

# *El Niño Esquimal que Resbala de su Iglú* *The Eskimo Boy Who Slips from His Igloo*

**Luis G. Cabral-Rosetti, Adriana Castillo Rosas**  
TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO (TECNM).  
[lcabral@ciidet.edu.mx](mailto:lcabral@ciidet.edu.mx), [acastillo@ciidet.edu.mx](mailto:acastillo@ciidet.edu.mx)

---

## Abstract

*En la enseñanza de la Mecánica, es siempre recomendable poder discutir en clase Problemas Integradores y Holísticos. En ese sentido proponemos analizar el clásico problema del Niño Esquimal que resbala por su Iglú desde diferentes puntos de vista, y que sirva como Experiencia de Aprendizaje Mediado (EAM) usando para ello la Estrategia de Modelización Progresiva (EMP). Dicho problema, aparece en la mayoría de los textos de Física General Universitarios y es abordado únicamente con argumentos de Conservación de Energía. En este trabajo lo planteamos y resolvemos usando la “Dinámica Traslacional con y sin Fricción”, “Conservación de Energía”, “Teorema Trabajo-Energía con y sin Fricción”, “Dinámica Rotacional con y sin Fricción” y usando la “Dinámica Lagrangiana con y sin Fricción”, con la intención de mostrar como con un mismo problema se puede resolver de muy diferentes maneras, ayudando al estudiante a integrar sus conocimientos de Mecánica de una forma general.*

*In the teaching of Mechanics, it is always advisable to be able to discuss Integrative and Holistic Problems in class. In this sense, we propose to analyze the classic problem of the Eskimo Child sliding down their Igloo from different perspectives, serving as a Mediated Learning Experience (MLE) and using the Progressive Modeling Strategy (PMS). This problem appears in most University General Physics texts and is addressed solely with arguments of Energy Conservation. In this work, we pose and solve it using “Translational Dynamics with and without Friction”, “Energy Conservation”, “Work-Energy Theorem with and without Friction”, “Rotational Dynamics with and without Friction”, and using “Lagrangian Dynamics with and without Friction”, with the intention of showing how the same problem can be solved in very different ways, helping the student to integrate their knowledge of Mechanics in a general way.*

---

Palabras clave: modelo matemático, enseñanza de la mecánica, ciencias físicas, formación profesional, ingeniería.  
Keywords: mathematical model, teaching of mechanics, physical sciences, vocational training, engineering.

## 1. Introducción

La Teoría de la Experiencia de Aprendizaje Mediado (EAM) de Reuven Feuerstein es la teoría general que se empleará para el sustento psico-pedagógico del presente trabajo que se centra en la mediatización como parte de la práctica pedagógica docente, es decir el Aprendizaje Mediatizado. Esta teoría se deriva de una anterior propuesta de R. Feuerstein que denominó Teoría de la Modificabilidad Estructural Cognitiva (TMEC). La EAM se encuentra relacionada con el desarrollo cognitivo en los sujetos a partir de un aprendizaje mediado (Complemento del Aprendizaje Directo), el cual se refiere a la participación de un ser humano que propicie en otro la creación de los prerrequisitos cognitivos para promover un aprendizaje directo y efectivo. De acuerdo con R. Feuerstein se requieren tres criterios para provocar un aprendizaje mediado: la intencionalidad, la trascendencia y el significado, experimentados en un contexto social que contribuya a ello. Es importante señalar que la EAM no propone una nueva estrategia de enseñanza-aprendizaje, sino la visibilización de la necesidad de trabajar estructuralmente desde la práctica pedagógica, considerando al docente como mediatizador cuando es “responsable, afectivo, conocedor y competente para ser intermediario entre el mediatizado y la experiencia de aprendizaje mediatizado” (Orrú. S., 2003, p. 37) Los principales conceptos que sostienen el trabajo teórico de R. Feuerstein son Modificabilidad, la cual hace énfasis en la posibilidad que tiene todo individuo mediatizado en alterar de manera permanente su actuación cuando las circunstancias se impliquen un actuar flexible y adaptado para la resolución de problemas. Cognitiva a la que R. Feuerstein hace referencia para los procesos cognitivos a través de los cuales los individuos perciben la información y que, posteriormente, se interiorizarán como parte de sus funciones cognitivas que determinarán la forma y su capacidad para emplear el aprendizaje adquirido en nuevas situaciones o circunstancias de mayor complejidad. Estructural, que se relaciona con la interconexión de elementos cognitivos dentro de la estructura mental, y que son fundamentales para ordenar la información de entrada (input) y generar una elaboración (output), actividad que R. Feuerstein relaciona con las operaciones mentales de la inteligencia que son necesarias para el aprendizaje. (Orrú. S., 2003, p. 39)

A partir de ese marco, la Experiencia de Aprendizaje Mediatizada (EAM) se presenta como la forma en que el individuo (estudiante) transforma todos los estímulos que recibe, con ayuda de un mediatizador (docente) quien los ordena, organiza y modifica para conformar un entorno educativo enriquecido y de mayor calidad para el desarrollo intelectual. El acto de mediatizar debe estar intencionalmente ligado al propósito de enriquecer los factores relacionados a lo cognitivo, para que estos giren hacia los significados existentes en el mundo en que se vive, con el fin de desarrollar en el individuo condiciones necesarias para adaptarse y modificarse, contrastándose con las determinaciones culturales por las cuales transita en su vida cotidiana. (Orrú. S., 2003, p. 40)

Los criterios básicos de la EAM que propone R. Feuerstein se considerarán como indicadores para el análisis de la práctica pedagógica de los docentes que imparten, por ejemplo, la asignatura de Dinámica (Mecánica Clásica): intencionalidad y reciprocidad, coparticipación, significado; individualización; trascendencia; planificación de objetivos; competencia; retos; autorregulación y control de comportamientos y auto modificación.

Para poder lograr el objetivo de una “Reestructuración Cognitiva” en estudiantes y maestros, construimos 8 Modelos Mecánicos (El niño que Resbala de su Iglú) mediante un proceso inductivo o deductivo (según sea el caso), en donde una propuesta simple (modelo de juguete) sea el inicio de la construcción y comprensión del fenómeno mecánico estudiado.

Por ejemplo, en nuestro trabajo de investigación publicado recientemente, Estrategia de Modelación Progresiva: Del Bachillerato a la Licenciatura, (Cabral-Rosetti, L.G. y Castillo, A., 2022a), se construyó el modelo clásico de Dos Bloques atados con un hilo que resbalan

sobre una mesa y que pasa por una Polea, desde el más simple (bachillerato) hasta el más complicado que considera fricción y masa en el hilo (universitario). Otro antecedente de la línea metodológica propuesta se puede encontrar en el trabajo La Modelización como una Estrategia de Enseñanza: Ejemplo de la Caída de un Paracaidista en un Medio Resistivo (Cabral-Rosetti, L.G. y Castillo, A., 2022b), en donde se analizó de manera simultánea la caída de un paracaidista en diferentes medios viscosos (aire).

Cabe destacar que la Estrategia de Modelación Progresiva (EMP) se ha venido probado con grupos de profesores (curso de capacitación) y alumnos de pregrado y postgrado obteniendo resultados prometedores. La idea central es continuar con este tipo de trabajo estudiando diferentes fenómenos mecánicos, para el beneficio de profesores y alumnos (Cabral-Rosetti, L.G. y Castillo, A., 2022c).

## 2. Construcción de los Modelos

A continuación, elaboramos 8 modelos que van desde la propuesta más común (Conservación de la Energía) del Problema del Niño Esquimal que Resbala de su Iglú, hasta el modelo resuelto por medio de la Mecánica Lagrangiana con Fricción Coulombica utilizando Multiplicadores Indeterminados de Lagrange.

### 2.1. Modelo 1: Usando Dinámica Newtoniana

Un Niño Esquimal de masa “ $m$ ” está sentado en la parte más alta de su Iglú (Montículo Semiesférico de Hielo de Radio “ $R$ ”) como se muestra en la Fig. 1. Recibe un pequeñísimo empujón y comienza a resbalar hacia abajo sobre el Iglú. Ignorando la Fricción entre el niño y el Iglú, y considerando al niño como un Punto Material masivo (partícula), a) ¿En qué punto se separa el niño del iglú?, b) ¿Cuál es la rapidez del niño en dicho punto?, c) La distancia a la que cae el muchacho, medida desde la base del iglú, d) La velocidad del niño justo al tocar el piso. Para Resolver el Problema, Explote la Simetría del Problema y Use Explícitamente la Segunda Ley de Newton, e) Encuentre los incisos a) y b) mediante el uso de las “Coordenadas Intrínsecas” y compare sus resultados (Resnick, 1987: 170).

#### a) ¿ En qué punto se separa el niño del Iglú?

Para resolver el problema consideraremos al Niño Esquimal como una partícula puntual de masa “ $m$ ”, ver la Fig. 1. El niño se desliza sobre su Iglú, el cual consideremos que es lizo (es decir, No Hay Fricción) y Perfectamente Semiesférico de Radio “ $R$ ” constante. El análisis se llevará a cabo inicialmente en el Plano Cartesiano  $xy$ , tal y como lo muestra la Fig. 2.

Las Fuerzas que actúan sobre el niño (ver Fig. 2) son:

a) El Peso:  $\vec{P} = mg(-\hat{j})$ .

b) La Fuerza de Reacción Normal del Iglú:  $\vec{N} = N \cos(\theta)\hat{i} + N \sin(\theta)\hat{j}$

Explotaremos la “Simetría Semiesférica del Problema”, mediremos la posición del niño esquimal sobre el Iglú (montículo de hielo semiesférico) mediante el ángulo “ $\theta$ ” (ver Fig. 2), y usaremos los Vectores Unitario (Versores) propios de las Coordenadas Polares ( $\hat{u}_r$  y  $\hat{u}_\theta$ ). Descomponiendo el Peso del muchacho en sus componentes Radial y Angular y usando la Propiedad Vectorial de que cualquier vector  $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$  siempre se puede escribir como:

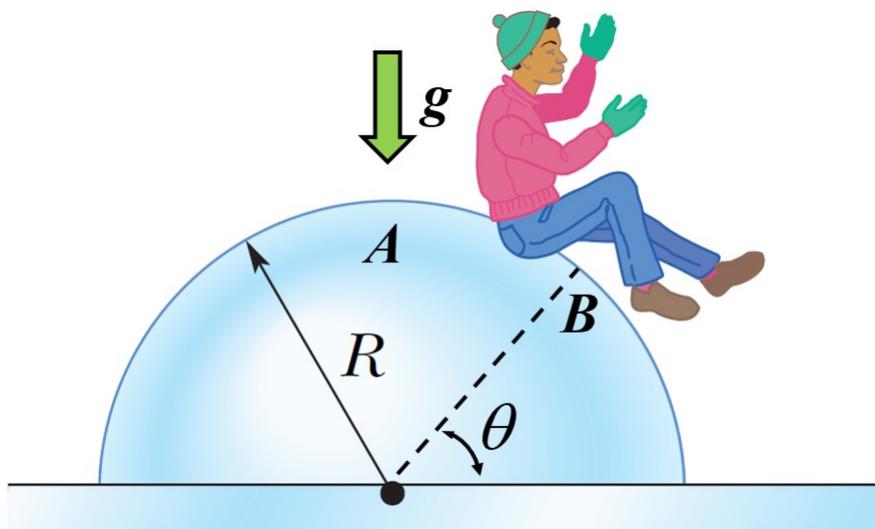


Figura 1: Representación esquemática del Modelo 1. Un Niño Esquimal considerándolo como una Partícula Material Puntual de masa “ $m$ ”, resbala sobre su Iglú (Montículo de Hielo Semiesférico de Radio “ $R$ ”) inicialmente se encuentra en reposo en el Punto A, resbala por el montículo hasta llegar al Punto B, en donde se desprende del Iglú.

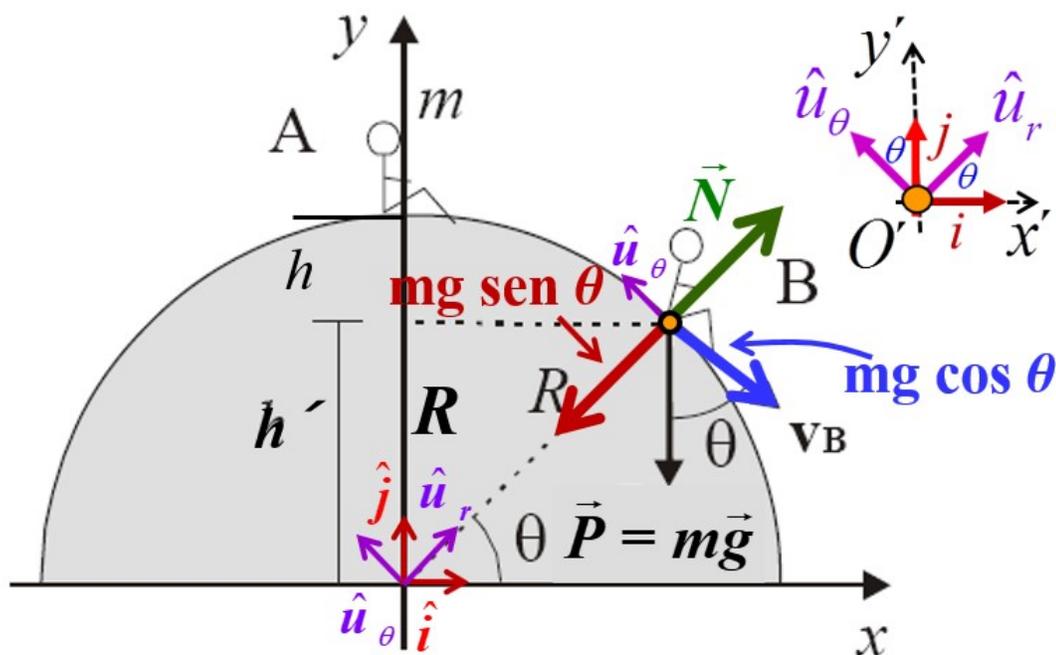


Figura 2: Diagrama del Niño Esquimal montando en la parte alta de su Iglú (Punto A) del Modelo 1, donde se muestra el Peso del Niño y sus Componentes Cartesianas, la Reacción Normal del Iglú sobre el niño, los Vectores Unitarios Cartesianos y Polares. El chico resbala del Punto A, y se desprende del Iglú en el Punto B.

$$\vec{A} = (\vec{A} \cdot \hat{i}) \hat{i} + (\vec{A} \cdot \hat{j}) \hat{j} + (\vec{A} \cdot \hat{k}) \hat{k} \dots (1.1).$$

La demostración de la Ec. (1.1) la podemos encontrar en el Apéndice A.

La relación (1.1) es evidente en “Coordenadas Cartesianas”, pero será de gran utilidad cuando la implementemos para el caso específico de Coordenadas Polares. Quedándonos con ello que el Peso del Niño Esquimal (ver la Fig. 2) es:

$$\vec{P} = (\vec{P} \cdot \hat{u}_r) \hat{u}_r + (\vec{P} \cdot \hat{u}_\theta) \hat{u}_\theta \Rightarrow \vec{P} = (-mg \hat{j} \cdot \hat{u}_r) \hat{u}_r + (-mg \hat{j} \cdot \hat{u}_\theta) \hat{u}_\theta \dots (1.2a)$$

**NOTA 1.1:** Vemos inmediatamente que la expresión dada en la Ec. (1.2a) es una mezcla de Versores Polares y Versores Cartesianos. Para poder usar la Simetría del Problema, debemos poner todo en Coordenadas Polares. Para ellos debemos de encontrar la relación que existe entre dichos Vectores Unitarios Polares y Cartesianos, ver el Apéndice B.

Usando el resultado Ec. (B.11) del Apéndice B, volvemos a la Ec. (1.2a) obteniendo:

$$\vec{P} = (-mg [\sin \theta \hat{u}_r + \cos \theta \hat{u}_\theta] \cdot \hat{u}_r) \hat{u}_r + (-mg [\sin \theta \hat{u}_r + \cos \theta \hat{u}_\theta] \cdot \hat{u}_\theta) \hat{u}_\theta \dots (1.2b)$$

Para simplificar la Ec. (1.2b) recordemos que los “Vectores Unitarios Ortonormales” cumplen con:

$$\begin{aligned} \hat{u}_r \cdot \hat{u}_r &= |\hat{u}_r| |\hat{u}_r| \cos 0^\circ = 1 \dots (1.3a) \quad ; \\ \hat{u}_\theta \cdot \hat{u}_\theta &= |\hat{u}_\theta| |\hat{u}_\theta| \cos 0^\circ = 1 \dots (1.3b) \quad ; \\ \hat{u}_r \cdot \hat{u}_\theta &= \hat{u}_\theta \cdot \hat{u}_r = |\hat{u}_r| |\hat{u}_\theta| \cos 90^\circ = 0 \dots (1.3c) \end{aligned}$$

Entonces usando las relaciones (1.3) en la Ec. (1.2b) nos queda que el Peso del Niño Esquimal (ver la Fig. 2), expresado en Coordenadas Polares quedará como:

$$\vec{P} = mg \sin \theta (-\hat{u}_r) + mg \cos \theta (-\hat{u}_\theta) \dots (1.4)$$

Por otro lado, es claro que la “Reacción Normal del Iglú sobre el Niño” en “Coordenadas Cartesianas” (ver la Fig. 2), se escribe como:

$$\vec{N} = N \cos \theta \hat{i} + N \sin \theta \hat{j} \dots (1.5a)$$

Pero usando la Ec. (B.5) del Apéndice B, vemos que la Ec. (1.5a) se puede escribir como:

$$\vec{N} = N \overbrace{(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})}^{\hat{u}_r} \Rightarrow \vec{N} = N \hat{u}_r \dots (1.5b)$$

que es la **Reacción Normal del Iglú sobre el Niño en Coordenadas Polares**.

Por otro lado, sabemos que la Aceleración de una Partícula en Coordenadas Polares se escribe como:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{u}_\theta \dots (1.6)$$

La Fuerza Neta (ver la Fig. 2) que actúa sobre el muchacho es:  $\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{N}$ , es decir:

$$\vec{F}_{neta} = m \left[ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{u}_\theta \right] = (N - mg \sin \theta) \hat{u}_r - mg \cos \theta \hat{u}_\theta \dots (1.7)$$

Claramente de la Ec. (1.7) obtenemos Dos Ecuaciones Escalares, una para la Componente Radial  $\hat{u}_r$  y otra para la Componente Angular  $\hat{u}_\theta$ , de las Coordenadas Polares, es decir:

$$m \left[ \left( \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \hat{u}_r \right] = (N - mg \sin \theta) \hat{u}_r \dots (1.8a) \quad ; \quad m \left[ \left( r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right) \hat{u}_\theta \right] = -mg \cos \theta \hat{u}_\theta \dots (1.8b)$$

En las relaciones anteriores Ecs. (1.8) debemos de Introducir la Constricción dada en el Enunciado del Problema, es decir, que el Niño Esquimal Resbala sobre el Montículo de Hielo de Radio  $r = R = cte$ . Poniendo esto en las Ecs. (1.8a) y (1.8b) tenemos que:

$$\boxed{-mR\dot{\theta}^2 = N - mg \sin \theta} \dots (1.9a) \quad ; \quad \boxed{R\ddot{\theta} = -g \cos \theta} \dots (1.9b)$$

En principio, lo que seguiría sería resolver el Sistema de Ecuaciones Diferenciales No Lineales, Tarea Muy Complicada. Sin embargo, notemos que podemos “Hacer un Truco” para resolver una parte del problema. Si tomamos la Ec. (1.9b) (que determina la Ecuación de Movimiento del Niño) y la multiplicamos por “ $\dot{\theta}$ ” en ambos lados de la Ecuación Diferencial, es posible construir una Diferencial Exacta, es decir:

$$R\dot{\theta}\ddot{\theta} = -g\dot{\theta} \cos \theta \quad \text{OJO} \quad \Rightarrow \quad R \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = -g \frac{d}{dt} (\sin \theta) \dots (1.10)$$

Separando Variables e Integrado (aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo) en ambos lados de la ecuación anterior tendremos que:

$$\begin{array}{l} T.F.C. \\ \Rightarrow \end{array} \quad R \int d \left( \frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = -g \int d(\sin \theta) \quad \Rightarrow \quad R \left( \frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = -g \sin \theta + C_1 \dots (1.11)$$

Ahora aplicamos las Condiciones Iniciales, las cuales nos dicen que el niño se encontraba en reposo en la parte más alta de su Iglú al iniciar el movimiento, es decir: en  $\theta = \frac{\pi}{2}, \dot{\theta} = 0$ , con ello nos queda que  $g \sin(\frac{\pi}{2}) = C_1 \Rightarrow C_1 = g$ . Por lo tanto, poniendo el valor de la constante  $C_1$  en la Ec. (1.11) nos queda como:

$$\Rightarrow \quad \boxed{R \dot{\theta}^2 = 2g(1 - \sin \theta)} \dots (1.12a)$$

De Cinemática Rotacional sabemos que  $v = \dot{\theta}R \Rightarrow \dot{\theta}^2 = v^2/R^2$ , entonces la Ec. (1.12a) nos quedará como:

$$\boxed{v(\theta) = \sqrt{2gR(1 - \sin \theta)}} \dots (1.12b)$$

Es decir, hemos sido capaces de hallar una “Primera Integral de Movimiento”. La Ec. (1.12b) representa la “Velocidad del Niño Esquimal” como una función del ángulo “ $\theta$ ”.

Sustituyendo la Ec. (1.12a) en la Ec. (1.9a), seremos capaces de hallar la “Reacción Normal del Iglú sobre el Niño Esquimal”, es decir:

$$m \overbrace{[2g(1 - \sin \theta)]}^{R \dot{\theta}^2} = mg \sin \theta - N \quad \Rightarrow \quad N = mg \sin \theta - 2mg + 2mg \sin \theta \quad \Rightarrow$$

llegando a que:

$$\boxed{N(\theta) = mg(3 \sin \theta - 2)} \dots (1.13a)$$

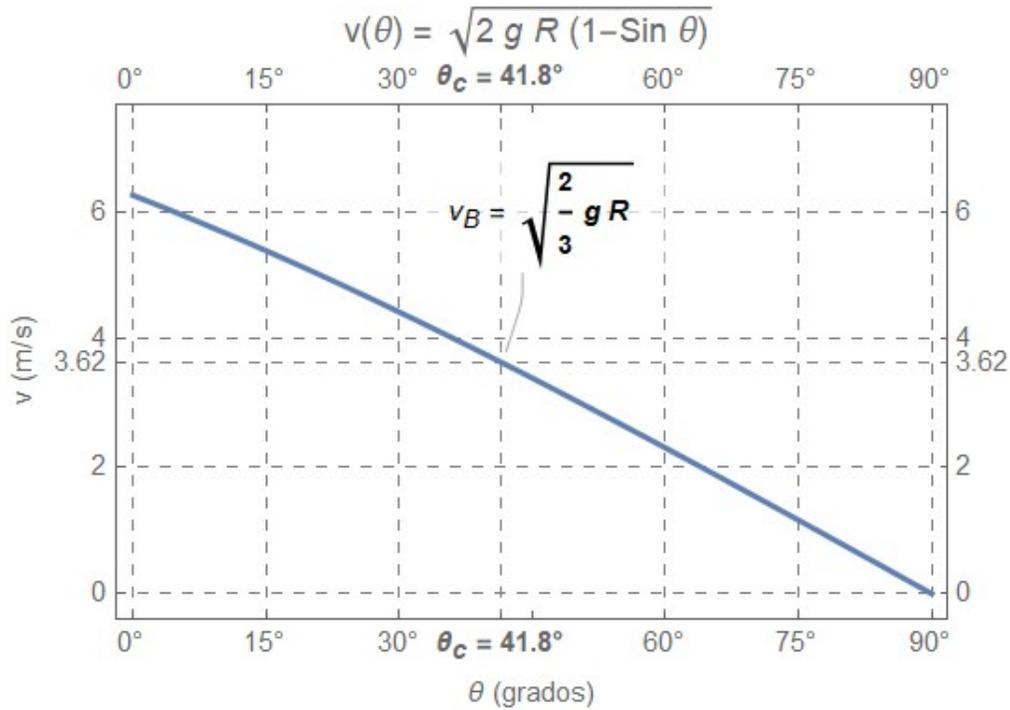


Figura 3: Gráfica de  $v$  vs.  $\theta$ , del Niño Esquimal, Ec. (1.12b) en donde aparece el “Ángulo Crítico de Desprendimiento  $\theta_c = 41.8^\circ$  y la “Velocidad en el Punto B  $v_B = \sqrt{\frac{2}{3}gR}$  de Desprendimiento del muchacho cuando deja el Iglú”, los cuales se determinarán más adelante (ver las Ecs. (1.14b) y (1.16)).

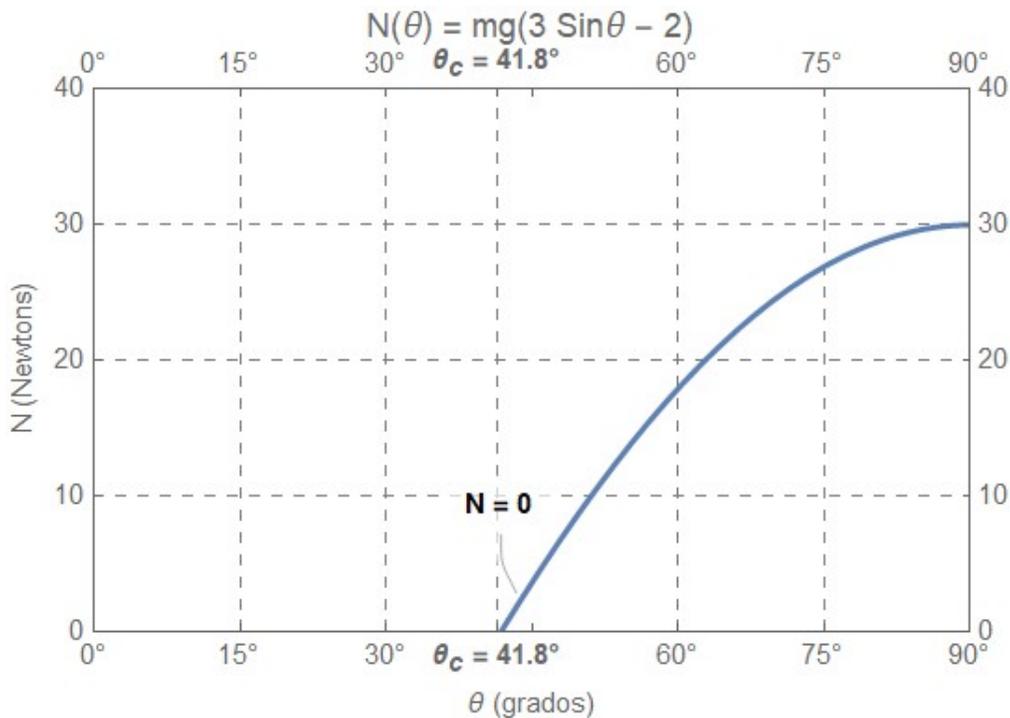


Figura 4: Gráfica de  $N$  vs.  $\theta$ , del Niño Esquimal, Ec. (1.13a) en donde aparece el Ángulo Crítico de Desprendimiento  $\theta_c = 41.8^\circ$  (ver las Ecs. (1.14b) cuando  $N=0$ ).

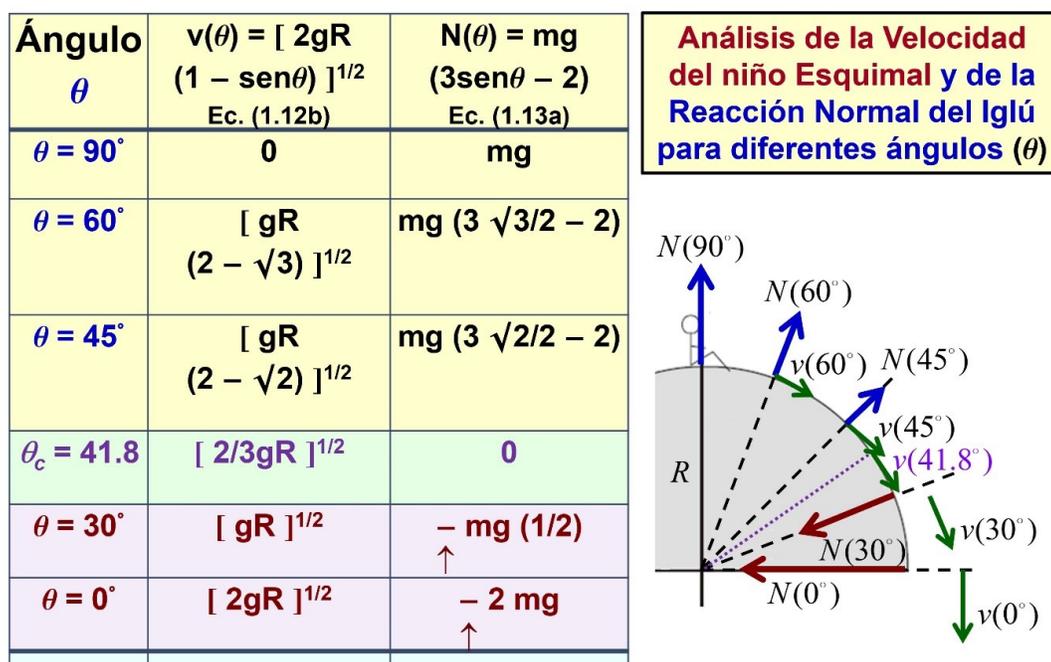


Figura 5: Tabla y Gráfica de la Velocidad del Muchacho (flechas en verde) Ec. (1.12b) y de la Reacción Normal del Iglú sobre el Esquimal (flechas en azul) Ec. (1.13a), para diferentes valores angulares ( $\theta = 90^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 41.8^\circ, 30^\circ$  y  $0^\circ$ ). Notamos que la Magnitud de Reacción Normal comienza con su Máximo Valor ( $N = mg$ ,  $\theta = 90^\circ$ ) y va disminuyendo, hasta hacerse cero ( $N = 0$ ,  $\theta = 41.8^\circ$ ). Posteriormente la Reacción Normal, adquiere valores negativos (flechas en rojo) que no tiene significado físico. Después de  $\theta = 41.8^\circ$ , el muchacho ya no está en el Iglú, está en el aire cayendo.

Con lo anterior procedemos a Analizar el Movimiento del Niño Esquimal. El muchacho permanece sobre el montículo de hielo cuando  $N > 0$ ; pero cuando  $N = 0$  es inminente la separación del chico del Iglú. Partiendo de la Ec. (1.13a) y haciendo  $N = 0$  en dicha ecuación, hallamos el “Ángulo de Desprendimiento”, el cual será:

$$0 = mg(3 \sin \theta - 2), \text{ es decir : } \sin \theta = \frac{2}{3}$$

Pero de la Fig. 2, vemos que:

$$\frac{2}{3} = \sin \theta = \frac{h'}{R} \Rightarrow \boxed{h' = \frac{2}{3}R} \dots (1.14a)$$

La Ec. (1.14a) nos da la “Altura Exacta” desde donde el muchacho se separa del montículo de hielo (Iglú), es decir:

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} \right) \Rightarrow \boxed{\theta = 41.8^\circ} \dots (1.14b)$$

**NOTA 1.2:** Para fines de comparaciones posteriores, usaremos también el Ángulo Complementario “ $\beta$ ”, ver Fig. 6.

De la Fig. 6 es claro que simplemente debemos hacer el cambio:  $\sin(\theta) \rightarrow \cos(\beta)$  y  $\cos(\theta) \rightarrow \sin(\beta)$ , para podernos referir al “Ángulo Complementario  $\beta$ ”.

En este caso tenemos que:

$$\boxed{N(\beta) = mg(3 \cos \beta - 2)} \dots (1.13b)$$

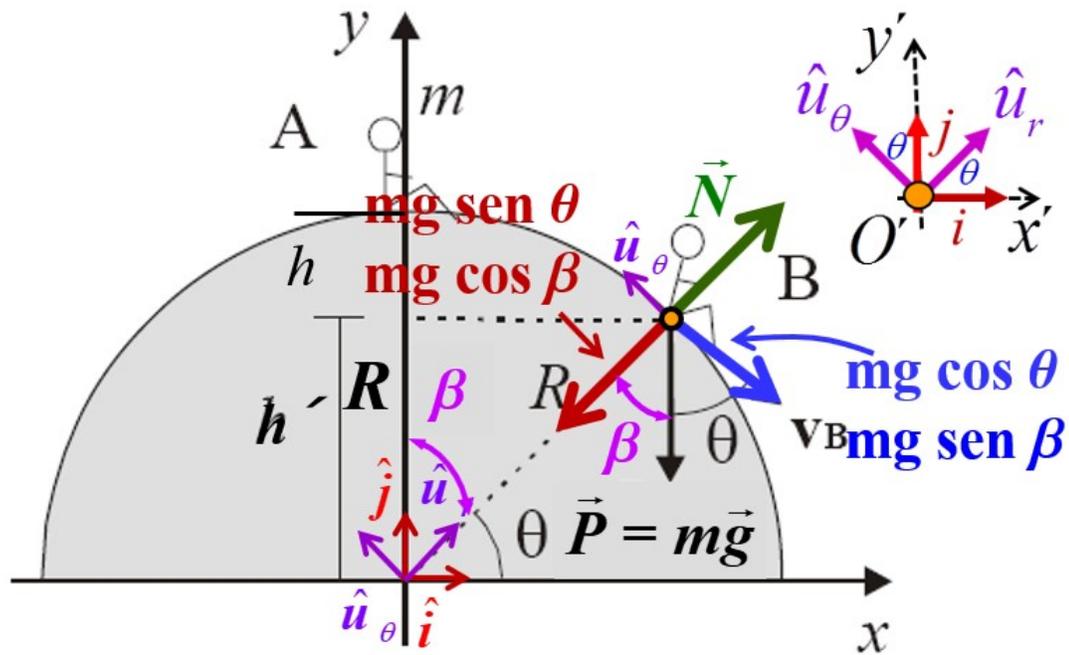


Figura 6: Diagrama del Niño Esquimal montando en la parte alta de su Iglú (Punto A) del Modelo 1, donde se muestra el Peso del Niño y sus componentes en el Ángulo Complementario “ $\beta$ ”, la Reacción Normal del Iglú sobre el niño, los Vectores Unitarios Cartesianos y Polares. El chico se despende del Iglú en el Punto B.

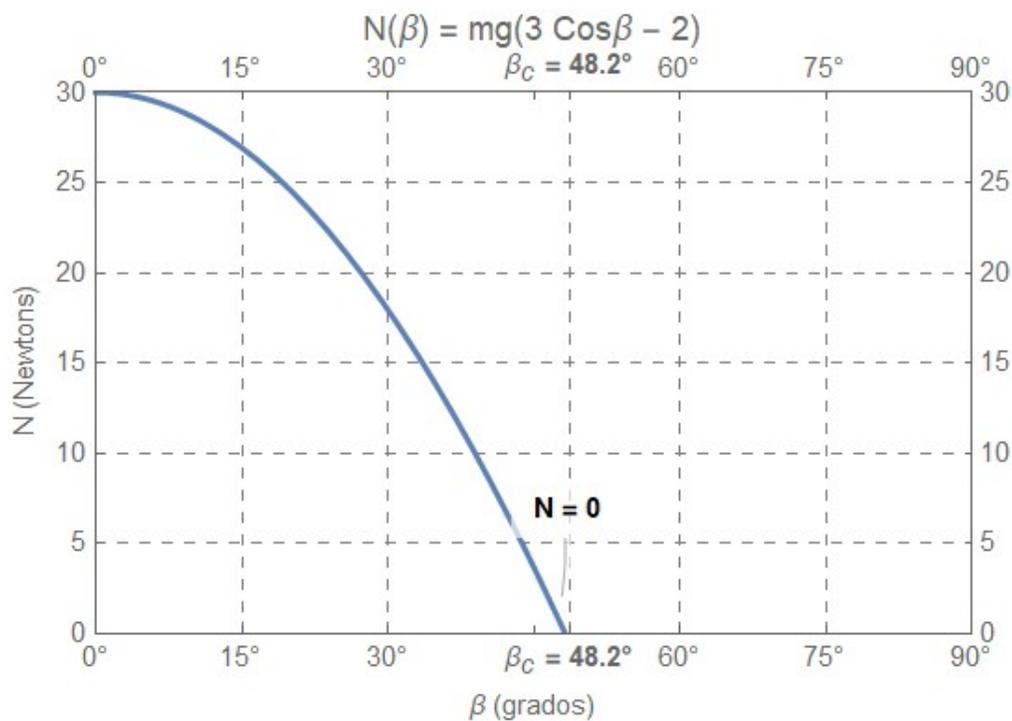


Figura 7: Gráfica de  $N$  vs.  $\beta$ , del Niño Esquimal, en donde aparece el Ángulo Crítico de Desprendimiento  $\beta = 48.2^\circ$ , ver las Ec. (1.33b) cuando  $N = 0$ .

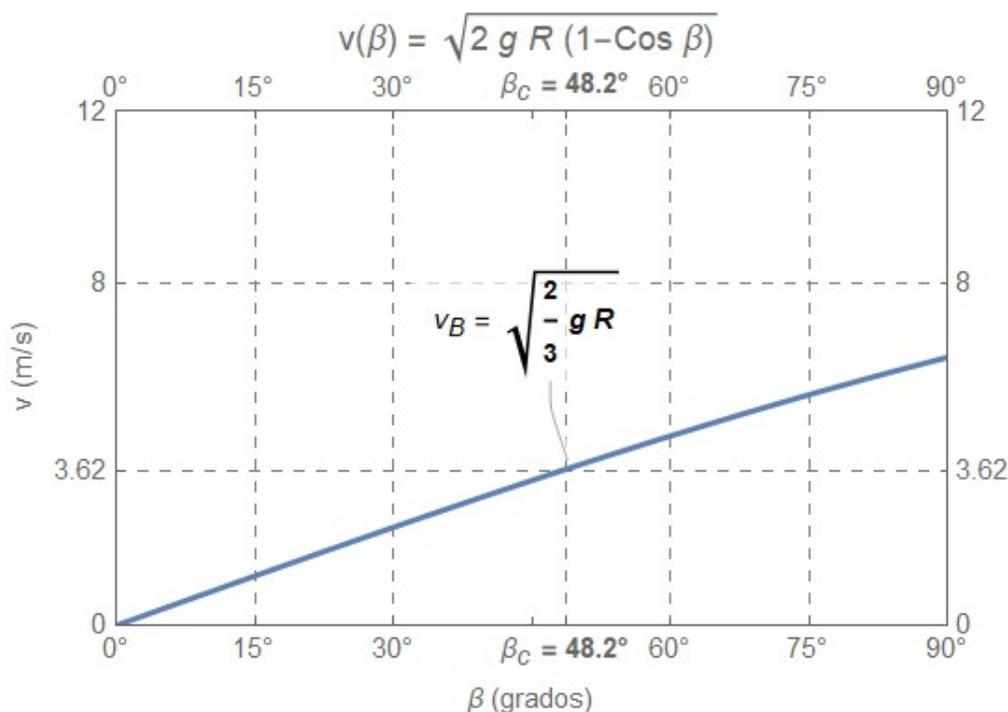


Figura 8: Gráfica de  $v$  vs.  $\beta$ , del Niño Esquimal, Ec. (1.12c) en donde aparece el Ángulo Crítico de Desprendimiento  $\beta_c = 48.2^\circ$  y la “Velocidad en el Punto B  $v_B = \sqrt{\frac{2}{3}gR}$  de Desprendimiento del muchacho cuando deja el Iglú.

Entonces, de la Ec. (1.13b) el ángulo “ $\beta_c$ ” requerido será de:

$$0 = mg(3 \cos \beta_c - 2) \Rightarrow \cos \beta_c = \frac{2}{3}, \text{ es decir : } \beta_c = \cos^{-1} \left( \frac{2}{3} \right) \Rightarrow \boxed{\beta_c \simeq 48.2^\circ} \dots (1.14c)$$

Y para el caso de la Velocidad del Niño Esquimal, probaremos más adelante que es:

$$\boxed{v(\beta) = \sqrt{2gR(1 - \cos \beta)}} \dots (1.12c)$$

Puesto que las ecuaciones que rigen el movimiento del niño esquimal se escriben bajo el supuesto de que él se mueve a lo largo de la trayectoria circular del Iglú con un radio igual a  $R$ , claramente, la solución que se obtiene para el valor de la Normal  $N$  es el que se requiere para que el niño se mueva según lo prescrito.

Esto significa que para ángulos entre  $48.2^\circ < \beta < 90^\circ$ , para que el niño permanezca en contacto con la superficie del iglú, “la Superficie debe en Realidad Jalar (Tirar) del Niño”. De la Ec. (1.13b), cuando  $\beta < 90^\circ$ , el iglú deberá de “jalar al niño con el doble de su peso”. Finalmente, nótese que a pesar de la Fuerza Normal es una función del peso del niño, el ángulo en el que el niño deja el iglú es independiente de  $m$  y  $g$ .

b) ¿Cuál es la rapidez del niño en dicho punto de Desprendimiento?

Poniéndose el valor de  $\sin(\theta) = \frac{2}{3}$  hallado en la Ec. (1.14b) en la Ec. (1.12a) encontramos que:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} \left( 1 - \frac{2}{3} \right) \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{3R}} \dots (1.15)$$

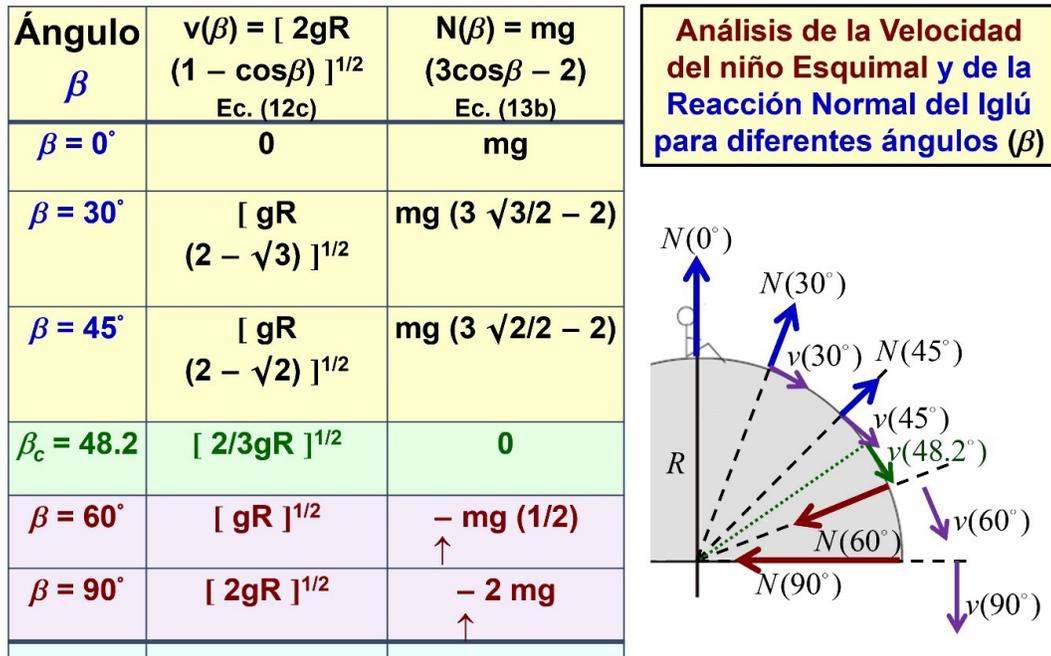


Figura 9: Tabla y Gráfica de la Velocidad del Muchacho (flechas en verde) Ec. (1.12c) y de la Reacción Normal del Iglú sobre el Esquimal (flechas en azul) Ec. (1.13b), para diferentes valores angulares ( $\beta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 48.2^\circ, 60^\circ$  y  $90^\circ$ ). Notamos que la Magnitud de Reacción Normal comienza con su Máximo Valor ( $N = mg, \beta = 0^\circ$ ) y va disminuyendo, hasta hacerse cero ( $N = 0, \beta = 48.2^\circ$ ). Posteriormente la Reacción Normal, adquiere valores negativos (flechas en rojo) que no tiene significado físico. Después de  $\beta = 48.2^\circ$ , el muchacho ya no está en el Iglú, está en el aire cayendo.

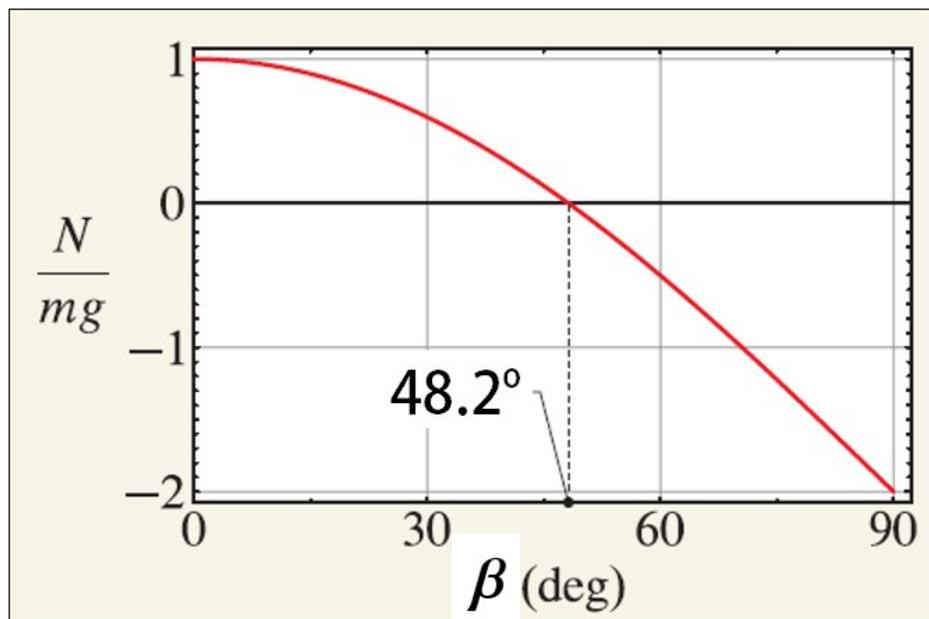


Figura 10: La Fuerza Normal  $N$  (Normalizada al Peso del Niño Esquimal  $mg$ ) como una función de  $\beta$  cuando el niño se desliza hacia abajo del montículo esférico. Notemos que para ángulos  $\beta > 48.2^\circ$ , la Fuerza Normal se convierte en Negativa.

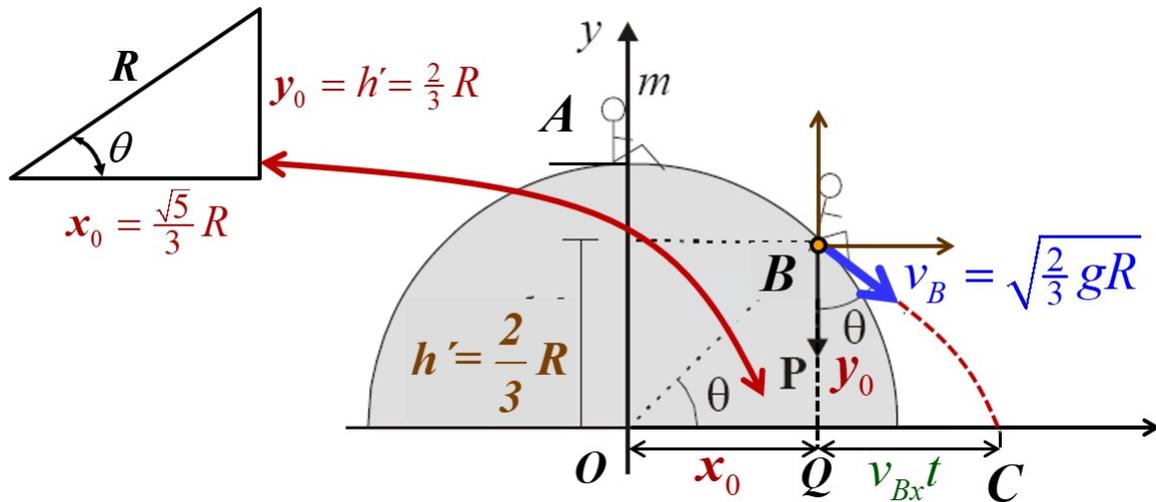


Figura 11: Gráfica de la caída del muchacho desde el Punto B de su Iglú. En el Punto B el chico lleva la velocidad de  $v_B = \sqrt{\frac{2}{3}gR}$  y realiza un Tiro Parabólico hasta llegar al Punto C (en el piso). Se muestran las distancias  $(\vec{OQ}) = x_0$  y  $(\vec{QC}) = v_{B_x}t$  y el Triángulo Rectángulo cuya Hipotenusa es  $R$  y cuyos Catetos son  $x_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}R$  y  $y_0 = h' = \frac{2}{3}R$ .

De las Coordenadas Polares sabemos que la Componente Angular de la Velocidad (usando la Ec. (1.15)) es:

$$\vec{v}_\theta = R\dot{\theta} \hat{u}_\theta \Rightarrow v_\theta = R\dot{\theta} \Rightarrow v_\theta^2 = R^2 \left( \frac{2g}{3R} \right) \Rightarrow$$

Finalmente tenemos que la Rapidez del muchacho en el Punto B (Punto de Desprendimiento) es:

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \dots (1.16)$$

### c) La distancia a la que cae el muchacho, medida desde la base del iglú

Para determinar la distancia recorrida por el muchacho desde el Punto de Desprendimiento (Punto B) hasta el suelo, usaremos las Ecuaciones del Tiro Parabólico. De la Fig. 11, obtenemos las Componentes Cartesianas de la Rapidez del Muchacho justamente en el Punto B.

Es decir, en la Fig. 11 vemos que se forma un Triángulo Rectángulo, con Hipotenusa  $R$  y Catetos  $x_0$  y  $y_0$ , los cuales valen:

$$\sin \theta = \frac{2}{3} \dots (1.18a) \Rightarrow \text{Del Teorema de Pitagoras :}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \stackrel{(1.18a)}{=} 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{5}{9} \Rightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \dots (1.18b)$$

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 \Rightarrow x_0^2 = R^2 - y_0^2 = R^2 - \left(\frac{2}{3}R\right)^2 = R^2 - \frac{4}{9}R^2 \Rightarrow x_0^2 = \left(1 - \frac{4}{9}\right) R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0^2 = \frac{5}{9}R^2 \Rightarrow x_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}R \dots (1.17b)$$

Por tanto, el Punto B de Desprendimiento debido a las Ecs. (1.17a) y (1.17b) tiene por Coordenadas Cartesianas:

$$B(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}R, \frac{2}{3}R\right) \dots (1.17c)$$

Usando la Ec. (1.16) y los resultados Ecs. (1.18a) y (1.18b) tendremos:

$$v_{Bx} = v_B \sin \theta \Rightarrow v_{Bx} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{gR} \dots (1.19a)$$

$$v_{By} = -v_B \cos \theta \Rightarrow v_{By} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}\sqrt{gR} \dots (1.19b)$$

Usando las relaciones Ecs. (1.17) y Ecs. (1.19) la Posición del Niño Esquimal justo cuando abandona el Iglú en el Punto B es

$$x = x_0 + v_{Bx}t \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{3}R + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{gR}t \dots (1.20a)$$

$$y = y_0 - v_{By}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}R - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}\sqrt{gR}t - \frac{1}{2}gt^2 \dots (1.20b)$$

El Punto de Impacto corresponderá a que la altura se iguale a la del suelo, es decir:  $y = 0$ . De la Ec. (1.20b) tendremos que:

$$0 = \frac{2}{3}R - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}\sqrt{gR}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}\sqrt{gR}t - \frac{2}{3}R = 0 \dots (1.21a)$$

Como podemos ver, la Ec. (1.21a) es una “Ecuación Cuadrática para el Tiempo”, la cual la podemos poner como:

$$\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0 \dots (1.21b)$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{2}g \dots (1.22a)$$

$$\beta \equiv \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}\sqrt{gR} \dots (1.22b)$$

$$\gamma \equiv -\frac{2}{3}R \dots (1.22c)$$

Usando la “Formula General para las Ecuaciones Cuadráticas”, encontramos utilizando las Ecs. (1.22), el “Tiempo que Tarda el Niño Esquimal” en alcanzar el suelo será:

$$t = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}\sqrt{gR} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}\sqrt{gR}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}g\right)\left(-\frac{2}{3}R\right)\left(\frac{3}{3}\right)}}{\mathfrak{A}\left(\frac{1}{2}g\right)} \Rightarrow$$

$$t = \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{10}{3}}\sqrt{gR} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{9}gR\right)\left(\frac{10}{3} + 12\right)}}{g} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{gR}\left[-\sqrt{\frac{10}{3}} \pm \sqrt{\frac{46}{3}}\right]}{g} \quad \begin{matrix} \text{Tomando el} \\ \text{Signo Positivo} \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$t = \frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{gR}{g}}\left[\sqrt{46} - \sqrt{10}\right] \Rightarrow t = \frac{\sqrt{46} - \sqrt{10}}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{R}{g}} \dots (1.23)$$

Sustituimos el tiempo hallado en la Ec. (1.17) en la Ecuación para la Coordenada  $x$  dada por la Ec. (1.20a) y obtenemos el Punto de Impacto C:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\sqrt{5}}{3}R + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{gR} \left( \frac{\sqrt{46}-\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{R}{g}} \right) = \frac{\sqrt{5}}{3}R + \left( \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \right) \left( \frac{\sqrt{46}-\sqrt{10}}{3\sqrt{3}} \right) \sqrt{gR\frac{R}{g}} \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{3}R + \frac{1}{3} \left( \frac{2\sqrt{2}}{9} \right) \left( \sqrt{46} - \sqrt{10} \right) R = \frac{1}{3} \left[ \sqrt{5} + \left( \frac{2\sqrt{2}}{9} \right) \left( \sqrt{46} - \sqrt{10} \right) \right] \Rightarrow \\
 &\quad \boxed{x = \frac{1}{27} \left( 5\sqrt{5} + 4\sqrt{23} \right) R \simeq 1.12R} \dots (1.24)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las Coordenadas del Punto de Impacto C, donde el Niño Esquimal cae a Tierra será:

$$\boxed{x = \frac{1}{27} \left( 5\sqrt{5} + 4\sqrt{23} \right) R \simeq 1.12R} \dots (1.25a) \quad \& \quad \boxed{y = 0} \dots (1.25b)$$

$$\Rightarrow \boxed{C \left( \frac{1}{27} \left( 5\sqrt{5} + 4\sqrt{23} \right) R, 0 \right) \simeq C (1.12R, 0)} \dots (1.25c)$$

#### d) La velocidad del niño justo al tocar el piso.

Para calcular la Rapidez con la que el Niño Esquimal llega al suelo (Punto C), se obtendrá de las “Ecuaciones del Tiro Parabólico”, es decir:

$$a_x = 0 \dots (1.26a) \quad ; \quad a_y = -g \dots (1.26b) \quad ;$$

$$v_{C_x} = v_B \sin \theta \dots (1.27a) \quad ; \quad v_{C_y} = v_B \cos \theta - gt \dots (1.27b) \quad ;$$

$$x = v_B t \sin \theta \dots (1.28a) \quad ; \quad y = h' + v_B t \cos \theta - \frac{1}{2}gt^2 \dots (1.28b)$$

Hallamos el “Tiempo de Caída” de la Ec. (1.28b) haciendo que  $y=0$ , es decir:

$$0 = h' + v_B t \cos \theta - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \left( \frac{1}{2}g \right) t^2 + (-v_B \cos \theta) t + (-h') = 0$$

$$t = \frac{v_B \cos \theta + \sqrt{(v_B \cos \theta)^2 - 4 \left( \frac{1}{2}g \right) (-h')}}{2 \left( \frac{1}{2}g \right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{t = \frac{1}{g} \left\{ v_B \cos \theta + \sqrt{v_B^2 \cos^2 \theta + 2gh'} \right\}} \dots (1.29)$$

Sustituyendo la Ec. (1.29) en la Ec. (1.27b) tenemos que:

$$c_y = v_B \cos \theta - g \left[ \frac{1}{g} \left\{ v_B \cos \theta + \sqrt{v_B^2 \cos^2 \theta + 2gh'} \right\} \right] \Rightarrow \boxed{v_{C_y} = -\sqrt{v_B^2 \cos^2 \theta + 2gh'}} \dots (1.30)$$

La Rapidez del Niño Esquimal en el Punto C, será la Raíz Cuadrada de la Suma de los Cuadrados de las Componentes “ $x$ ”e “ $y$ ” Ecs. (1.37a) y (1.40), es decir:

$$\begin{aligned}
 v_C &= \sqrt{v_{C_x}^2 + v_{C_y}^2} = \sqrt{(v_B \sin \theta)^2 + \left( -\sqrt{v_B^2 \cos^2 \theta + 2gh'} \right)^2} \\
 &= \sqrt{v_B^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2gh'} \Rightarrow v_C = \sqrt{v_B^2 + 2gh'} \dots (1.31)
 \end{aligned}$$

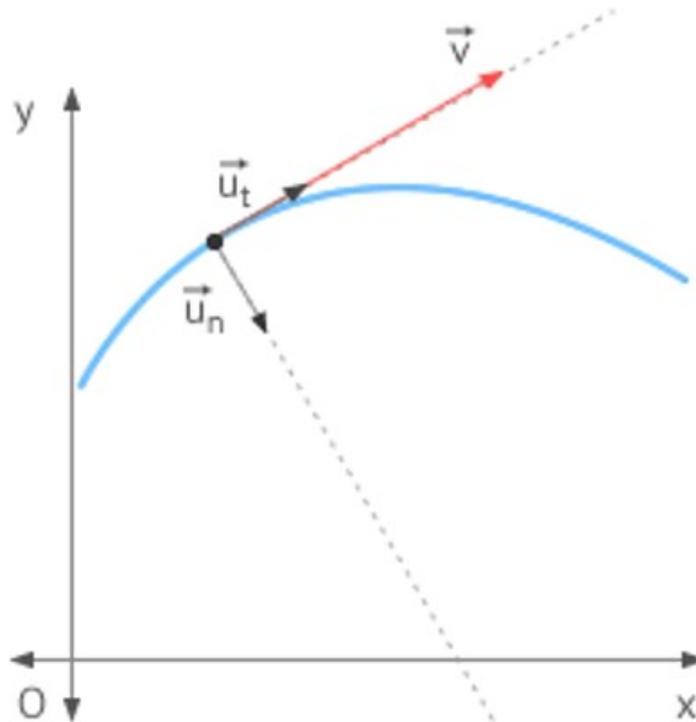


Figura 12: Definición del Sistema de Coordenadas Intrínsecas o también llamado Natural. Eje Tangente: Su Dirección es Tangente a la Trayectoria y el Sentido Positivo Será el de la Velocidad del Móvil en ese Punto. Se define por el Vector Unitario  $\hat{u}_t$ . Eje Normal: Su Dirección es Perpendicular a la Trayectoria y el Sentido Positivo será el que se Dirige al Centro de Curvatura de la Trayectoria. Se define por el vector unitario  $\hat{u}_n$ . (Fernández J. L., 2023).

De las Ecs. (1.16) y (1.14a) conocemos la “Rapidez en el Punto B” y la Altura  $h'$ . Sustituyendo esta información en la Ec. (1.31) tendremos

$$v_C = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}gR}\right)^2 + 2g\left(\frac{2}{3}R\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}gR + \frac{4}{3}gR} = \sqrt{\frac{6}{3}gR} = \sqrt{\frac{2\cancel{g}}{\cancel{3}}gR} \Rightarrow \boxed{v_C = \sqrt{2gR}} \dots (1.32)$$

El resultado Ec. (1.32), se pudo haber previsto desde el principio, pues el muchacho (Partícula Puntual) en su caída Sin Rozamiento, está ligado al Campo Gravitacional Terrestre (Campo Conservativo) y sabemos que la velocidad de caída desde una cierta altura “h” con velocidad inicial nula “ $v_0 = 0$ ” en dicho campo es justo  $v = \sqrt{2gh}$ , independientemente del camino seguido en la caída, (Resnick, R. Halliday, D. & Krane, K., 1987), (Beer, F. P., Jr., E. R. & Cornwell, P. J., 2010), (Young, H. D., Freedman R. A. & Ford, A. L., 2009).

**e) Encuentre los incisos a) y b) mediante el uso de las “Coordenadas Intrínsecas” y compare sus resultados.**

A continuación, resolveremos el mismo problema usando las “Componentes Intrínsecas” de la Aceleración. ¿Qué es un Sistema de Coordenadas Intrínsecas? Se define el “Sistema de Referencia Propio”, “Intrínsecas”, o también algunas veces llamado “Natural”, para Cada Punto de la Trayectoria como un Sistema de Coordenadas formado por dos ejes.

Para hacer el análisis del problema, usaremos el Ángulo Complementario “ $\beta$ ”, definido previamente ver la Fig. 6

La expresión de la Fuerza en Coordenadas Intrínsecas, “ $\hat{u}_n$ ” y “ $\hat{u}_t$ ”es:

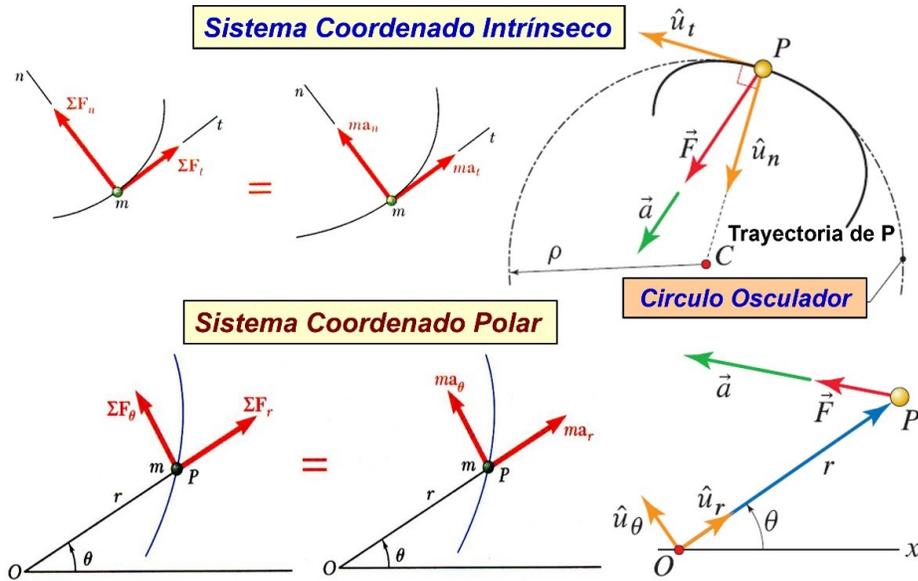


Figura 13: Comparación entre el Sistema de Coordenadas Intrínseco o Natural y el Sistema de Coordenadas Polares (Beer, F. P., Jr., E. R. & Cornwell, P. J., 2010: 698).

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m(a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n) \dots (1.33a)$$

Las Componentes Tangenciales y Normales de Coordenadas Intrínsecas de la Fuerza son:

$$\sum F_t = ma_t = m \left( \frac{dv}{dt} \right) \dots (1.33b) \quad ; \quad \sum F_n = ma_n = m \left( \frac{v^2}{\rho} \right) \dots (1.33c)$$

La expresión de la Fuerza en Coordenadas Polares, “ $\hat{u}_r$ ” y “ $\hat{u}_\theta$ ” es:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m(a_r \hat{u}_r + a_\theta \hat{u}_\theta) \dots (1.34a)$$

Las Componentes Radiales y Angulares de Coordenadas Polares de la Fuerza son:

$$\sum F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \dots (1.34b) \quad ; \quad \sum F_\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \dots (1.34c)$$

**NOTA 1.3:** Solo en el Caso Especial de que  $R = cte$ , ambos “Sistemas Coordenados Coinciden”.

Usando el Ángulo Complementario “ $\beta$ ”, la Fuerza Neta  $\vec{F}_{neta}$  que actúa sobre el niño esquimal de masa “ $m$ ” son (ver la Fig. 6): su Peso “ $P$ ” y la Reacción Normal del Montículo Esférico (Iglú) sobre el Niño “ $N$ ”. Escribiendo la “Segunda Ley de Newton” en Componentes Intrínsecas, es decir, Componente Tangencial y Componente Normal es:  $\vec{F}_{neta} = \vec{F}_{tan} + \vec{F}_{nor}$ , las cuales son explícitamente:

$$\begin{cases} \sum F_{tan} : & ma_{tan} = m \frac{dv}{dt} = mg \sin \beta \dots (1.35a) \\ \sum F_{nor} : & ma_{nor} = \frac{v^2}{R} = mg \cos \beta - N \dots (1.35b) \end{cases}$$

De la Componente Tangencial de la Fuerza Ec. (1.35a), tenemos que:

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \beta \quad \begin{array}{l} \text{Regla de} \\ \text{la Cadena} \\ \Rightarrow \end{array} \quad m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = mg \sin \beta \quad \begin{array}{l} \text{Separando} \\ \text{Variables} \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$v dv = g \sin \beta ds \text{ como } s = \beta R, \text{ entonces : } ds = R d\beta \text{ por tanto } \Rightarrow$$

$$\boxed{v dv = gR \sin \beta d\beta} \dots (1.36a)$$

Integrando la Ec. (1.36a) tomando en cuenta la Condiciones Iniciales, tenemos:

$$\int_{v_0=0}^v v' dv' = gR \int_{\beta=0}^{\beta} \sin \beta' d\beta' \Rightarrow \frac{1}{2}(v')^2 \Big|_{v_0=0}^v = gR (-\cos \beta') \Big|_{\beta=0}^{\beta}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = gR (-\cos \beta + 1) \Rightarrow \boxed{v^2(\beta) = 2gR(1 - \cos \beta)} \dots (1.36b)$$

La Ec. (1.36b) corresponde a la Ec. (1.12c), previamente hallada. De la Componente Normal de la Fuerza Ec. (1.35b) tenemos que

$$m \frac{v^2}{R} = mg \cos \beta - N \dots (1.37a)$$

Usando el resultado Ec. (1.36b) en la Ec. (1.37a) llegamos:

$$m \frac{2gR(1 - \cos \beta)}{R} = mg \cos \beta - N \Rightarrow 2mg - 2mg \cos \beta - mg \cos \beta = -N$$

Por lo tanto, la Reacción Normal del Iglú sobre el Niño será:

$$\boxed{N(\beta) = mg(3 \cos \beta - 2)} \dots (1.37b)$$

La Ec. (1.37b) corresponde a la Ec. (1.13b), previamente hallada. El Niño Esquimal deja de estar en contacto con la Superficie del Iglú cuando  $N = 0$ , entonces de la Ec. (1.37b) tendremos que:

$$3mg \cos \beta = 2mg \Rightarrow \boxed{\cos \beta = \frac{2}{3}} \dots (1.38a)$$

Es decir, la Ec. (1.38a) representa la Altura  $h'$  (ver la Fig. 6):  $\cos(\beta) = \frac{h'}{R} \Rightarrow$

$$\boxed{h' = \frac{2}{3}R} \dots (1.38b)$$

Los resultados Ec. (1.38a) y Ec. (1.38b) son resultados obtenidos previamente.

**NOTA 1.4:** De la Ec. (1.35a) podemos hallar la Posición Angular del Niño Esquimal “ $\beta$ ” en Función del Tiempo, es decir:

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \beta \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( R \frac{d\beta}{dt} \right) = g \sin \beta \Rightarrow \boxed{R \frac{d^2\beta}{dt^2} = g \sin \beta} \dots (1.39)$$

Una manera de resolver la Ec. (1.39) es mediante Procedimientos Numéricos o Simbólicos. O procediendo como se hizo con la Ec. (1.10b), tenemos que la Ec. (1.39) se puede convertir en una Diferencial Exacta, si multiplicamos en ambos lados de la ecuación por “ $\dot{\beta}$ ”, es decir:

$$R \dot{\beta} \ddot{\beta} = g \dot{\beta} \sin \beta \Rightarrow R \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\beta}^2}{2} \right) = -g \frac{d}{dt} (\cos \beta) \Rightarrow$$

Separando Variables e Integrado (aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo) en ambos lados de la ecuación tendremos:

$$R \int d\left(\frac{\dot{\beta}^2}{2}\right) = -g \int d(\cos \beta) \Rightarrow R \left(\frac{\dot{\beta}^2}{2}\right) = -g \cos \beta + C_1 \Rightarrow$$

Ahora aplicamos las Condiciones Iniciales, las cuales nos dicen que el niño se encontraba en la Parte Más Alta de su Iglú al Iniciar el Movimiento, es decir: en  $\beta = 0$ ,  $\dot{\beta} = \omega_0$  (observemos que ahora suponemos una pequeña velocidad angular inicial " $\omega_0 \neq 0$ ", todo ello con el fin de poder comparar con otros modelos más adelante).

Con lo anterior, la constante de integración " $C_1$ " nos queda que  $\frac{R}{2}\omega_0^2 = -g \cos(0) + C_1 \Rightarrow C_1 = g + \frac{R}{2}\omega_0^2$ . Por lo tanto, la ecuación anterior nos queda como:

$$\frac{R}{2}\dot{\beta}^2 = -g \cos \beta + g + \frac{R}{2}\omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\frac{R}{2}\dot{\beta}^2 - \frac{R}{2}\omega_0^2 = g(1 - \cos \beta)} \dots (1.40)$$

De Cinemática Rotacional sabemos que  $v = \dot{\beta}R \Rightarrow \dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{R^2}$ , entonces la Ec. (1.40) nos quedará como:

$$\frac{R}{2} \left(\frac{v^2}{R^2}\right) - \frac{R}{2}\omega_0^2 = g(1 - \cos \beta) \Rightarrow \frac{v^2 - R^2\omega_0^2}{R} = 2g(1 - \cos \beta) \Rightarrow v^2 = R^2\omega_0^2 + 2gR(1 - \cos \beta)$$

$$\Rightarrow \boxed{v(\beta) = \sqrt{R^2\omega_0^2 + 2gR(1 - \cos \beta)}} \dots (1.41a)$$

O bien en términos de la Velocidad Traslacional Inicial,  $v_0 = \dot{\beta}_0 R \Rightarrow v_0^2 = \omega_0^2 R^2$

$$\boxed{v(\beta) = \sqrt{v_0^2 + 2gR(1 - \cos \beta)}} \dots (1.41b)$$

Por otro lado, sabemos que el Niño Esquimal pierde el contacto con el Iglú en el Punto B (ver la Fig. 6), justo cuando  $N = 0$ . De acuerdo con la Ec. (1.35b), esto ocurre en un ángulo  $\beta_c$  y el niño lleva en ese momento la velocidad  $v_B$  dada por:

$$\mathcal{N} \frac{v^2}{R} = \mathcal{N}g \cos \beta - \mathcal{N}^0 \Rightarrow \boxed{v_B^2 = Rg \cos \beta_c} \dots (1.42)$$

Igualando las Ecs. (1.41b) y (1.42) hallamos que el "Ángulo Crítico  $\beta_c$  de Desprendimiento" es:

$$Rg \cos \beta_c = v_0^2 + 2gR(1 - \cos \beta_c) \Rightarrow Rg(\cos \beta_c + 2 \cos \beta_c) = v_0^2 + 2gR \Rightarrow$$

$$3 \cos \beta_c = \frac{v_0^2}{Rg} + \frac{2gR}{Rg} \Rightarrow \boxed{\beta_c = \cos^{-1} \left( \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \right)} \dots (1.43)$$

Claramente cuando la "Velocidad Inicia es Cero" ( $v_0 = 0$ ), Recuperamos el Caso Conocido dado por la Ec. (1.14c). Ver la Ec. (3.6) Modelo 3 para observar cómo se obtiene este resultado, usando argumentos de Trabajo-Energía.

¿Cuál será la velocidad del niño Esquimal en el Punto B de Desprendimiento? Para responder a la pregunta, pondremos la Ec. (1.43) en la expresión de la Velocidad dada por la Ec. (1.42), es decir:

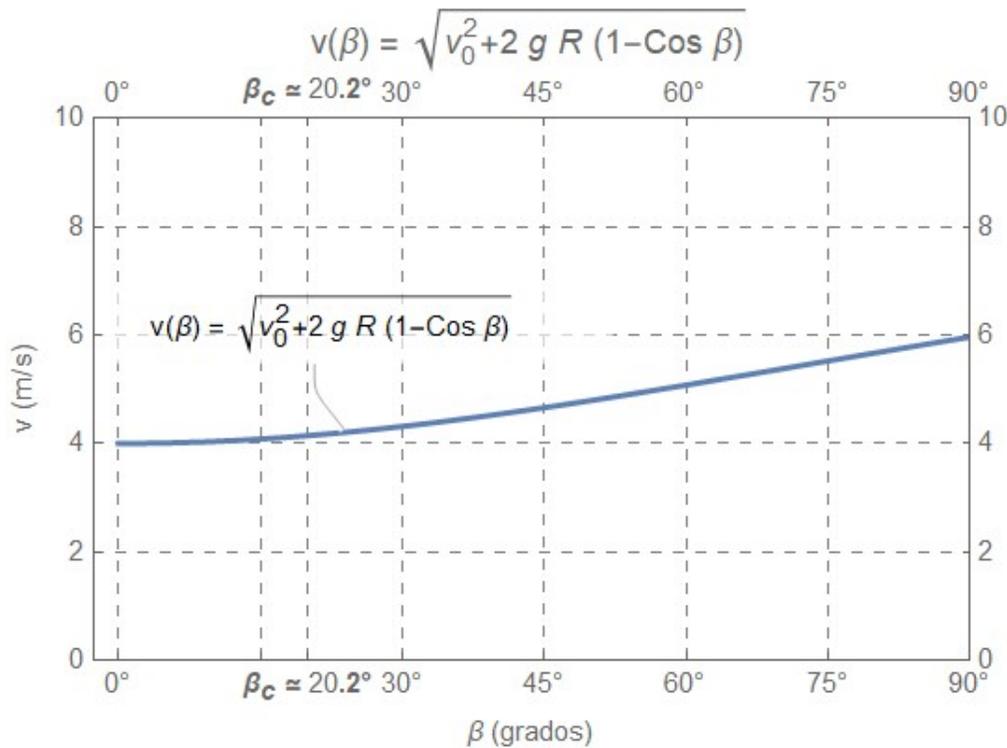


Figura 14: Gráfica de  $v$  vs.  $\beta$ , del Niño Esquimal con Velocidad Inicial  $v_0 = 4$  (m/s) y Radio del Iglú de  $R = 2$  m, Ec. (1.41b) en donde aparece el “Nuevo Ángulo Crítico de Desprendimiento  $\beta_c = 20.2^\circ$ ”, ver la Ec. (1.43). Compare esta gráfica con la Fig. 8

$$v_B^2 = Rg \cos \left[ \cos^{-1} \left( \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \right) \right] = \left( \frac{2}{3}gR + \frac{v_0^2}{3} \right) \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{1}{3}(v_0^2 + 2gR)} \dots (1.44)$$

La expresión (1.44) es la “Velocidad de Desprendiendo del Muchacho” en el Punto B de la Fig. 6 y Fig. 14 justo cuando la “Reacción Normal del Iglú” desaparece ( $N = 0$ ), claramente recuperamos el “Caso Sin Velocidad Inicial” Ec. (1.16), cuando la “Velocidad Inicia es Cero” ( $v_0 = 0$ ).

## 2.2. Modelo 2: Usando de la Conservación de la Energía

Un niño Esquimal está sentando en la parte más alta de un Iglú (montículo de hielo semiesférico, sin fricción) de radio  $R$  como se muestra en la Fig. 15. Recibe un pequeñísimo empujón y comienza a resbalar sobre el Iglú hacia abajo. Ignorando la Fricción y considerando al niño como un Punto Material. a) ¿Cuál es la rapidez del niño en el Punto B de Desprendimiento?, b) ¿En qué punto se separa del iglú el niño?, c) ¿Es posible determinar el ángulo como función del tiempo, es decir:  $\theta(t)$ ? Para resolver el problema usando la Conservación de la Energía, (Resnick, R. Halliday, D. & Krane, K., 1987), (Young, H. D., Freedman R. A. & Ford, A. L., 2009), (Beer, F. P., Jr., E. R. & Cornwell, P. J., 2010).

### a) ¿Cuál es la rapidez del niño en el Punto B de Desprendimiento?

Usando la Conservación de la Energía desde el Punto A (punto donde comienza a moverse el Niño Esquimal), hasta el Punto B (punto en el cual el muchacho deja de tener contacto con

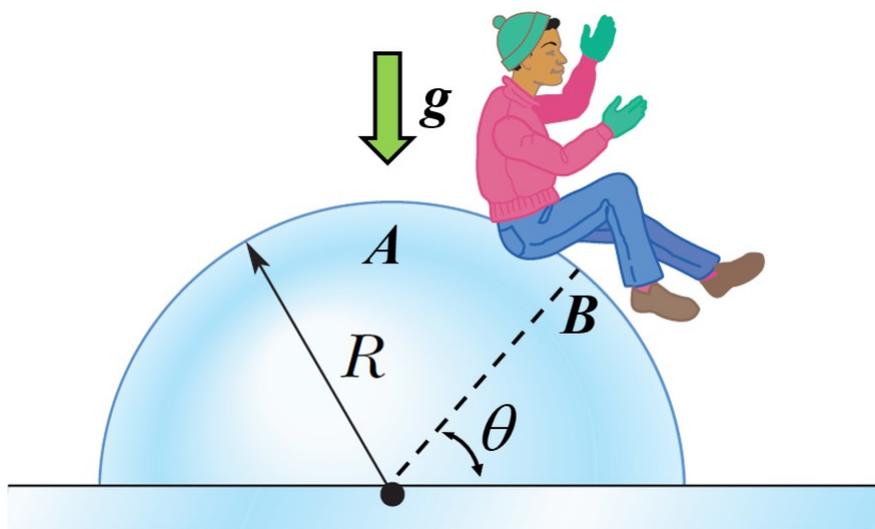


Figura 15: Representación esquemática del Modelo 2. Un Niño Esquimal considerándolo como una Partícula Material Puntual de masa " $m$ ", resbala sobre su Iglú (Montículo de Hielo Semiesférico de Radio " $R$ ") inicialmente se encuentra en reposo en el Punto A, resbala por el montículo hasta llegar al Punto B, en donde se desprende del Iglú

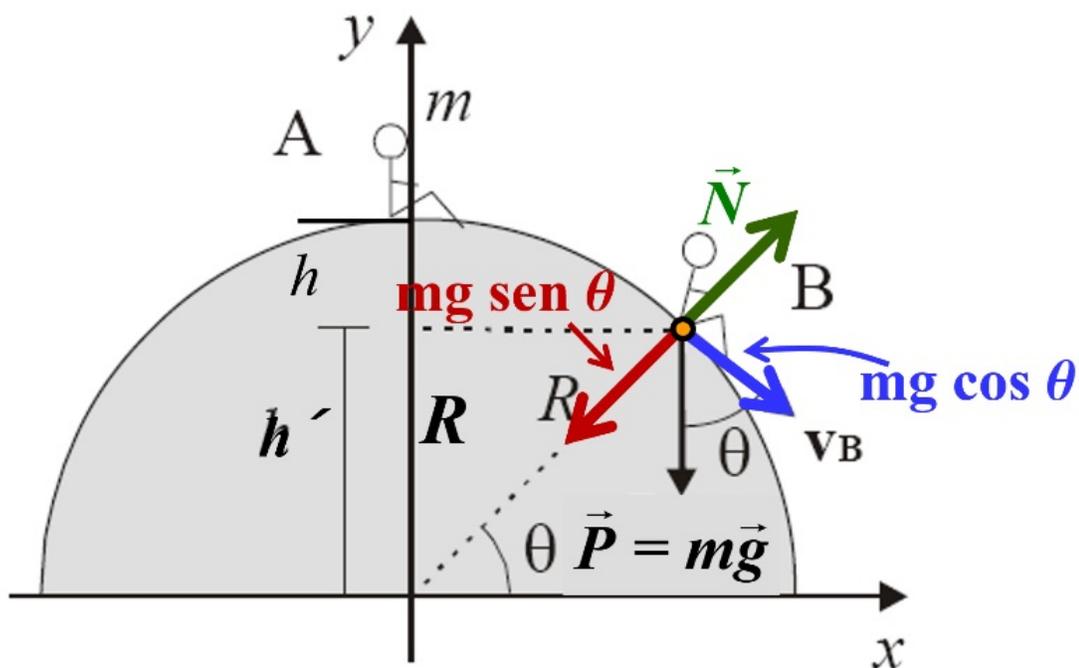


Figura 16: Diagrama del Niño Esquimal montando en la parte alta de su Iglú (Punto A) del Modelo 2, donde se muestra el Peso del Niño y sus Componentes Cartesianas, la Reacción Normal del Iglú sobre el niño. El chico resbala del Punto A se desprende del Iglú en el Punto B.

el Iglú, Punto de Desprendimiento), ver Fig. 16

$$E_A = E_B \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \dots (2.1)$$

donde,

$$v_A = 0 \dots (2.2a), \quad h_A = R \dots (2.2b), \quad v_B = ? \dots (2.2c) \quad \text{y} \quad h_B = h' \dots (2.2d)$$

Poniendo la información dada por las Ecs. (2.2) en la Ec. (2.1) tenemos

$$mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh' \Rightarrow \boxed{gR = \frac{1}{2}v_B^2 + gh'} \dots (2.3a)$$

De la Fig. 16 tenemos que:

$$\sin \theta = \frac{h'}{R} \Rightarrow h' = R \sin \theta \dots (2.4)$$

Poniendo la Ec. (2.4) en la Ec. (2.3) y despejando la “Velocidad de Niño Esquimal ”

$$gR = \frac{1}{2}v_B^2 + g(R \sin \theta) \Rightarrow \frac{1}{2}v_B^2 = gR(1 - \sin \theta) \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2gR(1 - \sin \theta)}} \dots (2.5a)$$

La Velocidad del Esquimal Ec. (2.5a), corresponde a la Ec. (1.12b) encontrada en el Modelo 1, la cual podemos reescribir usando el hecho de que:  $v = \dot{\theta}R \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R^2}$ , también como:

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \sin \theta)} \dots (2.5b)$$

que corresponde a la Ec. (1.12a) del Modelo 1.

**NOTA 2.1:** La Ec. (2.5), proviene directamente de haber utilizado explícitamente la “Conservación de la Energía” y esto, en principio, nos debería de sorprender, puesto que la “Fuerza de Restricción en General No es Conservativa” y uno de los requisitos para la Conservación de la Energía Mecánica es que todas las fuerzas involucradas en el problema sean conservativas (Ver la Ec. (1.13a) del Modelo 1 en donde aparece que la Reacción Normal del Iglú sobre el Niño Esquimal, depende explícitamente del ángulo “ $\theta$ ”). Este requisito permite que el trabajo realizado por las fuerzas se exprese como la diferencia entre los valores del Potencial en los estados inicial y final del sistema. En este problema, la Fuerza de Restricción es la Fuerza de Reacción Normal del Iglú sobre el Niño, por lo que siempre es perpendicular al movimiento restringido. Por lo tanto, la Fuerza de Restricción No Actúa sobre el Sistema y No Contribuye a un Cambio en la Energía Mecánica del Sistema. Por lo tanto, sí que podemos igualar la Energía Mecánica Inicial a la Energía Mecánica Final.

#### b) ¿En qué punto se separa del iglú el niño?

De la Fig. 16 es claro que en la Posición B el muchacho está en la “inminencia” de perder contacto con la Superficie Esférica (Iglú). Esto significa que la “Fuerza Normal  $N$ ” que el hielo ejerce sobre el niño es cero, ( $N = 0$ ). Por lo tanto, la “Fuerza Centrípeta” de su “Movimiento Semicircular” será la Componente del Peso en la Dirección Radial ( $P_r$ ). Es decir, aplicando la “2da. Ley de Newton” en el Punto B tenemos:

$$F_C = P_r \Rightarrow ma_c = m \frac{v_B^2}{R} = mg \sin \theta,$$

Usando la Ec. (6.1) tenemos que:

$$\frac{2gR}{R}(1 - \sin(\theta)) = g \sin \theta \Rightarrow 2 - 2 \sin(\theta) = \sin(\theta) \Rightarrow$$

$$2 = 3 \sin \theta, \quad \text{de la Fig.} \quad \sin \theta = \frac{h'}{R} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h' = \frac{2}{3}R} \dots (2.6)$$

La Altura de Desprendimiento  $h'$  Ec. (2.6), se corresponde con la Ec. (1.14a) del Modelo 1.

Para encontrar la Rapidez con la que el Niño sale del Iglú, pondremos la Ec. (2.6) en la Ec. (2.1) y encontramos:

$$v_B^2 = 2gR \left(1 - \frac{2}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B = \sqrt{\frac{2}{3}gR}} \dots (2.7)$$

La Rapidez del Muchacho Ec. (2.7) en el Punto B (Punto de Desprendimiento) es justamente la Ec. (1.16) del Modelo 1.

### 2.3. Modelo 3: Usando el Teorema Trabajo-Energía

Un niño Esquimal (Considerando como un Punto Material) está sentando en la parte más alta de un Iglú (Montículo de Hielo Semiesférico, Sin Fricción) de radio  $R$  tal y como se muestra en la figura 17. Recibe un empujón y se mueve horizontalmente con una velocidad inicial  $v_0$ . Resolver el problema utilizando el Teorema del Trabajo y la Energía,

a) Demostrar que el Niño Esquimal sale del Iglú en una Posición Angular cuyo Ángulo Crítico  $\beta_c$  (medido desde la parte superior del Iglú) dada por:

$$\beta_c = \cos^{-1} \left( \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \right)$$

b) ¿Cuál es la Rapidez Horizontal  $v_0$  Mínima que debe comunicársele al muchacho para que Resbale sobre el Iglú y lo abandone en el Punto B? (De Lande, O. L. y Pierrus, J. 2010).

a) **Hallar la Posición Angular Crítica  $\beta_c$  del Niño Esquimal cuando sale del Iglú.**

Las fuerzas que actúan sobre el niño esquimal son su Peso  $mg$  y la Reacción Normal  $N$  del Iglú (Semiesfera sin Rozamiento) sobre el niño, y que actúa radialmente hacia afuera, ver Fig. 17.

La Ecuación de Movimiento (Aplicando la Segunda Ley de Newton) tiene componentes Tangencial y Normal, las cuales son en el “Sistema de Coordenadas Intrínsecas”:

$$\sum F_t : \quad ma_t = m \frac{dv}{dt} = mg \sin \beta \dots (3.1a) \quad ; \quad \sum F_n : \quad ma_n = m \frac{v^2}{R} = mg \cos \beta - N \dots (3.1b)$$

El niño Esquimal pierde el contacto con el Iglú en el Punto B, justo cuando  $N = 0$ . De acuerdo con la Ec. (3.1b), esto ocurre en un ángulo “ $\beta_c$ ” y el niño lleva en ese momento la velocidad “ $v_B$ ” dada por:

$$m \frac{v^2}{R} = mg \cos \beta - N \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B^2 = Rg \cos \beta_l} \dots (3.2)$$

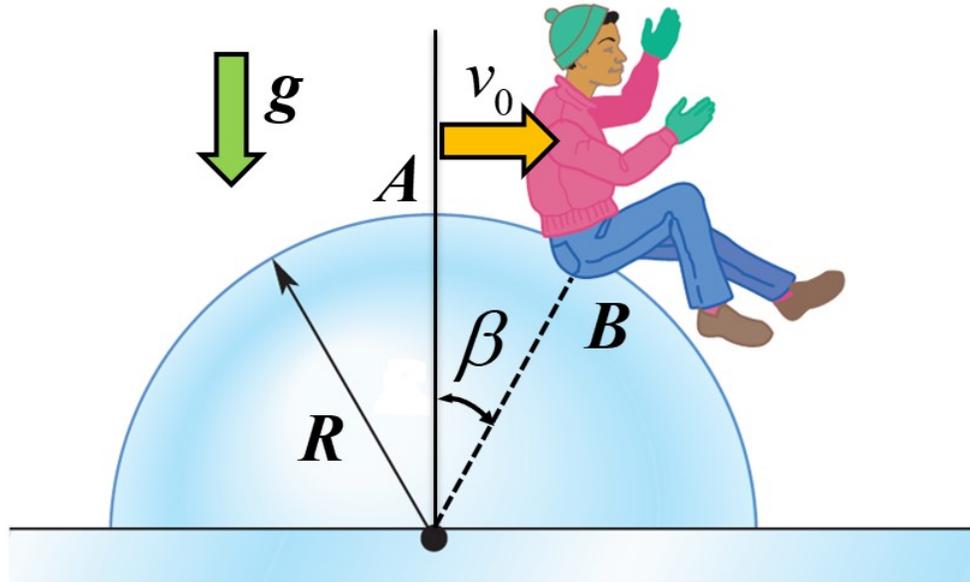


Figura 17: Representación esquemática del Modelo 3. Un Niño Esquimal considerándolo como una Partícula Material Puntual de masa “m”, es empujado con una Velocidad Inicial “ $v_0 \neq 0$ ” y Resbala sobre su Iglú (Montículo de Hielo Semiesférico de Radio “R”) desde el Punto A hasta llegar al Punto B, en donde se desprende del Iglú

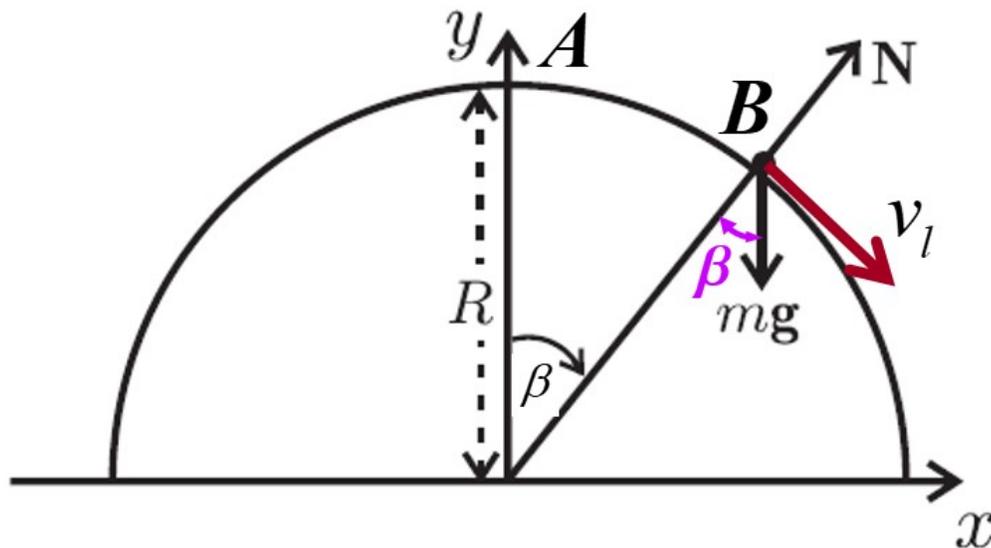


Figura 18: Diagrama del Niño Esquimal montando en la parte alta de su Iglú de Radio R (Punto A) del Modelo 3, donde se muestra el Peso del Niño, la Reacción Normal del Iglú sobre el niño, el Ángulo Complementario “ $\beta$ ”, y la Velocidad Tangencial que lleva el niño al resbalar por el Iglú. El chico resbala del Punto A y se desprende del Iglú en el Punto B.

Podemos calcular la Velocidad del Niño como Función del Ángulo  $v(\beta)$  aplicando directamente el Teorema Trabajo-Energía. Es decir, partiendo de la definición de Energía Cinética tenemos:

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2 \quad \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \quad \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \frac{1}{2}m \overbrace{\left( \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right)}^{\text{Commuta}}$$

$$= \frac{1}{2}m \left( 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right) = \overbrace{m\vec{a}}^{\vec{F}} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}} \dots (3.3a)$$

$$\text{Separando Variables} \quad \Rightarrow \quad dK = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r}} \dots (3.3b)$$

Que para Nuestro Caso será, usando la Parte Tangencial de la Fuerza, es decir, la Ec. (3.1a)

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}_t \cdot d\vec{r} = (mg \sin \beta) (Rd\beta) \dots (3.4)$$

En vista de que  $m$ ,  $g$  y  $R$  son constantes, la Ec. (3.4) la Podemos Integrar Inmediatamente, obteniendo:

$$\int_{v_0}^{v(\beta)} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int_0^\beta mgR \sin \beta' d\beta' \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^2(\beta) = v_0^2 + 2gR(1 - \cos \beta)} \dots (3.5)$$

**NOTA 3.1:** Salvo por la Velocidad Inicial (que es una constante), compare la Velocidad del Niño Esquimal Ec. (3.5) con la Ec. (1.41b) del Modelo 1 y con la Ec. (2.5a) del Modelo 2, obtenidos previamente.

De las Ecs. (3.2) y (3.5) hallamos que:

$$Rg \cos \beta_c = v_0^2 + 2gR(1 - \cos \beta_c) \quad \Rightarrow \quad Rg(\cos \beta_c + 2 \cos \beta_c) = v_0^2 + 2gR \quad \Rightarrow$$

$$3 \cos \beta_c = \frac{v_0^2}{Rg} + \frac{2gR}{Rg} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta_c = \cos^{-1} \left( \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \right)} \dots (3.6)$$

que es justo, lo que nos pedían demostrar, y que corresponde al resultado Ec. (1.43) del Modelo 1.

**NOTA 3.2:** Si en la Ec. (3.6) hacemos que la Velocidad Inicial sea Cero ( $v_0 = 0$ ), entonces el Ángulo Crítico  $\beta_c$  es el que encontramos en la Ec. (1.14c) del Modelo 1. Comentarios sobre la Solución obtenida:

- 1) El Ángulo Crítico  $\beta_c$  obtenido en la Ec. (3.6), depende de  $g$ ,  $R$  y  $v_0$ , pero NO Depende de la masa  $m$  del Niño Esquimal.
- 2) De la gráfica de la Ec. (3.6), Fig. 19 que se muestra al lado, notemos que cuando  $v_0 \rightarrow 0$ , entonces  $\beta_c \rightarrow \cos^{-1}(2/3) \approx 48.2^\circ$  (Ángulo Crítico encontrado previamente en los Modelos 1 y 2), el cual es Independientemente de  $g$  y  $R$ . Ver Modelo 1.

**NOTA 3.3:** Además, cuando  $v_0 = \sqrt{gR}$  tenemos que  $\beta_c = \cos^{-1}(1) = 0$ . Es decir, el Niño Esquimal Sale Disparado de su Iglú Desde el Punto de Partida A. ¿Cómo es Esto Posible? (Para entender esto, Ver el Inciso b) de este Modelo 3).

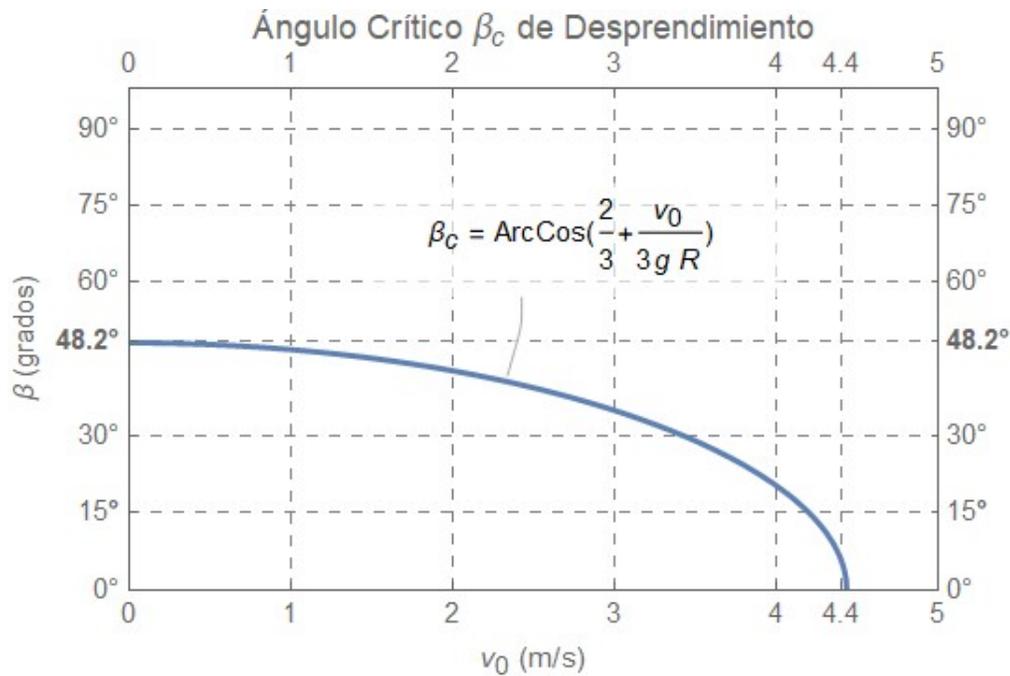


Figura 19: Diagrama de la Ec. (3.6) del Ángulo Complementario “ $\beta$ ” vs. la Velocidad Inicial “ $v_0$ ” del Niño Esquimal montando en su Iglú de Radio  $R$ , Modelo 3

b) ¿Cuál es la Rapidez Horizontal  $v_0$  Mínima que debe comunicársele al muchacho para que Abandone el Higlú Sin Resbalar por su Superficie, cayendo por acción de la gravedad  $g$ ? (Resnick, R. Halliday, D. & Krane, K., 1987).

La Posición del Muchacho en términos de las Ecuaciones Cinemáticas es:

$$x = v_{0x}t ; y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2, \text{ en donde, } y_0 = R ; v_{0y} = 0 ; v_{0x} \neq 0 ; a_y = -g$$

Entonces:

$$x = v_0t \dots (3.7a) ; y = R - \frac{1}{2}gt^2 \dots (3.7b),$$

de la Ec. (3.7a) despejamos el tiempo “ $t$ ” y lo sustituimos en la Ec. (3.7b),

$$y = R - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \dots (3.8).$$

Por otro lado, la Ecuación de un Circulo (Iglú) centrado en  $C(0,0)$  es:  $x^2 + y^2 = R^2$ , el cual podemos escribir como:

$$x^2 = R^2 - y^2 = (R - y)(R + y) \dots (3.9).$$

Por otro lado, de la Ec. (3.8) despejamos  $v_0$ ,

$$\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = R - y \Rightarrow \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{2(R - y)}{g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{g x^2}{2(R - y)}} \dots (3.10)$$

Sustituyendo la Ec. (3.9) en la Ec. (3.10) tenemos:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g(R-y)(R+y)}{2(R-y)}} = \sqrt{\frac{g}{2}(R+y)}, \text{ pero } y = R, \text{ entonces :}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2}(2R)} \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{gR}} \dots (3.11)$$

**NOTA 3.4:** Con esta Velocidad Inicial  $v_0$ , el Muchacho Sale Disparado del Iglú Sin Resbalar por él.

**NOTA 3.5:** Para un Iglú de un Radio de  $R = 2$  m., y con la Aceleración de la Gravedad Terrestre de  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>, tenemos que  $v_{0,c} \approx 4.4$  m/s<sup>2</sup>.

¿Cuál será la velocidad del niño Esquimal en el Punto B de Desprendimiento?

Para responder a la pregunta, sabemos que el niño Esquimal pierde el contacto con el Iglú en el Punto B (ver la Fig 3.2), justo cuando  $N=0$ . De acuerdo con la Ec. (3.1b), esto ocurre en un Ángulo  $\beta_c$  y el niño lleva en ese momento la velocidad  $v_B$  dada por:

$$m \frac{v^2}{R} = mg \cos \beta - N^0 \Rightarrow \boxed{v_B^2 = Rg \cos \beta_c} \dots (3.12)$$

**NOTA 3.6:** La Ec. (3.12), corresponde a la Ec. (1.32) del Modelo 1.

Poniendo el valor del Ángulo Crítico Ec. (3.6) en la expresión de la Velocidad dada por la Ec. (3.12), tendremos:

$$v_B^2 = Rg \cos \left[ \cos^{-1} \left( \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \right) \right] = \left( \frac{2}{3}gR + \frac{v_0^2}{3} \right) \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{\frac{1}{3}(v_0^2 + 2gR)}} \dots (3.13)$$

La expresión Ec. (3.13) es la “Velocidad de Desprendiendo del Muchacho” en el Punto B de la Fig. 18, justo cuando la “Reacción Normal del Iglú” desaparece ( $N = 0$ ), claramente recuperamos el “Caso Sin Velocidad Inicial” Ec. (1.16) del Modelo 1, cuando la “Velocidad Inicia es Cero” ( $v_0 = 0$ ).

**NOTA 3.7:** La expresión (3.13) corresponde a la Ec. (1.44) del Modelo 1.

**NOTA 3.8:** Para un Radio del Iglú de  $R = 2$  m, una Velocidad Inicial de  $v_0 = 4$  m/s (Recodemos la Ec. (1.12b)), para que el muchacho resbale por el Iglú y no salga disparado, la Velocidad Inicial deberá de ser menor que  $v_0 < \sqrt{gR} \approx 4.4$  m/s), y una Aceleración de la Gravedad Terrestre de  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>, tendremos que bajo estas condiciones, la “Velocidad de Desprendimiento del Muchacho Esquimal” en el Punto B de la Fig.19 es de  $v_B = \sqrt{1/3(v_0^2 + 2gR)} \approx 4.3$  m/s , y esto ocurre en el "Ángulo Crítico"  $\beta_c = \cos^{-1}(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}) \approx 20.2$ , dada por la Ec. (3.6).

#### 2.4. Modelo 4: Usando Dinámica Traslacional con Fricción Cinética (Seca Coulombica).

Un niño Esquimal (considerando al niño como un punto material de masa “m”) está sentando en la parte más alta de un Iglú (montículo de hielo semiesférico) de radio “R” y rugoso, es decir, existe Fricción Cinética entre el Niño y el hielo del Iglú ( $f_k = \mu_k N$ ). Recibe un pequeñísimo empujón ( $v_0 \neq 0$ ) y comienza a resbalar hacia abajo (Ver Fig. 20). a) ¿En qué punto se separa del iglú el niño?, b) ¿Cuál es la rapidez del niño en dicho punto? Comparar los resultados obtenidos cuando  $\mu_k \rightarrow 0$  con el Modelo 1 (De Lande, O. L. y Pierrus, J. 2010).

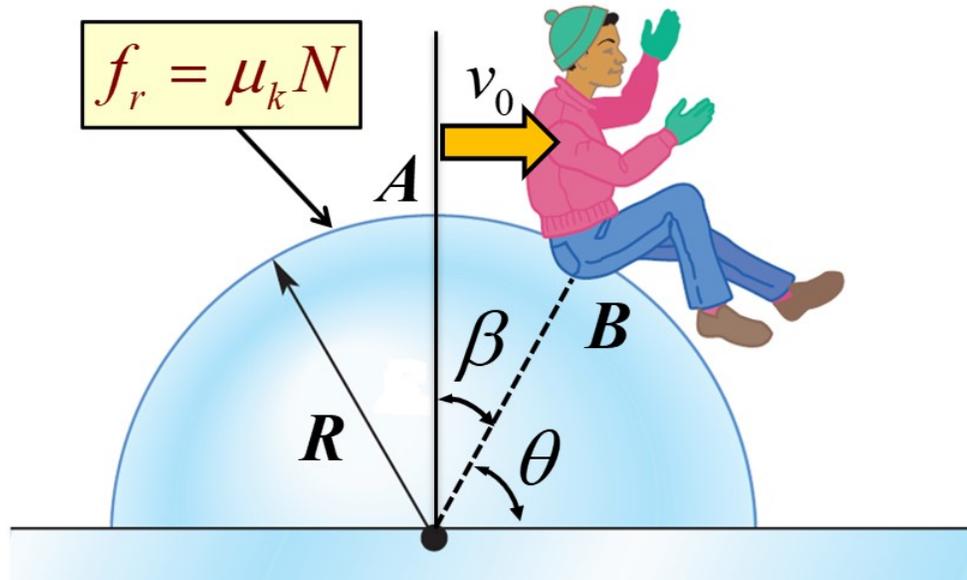


Figura 20: Representación esquemática del Modelo 4. Un Niño Esquimal considerándolo como una Partícula Material Puntual de masa “ $m$ ”, es empujado con una Velocidad Inicial “ $v_0 \neq 0$ ” y resbala sobre su Iglú (Montículo de Hielo Semiesférico de Radio “ $R$ ”) donde existe Fricción Cinética ( $f_k = \mu_k N$ ).

Observando la Fig. 21, las Fuerzas que actúan sobre el niño Esquimal son: Su Peso “ $P$ ”, la Reacción Normal del Montículo Semiesférico sobre el niño “ $N$ ”, y la Fuerza de Rozamiento entre el niño y el Iglú “ $F_r$ ”.

Aplicando la Segunda Ley de Newton en Coordenadas Polares, y tomando en cuenta que en el Iglú  $R = cte$ .

$$\vec{a} = \vec{a}_{Radial} + \vec{a}_{Tangencial} = R\dot{\beta}^2 (-\hat{u}_r) + R\ddot{\beta}\hat{u}_\theta \dots (4.1)$$

A continuación, escribimos las Componentes de la Fuerza en su Forma Escalar para la Parte Radial y Tangencial, es decir: La Componente Radial:

$$\sum_{Fuerzas\ Radiales} F_r = ma_{radial} \Rightarrow \boxed{mR\dot{\beta}^2 = mg \cos \beta - N} \dots (4.2a)$$

La Componente Tangencial:

$$\sum_{Fuerzas\ Tangenciales} F_t = ma_{tangencial} \Rightarrow \boxed{mR\ddot{\beta} = mg \sin \beta - f_r} \dots (4.2b)$$

En donde la Condición Complementaria (Ley de Coulomb) para la Fricción Cinética es:

$$f_r = \mu_k N \dots (4.3)$$

Poniendo la Ec. (4.3) en la Ec. (4.2b) tenemos:

$$\boxed{mR\ddot{\beta} = mg \sin \beta - \mu_k N} \dots (4.2c)$$

De la Ec. (4.2a), encontramos que:

$$\boxed{N(\beta) = mg \cos \beta - mR\dot{\beta}^2} \dots (4.4)$$

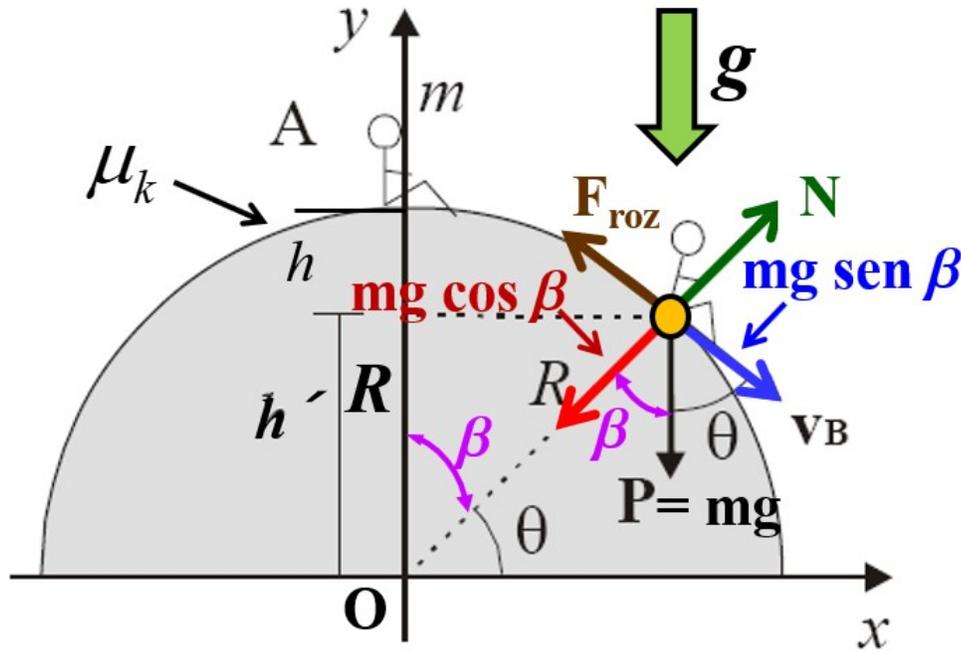


Figura 21: Diagrama del Niño Esquimal montando en la parte alta de su Iglú (Punto A) del Modelo 4, donde se muestra el Peso del Niño “P” y sus “Componentes Cartesianas Polares” referidas al Ángulo Complementario “β”, la Fricción Seca entre el niño y el Iglú “F<sub>r</sub>”, la Reacción Normal del Iglú sobre el niño “N”.

Poniendo la Ec. (4.4) en la Ec. (4.2c), hallamos la Ecuación de Movimiento del Muchacho Esquimal:

$$mR\ddot{\beta} = mg \sin \beta - \mu_k (mg \cos \beta - mR\dot{\beta}^2) \Rightarrow \boxed{R\ddot{\beta} - \mu_k R\dot{\beta}^2 + g[\mu_k \cos \beta - \sin \beta] = 0} \dots (4.5a)$$

**NOTA 4.1:** Cuando Eliminamos la Fricción ( $\mu_k \rightarrow 0$ ), la Ec. (4.5a) se transforma en la Ecuación de Movimiento del Niño Esquimal, en ausencia de Fricción, Ec. (1.38) del Modelo 1, es decir:

$$\boxed{R\ddot{\beta} - g \sin \beta = 0} \dots (4.5b)$$

Al integrar esta ecuación conocemos la Velocidad del Muchacho, tal y como ya se ha hecho antes, en el Modelo 1.

¿Es posible integrar la Ec. (4.5a) del Problema?

La respuesta es afirmativa y vamos a demostrarlo. Para la Ecuación Diferencial (4.5a) hagamos lo siguiente:

$$\ddot{\beta} = \frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\beta}{dt} \right) = \frac{d\dot{\beta}}{dt} \underset{=}{\text{Regla de la Cadena}} \frac{d\dot{\beta}}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} \Rightarrow \boxed{\ddot{\beta} = \dot{\beta} \frac{d\dot{\beta}}{d\beta}} \dots (4.6a)$$

$$\text{Separando Variables} \Rightarrow \boxed{\ddot{\beta} d\beta = \dot{\beta} d\dot{\beta}} \dots (4.6b)$$

Poniendo la Ec. (4.6a), en la Ec. (4.5a), y la Ecuación Diferencial se transforma en:

$$\boxed{\dot{\beta} \frac{d\dot{\beta}}{d\beta} - \mu_k \dot{\beta}^2 = \frac{g}{R} [\sin \beta - \mu_k \cos \beta]} \dots (4.5c)$$

Por otro lado, sabemos que en general  $v = \omega r$  y que en nuestro caso es:

$$v = \dot{\beta}R \dots (4.7a)$$

O bien, de la Ec. (4.7a):

$$\dot{\beta} = \frac{v}{R} \dots (4.7b) \Rightarrow \dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{R^2} \dots (4.7c)$$

Usando las Ecs. (4.7) en el Primer Sumando del Primer Miembro de la Ec. (4.5c), obtenemos que:

$$\ddot{\beta} = \dot{\beta} \frac{d\dot{\beta}}{d\beta} = \left(\frac{v}{R}\right) \frac{d}{d\beta} \left(\frac{v}{R}\right) = \frac{1}{R^2} \left[v \frac{dv}{d\beta}\right], \text{ PERO } \left[v \frac{dv}{d\beta}\right] = \frac{1}{2} \frac{d}{d\beta} (v^2) = \frac{1}{2} \left(2v \frac{dv}{d\beta}\right)$$

Por tanto, la Ecuación anterior nos quedará como:

$$\ddot{\beta} = \dot{\beta} \frac{d\dot{\beta}}{d\beta} = \left(\frac{v}{R}\right) \frac{d}{d\beta} \left(\frac{v}{R}\right) = \frac{1}{R^2} \left[v \frac{dv}{d\beta}\right] = \frac{1}{2R^2} \frac{dv^2(\beta)}{d\beta} \dots (4.7d)$$

Por tanto, poniendo los resultados dados por las Ecs. (4.7) en la Ec. (4.5c), finalmente tendremos que:

$$\frac{1}{2R^2} \frac{dv^2(\beta)}{d\beta} - \mu_k \left(\frac{v^2(\beta)}{R^2}\right) = \frac{g}{R} [\sin \beta - \mu_k \cos \beta] \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dv^2(\beta)}{d\beta} - 2\mu_k v^2(\beta) = 2gR (\sin \beta - \mu_k \cos \beta)} \dots (4.8)$$

Notemos que la Ec. (4.8) representa una Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden en la Rapidez al Cuadrado  $v^2(\beta)$ , y es No Homogénea.

Para resolver la Ec. (4.8) Multiplicamos en Ambos Lados de la Ecuación Diferencial por el Factor Integrante  $e^{-2\mu_k\beta}$  para obtener una Diferencial Exacta, es decir:

$$e^{-2\mu_k\beta} \left\{ \frac{dv^2(\beta)}{d\beta} - 2\mu_k v^2(\beta) \right\} = \overbrace{e^{-2\mu_k\beta} \frac{dv^2(\beta)}{d\beta} - 2\mu_k v^2(\beta) e^{-2\mu_k\beta}}^{\text{Diferencial Exacta}} = 2gR e^{-2\mu_k\beta} (\sin \beta - \mu_k \cos \beta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{d\beta} \{e^{-2\mu_k\beta} v^2(\beta)\} = 2gR e^{-2\mu_k\beta} (\sin \beta - \mu_k \cos \beta)} \dots (4.9a)$$

Separando Variables e Integrando:

$$\int_0^\beta d \left( e^{-2\mu_k\beta'} v^2(\beta') \right) = \int_0^\beta 2gR e^{-2\mu_k\beta'} (\sin \beta' - \mu_k \cos \beta') d\beta' \dots (4.9b)$$

$$e^{-2\mu_k\beta} v^2(\beta) - v^2(\beta = 0) = 2gR \overbrace{\int_0^\beta e^{-2\mu_k\beta'} \sin \beta' d\beta'}^{I_1} - 2\mu_k gR \overbrace{\int_0^\beta e^{-2\mu_k\beta'} \cos \beta' d\beta'}^{I_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{-2\mu_k\beta} v^2(\beta) - v_0^2 = 2gRI_1 - 2\mu_k gRI_2} \dots (4.9c)$$

El problema se ha reducido a integrar la Ec. (4.9c), para ello usaremos los resultados (1.460) y (1.461), del libro de la Serie Schaum (Spiegel, M. R, & Abellanas, L., 1988, p. 242).

$$\boxed{1.460} \quad \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

$$\boxed{1.461} \quad \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

Que para nuestro caso hacemos que las constantes valgan:

$$a \rightarrow -2\mu_k \dots (4.10a) \quad ; \quad b \rightarrow 1 \dots (4.10b) \quad ; \quad x \rightarrow \beta \dots (4.10c)$$

Usando el resultado (1.460), con las adecuaciones Ec.(4.10) tendremos que la Integral  $I_1$  se convierte en:

$$I_1 \equiv \int_0^\beta e^{-2\mu_k \beta'} \sin \beta' d\beta' \stackrel{\boxed{1.460}}{=} \left\{ \frac{e^{-2\mu_k \beta'}}{(-2\mu_k)^2 + (1)^2} (-2\mu_k \sin \beta' - \cos \beta') \right\} \Big|_0^\beta$$

$$I_1 = \left\{ \frac{-e^{-2\mu_k \beta}}{4\mu_k^2 + 1} (2\mu_k \sin \beta + \cos \beta) + \frac{1}{4\mu_k^2 + 1} (1) \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{4\mu_k^2 + 1} \{1 - e^{-2\mu_k \beta} (2\mu_k \sin \beta + \cos \beta)\}} \dots (4.11a)$$

Usando ahora el resultado (1.461), con las adecuaciones Ec.(4.10) tendremos que la Integral  $I_2$  se convierte en

$$I_2 \equiv \int_0^\beta e^{-2\mu_k \beta'} \cos \beta' d\beta' \stackrel{\boxed{1.461}}{=} \left\{ \frac{e^{-2\mu_k \beta'}}{(-2\mu_k)^2 + (1)^2} (-2\mu_k \cos \beta' + \sin \beta') \right\} \Big|_0^\beta$$

$$I_2 = \left\{ \frac{e^{-2\mu_k \beta}}{4\mu_k^2 + 1} (-2\mu_k \cos \beta + \sin \beta) - \frac{1}{4\mu_k^2 + 1} (-2\mu_k) \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{I_2 = \frac{1}{4\mu_k^2 + 1} \{2\mu_k - e^{-2\mu_k \beta} (\sin \beta - 2\mu_k \cos \beta)\}} \dots (4.11b)$$

Poniendo los resultados (4.11a) y (4.11b) en la Ec. (4.9c), podremos hallar la Velocidad del Muchacho que Resbala sobre el Iglú con Fricción, y como Función del Ángulo, es decir:

$$e^{-2\mu_k \beta} v^2(\beta) - v_0^2 = \frac{2gR}{4\mu_k^2 + 1} \{1 - e^{-2\mu_k \beta} (2\mu_k \sin \beta + \cos \beta)\}$$

$$- \frac{2\mu_k gR}{4\mu_k^2 + 1} \{2\mu_k - e^{-2\mu_k \beta} (\sin \beta - 2\mu_k \cos \beta)\}$$

Desarrollando y Simplificando tenemos:

$$- e^{2\mu_k \beta} \frac{2\mu_k gR}{4\mu_k^2 + 1} \{2\mu_k - e^{-2\mu_k \beta} (\sin \beta - 2\mu_k \cos \beta)\}$$

$$e^{2\mu_k \beta} e^{-2\mu_k \beta} v^2(\beta) = v_0^2 e^{2\mu_k \beta} + \frac{2gR e^{2\mu_k \beta}}{4\mu_k^2 + 1} - 2\mu_k \frac{2\mu_k gR e^{2\mu_k \beta}}{4\mu_k^2 + 1}$$

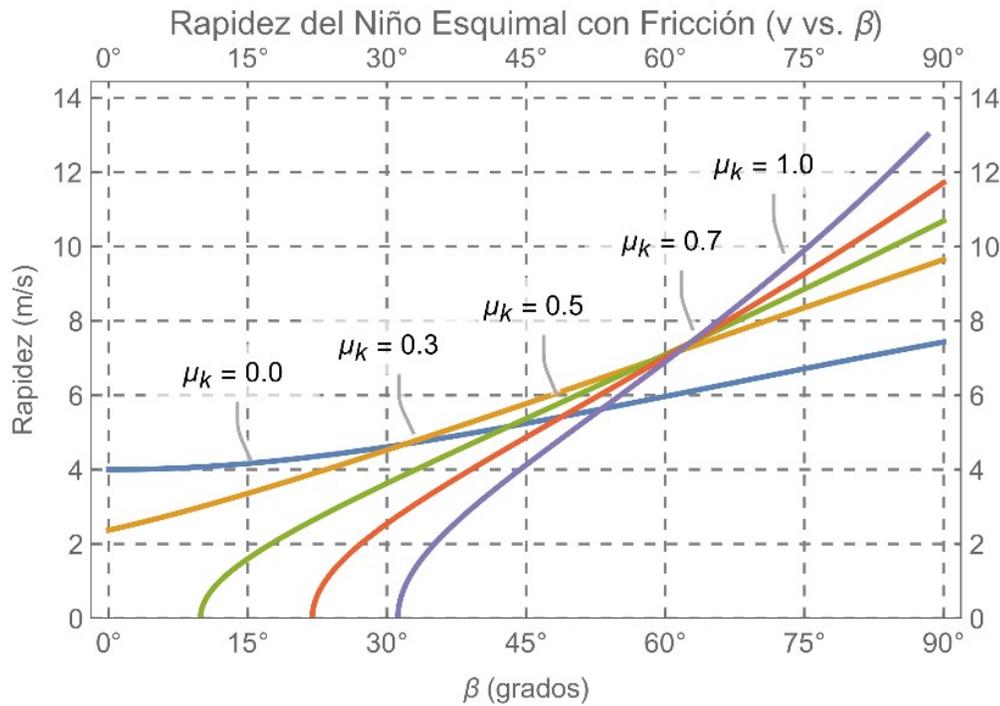


Figura 22: Gráfica de  $v$  vs.  $\beta$ , del Niño Esquimal con Velocidad Inicial  $v_0 = 4$  (m/s) y Radio del Iglú de  $R = 2$  m, y diferentes valores del Coeficiente Cinético de Rozamiento ( $0 \leq \mu_k \leq 1$ ) Ec. (4.12).

$$-\frac{2gR}{4\mu_k^2 + 1} e^{2\mu_k\beta} e^{-2\mu_k\beta} (2\mu_k \sin \beta + \cos \beta) + \frac{2\mu_k gR}{4\mu_k^2 + 1} e^{2\mu_k\beta} e^{-2\mu_k\beta} (\sin \beta - 2\mu_k \cos \beta)$$

$$v^2(\beta) = v_0^2 e^{2\mu_k\beta} + 2gR \left( \frac{1 - 2\mu_k^2}{1 + 4\mu_k^2} \right) e^{2\mu_k\beta} - \frac{2gR}{1 + 4\mu_k^2} (2\mu_k^2 \cos \beta + \mu_k \sin \beta + \cos \beta)$$

$$v^2(\beta) = \left[ v_0^2 + 2gR \left( \frac{1 - 2\mu_k^2}{1 + 4\mu_k^2} \right) \right] e^{2\mu_k\beta} - \frac{2gR}{1 + 4\mu_k^2} (\mu_k \sin \beta + \cos \beta [1 + 2\mu_k^2]) \dots (4.12)$$

Si hacemos que la Fricción desaparezca ( $\mu_k \rightarrow 0$ ) en la Ec. (4.12), obtenemos:

$$v^2(\beta) = v_0 + 2gR(1 - \cos \beta) \dots (4.13a)$$

El resultado (4.13a) corresponde a la Ec. (1.41b) del Modelo 1 o a la Ec. (3.5) del Modelo 3 construidos mediante argumentos de Dinámica Traslacional y el Teorema Trabajo-Energía, respectivamente. Y si además imponemos que la Velocidad Inicial sea Nula ( $v_0 = 0$ ) obtenemos:

$$v^2(\beta) = 2gR(1 - \cos \beta) \dots (4.13b)$$

que corresponde al resultado (1.12c) del Modelo 1. Por otro lado, ¿qué sucede con la “Fuerza de Reacción Normal”? Poniendo el resultado (4.12) en la Ec. (4.4) y usando las Ecs. (4.7c) tenemos:

$$N(\beta) = mg \cos \beta - mR\dot{\beta}^2 \stackrel{(4.7c)}{=} mg \cos \beta - mR \left( \frac{v^2(\beta)}{R^2} \right) \stackrel{(4.12)}{\Rightarrow}$$

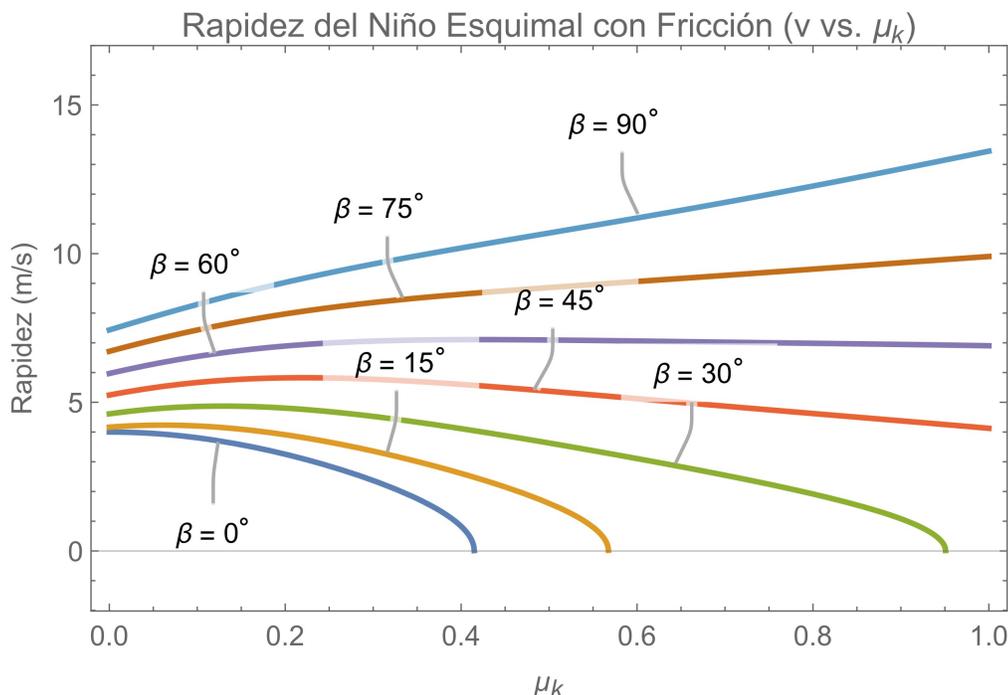


Figura 23: Gráfica de  $v$  vs.  $\mu_k$ , del Niño Esquimal con Velocidad Inicial  $v_0 = 4$  (m/s) y Radio del Iglú de  $R = 2$  m, y diferentes valores del Coeficiente Cinético de Rozamiento ( $0 \leq \mu_k \leq 1$ ) Ec. (4.12).

$$N(\beta) = mg \cos \beta$$

$$-\frac{m}{R} \left\{ \left[ v_0^2 + 2gR \left( \frac{1 - 2\mu_k^2}{1 + 4\mu_k^2} \right) \right] e^{2\mu_k \beta} - \frac{2gR}{1 + 4\mu_k^2} (\mu_k \sin \beta + \cos \beta [1 + 12\mu_k^2]) \right\} \dots (4.14a)$$

Notemos que cuando  $\mu_k \rightarrow 0$  la Ec. (4.14a) nos queda como:

$$N(\beta) = mg \cos \beta - \frac{m}{R} \left\{ v_0^2 + 2gR \left( \frac{1}{1} \right) 1 - \frac{2gR}{1} (\cos \beta) \right\} \Rightarrow$$

$$N(\beta) = mg (3 \cos \beta - 2) - \frac{m}{R} v_0^2 \dots (4.14b)$$

Si la “Velocidad Inicial del Niño Esquimal” es nula ( $v_0 = 0$ ), recuperamos el resultado (1.33b) del Modelo 1.

$$N(\beta) = mg (3 \cos \beta - 2) \dots (4.14c)$$

Como ya se mostró antes en la Ec. (1.14c) del Modelo 1, la Ec (4.14c) muestra que la “Reacción Normal”  $N$  cambia de signo en el “ángulo Crítico”  $\beta_c = \cos^{-1}(2/3) \approx 48.2^\circ$ , en este límite. Ver la Fig. 9 del Modelo 1.

### 2.5. Modelo 5: Usando el Teorema Trabajo-Energía con Fricción Cinética (Seca Coulombica)

Un niño Esquimal (considerando al niño como un punto material) está sentando en la parte más alta de un Iglú (montículo de hielo semiesférico) de Radio  $R$ . Supongamos que el Iglú

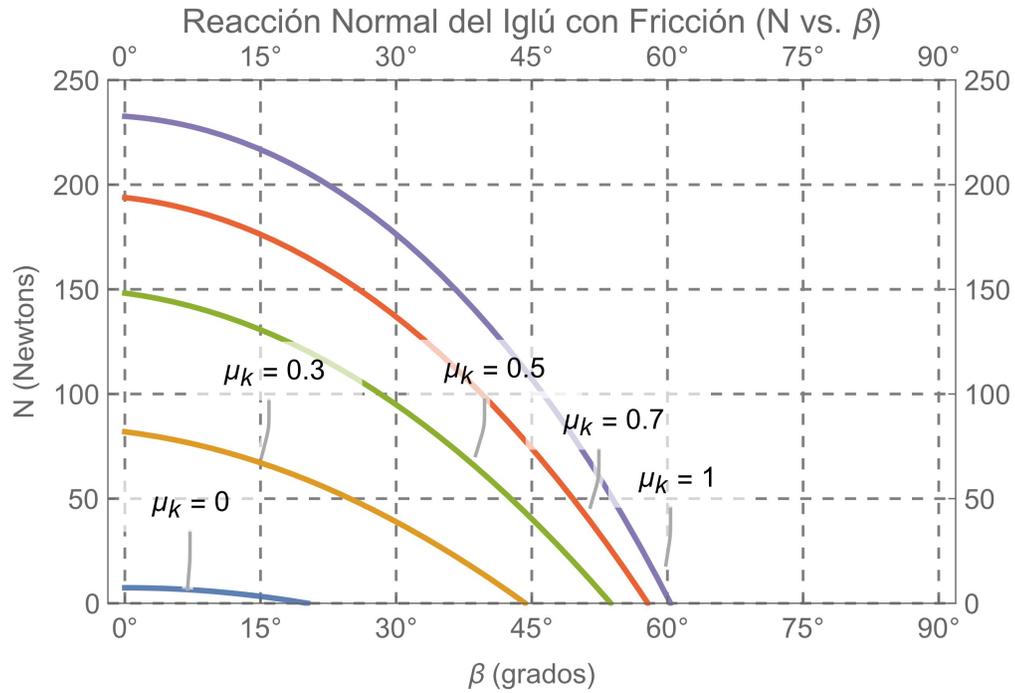


Figura 24: Gráfica de  $N$  vs.  $\beta$ , del Niño Esquimal con Velocidad Inicial  $v_0 = 4$  (m/s) y Radio del Iglú de  $R = 2$  m, y diferentes valores del Coeficiente Cinético de Rozamiento ( $0 \leq \mu_k \leq 1$ ) Ec. (4.14a).

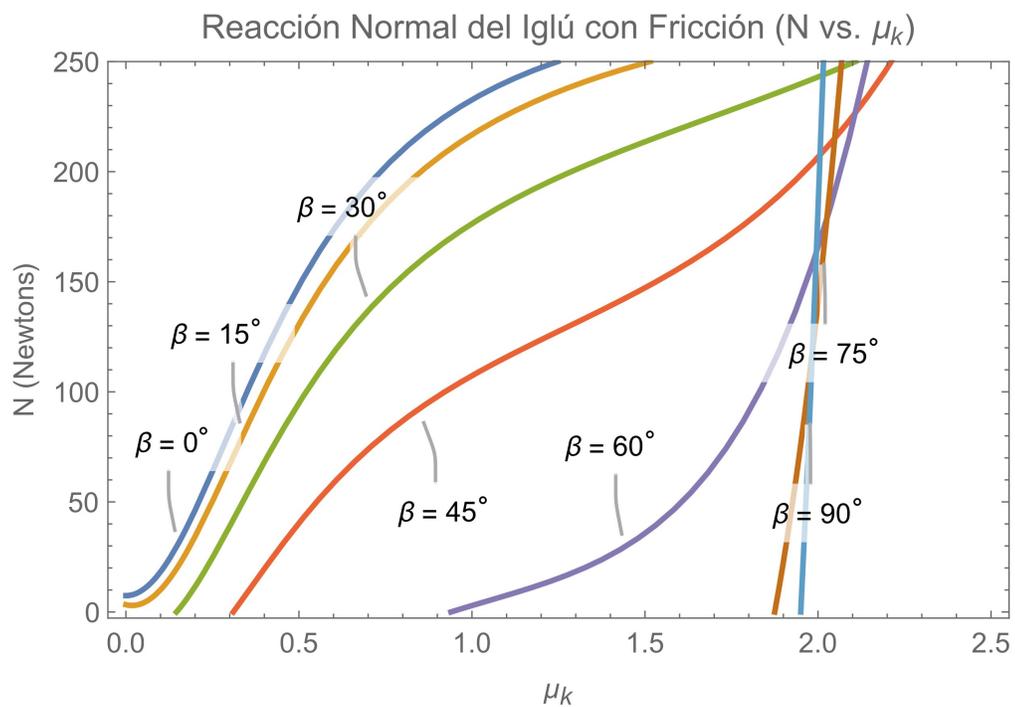


Figura 25: Gráfica de  $N$  vs.  $\mu_k$ , del Niño Esquimal con Velocidad Inicial  $v_0 = 4$  (m/s) y Radio del Iglú de  $R = 2$  m, y diferentes valores del ángulo Complementario ( $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ ) Ec. (4.14a). La Reacción Normal del Iglú sobre el Niño para valores  $\beta_c > 48.2^\circ$  en esta gráfica no tiene sentido físico.

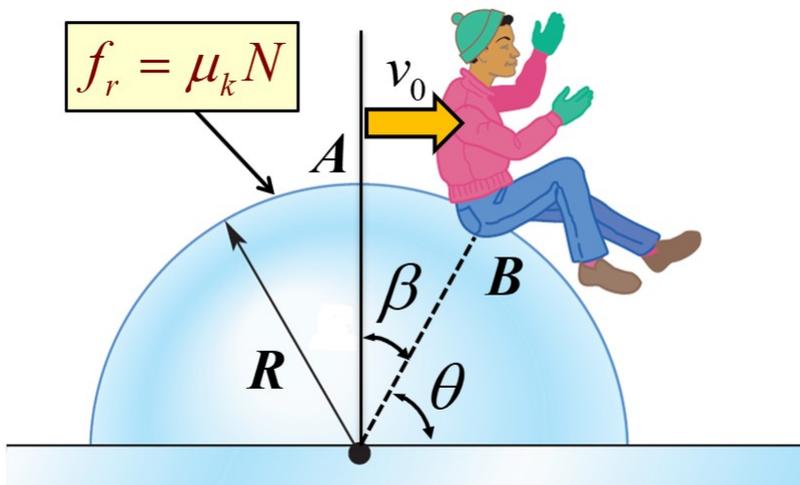


Figura 26: Representación esquemática del Modelo 5. Un Niño Esquimal considerándolo como una Partícula Material Puntual de masa “m”, es empujado con una Velocidad Inicial “v<sub>0</sub> ≠ 0” y resbala sobre su Iglú (Montículo de Hielo Semiesférico de Radio “R”) donde existe Fricción Cinética (f<sub>k</sub> = μ<sub>k</sub>N).

es Rugoso, es decir, existe entre el Niño Esquimal y el Iglú una Fuerza de Rozamiento del tipo Coulombico, es decir: f<sub>r</sub> = μ<sub>k</sub>N, donde μ<sub>k</sub> es el Coeficiente de Fricción Cinética. Para hacer los cálculos, utilice del Teorema del Trabajo y la Energía para hallar la Velocidad del Niño Esquimal, así como la Fuerza de Reacción Normal entre el Niño y el Montículo Esférico, mientras se desliza sobre su Iglú. ¿Se recuperan los casos conocidos cuando μ<sub>k</sub> → 0 del Modelo 3? (De Lande, O. L. y Pierrus, J. 2010), (Greiner, W., 1989).

La Ecuación de Movimiento (Aplicando la Segunda Ley de Newton) tiene dos componentes, una Tangencial y una Normal, las cuales son:

$$\sum_{\text{Niño}} F_t : ma_t = m \frac{dv}{dt} = mg \sin \beta - f_r \dots (5.1a); \sum_{\text{Niño}} F_n : ma_n = m \frac{v^2}{R} = mg \cos \beta - N \dots (5.1b)$$

Notamos inmediatamente que las Ecuaciones de Movimiento son similares a las Ecuaciones de Movimiento obtenidas en el Modelo 3, salvo por el hecho de que ahora aparece explícitamente la Fuerza de Rozamiento en la Ec. (5.1a), y esto hará una diferencia crucial.

Por tanto, de la Ec. (5.1b) la Reacción Normal del Iglú sobre el Niño Esquimal es:

$$N(\beta) = mg \cos \beta - m \frac{v^2}{R} \dots (5.2)$$

Podemos calcular ahora la Velocidad Tangencial del Niño como Función del ángulo v<sup>2</sup>(β)), derivando con respecto del tiempo, la Energía Cinética, i.e.

$$\begin{aligned} \boxed{K \equiv \frac{1}{2}mv^2} &\quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \frac{1}{2}m \overbrace{\left( \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right)}^{\text{Conmuta}} \\ &= \frac{1}{2}m \left( 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right) = \overbrace{m\vec{a} \cdot \vec{v}}^{\vec{F}_t} = \vec{F}_t \cdot \vec{v} = \vec{F}_t \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \overbrace{\left( \frac{dK}{dt} = \vec{F}_t \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right)}^{\text{Potencia Mecanica}} \dots (5.3a) \end{aligned}$$

$$\text{Separando Variables} \quad \Rightarrow \quad dK = \vec{F}_t \cdot d\vec{r} \Rightarrow \boxed{d \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) = \vec{F}_t \cdot d\vec{r}} \dots (5.3b)$$

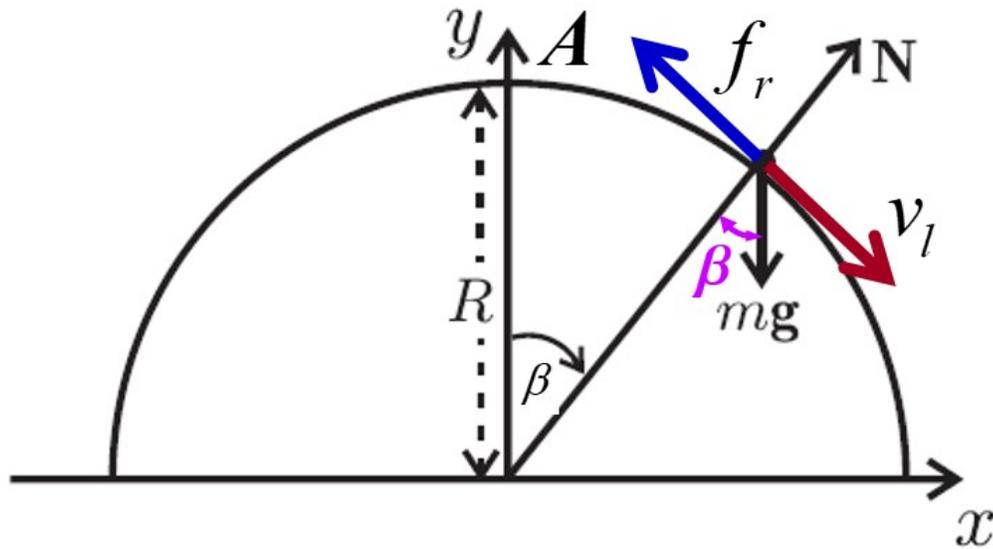


Figura 27: Diagrama del Niño Esquiador montando en la parte alta de su Iglú de Radio R para el Modelo 5, donde se muestra el Peso del Niño ( $m\vec{g}$ ), la Reacción Normal del Iglú (Radialmente Hacia Afuera) sobre el niño, el ángulo Complementario “ $\beta$ ”, la Velocidad Tangencial que lleva el niño al resbalar por el Iglú, y la Fricción Seca (Coulombica)  $\vec{F}_r$ , entre el Niño Esquiador y su Iglú y que actúa dirigida en la dirección en contra de la Velocidad del Niño.

Notamos inmediatamente que las Ecs. (5.3a) y (5.3b) son las mismas que obtuvimos antes en el Modelo 3. Salvo que ahora, la  $F_t$  es la Ec. (5.1a) que corresponde a la Parte Tangencial de la Fuerza, en donde aparece explícitamente la Fuerza de Rozamiento entre el Niño y el Iglú.

Usando la condición para la Fricción de Coulomb, así como la Ec. (5.2) para la Reacción Normal en la Ec. (5.3b), tendremos que:

$$d \left[ \frac{1}{2} m v^2 (\beta) \right] = \vec{F}_t \cdot d\vec{r} = (m g \sin \beta - f_r) \cdot d\vec{r} \quad f_r = \mu N \Rightarrow$$

$$d \left[ \frac{1}{2} m v^2 (\beta) \right] = (m g \sin \beta - \mu_k N) \cdot \overbrace{(R d\beta)}^{ds} \quad (5.2) \Rightarrow$$

$$\frac{d v^2 (\beta)}{d \beta} = \left( \frac{2R}{m} \right) \left( m g \sin \beta - \mu_k m g \cos \beta + \mu_k m \frac{v^2}{R} \right) \Rightarrow$$

$$\int \overbrace{d \left( \frac{1}{2} m v^2 \right)}^{\frac{1}{2} m d v^2} = \left( m g \sin \beta - \mu_k m g \cos \beta + \mu_k m \frac{v^2}{R} \right) (R d\beta) \Rightarrow$$

$$\frac{d v^2 (\beta)}{d \beta} - 2 \mu_k v^2 (\beta) = 2 g R (\sin \beta - \mu_k \cos \beta) \dots (5.4)$$

en donde la Ec. (5.4), representa una Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden en la Rapidez al Cuadrado  $v^2(\beta)$ , y No Homogénea. La Ec. (5.4) corresponde exactamente a la Ec. (4.8) del Modelo 4. Notamos también que si Desapareciera el Rozamiento ( $\mu_k \rightarrow 0$ ), entonces esta ecuación se transformaría en la Ec. (3.4) del Modelo 3, y que por Integración Directa podemos hallar  $v^2(\beta)$ , cosa que en el caso presente es evidente que no se puede hacer así. Para

resolver la Ec. (5.4) debemos proceder exactamente igual a como lo hicimos en el Modelo 4 (de la Ec. (4.9) en adelante, no lo repetiremos aquí e invitamos al lector a que lo haga) Las soluciones relevantes son como antes:

$$v^2(\beta) = \left[ v_0^2 + 2gR \left( \frac{1 - 2\mu_k^2}{1 + 4\mu_k^2} \right) \right] e^{2\mu_k\beta} - \frac{2gR}{1 + 4\mu_k^2} (\mu_k \sin \beta + \cos \beta [1 + 2\mu_k^2]) \dots (5.5)$$

La Ec. (5.5) es la Ec. (4.12) hallada en el Modelo 4. Recomendamos ver las Fig. 22 y 23, así como los diferentes valores límite, Ecs. (4.13a) y (4.13b). De igual manera se halla la Reacción Normal del Iglú sobre el Niño Esquimal

$$N(\beta) = mg \cos \beta$$

$$-\frac{m}{R} \left\{ \left[ v_0^2 + 2gR \left( \frac{1 - 2\mu_k^2}{1 + 4\mu_k^2} \right) \right] e^{2\mu_k\beta} - \frac{2gR}{1 + 4\mu_k^2} (\mu_k \sin \beta + \cos \beta [1 + 12\mu_k^2]) \right\} \dots (5.6)$$

La Ec. (5.6) es la Ec. (4.14a) hallada en el Modelo 4. Recomendamos ver las Fig. 24 y 25, así como los diferentes valores límite, Ecs. (4.14b) y (4.14c).

## 2.6. Modelo 6: Usando Dinámica Rotacional

Un niño Esquimal está sentando en la parte más alta de un Iglú (montículo de hielo esférico) de radio R como se muestra en la Fig. 28. Recibe un pequeñísimo empujón y comienza a resbalar hacia abajo por el hielo. Para resolver el problema use explícitamente argumentos de Dinámica Rotacional. Para los dos primeros incisos, ignore la fricción y considere al niño como un punto material a) ¿En qué punto se separa del iglú el niño?, b) ¿Cuál es la rapidez del niño en dicho punto?, c) ¿Cómo incluimos la fricción entre el iglú y el niño?, y con ello contestemos las preguntas a) y b) incluyendo la fricción (Resnick, R. Halliday, D. & Krane, K., 1987), (Young, H. D., Freedman R. A. & Ford, A. L., 2009).

### a) ¿En qué punto se separa del iglú el niño?

Una Forma Alternativa de resolver el Problema del Niño en el Iglú, es mediante argumentos de Dinámica Rotacional. Para ello debemos de considerar al niño como un punto material (partícula) masivo y describiremos el movimiento mediante el uso de las Coordenadas Polares, usando el ángulo Complementario “ $\beta$ ” y desde el Origen de Coordenadas “O” de la Fig. 29.

Aplicando la 2da. Ley de Newton Rotacional tendremos:

$$|\vec{\tau}_O| = I |\vec{\alpha}| \Rightarrow \tau_O = I\alpha = I\ddot{\beta} = I \frac{d^2\beta}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\tau_O = I\ddot{\beta}} \dots (6.1)$$

donde  $\vec{\tau}_O$  es el Momento de la Fuerza (también llamada Torca) que ejerce la Fuerza de Gravedad sobre el Niño Esquimal,  $I$  es su Momento de Inercia, medido desde el Centro de Sistema Coordinado “O” de la Fig. 29 y “ $\vec{\alpha}$ ” es la Aceleración Angular del Muchacho.

De la Definición de Torca y de la Fig. 29 tenemos que:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow |\vec{\tau}_O| = |\vec{r}| |\vec{F} \sin \beta| = R F_{\perp} = R (mg \sin \beta) \Rightarrow \boxed{\tau_O = mgR \sin \beta} \dots (6.2a)$$

Igualando las Ecs. (6.1) y (6.2a) tenemos:

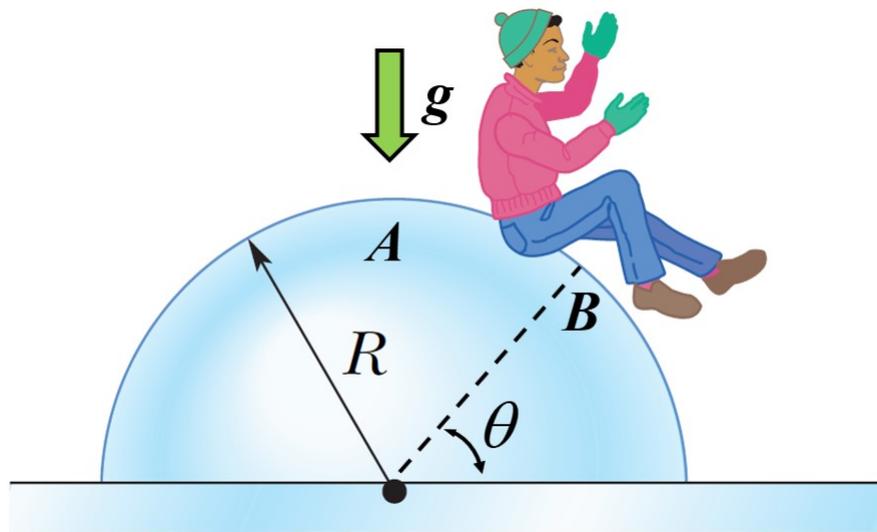


Figura 28: Representación esquemática del Modelo 6. Un Niño Esquimal considerándolo como una Partícula Material Puntual de masa “ $m$ ”, resbala sobre su Iglú (Montículo de Hielo Semiesférico de Radio “ $R$ ”) inicialmente se encuentra en reposo en el Punto A, resbala por el montículo hasta llegar al Punto B, en donde se desprende del Iglú.

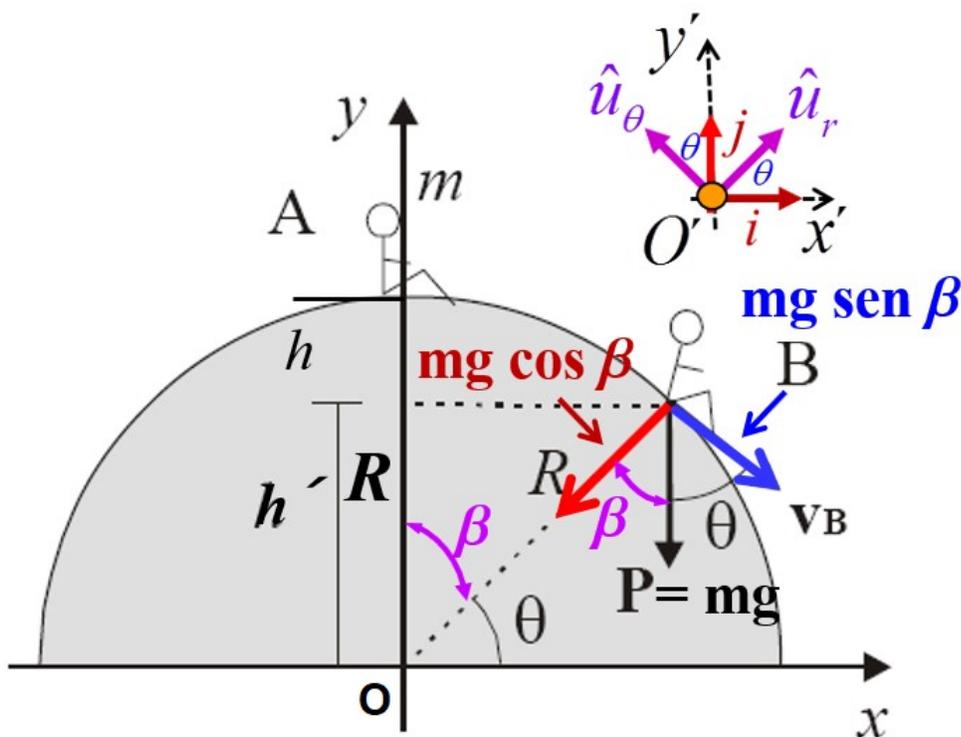


Figura 29: Diagrama del Niño Esquimal montando en la parte alta de su Iglú (Punto A) del Modelo 6, donde se muestra el Peso del Niño y sus componentes en el ángulo Complementario “ $\beta$ ”, la Reacción Normal del Iglú sobre el niño, los Vectores Unitarios Polares. El chico se desprende del Iglú en el Punto B.

$$I\ddot{\beta} = mgR \sin \beta \dots (3a) , \text{ en donde : } \boxed{I \equiv mR^2} \dots (6.4).$$

Sustituyendo la Ec. (6.4) en la Ec. (6.3a) llegamos a:

$$mR^2\ddot{\beta} = mgR \sin \beta \Rightarrow \boxed{\ddot{\beta} - \frac{g}{R} \sin \beta = 0} \dots (6.5a)$$

**NOTA 6.1:** La Ec. (6.5a) corresponde a la Ec. (1.10b) del Modelo 1 (recordar que aquí debemos cambiar el  $\cos(\theta)$  por el  $\sin(\beta)$ ) y también corresponde a la Ec. (1.39) del mismo Modelo 1 en Coordenadas Intrínsecas. Es también la Ec. (3.1a) del Modelo 3, así como la Ec. (4.2b) del Modelo 4 y la Ec. (5.1a) del Modelo 5, cuando hacemos que la Fuerza de Rozamiento Desaparezca ( $f_r = 0$ ).

Observamos que si multiplicamos por  $\dot{\beta}$  en ambos lados de la Ec. (6.5a), podemos construir una “Diferencial Exacta”, es decir:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}\ddot{\beta} - \frac{g}{R}\dot{\beta} \sin \beta = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 + \frac{g}{R} \cos \beta \right] = 0 \Rightarrow \\ \int d \left[ \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 + \frac{g}{R} \cos \beta \right] = 0 &\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\dot{\beta}^2 + \frac{g}{R} \cos \beta = c} \dots (6.6) \end{aligned}$$

Aplicando las “Condiciones Iniciales” a la Ec. (6.6). Es decir, cuando  $\beta = 0$ , entonces  $\dot{\beta} = \frac{v_0}{R}$ , por tanto, la constante “c”, quedará como:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_0}{R} \right)^2 + \frac{g}{R} \cos(0^\circ) = c \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{R^2} + \frac{g}{R}} \dots (6.7)$$

Poniendo la constante “c” Ec. (6.7) en la Ec. (6.6), la “Ecuación de Movimiento” nos quedará como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 + \frac{g}{R} \cos \beta = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{g}{R} &\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{g}{R} (1 - \cos \beta) \Rightarrow \\ \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{R} \left\{ \frac{v_0^2}{R} + 2g(1 - \cos \beta) \right\} &\Rightarrow \boxed{R\dot{\beta}^2 = \frac{v_0^2}{R} + 2g(1 - \cos \beta)} \dots (6.8a) \end{aligned}$$

Si en la Ec.(6.8a) hacemos que  $\dot{\beta} \rightarrow \frac{v}{R}$ , hallamos que:

$$R \left( \frac{v}{R} \right)^2 = \frac{v_0^2}{R} + 2g(1 - \cos \beta) \Rightarrow \boxed{v^2(\beta) = v_0^2 + 2gR(1 - \cos \beta)} \dots (6.8b)$$

La Ec. (6.8b) corresponde a la Ec. (3.5) del Modelo 3. Y si a esta Ec. (6.8b), hacemos que  $v_0 \rightarrow 0$ , entonces se convierte en:

$$\boxed{v^2(\beta) = 2gR(1 - \cos \beta)} \dots (6.8c)$$

que es la Ec. (1.12b) y (1.41b) del Modelo 1 y además es la Ec. (2.5a) del Modelo 2, obtenidos previamente.

Por otro lado, viendo la Fig. 29, notamos que la “Fuerza Centrípeta” que actúan sobre el “Muchacho” es:

$$F_c = ma_c \Rightarrow m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = m\dot{\beta}^2 R = mg \cos \beta - N \dots (6.9a)$$

Pero, el muchacho se separa del montículo “justo” en el momento en que “ $N = 0$ ”, de tal manera que la Ec. (6.9a) nos quedará finalmente como:

$$m\dot{\beta}^2 R = mg \cos \beta \Rightarrow \boxed{\dot{\beta}^2 R = g \cos \beta} \dots (6.9b) \quad \dot{\beta} \rightarrow \frac{v}{R} \Rightarrow \boxed{v^2(\beta) = Rg \cos \beta} \dots (6.9c)$$

Igualando las Ecs. (6.8b) y (6.9c) tenemos que:

$$v_0^2 + 2gR(1 - \cos \beta) = gR \cos \beta \Rightarrow v_0^2 + 2gR = gR \cos \beta + 2gR \cos \beta \Rightarrow$$

$$3gR \cos \beta = v_0^2 + 2gR \Rightarrow \cos \beta = \frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2gR}{3gR} \Rightarrow \boxed{\beta_c = \cos^{-1} \left( \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \right)} \dots (6.10)$$

**NOTA 6.2:** La Ec. (6.10), corresponde al ángulo Crítico de Desprendimiento encontrado en la la Ec (3.6) del Modelo 3. Si ahora a la Ec. (6.10) hacemos que la Velocidad Inicial sea Cero ( $v_0 = 0$ ), entonces el ángulo  $\beta_c$  es el que encontramos en la Ec. (1.14c) del Modelo 1 y es el que se puede obtener sin mayor dificultad del Modelo 2.

### b) ¿Cuál es la rapidez del niño en el Punto de Desprendimiento B?

Sabemos que  $v = \omega R = \dot{\beta} R$  y tomando el valor de  $\dot{\beta}$  de la Ec. (6.9b), por tanto, tenemos:

$$v(\beta) = \left( \sqrt{\frac{g}{R} \cos \beta} \right) R = \sqrt{\frac{g}{R} R^2 \cos \beta} \Rightarrow \boxed{v(\beta) = \sqrt{gR \cos \beta}} \dots (6.11a)$$

Ahora usaremos el valor del  $\cos(\beta)$  hallando en la Ec. (6.10), el cual representa el Punto B de Desprendimiento del Muchacho ( $h'$ ), tendremos:

$$v(\beta) = \sqrt{gR \left( \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \right)} \Rightarrow \boxed{v(\beta) = \sqrt{\frac{1}{3}v_0^2 + \frac{2}{3}gR}} \dots (6.11b)$$

**NOTA 6.3:** Claramente si en la Ec. (6.11b) la Velocidad Inicial es Nula ( $v_0 = 0$ ), entonces tenemos que la Velocidad del Muchacho en el Punto de Desprendimiento es:

$$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2}{3}gR}} \dots (6.11c)$$

que corresponde a la Ec. (1.16) del Modelo 1, y a la Ec. (2.7) del Modelo 2, previamente discutidos anteriormente.

### c) ¿Cómo incluimos la fricción entre el iglú y el niño?, y con ello contestemos las preguntas a) y b) incluyendo la fricción

De la Fig. 30, vemos que, si incluimos la “Fricción Cinética”, la “2da. Ley de Newton Rotacional” nos quedará como:

$$\boxed{\tau_O = mgR \sin \beta - Rf_{roz}} \dots (6.2b)$$

Claramente si la “Fricción Cinética” desaparece en la Ec. (6.2b), recuperamos la Ec. (6.2a), del caso “Sin Fricción”.

Usando las Ecs. (6.1) y (6.4) en la Ec. (6.2b) tenemos:

$$\boxed{I\ddot{\beta} = mR^2\ddot{\beta} = mgR \sin \beta - Rf_{roz}} \dots (6.12)$$

Sabemos que la “Fricción Cinética Coulombica” es igual a:

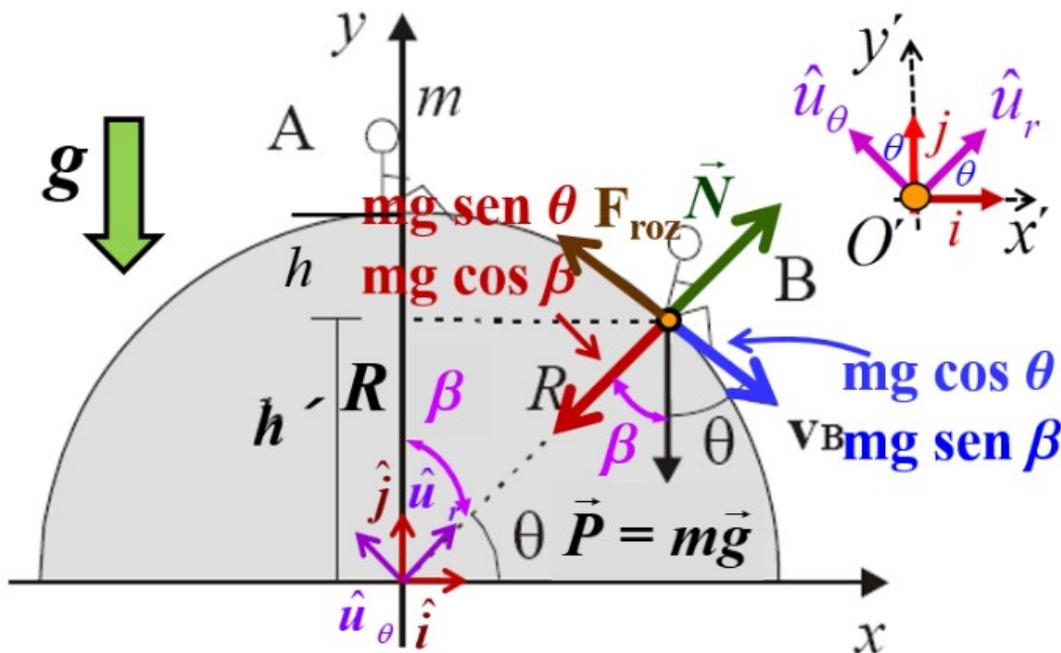


Figura 30: Diagrama del Niño Esquimal montando en la parte alta de su Iglú (Punto A) del Modelo 6, donde se muestra el Peso del Niño y sus componentes en el ángulo Complementario “ $\beta$ ”, la Reacción Normal del Iglú sobre el niño, los Vectores Unitarios Cartesianos y Polares, así como la Fuerza de Rozamiento “ $F_r$ ” entre el Niño y su Iglú.

$$f_{roz} = \mu_k N \dots (6.13)$$

Poniendo la Ec. (6.13) en la Ec. (6.12) hallamos:

$$mR\ddot{\beta} = mg \sin \beta - \mu_k N \dots (6.5b)$$

Si la “Fricción Cinética” es nula en la Ec. (6.5b), recuperamos la Ec. (6.5a), del caso “Sin Fricción”. Por otro lado, vemos inmediatamente que “No Podemos Realizar el Truco” de multiplicar por  $\beta$  toda la Ec. (6.5b) para poder hallar una “Integral Primera o Cuadratura” (ver la discusión sobre como “integrar” la Ec. (1.10b) del Modelo 1).

Como ya hemos dicho antes, la “Fuerza Centrípeta” que siente el muchacho está dada por la Ec. (6.9a), es decir:

$$m\dot{\beta}^2 R = mg \cos \beta - N \dots (6.9a)$$

De la Ec. (6.9a) despejamos la “Reacción Normal del Iglú”:

$$N(\beta) = mg \cos \beta - m\dot{\beta}^2 R \dots (6.14)$$

**NOTA 6.4:** La “Reacción Normal del Iglú” Ec. (6.14), fue hallada previamente en la Ec. (4.4) del Modelo 4 y en la Ec. (5.2) del Modelo 5.

Poniendo la Ec. (6.14) en la Ec. (6.5b), hallamos la Ecuación de Movimiento del Muchacho Esquimal con Fricción:

$$mR\ddot{\beta} = mg \sin \beta - \mu_k (mg \cos \beta - mR\dot{\beta}^2) \Rightarrow$$

$$R\ddot{\beta} - \mu_k R\dot{\beta}^2 + g [\mu_k \cos \beta - \sin \beta] = 0 \dots (6.15a)$$

**NOTA 6.5:** Cuando Eliminamos la Fricción ( $\mu_k \rightarrow 0$ ), entonces la Ec. (6.15a) se Transforma en la Ecuación de Movimiento del Niño Esquimal, en Ausencia de Fricción, Ec. (1.39) del Modelo 1, es decir:

$$R\ddot{\beta} - g \sin \beta = 0 \dots (6.15b)$$

Para el Primer sumando de la Ecuación Diferencial (6.15a) hagamos lo siguiente:

$$\ddot{\beta} = \frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\beta}{dt} \right) = \frac{d\dot{\beta}}{dt} \quad R.C. \quad \frac{d\dot{\beta}}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} \Rightarrow \boxed{\ddot{\beta} = \dot{\beta} \frac{d\dot{\beta}}{d\beta}} \dots (6.16a)$$

$$\text{Separando Variables} \Rightarrow \boxed{\ddot{\beta} d\beta = \dot{\beta} d\dot{\beta}} \dots (6.16b)$$

Poniendo la Ec. (6.16a), en la Ec. (6.15a), la Ecuación Diferencial se transforma en:

$$\boxed{\dot{\beta} \frac{d\dot{\beta}}{d\beta} - \mu_k \dot{\beta}^2 = \frac{g}{R} [\sin \beta - \mu_k \cos \beta]} \dots (6.15c)$$

Por otro lado, sabemos que en general  $v = \omega r y$  que en nuestro caso es:

$$\boxed{v = \dot{\beta} R} \dots (6.17a)$$

O bien de la Ec. (6.17a):

$$\boxed{\dot{\beta} = \frac{v}{R}} \dots (6.17b) \Rightarrow \boxed{\dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{R^2} \equiv \Phi} \dots (6.17c)$$

Usando las Ecs. (6.17) en el Primer Sumando del Primer Miembro de la Ec. (6.15c), obtenemos que:

$$\ddot{\beta} = \dot{\beta} \frac{d\dot{\beta}}{d\beta} = \left( \frac{v}{R} \right) \frac{d}{d\beta} \left( \frac{v}{R} \right) = \frac{1}{R^2} \left[ v \frac{dv}{d\beta} \right], \quad \text{PERO} \quad \left[ v \frac{dv}{d\beta} \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{d\beta} (v^2) = \frac{1}{2} \left( 2v \frac{dv}{d\beta} \right)$$

Por tanto, la Ecuación anterior nos quedará como:

$$\ddot{\beta} = \dot{\beta} \frac{d\dot{\beta}}{d\beta} = \left( \frac{v}{R} \right) \frac{d}{d\beta} \left( \frac{v}{R} \right) = \frac{1}{R^2} \left[ v \frac{dv}{d\beta} \right] = \frac{1}{2R^2} \frac{dv^2(\beta)}{d\beta} \dots (6.17d)$$

Por tanto, poniendo los resultados dados por las Ecs. (6.17a) y (6.17b) en la Ec. (6.15c) y tomando en cuenta el Cambio de Variable propuesto en la Ec. (6.17c) que nos dice que:  $\dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{R^2} = \Phi$ , tendremos que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\beta} \overbrace{\left( \frac{v^2(\beta)}{R^2} \right)}^{\dot{\beta}^2 \equiv \Phi} - \mu_k \overbrace{\left( \frac{v^2(\beta)}{R^2} \right)}^{\dot{\beta}^2 \equiv \Phi} = \frac{g}{R} [\sin \beta - \mu_k \cos \beta] \Rightarrow \frac{d\Phi}{d\beta} - 2\mu_k \Phi = \frac{2g}{R} [\sin \beta - \mu_k \cos \beta]$$

$$\boxed{\frac{d\Phi}{d\beta} - 2\mu_k \Phi = \frac{2g}{R} [\sin \beta - \mu_k \cos \beta]} \dots (6.18)$$

con la Condición Inicial de que  $\Phi(\beta = 0) = \dot{\beta}^2(0) = \frac{v_0^2}{R^2}$ . Observamos que la Ec. (6.18) es la misma que obtuvimos en la Ec. (4.8) del Modelo 4. Para resolver la Ec. (6.18), usaremos la misma estrategia que aplicamos en el Modelo 4, adecuando la Condición Inicial. Para ello, Multiplicamos en Ambos Lados de la Ecuación Diferencial por el Factor Integrante  $e^{-2\mu_k\beta}$  para obtener una Diferencial Exacta, es decir:

$$e^{-2\mu_k\beta} \left\{ \frac{d\Phi}{d\beta} - 2\mu_k\Phi \right\} = \overbrace{e^{-2\mu_k\beta} \frac{d\Phi}{d\beta} - 2\mu_k\Phi e^{-2\mu_k\beta}}^{\text{Diferencial Exacta}} = \frac{2g}{R} e^{-2\mu_k\beta} [\sin \beta - \mu_k \cos \beta]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{d\beta} \{e^{-2\mu_k\beta}\Phi\} = \frac{2g}{R} e^{-2\mu_k\beta} [\sin \beta - \mu_k \cos \beta]} \dots (6.19a)$$

Separando Variables e Integrando la Ec. (6.19a) tenemos:

$$\int_0^\beta d(e^{-2\mu_k\beta'}\Phi) = \int_0^\beta \frac{2g}{R} e^{-2\mu_k\beta'} [\sin \beta' - \mu_k \cos \beta'] d\beta' \dots (6.19b)$$

$$e^{-2\mu_k\beta}\Phi(v)e^{-2\mu_k\beta} - \Phi(v_0)e^{-2\mu_k(0)} = \frac{2g}{R} \underbrace{\int_0^\beta e^{-2\mu_k\beta'} \sin \beta' d\beta'}_{I_1} - \underbrace{\int_0^\beta e^{-2\mu_k\beta'} \cos \beta' d\beta'}_{I_2}$$

$$\frac{1}{R^2} [v^2(\beta) e^{-2\mu_k\beta} - v_0^2] = \frac{1}{R} [2gI_1 - 2\mu_k gI_2] \Rightarrow \boxed{v^2(\beta) e^{-2\mu_k\beta} - v_0^2 = 2gI_1 - 2\mu_k gI_2} \dots (6.19c)$$

Notamos inmediatamente que la Ec. (6.19c) es exactamente la Ec. (4.9c) del Modelo 4, por tanto, solo copiaremos aquí directamente las soluciones y los valores límite. Para las personas interesadas en ver el procedimiento de integración, los remitimos al Modelo 4 y ver la Ec. (4.9c) hasta la Ec.(4.14c).

Para la Velocidad del Muchacho tenemos

$$\boxed{v^2(\beta) = \left[ v_0^2 + 2gR \left( \frac{1 - 2\mu_k^2}{1 + 4\mu_k^2} \right) \right] e^{2\mu_k\beta} - \frac{2gR}{1 + 4\mu_k^2} (\mu_k \sin \beta + \cos \beta [1 + 2\mu_k^2])} \dots (6.20a)$$

$$\mu_k = 0 \Rightarrow \boxed{v^2(\beta) = v_0 + 2gR(1 - \cos \beta)} \dots (6.20b) \quad v_0 = 0 \Rightarrow \boxed{v^2(\beta) = 2gR(1 - \cos \beta)} \dots (6.20c)$$

Los resultados particulares Ecs. (6.20b) y (6.20c) fueron hallados en las Ecs. (4.13a) y (1.12c) de los Modelos 4 y 1, respectivamente. Para la Reacción Normal del Iglú tenemos:

$$\boxed{N(\beta) = mg \cos \beta}$$

$$\boxed{-\frac{m}{R} \left\{ \left[ v_0^2 + 2gR \left( \frac{1 - 2\mu_k^2}{1 + 4\mu_k^2} \right) \right] e^{2\mu_k\beta} - \frac{2gR}{1 + 4\mu_k^2} (\mu_k \sin \beta + \cos \beta [1 + 12\mu_k^2]) \right\}} \dots (6.21a)$$

$$\mu_k = 0 \Rightarrow \boxed{N(\beta) = mg(3 \cos \beta - 2) - \frac{m}{R} v_0^2} \dots (6.21b) \quad v_0 = 0 \Rightarrow \boxed{N(\beta) = mg(3 \cos \beta - 2)} \dots (6.21c)$$

Los resultados particulares Ecs. (6.21b) y (6.21c) fueron hallados en las Ecs. (4.14c) y (1.33b) de los Modelos 4 y 1, respectivamente. Finalmente, Recomendamos al lector ver las Fig. 22 y 23 del Modelo 4, y las Figs. 7 y 8 del Modelo 1, para completar la discusión de este Modelo 6.

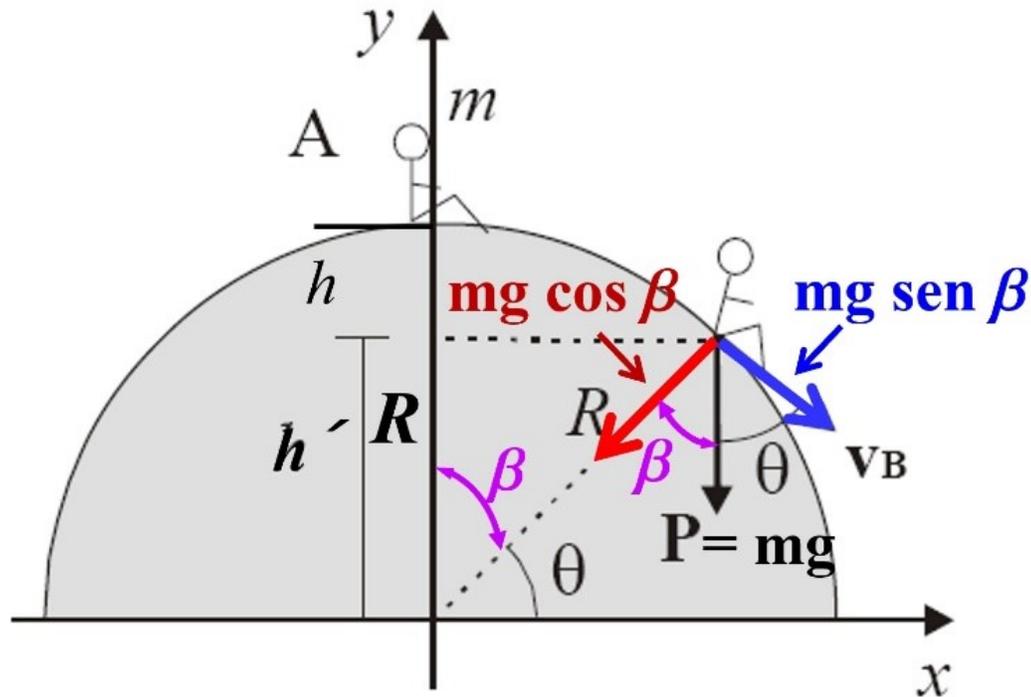


Figura 31: Diagrama del Niño Esquiador montando en la parte alta de su Iglú (Punto A) del Modelo 7, donde se muestra el Peso del Niño y sus componentes en términos del ángulo complementario “ $\beta$ ”, la Reacción Normal del Iglú sobre el niño. El chico se despende del Iglú en el Punto B.

### 2.7. Modelo 7: Usando la Mecánica Lagrangiana Sin Fricción

Para resolver el Problema del Niño Esquiador que resbala de su Iglú mediante la Mecánica Lagrangiana, usaremos el ángulo complementario “ $\beta$ ” (Spiegel, M. R., 1980), (Cline, D., 2019) como lo muestra la Fig. 31.

La Fig. 31 sugiere usar Coordenadas Polares como Coordenadas Generalizadas para el estudio del problema, i.e, “ $r$ ” y “ $\beta$ ”. Para nuestro problema, la Ecuación de Constricción es:

$$f(r, \beta) = r - R = 0 \dots (7.1)$$

Como siempre la Lagrangiana del Sistema se determina a partir de las Energías Cinética y Potencial de problema, es decir:

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\beta}^2) \dots (7.2a) \quad ; \quad V = mgr \cos \beta \dots (7.2b)$$

Por tanto, la Lagrangiana del Sistema ( $\mathcal{L} = T - V$ ) es:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\beta}^2) - mgr \cos \beta} \dots (7.3)$$

donde la Energía Potencial es Cero en la Parte Inferior del hemisferio. Las Ecuaciones de Euler-Lagrange con Multiplicadores Indeterminados para nuestras Coordenadas Generalizadas “ $r$ ” y “ $\beta$ ” son:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \overbrace{\lambda \frac{\partial f}{\partial r}}^{Q_r} \dots (7.4a) \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} = \overbrace{\lambda \frac{\partial f}{\partial \beta}}^{Q_\beta} \dots (7.4b)$$

Realizando las Diferenciaciones en la Constricción Ec. (7.1) da:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 1 \dots (7.5a) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0 \dots (7.5b)$$

Y haciendo las Derivadas Parciales de la Lagrangiana Ec. (7.3) tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } r \\ \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\beta}^2 - mg \cos \beta \dots (7.6a) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \dots (7.6b) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r} \dots (7.6c) \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Para } \beta \\ \frac{\partial L}{\partial \beta} = mgr \sin \beta \dots (7.7a) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = mr^2 \dot{\beta} \dots (7.7b) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) = mr^2 \ddot{\beta} + 2mr \dot{r} \dot{\beta} \dots (7.7c) \end{array} \right.$$

Poniendo las Ecs. (7.5), (7.6) y (7.7) en la Ec. (7.4) encontramos

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{r} - mr\dot{\beta}^2 + mg \cos \beta = \lambda \dots (7.8a) \\ mr^2 \ddot{\beta} + 2mr \dot{r} \dot{\beta} - mgr \sin \beta = 0 \dots (7.8b) \end{array} \right.$$

A continuación, Aplicamos la Restricción  $r = R$  a estas Ecuaciones de Movimiento, es decir:

$$r = R \dots (C.9a) \quad \frac{d}{dt} \quad \dot{r} = \ddot{r} = 0 \dots (7.9b)$$

Con lo cual las Ecs. (7.8) quedaran como:

$$\left\{ \begin{array}{l} -mR\dot{\beta}^2 + mg \cos \beta = \lambda \dots (7.10a) \\ mR^2 \ddot{\beta} - mgR \sin \beta = 0 \dots (7.10b) \end{array} \right.$$

Simplificando la Ec. (7.10b), tenemos:

$$mR^2 \ddot{\beta} = mgR \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\beta} = \frac{g}{R} \sin \beta} \dots (7.11)$$

la Ec. (7.11) corresponde a la Ec. (1.39) del Modelo 1.

Podemos integrar la Ec. (7.11) realizamos la siguiente manipulación

$$\ddot{\beta} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\beta}{dt} \right) = \frac{d\dot{\beta}}{dt} = \frac{d\dot{\beta}}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\beta} = \dot{\beta} \frac{d\dot{\beta}}{d\beta}} \dots (7.12a)$$

Separando Variables en la Ec. (7.12a) tenemos:

$$\boxed{\ddot{\beta} d\beta = \dot{\beta} d\dot{\beta}} \dots (7.12b)$$

Con ayuda de la Ec. (7.12a), Separando Variables (ver la Ec. (7.12b)) y Aplicando las Condiciones Iniciales de que  $\frac{d\beta}{dt}(t=0) = 0$  cuando  $\beta(t=0) = 0$ , podemos integrar la Ec. (7.11), y obtener:

$$\ddot{\beta} = \dot{\beta} \frac{d\dot{\beta}}{d\beta} = \frac{g}{R} \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \int_{\dot{\beta}=0}^{\dot{\beta}} \dot{\beta}' d\dot{\beta}' = \frac{g}{R} \int_{\beta=0}^{\beta} \sin \beta' d\beta' \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \dot{\beta}^2 = -\frac{g}{R} (\cos \beta - 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\beta}^2 = \frac{2g}{R} (1 - \cos \beta)} \dots (7.13a)$$

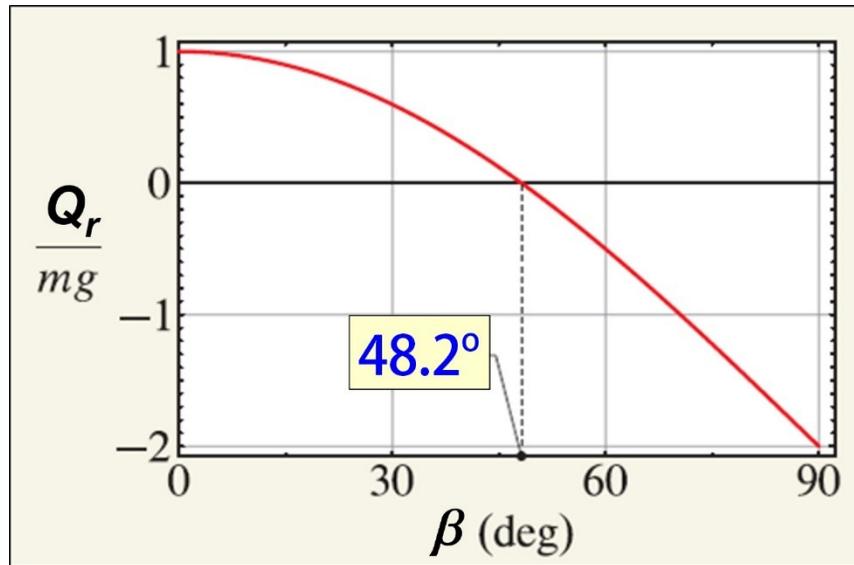


Figura 32: Diagrama de la Fuerza de Restricción Normal  $Q_r$ , normalizada al Peso del muchacho  $mg$ , como una función del ángulo complementario  $\beta$ . El niño esquimal se desprende de su Iglú cuando  $\beta_c = \cos^{-1}(\frac{2}{3}) = 48.2^\circ$ .

Usando la Ec. (7.13a) y sabiendo que  $\dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{R^2}$ , podemos hallar la Velocidad del Muchacho en Función del ángulo  $\beta$ , es decir:

$$\frac{v^2}{R^2} = \frac{2g}{R} (1 - \cos \beta) \Rightarrow \boxed{v^2(\beta) = 2gR (1 - \cos \beta)} \dots (7.13b)$$

La Ec. (7.13b) corresponde a la Ec. (1.36) del Modelo 1,

Sustituyendo  $(\frac{d\beta}{dt})^2$  de la Ec. (7.13a) en la Ec. (7.10a) obtenemos después de resolver para  $\lambda$ ,

$$-mR \left[ \frac{2g}{R} (1 - \cos \beta) \right] + mg \cos \beta = \lambda \Rightarrow -2mg + 2mg \cos \beta + mg \cos \beta = \lambda \Rightarrow$$

La Fuerza Generalizada de Ligadura  $Q_r$  asociada a la coordenada “ $r$ ” de las Ecs. (7.5a) y (7.14) es:

$$Q_r = N = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda(1) \Rightarrow \boxed{Q_r = N(\beta) = mg (3 \cos \beta - 2)} \dots (7.15)$$

La Ec. (7.15), representa la Fuerza de Constricción, es decir, la Fuerza de Reacción Normal que depende del ángulo  $\beta$  y que ejerce la Superficie del Iglú al Niño Esquimal, la cual fue hallada previamente en la Ec. (1.37b) del Modelo 1.

El niño esquimal se desprende del Iglú en un ángulo Crítico  $\beta_c$  cuando  $Q_r = 0$ , es decir:

$$Q_{r,c} = N = 0 = mg (3 \cos \beta - 2) \Rightarrow \boxed{\beta_c = \cos^{-1} \left( \frac{2}{3} \right) \simeq 48.2^\circ} \dots (7.16)$$

Notemos finalmente que la Fuerza de Restricción (la Normal) de la Ec. (7.15) es  $Q_r = \lambda = mg$  cuando  $\beta = 0$ , es decir, cuando el niño esquimal está encaramado en lo más alto del Iglú (Ver la Fig 10, del Modelo 1).

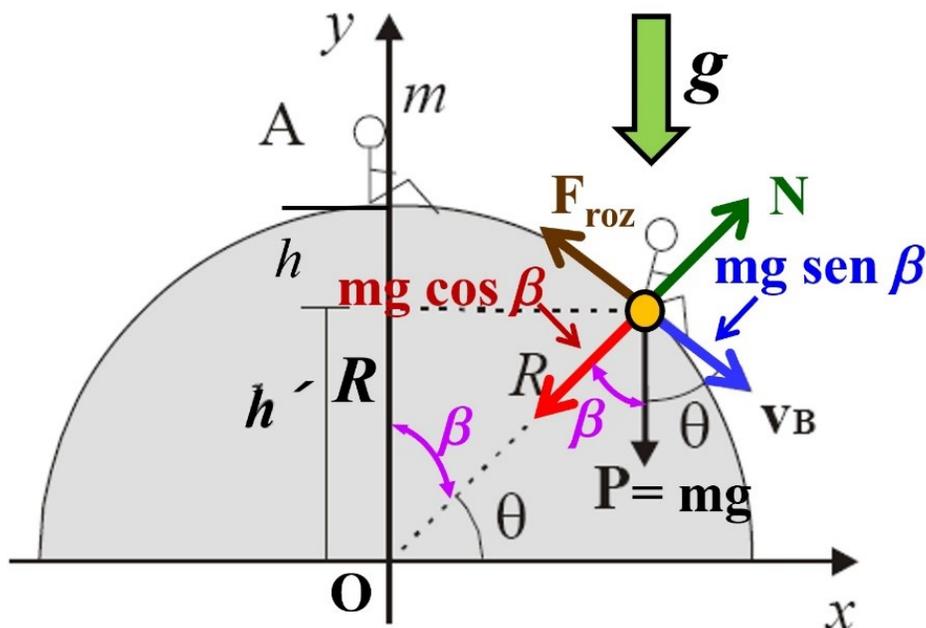


Figura 33: Diagrama del Niño Esquimal montando en la parte alta de su Iglú (Punto A) del Modelo 8, donde se muestra el Peso del Niño y sus componentes en términos del ángulo complementario “ $\beta$ ”, la Reacción Normal del Iglú sobre el niño, y la Fricción Seca de Tipo Coulombica (Sólido-Sólido).

## 2.8. Modelo 8: Usando la Mecánica Lagrangiana Con Fricción

Consideremos el Problema del Niño Esquimal que resbala de su Iglú con Fricción Seca Coulombica (Sólido-Sólido), (Spiegel, M. R., 1980), (Cline, D., 2019) tal y como lo muestra la Fig. 8.1.

El Mecánica Lagrangiana las Ecuaciones de Euler-Lagrange para Sistemas No Conservativos se escribe como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{NC} \dots (8.1)$$

siendo  $Q_j^{NC}$  la contribución a la  $j$ -ésima Fuerza Generalizada que NO Deriva de un Potencial (tal como la Fuerza de Fricción Coulombica), las cuales se obtienen de:

$$Q_j^{NC} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{dis} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \dots (8.2)$$

Dado que el niño esquimal (suponiéndolo como una partícula puntual) se encuentra sobre la superficie del Iglú (suponiéndola semiesférica) y el movimiento tiene lugar en el plano vertical, tendremos tan sólo un único grado de libertad: el ángulo “ $\beta$ ” con la vertical, ver la Fig. 33.

Tomando como Origen del Sistema de Referencia el Centro del Iglú (Semiesfera), en  $O$ , las componentes tanto del Vector de Posición, así como del Vector de Velocidad del Niño Esquimal son:

$$\begin{cases} x = R \sin \beta \dots (8.3a) \\ y = R \cos \beta \dots (8.3b) \end{cases} \quad \frac{d}{dt} \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = R \dot{\beta} \cos \beta \dots (8.4a) \\ \dot{y} = -R \dot{\beta} \sin \beta \dots (8.4b) \end{cases}$$

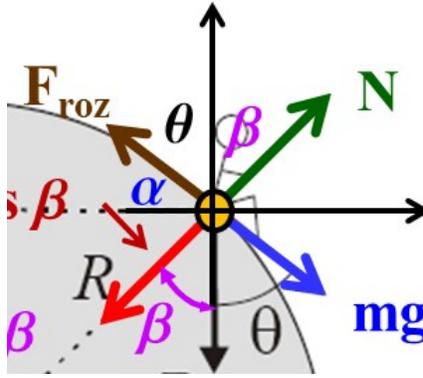


Figura 34: Detalle del Diagrama Fig. 33 del Niño Esquiador montando en la parte alta de su Iglú, donde se muestran los diversos ángulos introducidos.

Usando las Ecs. (8.3) y (8.4), encontramos la Energía Cinética y Potencial del Niño Esquiador, es decir:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2] \quad (8.4) \quad = \quad \frac{1}{2}m \left[ (R\dot{\beta} \cos \beta)^2 + (-R\dot{\beta} \sin \beta)^2 \right] \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}m \left[ R^2 \dot{\beta}^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \right] \Rightarrow \boxed{T(\beta) = \frac{1}{2}mR^2 \dot{\beta}^2} \dots (8.5)$$

De igual manera, hallamos la Energía Potencial Gravitacional:

$$V = mgy \quad (8.3b) \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(\beta) = mgR \cos \beta} \dots (8.6)$$

Con las Ecs. (8.5) y (8.6) hallamos la Lagrangiana del Sistema:  $L = T - V$ :

$$\boxed{L = \frac{1}{2}mR^2 \dot{\beta}^2 - mgR \cos \beta} \dots (8.7)$$

Ahora necesitamos conocer la Fuerza Generalizada asociada a la Fuerza de Rozamiento Sólido-Sólido del muchacho con el Iglú, la cual, usando la Ec. (8.2) viene dada por:

$$Q_{\beta}' = \vec{F}_{roz} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} = F_{roz,x} \frac{\partial x}{\partial \beta} + F_{roz,y} \frac{\partial y}{\partial \beta} \quad (8.2) \quad = \quad F_{roz,x} \frac{\partial}{\partial \beta} (R \sin \beta) + F_{roz,y} \frac{\partial}{\partial \beta} (R \cos \beta) \Rightarrow$$

$$Q_{\beta}' = R (F_{roz,x} \cos \beta - F_{roz,y} \sin \beta) \dots (8.8)$$

Usando la Fig. 34 conocemos las Componentes de la Fuerza de Rozamiento, es decir:

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \quad y \quad \beta + \theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha + \theta = \beta + \theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \beta} \dots (8.9)$$

Por tanto, usando la Ec. (8.9), la Fuerza de Rozamiento Coulombica se escribirá como:

$$\vec{F}_{roz} = (F_{roz,x}, F_{roz,y}) \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{roz}(\beta) = \mu_k N (-\cos \beta, \sin \beta)} \dots (8.10)$$

Poniendo la Ec. (8.10) en la Ec. (8.8) se deduce que:

$$Q_{\beta}' = R (-\mu_k N \cos \beta) \cos \beta - R (\mu_k N \sin \beta) \sin \beta = -\mu_k RN (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \Rightarrow$$

$$\boxed{Q_{\beta}' = -\mu_k RN} \dots (8.11)$$

Usando las Ecuaciones de Euler-Lagrange que incluyen tanto Fuerzas Conservativas como NO Conservativas Ec. (8.1), hallamos la Ecuación de Movimiento para la única Coordenada Generalizada “ $\beta$ ”, es decir:

$$\begin{cases} \text{Para } \beta \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \beta} = mgR \sin \beta \dots (8.12a) \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = mR^2 \dot{\beta} \dots (8.12b) \quad ; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) = mR^2 \ddot{\beta} \dots (8.12c) \end{array} \right. \end{cases}$$

Poniendo los resultados Ec. (8.11) y Ec. (8.12) en la Ec. (8.1), en principio, hallamos la correspondiente Ecuación de Movimiento del Muchacho:

$$\boxed{mR^2 \ddot{\beta} - mgR \sin \beta = -\mu_k RN} \dots (8.13)$$

Aunque aparentemente ya está resuelto el problema, nos encontramos con un inconveniente: en la Ecuación del Movimiento Ec. (8.13) aparece la Reacción Normal que ejerce el Iglú sobre el niño esquimal ( $N$ ), y que entra en juego a través de la Fuerza de Rozamiento.

Dicha Reacción Normal es Desconocida a Priori, y el Método de Lagrange por sí solo NO es capaz de determinarla. Por ello, para acceder a la Fuerza de Constricción “ $N$ ” es necesario aplicar el Método de los Multiplicadores Indeterminados de Lagrange.

Dicha Reacción Normal “ $N$ ” se origina porque el Iglú es un cuerpo rígido, oponiéndose a ser deformado por el peso del muchacho, y como consecuencia de ello, la distancia “ $r$ ” del niño esquimal al centro  $O$  es constante e igual al radio del Iglú “ $R$ ”.

Así pues, siguiendo el Método de los Multiplicadores Indeterminados de Lagrange, procedemos a “Relajar dicha Ligadura”; y por tanto, tendremos Dos Coordenadas Generalizadas, “ $\beta$ ” y “ $r$ ”, e incluiremos un Multiplicador Indeterminado de Lagrange, “ $\lambda$ ”, es decir:

$$\boxed{\sum_{j=1}^m A_{\mu j} \dot{q}_j + C_{\mu} = 0 \quad \forall \mu = 1, 2, \dots, l} \dots (8.14)$$

Aplicando la Ec. (8.14) a la Ligadura del Sistema y sus derivadas tendremos:

*Ligadura*

$$\boxed{r - R = 0} \dots (8.15a) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = 0 \dots (8.15b) \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = 0 \dots (8.15c)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_{1r} = 1} \dots (8.16a) \quad ; \quad \boxed{A_{1\beta} = 0} \dots (8.16b)$$

De la Fig. 33, las Componentes del “nuevo” Vector de Posición, así como de la “nueva” Rapidez del Muchacho Esquimal serán ahora:

$$\begin{cases} x = r \sin \beta \dots (8.17a) \\ y = r \cos \beta \dots (8.17b) \end{cases} \quad \frac{d}{dt} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \sin \beta + r \dot{\beta} \cos \beta \dots (8.18a) \\ \dot{y} = \dot{r} \cos \beta - r \dot{\beta} \sin \beta \dots (8.18b) \end{cases}$$

Usando las Ecs. (8.17) y (8.18), encontramos la “nueva” Energía Cinética y la “nueva” Energía Potencial del Niño Esquimal, i.e.:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2] \stackrel{(8.18)}{=} \frac{1}{2}m \left[ \left( \dot{r} \sin \beta + r \dot{\beta} \cos \beta \right)^2 + \left( \dot{r} \cos \beta - r \dot{\beta} \sin \beta \right)^2 \right]$$

$$T = \dot{r}^2 \sin^2 \beta + 2r\dot{r}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + r^2 \dot{\beta}^2 \cos^2 \beta + \dot{r}^2 \cos^2 \beta - 2r\dot{r}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + r^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \beta$$

$$T = \dot{r}^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + r^2 \dot{\beta}^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \Rightarrow \boxed{T(r, \beta) = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\beta}^2)} \dots (8.19)$$

De igual manera, hallamos la “nueva” Energía Potencial Gravitacional será:

$$V = mgy \quad (8.17b) \Rightarrow \boxed{V(r, \beta) = mgr \cos \beta} \dots (8.20)$$

Con las Ecs. (8.19) y (8.20) construimos la “nueva” Función Lagrangiana del Sistema:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\beta}^2) - mgr \cos \beta} \dots (8.21)$$

Para tomar en cuenta tanto las Fuerzas de Constricción, como las Fuerzas que NO provienen de un Potencial, las Ecs. (8.2) se deberán de modificar adecuadamente para obtener las “nuevas” Ecuaciones de Euler-Lagrange del Sistema, es decir:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{\mu=1}^l \lambda_{\mu} A_{\mu j} = Q_j' \quad \forall j = 1, 2, \dots, m} \dots (8.22)$$

De tal manera que de acuerdo con la “nueva” Ec. (8.22), las Ecuaciones de Euler-Lagrange para las “dos nuevas” Coordenadas Generalizadas  $(r, \beta)$  usando las Ecs. (8.16a) y (8.16b) son ahora:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} + \lambda A_r = Q_r' \dots (8.23a) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} + \lambda A_{\beta} = Q_{\beta}' \dots (8.23b) \end{cases}$$

en donde ya se ha tenido la precaución de insertar al lado derecho de las igualdades Ecs. (8.23a) y (8.23b) las Fuerzas Generalizadas asociadas a la Fuerza de Fricción Seca del muchacho con la superficie esférica del iglú.

Usando la Ec. (8.2) hallamos la “nueva” Fuerza Generalizada asociada a la Fuerza de Rozamiento Seco del muchacho sobre el Iglú:

$$\begin{cases} Q_{\beta}' = \vec{F}_{roz} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} = F_{roz,x} \frac{\partial x}{\partial \beta} + F_{roz,y} \frac{\partial y}{\partial \beta} \Rightarrow \\ Q_r = \vec{F}_{roz} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = F_{roz,x} \frac{\partial x}{\partial r} + F_{roz,y} \frac{\partial y}{\partial r} \Rightarrow \\ \begin{cases} Q_{\beta}' = F_{roz,x} \frac{\partial}{\partial \beta} (r \sin \beta) + F_{roz,y} \frac{\partial}{\partial \beta} (r \cos \beta) \Rightarrow \\ Q_r' = F_{roz,x} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \beta) + F_{roz,y} \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \beta) \Rightarrow \end{cases} \end{cases} \quad (8.17)$$

Poniendo las componentes de la Fuerza de Rozamiento (ver la Ec. (8.10)) y derivando con respecto a las Coordenadas  $r$  y  $\beta$ , tenemos:

$$\begin{cases} Q_{\beta}' = (-\mu_k N \cos \beta) (r \cos \beta) + (\mu_k N \sin \beta) (-r \sin \beta) \Rightarrow \\ Q_r' = (-\mu_k N \cos \beta) (\sin \beta) + (\mu_k N \sin \beta) (\cos \beta) \Rightarrow \\ \begin{cases} Q_{\beta}' = -\mu_k r N (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \Rightarrow \\ Q_r' = \mu_k N (-\cos \beta \sin \beta + \sin \beta \cos \beta) \Rightarrow \end{cases} \end{cases}$$

Finalmente, las “nuevas” Fuerzas Generalizadas asociada a la Fuerza de Rozamiento Seco, serán:

$$\begin{cases} Q_{\beta}' = -\mu_k r N \dots (8.24a) \\ Q_r' = 0 \dots (8.24b) \end{cases}$$

Además, nótese que las Fuerzas de Ligadura Radial y Angular usando las Ecs. (8.16a) y (8.16b) vienen dadas por:

$$\begin{cases} R_r = N = -\lambda A_r = -\lambda \dots (8.25a) \\ R_{\beta} = \lambda A_{\beta} = 0 \dots (8.25b) \end{cases}$$

Por otro lado, haciendo las correspondientes Derivadas Parciales de la “nueva” Lagrangiana, Ec. (8.21) tenemos:

Para  $r$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\beta}^2 - m g \cos \beta \dots (8.26a) \quad ; \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \dots (8.26b) \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m \ddot{r} \dots (8.26c) \end{cases}$$

Para  $\beta$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \beta} = m g r \sin \beta \dots (8.27a) \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = m r^2 \dot{\beta} \dots (8.27b) \quad ; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) = m \left\{ 2 r \dot{r} \dot{\beta} + r^2 \ddot{\beta} \right\} \dots (8.27c) \end{cases}$$

Insertando todas estas expresiones Ecs. (8.24), (8.25), (8.26) y (8.27) y en las “nuevas” Ecuaciones de Euler-Lagrange Ecs. (8.23), obtenemos:

$$\begin{cases} m \ddot{r} - m r \dot{\beta}^2 + m g \cos \beta - N = 0 \dots (8.28a) \\ m r^2 \ddot{\beta} + 2 m r \dot{r} \dot{\beta} - m g r \sin \beta = -\mu_k r N \dots (8.28b) \end{cases}$$

Ahora es el momento de eliminar la variable “ $r$ ” del problema recordando que realmente esta distancia es  $r = R = cte.$ , por lo tanto, tendremos:

$$\begin{cases} -m R \dot{\beta}^2 + m g \cos \beta = N \dots (8.29a) \\ m R^2 \ddot{\beta} - m g R \sin \beta = -\mu_k R N \dots (8.29b) \end{cases}$$

Llegados a este punto, podemos comparar con las cosas que hemos hecho previamente. Es decir, comparemos las Ecs. (8.29) con las Ecs. (7.10) del Modelo 7, en donde abordamos el mismo problema, pero sin fricción.

Vemos, que las Ecs. (8.29a) y (7.10a) son esencialmente las mismas, pues la “Fuerza de Constricción”, es decir, la Fuerza Normal del Iglú que depende del ángulo “ $\beta$ ” y que ejerce la superficie del Iglú al niño esquimal, no cambia para nada. Dicha Fuerza fue hallada con anterioridad en la Ec. (4.4) del Modelo 4.

Por tanto, la Ec. (8.29a) proporciona el valor de la Reacción Normal, que como puede comprobarse coincide con la Diferencia de la Componente Normal a la Superficie del Peso y la Fuerza Centrípeta, es decir:

$$\boxed{N(\beta) = m g \cos \beta - m R \dot{\beta}^2} \dots (8.30a)$$

Comparar la Ec. (8.30a) con la Ec. (4.4) del Modelo 4 y notar que la Ec. (8.29b), corresponde a la Ec. (6.5b) del Modelo 6.

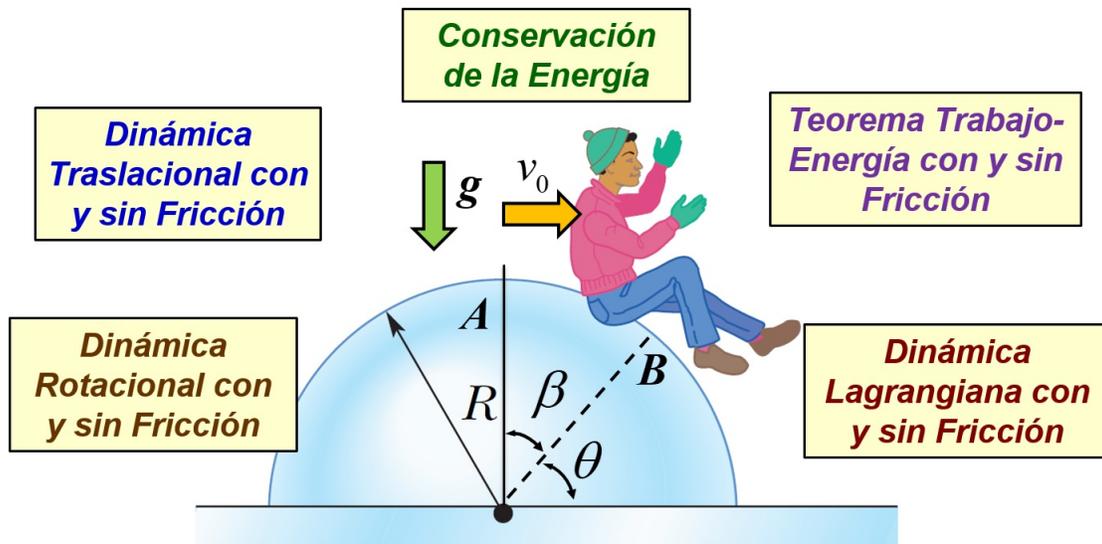


Figura 35: Diferentes Aproximaciones Teóricas en la resolución del clásico problema del Niño Esquimal que resbala de su Iglú.

Llevando la “Fuerza Normal de Restricción” Ec. (8.30a) a la Ec. (8.29b), para que así podamos construir la Ecuación de Movimiento del Niño Esquimal.

$$mR^2\ddot{\beta} - mgR \sin \beta = -\mu_k R (mg \cos \beta - mR\dot{\beta}^2) \Rightarrow$$

$$R\ddot{\beta} - \mu_k R\dot{\beta}^2 + g [\mu_k \cos \beta - \sin \beta] = 0 \dots (8.30b)$$

Claramente, cuando Eliminamos la Fricción Cinética ( $\mu_k \rightarrow 0$ ), entonces la Ec. (8.30b) se transforma en la Ec. (1.28) del Modelo 1, es decir:

$$R\ddot{\beta} - g \sin \beta = 0 \dots (8.30c)$$

Ecuación que al integrar conocemos la Velocidad del Muchacho, (en el Caso Sin Fricción) tal y como ya se ha hecho antes en el Modelo 1.

Para poder integrar de la Ec. (8.30b) se deberá proceder tal y como se hizo con la Ec. (4.5a) del Modelo 4, obteniendo los resultados equivalentes a las Ecs. (4.12) y (4.14a) del Modelo 4, ejercicio que se deba al lector.

### 3. Conclusiones

En el presente trabajo hemos analizado el problema clásico que aparece en muchos libros de texto “El niño Esquimal que Resbala de su Iglú”. Sin embargo, en dichos textos, el problema es resuelto usando únicamente argumentos de “Conservación de la Energía” y despreciando el Caso con Fricción entre el niño y el Iglú. En este trabajo hemos estudiado el problema bajo la perspectiva teórica de la Estrategia de Enseñanza Mediante la Modelación Progresiva (EMP) Gobert y Buckley, 2000 en Oliva, 2019: 7, para poder incentivar la Experiencia de Aprendizaje Mediado (EAM) Orrú. S., 2003, en donde hemos resuelto el problema usando la “Dinámica Traslacional con y sin Fricción”, “Conservación de Energía”, “Teorema Trabajo-Energía con y sin Fricción”, “Dinámica Rotacional con y sin Fricción” y usando además la “Dinámica Lagrangiana con y sin Fricción”, ver la Fig. 35.

Lo anterior lo hicimos creyendo que resolver un mismo problema desde diferentes puntos de vista teóricos y para diferentes niveles de profundidad matemática, ayuda al profesor y al estudiante universitario a comprender profundamente como se puede resolver este problema en las diferentes etapas de un curso regular de Física General (Mecánica Básica) y/o de Mecánica Intermedia.

#### 4. APÉNDICE A: Demostración de la Relación (1.1) del Modelo 1.

Si tenemos cualquier vector “ $\vec{A}$ ” en el Espacio Tridimensional Cartesiano que se escribe como  $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ , entonces al realizar el “Producto Punto (Escalar)” con cada uno de los “Vectores Unitarios” de los “Ejes Coordinados Cartesianos” tendremos:

$$\vec{A} \cdot \hat{i} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot \hat{i} = A_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + A_y (\hat{j} \cdot \hat{i}) + A_z (\hat{k} \cdot \hat{i}) \Rightarrow \boxed{\vec{A} \cdot \hat{i} = A_x} \dots (A.1a)$$

$$\vec{A} \cdot \hat{j} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot \hat{j} = A_x (\hat{i} \cdot \hat{j}) + A_y (\hat{j} \cdot \hat{j}) + A_z (\hat{k} \cdot \hat{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{A} \cdot \hat{j} = A_y} \dots (A.1b)$$

$$\vec{A} \cdot \hat{k} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot \hat{k} = A_x (\hat{i} \cdot \hat{k}) + A_y (\hat{j} \cdot \hat{k}) + A_z (\hat{k} \cdot \hat{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{A} \cdot \hat{k} = A_z} \dots (A.1c)$$

Es claro que “El Producto Punto” del Vector  $\vec{A}$  con cada uno de los Ejes Coordinados, lo que hace es hallar cada una de las Componentes de esos ejes ( $A_x, A_y, A_z$ ) respectivamente, por tanto, es claro que:

$$\vec{A} = \underbrace{A_x}_{\vec{A} \cdot \hat{i}} \hat{i} + \underbrace{A_y}_{\vec{A} \cdot \hat{j}} \hat{j} + \underbrace{A_z}_{\vec{A} \cdot \hat{k}} \hat{k} = (\vec{A} \cdot \hat{i}) \cdot \hat{i} + (\vec{A} \cdot \hat{j}) \cdot \hat{j} + (\vec{A} \cdot \hat{k}) \cdot \hat{k} \dots (1.1)$$

#### 5. APÉNDICE B: Relación entre Versores Polares y Versores Cartesianos del Modelo 1

Conociendo el “Vector de Posición” de una partícula en cualquier instante de tiempo “ $t$ ”, entonces  $\frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial r}$  es un “Vector Tangente” a la curva  $\theta = cte$ , es decir, es un Vector en la Dirección Radial de  $\vec{r}(t)$  (en el que se incrementa “ $r$ ”), Ver la Fig. 36.

Un Vector Unitario (Versor) en esta dirección se define por:

$$\hat{u}_r \equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial r} \right|} \dots (B.1)$$

Por otro lado, el “Vector de Posición” se escribe como:

$$\vec{r}(t) = x \hat{i} + y \hat{j} = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} \dots (B.2)$$

de la Fig. 36 tenemos que:

$$\frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \dots (B.3) \quad ; \quad \left| \frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial r} \right| = 1 \dots (B.4)$$

Así que de la Ec. (B.1) llegamos a que:

$$\hat{u}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \dots (B.5)$$

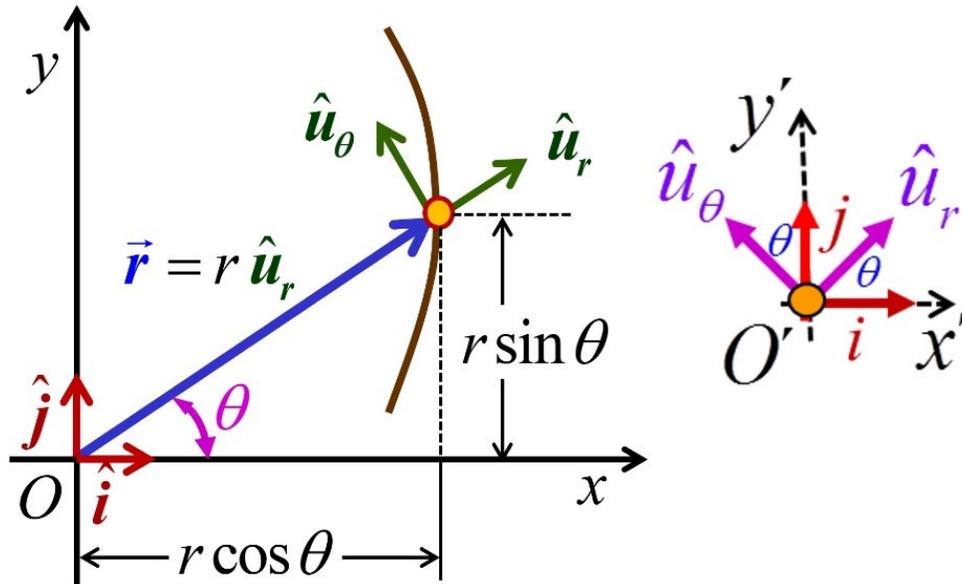


Figura 36: Diagrama de la evolución de una partícula puntual en el Plano Cartesiano “ $xy$ ” y su relación con las Coordenadas Polares y sus respectivos Vectores Unitarios.

De forma similar,  $\frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial \theta}$  es un “Vector Tangente” a la curva  $r = cte$ . Un Vector Unitario en esta dirección (es decir, un Versor en la dirección donde crece  $\theta$ , ver la Fig. 36) es:

$$\hat{u}_\theta \equiv \frac{\frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial \theta} \right|} \dots (B.6)$$

De la Ec. (B.2) derivamos con respecto de “ $\theta$ ” y tenemos:

$$\frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial \theta} = -r \sin \theta \hat{i} + r \cos \theta \hat{j} \dots (B.7) \quad ; \quad \left| \frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial \theta} \right| = r \dots (B.8)$$

Así que de la Ec. (B.6) quedará como:

$$\hat{u}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \dots (B.9)$$

Hay que destacar que, a Diferencia de los Vectores de la Base Cartesiana, los Vectores de la Base Polar No Son Constantes, pues Cambian Punto a Punto. Esto quiere decir que Varían en Dirección y Sentido al Cambiar de Punto en el Plano. Lo anterior lo podemos constatar en las Fig. 37.

De las Ecs. (B.5) y (B.9), hemos hallado los Vectores Unitarios Polares  $\hat{u}_r$  y  $\hat{u}_\theta$  en términos de los Vectores Unitarios Cartesianos  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ , ahora queremos hallar la Relación Inversa, es decir, queremos hallar los Versores Cartesianos  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  en términos de los Versores Polares  $\hat{u}_r$  y  $\hat{u}_\theta$ , así que de las Ecs. (B.5) y (B.9) Resolviéndolas Simultáneamente tenemos lo siguiente. De la Ec. (B.5) despejamos  $\hat{i}$ :

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}_r - \sin \theta \hat{j}}{\cos \theta} \dots (B.10)$$

Sustituyendo la Ec. (B.10) en la Ec. (B.9) hallamos:

$$= \frac{-\hat{u}_r \sin \theta + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \hat{j}}{\cos \theta} = \frac{-\hat{u}_r \sin \theta + \hat{j}}{\cos \theta} \Rightarrow \hat{u}_\theta \cos \theta = -\hat{u}_r \sin \theta + \hat{j} \Rightarrow$$

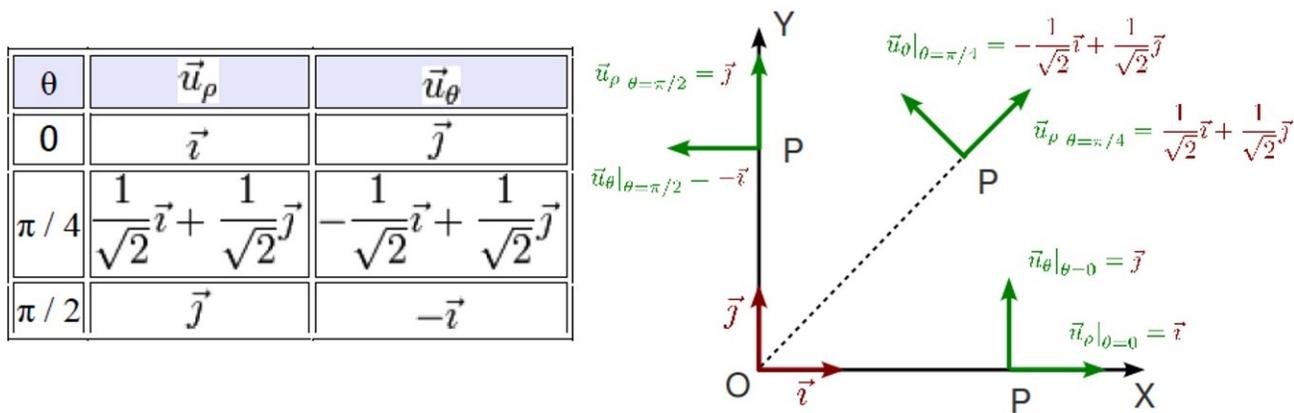


Figura 37: Tabla y esquema comparativo entre los Versores Cartesianos (fijos) y Versores Polares (dependientes del ángulo) evaluados estos últimos en  $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ .

$$\hat{j} = \sin \theta \hat{u}_r + \cos \theta \hat{u}_\theta \dots (B.11)$$

Con la Ec. (B.11), regresamos a la Ec. (B.10) y hallamos que:

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}_r - \sin \theta (\sin \theta \hat{u}_r + \cos \theta \hat{u}_\theta)}{\cos \theta} = \frac{(1 - \sin^2 \theta) \hat{u}_r}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta \cos \theta \hat{u}_\theta}{\cos \theta} \Rightarrow$$

$$\hat{i} = \cos \theta \hat{u}_r - \sin \theta \hat{u}_\theta \dots (B.12)$$

## Referencias

-  Beer, F. P., Johnston, Jr., E. R. & Cornwell, P. J. (2010)  
*Mecánica Vectorial para Ingenieros Dinámica*.  
México: Ed. McGrawHill.
-  Cabral-Rosetti, L.G. y Rosas, A. (2022a).  
*Estrategia de Modelación Progresiva: Del Bachillerato a la Licenciatura*.  
Modelling in Science Education and Learning, 15 (2).  
<https://doi.org/10.4995/mse1.2022.17983>
-  Cabral-Rosetti, L.G. y Rosas, A. (2022b).  
*La Modelización como una Estrategia de Enseñanza: Ejemplo de la Caída de un Paracaidista en un Medio Resistivo*.  
8ª Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada. 5(1), p.p. 377-383  
[https://jcyta.cenidet.tecnm.mx/revistas/jcyta/08-Revista\\_JCyTA\\_Vol-5-Num-1\\_Ene-Jun\\_2022.pdf](https://jcyta.cenidet.tecnm.mx/revistas/jcyta/08-Revista_JCyTA_Vol-5-Num-1_Ene-Jun_2022.pdf)
-  Cabral-Rosetti, L.G. y Rosas, A. (2022c).  
*La Modelización en Mecánica: Una Estrategia para su Aprendizaje*.  
EIEI ACOFI, sep. 2022.  
<https://acofipapers.org/index.php/eiei/article/view/2171/2021>
-  Cline, D. (2019)  
*Variational Principles in Classical Mechanics*.  
USA, University of Rochester Press.
-  De Lande, O. L. y Pierrus, J. (2010)  
*Solved Problems in Classical Mechanics, Analytical and Numerical Solutions with Comments*.  
Ed. Oxford University Press.
-  Franco A. (2015)  
*Curso Interactivo de Física en Internet*.  
<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/index.html>
-  Greiner, W. (1989)  
*Classical Theoretical Physics, Classical Mechanics, Point Particles and Relativity*.  
Ed. Springer-Verlag.
-  Oliva, J. (2019)  
*Distintas acepciones para la idea de modelización en la enseñanza de las ciencias*.  
Revista Enseñanza de las Ciencias, 37 (2). 5-24.  
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2648>
-  Orrú. S. (2003)  
*Reuven Feuerstein y la Teoría de la Modificabilidad Cognitiva Estructural*.  
Revista Educación, 332. p.p. 34-54.
-  Resnick, R. Halliday, D. & Krane, K. (1987)  
*Física Vol. 1*.  
México: Ed. CECSA.



Fernández J. L. (2023)

*FISICALAB Componentes Intrínsecas de la Aceleración*

<https://www.fisicalab.com/apartado/aceleracion-componentes-intrinsecas>



Spiegel, M. R. (1980).

*Mecánica Teórica con una Introducción a las Ecuaciones de Lagrange y a la Teoría de Hamilton.*

Serie Schaum. Ed. Mc Graw-Hill México.



Spiegel, M. R. y Abellanas, L (1998).

*Formulas y Tablas de Matemática Aplicada.*

Ed. Mc Graw-Hill España.



Young, H. D.; Freedman R. A. & Ford, A. L. (2009)

*Sears-Zemansky Física Universitaria Volumen 1, 12th.*

Ed. Addison-Wesley, Pearson Educación México 2009.



Zill D. G. y Cullen M. R. (2008).

*Matemáticas Avanzadas para Ingeniería.*

Ed. Mc Graw-Hill Interamericana.