1.7a) y (1.7c) del Modelo A₁: Caso Sin Fricción, satisfacen la Ec. (B.1) del Modelo B, es decir:

$$a(z) = \frac{g}{L} z \quad (1.7a), (1.7c) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overbrace{\frac{gl}{L} \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right)}^{\text{Modelo B: } \mu_k \rightarrow 0} \equiv \overbrace{\left[\frac{g}{L} \right] l \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right)}^{\text{Modelo A}_1: \text{Caso Sin Friccion}}}} \dots (C.2)$$

Ver la Ec. (1.7f) para ello.

B) Caso Con Fricción:

Partiendo de la Aceleración de la Cuerda dada por la Ec. (2.21a) en el Modelo B

$$\boxed{a(z) = \frac{g}{L} [z(1 + \mu_k) - \mu_k L]} \dots (C.3)$$

La cual corresponde exactamente a la Ecuación de Movimiento Ec. (1.17a) (ver la relación Ec. (1.20f) entre la Aceleración del Sistema y su Posición) del Modelo A₂: Caso Con Fricción. Vemos

que, efectivamente las Ecs. (1.20a) y (1.20c) del Modelo A₂: Caso Con Fricción, satisfacen la Ec. (B.3) del Modelo B, es decir:

$$\begin{aligned} & \frac{g}{L} (l + \mu_k [l - L]) \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k) t} \right) \quad (1.20a), (1.20c) \\ & \frac{g}{L} \left[\left(\frac{1}{1 + \mu_k} \left\{ \mu_k L + (l + \mu_k [l - L]) \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k) t} \right) \right\} \right) (1 + \mu_k) - \mu_k L \right] \\ & = \frac{g}{L} \left[\left\{ \mu_k L + (l + \mu_k [l - L]) \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k) t} \right) \right\} - \mu_k L \right] \\ & = g\mu_k + \frac{g(l + \mu_k [l - L])}{L} \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k) t} \right) - g\mu_k \\ & = \frac{g(l + \mu_k [l - L])}{L} \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k) t} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\overbrace{\frac{g}{L} (l + \mu_k [l - L]) \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k) t} \right)}^{\text{Modelo B}} \equiv \overbrace{\frac{g}{L} (l + \mu_k [l - L]) \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k) t} \right)}^{\text{Modelo A}_2: \text{Caso con Friccion}} \dots (C.4)}$$

Por tanto, la “Aceleración del Sistema” Ec. (2.21a) hallada en el Modelo B, es la Aceleración Correcta del Sistema y, por tanto, un Buen Modelo Mecánico, pues prueba de ello es que la solución obtenida aquí mediante la solución analítica explícita de las correspondientes “Ecuaciones Diferenciales” son Totalmente Compatibles y Equivalentes una de la otra, Ver la Ec. (1.20f).

4.4. Apéndice D

A manera de complemento a lo discutido en el texto, utilizaremos la Dinámica Lagrangiana para hallar de forma independiente la Ecuación de Movimiento de la Cuerda que Resbala por una Mesa con Fricción Seca. Utilizaremos algunos resultados obtenidos antes en el Modelo A₂ para construir la Función Lagrangiana del Sistema, así como la correspondiente “Función de Disipación Generalizada de Rayleigh-Hirvonen” para la Fuerza de Rozamiento entre la Mesa y Parte de la Cuerda “*l*” que está en contacto con ella.

Recordemos que la Cuerda Parte del Reposo con Velocidad Inicial nula $v_0 = v(t = 0) = 0$, que la Cuerda es Uniforme, es decir, que tiene una Densidad Lineal de Masa λ constante, que tiene una Longitud Total “*L*” y que cuelga un trozo de longitud “*l*” ($0 \leq l \leq L$) sobre el borde de una mesa plana. Entre la Mesa y la parte de la Cuerda que está en contacto y sobre ella, existe Fricción Coulombica (Sólido-Sólido) con un Coeficiente de Fricción Cinética μ_k . Utilizando las Ecs. (1.11) y (1.12a) y adaptando la notación correspondiente tenemos que la Energía Cinética y Potencial de la Cuerda se escriben como:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \lambda L \dot{z}^2(t)} \dots (D.1) \quad ; \quad \boxed{V = -\frac{1}{2} \lambda g z^2(t)} \dots (D.2)$$

La “Lagrangiana del Sistema” es:

$$L = T - V \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} \lambda L \dot{z}^2(t) + \frac{1}{2} \lambda g z^2(t)} \dots (D.3)$$

En vista de que existe Fricción Seca entre la Mesa y una parte de la Cuerda, tenemos que construir la “Función de Disipación de Rayleigh-Hirvonen para Fuerzas Disipativas No Viscosas”.

Lo anterior lo podremos hacer gracias a la “Función de Disipación Generalizada de Rayleigh-Hirvonen” propuesta por Ville Hirvonen (Hirvonen, 2023). Dicha función se escribe como:

$$F_{RH} = \frac{1}{n+1} \sum_j (f_r)_j v_j^{n+1} \dots (D.4)$$

La Norma de la Fuerza de Rozamiento Coulombica (Fricción Seca) se suele escribir como el producto de un Coeficiente de Rozamiento Cinético, por la Fuerza de Reacción Normal de la superficie sobre el cuerpo en estudio, la cual en nuestro caso es el Peso de la Cuerda, es decir:

$$|f_r| = \mu_k N \dots (D.5a) \quad ; \quad N = \tilde{m}g = \overbrace{(M - m)}^{\substack{\text{MasadelTrozo} \\ \text{de Cuerdaen} \\ \text{Contacto con la Mesa}}} \quad g = \overbrace{[\lambda(L - z(t))]}^{\tilde{m}} g \dots (D.5b)$$

Poniendo la Ec. (D.5b) en la Ec. (D.5a) tendremos que la Fuerza de Rozamiento Coulombica entre la Mesa y el Trozo de Cuerda que está sobre ella es:

$$|f_r| = \mu_k g \lambda [L - z(t)] \dots (D.5c)$$

La Norma de la Fuerza de Rozamiento Seca Ec. (D.5c), corresponde a lo encontrado en la Ec. (1.16a) del Modelo A₂: Caso Con Fricción. Procedemos a hallar la “Función de Disipación Generalizada de Rayleigh-Hirvonen”, para ello hacemos n=0 en la Ec. (D.4), pues la Fuerza de Rozamiento No es Viscosa, sino Seca, quedándonos

$$F_{RH} = \frac{1}{0+1} |f_r| v^{0+1} = |f_r| v = |f_r| \dot{z}(t) \xRightarrow{(D.5c)} \boxed{F_{RH} = \mu_k g \lambda [L - z(t)] \dot{z}(t)} \dots (D.6)$$

Por otro lado, las Ecuaciones de Euler-Lagrange en nuestro caso son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial z(t)} = -\frac{\partial F_{RH}}{\partial \dot{z}(t)} \dots (D.7)$$

Realizando las correspondientes Derivas Parciales al Lagrangiano Ec. (D.3) y a la Función de Disipación Generalizada de Rayleigh-Hirvonen Ec. (D.6) tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}(t)} &= \lambda L \dot{z}(t) \dots (D.8a) \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}(t)} \right) = \lambda L \ddot{z}(t) \dots (D.8b) \\ \frac{\partial L}{\partial z(t)} &= \lambda g z(t) \dots (D.8c) \quad ; \quad \frac{\partial F_{RH}}{\partial \dot{z}(t)} = \mu_k g \lambda [L - z(t)] \dots (D.8d) \end{aligned}$$

Poniendo los resultados Ec. (D.8) en las Ecuaciones de Euler-Lagrange Ec. (D.7) llegamos a:

$$\begin{aligned} \lambda L \ddot{z}(t) - \lambda g z(t) &= -\mu_k g \lambda [L - z(t)] \Rightarrow L \ddot{z}(t) = g z(t) - \mu_k g L + \mu_k g z(t) \Rightarrow \\ L \ddot{z}(t) &= g (1 + \mu_k) z(t) - \mu_k g L \Rightarrow L \ddot{z}(t) = g [(1 + \mu_k) z(t) - \mu_k L] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{g}{L} [(1 + \mu_k) z(t) - \mu_k L] \dots (D.9a)$$

$$\ddot{z} = \frac{g}{L} (1 + \mu_k) z - g\mu_k \Rightarrow \ddot{z} = A^2 z - B^2 \dots (D.9b)$$

La Ec. (D.9a) es la Ecuación de Movimiento de la Cuerda sobre una Mesa con Fricción Coulombica Seca obtenida con la Dinámica Lagrangiana, la cual corresponde exactamente a lo encontrado en la Ec. (1.17a) o la Ec. (1.20f) del Modelo A₂: Caso Con Fricción, y a la Ec. (2.21a) del Modelo B, mediante un Análisis Dinámico de las Leyes de Newton. Es claro que si hacemos el límite $\mu_k \rightarrow 0$ en las ecuaciones antes citadas, hallamos la Ecuación de Movimiento del Sistema sin Fricción, es decir, la Ec. (1.3a) del Modelo A₁: Caso Sin Fricción.

La solución de la Ecuación de Movimiento de la Cuerda sobre una Mesa con Fricción Seca la hallamos explícitamente en el Modelo A₂: Caso Con Fricción, y aquí por completes, la hallaremos utilizando la Transformada de Laplace (Hirvonen, 2023), (Spiegel, 1980), (Bronson R. y Costa G. 2008, p. 211):

$$\ddot{z} = \frac{g}{L} (1 + \mu_k) z - g\mu_k \Rightarrow \ddot{z} = A^2 z - B^2 \dots (D.9b)$$

donde hemos definido las constantes “A” y “B” como:

$$A \equiv \sqrt{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} \dots (D.10a) \quad ; \quad B \equiv \sqrt{g\mu_k} \dots (D.10b)$$

Aplicando la “Transformada de Laplace” a ambos lados de la Ec. (D.9b) y usando la Linealidad de la Transformada de Laplace, tendremos que:

$$L\{\ddot{z}\} = L\{A^2 z\} - L\{B^2\} \Rightarrow L\{\ddot{z}\} = A^2 L\{z\} - B^2 L\{1\} \dots (D.11)$$

usando el resultado (24.5) del Teorema 26.1, pág. 242 del libro de la Serie Schaum .

$$\boxed{24.5} \quad L\{y''(x)\} = s^2 Y(s) - c_0 s - c_1$$

donde “ c_0 y c_1 ” son las Condiciones Iniciales del Problema. De tal manera que usando el resultado (24.5) y la Tabla de Transformadas de Laplace dada en las págs. 137, y el Apéndice C págs. 301-305 tenemos que nuestra Ec. (D.11) se transforma en:

$$[s^2 Y(s) - c_0 s - c_1] = A^2 [Y(s)] - B^2 \left[\frac{1}{s} \right] \dots (D.12)$$

donde las Condiciones Iniciales para la Cuerda que se Desliza por la Mesa con Fricción son “ $c_0 = l$ y $c_1 = v_0 = 0$ ”. Por tanto, de la Ec. (D.12) tendremos que:

$$[s^2 Y(s) - sl] = A^2 [Y(s)] - B^2 \left[\frac{1}{s} \right] \Rightarrow s^2 Y(s) - A^2 Y(s) = sl - \frac{B^2}{s} \Rightarrow$$

$$Y(s) \{s^2 - A^2\} = sl - \frac{B^2}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{sl}{s^2 - A^2} - \frac{B^2}{s \{s^2 - A^2\}} \dots (D.13)$$

Aplicando la “Transformada Inversa de Laplace” a ambos lados de Ec. (D.13) tendremos:

$$\overbrace{L^{-1}\{Y(s)\}}^{z(t)} = lL^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - A^2}\right\} - B^2 L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 - A^2)}\right\} = lC - B^2 D \dots (D.14a)$$

donde hemos definido las cantidades “C” y “D” como:

$$\boxed{C \equiv L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - a^2} \right\}} \dots (D.15a) \quad ; \quad \boxed{D \equiv L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 - a^2)} \right\}} \dots (D.15b)$$

A continuación, calcularemos la “Transformada Inversa de Laplace” de la Ecs. (D.15a), consultando el Apéndice “A” de (Bronson R. y Costa G. 2008, p. 224),

$$C = L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - a^2} \right\} \Rightarrow \boxed{C = \cosh (A t)} \dots (D.15.c)$$

Para hallar la “Transformada Inversa de Laplace” de la Ecs. (D.15c), que involucra un Producto de Funciones que depende de “s” usaremos el “Teorema de Convulación”, ver el Capítulo 23 de (Bronson R. y Costa G. 2008, p. 233),

$$D = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 - a^2)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{1}{(s^2 - a^2)} \right\} = L^{-1} \{F(s)G(s)\}$$

donde hemos definido:

$$F(s) \equiv \frac{1}{s} \dots (D.16a) \quad ; \quad G(s) \equiv \frac{1}{(s^2 - a^2)} \dots (D.16b)$$

Usando el Apéndice “A” de (Bronson R. y Costa G. 2008, p. 330),

$$D = L^{-1} \{F(s)G(s)\} = \int_0^t \overbrace{f(t-\tau)}^1 \overbrace{g(\tau)}^{\sinh(A\tau)/A} d\tau = \int_0^t (1) \frac{\sinh(A\tau)}{A} d\tau = \frac{1}{A} \int_0^t \sinh(A\tau) d\tau$$

Usando la Ec. [1.482] pág. 243 de las Tablas de Integrales (Spiegel, M. R. y Abellanas, L 1998)

$$\boxed{1.482} \quad \int \sinh(ax) dx = \frac{1}{a} \cosh(ax)$$

quedándonos la integral de “D” como:

$$D = \frac{1}{A} \int_0^t \sinh(A\tau) d\tau \xrightarrow{\boxed{1.482}} \frac{1}{A} \frac{1}{A} \cosh(A\tau) \Big|_0^t \Rightarrow \boxed{D = \frac{1}{A^2} [\cosh(A t) - 1]} \dots (D.15d)$$

Con los resultados Ecs. (D.15c) y (D.15d), regresamos a la Ec. (D.14a) y tendremos que:

$$z(t) = l \{ \cosh (A t) \} - B^2 \left\{ \frac{1}{A^2} [\cosh (A t) - 1] \right\}$$

Poniendo los valores de “A” y “B” dados por las Ecs. (D.10a) y (D.10b) en la ecuación de la Posición de la Cuerda anterior finalmente tendremos:

$$z(t) = l \{ \cosh (A t) \} - B^2 \left\{ \frac{1}{A^2} [\cosh (A t) - 1] \right\}$$

$$z(t) = l \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) t \right) - g\mu_k \left\{ \frac{1}{\frac{g}{L} (1 + \mu_k)} \left[\cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) t \right) - 1 \right] \right\} \Rightarrow$$

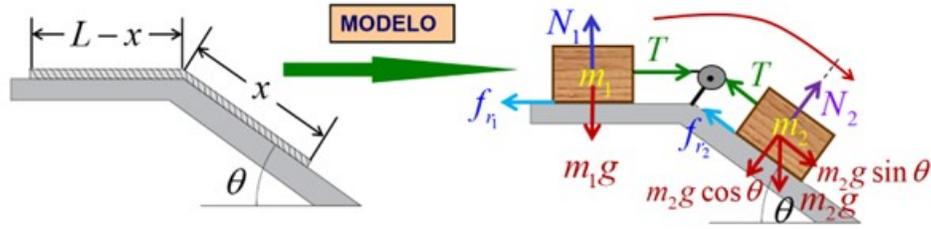


Figura 27: Principales Variables Dinámicas del Modelo C.

$$\begin{aligned}
 z(t) &= l \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) t \right) - \frac{g\mu_k}{L(1 + \mu_k)} \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) t \right) + \frac{g\mu_k}{L(1 + \mu_k)} \quad (1) \Rightarrow \\
 z(t) &= l \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) t \right) - \frac{\mu_k L}{(1 + \mu_k)} \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) t \right) + \frac{\mu_k L}{(1 + \mu_k)} \Rightarrow \\
 z(t) &= \left[l - \frac{\mu_k L}{(1 + \mu_k)} \right] \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) t \right) + \frac{\mu_k L}{(1 + \mu_k)} \Rightarrow \\
 z(t) &= \left[\frac{l(1 + \mu_k) - \mu_k L}{(1 + \mu_k)} \right] \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) t \right) + \frac{\mu_k L}{(1 + \mu_k)} \Rightarrow \\
 z(t) &= \left[\frac{l + \mu_k(l - L)}{(1 + \mu_k)} \right] \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) t \right) + \frac{\mu_k L}{(1 + \mu_k)} \Rightarrow \\
 \boxed{z(t) = \frac{1}{(1 + \mu_k)} \left\{ \mu_k L + [l + \mu_k(l - L)] \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{L}} (1 + \mu_k) t \right) \right\}} \dots (D.16)
 \end{aligned}$$

La Ec. (D.16) corresponde exactamente a la Ec. (1.20a) del Modelo A₂: Caso Con Fricción, tal y como debe de ser. Para calcular la Velocidad, la Aceleración y el Tirón de la Cuerda sobre la Mesa con Fricción, se procede como antes, ver las Ecs. (1.20b), (1.20c) y (1.20d).

4.5. Apéndice E

En vista del éxito del Modelo B para reproducir los Principales Resultados del Modelo A₂: Caso Con Fricción (y del Modelo A₁: Caso Sin Fricción, cuando $\mu_k \rightarrow 0$) podemos generalizarlo, para hallar las Principales Variables Dinámicas del Problema de una Cuerda que Resbala por un Plano Inclinado de Ángulo θ con Fricción, es decir, el Nuevo Modelo lo llamaremos Modelo C el cual tendría un esquema como el de la Figura 27 en donde en un Proceso Análogo al realizado para la construcción del Modelo B, hallamos, que las Principales Variables Dinámicas del Modelo C son:

$$\boxed{x = \frac{\mu_s L}{\sin \theta + \mu_s (1 - \cos \theta)}} \dots (E.1)$$

$$\boxed{a(x) = \frac{g}{L} \{x [\sin \theta + \mu_k (1 - \cos \theta)] - \mu_k L\}} \dots (E.2)$$

$$\boxed{v(x) = \sqrt{\frac{g}{L} \{[\sin \theta + \mu_k (1 - \cos \theta)] [L^2 - x^2] - 2\mu_k l [L - x]\}}} \dots (E.3)$$

que cuando $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, la Ec. (E.1) se transforma en la Ec. (2.16b), la Ec. (E.2) se transforma en la Ec. (2.21a), y la Ec. (E.3) se transforma en la Ec. (2.23), dándole consistencia y generalidad a este nuevo Modelo C.

Agradecimientos

Los autores del presente trabajo, agradecemos a la Dirección de Posgrado, Investigación e Innovación del TecNM el apoyo brindado al Proyecto de Investigación, Modelización en Mecánica: Una estrategia para el Aprendizaje de la Dinámica, Clave: 11001.21-P, en su convocatoria de 2021.

Referencias

-  Behroozi, F. (1997).
The sliding chain problem with and without friction: a universal solution.
Eur. J. Phys. 18, 15-17.
-  Bronson R. y Costa G (2008).
Ecuaciones Diferenciales.
Serie Schaum. Mc Graw-Hill México.
-  Cabral-Rosetti, L.G. y Rosas, A. (2022).
Estrategia de Modelación Progresiva: Del Bachillerato a la Licenciatura.
Modelling in Science Education and Learning, 15 (2).
<https://doi.org/10.4995/mse1.2022.17983>
-  Clement, J. J. (2000).
Model based learning as a key research area for science education.
International Journal of Science Education, 22(9), 1041-1053.
<https://doi.org/10.1080/095006900416901>
-  De Lande, O. L. y Pierrus, J. (2010).
Solved Problems in Classical Mechanics, Analytical and Numerical Solutions with Comments.
Ed. Oxford University Press.
-  Franco A. (2015).
Curso Interactivo de Física en Internet, Una Cuerda que Desliza sobre una Mesa.
<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/index.html>
-  Gatti, E. (2008).
La Formación docente como eje ideológico de las políticas educativas: formación permanente v/s capacitación continua.
Docencia, 36, 69-76.
<https://bit.ly/3AghY6U>
-  Greiner, W. (1989).
Classical Theoretical Physics, Classical Mechanics, Point Particles and Relativity.
Ed. Springer-Verlag.
-  Honoré, B. (1982).
Por una teoría de la formación. Dinámica de la formatividad.
México: Narcea.
-  Profound Physics (2023).
Rope Sliding Down a Table With Friction (Step-By-Step Solution)
<https://profoundphysics.com/rope-sliding-down-a-table-with-friction-step-by-step-solution/>

-  [Justi, R. \(2006\).](#)
La enseñanza de las ciencias basada en la elaboración de modelos.
Revista Enseñanza de las Ciencias, 24 (2), 173-184.
<https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/22332/02124521v24n2p173.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
-  [Justi, R. y Gilbert, J.K. \(2002\).](#)
Science teachers' knowledge about and attitudes towards the use of models and modelling in learning science.
International Journal of Science Education, 24(12), 1273-1292.
<https://doi.org/10.1080/09500690210163198>
-  [Oliva, J. \(2019\).](#)
Distintas acepciones para la idea de modelización en la enseñanza de las ciencias.
Revista Enseñanza de las Ciencias, 37 (2). 5-24.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2648>
-  [Prato D. y Gleiser R. \(1982\).](#)
Another look at the uniform rope sliding over the edge of a smooth table.
Am. J. Phys. 50 (6) 536-539.
<https://doi.org/10.1119/1.12817>
-  [Schwarz, C. V., Reiser, B. J., Davis, E. A., Kenyon, L., Achér, A., Fortus, D., Shwartz, Y., Hug, B. y Krajcik, J. \(2009\).](#)
Developing a learning progression for scientific modeling: Making scientific modeling accessible and meaningful for learners.
Journal of Research in Science Teaching, 46(6), 632-654.
<https://doi.org/10.1002/tea.20311>
-  [Spiegel, M. R. \(1980\).](#)
Mecánica Teórica con una Introducción a las Ecuaciones de Lagrange y a la Teoría de Hamilton.
Serie Schaum. Ed. Mc Graw-Hill México.
-  [Spiegel, M. R. y Abellanas, L \(1998\).](#)
Formulas y Tablas de Matemática Aplicada.
Ed. Mc Graw-Hill España.
-  [Windschitl, M., Thompson, J. y Braaten, M. \(2008\).](#)
Beyond the scientific method: Model-based inquiry as a new paradigm of preference for school science investigations.
Science Education 92(5). 941-967.
<https://doi.org/10.1002/sce.20259>
-  [Zill D. G. y Cullen M. R. \(2008\).](#)
Matemáticas Avanzadas para Ingeniería.
Ed. Mc Graw-Hill Interamericana.