



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Dpto. de Matemàtica Aplicada

EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS EN EL ANÁLISIS
DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE. APLICACIÓN A LA
RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE
SAINT-VËNANT.

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Investigación Matemática

AUTOR/A: Vallés Morán, Francisco José

Tutor/a: Balaguer Beser, Ángel Antonio

Cotutor/a externo: Lopez Ureña, Sergio

CURSO ACADÉMICO: 2023/2024



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



VNIVERSITAT ID VALÈNCIA



Máster Interuniversitario en
Investigación Matemática

Curso 2023/2024

Trabajo Fin de Máster

**EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS EN EL
ANÁLISIS DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE.
APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE
ECUACIONES DE SAINT-VÊNANT**

Autor: Francisco J. Vallés Morán

Tutor: ÁNGEL BALAGUER-BESER

Cotutor externo: SERGIO LÓPEZ UREÑA

*A mis hijas, Arián y Laia,
para las que mi amor no tiene cota superior*

Trabajo Fin de Máster

_curso 2023-2024

EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS EN EL ANÁLISIS DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE. APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VÊNANT

AUTOR: FRANCISCO J. VALLÉS MORÁN

TUTORES ACADÉMICOS:

ÁNGEL BALAGUER-BESER

SERGIO LÓPEZ UREÑA

PEP MULET MESTRE

La simplicidad es la máxima sofisticación en matemáticas.
Leonhard Euler (1707-1783)

AGRADECIMIENTOS

En el verano de 2021, a finales de julio, estaba atravesando tiempos difíciles. En aquel momento, durante una escapada con mis hijas a un pueblo de la Serranía Baja de Cuenca, motivado por la situación, tomé tres decisiones importantes en mi vida. Una en el ámbito sentimental, otra en el de la salud y la última, en el académico-profesional (que en mi caso van unidos). La estancia tuvo lugar en un pequeño hotel con encanto de la zona. La recuerdo, a pesar de todo, con mucho cariño. La última decisión es la que me ha traído hasta aquí, con la presentación de este trabajo como broche final del Máster Interuniversitario en Investigación Matemática (INVESTMAT).

Desde estas líneas quiero mostrar mi agradecimiento a la Dirección del Máster por su ayuda inicial y sus ánimos posteriores, especialmente en la persona de su entonces director, el profesor Alberto Conejero; mi agradecimiento también a todos los profesores, por su dedicación, en especial a aquellos que no reparan en el tiempo invertido y que, sin reconocimiento alguno por parte de la Academia, no dudan en duplicarse en el aula, o incluso triplicarse, en aras de una mejor calidad docente. Gracias a todos ellos.

Agradecimiento sincero a mis compañeros durante estos dos cursos, pues al tener que compatibilizar mi trabajo como docente en esta casa, la UPV, con la vuelta a la condición de alumno en este máster, lo he sido a tiempo parcial. A todos ellos, que me han ayudado y he ayudado, que hemos trabajado en equipo y hemos pasado buenos ratos, quiero darles las gracias. Algunos, no pocos, son hoy ya amigos. No hay diferencia de edad para la amistad. Con ellos cultivo desde entonces la cultura valenciana del ‘esmorzar’. A estos eventos gastronómicos, “matealmuerzos” los llamamos, se apunta de vez en cuando algún que otro profesor del INVESTMAT, que sin duda ha pasado también a la categoría de amigo.

Quiero hacer especial mención a mis tutores académicos, a los tres, Ángel Balaguer, Sergio López y Pep Mulet, aunque solamente dos de ellos, los dos primeros, tengan reconocimiento oficial debido a la normativa actual de la UPV. Esta normativa necesita ser adaptada a las necesidades de un máster interuniversitario como éste. Ese carácter es, a mi juicio, una de sus mayores virtudes y sin duda un gran reclamo para potenciales futuros alumnos, aunque ello complique las tareas de gestión asociadas. Ángel, Sergio, Pep, gracias por vuestra dedicación, paciencia y sabios consejos. Y a ti Pep, en especial, agradeceré tu grado de implicación a pesar de ese no-reconocimiento. Entrás en esa categoría de gente que ama lo que hace.

Y, por último, gracias a mis compañeros de trabajo, en particular a los del Laboratorio de Hidráulica, que han visto como he tenido que robarles tiempo para poder dedicárselo al máster. Espero no haberles descuidado demasiado. Igualmente, a mis amigos, a los que también debo haber fallado en alguna que otra quedada. En cualquier caso, perdón y gracias a todos ellos. Gracias a mi familia, especialmente a mis hijas, a quienes he dedicado el texto. Muchas gracias mis niñas. ¡Os quiero!

Y, finalmente, gracias INVESMAT, por haberme hecho disfrutar de nuevo de las Matemáticas. GRACIAS.

Fran

Datos del proyecto. Ficha	
Alumno: Francisco J. Vallés Morán	E-mail: fvalmo@hma.upv.es
Título del TFM en español –obligatorio- (máximo 1000 caracteres Tipo oración): EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS EN EL ANÁLISIS DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE. APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VÊNANT.	
Título del TFM en inglés –obligatorio- (máximo 1000 caracteres Tipo oración): THE FINITE VOLUME METHOD IN THE ANALYSIS OF FREE-SURFACE FLOW. APPLICATION TO THE NUMERICAL RESOLUTION OF THE SAINT-VÊNANT SYSTEM OF EQUATIONS	
Título del TFM en Valenciano –obligatorio- (máximo 1000 caracteres Tipo oración): EL MÈTODE DE VOLUMS FINITS EN L'ANÀLISI DEL FLUX EN LÀMINA LLIURE. APLICACIÓ A LA RESOLUCIÓ DEL SISTEMA D'EQUACIONS DE SAINT-VÊNANT.	
Tutores académicos: Dr. Ángel Balaguer Beser (Dto. de Matemática Aplicada, UPV) Dr. Sergio López Ureña (Dto. Matemáticas, UV) Dr. Pep Mulet Mestre (Dto. Matemáticas, UV)	
Modalidad: UPV	
Orientación: <input type="checkbox"/> Profesional <input checked="" type="checkbox"/> Investigadora	
Idioma de elaboración: Castellano	
Resumen español o valenciano –obligatorio- (máximo 5000 caracteres Tipo oración): La Dinámica de Fluidos, se encarga del estudio del movimiento de los mismos atendiendo a las causas que lo producen (gradientes de presión, componente tangencial de la fuerza gravitatoria, etc.). Las leyes que rigen estos movimientos o flujos, es decir, sus leyes de gobierno, se expresan en forma de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs). La solución exacta de estas ecuaciones en la práctica totalidad de casos reales de interés en el campo de la ingeniería hidráulica, no es posible o conocida. Es por ello por lo que se recurre a su resolución aproximada mediante métodos numéricos. En este trabajo, se presenta el Método de los Volúmenes Finitos (FVM, por sus siglas en inglés) en su aplicación al caso de las ecuaciones que gobiernan el flujo de los fluidos incompresibles. Concretamente, y tras una primera parte en la que se plantean tanto las ideas fundamentales como una aplicación básica del mismo, y una segunda en la que se aborda su formalización matemática, se estudia en una tercera parte, con profundidad, su aplicación como método numérico para la resolución del modelo conocido como SWE (Shallow Water Equations) o Sistema de Ecuaciones de Saint-Venant para el flujo en lámina libre no permanente unidimensional de fluidos reales, incluyendo, por tanto, las pérdidas de energía que tienen lugar.	
Palabras clave español o valenciano –obligatorio- (máximo 5 Tipo oración): métodos numéricos; volúmenes finitos; flujo en lámina libre; flujo en canales abiertos; Saint-Venant.	
Palabras clave inglés –opcional- (máximo 5 Tipo oración): numerical methods; finite volume; free-surface flow; open channel flow; SWE.	
Fecha de presentación y defensa: septiembre 2024	

EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS EN EL ANÁLISIS DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE. APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VÉNANT

ÍNDICE GENERAL

PARTE 0. MOTIVACIÓN

1. INTRODUCCIÓN
2. RELACIÓN DEL TRABAJO CON LOS ODS DE LA AGENDA 2030

PARTE 1. EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS (FVM). IDEAS FUNDAMENTALES Y APLICACIÓN BÁSICA. PRIMEROS DESARROLLOS

3. PLANTEAMIENTO DEL MÉTODO. UN CASO SENCILLO
4. APLICACIÓN ‘NATURAL’ AL CASO DE FLUJOS 2D DE FLUIDOS COMPRESIBLES. ECUACIONES DE EULER
5. LIMITADORES DE FLUJO
6. ANÁLISIS NUMÉRICO DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES. FLUJO BIDIMENSIONAL DE FLUIDOS INCOMPRESIBLES
 - 6.1. INTRODUCCIÓN. ECUACIONES
 - 6.2. FVM. EL ALGORITMO SIMPLE
 - 6.3. FVM. MALLADO Y DISCRETIZACIÓN
 - 6.4. FVM. TRATAMIENTO DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

PARTE 2. SÍNTESIS TEÓRICA Y FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DEL FVM. FORMALIZACIÓN

- 7. ANÁLISIS TEÓRICO DE LEYES DE CONSERVACIÓN**
 - 7.1. INTRODUCCIÓN
 - 7.2. LA ECUACIÓN ESCALAR LINEAL
 - 7.3. LA ECUACIÓN ESCALAR NO LINEAL
- 8. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA ECUACIÓN HIPERBÓLICA LINEAL**
 - 8.1. INTRODUCCIÓN
 - 8.2. CONVERGENCIA, CONSISTENCIA Y ESTABILIDAD DE UN MÉTODO NUMÉRICO
 - 8.3. LA CONDICIÓN DE COURANT-FRIEDRICHS-LAX (CFL)
 - 8.4. EL MÉTODO UPWIND
 - 8.5. EL MÉTODO DE LAX-WENDROFF
- 9. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LAS ECUACIONES HIPERBÓLICAS NO LINEALES. MÉTODOS DE VOLÚMENES FINITOS**
 - 9.1. CASO ESCALAR
 - 9.2. MÉTODOS DE RECONSTRUCCIÓN DE ORDEN ALTO
 - 9.3. EXTENSIÓN A SISTEMAS DE ECUACIONES

PARTE 3. EL FVM EN EL ANÁLISIS DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE UNIDIMENSIONAL NO PERMANENTE. SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VËNANT O ECUACIONES DE AGUAS SOMERAS (SWE). APLICACIÓN

- 10. MOTIVACIÓN**
- 11. PLANTEAMIENTO**
- 12. FORMULACIÓN DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE (FLL) 1D NO PERMANENTE. ECUACIONES DE SAINT-VENANT**
 - 12.1. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD PARA EL FLUJO EN LÁMINA LIBRE UNIDIMENSIONAL NO PERMANENTE
 - 12.2. ECUACIÓN DINÁMICA PARA EL FLUJO EN LÁMINA LIBRE UNIDIMENSIONAL NO PERMANENTE
 - 12.3. SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VENANT. CLASIFICACIÓN
- 13. ESQUEMAS NUMÉRICOS DE ALTO ORDEN BIEN EQUILIBRADOS. MÉTODO PROPUESTO**
 - 13.1. INTRODUCCIÓN
 - 13.2. ESQUEMA NUMÉRICO DE TIPO UPWIND CON RECONSTRUCCIÓN ESPACIAL WENO
 - 13.3. ESQUEMA NUMÉRICO DE TIPO CENTRADO
 - 13.4. PASO TEMPORAL. CONDICIÓN DE ESTABILIDAD
 - 13.5. CASOS TEST CON SOLUCIÓN EXACTA
 - 13.6. MODELO MATEMÁTICO. MÉTODO PROPUESTO
 - 13.7. CORRECTA DEFINICIÓN DEL PROBLEMA
- 14. CASOS DE LABORATORIO. CONTRASTE NUMÉRICO-EXPERIMENTAL.**
 - 14.1. CANAL CON CONTROL HIDRÁULICO POR CAMBIO DE ANCHURA HIDRODINÁMICO Y CAMBIO DE RÉGIMEN. CASO 0

14.2. CANAL CON CAMBIO “GRADUAL” DE ANCHO Y PÉRDIDAS LOCALES DE ENERGÍA.
CASOS 1 A 4.

PARTE 4. CONCLUSIÓN

15. CONCLUSIÓN

16. LÍNEAS FUTURAS

17. BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

APÉNDICE

Tabla de contenido

1.	INTRODUCCIÓN.....	7
2.	RELACIÓN DEL TRABAJO CON LOS ODS DE LA AGENDA 2030	9
3.	PLANTEAMIENTO DEL MÉTODO. UN CASO SENCILLO.....	13
4.	APLICACIÓN ‘NATURAL’ AL CASO DE FLUJOS 2D DE FLUIDOS COMPRESIBLES. ECUACIONES DE EULER.	18
5.	LIMITADORES DE FLUJO	22
6.	ANÁLISIS NUMÉRICO DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES. FLUJO BIDIMENSIONAL DE FLUIDOS INCOMPRESIBLES.....	25
6.1.	INTRODUCCIÓN. ECUACIONES	25
6.2.	FVM. EL ALGORITMO SIMPLE.....	26
6.3.	FVM. MALLADO Y DISCRETIZACIÓN.....	28
6.4.	FVM. TRATAMIENTO DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO.	31
7.	ANÁLISIS TEÓRICO DE LEYES DE CONSERVACIÓN.....	35
7.1.	INTRODUCCIÓN	35
7.2.	LA ECUACIÓN ESCALAR LINEAL. CURVAS CARACTERÍSTICAS	36
7.3.	LA ECUACIÓN ESCALAR NO LINEAL.....	39
7.3.1.	Método de las Características	39
7.3.2.	Solución débil. Concepto.....	41
7.3.3.	La condición de Rankine-Hugoniot	42
7.3.4.	Caracterización de soluciones débiles	43
7.3.5.	Solución de entropía	43
8.	MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA ECUACIÓN HIPERBÓLICA LINEAL	49
8.1.	INTRODUCCIÓN	49
8.2.	CONVERGENCIA, CONSISTENCIA Y ESTABILIDAD DE UN MÉTODO NUMÉRICO.....	50
8.3.	LA CONDICIÓN DE COURANT-FRIEDRICHS-LAX (CFL)	52
8.4.	EL MÉTODO UPWIND.....	53
8.5.	EL MÉTODO DE LAX-WENDROFF	56
9.	MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LAS ECUACIONES HIPERBÓLICAS NO LINEALES. MÉTODOS DE VOLUMENES FINITOS	58
9.1.	CASO ESCALAR.....	58
9.1.1.	Introducción	58
9.1.2.	Método de Volúmenes Finitos. Ecuación general	59
9.1.3.	Método de Godunov.....	61
9.1.4.	Método de Roe	62
9.1.5.	Método de Rusanov	63

9.1.6.	Análisis de convergencia	64
9.1.7.	Reconstrucción espacial de segundo orden	67
9.1.8.	Formulación semidiscreta	69
9.2.	MÉTODOS DE RECONSTRUCCIÓN DE ORDEN ALTO	72
9.2.1.	Reconstrucción de funciones suaves	72
9.2.2.	Método ENO	75
9.2.3.	Método WENO.....	76
9.2.4.	Aplicación a los métodos de volúmenes finitos	79
9.3.	EXTENSIÓN A SISTEMAS DE ECUACIONES.....	82
9.3.1.	Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación	82
9.3.2.	Métodos numéricos para sistemas no lineales	83
10.	MOTIVACIÓN.....	89
11.	PLANTEAMIENTO	89
12.	FORMULACIÓN DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE (FLL) 1D NO PERMANENTE. ECUACIONES DE SAINT-VENANT.....	90
12.1.	ECUACIÓN DE CONTINUIDAD PARA EL FLUJO EN LÁMINA LIBRE UNIDIMENSIONAL NO PERMANENTE	90
12.2.	ECUACIÓN DINÁMICA PARA EL FLUJO EN LÁMINA LIBRE UNIDIMENSIONAL NO PERMANENTE	92
12.3.	SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VENANT. CLASIFICACIÓN Y PLANTEAMIENTO NUMÉRICO.....	95
12.3.1.	Clasificación	96
12.3.2.	Planteamiento numérico. Esquemas tipo upwind.....	98
13.	ESQUEMAS NUMÉRICOS DE ALTO ORDEN BIEN EQUILIBRADOS. MÉTODO PROPUESTO 102	
13.1.	INTRODUCCIÓN	102
13.2.	ESQUEMA NUMÉRICO DE TIPO UPWIND CON RECONSTRUCCIÓN ESPACIAL WENO 104	
13.2.1.	Esquema de tipo upwind en volúmenes finitos	104
13.2.2.	Reconstrucción WENO	105
13.2.3.	Tratamiento del término fuente.....	106
13.2.4.	Promediado de los flujos numéricos.....	107
13.3.	ESQUEMA NUMÉRICO DE TIPO CENTRADO.....	108
13.3.1.	Esquema tipo centrado en volúmenes finitos.....	108
13.3.2.	Reconstrucción espacial puntual y promedio	109
13.3.3.	Tratamiento de los flujos numéricos	110
13.3.4.	Reconstrucción de los flujos Runge-Kutta.....	110

13.3.5.	Integración del término fuente	111
13.3.6.	Reconstrucción polinomial no oscilatoria	113
13.4.	PASO TEMPORAL. CONDICIÓN DE ESTABILIDAD	116
13.5.	CASOS TEST CON SOLUCIÓN EXACTA	117
13.5.1.	Rotura de presa en canal horizontal con calado inicial no nulo	117
13.5.2.	Rotura de presa en canal horizontal con frente de avance de la onda seco/mojado	118
13.5.3.	Discusión	119
13.6.	MODELO MATEMÁTICO. MÉTODO PROPUESTO	119
13.7.	DEFINICIÓN DEL PROBLEMA. CONDICIONES INICIALES Y DE CONTORNO	123
14.	CASOS DE LABORATORIO. CONTRASTE NUMÉRICO-EXPERIMENTAL.....	128
14.1.	CANAL CON CONTROL HIDRÁULICO POR CAMBIO DE ANCHURA HIDRODINÁMICO Y CAMBIO DE RÉGIMEN. CASO 0	128
14.2.	CANAL CON CAMBIO “GRADUAL” DE ANCHO Y PÉRDIDAS LOCALES DE ENERGÍA. CASOS 1 A 4	130
15.	CONCLUSIÓN.....	139
16.	LÍNEAS FUTURAS	140
17.	BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS	141
	APÉNDICE. Teorema de Gauss o de la divergencia.....	145

EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS EN EL ANÁLISIS DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE.
APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VËNANT

PARTE 0. MOTIVACIÓN

1. INTRODUCCIÓN

La Dinámica de Fluidos es una parte de la Mecánica de Fluidos que, a su vez, es una rama de la Física. En ingeniería tiene una gran importancia. Sus aplicaciones reales son muy numerosas y abarcan muchos campos de la ingeniería. Así, por ejemplo, hablamos de flujo en presión en tuberías para el caso de las redes de abastecimiento en las ciudades (Ingeniería Industrial y/o Civil), de flujo en lámina libre en colectores y redes de saneamiento también en el caso de ciudades (Ingeniería Civil), y en canales y sistemas de canales de alimentación de plantas potabilizadoras previas a la red de abastecimiento (Ingeniería Civil), análisis del riesgo de inundaciones fluviales (Ingeniería Civil), pero también de oleoductos, centrales hidroeléctricas, sistemas de aire acondicionado y un largo etcétera. Como vemos, se trata de aplicaciones con una importancia grande en la vida y seguridad de las personas.

Esta rama de la Física, la Dinámica de Fluidos, se encarga del estudio del movimiento de los mismos atendiendo a las causas que lo producen (gradientes de presión, componente tangencial de la fuerza gravitatoria, etc.). Las leyes que rigen estos movimientos o flujos, es decir, sus leyes de gobierno, se expresan en forma de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs). La solución exacta de estas ecuaciones en la práctica totalidad de casos reales de interés, no es posible o conocida. Es por ello por lo que se recurre a su resolución aproximada mediante métodos numéricos.

En este trabajo, presentamos el Método de los Volúmenes Finitos (FVM, por sus siglas en inglés) en su aplicación al caso de las ecuaciones que gobiernan el flujo de los fluidos incompresibles (“aquellos para los que su densidad no depende de la presión”). Concretamente, y tras una primera parte en la que se plantean tanto las ideas fundamentales como una aplicación básica del mismo, se estudia en profundidad, su aplicación como método numérico para la resolución del modelo conocido como SWE (Shallow Water Equations) o Sistema de Ecuaciones de Saint-Venant para el flujo en lámina libre no permanente unidimensional.

El FVM, comienza a tomar forma en la década de los años 60 del siglo pasado y es introducido a principios de los años 70, de manera independiente, por McDonald (1971) y por MacCormack y Paullay (1972). Durante ese periodo, los investigadores se centraron en desarrollar métodos numéricos eficientes para resolver problemas de dinámica de fluidos, impulsados por la necesidad de resolver problemas cada vez más complejos en las aplicaciones físicas y de ingeniería. Otra figura fundamental en la formalización y popularización del FVM fue Brian Spalding (1923-2016) de Reino Unido. Spalding, junto a su equipo del Imperial College de Londres, desarrollaron y promovieron su uso también a partir de la década de los 70 del pasado siglo. El método se fue formalizando a medida que los investigadores desarrollaron esquemas numéricos específicos para diferentes tipos de EDPs. Así, Patankar y Spalding jugaron un papel crucial en la formulación y aplicación práctica del FVM a través de su trabajo, que culminó en la publicación del libro "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow" por parte de Suhas Patankar en 1980. Este libro se considera una referencia clásica y ayudó a consolidar tanto la metodología como sus aplicaciones. Desde la década de 1980, el FVM se ha difundido ampliamente y ha sido adoptado en una gran variedad de campos más allá de la dinámica de fluidos, incluyendo la transferencia de calor, la ingeniería estructural, y muchos otros problemas que involucran EDPs. Los avances en el campo de la informática con cada vez mayores capacidades de cálculo, han permitido la implementación de algoritmos cada vez más complejos y precisos basados en este método.

El FVM es, en esencia, un método alternativo al de diferencias finitas, muy similar en algunos aspectos, pero basado en una consideración física, escribir las leyes de gobierno, las EDPs, en forma de leyes de conservación (o de balance; sin tratar de ser riguroso, pero sí con la idea de transmitir el concepto, leyes que se podrían expresar como: “entradas menos salidas –flujos-, igual a variación del ‘volumen’ almacenado”). Esto se hace básicamente, transformando la parte de las derivadas espaciales en divergencias, de manera que, al integrar en los volúmenes o celdas (volúmenes finitos), esas integrales sobre las divergencias, se transforman –mediante la aplicación del teorema de Gauss- en flujos a través de los bordes de esas celdas (superficies de cada volumen finito). Es un método conservativo (intrínsecamente conservativo). Una de sus ventajas fundamentales es que su formulación permite el uso de mallas no estructuradas, lo que lo hace muy versátil para múltiples aplicaciones, especialmente en el campo de la mecánica de fluidos (Dinámica de Fluidos Computacional, CFD, por sus siglas en inglés), para cuyo avance ha sido fundamental.

Para desarrollar el tema planteado, el trabajo se estructura en cuatro partes, tras esta primera Parte 0, de motivación. Así, en la Parte 1, tal y como se ha comentado, se plantean las ideas fundamentales del método y su aplicación básica; sería la parte del documento dedicada a lo que hemos llamado *Primeros Desarrollos*. Seguidamente, en la Parte 2, se plantea la síntesis teórica, así como los fundamentos matemáticos del método, es la que hemos denominado *Formalización*. En la Parte 3 se entra de lleno en la aplicación a la resolución del Sistema de Ecuaciones de Saint-Venant (o modelo de SWE) para el flujo en lámina libre no permanente unidimensional. Se resuelve el sistema de EDPs para el caso de canal rectangular de ancho y pendiente variables, con fricción y pérdidas locales de energía. Tras el estudio del caso, en la Parte 4, se concluye y plantean las líneas futuras, es la *Conclusión* del documento.

2. RELACIÓN DEL TRABAJO CON LOS ODS DE LA AGENDA 2030

El Informe Brundtland, firmado en Oslo el 20 de marzo de 1987 y titulado originalmente 'Nuestro futuro común', definía el *desarrollo sostenible* como “aquel que satisface las necesidades del presente sin comprometer la capacidad de las futuras generaciones para satisfacer las propias”. El Principio 3º de la Declaración de Río sobre el Medioambiente y el Desarrollo (1992) asumió la definición del Informe Brundtland. Por su parte, la Conferencia Mundial sobre Desarrollo Sostenible de Johannesburgo, 10 años más tarde, reafirmó el término como eje clave de la agenda internacional. El 25 de septiembre de 2015, durante la 70ª Asamblea General de la ONU en Nueva York, 193 jefes de Estado y de Gobierno firmaron la Agenda 2030, con 17 Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) y 169 metas económicas, sociales y medioambientales, que será la hoja de ruta del desarrollo esta década, además de una estrategia clave para luchar contra el calentamiento global.

Dadas las múltiples aplicaciones a la vida real de la Dinámica de Fluidos y de la Ingeniería Hidráulica y el Medio Ambiente, áreas ambas de conocimiento sobre las que versa la aplicación de este trabajo, todo lo que consiga mejorar el conocimiento del flujo en lámina libre permitirá optimizar el uso de los recursos hídricos, el consumo de energía y la producción de energía renovable -como la hidroeléctrica p.e.-, el saneamiento de las ciudades y núcleos urbanos (con sus importantísimas consecuencias en términos de salud pública) y mejorar la lucha contra el cambio climático y global, además de la mejora de los sistemas de defensa contra inundaciones de especial relevancia en zonas en vías de desarrollo pues es en ellas donde la vulnerabilidad de las personas es mayor y por tanto donde se contabilizan mayores pérdidas en términos de vidas humanas.

Por tanto, y en el sentido más amplio, la relación del presente trabajo con los ODS se articula a través de los ODS 3, Salud y bienestar; ODS 6, Agua limpia y saneamiento; ODS 7, Energía asequible y no contaminante; ODS 9, Industria, innovación e infraestructuras; ODS 11, Ciudades y comunidades sostenibles; ODS 12, Producción y consumo responsables; ODS 13, Acción por el clima; y, ODS 15, Vida de ecosistemas terrestres (fundamentalmente fluviales, caudales ecológicos, etc); y todo ello, teniendo al agua obviamente como el gran hilo conductor en nuestro caso.

EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS EN EL ANÁLISIS DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE.
APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VÉNANT

*PARTE 1. EL MÉTODO DE VOLÚMENES
FINITOS (FVM). IDEAS FUNDAMENTALES Y
APLICACIÓN BÁSICA. PRIMEROS
DESARROLLOS*

3. PLANTEAMIENTO DEL MÉTODO. UN CASO SENCILLO.

Se trata de un método numérico muy usado en Dinámica de Fluidos Computacional (CFD, por sus siglas en inglés). Se basa, como hemos indicado, en escribir las EDPs en forma de leyes de conservación. Se discretiza en celdas (volúmenes finitos) el dominio en el que se quiere resolver la ecuación o ecuaciones en cuestión. Y, se discretizan las EDPs, ya en su forma conservativa. Gran parte del trabajo asociado al FVM va a ser modelar o proponer un esquema para los flujos a través de los bordes, de las fronteras, de cada volumen finito (o celda) en el cual subdividimos el problema.

Estas leyes de conservación son en general de la forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla F = 0, \quad (3.1)$$

donde ϕ es la función incógnita, y representa a la magnitud física objetivo (velocidad, p.e.), y $F(\phi, x, t)$ (en el caso de un problema 1D) representa el flujo (con el operador nabla, denotamos la divergencia).

Para ilustrar el método, nos apoyamos en un caso sencillo, que tendrá luego relación con situaciones o casos que veremos más adelante. Se trata de la ecuación de advección-difusión 1D lineal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.2)$$

donde u es la función incógnita en este caso, c es la velocidad de advección (constante en el modelo lineal) y ν suele ser una viscosidad. De los términos en derivadas espaciales, el primero es el advectivo y el segundo, el difusivo.

Si queremos reescribir esa ecuación en forma de ley de conservación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial(cu)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Quedando en el miembro de la izquierda la derivada temporal y en el de la derecha, la derivada espacial. De esta manera, los términos del miembro de la derecha, se van a escribir como flujos a través de los bordes del elemento de control (volumen o celda; en 1D, segmentos o intervalos) ya que, subdividimos el dominio o región de interés en estos volúmenes e integramos en cada uno de ellos. Así, si se integra en un volumen la ecuación anterior:

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = - \int_V \frac{\partial(cu)}{\partial x} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) dV.$$

En este caso, en el que el problema es 1D, supongamos que hemos discretizado el dominio de interés en intervalos (volúmenes finitos), con la nomenclatura indicada en la figura 3.1, en la que los puntos representativos de cada volumen, se toman en sus centros.

Aplicando lo dicho a este caso

$$\int_o^e \frac{\partial u}{\partial t} dx = - \int_o^e \frac{\partial(cu)}{\partial x} dx + \int_o^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx.$$

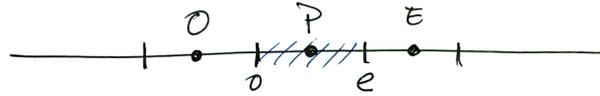


Figura 3.1. Malla 1D. Discretización en intervalos (volúmenes finitos). P punto central de la celda de integración; O y E puntos centrales celdas vecinas, con bordes (fronteras) o y e.

De tal forma que

$$\int_o^e \frac{\partial u}{\partial t} dx = -cu|_o^e + v \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_o^e,$$

con lo que

$$\int_o^e \frac{\partial u}{\partial t} dx = -c(u_e - u_o) + v \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_e - v \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_o,$$

donde los términos del miembro de la derecha representan ‘los flujos de la función a través de los bordes’, en este caso ‘este’ y ‘oeste’, con la notación utilizada.

A partir de este punto del desarrollo, empiezan las aproximaciones, relacionadas con la parte numérica del problema. Estas aproximaciones van a tener que ver fundamentalmente con interpolaciones. Es decir, con cómo por un lado se aproximan las integrales involucradas y por otro, cómo se evalúan los flujos en los bordes de la celda en cuestión. Tanto para la integración como para la evaluación de los flujos, van a intervenir aproximaciones. Se hace, por tanto, una aproximación discreta a cómo es la función en el interior del volumen y en los bordes.

Asumiendo que la longitud de la celda Δx es muy pequeña, una forma sencilla de hacer esto sería

$$\int_o^e \frac{\partial u}{\partial t} dx \approx \frac{\partial u_P}{\partial t} \Delta x.$$

(se reemplaza el valor de esa integral por el valor de la derivada en el punto P por la longitud de la celda; y, todavía faltaría discretizar la parte temporal)

Mientras que las aproximaciones para los flujos se harían (interpolación más sencilla)

$$u_e \approx \frac{1}{2}(u_P + u_E),$$

$$u_o \approx \frac{1}{2}(u_P + u_O).$$

De tal forma que

$$c(u_e - u_o) \approx \frac{1}{2}c(u_E - u_O).$$

La aproximación para las derivadas, podría hacerse por diferencias finitas centradas (aquí se nota el ‘parentesco’ claro de este método con el de Diferencias Finitas)

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_e \approx \frac{u_E - u_P}{\Delta x},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_o \approx \frac{u_P - u_O}{\Delta x},$$

con lo que, sustituyendo ya todo

$$\frac{\partial u_P}{\partial t} \Delta x = -\frac{c}{2}(u_E - u_O) + v \frac{u_E - 2u_P + u_O}{\Delta x},$$

y dividiendo en ambos miembros por Δx

$$\frac{\partial u_P}{\partial t} = -c \frac{(u_E - u_O)}{2\Delta x} + v \frac{u_E - 2u_P + u_O}{\Delta x^2},$$

donde todavía falta discretizar la parte temporal. Para ello, podemos usar el esquema temporal que elijamos, p.e. Euler (el más sencillo). Lo veremos más adelante.

Todo esto es fácilmente generalizable a más de una dimensión. Llamemos ahora ϕ a la función. La ecuación de advección-difusión (3.2), en términos del operador divergencia, escrita para 2 o 3 dimensiones, quedaría

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\mathbf{c}\nabla\phi + v\nabla^2\phi. \quad (3.3)$$

Nota 3.1: con el operador nabla ∇ estamos denotando la divergencia, mientras que con ∇^2 estamos denotando el Laplaciano.

Recordemos que \mathbf{c} es la velocidad de advección, de forma que

$$\mathbf{c} = (c_x, c_y) \text{ en 2D}$$

$$\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z) \text{ en 3D}$$

La ecuación (3.3) puede quedar escrita de forma conservativa como¹

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla\mathbf{c}\phi + \nabla v\nabla\phi,$$

e integrando en un volumen

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = - \int_V \nabla\mathbf{c}\phi dV + \int_V \nabla v\nabla\phi dV.$$

Aplicando ahora el Teorema de Gauss (o de la divergencia) –ver Apéndice-, al miembro de la derecha, podemos escribir

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = - \int_{S(V)} \mathbf{c}\phi\hat{\mathbf{n}}dS + \int_{S(V)} v\nabla\phi\hat{\mathbf{n}}dS,$$

¹ La expresamos en términos de divergencias para que al integrar en volumen se pueda aplicar el Teorema de Gauss convirtiendo esas integrales de volumen en flujos a través de las superficies que encierran dichos volúmenes.

con \hat{n} vector unitario normal exterior y $S(V)$ superficie que engloba al volumen V sobre el que se está integrando.

Aplicándolo al caso 2D (por comodidad de escritura y de representación), discretizamos el dominio en celdas² (figura 3.2)

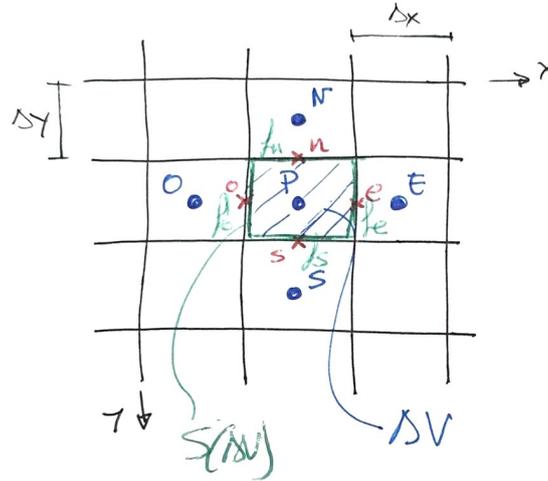


Figura 3.2. Malla 2D. Discretización en celdas (volúmenes finitos).

Aproximaciones:

(integral de la derivada temporal)

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV \approx \frac{\partial \phi_P}{\partial t} \Delta V; \quad \Delta V = \Delta x \Delta y;$$

(flujos)

$$\int_{S(V)} c\phi \hat{n} dS \approx \sum_{f_s, f_e, f_n, f_o} (c\phi)_f (\hat{n})_f \Delta S_f;$$

$$\int_{S(V)} v \nabla \phi \hat{n} dS \approx \sum_{f_s, f_e, f_n, f_o} v (\nabla \phi)_f (\hat{n})_f \Delta S_f;$$

con lo que

$$\sum_{f_s, f_e, f_n, f_o} (c\phi)_f (\hat{n})_f \Delta S_f = c_y \phi_s \Delta x - c_x \phi_o \Delta y - c_y \phi_n \Delta x + c_x \phi_e \Delta y,$$

² La forma de las celdas (volúmenes finitos) en las que discretizamos el dominio o región de interés en la que se quiere conocer la función, puede ser muy diversa. Este método es en ese sentido, muy versátil. P.e. HEC-RAS software para el cálculo del FLL, utiliza celdas de hasta 9 lados; mientras que en 3D, muchos programas de CFD utilizan tetraedros que se van acomodando de forma apropiada.

$$\sum_{f_s, f_e, f_n, f_o} v(\nabla\phi)_f (\hat{\mathbf{n}})_f \Delta S_f \approx v \frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_s \Delta x - v \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_o \Delta y - v \frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_n \Delta x + v \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_e \Delta y.$$

Y, análogamente al caso anterior, con la interpolación más sencilla para los valores de la función en los bordes

$$\phi_s \approx \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_S); \quad \phi_o \approx \frac{1}{2}(\phi_O + \phi_P),$$

$$\phi_n \approx \frac{1}{2}(\phi_N + \phi_P); \quad \phi_e \approx \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_E).$$

Y la aproximación de las derivadas espaciales por diferencias finitas centradas

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_s \approx \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y}; \quad \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_o \approx \frac{\phi_P - \phi_O}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_n \approx \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y}; \quad \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_e \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x}.$$

Sustituyendo todo y proponiendo algún esquema temporal, obtendríamos ya las ecuaciones discretas en términos de los ‘centros’ de cada volumen finito (nodos centrales).

Como se ha comentado, todo esto es fácilmente generalizable a 3D, donde las celdas serían ya claramente volúmenes. También se podría ‘mejorar’ cambiando el tipo de interpolaciones espaciales, lo que tendrá que ver con el orden del esquema. Como también ha sido dicho, se podría utilizar otro tipo de celdas o volúmenes, p.e., en el caso 2D, celdas hexagonales. Incluso, se puede plantear, y así lo hacen algunos programas de análisis de FLL, un mallado con celdas no uniformes y, en cada sector del problema en el que uno tiene interés, hacer distintos tipos de aproximaciones. Todo esto hace de este método, un método tremendamente versátil.

4. APLICACIÓN 'NATURAL' AL CASO DE FLUJOS 2D DE FLUIDOS COMPRESIBLES. ECUACIONES DE EULER.

Vamos a aplicar ya todo lo visto al campo de la Dinámica de Fluidos. Comencemos, por su interés en cuanto a alguna de las particularidades que van a ir apareciendo, por el caso de flujos bidimensionales (ideales³) de fluidos compresibles. Las ecuaciones que gobiernan estos flujos son las conocidas como Ecuaciones de Euler (una ecuación de continuidad o conservación de la masa; dos ecuaciones de momento o cantidad de movimiento; y, una ecuación de energía, escrita en términos de presión). Estas ecuaciones, en variables primitivas (ρ , densidad; \mathbf{v} , velocidad; y, P, presión) quedan escritas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) &= 0, & [\text{continuidad}] \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, & [\text{cantidad de movimiento}] \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= 0, & [\text{cantidad de movimiento}] \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \gamma P \frac{\partial v_x}{\partial x} + \gamma P \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x \frac{\partial P}{\partial x} + v_y \frac{\partial P}{\partial y} &= 0, & [\text{energía}] \end{aligned}$$

donde $(\mathbf{v}\nabla)v_k$ con $k=x, y$, en las ecuaciones de cantidad de movimiento representan los términos advectivos (porque existe un flujo físicamente hablando); mientras que, $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial k}$, $k=x, y$, los términos de fuerza de presión sobre 'las paredes'. γ es la constante adiabática, igual a 5/3.

Escritas en forma matricial quedarían

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \\ v_y \\ P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x & \rho & 0 & 0 \\ 0 & v_x & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & v_x & 0 \\ 0 & \gamma P & 0 & v_x \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \\ v_y \\ P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_y & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_y & 1/\rho \\ 0 & 0 & \gamma P & v_y \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \\ v_y \\ P \end{pmatrix} = 0. \quad (4.1)$$

En el FVM, usamos variables conservativas, ya que se trata, como sabemos, de leyes de conservación. Utilizaremos, por tanto, la conservación de la masa, del momento y de la energía totales. De manera que, el método se diseña para asegurar estas leyes. Es decir, el método numérico con su diseño, asegura que estas cantidades se van a conservar, también en su versión discreta, obviamente. Se diseña para que los flujos a través de las 'paredes' sean lo que alimenta la evolución del interior de cada volumen finito.

³ No hay viscosidad, no hay disipación o pérdida de energía.

El FVM asegura por tanto el cumplimiento de las leyes de conservación desde su propio diseño. No obstante, la aproximación que finalmente tengamos, va a depender de la discretización que hagamos y de la interpolación que utilicemos (el método se basa en aproximaciones locales).

Las variables conservativas en este caso son

- densidad de masa, ρ
- densidad de momento, $\rho v_x, \rho v_y$
- densidad de energía, ρe

donde la energía se expresa a partir de la ecuación

$$e = u + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2),$$

en función de la velocidad y de la energía interna u , relacionada con la presión P a través de

$$P = (\gamma - 1)\rho u.$$

Reescribiendo las ecuaciones de Euler (4.1) en forma conservativa, tenemos (notación ‘condensada’)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P \\ \rho v_x v_y \\ (\rho e + P)v_x \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x \\ \rho v_y^2 + P \\ (\rho e + P)v_y \end{pmatrix} = 0. \quad (4.2)$$

De forma que, si llamamos \mathbf{U} al vector de variables conservativas (el primer término representa la evolución de dichas variables con el tiempo; son las variables incógnita) y \mathbf{F} al vector de flujos (función flujo; el segundo y tercer término representan su divergencia: esas cantidades involucran a los flujos a través de los bordes de los volúmenes finitos), el sistema (4.2) anterior lo podemos escribir de forma compacta (abusando un poco de notación) como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \mathbf{F} = 0, \quad (4.3)$$

donde

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho e).$$

De esta manera, ya tenemos las ecuaciones preparadas para integrarlas en el volumen finito correspondiente y poder aplicar el Teorema de Gauss. Así, se describe la evolución en términos de los flujos sobre cada borde o frontera.

Para la interpolación de la función flujo, en general, dispondremos de los Resolvedores de Riemann y del método propuesto por Sergei Godunov⁴. Esto tiene, como veremos más adelante, una aplicación importante en fluidos, sobre todo en el caso de problemas donde hay una compresibilidad muy grande – en el caso de fluidos compresibles-, en general, gradientes importantes, y se pueden generar shocks o discontinuidades. Estas metodologías serán importantes para ver cómo trata el esquema numérico estas

⁴ Uno de los precursores de los Resolvedores de Riemann.

discontinuidades o saltos que físicamente se producen. Directamente relacionado con este tema particular, hablaremos en el apartado siguiente, de los ‘Limitadores de Flujo’.

No obstante, lo dicho en el último párrafo, vamos a plantear ahora la aplicación del FVM en la resolución de las ecuaciones de Euler en un caso donde físicamente no hay ningún salto o discontinuidad. Así, haremos de momento, las cosas de la forma más intuitiva y sencilla posible para que, desde el punto de vista conceptual, todo se entienda perfectamente.

Sobre el tema de los Resolvedores de Riemann y el método de Godunov, volveremos en el apartado 6 al hablar de las Ecuaciones de Saint Venant o de aguas someras (SWE, por sus siglas en inglés).

Supongamos pues, un mallado regular de celdas (volúmenes) cuadradas de lado $\Delta = \Delta x = \Delta y$. Generamos la masa, el momento y la energía totales en cada celda i (figura 4.1) como

$$Q_i = U_i \Delta^2.$$

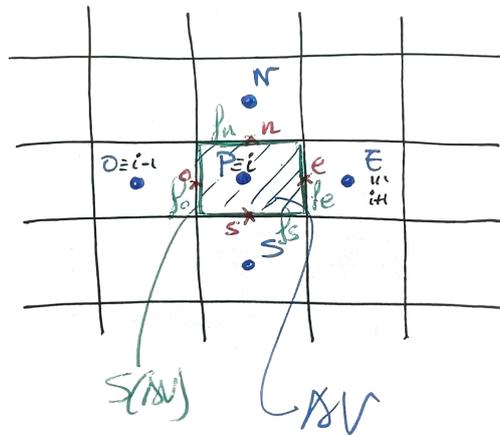


Figura 4.1. Malla 2D. Discretización en celdas (volúmenes finitos). Ecuaciones de Euler 2D. (En la notación actual, P=i, celda de interés; j=celdas vecinas)

La ecuación de evolución queda entonces, una vez que integramos (aplicando Gauss)

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} \Delta^2 = - \sum_j F_{ij} \Delta, \quad (4.4)$$

donde F_{ij} representa el flujo entre celdas vecinas i, j (lo que antes llamábamos bordes o interfaces $n, s, e,$ y o). Para evaluar estos flujos vamos a necesitar los valores de las cantidades en esas interfaces. Es ahí donde interviene algún tipo de interpolación, y para lo que utilizaríamos en su caso, los Resolvedores de Riemann (que interpolan el valor de las funciones a los bordes).

Nota 4.1: Con fluidos, las interpolaciones se hacen con las variables primitivas. Esto es así para evitar valores negativos de la presión (que, de no ser así, podrían aparecer en función del método de interpolación utilizado). Si interpolamos directamente la presión, no va a dar nunca un valor negativo. Después, se construyen las variables conservativas, que son las que necesitamos para aplicar el esquema numérico (discreto y conservativo).

La más sencilla de esas interpolaciones, suficiente para el caso que nos ocupa, es la basada en la aproximación de los gradientes.

Así pues, si se quiere el valor de alguna cantidad “f” en una frontera (interface), p.e., la que corresponde al punto $i + \frac{1}{2}, j$, la interpolación sería

$$f_{i+\frac{1}{2},j} \approx f_{i,j} + \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2},$$

aproximación de segundo orden, donde para $\frac{\partial f_{i,j}}{\partial x}$ buscamos alguna aproximación al gradiente en esa frontera. Se podría utilizar, p.e. la aproximación al gradiente, basada en diferencias finitas centradas

$$\left\{ \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x}, \frac{\partial f_{i,j}}{\partial y} \right\} \approx \left\{ \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}, \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \right\}.$$

Como hemos dicho ya en reiteradas ocasiones, a veces, si hay saltos (“discontinuidades en los valores de las variables, llamadas shocks”), se usan otras aproximaciones al gradiente u otras interpolaciones⁵ (Resolvedores de Riemann).

Nota 4.2: En fluidos, a veces no se sabe ‘desde dónde puede venir el flujo’, por ello lo que en ocasiones se hace es interpolar ‘por un lado y por el otro, o arriba y abajo’ y tomar como valor del flujo, el promedio de las interpolaciones. Aún más, hay quien incluso introduce un término difusivo (proporcional a la diferencia de velocidades en las fronteras, p.e.), ficticio, para controlar inestabilidades numéricas, pero esto no deja de ser un ‘parche’.

Incluimos a continuación el enlace a un ejemplo de aplicación de las ecuaciones de flujos compresibles bidimensionales, la Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz⁶ (<https://levelup.gitconnected.com/create-your-own-finite-volume-fluid-simulation-with-python-8f9eab0b8305>) –véase también figura 4.2-.



Figura 4.2. IKH. Izda.: en el planeta Saturno, formada por la interacción de dos bandas en la atmósfera del planeta (fte.: NASA). Dcha.: visible por nubes sobre el Monte Duval, Australia (fte.: GRAHAMUK de la Wikipedia en inglés).

⁵ Hemos llamado a este apartado ‘Aplicación Natural’, ya que estamos planteado el caso de la manera más sencilla posible de forma que todo está resultando intuitivo; en definitiva, natural.

⁶ Este fenómeno puede ocurrir cuando un flujo se introduce dentro de una masa fluida en reposo o cuando hay suficiente diferencia de velocidad a través de la interfase entre los dos fluidos. Helmholtz estudió la dinámica de dos fluidos de diferentes densidades cuando se presenta una pequeña perturbación, tal como una onda introducida en la superficie que separa los fluidos.

5. LIMITADORES DE FLUJO

Como sabemos, el FVM se basa en escribir las ecuaciones en forma de divergencias para después poder integrarlas, aplicar el Teorema de Gauss y que nos queden los términos expresados como flujos. En 1D, teníamos –formulación semidiscreta; a falta de discretizar la parte temporal- (Figura 5.1):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x} \left[F\left(u_{i+\frac{1}{2}}\right) - F\left(u_{i-\frac{1}{2}}\right) \right]. \quad (5.1)$$

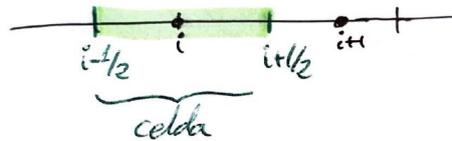


Figura 5.1. Malla 1D. Discretización en intervalos (volúmenes finitos). Nomenclatura.

Pues bien, en esquemas de alta resolución (esquemas numéricos utilizados para resolver problemas en ciencias e ingeniería), cuando es previsible que la función (u en este caso) pueda presentar gradientes muy fuertes o choques⁷, se utilizan los denominados limitadores de flujo. Se usan particularmente en el campo de la Dinámica de Fluidos (veremos un ejemplo de cómo los utiliza el software HEC-RAS para el cálculo del FLL). Se usan para evitar oscilaciones espurias que de otro modo ocurrirían con esquemas de discretización espacial de alto orden, debido a choques, discontinuidades o cambios bruscos en el ‘dominio’ de la solución. El objetivo es limitar el gradiente de la solución cerca de los choques o discontinuidades.

A veces, también se denominan limitadores de pendiente, aunque no son conceptos totalmente equivalentes. En general, el término limitador de flujo se usa cuando el limitador actúa sobre los flujos del sistema; mientras que, el limitador de pendiente se usa cuando el limitador actúa sobre los estados del sistema, como presión, velocidad, etc.

En principio, se intentó reproducir numéricamente estas situaciones (gradientes fuertes, choques, etc.) con aproximaciones de orden alto, pero desde el punto de vista de la estabilidad del método numérico, se ha demostrado mejor, utilizar una especie de ‘parche o artificio matemático’ que básicamente consiste en ‘moverse entre una aproximación de baja resolución y otra de alta resolución’. Es decir, para aproximar los flujos se utiliza una especie de combinación entre la aproximación de baja resolución y la de alta. Para ello utilizamos lo que se ha dado en llamar, limitador de flujo.

⁷ Donde p.e., pueda haber variaciones fuertes de densidad en el caso de flujos de fluidos compresibles o del campo de velocidades en incompresibles, es decir, lo que físicamente conocemos en general como choques o ‘discontinuidades’.

En definitiva, el uso de limitadores de flujo, junto con un esquema apropiado de alta resolución, hace que las soluciones disminuyan la variación total (TVD; este aspecto se verá con más detalle en la Parte 2 de este texto).

Así, se propone el uso de

$$F\left(u_{i+\frac{1}{2}}\right) = f_{i+\frac{1}{2}}^{baja} - \phi(r_i) \left(f_{i+\frac{1}{2}}^{baja} - f_{i+\frac{1}{2}}^{alta} \right),$$

$$F\left(u_{i-\frac{1}{2}}\right) = f_{i-\frac{1}{2}}^{baja} - \phi(r_{i-1}) \left(f_{i-\frac{1}{2}}^{baja} - f_{i-\frac{1}{2}}^{alta} \right),$$

donde

f^{baja} = flujo de baja resolución

f^{alta} = flujo de alta resolución

(los conceptos de baja y alta resolución, tienen que ver con la interpolación realizada para aproximar los flujos)

$\phi(r)$ = limitador de flujo (es como vemos, una especie de ‘peso’)

$$r_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i},$$

con $\phi(r) \geq 0$ de forma que

- Si $\phi(r) = 0$: se usa solamente aproximación de baja resolución para el flujo; menos preciso pero más disipativo, por eso controla mejor los choques (caso de pendiente pronunciada, pendientes opuestas o pendiente nula);
- Si $\phi(r) = 1$: se usa solamente aproximación de alta resolución para el flujo; más preciso (caso de soluciones suaves).

Existen distintos limitadores propuestos en la literatura [26, 27, 28]. Los diferentes limitadores tienen diferentes características de conmutación y se seleccionan de acuerdo con el problema a resolver y el esquema numérico de resolución. Debemos señalar que no se ha encontrado ningún limitador concreto que funcione bien para cualquier tipo de problema, por lo que en general, se acaban seleccionando por prueba y error.

Como ejemplos de algunas funciones limitador de flujo, podemos citar los siguientes de entre los más utilizados:

Charm (Zhou, 1995)

$$\phi_{cm}(r) = \begin{cases} \frac{r(3r+1)}{(r+1)^2}, & r > 0; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi_{cm}(r) = 3 \\ 0, & r \leq 0 \end{cases}.$$

Hcus (Waterson and Deconinck, 1995)

$$\phi_{hc}(r) = \frac{1.5(r + |r|)}{(r + 2)}; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi_{hc}(r) = 3.$$

Minmod-simétrico (Roe, 1986)

$$\phi_{mm}(r) = \text{máx}[0, \text{min}(1, r)]; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi_{mm}(r) = 1.$$

Van Albada 1 –simétrico (Van Albada et al., 1982)

$$\phi_{va1}(r) = \frac{r^2 + r}{r^2 + 1}; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi_{va1}(r) = 1.$$

Van Albada 2 –forma alternativa para esquemas de orden espacial alto (Kermani, 2003)

$$\phi_{va2}(r) = \frac{2r}{r^2 + 1}; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi_{va2}(r) = 0.$$

Los limitadores señalados como simétricos, satisfacen la siguiente propiedad de simetría

$$\frac{\phi(r)}{r} = \phi\left(\frac{1}{r}\right),$$

que es una propiedad deseable, ya que asegura que las acciones de limitación para gradientes hacia adelante y hacia atrás, operen de la misma manera.

6. ANÁLISIS NUMÉRICO DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES. FLUJO BIDIMENSIONAL DE FLUIDOS INCOMPRESIBLES

6.1. INTRODUCCIÓN. ECUACIONES

Estudiamos ahora el caso estándar, de flujo bidimensional de fluidos incompresibles, a partir de las Ecuaciones de Navier-Stokes en 2D (lo vemos en 2D por comodidad, pero todas estas ideas son fácilmente extensibles al caso 3D). Se trata de EDPs para campos, en este caso de velocidades, que evolucionan con el tiempo.

Las ecuaciones pues de Navier-Stokes para el campo de velocidades $\mathbf{v} = v(x, y, t)$ del flujo de un fluido incompresible (con un enfoque Euleriano del flujo) son

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 v_y$$

(estas ecuaciones se pueden complicar más con términos gravitatorios en el miembro de la derecha)

donde como siempre, P es la presión, ρ es la densidad del fluido y ν su viscosidad (que tiene que ver con la resistencia a las tensiones tangenciales). En estas ecuaciones, en el miembro de la izquierda, las derivadas espaciales multiplicadas por el campo de velocidades representan la advección de dicho campo por él mismo, se trata de términos no lineales; y, a la derecha, tenemos por un lado el gradiente de presión y por otro, los términos difusivos correspondientes a los términos con el Laplaciano. Son ecuaciones pues que expresan la evolución de campo de velocidades y que espacialmente comprenden términos tanto advectivos como difusivos, además del gradiente de presión en ambas direcciones, que fuerzan al flujo a nivel de elementos de fluido vecinos.

En forma vectorial y compacta (6.1) quedarían escritas

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \frac{-1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (6.2)$$

Al tratarse ahora de flujos de fluidos incompresibles, se puede pensar a priori, que estamos ante un problema más sencillo. De hecho, físicamente lo es, pero no así desde el punto de vista numérico. Para poder resolver estas ecuaciones de gobierno, al discretizar debemos garantizar esa incompresibilidad. Se debe asegurar, por tanto, numéricamente, que la divergencia del campo de velocidades es nula, que es la condición que garantiza dicha incompresibilidad. Veremos para ello, cuál es la estrategia de cálculo, a partir del algoritmo correspondiente.

Nota 6.1: De manera exclusiva en el caso bidimensional, para atacar este tipo de problemas numéricamente, se usa a veces una forma alternativa de las ecuaciones en términos de la *vorticidad* y de la *función corriente*. Esta formulación se ha utilizado tanto en el caso de flujos atmosféricos como en las ecuaciones de FLL en aguas someras o poco profundas (SWE).

Hemos dicho pues que, la condición de incompresibilidad tiene que ver con una condición sobre el campo de velocidades (que es la incógnita del problema). De tal forma que, la divergencia de ese campo de velocidades tiene que ser nula, es decir

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (6.3)$$

Se dice entonces que el campo de velocidades es solenoidal.

En cuanto al término del gradiente de presión, y relacionado con el método que vamos a plantear para resolver numéricamente el problema, cabe señalar que la presión es una magnitud (escalar) que está relacionada con el campo de velocidades (vectorial). Esto puede ponerse de manifiesto tomando divergencias en la ecuación vectorial de Navier-Stokes. Así, se llega a

$$\nabla^2 P = -\rho \nabla[(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}], \quad (6.4)$$

que es una ecuación del tipo Poisson. Con lo que, conociendo el campo de velocidades, puedo conocer las presiones. Son campos vinculados.

6.2. FVM. EL ALGORITMO SIMPLE.

El método numérico va a diseñarse para conseguir $\nabla \mathbf{v} = 0$. Para ello, se va a ‘separar’ el campo de velocidades del campo de presiones. De manera que, resolvemos en primera instancia, el campo de velocidades ‘sin la presión’, y después, se obtiene la presión para garantizar que el campo de velocidades tenga divergencia nula, a partir de la última ecuación anterior.

Reescribiendo las ecuaciones de Navier-Stokes en forma de leyes de conservación (agrupando la parte de derivadas espaciales en divergencias), y considerando la condición de divergencia nula para el campo de velocidades, se llega a

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \nabla(v_x \mathbf{v}) = \frac{-1}{\rho} \nabla(P \hat{x}) + \nu \nabla(\nabla v_x) \quad , \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \nabla(v_y \mathbf{v}) = \frac{-1}{\rho} \nabla(P \hat{y}) + \nu \nabla(\nabla v_y)$$

Con lo que ya está todo preparado para poder integrar en volumen y aplicar Gauss (estos volúmenes son las celdas de nuestro problema en las que vamos a subdividir la región de interés):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V v_x dV = - \int_S v_x \mathbf{v} \hat{n} dS - \frac{1}{\rho} \int_S P n_x dS + \int_S \nu \nabla v_x \hat{n} dS, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V v_y dV = - \int_S v_y \mathbf{v} \hat{\mathbf{n}} dS - \frac{1}{\rho} \int_S P n_y dS + \int_S v \nabla v_y \hat{\mathbf{n}} dS,$$

donde todo lo que aparece en los miembros de la derecha de las ecuaciones (6.6) anteriores, representa los flujos a través de las celdas. Y todo ello, con

$$\int_S \mathbf{v} \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad (6.7)$$

Cabe destacar, aunque lo veremos en detalle seguidamente, que para el caso que ahora nos ocupa, se van a tomar como puntos representativos en cada celda, puntos distintos para el campo de velocidades y para el de presiones.

Recordemos que, en la estrategia de cálculo numérico para resolver este problema, se va a obtener primero el campo de velocidades ‘sin la presión’, es decir, sin los términos con las integrales de la presión de las ecuaciones anteriores, y luego, se va a calcular la presión para satisfacer la condición de divergencia nula del campo de velocidades, ligada a la incompresibilidad del fluido. Posteriormente, se actualizará el campo de velocidades con el gradiente de presión obtenido en el paso previo. A esta estrategia de cálculo se la conoce como Método de Proyección o también, más comúnmente, como Algoritmo SIMPLE (por sus siglas en inglés: Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations). Es una especie de método predictor- corrector, se avanza un paso con una especie de predictor del campo de velocidades, con el que se calcula la presión, y luego se corrige dicho campo de velocidades.

Para fijar ideas, supongamos que hacemos un Euler en el tiempo (aunque se podría hacer cualquier otra cosa no tan sencilla, como p.e., Runge-Kuta, o lo que sea). Llamemos A_{ij} al término advectivo y D_{ij} al difusivo. El esquema de cálculo sería pues

$$\frac{\hat{\mathbf{v}}_{ij} - \mathbf{v}_{ij}^n}{\Delta t} = -A_{ij}^n + D_{ij}^n, \quad [\text{paso 1, predictor}]$$

$$\frac{\mathbf{v}_{ij}^{n+1} - \hat{\mathbf{v}}_{ij}}{\Delta t} = \frac{-1}{\rho} \nabla P, \quad [\text{paso 3, corrector}]$$

donde P la obtenemos de la condición (si tomamos divergencias en la última ecuación anterior):

$$\frac{\nabla \mathbf{v}_{ij}^{n+1} - \nabla \hat{\mathbf{v}}_{ij}}{\Delta t} = \frac{-\nabla \hat{\mathbf{v}}_{ij}}{\Delta t} = \frac{-1}{\rho} \nabla^2 P, \quad [\text{paso 2, 'truco'}]$$

que es de nuevo, una ecuación de tipo Poisson. Es decir, al obligar a la presión a cumplir esta condición (igualdad de la derecha) conseguimos que la divergencia del campo de velocidades sea nula. En todo este planteamiento

\mathbf{v}_{ij}^n = campo de velocidades en el punto representativo de la celda ij en el paso de tiempo n;

\mathbf{v}_{ij}^{n+1} = ídem en el paso de tiempo n+1; y,

$\hat{\mathbf{v}}_{ij}$ = campo de velocidades aproximado (sin la presión) en el punto representativo de la celda ij en el paso de tiempo n+1;

6.3. FVM. MALLADO Y DISCRETIZACIÓN.

Se utiliza una malla staggered o escalonada. El campo de velocidades y la presión, se expresan en distintas mallas, lo que obviamente, está directamente relacionado con cómo interpolaremos los campos. De esta forma, a medida que se va construyendo el método al escribir las ecuaciones discretizadas, aparece todo como de manera natural. La presión se expresa en el centro de la celda en cuestión, mientras que las velocidades quedarán expresadas en los centros de los bordes de la celda en cuyo centro se evaluó la presión, siendo a su vez esos puntos, los centros de su propia malla (figura 6.1). Los índices i, j (i para la coordenada x , j para la coordenada y) del campo de velocidades quedan así ligados a los índices i, j del campo de presiones; de manera que, son los inmediatamente anteriores en x e y respectivamente (en un problema 2D).

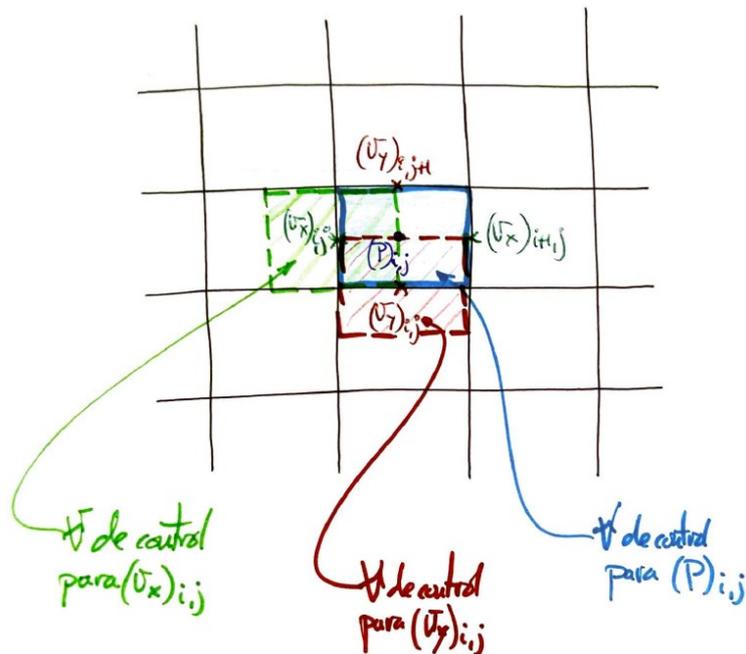


Figura 6.1. Malla escalonada 2D, campos de presión y velocidades. Discretización en celdas (volúmenes finitos). Nomenclatura: $(P)_{i,j}$ presión en el punto (i, j) ; $(v_x)_{i,j}$ componente x del campo de velocidades en (i, j) ; $(v_y)_{i,j}$ componente y del campo de velocidades en (i, j) .

Una vez elegido este indexado, queda definida la escritura de los flujos de cada variable (se podría haber elegido otro, lo único que hay que hacer es ser coherente entre esta elección y la escritura posterior de las ecuaciones, y su programación). Y, en consecuencia, se usan los correspondientes volúmenes de control. Estos están para presiones y velocidades, como vemos, desfasados.

Una vez hecho esto, se procede a integrar numéricamente las ecuaciones. Así, para el **paso 1**, 'sin la presión', se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \hat{v}_x dV = - \int_S v_x \mathbf{v} \hat{\mathbf{n}} dS + \int_S v \nabla v_x \hat{\mathbf{n}} dS,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \hat{v}_y dV = - \int_S v_y \mathbf{v} \hat{\mathbf{n}} dS + \int_S v \nabla v_y \hat{\mathbf{n}} dS,$$

que evolucionan el campo de velocidades en una primera etapa de ‘predicción’ sin la presión. En su versión discreta (imaginemos por sencillez y para fijar ideas, Euler para el tiempo, aproximando la integral de volumen al valor de la velocidad en el centro de su celda por $\Delta x \Delta y$, miembro izquierdo; y, con todos los flujos espaciales en el miembro derecho)

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{v}_x)_{i,j} - (v_x)_{i,j}}{\Delta t} \Delta x \Delta y &= (v_x v_x)_o \Delta y - (v_x v_x)_e \Delta y + (v_x v_y)_s \Delta x - (v_x v_y)_n \Delta x \\ &+ v \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \Big|_e \Delta y - \frac{\partial v_x}{\partial x} \Big|_o \Delta y + \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_n \Delta x - \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_s \Delta x \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{v}_y)_{i,j} - (v_y)_{i,j}}{\Delta t} \Delta x \Delta y &= (v_y v_x)_o \Delta y - (v_y v_x)_e \Delta y + (v_y v_y)_s \Delta x - (v_y v_y)_n \Delta x \\ &+ v \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} \Big|_e \Delta y - \frac{\partial v_y}{\partial x} \Big|_o \Delta y + \frac{\partial v_y}{\partial y} \Big|_n \Delta x - \frac{\partial v_y}{\partial y} \Big|_s \Delta x \right]. \end{aligned}$$

De forma que

(velocidades)

$$(v_x)_e = \frac{(v_x)_{i+1,j} + (v_x)_{i,j}}{2}; (v_x)_o = \frac{(v_x)_{i,j} + (v_x)_{i-1,j}}{2}; (v_x)_n = \frac{(v_x)_{i,j+1} + (v_x)_{i,j}}{2}; (v_x)_s = \frac{(v_x)_{i,j} + (v_x)_{i,j-1}}{2};$$

$$(v_y)_e = \frac{(v_y)_{i+1,j} + (v_y)_{i,j}}{2}; (v_y)_o = \frac{(v_y)_{i,j} + (v_y)_{i-1,j}}{2}; (v_y)_n = \frac{(v_y)_{i,j+1} + (v_y)_{i,j}}{2}; (v_y)_s = \frac{(v_y)_{i,j} + (v_y)_{i,j-1}}{2}$$

(“gradientes”)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \Big|_e = \frac{(v_x)_{i+1,j} - (v_x)_{i,j}}{\Delta x}; \frac{\partial v_x}{\partial x} \Big|_o = \frac{(v_x)_{i,j} - (v_x)_{i-1,j}}{\Delta x}; \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_n = \frac{(v_x)_{i,j+1} - (v_x)_{i,j}}{\Delta y}; \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_s = \frac{(v_x)_{i,j} - (v_x)_{i,j-1}}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} \Big|_e = \frac{(v_y)_{i+1,j} - (v_y)_{i,j}}{\Delta x}; \frac{\partial v_y}{\partial x} \Big|_o = \frac{(v_y)_{i,j} - (v_y)_{i-1,j}}{\Delta x}; \frac{\partial v_y}{\partial y} \Big|_n = \frac{(v_y)_{i,j+1} - (v_y)_{i,j}}{\Delta y}; \frac{\partial v_y}{\partial y} \Big|_s = \frac{(v_y)_{i,j} - (v_y)_{i,j-1}}{\Delta y}$$

Vemos como, con las mallas elegidas (ligadas) la escritura de estas ecuaciones ha resultado bastante natural.

Todo esto, nos permite, realizar los cálculos correspondientes al paso 1 y, por tanto, acabar obteniendo:

$$\hat{\mathbf{v}}_{i,j} = (\hat{v}_{x_{i,j}}, \hat{v}_{y_{i,j}}).$$

A partir de la condición inicial (c.i.) dada, en un primer paso de tiempo, obtendríamos ese campo de velocidades aproximado para todo (i, j), obviamente teniendo en cuenta además las condiciones de contorno (c.c.), aunque, de momento, pensemos en un caso periódico (“que es lo que uno hace cuando se quiere olvidar de los contornos”). De manera que, debidamente programado (doble bucle ‘for’ o una matriz), obtendríamos en cada instante el campo de velocidades ‘sin la presión’ (predictor) en toda la malla.

Ahora, para obtener la presión, procedemos tal y como indicamos, a partir de

$$\nabla^2 P = \frac{\rho \nabla \hat{\mathbf{v}}_{ij}}{\Delta t}.$$

Que nos asegura que la divergencia numérica del campo de velocidades es nula. Discretizamos esta ecuación según la malla de celdas azules (figura 6.1). De manera que, partiendo de la ecuación anterior, la vamos a aproximar por (**paso 2**)

$$\begin{aligned} & \frac{P_{i-1,j} - 2P_{i,j} + P_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{P_{i,j-1} - 2P_{i,j} + P_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \\ &= \frac{\rho}{\Delta t} \left[\frac{(\hat{v}_x)_{i+1,j} - (\hat{v}_x)_{i,j}}{\Delta x} + \frac{(\hat{v}_y)_{i,j+1} - (\hat{v}_y)_{i,j}}{\Delta y} \right], \end{aligned}$$

donde en el miembro de la izquierda se tiene la aproximación al Laplaciano (diferencias finitas centradas de segundo orden), mientras que, en el derecho, tenemos los flujos a través de las caras de la celda azul, que al haber elegido las mallas como lo hemos hecho, no requiere de interpolación adicional. Esto no es otra cosa que un problema de Poisson en el que la incógnita es el campo de presiones $P_{i,j}$ conocido el campo $\hat{\mathbf{v}}_{i,j}$ (queda como un sistema lineal, con una matriz de bandas). Este paso se tiene que hacer en cada iteración del campo de velocidades, lo que numéricamente tiene cierto coste computacional.

Resta finalmente el **paso 3**, consistente en actualizar o corregir el campo de velocidades en base a considerar el gradiente de presión una vez obtenida ésta. Es decir:

$$\begin{aligned} \frac{(v_x)_{ij}^{n+1} - (\hat{v}_x)_{ij}}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\Delta x}, \\ \frac{(v_y)_{ij}^{n+1} - (\hat{v}_y)_{ij}}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{\Delta y}, \end{aligned}$$

Con esto, se dispone ya de toda la formulación para ir obteniendo a lo largo del tiempo y para toda la malla en la que hemos discretizado la región de interés, el campo de velocidades del flujo

$$\mathbf{v}_{i,j} = (v_{x_{i,j}}, v_{y_{i,j}}).$$

Se dispone, por tanto, de toda la ‘teoría’ para poder implementar el método en el código correspondiente. La principal ventaja de este algoritmo es que nos asegura un mejor mantenimiento de la condición de compresibilidad. De hecho, esta condición va a tener que ver mucho con la tolerancia del error que vayamos a exigir en la resolución de la ecuación de Poisson de las presiones (paso 2). Por ello, al ir

evaluando cómo se cumple la condición de divergencia nula, se ve que este método funciona muy bien, y por eso es muy utilizado.

6.4. FVM. TRATAMIENTO DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO.

Lo habitual en Mecánica de Fluidos, en el caso de flujos reales y en Ingeniería Hidráulica en todo caso, es trabajar con condiciones de contorno y no suponer que éstas son periódicas. En los problemas reales, los modelos representan una porción de esa realidad, y en los bordes, debemos poner el efecto de la realidad no modelada sobre la región de interés, contemplada por el modelo matemático.

Supongamos que estamos resolviendo el problema del flujo de un fluido, limitado por una pared (figura 6.2, amarillo), el cajero de un canal, p.e., idénticamente se haría para cualquier otra pared física, el concepto no cambia. Y, supongamos, además, que estamos en un problema en el que no hay flujo entrante a través de la pared (lo habitual)

$$v_x|_{pared} = 0.$$

Pero, en el que sí está permitido el flujo tangencial (a lo largo de la pared), es decir

$$v_y|_{pared} = v_p,$$

Pues bien, estas dos condiciones, constituyen las cc para el campo de velocidades junto a la pared. Veamos cómo tratarlo dentro del método.

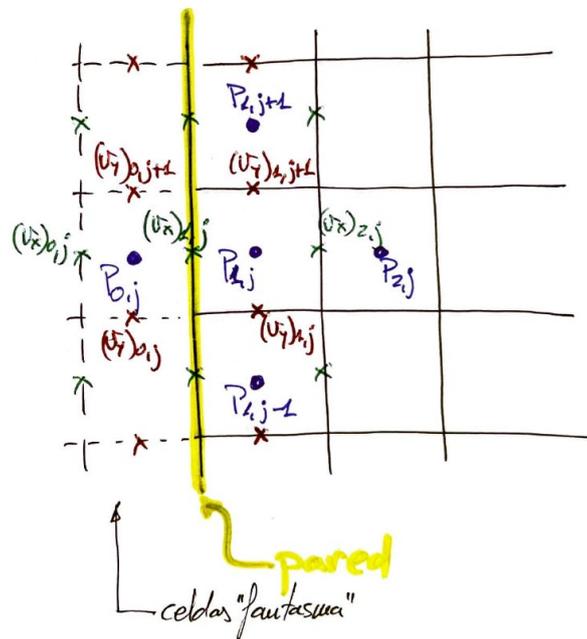


Figura 6.2. Malla escalonada 2D, campos de presión y velocidades. Condición de contorno (efecto de la pared).

Para reflejar esto numéricamente, imponemos la condición

$$(v_x)_{1,j} = 0, \quad \forall j.$$

Mientras que para la componente 'y', cuya malla está desplazada, usamos lo que se denominan 'celdas fantasma'. Se trata de celdas ficticias, que están más allá de la pared o frontera física. En general, se

agregarán celdas fantasma en todo el contorno del problema. Así, para esa componente, la condición queda

$$\frac{(v_y)_{1,j} + (v_y)_{0,j}}{2} = v_p, \quad \forall j.$$

Esto habrá obviamente que tenerlo en cuenta a la hora de escribir las ecuaciones.

En cuanto a la presión, se debe proceder de forma consistente con lo indicado. Se tiene definida la presión en una malla que no incluye la pared, en el sentido de que el punto representativo de la celda pegada a la pared está en su centro y no junto a la misma. Pero, alguna consideración debemos hacer en relación al gradiente de presión en la dirección perpendicular a la pared, porque es el que ‘fuerza’ el campo de velocidades. Para tener eso en cuenta, debemos de nuevo satisfacer la condición de divergencia nula, que de forma discreta supone

De la ecuación de continuidad ($\text{div } v = 0$), explícitamente

$$\frac{(v_x)_{2,j}^{n+1} - (v_x)_{1,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(v_y)_{1,j+1}^{n+1} - (v_y)_{1,j}^{n+1}}{\Delta y} = 0,$$

que, por la condición de pared, queda en

$$\frac{(v_x)_{2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(v_y)_{1,j+1}^{n+1} - (v_y)_{1,j}^{n+1}}{\Delta y} = 0,$$

pero la velocidad en el ‘paso temporal $n+1$ ’, se calculaba

$$(v_x)_{i,j}^{n+1} = (\hat{v}_x)_{ij} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\Delta x}.$$

En particular, sustituyendo esto último en la penúltima ecuación

$$\frac{(\hat{v}_x)_{2,j} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{P_{2,j} - P_{1,j}}{\Delta x}}{\Delta x} + \frac{(\hat{v}_y)_{1,j+1} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{P_{1,j+1} - P_{1,j}}{\Delta y} - (\hat{v}_y)_{1,j} + \frac{\Delta t}{\rho} \frac{P_{1,j} - P_{1,j-1}}{\Delta y}}{\Delta y} = 0,$$

de donde, operando y reorganizando

$$\frac{P_{2,j} - P_{1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{P_{1,j-1} - 2P_{1,j} + P_{1,j+1}}{(\Delta y)^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left[\frac{(\hat{v}_x)_{2,j}}{\Delta x} + \frac{(\hat{v}_y)_{1,j+1} - (\hat{v}_y)_{1,j}}{\Delta y} \right].$$

Que es la alternativa a la ecuación de Poisson para la presión en el paso 2, en el caso de las celdas junto a la pared ($P_{0,j}$ no aparece, lo que no importa, ya que físicamente lo que importa es el gradiente de presión y no el valor de $P_{0,j}$). Por tanto, a la hora de escribir la matriz para resolver el problema de Poisson, habrá que tener esta ecuación en cuenta para los términos del borde (pared) correspondiente. De manera que, esto ya nos permite resolver el problema completo teniendo en cuenta los contornos.

La extensión de todo lo visto en este caso, a 3D, es bastante inmediata, ya que, conceptualmente no cambia nada. Las ideas son las vistas.

EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS EN EL ANÁLISIS DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE.
APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VÉNANT

*PARTE 2. SÍNTESIS TEÓRICA Y
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DEL FVM.
FORMALIZACIÓN*

NOTA:

Esta Parte 2, plantea, como se ha comentado en la Introducción de este texto, la síntesis teórica, así como los fundamentos matemáticos del Método de Volúmenes Finitos. Su contenido se presenta y está explicado tomando [30] como referencia fundamental entre otras referencias importantes, como [1, 29], principalmente. Se ha estudiado, extraído y sintetizado de las mismas aquellos contenidos teóricos que resultan de interés para el tema del trabajo que nos ocupa.

7. ANÁLISIS TEÓRICO DE LEYES DE CONSERVACIÓN

7.1. INTRODUCCIÓN

En este apartado se va a introducir las ecuaciones hiperbólicas de leyes de conservación desde un punto de vista teórico, repasando sus principales propiedades con el objetivo de obtener toda aquella información que posteriormente pueda ser de interés a la hora de diseñar métodos numéricos adecuados para su resolución.

Como hemos visto en la Parte 1, en multitud de problemas del campo de la física y de la ingeniería están presentes las leyes de conservación (también en otros campos como la biología por ejemplo o la química). En virtud de estas leyes, la cantidad de materia/sustancia/magnitud física contenida en un volumen de control solamente varía por los flujos de esta materia/sustancia/magnitud física a través de sus fronteras. Hablamos así, p.e., de la ley de conservación de la masa, de la ley de continuidad (de caudales), de la ley de conservación de la energía, etc.

Desde el punto de vista matemático, podemos formalizar las ecuaciones que definen estas leyes de conservación como ecuaciones en derivadas parciales de tipo hiperbólico. Sea pues un intervalo $I = (x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$ y una variable de interés $u = u(x, t) = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$, definida para cada $x \in I$ e instante de tiempo $t \geq 0$. Esta variable podría ser la temperatura de una barra, la concentración de una sustancia o la velocidad de un fluido en movimiento. El principio de conservación se expresa entonces matemáticamente como

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = f(x_1, t) - f(x_2, t), \quad (7.1)$$

donde $f = f(x, t) = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^m$ corresponde al flujo de $u(x, t)$ (que sale y entra) a través de las fronteras de I .

Integrando ahora (7.1) entre dos instantes arbitrarios t_1 y t_2 (con $t_2 > t_1$), se obtiene

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x_1, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(x_2, t) dt, \quad (7.2)$$

que constituye la *expresión integral de la Ley de Conservación*, desde el punto de vista matemático.

Suponiendo que u y f son diferenciables, mediante las relaciones

$$u(x, t_2) - u(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} u_t(x, t) dt, \quad f(x_2, t) - f(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} f_x(x, t) dx,$$

podemos escribir

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (u_t + f_x)(x, t) dx dt = 0, \quad (7.3)$$

con $u_t = \partial u / \partial t$ y $f_x = \partial f / \partial x$.

Como (7.3) se verifica para cualesquiera intervalos (x_1, x_2) y (t_1, t_2) , el integrando debe ser idénticamente nulo, con lo que

$$u_t + f_x = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \quad (7.4)$$

que constituye la *forma diferencial de la ley de conservación*. En el contexto de este trabajo, se establece $f = f(u)$, de tal manera que (7.4) se reduce a la siguiente ecuación en derivadas parciales (EDP) de primer orden

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty). \quad (7.5)$$

En los próximos apartados, se irá analizando (7.5) en su versión escalar, es decir, con $m=1$. En primer lugar, la ecuación escalar lineal ($f(u) = au$), y posteriormente, con $f(u)$ una función no lineal. En ambos casos, se trata de una EDP de tipo hiperbólico.

7.2. LA ECUACIÓN ESCALAR LINEAL. CURVAS CARACTERÍSTICAS

Esta ecuación se conoce como la ecuación de advección lineal. Es el caso más sencillo de ley de conservación. Apoyándonos en este caso, introduciremos el método de las características que luego constituye el punto de partida para el modelo no lineal y que además será considerado también en el diseño de algunos de los esquemas numéricos que trataremos más adelante, sobre todo en la Parte 3 de este trabajo.

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Se considera el problema (escalar)

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= 0 & (x, t) \in \Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Deduzcamos su solución y veamos, además, que es única, dentro de las funciones diferenciables.

Se define la función $t \rightarrow x(t; x_0) = at + x_0$, que verifica la ecuación diferencial $x'(t) = a$ y la condición $x(0) = x_0$, con x_0 un número real arbitrario. Suponiendo que exista una solución $u = u(x, t)$ del problema (7.6), ésta deberá satisfacer

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(x(t; x_0), t) &= u_x(x(t; x_0), t) \cdot x'(t; x_0) + u_t(x(t; x_0), t) \\ &= au_x(x(t; x_0), t) + u_t(x(t; x_0), t) = 0. \end{aligned}$$

De manera por tanto que, u es constante a lo largo de cada una de las rectas

$$C_{x_0} = \{(at + x_0, t) : t \geq 0\}; \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

Rectas que son paralelas y reciben el nombre de *rectas características* o simplemente *características* del problema (figura 7.1). Recubren todo el semiplano Ω : dado $(x, t) \in \Omega$, existe un único $x_0 = x - at$ de modo que $(x, t) \in C_{x_0}$ y por tanto

$$u(x, t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0) = u_0(x - at). \quad (7.7)$$

Luego la solución, en caso de existir, debe ser (7.7). Para ver que, en efecto, lo es, comprobemos que satisface (7.6), es decir

$$u_t(x, t) + au_x(x, t) = u'_0(x - at)(-a) + au'_0(x - at) = 0.$$

Y ello, para todo par $(x, t) \in \Omega$, con $u(x, 0) = u_0(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

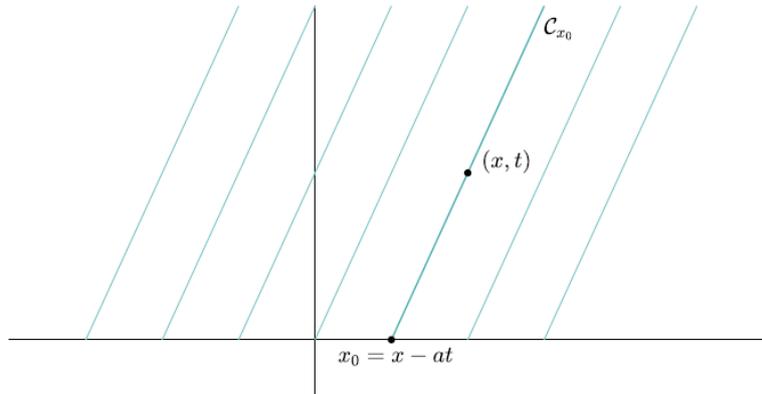


Figura 7.1. Problema escalar lineal. Rectas características. Fuente: [30].

Obviamente, (7.7) puede definirse independientemente de que u_0 sea suave o no. Además, como se trata de una simple traslación, conserva en C_{x_0} las singularidades que la función inicial presente en el punto asociado x_0 . De forma que, si u_0 no es de clase C^1 en algún punto, (7.7) tampoco lo será, y por tanto no puede ser solución de la ecuación en derivadas parciales del problema (7.6).

No obstante lo dicho, puede comprobarse que aunque u_0 no sea suave, (7.7) sí satisface la forma integral de la ley de conservación, es decir, a partir de (7.2)

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx = a \left(\int_{t_1}^{t_2} u(x_1, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} u(x_2, t) dt \right), \quad (7.8)$$

para valores $x_1 < x_2$ y $t_1 < t_2$ cualesquiera. Es importante señalar además que, (7.8) modeliza mejor la realidad, en el sentido de que es más representativa de la misma, que la ecuación diferencial, ya que esta última, se obtiene de la primera añadiendo la condición de suavidad de los integrandos. Por tanto, parece pues lógico adoptar la función

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty), \quad (7.9)$$

como solución del proceso físico en estudio.

Se plantea ahora, por ser extensible al estudio de la ecuación no lineal, otra forma de definir la solución generalizada del problema (7.6). Esta forma alternativa consiste en mantener invariante el dato inicial u_0 y añadir un término de difusión (ya citado con anterioridad en el Apartado 4) a la EDP, es decir

$$u_t + au_x = \varepsilon u_{xx} \quad (7.10).$$

Con $\varepsilon > 0$ pequeño arbitrario. La ecuación (7.10) es de tipo parabólico, por tanto, su solución, que denotamos por u^ε , pertenece al espacio $C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ aunque u_0 no sea suave. Puede obtenerse mediante el cambio de variable

$$v^\varepsilon(x, t) = u^\varepsilon(x + at, t),$$

ya que v^ε , verifica la ecuación del calor, es decir $v_t^\varepsilon = \varepsilon v_{xx}^\varepsilon$, sí y solo sí, obviamente, u^ε verifica (7.10). Finalmente, se puede comprobar que el límite de $u^\varepsilon(x, t)$ cuando ε tiende a cero, coincide con (7.9).

Analizado el caso con la ecuación lineal más sencilla, estudiemos ahora el caso de la ecuación lineal general, es decir

$$\begin{aligned} u_t + a(x, t)u_x &= 0 & (x, t) \in \Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (7.11)$$

con u_0 función de clase C^1 y $a: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Lipschitz continua respecto de x y t . Como en el caso precedente, y para x_0 número real arbitrario, se considera el problema

$$x'(t) = a(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad (7.12)$$

que admite una única solución $x(t; x_0)$, por las condiciones impuestas sobre la función $a(x, t)$. Esto implica que, para valores de x_0 distintos, las gráficas de $x(t; x_0)$, son disjuntas.

De manera análoga, se comprueba que la solución de (7.11) debe ser constante en cada una de las *curvas características* del problema: $C_{x_0} = \{(x(t; x_0), t): t \geq 0\}$; de modo que ésta cumple

$$u(x(t; x_0), t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0), \quad t \geq 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \quad (7.13)$$

De tal forma que, si estas curvas recubren todo el semiplano Ω , se habrá hallado la solución del problema. Si u_0 no es suave, al menos puede garantizarse que u en (7.13) verifica la forma integral de la ley de conservación.

7.3. LA ECUACIÓN ESCALAR NO LINEAL

Vamos a ver en este apartado, como en el caso de la ley de conservación no lineal, el comportamiento es totalmente distinto. Ahora, las curvas características solo permiten resolver el problema en un determinado número de casos, pues en ocasiones se van a cruzar y no siempre van a recubrir todo el semiplano Ω . Será pues necesario introducir nuevos conceptos que nos permitan finalmente resolver el problema.

7.3.1. Método de las Características

Sea pues la siguiente EDP no lineal

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (7.14)$$

con f suficientemente suave. Si denotamos por $a(u)$ a la función derivada de $f(u)$, podemos reescribir (7.14) como

$$u_t + a(u)u_x = 0. \quad (7.15)$$

Utilizaremos en adelante, (7.14) o (7.15), indistintamente, según interese. Tratamos a continuación el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x = u_t + a(u)u_x &= 0, & (x, t) \in \Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

para un dato inicial $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 .

Pues bien, suponiendo que existe $u = u(x, t)$ solución del problema (7.16), se considera el problema

$$x'(t) = a(u), \quad x(0) = x_0,$$

y se denota por $x(t; x_0)$ a su solución, caso que exista. Como en el caso anterior, se deberá cumplir

$$\frac{d}{dt} u(x(t; x_0), t) = u_x(x(t; x_0), t) \cdot x'(t; x_0) + u_t(x(t; x_0), t) = 0.$$

Pues, de nuevo, u es constante en las curvas $\{(x(t; x_0)): t \geq 0\}$. Ahora bien, en este caso

$$x'(t; x_0) = a(u(x(t; x_0), t)) = a(u_0(x_0)),$$

De tal forma que $x(t; x_0) = a(u_0(x_0))t + x_0$. Rectas de pendiente variable, no paralelas. De manera que, las curvas características son ahora las rectas

$$C_{x_0} = \{(a(u_0(x_0))t + x_0, t) : t \geq 0\}; \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

A diferencia pues de lo que ocurre en el caso de la ecuación lineal, no se puede asegurar ahora que estas rectas no se corten, de la misma manera que no se sabe si recubren todo el semiplano Ω . La pregunta natural es entonces

Dado $(x, t) \in \Omega$, ¿existe un único $x_0 = x_0(x, t) \in \mathbb{R}$ tal que $(x, t) \in C_{x_0}$?

Si la respuesta es afirmativa, la solución de (7.16) sería

$$u(x, t) = u_0(x_0(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (7.17)$$

de clase C^1 . Pero, ¿se puede afirmar que es así? Véamos:

Por el teorema de la función implícita, la respuesta a la pregunta previa será afirmativa siempre que

$$g(x_0, x, t) = a_0(x_0)t + x_0 - x, \quad a_0 = a \circ u$$

Cumpla

$$\frac{\partial g}{\partial x_0}(x_0, x, t) = a'_0(x_0)t + 1 \neq 0, \quad \forall x_0, x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (7.18)$$

Es evidente que (7.18) se verifica si a_0 es creciente. En el caso de que a_0 no sea creciente, también se puede garantizar (7.18) para valores de t lo suficientemente pequeños. Así, el menor valor de t para el que (7.18) no se cumple, se denomina *tiempo crítico* y se denota por t_c . De tal forma que, en este caso, se tendría la solución del problema (7.16) para la región $\mathbb{R} \times [0, t_c)$. Veamos a continuación la expresión de este tiempo crítico en el caso de que la función a_0 no sea creciente. En este caso, debe existir $\xi \in \mathbb{R}$: $a'_0(\xi) < 0$, de modo que

$$a_0(\xi) > a_0(\xi + h), \quad h \in (0, \delta), \quad (7.19)$$

con $\delta > 0$. Por tanto, a partir de (7.19), las rectas características asociadas a ξ y $\xi + h$ se cortan en el instante

$$t_h = -\frac{h}{a_0(\xi + h) - a_0(\xi)}.$$

Tomando límites cuando h tiende a cero, se deduce que $t_h \rightarrow -\frac{1}{a'_0(\xi)}$. En consecuencia, t_c , vendrá dado por

$$t_c = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \left(-\frac{1}{a'_0(\xi)} \right) = -\frac{1}{\inf_{\xi \in \mathbb{R}} a'_0(\xi)}. \quad (7.20)$$

Para $t = t_c$, y quizá para instantes de tiempo posteriores, las rectas características pueden dejar una zona del semiplano por recubrir. La otra posibilidad, como hemos visto, es que dos de estas rectas características se intersecten. De manera que si C_{x_1} y C_{x_2} se cortan, sus pendientes son obviamente distintas, luego $u_0(x_1) \neq u_0(x_2)$. Con lo que, en principio, habría dos posibles valores de la solución en el punto de intersección de ambas características. Desde el punto de vista físico, es evidente que funciones multievaluadas no tienen sentido, es decir, no suelen tener significado físico. Por tanto, no se puede aceptar esta situación para $t = t_c$.

Para mayor detalle, puede consultarse [30], que incluye un ejemplo ilustrativo.

7.3.2. Solución débil. Concepto

En primer lugar, recordemos que el método de las características permite resolver la ley de conservación lineal $u_t + au_x = 0$ en todo su dominio. La solución verifica la EDP si el dato inicial es suave y la ecuación integral (7.8) si éste presenta alguna singularidad. Esto ha sido tratado en el apartado 7.2.

Por otro lado, acabamos de ver que, para el caso no lineal, u_0 de clase C^1 , en algunas ocasiones solo es posible obtener la solución para valores de t inferiores a cierto tiempo crítico t_c . Para poder extender esta función, se debe generalizar el concepto de solución.

Así, análogamente a lo hecho en 7.2, podríamos plantear la forma integral de la ley de conservación

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_1, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_2, t)) dt, \quad (7.21)$$

y afirmar que $u(x, t)$ es *solución generalizada* de (7.14) si verifica (7.21) para valores arbitrarios de $x_1 < x_2$ y $t_1 < t_2$.

No obstante, y para este propósito, suele utilizarse una formulación integral alternativa. La técnica consiste en multiplicar (7.14) por una función test $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, es decir, de clase C^1 con soporte compacto, e integrar sobre el dominio de la ecuación, es decir

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\varphi u_t + \varphi f(u)_x) dx dt = 0. \quad (7.22)$$

Utilizando la integración por partes, se eliminan las derivadas de u y se introducen las de φ . Así

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\varphi_t u + \varphi_x f(u)) dx dt = - \int_{-\infty}^\infty \varphi(x, 0) u_0(x) dx. \quad (7.23)$$

Llegando de esta manera a la siguiente definición.

Definición 7.1. Sea $u_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})^8$, se dice que $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ es una solución débil de (7.16), si cumple (7.23) para toda $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

Destacamos que, si u es una solución débil de un problema dado, también lo es cualquier función igual a ella casi por todas partes. Además, señalamos que, por construcción, es claro que toda solución en el sentido clásico es solución débil de (7.16). Recíprocamente, una función de clase C^1 que satisface (7.23) para cualquier φ , también verifica (7.16).

7.3.3. La condición de Rankine-Hugoniot

Resulta obvio que el concepto de solución débil es mucho más general que el concepto clásico de solución, pues incluye funciones que satisfacen (7.23) pero no son diferenciables e incluso no son continuas. En cualquier caso, estas funciones deben cumplir alguna condición, satisfacer alguna restricción, sobre sus discontinuidades. A esto dedicamos el presente epígrafe. El estudio se restringe a soluciones débiles suaves a trozos.

Definición 7.2. Se dice que una función $u \in L_{loc}^\infty(\Omega)$ es de clase C^1 a trozos, si existe un número finito de curvas

$$\Gamma_i = \{(\sigma_i(t), t) : t \in I_i\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

con $\sigma_i: I_i \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , tal que u es de clase C^1 en las componentes conexas de $\Omega - (U_{i=1}^n \Gamma_i)$.

Teorema 7.1. Sea u una solución débil de (7.16) de clase C^1 a trozos. Sea $\Gamma \equiv \{x = \sigma(t)\}$ una de sus curvas de discontinuidad. Dado un punto $P = (x_0, t_0)$ de la curva, con $t_0 > 0$, se definen

$$u^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} u(x_0 - \varepsilon, t_0), \quad u^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(x_0 + \varepsilon, t_0), \quad (7.24)$$

como los valores de u a la izquierda y a la derecha de P , respectivamente. Entonces, se cumple que

$$\frac{f(u^-) - f(u^+)}{u^- - u^+} = \sigma'(t_0). \quad (7.25)$$

Expresión conocida como Condición de Rankine-Hugoniot o Condición RH.

La prueba de este teorema puede encontrarse en [30].

⁸ Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $L_{loc}^\infty(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible: } u \in L^\infty(V) \quad \forall V \text{ compacto } \subset \Omega\}$. Si Ω es cerrado y $f \in L_{loc}^\infty(\Omega)$, esto quiere decir que f es la restricción a Ω de una función $F \in L_{loc}^\infty(\mathcal{U})$ con \mathcal{U} abierto y $\Omega \subset \mathcal{U}$.

7.3.4. Caracterización de soluciones débiles

Definido el concepto de solución débil y vista la Condición de Rankine-Hugoniot, se enuncia el siguiente resultado sobre caracterización de soluciones débiles, que permitirá obtener algunas de ellas de manera sencilla.

Teorema 7.2. *Una función u de clase C^1 a trozos es solución débil de (7.16) sii son ciertas las tres afirmaciones siguientes:*

- u verifica $u_t + f(u)_x = 0$ en los puntos donde es de clase C^1 .
- u verifica la Condición de Rankine-Hugoniot en los puntos de discontinuidad.
- u satisface la condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$.

En [30] pueden encontrarse varios ejemplos que muestran la aplicación de este resultado.

El concepto de solución débil, la Condición de Rankine-Hugoniot y éste último resultado, resuelven y permiten obtener solución en los casos, p.e., en los que existen regiones de intersección o solape de diferentes familias de curvas características (véase Ejemplo 2 en [30]). Pero, existen otros casos, otras situaciones, en las que la solución débil no es única, por ejemplo, algunos casos en los que las características no recubren todo el semiplano (véase como ejemplo de este último caso el Ejemplo 3 en [30]). Esto ilustra el hecho conocido de que algunas leyes de conservación admiten más de una solución débil. Por ello, para seleccionar de entre las posibles matemáticamente hablando, aquella que tiene significado físico, se debe imponer una condición adicional. Esta condición es conocida como condición de entropía y a ella se dedica el siguiente epígrafe.

7.3.5. Solución de entropía

7.3.5.1. Condición de entropía

Este requisito adicional, esta condición, no es más que una versión matemática del Segundo Principio de la Termodinámica, según el cual, la entropía de un sistema físico tiende a aumentar o como poco, permanecer constante, ya que, de forma natural, se tiende a un estado de mínima energía (máximo desorden). Es decir, en cualquier caso, la entropía del sistema, no decrece.

Definición 7.3. *Sea $u = u(x, t)$ una solución débil de (7.16) de clase C^1 a trozos. Se dice que u cumple la Condición de Entropía de Lax, si para cada curva de discontinuidad $\Gamma \equiv \{x = \sigma(t)\}$ y para cada punto $P = (x_0, t_0)$ de ella, se verifica*

$$f'(u^-) > \sigma'(t_0) > f'(u^+), \quad (7.26)$$

siendo u^- y u^+ los valores de u a la izquierda y a la derecha de P , respectivamente, definidos en (7.24).

Así p.e., para la conocida Ecuación de Burgers (en ella, $f(u) = u^2/2$; con lo que $f(u)_x = uu_x$; con $f'(u) = u$), la expresión (7.26) se reduce a $u^- > u^+$; siendo éste su requisito de entropía según la Condición de Entropía de Lax.

Definición 7.4. Bajo las mismas hipótesis que en la definición anterior, se dice que la solución débil verifica la Condición de Entropía de Oleinik, si para cada punto $P = (x_0, t_0)$ de cada curva de discontinuidad $\Gamma \equiv x = \sigma(t)$ se cumple

$$\frac{f(v) - f(u^-)}{v - u^-} \geq \sigma'(t_0) \geq \frac{f(v) - f(u^+)}{v - u^+}, \quad (7.27)$$

para todo v : $u^- < v < u^+$.

Las condiciones de entropía definidas, permiten admitir ciertas soluciones débiles y excluir otras. No obstante, se trata de restricciones locales, que hacen referencia tan solo al comportamiento de las funciones en las discontinuidades. Por ello, y con el objetivo de deducir propiedades en todo el dominio, se plantea una condición global equivalente a las estudiadas.

Sea pues $\varepsilon > 0$ pequeño arbitrario, un coeficiente de viscosidad, se considera, de manera análoga al caso lineal, el siguiente problema

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= \varepsilon u_{xx} & (x, t) \in \Omega \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (7.28)$$

que es la versión viscosa del problema (7.16). Su solución clásica, que denotamos nuevamente por u^ε , equivale a

$$u^\varepsilon = -2\varepsilon \frac{\varphi_x^\varepsilon}{\varphi^\varepsilon},$$

siendo φ^ε , solución de

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \varepsilon \varphi_{xx}, & (x, t) \in \Omega \\ \varphi(x, 0) &= \varphi_0^\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

para un cierto dato inicial φ_0^ε que depende de u_0 y de ε .

Proposición 7.1. Con la notación anterior, la función $u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(x, t)$, es solución débil de (7.16) y es denominada Solución VV (por sus siglas en inglés, 'vanishing viscosity', -viscosidad evanescente-).

Par de entropía

Fijada $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa suave, se define $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$q(u) = \int_0^u \eta'(s) f'(s) ds, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Estas funciones, así definidas, verifican $q'(u) = \eta'(u) f'(u)$. Multiplicando la ecuación con viscosidad por $\eta'(u)$, y aplicando la regla de la cadena, se deduce

$$\eta(u^\varepsilon)_t + q(u^\varepsilon)_x = \varepsilon \eta(u^\varepsilon)_{xx} - \varepsilon \eta''(u^\varepsilon) (u_x^\varepsilon)^2.$$

Como $\eta(u)$ es convexa, se obtiene

$$\eta(u^\varepsilon)_t + q(u^\varepsilon)_x \leq \varepsilon \eta(u^\varepsilon)_{xx}.$$

Así pues, la Solución VV cumple

$$\eta(u)_t + q(u)_x \leq 0. \quad (7.29)$$

Esta expresión, debe interpretarse en el sentido distribucional. Para toda función test $\varphi \in C_0^1(\bar{\Omega})$ con $\varphi \geq 0$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\varphi_t \eta(u) + \varphi_x q(u)) dx dt + \int_{-\infty}^\infty \varphi(x, 0) \eta(u_0(x)) dx \geq 0. \quad (7.30)$$

Al par formado por las funciones η y q se le denomina *par de entropía*.

Definición 7.5. Una función $u \in L^\infty(\bar{\Omega})$ recibe el nombre de solución de entropía de (7.16) si:

- u es solución débil de (7.16), y
- u verifica (7.29) para todo par de entropía (η, q)

Nuevamente, toda función igual casi por todas partes a una solución de entropía es también solución de entropía.

Por otra parte, puede comprobarse que una solución débil u es solución de entropía si y solo si

$$|u - c|_t + [\text{sign}(u - c)(f(u) - f(c))]_x \leq 0, \quad (7.31)$$

en el sentido distribucional para cualquier constante $c \in \mathbb{R}$. La condición (7.31) se conoce como la *Condición de Entropía de Kruzhkov*.

Se introduce ahora un resultado de equivalencia entre (7.29) y las condiciones de entropía de Lax y Oleinik vistas con anterioridad.

Teorema 7.3. Sea una función $u \in L^\infty(\bar{\Omega})$ una solución débil de (7.16), de clase C^1 a trozos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- u es solución de entropía de (7.16),
- En cada curva de discontinuidad $\Gamma \equiv \{x = \sigma(t)\}$ y en cada punto $P = (x_0, t_0)$ de la curva,

$$q(u^+) - q(u^-) \leq \sigma'(t_0)(u^+ - u^-), \quad (7.32)$$

para todo par de entropía (η, q) ,

- u verifica la condición de entropía de Oleinik,
- Si f es cóncava o convexa, u cumple la condición de entropía de Lax.

Para finalizar el epígrafe, presentamos el siguiente resultado de unicidad.

Teorema 7.4. Sea el problema (7.16), para una función $f \in C^1$ y $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Entonces, la solución VV es la única (excepto variaciones en un conjunto de medida nula) solución de entropía de (7.16) y, además, verifica

- $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty}, \quad \forall t > 0,$
- Si $\|u_0\|_{TV} < \infty$, entonces

$$\|u(\cdot, t)\|_{TV} \leq \|u_0\|_{TV}, \quad \forall t > 0 \quad (7.33)$$

- Si u y v son soluciones de (7.16) con datos iniciales u_0 y v_0 , entonces

$$u_0(x) \leq v_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad u(x, t) \leq v(x, t) \quad \forall x, t.$$

Nota 7.1: Dada una función real g en $[a, b]$ y una partición $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_P} = b\}$ de ese intervalo, se toma

$$g_{\mathcal{P}} = \sum_{j=0}^{N_P} |g(x_{j+1}) - g(x_j)|$$

De forma que, la *variación total* (TV) de g se define como la seminorma

$$\|g\|_{TV} = \sup_{\mathcal{P}} (g_{\mathcal{P}})$$

7.3.5.2. Soluciones de entropía de los problemas de Riemann

En este epígrafe, se muestran las soluciones VV del Problema de Riemann

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 & (x, t) \in \Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u_0(x) &= \begin{cases} u_l & x < 0 \\ u_r & x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.34)$$

El objetivo es encontrar todas las soluciones de entropía de este problema. No obstante, desde el punto de vista del diseño de métodos numéricos para resolver (7.16), las soluciones de mayor utilidad serán aquellas correspondientes a los casos en los que $u_l \neq u_r$, como veremos en apartados siguientes.

En virtud del teorema de unicidad, es suficiente con encontrar una solución de entropía para cada condición inicial, es decir, para cada par u_l, u_r . Nótese además que, si $u(x, t)$ es solución de la ley de conservación escalar, entonces también lo es $u(\lambda x, \lambda t)$ para cualquier constante $\lambda > 0$. Por tanto, es natural considerar soluciones de la forma especial $u(x, t) = U(x/t)$.

Son posibles tres casos, a saber:

1. $u_l = u_r$. En este caso, obviamente, la solución constante $u \equiv u_0$ es la solución de entropía. Este caso, como se ha mencionado, no será de gran utilidad en el diseño de métodos numéricos.
2. $u_l \neq u_r \wedge f'(u_l) > f'(u_r)$. En este caso, sabemos que

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & x < st \\ u_r & x > st \end{cases} \quad (7.35)$$

es una solución de entropía y, por tanto, la solución de entropía. En ella el valor del parámetro s , que define la curva de discontinuidad, viene dado por la Condición RH, es decir, $\frac{ds}{dt} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$. Esta solución se conoce como *onda de choque* (shock wave).

3. $u_l \neq u_r \wedge f'(u_l) < f'(u_r)$. En este caso, tratamos de encontrar una solución suave del tipo $U(x/t)$. Así, sea $\xi = x/t$, entonces

$$U_t = U'(\xi) \left(-\frac{x}{t^2} \right), \quad U_x = U'(\xi) \left(\frac{1}{t} \right),$$

y la ecuación en derivadas parciales en (7.34) se convierte en

$$U'(\xi) \left[-\frac{x}{t^2} + f'(U) \frac{1}{t} \right] = 0,$$

que se reduce a

$$-\xi + f'(U) = 0, \quad (7.36)$$

si asumimos $U'(\xi) \neq 0$ en todo caso.

Ahora, si $f'' > 0$ (f estrictamente convexa), f' es estrictamente creciente. Entonces, para cada $\xi \in (f'(u_l), f'(u_r))$ se puede encontrar una única $U \in (u_l, u_r)$ tal que $f'(U) = \xi$, y por tanto, $U(\xi)$ es diferenciable (Teorema de la función implícita). Por otra parte, también se podría haber planteado como que, al ser f' es estrictamente creciente, existe $(f')^{\{-1\}}$, de forma que, a partir de (7.36), se desprende que $U = (f')^{\{-1\}}$.

Por lo tanto

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & x \leq f'(u_l)t \\ U(\xi) & x = \xi t, \xi \in (f'(u_l), f'(u_r)), f'(U) = \xi, \\ u_r & x \geq f'(u_r)t \end{cases} \quad (7.37)$$

es la solución de entropía. A esta solución se la conoce como *onda de rarefacción* (rarefaction wave).

Así, queda completamente resuelto el problema de Riemann para las leyes de conservación escalares.

8. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA ECUACIÓN HIPERBÓLICA LINEAL

8.1. INTRODUCCIÓN

Acabamos de ver, en el capítulo anterior, como las ecuaciones hiperbólicas que definen las leyes de conservación tan solo pueden ser resueltas analíticamente en casos muy concretos. Por ello, como ya hemos ido diciendo en diferentes partes del texto, se requieren métodos numéricos que nos permitan resolver los problemas planteados, aunque sea de manera aproximada. Los métodos numéricos que a partir de este momento se van a ir introduciendo, aproximan la solución de estas ecuaciones hiperbólicas o sistemas de ellas.

Así, y como punto de partida, en este apartado, vamos a presentar los métodos para la ecuación hiperbólica lineal, más sencilla, cuya solución exacta sí es conocida. Sea pues, el siguiente problema

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= 0 & (x, t) \in \Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

siendo a , una constante no nula. El análisis que se presenta podría, no obstante, generalizarse al caso de una función cualquiera $a = a(x, t)$.

Para el diseño de los diferentes métodos numéricos, debemos acotar tanto el dominio espacial como el dominio temporal de la solución. Así pues, en nuestro caso, problema (8.1), el dominio espacial se acota al intervalo $[x_L, x_R]$, en el que se toma la siguiente partición uniforme

$$\mathcal{P}_x = \{x_L = x_0, x_1, \dots, x_{J-1}, x_J = x_R\}, \quad (8.2)$$

siendo $x_j = x_L + j\Delta x$, con $\Delta x = (x_R - x_L)/J$ (Figura 8.1).



Figura 8.1. Partición del dominio espacial.

Mientras que, en el caso de la variable temporal, se fija un tiempo final T , y se divide el intervalo $[0, T]$, en principio en N subintervalos iguales, dando lugar en este caso a la partición

$$\mathcal{P}_t = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N = T\}, \quad (8.3)$$

siendo ahora $t_n = n\Delta t$, con $\Delta t = T/N$.

A Δx se le denomina paso espacial, mientras que, a Δt , se le denomina paso temporal. Tal cual han sido definidos en este momento, ambos se consideran constantes.

Sea $u(x, t) = u_0(x - at)$, la solución de (8.1). El objetivo ahora es obtener una aproximación del valor que toma u en cada punto (x_j, t_n) del mallado, en el que consistentemente con las definiciones anteriores, se ha discretizado el problema, denotada por u_j^n , mediante la condición inicial fija

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, J.$$

A lo largo del presente capítulo, se van a presentar diferentes expresiones (modelos) que van a permitir obtener los valores de u_j^{n+1} para $j = 0, 1, \dots, J$, en tiempo t_{n+1} , a partir de las estimaciones para u_j^n a tiempo t_n .

8.2. CONVERGENCIA, CONSISTENCIA Y ESTABILIDAD DE UN MÉTODO NUMÉRICO

Antes de presentar los diferentes métodos numéricos, vamos a analizar brevemente las distintas propiedades que éstos deben cumplir si queremos conseguir el objetivo planteado con ellos.

Así, se dice que un *método es convergente*, si el error global definido como $e_j^n = u_j^n - u(x_j, t_n)$ se anula cuando Δx y Δt tienden a cero. Como concepto resulta sencillo, pero es muy difícil comprobar por definición si los métodos son convergentes, pues estos vienen dados por una relación o fórmula de recurrencia y normalmente no se tiene la expresión analítica de u_j^n .

Para un método numérico dado por su fórmula de recurrencia general

$$u_j^{n+1} + G(u_j^n, \dots) = 0, \quad (8.4)$$

el error local T_j^n , se define como el resultado de sustituir en (8.4) cada estimación o valor aproximado u_j^n por el valor exacto en ese punto, dividiendo por Δt

$$T_j^n = \frac{1}{\Delta t} [u(x_j, t_{n+1}) + G(u(x_j, t_n), \dots)].$$

De manera equivalente, se dice que un *método es consistente* si el error local se anula cuando Δx y Δt tienden a cero, lo que garantiza que el método estime la ecuación diferencial correcta.

De una forma intuitiva, se puede decir que un *método es estable*, si las soluciones numéricas son próximas cuando los datos iniciales también lo son. Formalmente, para un método lineal y condiciones de frontera periódicas (en otro caso, el tratamiento de la estabilidad no es nada sencillo)

$$u_j^{n+1} = G(u_{j-r}^n, \dots, u_{j+r}^n, \Delta t, \Delta x) = \alpha_{j-r}(v)u_{j-r}^n + \dots + \alpha_{j+r}(v)u_{j+r}^n, \quad j = 1, \dots, M,$$

donde $v = \frac{\Delta t}{\Delta x} = M\Delta t$, ya que $\Delta x = \frac{1}{M}$ si x se mueve en $[0,1]$.

En forma vectorial,

$$u^{n+1} = H(v)u^n,$$

de manera que

$$u^n = H(v)^n u^0,$$

donde $H(v)$ es la matriz (circulante, por la periodicidad) $M \times M$ formada por los coeficientes $\alpha_*(v)$.

Entonces, se dice que el método es estable en $[0, T]$ para v si existen $K, N_0 > 0$ tal que

$$\|H(v)^n u^0 - H(v)^n v^0\| \leq K \|u^0 - v^0\|, \quad (8.5)$$

para cualquier $u^0, v^0 \in \mathbb{R}^M$, cualquier n tal que $T \geq n\Delta t = \frac{nv}{M}$ y cualquier $N \geq N_0$. En (8.5) $\|\cdot\|$ es la norma euclídea.

Por la definición de norma matricial, esto es equivalente a $\|H(v)^n\| \leq K$. Como $H(v)$ es circulante, es diagonalizable por transformadas discretas de Fourier (TDF) (si y solo si), por lo que $H(v)^n$ también lo es. Como las TDF son unitarias $\|H(v)^n\| = \rho(H(v))^n$, donde $\rho(H(v))$ es el radio espectral de $H(v)$ (máximo de los valores absolutos de los valores propios de la matriz).

El radio espectral de la matriz circulante $H(v)$ se puede calcular haciéndola funcionar sobre vectores armónicos $u_j^n = e^{\frac{2\pi m}{M}ji}$, $m, j = 1, \dots, M$. De forma que

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \alpha_{j-r}(v)e^{\frac{2\pi m}{M}(j-r)i} + \dots + \alpha_{j+r}(v)e^{\frac{2\pi m}{M}(j+r)i} \\ &= e^{\frac{2\pi m}{M}ji} \left(\alpha_{j-r}(v)e^{\frac{2\pi m}{M}(-r)i} + \dots + \alpha_{j+r}(v)e^{\frac{2\pi m}{M}ri} \right), \quad j = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

por lo que $\lambda_m(v) = \left(\alpha_{j-r}(v)e^{\frac{2\pi m}{M}(-r)i} + \dots + \alpha_{j+r}(v)e^{\frac{2\pi m}{M}ri} \right)$, $m = 1, \dots, M$, son los valores propios de $H(v)$. Por tanto, se tiene que dar que $|\lambda_m(v)|^n$ esté acotado bajo las condiciones anteriores.

Un criterio más contundente de estabilidad es el de *estabilidad* según *von Neumann*, para la que se toma $K=1$, de manera que, se exige

$$|\lambda_m(v)| \leq 1$$

Estos tres conceptos, convergencia, consistencia y estabilidad, quedan relacionados a partir del **Teorema de equivalencia de Lax**. Este resultado afirma que, en todo método consistente, la estabilidad es una condición necesaria y suficiente para su convergencia. Es decir, si el método es consistente y estable,

entonces es convergente. Este resultado es pues muy importante para comprobar la convergencia de un método.

8.3. LA CONDICIÓN DE COURANT-FRIEDRICHS-LAX (CFL)

Estudiamos en este apartado una propiedad exclusiva de los métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones hiperbólicas de leyes de conservación. Se trata de la conocida como Condición CFL. Para ello, veremos antes un par de conceptos sobre la relación que guarda la condición inicial con la solución de la ecuación y del método.

Como sabemos,

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad (8.6)$$

es la solución del problema (8.1). La imagen de (8.6) en un punto $P = (x_j, t_n)$ del mallado, solo depende del valor de u_0 en el punto $Q = (x_j - at_n, 0)$. De esta forma, el *dominio de dependencia de la ecuación*, se define como

$$\mathcal{D}_e(x_j, t_n) = \{x_j - at_n\}.$$

Por otro lado, el valor u_j^n que proporciona el método numérico, se calcula a partir de dos o tres estimaciones (según el método) a tiempo t_{n-1} , como $u_{j-1}^{n-1}, u_j^{n-1}, u_{j+1}^{n-1}$, por ejemplo. De manera que, recursivamente, u_j^n , depende del valor que toma la función inicial u_0 en distintos puntos del mallado espacial: $\mathcal{M}_j = \{x_{j-k}, \dots, x_j, \dots, x_{j+r}\}$. Con esta notación pues, el *dominio de dependencia del método* viene dado por la envoltura convexa del conjunto \mathcal{M}_j , es decir, en nuestro caso, el intervalo

$$\mathcal{D}_m(x_j, t_n) = [x_{j-k}, x_{j+r}].$$

Definición 8.1. Un método numérico para resolver el problema (8.1) cumple la Condición de Courant-Friedrichs-Lax o Condición CFL si

$$\mathcal{D}_e(x_j, t_n) \subset \mathcal{D}_m(x_j, t_n), \quad (8.7)$$

es decir, si el dominio de dependencia del método contiene al dominio de dependencia de la ecuación.

A partir de esta definición, se puede ver, por ejemplo, en el caso de un sencillo método de diferencias finitas para resolver (8.1), qué implica el cumplimiento de esta condición CFL. Así si reemplazamos la derivada temporal por una diferencia hacia adelante y la espacial por una diferencia hacia atrás, es decir

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0,$$

y despejamos u_j^{n+1} , se obtiene

$$u_j^{n+1} = u_j^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j-1}^n - u_j^n),$$

como fórmula recursiva del método. Ahora, si denotamos $\nu = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$, podemos reescribir la ecuación anterior de la forma

$$u_j^{n+1} = (1 - \nu)u_j^n + \nu u_{j-1}^n. \quad (8.8)$$

Por lo que, aplicando la Definición 8.1, se llega a la conclusión de que la Condición CFL se cumple para valores de a positivos, lo que se traduce en que se verifique

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (8.9)$$

siendo Δt el paso temporal del método numérico y, Δx su paso espacial. Se puede además probar, que se trata de una condición necesaria para la convergencia del método numérico, pero no suficiente (para más detalles, véase [30]).

A partir de aquí, en los epígrafes siguientes, se presentan dos esquemas numéricos convergentes para la ecuación que nos ocupa en este momento, es decir, la de advección lineal. Se trata del Método Upwind y del Método de Lax-Wendroff.

8.4. EL MÉTODO UPWIND

En el método anterior, hemos visto que, cumple la condición CFL para $a > 0$ si Δx y Δt verifican la relación (8.9). Así que, sería oportuno utilizar (8.8) para el caso en el que $a > 0$ y generar una nueva ecuación para el caso de los valores negativos de a . Así, aproximando la derivada espacial por una diferencia finita hacia adelante en este caso, se deduce finalmente la expresión del Método Upwind (completo):

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= (1 + \nu)u_j^n - \nu u_{j+1}^n & a < 0 \\ u_j^{n+1} &= (1 - \nu)u_j^n + \nu u_{j-1}^n & a > 0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

donde, como antes, $\nu = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Si denotamos ahora $a^+ = \max(a, 0)$ y $a^- = \min(a, 0)$, las dos ecuaciones anteriores pueden escribirse de manera compacta como

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a^+ (u_j^n - u_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} a^- (u_{j+1}^n - u_j^n), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (8.11)$$

La ecuación (8.11) anterior es la expresión general del método upwind en este caso.

En cuanto a la condición CFL para el caso de $a < 0$, a partir de la Definición 8.1, podemos, razonando de manera análoga al caso anterior, llegar a que ésta se satisface [30] si $-a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Así pues, el método upwind cumple la condición CFL (necesaria para la convergencia) si y solo si $|v| \leq 1$.

Por otro lado, sustituyendo u_j^n por $\gamma_j^n = \lambda^n e^{im\pi j \Delta x}$ en las ecuaciones (8.10), se obtiene

$$|\lambda(m)|^2 = \begin{cases} 1 + 4v(1+v)\sin^2\left(\frac{m\pi\Delta x}{2}\right), & a < 0 \\ 1 - 4v(1-v)\sin^2\left(\frac{m\pi\Delta x}{2}\right), & a > 0 \end{cases}$$

Concluyendo que el método es estable si y solo si $|v| \leq 1$, es decir, idéntica restricción que la impuesta por la condición CFL.

Tanto en el caso de $a > 0$ como en el de $a < 0$, si el dato inicial u_0 es suficientemente suave, se puede deducir [30] que el error local viene dado por

$$T_j^n = -\frac{1}{2}a(1-v)u_{xx}\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (8.12)$$

de orden 1 respecto de Δx . Aplicando el Teorema de equivalencia de Lax, se deduce que el método es convergente si $|v| \leq 1$. Mientras que, si u_0 presenta alguna singularidad, la función solución verifica, como sabemos, la forma integral de la ley de conservación ya que no admite derivadas en todo su dominio. Por este motivo, en base a un análisis de Fourier [30], se llega a que este caso, el error es de orden 2.

Para cada $\Delta x > 0$ definimos el ERROR

$$E^{\Delta x} = \Delta x \sum_{j=0}^J |u_j^N - u(x_j, T)|, \quad (8.13)$$

cuyo ORDEN se aproxima mediante los valores

$$p^{\Delta x} = \log_2 \left(\frac{E^{2\Delta x}}{E^{\Delta x}} \right). \quad (8.14)$$

Expresiones, (8.13) y (8.14), que nos permitirán obtener el error y el orden de convergencia aproximado del método, respectivamente.

Finalmente, y como enlace con el siguiente epígrafe, pues será de utilidad a la hora de diseñar el método que en él se presenta, planteamos ahora una manera alternativa de deducir las ecuaciones (8.10) o, en definitiva, la ecuación (8.11) del método upwind.

Así, una vez calculadas las aproximaciones para $t = t_n$, se considera la función lineal $p = p(x)$ que verifica $p(x_{j-1}) = u_{j-1}^n$ y $p(x_j) = u_j^n$, definida como

$$p(x) = u_{j-1}^n \frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}} + u_j^n \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}. \quad (8.15)$$

Como puede verse en la Figura 8.2, se toma el punto $Q = (q, t_n)$, perteneciente a la misma recta característica que $P = (x_j, t_{n+1})$. Como ambos pertenecen a la misma característica, $u(P) = u(Q)$. De forma que se propone escoger $u_j^{n+1} = p(q)$, así, según (8.15)

$$u_j^{n+1} = p(q) = u_{j-1}^n \frac{\overline{AQ}}{\Delta x} + u_j^n \frac{\overline{BQ}}{\Delta x} = u_{j-1}^n \frac{\overline{AQ}}{\Delta x} + u_j^n \left(1 - \frac{\overline{AQ}}{\Delta x}\right), \quad (8.16)$$

donde A y B quedan definidos en la figura 8.2 y, con la notación \overline{MN} se hace referencia a la longitud de un segmento definido por sus extremos M y N.

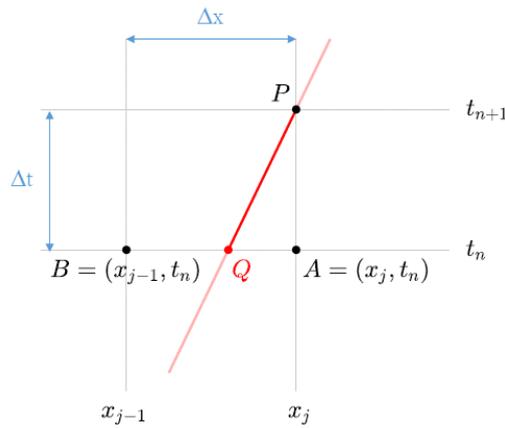


Figura 8.2. Deducción alternativa del método upwind. A partir de [30].

De manera que, teniendo en cuenta que la pendiente de la recta característica es $1/a$, y que, como sabemos, $v = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$, fácilmente se deduce que $v = \frac{\overline{AQ}}{\Delta x}$, y por tanto, (8.16) en realidad equivale a

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n v + u_j^n (1 - v),$$

que como se puede observar, es la ecuación del método upwind, (8.10), cuando $a > 0$.

8.5. EL MÉTODO DE LAX-WENDROFF

Hemos visto en el epígrafe precedente como, para soluciones clásicas, el método upwind permite obtener aproximaciones de primer orden. No obstante, el método puede obtener soluciones poco precisas cerca de singularidades o que presenten cierta amortiguación (para más detalle e incluso ejemplos ilustrativos, véase [30]).

Al objeto pues de evitar estos posibles problemas y de aumentar el orden de convergencia del método numérico, se presenta en este epígrafe el esquema de Lax-Wendroff. Se deduce su ecuación para el caso de $a > 0$, tomando como referencia la discusión final del epígrafe anterior; obteniéndose el mismo resultado si $a < 0$.

Así pues, conocidas las aproximaciones para $t = t_n$, se considera el polinomio de segundo grado $p = p(x)$ que verifica

$$p(x_{j-1}) = u_{j-1}^n, \quad p(x_j) = u_j^n, \quad p(x_{j+1}) = u_{j+1}^n,$$

y queda definido como

$$p(x) = u_{j-1}^n \frac{(x_j - x)(x_{j+1} - x)}{(x_j - x_{j-1})(x_{j+1} - x_{j-1})} + u_j^n \frac{(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j-1})(x_{j+1} - x_j)} + u_{j+1}^n \frac{(x - x_{j-1})(x - x_j)}{(x_{j+1} - x_{j-1})(x_{j+1} - x_j)}$$

De nuevo, se toma el punto $Q = (q, t_n)$, perteneciente a la misma recta característica que $P = (x_j, t_{n+1})$ y se escoge $u_j^{n+1} = p(q)$. Así, según la figura 8.3 y la expresión anterior

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{CQ}}{2(\Delta x)^2} + u_j^n \frac{\overline{QB} \cdot \overline{CQ}}{(\Delta x)^2} + u_{j+1}^n \frac{\overline{QB} \cdot \overline{AQ}}{2(\Delta x)^2}. \quad (8.17)$$

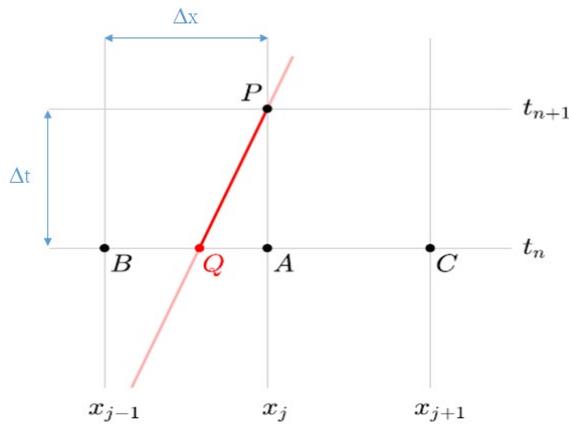


Figura 8.3. Deducción de la ecuación del método de Lax-Wendroff. A partir de [30].

Como $\overline{AQ} = a\Delta t = v\Delta x$, $\overline{QB} = (1 - v)\Delta x$ y $\overline{CQ} = (1 + v)\Delta x$, se concluye que, la ecuación (8.17) anterior, en realidad equivale a

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n \frac{v(1+v)}{2} + u_j^n (1-v^2) + u_{j+1}^n \frac{v(1-v)}{2}. \quad (8.18)$$

Ecuación que también puede escribirse como

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{v^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad v = a \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (8.19)$$

Nota 8.1: Para la aplicación de este método, una vez calculados los valores a tiempo $t = t_n$, $u_0^n, u_1^n, \dots, u_{j-1}^n, u_j^n$, se fijan u_{-1}^n y u_{j+1}^n siguiendo una de las siguientes estrategias (c.c.)

- Condiciones de frontera artificiales: $u_{-1}^n = u_1^n, \quad u_{j-1}^n = u_{j+1}^n$
- Condiciones de frontera periódicas: $u_{-1}^n = u_{j-1}^n, \quad u_{j+1}^n = u_1^n$

A continuación, se aplica (8.18) para calcular $u_0^{n+1}, \dots, u_j^{n+1}$.

Es claro, análogamente al caso anterior del método upwind, que la condición CFL (necesaria para la convergencia) se cumple si y solo si $|v| \leq 1$. De la misma manera y por otro lado, sustituyendo u_j^n por $\gamma_j^n = \lambda^n e^{im\pi j \Delta x}$ en (8.18), se obtiene

$$\lambda(m) = 1 - 2v^2 \sin^2\left(\frac{m\pi\Delta x}{2}\right) - iv \sin(m\pi\Delta x). \quad (8.20)$$

Este factor cumple

$$|\lambda(m)|^2 = 1 - 4v^2(1-v^2) \sin^4\left(\frac{m\pi\Delta x}{2}\right), \quad (8.21)$$

concluyendo de nuevo que el método es estable si y solo si $|v| \leq 1$.

Si el dato inicial u_0 es suficientemente suave, se puede deducir [30] que el error local es de orden 2 en Δx y viene dado por

$$T_j^n = \frac{1}{6} a(1-v^2) u_{xxx} \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3). \quad (8.22)$$

Por estabilidad y aplicando el Teorema de equivalencia de Lax, se deduce que el método es convergente si $|v| \leq 1$.

Mientras que, si u_0 presenta alguna singularidad, se recurre al análisis de Fourier y se llega a que en este caso, el error es de orden 4 (véase [30]).

9. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LAS ECUACIONES HIPERBÓLICAS NO LINEALES. MÉTODOS DE VOLÚMENES FINITOS

9.1. CASO ESCALAR

9.1.1. Introducción

Analizado el caso de la ecuación escalar hiperbólica lineal, vamos a estudiar ahora el de la no lineal

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (9.1)$$

de manera que a lo largo de este capítulo vamos a plantear los métodos numéricos para la ecuación no lineal, en primer lugar, para la ecuación escalar, y finalmente, su extensión a al caso de sistemas de ecuaciones hiperbólicas no lineales.

Hemos visto, Capítulo 7, que las soluciones de las leyes de conservación hiperbólicas pueden presentar singularidades en tiempo finito. Por ello, los esquemas numéricos deben diseñarse teniendo en cuenta la estructura y características de estas ecuaciones, y sus soluciones.

El objetivo pues, en primer lugar (ecuación escalar), será obtener una aproximación de la solución de entropía del problema

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0, & (x, t) \in \Omega &= \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x &\in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Como se comentó en el caso lineal, para la resolución numérica, debemos acotar tanto el dominio espacial como el dominio temporal de la solución. Así pues, el dominio espacial se acota al intervalo $[x_L, x_R]$ y $t \in [0, T]$, para ciertos valores de x_L , x_R y T dados. Nuevamente, deben imponerse condiciones adicionales adecuadas (sobre este asunto se profundizará en la Parte 3 de este trabajo) en $x = x_L$ y $x = x_R$.

Sea $J \in \mathbb{N}$ arbitrario, se definen los valores

$$x_j = x_L + \left(j + \frac{1}{2}\right) \Delta x, \quad j = 0, 1, \dots, J,$$

con $\Delta x = (x_R - x_L)/J$.

Por otro lado, se fija

$$x_{-\frac{1}{2}} = x_L \quad x_{j+\frac{1}{2}} = x_j + \frac{\Delta x}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, J.$$

Obviamente, con esta definición, $x_R = x_{J+\frac{1}{2}}$.

De manera que, estos puntos dividen el intervalo $[x_L, x_R]$ en J subintervalos de longitud Δx :

$$c_j = \left[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}} \right], \quad j = 0, 1, \dots, J. \quad (9.3)$$

Estos subintervalos son conocidos como celdas o volúmenes de control (volúmenes finitos). En la figura 9.1 se representa el intervalo $[x_L, x_R]$, los distintos puntos y los volúmenes de control. Hay ocasiones en las que resulta necesario definir nodos x_K o celdas c_k para valores de k no contemplados en la figura; pero estos, pueden definirse de manera análoga.

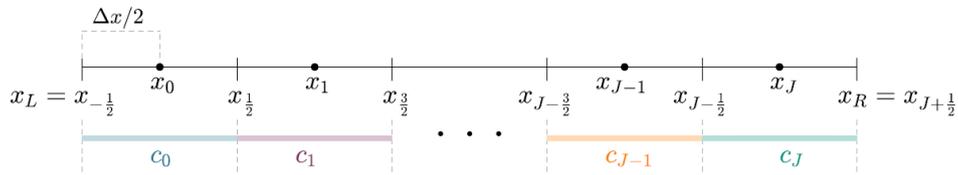


Figura 9.1. Construcción de los volúmenes de control en $[x_L, x_R]$. Fuente: [30].

En cuanto a la discretización en la variable temporal, se toma $t_0 = 0$ y $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$, hasta llegar a $t_n = T$, para cierto natural N . El parámetro Δt_n , es una cantidad fija o variable en función del método numérico, como posteriormente iremos viendo.

En los métodos numéricos, a Δx se le denomina, como sabemos, paso espacial, mientras que, a Δt_n , se le denomina paso temporal. Y, como se ha comentado, veremos métodos numéricos en los que este último puede ser variable, en cuyo caso, suelen denominarse de paso temporal adaptativo. Veremos estos conceptos con detalle a medida que se vayan planteando los diferentes métodos.

9.1.2. Método de Volúmenes Finitos. Ecuación general

Como hemos comentado en el epígrafe anterior, y ya era conocido, se deberán aproximar soluciones no necesariamente suaves, funciones para las que no tiene sentido su evaluación en los puntos de discontinuidad. Por ello, no se trata de estimar el valor de la solución en los puntos (x_j, t_n) del mallado, sino de obtener aproximaciones de los valores promedio de la solución

$$I_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx \quad j = 0, 1, \dots, J,$$

denotadas como u_j^n . A partir de la condición inicial u_0 , se define

$$u_j^0 = I_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_0(x) dx \quad j = 0, 1, \dots, J.$$

El objetivo ahora es encontrar las estimaciones para u_j^{n+1} a partir de las u_j^n obtenidas para $t = t_n$.

Para ello, se considera la forma integral de la ecuación (9.1) sobre el dominio $c_j \times [t_n, t_{n+1}]$, es decir

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_{n+1}) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t)) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j-1/2}, t)) dt. \quad (9.4)$$

Esta expresión, es decir, la forma integral (7.21), vista cuando se introdujo el concepto de solución débil en el epígrafe 7.3.2, está bien definida porque no puede haber discontinuidad en una recta vertical, según la condición RH.

Definiendo ahora

$$\begin{aligned} \bar{f}_{j+1/2}^n &= \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t)) dt, \\ \bar{f}_{j-1/2}^n &= \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j-1/2}, t)) dt, \end{aligned} \quad (9.5)$$

y dividiendo (9.4) por Δx , se llega a

$$I_j^{n+1} = I_j^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (\bar{f}_{j+1/2}^n - \bar{f}_{j-1/2}^n), \quad (9.6)$$

donde destacamos que los términos \bar{f} (promedios de los flujos) no son conocidos, pues dependen de la propia solución u a calcular. Por ello, se deben obtener aproximaciones de $\bar{f}_{j+1/2}^n$, que denotaremos por $\hat{f}_{j+1/2}^n$, y definir los valores objetivo de u_j^{n+1} como

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n), \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad (9.7)$$

que constituye la *ecuación general de los métodos de volúmenes finitos*. La clave en el diseño de los diferentes métodos está, como veremos en los epígrafes siguientes, en la estimación de los flujos, es decir, en estimar adecuadamente las expresiones (9.5).

9.1.3. Método de Godunov

Se suponen conocidas las aproximaciones u_j^n en el instante $t = t_n$ en cada celda c_j , $j = 0, 1, \dots, J$.

Nota 9.1: En primer lugar, se determinan los valores de u_{-1}^n y de u_{J+1}^n , siguiendo una de las dos estrategias siguientes (de manera análoga a lo visto en la Nota 8.1):

- Condiciones de frontera artificiales: $u_{-1}^n = u_0^n$, $u_J^n = u_{J+1}^n$
- Condiciones de frontera periódicas: $u_{-1}^n = u_J^n$, $u_{J+1}^n = u_0^n$

Así, para cada $j \in \{-1, \dots, J\}$, se define el problema de Riemann siguiente

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{9.8}$$

$$u(x, t_n) = \begin{cases} u_j^n & x < x_{j+1/2} \\ u_{j+1}^n & x > x_{j+1/2} \end{cases},$$

cuya solución de entropía se ha detallado en el epígrafe 7.3.5.2. Se debe tener en cuenta que las rectas de discontinuidad de las soluciones de problemas vecinos no pueden intersectar para $t < t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$. Como el valor de las pendientes de estas rectas en módulo está acotado por $\max_j |f'(u_j^n)|$, se toma Δt_n de manera que:

$$\max_j |f'(u_j^n)| \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}. \tag{9.9}$$

Análogamente al caso lineal, la condición (9.9) anterior recibe el nombre de Condición CFL.

Por otro lado, cabe señalar que la solución del problema (9.8), denotada por $\bar{u}_{j+1/2}^n$, verifica

$$\bar{u}_{j+1/2}^n(x, t) = \bar{v}_{j+1/2}^n \left(\frac{x - x_{j+1/2}}{t - t_n} \right),$$

para cierta función $\bar{v}_{j+1/2}^n$. Así, el flujo $\bar{f}_{j+1/2}^n$ se puede estimar como

$$\begin{aligned} \bar{f}_{j+1/2}^n &= \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t)) dt \approx \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\bar{u}_{j+1/2}^n(x_{j+1/2}, t)) dt \\ &= \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\bar{v}_{j+1/2}^n(0)) dt = f(\bar{v}_{j+1/2}^n(0)). \end{aligned}$$

Usando entonces $\hat{f}_{j+1/2}^n = f(\bar{v}_{j+1/2}^n(0))$ en la ecuación general (9.7), se obtiene el método de Godunov. Es decir, la aproximación de (9.5) es la imagen por f del valor de la solución del problema de Riemann. Una fórmula explícita para esta aproximación de $\bar{f}_{j+1/2}^n$, viene dada por

$$f(\bar{v}_{j+1/2}^n(0)) = \hat{f}^{God}(u_j^n, u_{j+1}^n) = \begin{cases} \min_{u_j^n \leq \theta \leq u_{j+1}^n} f(\theta) & u_j^n \leq u_{j+1}^n \\ \max_{u_{j+1}^n \leq \theta \leq u_j^n} f(\theta) & u_{j+1}^n < u_j^n \end{cases} \quad (9.10)$$

Según esta expresión, el método de Godunov coincide con el método upwind, cuando $f(u) = au$ (ecuación lineal). Además, si f no presenta máximos locales y tiene un único mínimo en ω , en particular, si f es estrictamente convexa, esta fórmula se reduce a

$$\hat{f}^{God}(u_j^n, u_{j+1}^n) = \max[f(\max(u_j^n, \omega)), f(\min(u_{j+1}^n, \omega))].$$

Se puede consultar algún sencillo ejemplo, pero ilustrativo, de aplicación de este método en [30].

A pesar de que con este método se obtienen estimaciones de las soluciones de entropía para problemas con ecuaciones no lineales cuyas discontinuidades se aproximan bastante bien (como es el caso de la ec. de Burgers para diferentes datos iniciales), hay que señalar que la evaluación de los flujos numéricos mediante (9.10) conlleva un importante coste de cálculo. Además, resolver el problema (9.8) para usar exclusivamente el valor de su solución en $\{x_{j+1/2}\} \times \{t_n, t_{n+1}\}$, al evaluar los flujos, parece a priori, un poco excesivo. Por ello, se plantean otras alternativas para aproximar (9.5).

Por último, como se verá posteriormente en el apartado 9.3, hay que indicar que este método no puede generalizarse al caso de sistemas de ecuaciones ya que no se tiene una expresión explícita de la solución de los problemas de Riemann.

9.1.4. Método de Roe

En primera instancia, se plantea linealizar la EDP en los problemas de Riemann (9.8). De esta forma, el problema (9.8) queda reemplazado por el (9.11) siguiente

$$u_t + a_{j+1/2}^n u_x = 0, \quad (9.11)$$

$$u(x, t_n) = \begin{cases} u_j^n & x < x_{j+1/2} \\ u_{j+1}^n & x > x_{j+1/2} \end{cases},$$

donde

$$a_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{u_{j+1}^n - u_j^n} & u_j^n \neq u_{j+1}^n \\ f'(u_j^n) & u_j^n = u_{j+1}^n \end{cases}.$$

La solución de (9.11) se obtiene mediante el método de las características; pero, de nuevo, es necesario asegurar que las rectas de discontinuidad de problemas vecinos no intersectan. Para ello, fijado Δx , es suficiente con tomar Δt_n de manera que se satisfaga

$$\max_j \left| a_{j+\frac{1}{2}}^n \right| \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}. \quad (9.12)$$

Análogamente a lo planteado en el método de Godunov, la aproximación de los flujos en (9.5) será la imagen por f del valor de la solución, ahora del problema (9.11) (linealizado), en el segmento $\{x_{j+\frac{1}{2}}\} \times \{t_n, t_{n+1}\}$, es decir

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n = \hat{f}^{Roe}(u_j^n, u_{j+1}^n) = \begin{cases} f(u_j^n) & a_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \\ f(u_{j+1}^n) & a_{j+\frac{1}{2}}^n < 0 \end{cases}. \quad (9.13)$$

Sustituyendo entonces los flujos dados por (9.13) en la ecuación general (9.7), se obtiene el método de Roe.

El coste computacional asociado a este método, como puede suponerse, es muy bajo. No obstante, como la solución de linealización de (9.8) solo admite una recta de discontinuidad, el método no funcionará bien (no estimará correctamente una aproximación de la solución de entropía) si el problema en cuestión tiene p.e. dos rectas de discontinuidad.

Por este motivo, se plantea a continuación un método que aproxima la solución VV con un coste computacional inferior al de Godunov.

9.1.5. Método de Rusanov

A la hora de diseñar un método robusto y eficiente, la clave está en encontrar una buena aproximación a la solución de entropía de los problemas de Riemann (9.8). En este método, a diferencia del método anterior, ésta, la solución de los problemas de Riemann, se sustituye directamente por

$$\bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}}^n(x, t) = \begin{cases} u_j^n & x - x_{j+\frac{1}{2}} < -s_{j+\frac{1}{2}}(t - t_n) \\ u_{j+\frac{1}{2}}^* & -s_{j+\frac{1}{2}}(t - t_n) < x - x_{j+\frac{1}{2}} < s_{j+\frac{1}{2}}(t - t_n), \\ u_{j+1}^n & x - x_{j+\frac{1}{2}} > s_{j+\frac{1}{2}}(t - t_n) \end{cases},$$

una función con dos discontinuidades, que se desplazan a velocidades $-s_{j+\frac{1}{2}}$ y $s_{j+\frac{1}{2}}$. Aplicando ahora la condición RH en cada una de ellas, usando $f_{j+\frac{1}{2}}^*$ en lugar de $f(u_{j+\frac{1}{2}}^*)$, se deduce

$$f_{j+\frac{1}{2}}^* = \frac{f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)}{2} - \frac{s_{j+\frac{1}{2}}}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n). \quad (9.14)$$

Adoptando ahora como $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n = f_{j+\frac{1}{2}}^*$, ya que en el método de Godunov se ha fijado $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n$ como la imagen por f del valor de la solución del problema de Riemann (9.8) en $\{x_{j+\frac{1}{2}}\} \times \{t_n, t_{n+1}\}$. De manera que, usando este $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n$ en la ecuación general (9.7), se obtiene el método de Rusanov.

Se necesita obtener el valor de la velocidad $s_{j+\frac{1}{2}}$. Una primera opción [30], sería considerar el máximo valor que ésta puede tomar, es decir, $\Delta x / 2\Delta t$, pero no se tendrían probablemente resultados muy satisfactorios al no tener en cuenta la naturaleza del problema planteado. De manera que, en este método, se propone

$$s_{j+\frac{1}{2}} = \max(|f'(u_j^n)|, |f'(u_{j+1}^n)|).$$

Por tanto, y concluyendo, este método consiste en calcular u_j^{n+1} a partir de (9.7) con

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n = \hat{f}^{Rus}(u_j^n, u_{j+1}^n) = \frac{1}{2} [f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n) - \max(|f'(u_j^n)|, |f'(u_{j+1}^n)|) (u_{j+1}^n - u_j^n)]. \quad (9.15)$$

Como en los casos anteriores, utilizamos lo comentado en la Nota 9.1 y la condición CFL dada en (9.9), para determinar Δt_n fijado Δx .

9.1.6. Análisis de convergencia

En los tres epígrafes anteriores se han presentado sendos métodos numéricos para tratar de resolver el problema (9.2). Dos de ellos, Godunov y Rusanov, permiten obtener estimaciones de la solución VV del problema; mientras que el de Roe, debido a su linealización de los problemas de Riemann, puede proporcionar (más detalles en [30]) soluciones débiles sin sentido físico. Por ello, se presentan a continuación una serie de definiciones y conceptos para llegar a establecer las propiedades que debe cumplir un método numérico para que ese problema no tenga lugar.

Supongamos, en el contexto de este epígrafe, que las aproximaciones u_j^n se calculan a partir de una expresión de la forma

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-p}^n, \dots, u_j^n, \dots, u_{j+q}^n), \quad (9.16)$$

con $H(0, \dots, 0) = 0$.

Definición 9.1. Sin tener en cuenta las condiciones de frontera, se dice que un método (9.16) es conservativo, si

$$\sum_j u_j^{n+1} = \sum_j u_j^n,$$

para todo n .

Puede comprobarse que esta propiedad se cumple si y solo si existe una función \hat{f} , tal que (9.16) se pueda escribir como

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-p}^n, \dots, u_j^n, \dots, u_{j+q}^n) = u_j^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (\hat{f}(u_{j-r}^n, \dots, u_{j+q}^n) - \hat{f}(u_{j-p}^n, \dots, u_{j+s}^n)), \quad (9.17)$$

con $r \leq p$, $s \leq q$ y $q + r = p + s$, como ocurre en los tres métodos vistos.

Definición 9.2. Dado un método conservativo, se dice que es consistente, si verifica

$$\hat{f}(u, \dots, u) = f(u), \quad (9.18)$$

para cualquier número real u .

Esta caracterización de consistencia es equivalente a la clásica de que el error local sea de orden mayor o igual que 1.

Las funciones \hat{f} asociadas a los tres métodos estudiados verifican la condición (9.18) anterior, por lo que debe definirse algún otro criterio adicional que permita, al menos, diferenciar la linealización de Roe de los otros dos métodos. Para ello, se recuerda que, dos soluciones u y v del problema (9.2), con datos iniciales u_0 y v_0 respectivamente, satisfacen

$$u(x, t) \leq v(x, t) \quad \forall x, t \quad \text{si} \quad u_0(x) \leq v_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

propiedad representada en el Teorema 7.4. De forma que, los esquemas numéricos deben cumplir una cierta propiedad de monotonía que nos garantice la obtención de la solución correcta. Veamos

Definición 9.3. Un método (9.16) es monótono si la función H es creciente en cada una de sus componentes.

Mediante una caracterización de este concepto en términos de \hat{f} , puede comprobarse como los métodos de Godunov y Rusanov son monótonos, mientras que el de Roe no lo es. Ya tenemos pues una característica que ‘separa’ los métodos ‘robustos’ de aquellos que no lo son.

Recordemos en este punto, de acuerdo de nuevo con el Teorema 7.4, que la solución VV de (9.2), denotada por u , verifica

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty}, \quad \forall t > 0.$$

Análogamente, puede comprobarse que las estimaciones obtenidas mediante un método consistente y monótono, cumplen

$$\min_k u_k^0 \leq u_j^n \leq \max_k u_k^0 \quad \forall n, j.$$

Por otro lado, estas aproximaciones también satisfacen una discretización de (7.33) (Teorema 7.4):

$$\sum_j |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n|, \quad (9.19)$$

y de la condición de entropía (7.31). La ecuación (9.19) constituye la condición de estabilidad.

Todas estas propiedades, refuerzan la hipótesis de que *los esquemas conservativos, consistentes y monótonos permiten calcular (son estables) la solución de entropía de la ley de conservación*, como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 9.1. *Considérese el problema (9.2) con dato inicial $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, y un método numérico con ecuación (9.17) (conservativo), consistente y monótono, siendo f diferenciable o con continuidad de Lipschitz local. Sean u_j^n las estimaciones calculadas para $\Delta x > 0$ arbitrario, se define la función*

$$u^{\Delta x}(x, t) = u_j^n, \quad (x, t) \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times [t_n, t_{n+1}).$$

Asúmase que las funciones $u^{\Delta x}$

- Son acotadas: para cada $\Delta x > 0$ existe $C > 0$ tal que $\|u^{\Delta x}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)} \leq C$.
- Convergen en $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ a una cierta función u cuando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$.

Entonces, la función u es la solución VV de (9.2). Cabe notar que la hipótesis de monotonía puede sustituirse por la condición (9.19).

Pues bien, una vez conocidos qué métodos permiten aproximar la solución débil correcta, es decir, la solución de entropía, es importante saber a qué velocidad convergen a ella. Así pues, fijado $t > 0$, con las hipótesis del teorema anterior, se tiene

$$\|u^{\Delta x} - u\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C \Delta x, \quad C > 0, \quad (9.20)$$

si la solución es suave. No obstante, para el resto de casos se ha probado la cota

$$\|u^{\Delta x} - u\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C\sqrt{\Delta x}, \quad C > 0. \quad (9.21).$$

El error está pues acotado. Estos resultados son de consideración también para el método upwind pues, recordemos, éste equivale al método de Godunov cuando la ecuación es lineal. El orden de convergencia se obtiene siguiendo la fórmula (8.14).

9.1.7. Reconstrucción espacial de segundo orden

En estos epígrafes restantes del capítulo se van a presentar distintas estrategias con el fin de aumentar el orden de convergencia de los métodos vistos hasta el momento. Estos métodos, pueden reescribirse como:

- 1) Una vez calculadas las estimaciones u_j^n en el instante $t = t_n$, se define la función constante a trozos

$$v_n(x) = u_j^n, \quad x \in c_j, \quad j = -1, \dots, J + 1 \quad (9.22)$$

- 2) A continuación, se evalúa esta función en los extremos de la celda c_j , para obtener

$$u_{j+1/2}^{n-} = v_n(x_{j+1/2}), \quad u_{j-1/2}^{n+} = v_n(x_{j-1/2})$$

- 3) Finalmente, se evalúa u_j^{n+1} como

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left(\hat{f}(u_{j+1/2}^{n-}, u_{j+1/2}^{n+}) - \hat{f}(u_{j-1/2}^{n-}, u_{j-1/2}^{n+}) \right), \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (9.23)$$

siendo $\hat{f} = \hat{f}^{God}$ o $\hat{f} = \hat{f}^{Rus}$, tal y como se definieron en (9.10) o (9.15), respectivamente.

Para soluciones suaves del problema (9.2), denotadas por $u = u(x, t)$, cabe señalar que la función definida en (9.22), constante a trozos, verifica

$$v_n - u(\cdot, t_n) = \mathcal{O}(\Delta x) \quad (\text{orden } 1).$$

Pues bien, con el objetivo de obtener, como se ha comentado, aproximaciones de orden superior, se propone ahora tomar funciones lineales a trozos, p_n , que cumplan puntualmente

$$p_n - u(\cdot, t_n) = \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (\text{orden } 2).$$

Así pues, denotando $p_n = p_{n,j}(x)$, $x \in c_j$ y teniendo en cuenta que u_j^n es una estimación del promedio

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx,$$

se impone que $p_{n,j}$ verifique la relación

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} p_{n,j}(x) dx = u_j^n.$$

Así, se deduce que, $p_{n,j}$ debe tomar la forma

$$p_{n,j}(x) = u_j^n + \sigma_j^n (x - x_j), \quad (9.24)$$

para un cierto parámetro σ_j^n , por determinar. La clave para diseñar métodos numéricos robustos reside en precisar el valor de dicha pendiente.

Imponiendo además la condición

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+3/2}} p_{n,j}(x) dx = u_{j+1}^n, \quad (9.25)$$

se obtendría

$$\sigma_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}. \quad (9.26)$$

En este caso, con la función lineal a trozos y estas consideraciones, el esquema resultante, coincidiría para la ecuación lineal con el método visto de Lax-Wendroff. Recordamos en este punto que las estimaciones que este método proporciona, pueden sufrir oscilaciones cuando las soluciones presentan alguna discontinuidad [30].

Por otro lado, se obtienen resultados análogos [30] si para la pendiente se toma

$$\sigma_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \quad \text{o} \quad \sigma_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}.$$

Con el fin de evitar estas oscilaciones, y teniendo en cuenta como sabemos, que la solución de entropía del problema satisface (7.33), es decir

$$\|u(\cdot, t)\|_{TV} \leq \|u_0\|_{TV}, \quad \forall t > 0,$$

los métodos numéricos deberían cumplir una propiedad similar a ella a nivel discreto. Así, recordando la función v_n definida en (9.22), se elige σ_j^n , tal que la función lineal a trozos p_n verifique

$$\|p_n\|_{TV} \leq \|v_n\|_{TV} = \sum_{j=0}^{J-1} |u_{j+1}^n - u_j^n|. \quad (9.27)$$

Un posible valor para el parámetro σ_j^n sería

$$\sigma_j^n = \minmod\left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}\right), \quad (9.28)$$

con

$$\minmod(a_1, a_2) = \begin{cases} \text{sign}(a_1) \min(|a_1|, |a_2|), & \text{si } \text{sign}(a_1) = \text{sign}(a_2), \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

donde la función *minmod* actúa como *limitador de pendiente*.

Con ello, se ha obtenido una reconstrucción de orden 2 a nivel espacial.

9.1.8. Formulación semidiscreta

Con la estrategia vista en el epígrafe anterior, mediante esa técnica de reconstrucción, se ha conseguido una aproximación espacial de orden 2. Sin embargo, en (9.23), está presente la discretización temporal

$$g_t(t_n) = \frac{g(t_{n+1}) - g(t_n)}{\Delta t_n} + \mathcal{O}(\Delta t_n).$$

Esta discretización es de orden 1, por lo que el esquema resultante, sigue siendo de primer orden.

Para poder aumentar el orden del esquema final, presentamos en este epígrafe la formulación que da lugar a los conocidos como métodos semidiscretos. La idea es, aplicar una discretización espacial a la ley de conservación y mantener intacta la derivada temporal. Así, la EDP se transforma en un sistema de

ecuaciones diferenciales que puede resolverse, por ejemplo, mediante un método de Runge-Kutta de orden superior. Esta es la formulación que utilizaremos en los métodos propuestos en la Parte 3 de este trabajo, dedicada a la Aplicación. Para ilustrar esta idea, en este epígrafe, planteamos un Runge-Kutta de orden 2.

Así, sea $u = u(x, t)$, la solución de entropía del problema (9.2), para $t \geq 0$ se considera

$$I_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx \quad j = 0, 1, \dots, J,$$

siendo $I_j(0)$ valores conocidos por la condición inicial. Como en ocasiones anteriores, integrando la ecuación $u_t + f(u)_x = 0$, respecto de x en cada c_j , se obtiene

$$\frac{d}{dt} I_j(t) + \frac{1}{\Delta x} \left(f \left(u \left(x_{j+1/2}^-, t \right) \right) - f \left(u \left(x_{j-1/2}^+, t \right) \right) \right) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad t > 0,$$

con $u \left(x_{j+1/2}^\pm, t \right) = \lim_{x \rightarrow x_{j+1/2}^\pm} u(x, t)$.

Sea $\hat{f}_{j+1/2}(t)$ una aproximación de $f \left(u \left(x_{j+1/2}^-, t \right) \right)$ y $f \left(u \left(x_{j+1/2}^+, t \right) \right)$. Se define $(u_0(t), \dots, u_j(t))$ como la solución del sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_j(t) &= \mathcal{L}_j(t) = -\frac{1}{\Delta x} \left(\hat{f}_{j+1/2}(t) - \hat{f}_{j-1/2}(t) \right), & t > 0 \\ & & j = 0, 1, \dots, J, \\ u_j(0) &= I_j(0) \end{aligned} \quad (9.29)$$

Fijado $t_0 = 0$ y $u_j^0 = u_j(0)$ para cada $j = 0, 1, \dots, J$, suponiendo calculadas las estimaciones u_j^n de $u_j(t_n)$ para cierto t_n , se define, como siempre $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$, según la condición (CFL)

$$\max_j |f'(u_j^n)| \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \leq \frac{1}{2},$$

Los valores u_j^{n+1} pueden hallarse mediante el método de Runge-Kutta de segundo orden siguiente

$$\begin{aligned} u_j^{(1)} &= u_j^n + \frac{\Delta t_n}{2} \mathcal{L}_j^n, \\ u_j^{(2)} &= u_j^{(1)} + \Delta t_n \mathcal{L}_j^{(1)}, \\ u_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left(u_j^n + u_j^{(2)} \right), \quad j = 0, 1, \dots, J. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Se utiliza este método, porque a diferencia de otros esquemas de Runge-Kutta, satisface la discretización de (7.33):

$$\sum_j |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n| \quad (\text{condición de estabilidad}).$$

El proceso se repetiría hasta obtener los valores para el instante fijado $t_N = T$, para cierto N .

En (9.30), los operadores \mathcal{L}_j^* corresponden a

$$\mathcal{L}_j^* = -\frac{1}{\Delta x} (\hat{f}_{j+1/2}^* - \hat{f}_{j-1/2}^*).$$

Para los flujos $\hat{f}_{j+1/2}^*$, se toma la función lineal dada en (9.24), con el parámetro σ_j^n de (9.28). A continuación, se toma

$$u_{j+1/2}^- = p_{j,n}(x_{j+1/2}), \quad u_{j-1/2}^+ = p_{j,n}(x_{j-1/2}),$$

y se escoge

$$\hat{f}_{j+1/2}^* = \hat{f}(u_{j+1/2}^-, u_{j+1/2}^+),$$

con $\hat{f} = \hat{f}^{God}$ o $\hat{f} = \hat{f}^{Rus}$, tal y como se definieron en (9.10) o (9.15), respectivamente.

De esta forma, además de verificar la condición de estabilidad, el método resultante es conservativo y consistente y, por tanto, según los resultados comentados en el epígrafe 9.1.6, permite obtener la aproximación a la solución de entropía del problema.

Finalmente, se señala además que, una vez calculados $u_j^n, j = 0, 1, \dots, J$, para obtener las estimaciones en el instante t_{n+1} , es necesario fijar valores para u_{-1}^n, u_{-2}^n y para u_{J+1}^n, u_{J+2}^n . Para ello se sigue, como siempre, una de las dos estrategias siguientes:

- Condiciones de frontera artificiales: $u_{-1}^n = u_0^n, \quad u_{-2}^n = u_1^n, \quad u_{J+1}^n = u_J^n \quad \text{y} \quad u_{J+2}^n = u_{J-1}^n$
- Condiciones de frontera periódicas: $u_{-1}^n = u_J^n, \quad u_{-2}^n = u_{J-1}^n, \quad u_{J+1}^n = u_0^n \quad \text{y} \quad u_{J+2}^n = u_1^n$

9.2. MÉTODOS DE RECONSTRUCCIÓN DE ORDEN ALTO

9.2.1. Reconstrucción de funciones suaves

En el apartado anterior, se ha utilizado una estimación del promedio de la solución en cada celda para hallar una aproximación puntual de dicha función. Para esta reconstrucción se han empleado, o bien funciones constantes a trozos o bien funciones lineales a trozos; obteniendo de esta manera, reconstrucciones espaciales de orden 1 o de orden 2, respectivamente. El objetivo ahora es el de plantear distintas estrategias que nos permitan aumentar el orden de la estimación puntual que luego se utiliza para resolver los problemas de Riemann adecuados. Estas estrategias respecto de la reconstrucción en la discretización espacial, junto a herramientas como un método de Runge-Kutta estable y de orden alto en la parte temporal, permiten obtener una aproximación final de la solución bastante más precisa aumentando el orden del esquema resultante. Y ello, tanto en los intervalos de suavidad como en aquellos puntos en los que la solución presenta alguna singularidad.

En el epígrafe 9.1.7 se ha presentado un método de reconstrucción espacial con la propiedad TVD (9.27), mediante el limitador de pendiente *minmod*. Es sabido que no puede obtenerse un orden superior a dos si se pretende conservar la disminución de la variación. Por ello, para alcanzar mayor precisión, se han desarrollado técnicas, basadas en ideas similares, pero sin asegurar estrictamente esta condición TVD. Algunos ejemplos son los métodos *ENO* (*essentially non-oscillatory*) y *WENO* (*weighted essentially non-oscillatory*) que veremos en los dos epígrafes siguientes.

Antes de ello, resulta de interés estudiar el siguiente problema:

Sea $r > 0$. Dada la partición de la figura 9.1 y los valores promedio de la función $h: [x_L, x_R] \rightarrow \mathbb{R}$, suficientemente suave

$$\bar{h}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} h(\xi) d\xi. \quad (9.31)$$

Se plantea hallar, para cada celda c_j , un polinomio $q_j^r(x)$, de grado menor que r , que aproxime h en c_j con orden r , es decir

$$q_j^r(x) - h(x) = \mathcal{O}(\Delta x^r), \quad \forall x \in c_j.$$

En primer lugar, fijada una celda c_j arbitraria, deben seleccionarse r celdas consecutivas conteniendo a c_j , es decir

$$\bar{S}_{j,k}^r = \{c_{j-k}, \dots, c_{j-k+r-1}\}, \quad k \in \{0, \dots, r-1\}. \quad (9.32)$$

Se denota por $S_{j,k}$ al conjunto formado por los extremos de las celdas en $\bar{S}_{j,k}^r$, es decir

$$S_{j,k}^r = \left\{ x_{j-k-\frac{1}{2}}, \dots, x_{j-k+r-\frac{1}{2}} \right\}.$$

Si alguna celda c_* de $\bar{S}_{j,k}^r$ no pertenece a la partición de $[x_L, x_R]$ anteriormente considerada, debe definirse el promedio de \bar{h}_* siguiendo una de las estrategias siguientes:

- Condiciones de frontera artificiales: $\bar{h}_{-r} = \bar{h}_{r-1}$, $\bar{h}_{j+r} = \bar{h}_{j-r+1}$
- Condiciones de frontera periódicas: $\bar{h}_{-r} = \bar{h}_{j-r+1}$, $\bar{h}_{j+r} = \bar{h}_{r-1}$

Tomamos la primitiva de la función h

$$H(x) = \int_{x_L}^x h(\xi) d\xi.$$

Cabe notar que, las diferencias divididas⁹ de primer orden de H en los extremos de las celdas coinciden con los promedios (9.31)

$$H[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] = \frac{H(x_{i+1/2}) - H(x_{i-1/2})}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} h(\xi) d\xi = \bar{h}_i.$$

Esto es importante, pues indica que las diferencias divididas de H de cualquier orden, pueden obtenerse también a partir de la información conocida. En particular, se define

$$\begin{aligned} \bar{h}[x_i] &= \bar{h}_i \\ \bar{h}[x_i, \dots, x_{i+l}] &= \frac{\bar{h}[x_{i+1}, \dots, x_{i+l}] - \bar{h}[x_i, \dots, x_{i+l-1}]}{x_{i+l} - x_i}, \quad l > 0, \end{aligned}$$

puede comprobarse, por inducción sobre el parámetro l , la relación

$$H[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, \dots, x_{i+l+1/2}] = \frac{1}{l+1} \bar{h}[x_i, \dots, x_{i+l}], \quad l \geq 0. \quad (9.33)$$

⁹ La diferencia dividida es un concepto utilizado en cálculo numérico y en la interpolación de Newton. Es una forma de calcular la pendiente de una recta que pasa por dos puntos en un plano, y se utiliza para construir polinomios de interpolación. Formalmente: Dada una función $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\{x_i\}_{i=1}^n \subset D$ con $x_i < x_{i+1}$, las *diferencias divididas* de f en estos puntos, se definen como

$$\begin{aligned} f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \\ \text{y, de manera recursiva, para } j &= 1, 2, \dots \\ f[x_i, \dots, x_{i+j}] &= \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] - f[x_i, \dots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i} \end{aligned}$$

Se toma a continuación el (único) polinomio $Q_{j,k}^r$ de grado menor o igual que r , que interpola a la función primitiva H en los puntos $S_{j,k}^r$

$$Q_{j,k}^r(x) = \sum_{j=0}^r H \left[x_{j-k-\frac{1}{2}}, \dots, x_{j-k+r-\frac{1}{2}} \right] \prod_{m=0}^{r-1} \left(x - x_{j-k+m-\frac{1}{2}} \right) \quad (9.34)$$

Debe notarse que el polinomio $Q_{j,k}^r$ es una aproximación de H de orden $r + 1$ en la envoltura convexa de $S_{j,k}^r$, $\text{conv}(S_{j,k}^r) = \left[x_{j-k-\frac{1}{2}}, \dots, x_{j-k+r-\frac{1}{2}} \right]$, siempre que esta función sea suficientemente suave en dicho intervalo.

Según teoría básica de interpolación, se deduce que la función derivada de este polinomio, denotada por, $q_{j,k}^r$, es una estimación puntual de h de orden r . En particular, en c_j

$$q_{j,k}^r(x) - h(x) = \mathcal{O}(\Delta x^r), \quad \forall x \in c_j.$$

Destacamos que este polinomio $q_{j,k}^r$ interpola los promedios de h en las celdas de $\bar{S}_{j,k}^r$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{c_{j-k+i}} q_{j,k}^r(x) dx &= \frac{Q_{j,k}^r \left(x_{j-k+i+\frac{1}{2}} \right) - Q_{j,k}^r \left(x_{j-k+i-\frac{1}{2}} \right)}{\Delta x} \\ &= \frac{H \left(x_{j-k+i+\frac{1}{2}} \right) - H \left(x_{j-k+i-\frac{1}{2}} \right)}{\Delta x} \\ &= \bar{h}_{j-k+i}. \end{aligned} \quad i = 0, 1, \dots, r - 1$$

La segunda igualdad se cumple porque $Q_{j,k}^r$ interpola H en los puntos de $S_{j,k}^r$.

Al derivar (9.34), el polinomio $q_{j,k}^r$, no incluye el término $H \left(x_{j-k-\frac{1}{2}} \right)$, de modo que, por la propiedad (9.33), éste solo depende de los promedios conocidos de $\bar{h}_{j-k}, \dots, \bar{h}_{j-k+r-1}$. Así pues, aunque se usa la función primitiva H en la deducción de $q_{j,k}^r$, no es necesario conocer ninguna información sobre ella.

Se ha obtenido la expresión explícita de dicho polinomio para $r = 2$, para $r = 3$ y $k \in \{-1, 0, \dots, r - 1\}$. Se ha añadido $k = -1$, por conveniencia en los cálculos que siguen.

En nuestro caso, tan solo se utilizan los valores que toma $q_{j,k}^r$ en los extremos de c_j , es decir, en los puntos $x_{j-\frac{1}{2}}$ y $x_{j+\frac{1}{2}}$. De manera que, evaluando los polinomios obtenidos, $q_{j,k}^2$ y $q_{j,k}^3$, en estos nodos, se obtiene:

$$q_{j,k}^r \left(x_{j+\frac{1}{2}} \right) = \sum_{i=0}^{r-1} C_{k,i} \bar{h}_{j-k+i}; \quad q_{j,k}^r \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) = \sum_{i=0}^{r-1} C_{k-1,i} \bar{h}_{j-k+i}; \quad r = 2,3 \quad (9.35)$$

El valor de los coeficientes $C_{k,i}$ se incluye en la tabla 9.1 siguiente.

r	k	i=0	i=1	i=2
2	-1	$3/2$	$-1/2$	
	0	$1/2$	$1/2$	
	1	$-1/2$	$3/2$	
3	-1	$11/6$	$-7/6$	$1/3$
	0	$1/3$	$5/6$	$-1/6$
	1	$-1/6$	$5/6$	$1/3$
	2	$1/3$	$-7/6$	$11/6$

Tabla 9.1. Coeficientes $C_{k,i}$ para el cálculo de $q_{j,k}^r$.

9.2.2. Método ENO

Para el desarrollo de este epígrafe se ha tomado [1, 29] como referencia.

Así, en el epígrafe anterior, a partir de los valores promedio (9.31) de una función suficientemente suave, se ha obtenido una estimación puntual de ésta, en cada celda c_j . Para ello, fijada la celda c_j , pueden utilizarse distintos conjuntos de celdas que la contengan, mostrados en (9.32).

Como sabemos, las soluciones de las ecuaciones hiperbólicas no lineales pueden mostrar singularidades en tiempo finito. Por ello, si utilizamos cualquier $\bar{S}_{j,k}^r$ en el proceso de reconstrucción, podrían obtenerse aproximaciones que no verifiquen la condición de orden o incluso, presenten alguna oscilación.

En este sentido, la idea fundamental del método ENO consiste en escoger, de entre los distintos $\bar{S}_{j,k}^r$ posibles, aquel que proporcione el polinomio interpolador más suave. Este algoritmo, selecciona $S_{j,k}^r$ usando diferencias divididas como indicadores de suavidad. De manera que se elige el conjunto que genera menos diferencias, para intentar evitar así oscilaciones en la interpolación, en primera instancia, así como posteriormente, alrededor de las discontinuidades de la solución. A continuación, desarrollamos el detalle del procedimiento seguido en este método.

Así pues, para hallar una aproximación de h en una determinada celda c_j , debe incluirse en $S_{j,k}^r$ los extremos de esta celda, es decir, $x_{j-\frac{1}{2}}$, $x_{j+\frac{1}{2}}$. El polinomio de primer grado (recta) que interpola a la función primitiva H en estos puntos, viene dado entonces por

$$P_j^1(x) = H \left(x_{j-\frac{1}{2}} \right) + H \left[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}} \right] \left(x - x_{j-\frac{1}{2}} \right).$$

Para construir el polinomio de segundo grado, el tercer nodo a escoger puede ser, en principio, $x_{j-\frac{3}{2}}$ o $x_{j+\frac{3}{2}}$. Si tomamos el primero de ellos, el polinomio que interpola H en los puntos $\left\{x_{j-\frac{3}{2}}, x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}\right\}$ será

$$P_j^{2,1}(x) = P_j^1(x) + H \left[x_{j-\frac{3}{2}}, x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}} \right] \left(x - x_{j-\frac{1}{2}} \right) \left(x - x_{j+\frac{1}{2}} \right).$$

Mientras que si tomamos $x_{j+\frac{3}{2}}$ como tercer nodo, el polinomio sería

$$P_j^{2,2}(x) = P_j^1(x) + H \left[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{3}{2}} \right] \left(x - x_{j-\frac{1}{2}} \right) \left(x - x_{j+\frac{1}{2}} \right).$$

Como vemos, los polinomios $P_j^{2,1}(x)$ y $P_j^{2,2}(x)$ difieren tan solo en la diferencia dividida que acompaña al término $\left(x - x_{j-\frac{1}{2}} \right) \left(x - x_{j+\frac{1}{2}} \right)$. De manera que, por lo comentado anteriormente, se escoge el nodo $x_{j-\frac{3}{2}}$ si

$$\left| H \left[x_{j-\frac{3}{2}}, x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}} \right] \right| \leq \left| H \left[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{3}{2}} \right] \right|,$$

o el nodo $x_{j+\frac{3}{2}}$ en caso contrario. Se hace notar, que las diferencias divididas de H pueden obtenerse a partir de las medias \bar{h}_j conocidas, mediante (9.33).

Se sigue este algoritmo hasta obtener los $r+1$ puntos necesarios. De esta forma se obtiene el mallado $S_{j,k}^r$ para cierto $k = k_0 \in \{0, \dots, r-1\}$. Una vez elegido el mallado, la estimación buscada es la dada por el polinomio q_{j,k_0}^r obtenido en el epígrafe anterior, que supone una aproximación de h de orden r si esta función es suave en las celdas de \bar{S}_{j,k_0}^r . Los valores que toma en los extremos de la celda c_j se calculan mediante las expresiones (9.35).

Este método permite obtener aproximaciones bastante precisas de las soluciones de las leyes de conservación, sin presentar oscilaciones.

9.2.3. Método WENO

Al igual que en el caso del epígrafe anterior, para el desarrollo del presente, se ha tomado [1, 29] como referencia.

No obstante lo dicho en el epígrafe anterior, queremos señalar lo siguiente. En el método ENO, para cada celda c_j , los r conjuntos $\bar{S}_{j,k}^r$ que se consideran, contienen entre todos, $2r-1$ celdas: $c_{j-r+1}, \dots, c_{j+r-1}$ (y con ellas se obtiene una aproximación de h de orden r). Entonces, si h es suficientemente suave en cada una de ellas, puede tomarse el conjunto

$$\bar{S}_j^{2r-1} = \{c_{j-r+1}, \dots, c_{j+r-1}\},$$

para hallar una aproximación/estimación de orden $2r - 1$, denotada por q_j^{2r-1} , siguiendo la explicación dada en el epígrafe 9.2.1. Esta aproximación, mejoraría entonces la obtenida mediante el algoritmo previo de orden r en el método ENO. Este hecho motiva el método WENO que presentamos a continuación, en el que se van a considerar si bien, a través de la consideración de unos pesos para los distintos polinomios en función de su suavidad, como veremos seguidamente.

Recordamos en este punto, que para resolver las ecuaciones hiperbólicas de leyes de conservación solamente se utiliza la aproximación de h en los extremos de las celdas. Así, a partir de [1], los valores de $q_j^{2r-1}\left(x_{j\pm\frac{1}{2}}\right)$ pueden expresarse como

$$q_j^{2r-1}\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right) = \sum_{k=0}^{r-1} d_k^r q_{j,k}^r\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right), \quad q_j^{2r-1}\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right) = \sum_{k=0}^{r-1} d_{r-k-1}^r q_{j,k}^r\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right). \quad (9.36)$$

Los polinomios $q_{j,k}^r$ son las estimaciones de h en los intervalos $\left[x_{j-k-\frac{1}{2}}, x_{j-k+r-\frac{1}{2}}\right]$, cuyas imágenes en $x = x_{j\pm\frac{1}{2}}$, pueden calcularse por las expresiones dadas en (9.35).

Los coeficientes d_k^r reciben el nombre de *pesos óptimos*, los cuales verifican:

$$d_0^r + d_1^r + \cdots + d_{r-2}^r + d_{r-1}^r = 1,$$

siendo su valor para $r = 2$ y para $r = 3$, los siguientes

$$\begin{aligned} r = 2: \quad d_0^2 &= \frac{2}{3}, \quad d_1^2 = \frac{1}{3}, \\ r = 3: \quad d_0^3 &= \frac{3}{10}, \quad d_1^3 = \frac{3}{5}, \quad d_2^3 = \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

Como podemos observar pues, para el método WENO, en lugar de considerar una única estimación dada por $q_{j,k}^r$ y descartar el resto, se propone tomar una combinación convexa de todas ellas; la dada en (9.36). De manera que, se asignan unos pesos d_k^r a los polinomios $q_{j,k}^r$ en función de su suavidad; lo que determina su contribución a la aproximación final.

Así, las estimaciones de h en los extremos de la celda c_j , es decir, $h\left(x_{j\pm\frac{1}{2}}\right)$, vendrán dadas por

$$\hat{h}\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right) = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_{j,k}^r q_{j,k}^r\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right) \approx h\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right), \quad (9.37)$$

$$\hat{h}\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right) = \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{\omega}_{j,k}^r q_{j,k}^r\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right) \approx h\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right), \quad (9.38)$$

con unos pesos $\omega_{j,k}^r$ y $\tilde{\omega}_{j,k}^r$, $k = 0, \dots, r-1$. La clave está en la manera de obtener estos pesos. Así, el valor de $\omega_{j,k}^r$ se va a escoger según de la suavidad de la función h en las celdas del conjunto $\bar{S}_{j,k}^r$. De forma que, si en ellas la función presenta alguna discontinuidad, este valor debiera ser prácticamente cero. De este modo, $\hat{h}\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right)$ ‘solamente’ se calcularía a partir de las celdas donde no hay singularidades, obteniendo así, una estimación al menos de orden r . Sin embargo, si la función es suave en todos los conjuntos $\bar{S}_{j,k}^r$, los pesos $\omega_{j,k}^r$ deben tomar valores próximos a los óptimos d_k^r para alcanzar un orden superior ($\leq 2r-1$).

Al igual que en [1], se propone

$$\begin{aligned} \omega_{j,k}^r &= \frac{\alpha_{j,k}^r}{\alpha_{j,0}^r + \dots + \alpha_{j,r-1}^r}, & \alpha_{j,k}^r &= \frac{d_k^r}{(\varepsilon + IS_{j,k}^r)^2} \\ \tilde{\omega}_{j,k}^r &= \frac{\tilde{\alpha}_{j,k}^r}{\tilde{\alpha}_{j,0}^r + \dots + \tilde{\alpha}_{j,r-1}^r}, & \tilde{\alpha}_{j,k}^r &= \frac{d_{r-k-1}^r}{(\varepsilon + IS_{j,k}^r)^2} \end{aligned} \quad k = 0, \dots, r-1. \quad (9.39)$$

En las expresiones (9.39) anteriores, el parámetro ε alude a un número positivo muy pequeño, empleado para evitar que se anule el denominador. Por otro lado, el término $IS_{j,k}^r$ corresponde a una medida de la suavidad de la función h en las celdas de $\bar{S}_{j,k}^r$, que puede calcularse a partir de

$$IS_{j,k}^r = \sum_{m=0}^{r-1} \Delta x^{2m-1} \int_{c_j} \left(\frac{d^m}{dx^m} q_{j,k}^r(x) \right)^2 dx. \quad (9.40)$$

De forma que, cuanto menor sea el valor de $IS_{j,k}^r$ más suave será el polinomio $q_{j,k}^r$ y, por tanto, éste deberá tener un mayor peso a la hora de calcular las aproximaciones (9.37) y (9.38); tal cual reflejan las expresiones para los pesos dadas en (9.39).

Para $r = 2$ la expresión (9.40) equivale a:

$$IS_{j,0}^2 = (\bar{h}_{j+1} - \bar{h}_j)^2, \quad IS_{j,1}^2 = (\bar{h}_j - \bar{h}_{j-1})^2.$$

Mientras que, para $r = 3$, se tiene:

$$IS_{j,0}^3 = \frac{13}{12}(\bar{h}_j - 2\bar{h}_{j+1} + \bar{h}_{j+2})^2 + \frac{1}{4}(3\bar{h}_j - 4\bar{h}_{j+1} + \bar{h}_{j+2})^2$$

$$IS_{j,1}^3 = \frac{13}{12}(\bar{h}_{j-1} - 2\bar{h}_j + \bar{h}_{j+1})^2 + \frac{1}{4}(\bar{h}_{j-1} - \bar{h}_{j+1})^2$$

$$IS_{j,2}^3 = \frac{13}{12}(\bar{h}_{j-2} - 2\bar{h}_{j-1} + \bar{h}_j)^2 + \frac{1}{4}(\bar{h}_{j-2} - 4\bar{h}_{j-1} + 3\bar{h}_j)^2$$

Este método WENO será implementado en uno de los métodos propuestos en la Parte 3 de este trabajo, dedicada a la Aplicación, concretamente en el esquema numérico de tipo upwind.

9.2.4. Aplicación a los métodos de volúmenes finitos

Recordemos que el objetivo es resolver el problema

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0, & x \in [x_L, x_R], \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Recapitemos lo visto hasta el momento. Así pues, sea $u = u(x, t)$ su solución. En los métodos de volúmenes finitos vistos en el apartado 9.1, una vez calculadas las estimaciones u_j^n de los promedios de $u(\cdot, t_n)$ en las celdas, debe hallarse una aproximación puntual de esta función en cada celda o intervalo c_j . Para ello, hemos visto que se pueden utilizar funciones constantes a trozos (epígrafes 9.1.3 a 9.1.5)

$$u(x, t_n) \approx u_j^n \quad x \in c_j,$$

o lineales a trozos (epígrafe 9.1.7)

$$u(x, t_n) \approx u_j^n + \sigma_j^n (x - x_j) \quad x \in c_j,$$

obteniendo estimaciones espaciales de orden 1 u orden 2 respectivamente.

Pues bien, estas sencillas estrategias pueden ahora sustituirse por los métodos de reconstrucción de orden alto que acabamos de ver en los epígrafes precedentes, como exponemos seguidamente.

Así, la solución de (9.41) se obtendrá a partir de la formulación semidiscreta presentada en el epígrafe 9.1.8. Recordemos, que ésta consiste en resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_j(t) = \mathcal{L}_j(t) &= -\frac{1}{\Delta x} \left(\hat{f}_{j+1/2}(t) - \hat{f}_{j-1/2}(t) \right), & t > 0 \\ & & j = 0, 1, \dots, J \end{aligned} \quad (9.42)$$

con condición inicial

$$u_j(0) = \frac{1}{\Delta x} \int_{c_j} u_0(x) dx.$$

En (9.42), $u_j(t)$ corresponde a una aproximación del promedio

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{c_j} u(x, t) dx,$$

mientras que $\hat{f}_{j\pm 1/2}$ corresponden a una estimación de $f\left(u\left(x_{j\pm 1/2}, t\right)\right)$. En el mencionado epígrafe 9.1.8, para la discretización temporal se utiliza un método Runge-Kutta de orden 2 que cumple la propiedad TVD (discretización de (7.33)). Como sabemos, las técnicas vistas en los métodos ENO y WENO permiten obtener una aproximación espacial de orden superior a dos. No obstante, si en este caso se aplica un método de orden 2, como el mencionado, para la evolución temporal, el esquema resultante proporcionará una estimación final en las regiones donde la solución sea suave, de orden 2. Para aumentar pues la precisión final del método, podemos proponer, por ejemplo, un esquema Runge-Kutta de orden 3 para dicha evolución temporal, que conserva la condición TVD. Este esquema viene dado por

$$\begin{aligned} u_j^{(1)} &= u_j^n + \Delta t_n \mathcal{L}_j^n, \\ u_j^{(2)} &= \frac{3}{4} u_j^n + \frac{1}{4} u_j^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t_n \mathcal{L}_j^{(1)}, \\ u_j^{n+1} &= \frac{3}{4} u_j^n + \frac{2}{3} u_j^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t_n \mathcal{L}_j^{(2)}, \end{aligned} \quad j = 0, 1, \dots, J. \quad (9.43)$$

Para aplicar el esquema (9.43) anterior, se toma $u_j^0 = u_j(0)$, para cualquier $j \in \{0, 1, \dots, J\}$. Posteriormente, para $t = t_n$, calculados como siempre $u_j^n \approx u_j(t_n)$, se determinan las aproximaciones en el instante $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$, donde Δt_n debe verificar (condición CFL)

$$\max_j |f'(u_j^n)| \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}.$$

Ahora, para aplicar las técnicas de reconstrucción de orden alto vistas, veamos cómo proceder. Estas técnicas se van a utilizar en la parte espacial de la discretización, en el cálculo de los términos \mathcal{L}_j^* a partir de u_j^* , donde el superíndice ‘asterisco’ alude a “n”, “(1)” o “(2)” en la notación empleada en (9.43). Recordemos que tenemos que resolver el sistema (9.42).

Por tanto, ahora, se aplica bien el método ENO o bien el método WENO, para cierto r (en coherencia con el esquema Runge-Kutta (9.43), cabría aplicar estas reconstrucciones para $r = 3$), en las celdas

$$c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_{J-1}, c_J, c_{J+1},$$

tomando los promedios $\bar{h}_j = u_j^*$. Deben añadirse los valores u_j^* correspondientes a los subíndices $j = -1, -2, \dots, -r$ y $j = J + 1, J + 2, \dots, J + r$, mediante alguna de las estrategias explicadas en el epígrafe 9.2.1. Las aproximaciones de los valores $h\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right)$ y $h\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right)$ en cada celda c_j , se denotarán por $u_{j+\frac{1}{2}}^{*-}$ y $u_{j-\frac{1}{2}}^{*+}$, respectivamente. Una vez hecho esto, los flujos $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^*$ se obtienen como

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^* = \hat{f}\left(u_{j+\frac{1}{2}}^{*-}, u_{j+\frac{1}{2}}^{*+}\right), \quad j = -1, \dots, J$$

donde \hat{f} se corresponde con $\hat{f}=\hat{f}^{God}$ o $\hat{f}=\hat{f}^{Rus}$, tal y como se definieron en (9.10) o (9.15), respectivamente. Finalmente, el término \mathcal{L}_j^* equivale, con esta notación, a la siguiente expresión

$$\mathcal{L}_j^* = -\frac{1}{\Delta x} \left(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^* - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^* \right), \quad j = 0, \dots, J.$$

De nuevo, puede justificarse que el método así formado, es conservativo y consistente. Lo que junto a la propiedad TVD, nos indica que el resultado obtenido es una estimación de la solución de entropía del problema.

En [30] puede consultarse un ejemplo numérico en el que se comparan, entre otros, los resultados obtenidos por un modelo con reconstrucción espacial ENO de orden 3 y un esquema Runge-Kutta de orden 2 para la estimación temporal, con los obtenidos por un modelo con reconstrucción espacial WENO de orden 3 y un esquema Runge-Kutta también de orden 3 para la estimación temporal. Los resultados obtenidos en este caso, son prácticamente coincidentes, incluso en los puntos en los que la solución exacta presenta singularidades.

9.3. EXTENSIÓN A SISTEMAS DE ECUACIONES

9.3.1. Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación

Hasta el momento, en esta Parte 2 del trabajo, hemos analizado las ecuaciones hiperbólicas de las leyes de conservación escalares, tanto lineales como no lineales, desde el punto de vista teórico, y se han presentado distintos métodos numéricos en volúmenes finitos, principalmente, para estimar su solución. En este epígrafe y en el siguiente, se va a generalizar lo visto al caso de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación, planteando el concepto de sistema hiperbólico y su tratamiento numérico en el caso de sistemas no lineales directamente. Para un estudio teórico más detallado, tanto de los sistemas lineales como de los no lineales, véase [30].

En general, las leyes de conservación se representan, como sabemos, en forma de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. Se trata de sistemas de la forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i(u)}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (9.44)$$

en la que $u = (u_1, \dots, u_m): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ representa la solución de la ley de conservación formada por las variables conservadas u_i . Por su parte, las componentes $f = (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ reciben el nombre de funciones de flujo o simplemente flujos, y son función de las variables conservadas. Cabe notar que este sistema se deduce a partir de la ecuación integral, más general, similar a (7.21).

Como en el caso escalar, el objetivo es obtener la solución de (9.44) que verifica la condición inicial:

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

dada una función $u^0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ conocida (dato inicial).

El sistema (9.44) suele escribirse de la forma

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

siendo, matricialmente, una expresión equivalente a

$$u_t + A(u)u_x = 0, \quad (9.45)$$

en donde $A(u)$ corresponde a la matriz jacobiana de $f(u)$, es decir

$$A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (A(u))_{i,j} = \frac{\partial f_i(u)}{\partial u_j}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Se dice que el sistema (9.45) es hiperbólico si, para cualquier vector $u \in \mathbb{R}^m$, la matriz $A(u)$ es diagonalizable con valores propios reales. Es decir, si $A(u)$ tiene m valores propios reales tales que

$$\lambda_1(u) \leq \lambda_2(u) \leq \dots \leq \lambda_m(u)^{10}$$

y existe una base de \mathbb{R}^m formada por los vectores propios asociados $r_i(u)$. De esta forma, sea $R(u) = (r_1(u) | \dots | r_m(u))$, se satisface la relación

$$A(u) = R(u)\Lambda(u)R(u)^{-1}, \quad \Lambda(u) = \text{diag}(\lambda_1(u), \dots, \lambda_m(u)). \quad (9.46)$$

El sistema será estrictamente hiperbólico si, además, los valores propios de la matriz jacobiana de f son distintos, es decir

$$\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \dots < \lambda_m(u). \quad (9.47)$$

En adelante, asumimos que el sistema (9.45) es estrictamente hiperbólico. Esta condición de hiperbolicidad es necesaria para demostrar la existencia de algunas soluciones, mientras que la condición (9.47) se asume para facilitar el estudio a realizar. En cualquier caso, estas restricciones no suponen limitación alguna a la hora de plantear la extensión de los esquemas numéricos ni de resolver el caso planteado en la siguiente parte de este trabajo.

9.3.2. Métodos numéricos para sistemas no lineales

Los problemas a cuya resolución nos enfrentamos, son del tipo

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0, & (x, t) \in \Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) &= u^0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (9.48)$$

estrictamente hiperbólicos, en los que para cualquier vector u , la matriz $A(u) = f'(u) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ tiene m valores propios reales y distintos.

Como en el caso escalar, para funciones suaves u^0 , la no linealidad de estas ecuaciones puede provocar discontinuidades en sus soluciones. Esto obligaba, como se vio, a generalizar el concepto clásico de solución (es decir, función de clase C^1 que verifica la ecuación diferencial en todo punto) al de solución débil que luego a su vez requirió, el de solución de entropía. Concepto este último necesario para en el caso de existencia de varias soluciones débiles, encontrar aquella que tenía sentido físico y que, por tanto, de verdad resolvía el problema.

¹⁰ Donde cada valor propio se repite tantas veces como indique su multiplicidad.

El objetivo pues, como en el caso de la ecuación escalar, será obtener una aproximación de la solución de entropía del problema. No obstante, el diseño de métodos numéricos para estos sistemas no lineales supone un importante reto, ya que sus soluciones, como sabemos, resultan mucho más complejas que en el caso escalar o lineal.

Así pues, en primer lugar, se propone generalizar los métodos de volúmenes finitos analizados para la ecuación escalar no lineal (Apartado 9.1). Para ello, dado el problema (9.48), se considera el mallado en los dominios espacial y temporal visto en el epígrafe 9.1.1. Se pretende, por tanto, obtener las aproximaciones de los promedios de la solución en cada celda, esto es

$$u_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx, \quad u_j^n \in \mathbb{R}^m.$$

Como siempre, fijado el paso espacial Δx , una vez halladas las estimaciones u_j^n para cierto instante $t = t_n$, se toma Δt_n (paso temporal) de modo que se satisfaga la condición CFL dada ahora por

$$\max_{i,j} |\lambda_i(u_j^n)| \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}, \quad (9.49)$$

con λ_i valor propio de la matriz $A(u)$ del sistema. Esta expresión (9.49) supone la extensión de (9.9) para sistemas de ecuaciones.

Posteriormente, con el método de volúmenes finitos, siguiendo el esquema de Godunov en este caso, los valores de u_j^{n+1} , se calculan a partir de la expresión

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n), \quad (9.50)$$

donde $\hat{f}_{j+1/2}^n$ corresponde a la imagen por f de la solución del problema de Riemann

$$\begin{aligned} u_t + f'(u)u_x &= 0, \\ u(x, t_n) &= \begin{cases} u_j^n & x < x_{j+1/2} \\ u_{j+1}^n & x > x_{j+1/2} \end{cases}. \end{aligned} \quad (9.51)$$

A diferencia del caso de la ecuación escalar, ahora no es posible deducir la expresión general de los flujos $\hat{f}_{j+1/2}^n$, lo que sin duda dificulta la aplicación del método. Para los sistemas lineales, no obstante, sí es posible obtener estos valores, ya que, en este caso, el problema (9.51) puede resolverse de manera exacta [30]. Se comprueba en este caso, como ya ocurría para la ecuación escalar, que este método aplicado a un sistema lineal, coincide con el método upwind.

Como extensión del método de Roe, se propone sustituir el término no lineal $f'(u)$ en (9.51) por una matriz $A_{j+\frac{1}{2}}^n$, que dependa de u_j^n y u_{j+1}^n . En [31] se indica que esta matriz debe cumplir las siguientes propiedades:

- $A_{j+\frac{1}{2}}^n(u_{j+1}^n - u_j^n) = f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)$
- $A_{j+\frac{1}{2}}^n$ sea diagonalizable con valores propios reales
- $A_{j+\frac{1}{2}}^n \rightarrow f'(\bar{u})$ suavemente si $u_j^n, u_{j+1}^n \rightarrow \bar{u}$.

La conclusión respecto a esta adaptación [30] es que, aunque pueden obtenerse matrices que satisfagan estas propiedades, sus expresiones son tan complejas, que hacen inviable la puesta en práctica de la misma.

Por otra parte, como generalización del método de Rusanov, se propone aproximar la solución de (9.51) por una función a trozos de la forma

$$\bar{\omega}_j^n(x, t) = \begin{cases} u_j^n & x - x_{j+\frac{1}{2}} < -s_{j+\frac{1}{2}}(t - t_n) \\ u_{j+\frac{1}{2}}^* & -s_{j+\frac{1}{2}}(t - t_n) < x - x_{j+\frac{1}{2}} < s_{j+\frac{1}{2}}(t - t_n), \\ u_{j+1}^n & x - x_{j+\frac{1}{2}} > s_{j+\frac{1}{2}}(t - t_n) \end{cases}$$

con $u_{j+\frac{1}{2}}^*$ y $s_{j+\frac{1}{2}}$ por determinar. Función con dos discontinuidades, como sabemos, que se desplazan a velocidades $s_{j+\frac{1}{2}}$ y $-s_{j+\frac{1}{2}}$. Al igual que en el caso escalar, aplicando la condición RH, se considera

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n = \hat{f}^{Rus}(u_j^n, u_{j+1}^n) = f_{j+\frac{1}{2}}^* = \frac{f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)}{2} - \frac{s_{j+\frac{1}{2}}}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n), \quad (9.52)$$

donde para el valor de la velocidad $s_{j+\frac{1}{2}}$, se propone

$$s_{j+\frac{1}{2}} = \max_i (|\lambda_i(u_j^n)|, |\lambda_i(u_{j+1}^n)|). \quad (9.53)$$

Finalmente, siguiendo ese paralelismo con el apartado 9.1, en cada celda $c_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$, puede definirse una función lineal del tipo

$$p_{n,j}(x) = u_j^n + \sigma_j^n(x - x_j),$$

con pendiente $\sigma_j^n \in \mathbb{R}^m$ adecuada. A partir de ésta, se sustituyen las estimaciones u_j^n y u_{j+1}^n en (9.52) y (9.53) por los valores $p_{n,j}(x_{j+1/2})$ y $p_{n,j+1}(x_{j+1/2})$ respectivamente.

Análogamente, componente a componente, también pueden aplicarse las técnicas de reconstrucción espacial de alto orden ENO y WENO presentadas en el Apartado 9.2. Como ya se ha comentado, esta última técnica será implementada en uno de los métodos propuestos en la Parte 3 de este trabajo.

EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS EN EL ANÁLISIS DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE.
APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VËNANT

*PARTE 3. EL FVM EN EL ANÁLISIS DEL FLUJO
EN LÁMINA LIBRE UNIDIMENSIONAL NO
PERMANENTE. SISTEMA DE ECUACIONES DE
SAINT-VËNANT O ECUACIONES DE AGUAS
SOMERAS (SWE). APLICACIÓN*

10. MOTIVACIÓN

La Hidráulica del Flujo en Lámina Libre estudia el movimiento del agua en cauces, canales, colectores, etc. En todos aquellos conductos, cerrados o no, para los que el movimiento tiene lugar con una lámina libre (LL) de separación entre el flujo de agua y la atmósfera. La importancia de este tipo de flujos para las personas es vital. Téngase en cuenta p.e., que el agua de nuestros grifos procede, si se trata de recursos superficiales (lo más habitual), del agua de los embalses (en LL) que es captada y transportada por canales (en LL) hasta las plantas potabilizadoras. El conocimiento de la hidráulica de los cauces naturales es fundamental para poder regularlos y captar recursos para abastecimiento, riego, producción de energía hidroeléctrica, etc., pero también para hacer una explotación sostenible de los mismos sin alterar de manera significativa su régimen de corrientes, garantizando en todo momento el adecuado régimen de caudales ecológicos. Pero no solo esto, los estudios de inundabilidad que permiten hacer planes de emergencia y proteger a la población frente a las inundaciones de los ríos, requieren del conocimiento de estos flujos en lámina libre y de su modelación matemática para así poder cuantificar calados (niveles) y velocidades de los flujos desbordados, así como los alcances territoriales de las inundaciones. Solo de esta manera se puede, por una parte, defender a la población frente a las avenidas fluviales, y por otra, siempre que estemos a tiempo, realizar una adecuada ordenación territorial y urbana, compatible con los riesgos de inundación. Este tema es, lamentablemente, de gran interés en nuestra zona.

Por todo ello, el conocimiento de estos flujos y su cálculo numérico, resulta de especial importancia en el campo de la Ingeniería Hidráulica asociada a la Ingeniería Civil.

11. PLANTEAMIENTO

Para la formulación matemática de este tipo de flujos (hidráulicamente hablando) se parte de leyes de conservación fundamentales de la Mecánica de Fluidos relativas a la masa (ecuación de continuidad), momento (cantidad de movimiento) y energía, que constituyen las leyes de gobierno del movimiento y que se expresan en forma de EDPs. Estas ecuaciones se compactan en un sistema hiperbólico no lineal. Las soluciones a este sistema presentan discontinuidades (saltos, ondas, etc.) por lo que las soluciones clásicas no son suficientes (además, los problemas de interés práctico real, no tienen solución analítica conocida). Por todo ello, interesa resolver el sistema original como un problema de valor inicial discontinuo como, por ejemplo, un problema de Riemann (no obstante, puede haber casos en los que interese resolver otros problemas de valores iniciales que no sean problemas de Riemann, con condiciones iniciales que tomen más de 2 valores). Como sabemos, en la solución de un problema de Riemann no lineal, aparecen dos tipos de ondas, las denominadas de choque y las de rarefacción. Esto depende de las condiciones iniciales a ambos lados de un determinado punto (sección), de manera que, se pueden producir zonas de compresión que generan ondas de choque (resalto hidráulico), cuando la magnitud conservada es inicialmente mayor a la izquierda del punto (sección); o, regiones de expansión, con ondas de rarefacción, cuando esta magnitud es mayor a la derecha (“cambio de régimen subcrítico a régimen supercrítico”).

Los Resolvedores de Riemann son métodos numéricos que permiten resolver dichos problemas. En este sentido, hemos visto, por ejemplo, el método de Godunov (epígrafe 9.1.3), explícito y de volumen finito, que calcula el flujo numérico que actualiza el valor de la función incógnita en cada celda promediando

los valores de diferentes soluciones que aparecen cuando se define un problema de Riemann local entre una celda y sus contiguas.

En esta parte del trabajo, en primer lugar, se van a deducir las ecuaciones de gobierno y se va a presentar la formulación final del sistema de EDPs a resolver, el conocido como sistema de ecuaciones de Saint-Venant. Seguidamente, se va a plantear diversos esquemas numéricos de resolución del mismo y el análisis de su comportamiento contrastando las soluciones obtenidas frente a casos test con solución exacta conocida. De este análisis se va a deducir el método propuesto que finalmente se contrasta frente a resultados obtenidos en laboratorio experimental.

12. FORMULACIÓN DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE (FLL) 1D NO PERMANENTE. ECUACIONES DE SAINT-VENANT

Las ecuaciones de gobierno del flujo en lámina libre unidimensional no permanente, ecuaciones del movimiento, forman un sistema de EDPs que se deduce promediando en sección transversal (en cuanto a sección hidráulica) a partir de las leyes físicas de: conservación de la masa (ecuación de continuidad), conservación del momento (ecuación de cantidad de movimiento) y conservación de energía. No obstante, para el análisis de este tipo de flujos, es suficiente con utilizar, junto a la ecuación de continuidad, una de las otras dos. Es habitual utilizar la ecuación de continuidad junto con la denominada ecuación dinámica, por ejemplo, deducida a partir del principio de energía. El sistema formado por estas dos ecuaciones es el conocido como ecuaciones de Saint-Venant o de aguas someras (SWE por sus siglas en inglés).

12.1. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD PARA EL FLUJO EN LÁMINA LIBRE UNIDIMENSIONAL NO PERMANENTE

La ecuación de continuidad para flujo no permanente puede deducirse estableciendo la conservación de la masa en un volumen infinitesimal de canal entre dos secciones del mismo (figura 12.1).

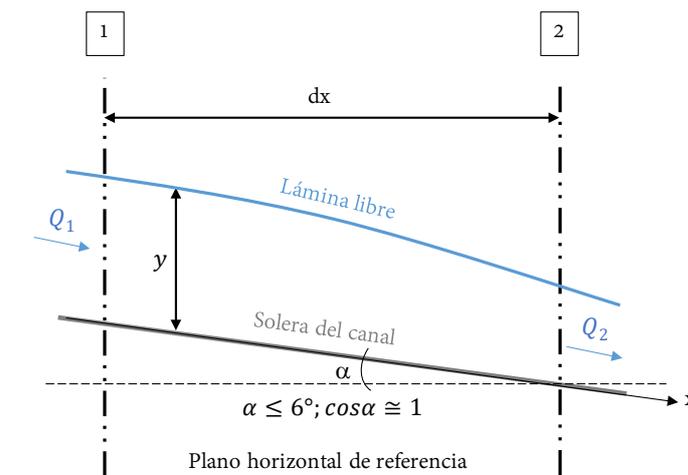


Figura 12.1. Esquema para la definición de la ecuación de continuidad en flujo no permanente.

En este tipo de flujo, el caudal varía con la distancia (variable x) a una tasa $\frac{\partial Q}{\partial x}$, es decir, los caudales de entrada y salida al volumen de control considerado no son necesariamente iguales en un instante de tiempo dado. De hecho, en general, su diferencia puede expresarse como

$$Q_2 - Q_1 = \frac{\partial Q}{\partial x} dx, \quad (12.1)$$

(la derivada parcial es necesaria ya que $Q = Q(x, t)$) y esa cantidad es, por conservación de la masa, el ratio al que el volumen fluido decrece entre las dos secciones de canal consideradas, ya que el agua además, es un fluido incompresible. Si y es el calado del flujo (altura de agua desde la solera del canal) y B el ancho en superficie libre, entonces, el volumen de agua entre las secciones extremas 1 y 2 se incrementa según

$$B \frac{\partial y}{\partial t} dx, \quad (12.2)$$

ya que el calado cambia con el tiempo a una tasa de $\frac{\partial y}{\partial t}$. Los dos términos deducidos, (12.1) y (12.2), deben ser por tanto iguales en magnitud, pero de signo contrario, es decir, simplificando

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \quad (12.3)$$

que representa la *ecuación de continuidad para flujo no permanente en lámina libre*. Esta ecuación que puede reescribirse como

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad (12.4)$$

donde A es el área o sección mojada, teniendo en cuenta que un elemento diferencial de la misma (elemento infinitesimal de área mojada) puede escribirse como el ancho en superficie libre por un diferencial de calado. Además, a partir de la primera expresión de la ecuación de continuidad (12.3), considerando que $Q = vA$, con v velocidad media del flujo líquido, podemos escribir

$$\frac{\partial(vA)}{\partial x} + B \frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

es decir

$$A \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial x} + B \frac{\partial y}{\partial t} = 0.$$

Con lo que teniendo en cuenta que la profundidad hidráulica se define como $y_H = \frac{A}{B}$, así como la consideración anterior en cuanto a la expresión de un elemento diferencial de área mojada, se llega a

$$y_H \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0. \quad (12.5)$$

Expresión que representa la ecuación de continuidad en términos de velocidad y calados. (si la sección es rectangular, la profundidad hidráulica coincide con el calado del flujo, es decir: $y_H = y$)

Para canales rectangulares (y para cauces muy anchos), la primera expresión de la ecuación de continuidad (12.3) puede reescribirse como

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \quad (12.6)$$

en la que q es el caudal específico o caudal por unidad de ancho ($Q = Bq$). Esta ecuación fue presentada por primera vez por Saint-Venant en 1848 [6].

12.2. ECUACIÓN DINÁMICA PARA EL FLUJO EN LÁMINA LIBRE UNIDIMENSIONAL NO PERMANENTE

Se considera únicamente el movimiento del flujo en la dirección principal (longitudinal) de la conducción (canal, cauce, colector, etc.; en adelante, canal). Se desprecian, por tanto, las componentes transversal y vertical del movimiento, por otra parte, poco importantes en este tipo de conducciones, siempre que su curso no plantee curvaturas importantes (planta y alzado).

Como es sabido, el flujo no permanente (transitorio) se caracteriza por el hecho de que sus variables hidráulicas dependen del tiempo (calado; sección mojada; velocidad; etc.). Así pues, en el flujo en lámina libre unidimensional no permanente, estas variables van a depender de x (variable espacial siguiendo la dirección del canal) y de t (variable temporal). Por tanto, se considera adicionalmente la variación de la velocidad del flujo en función del tiempo, mediante la aceleración, que producirá una fuerza y , en consecuencia, una pérdida de energía adicional (invertida precisamente en acelerar el flujo). La pérdida de energía total del flujo se puede tratar exactamente igual que en el caso de un flujo permanente sin más que considerar adicionalmente esta pérdida debida a la aceleración (Chow, 1959); véase a estos efectos la representación simplificada incluida en la figura 12.2.

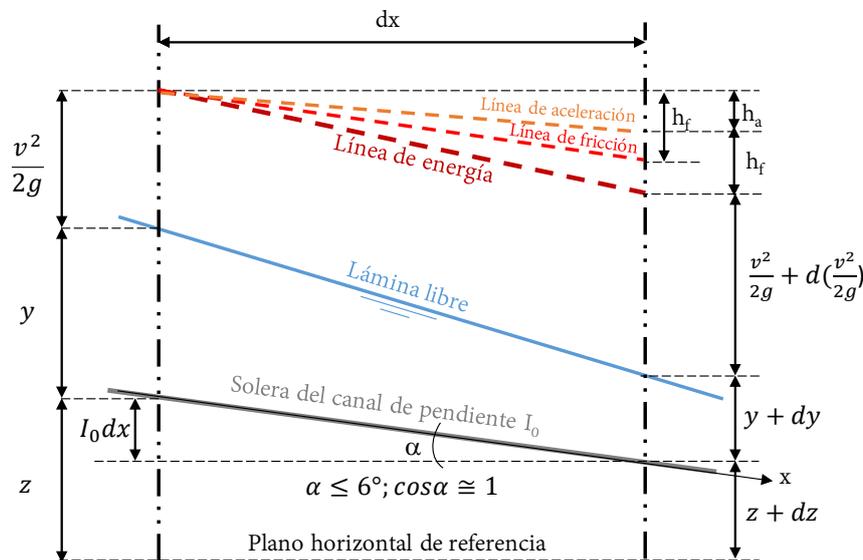


Figura 12.2. Esquematización de los términos de la ecuación de energía en el flujo en lámina libre unidimensional no permanente.

La fuerza (F_a) debida a la aceleración ($\frac{\partial v}{\partial t}$) actuando sobre el peso unitario del agua (w), es igual a $F_a = \frac{w}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Se ha supuesto que la pendiente longitudinal del canal es pequeña ($I_0 < 0.1$) -familia de canales de pequeña pendiente- y que la aceleración es en la dirección de x ; su componente vertical es por tanto despreciable. Así, el trabajo realizado por dicha fuerza a través de

la distancia infinitesimal dx entre las dos secciones de canal consideradas, es $\frac{w}{g} \frac{\partial v}{\partial t} dx$. Este trabajo es igual a la pérdida de energía por la aceleración del flujo. Dividiendo por w se tiene dicha pérdida de energía en términos de altura de energía (h_a).

Por tanto, en términos de altura, la pérdida total de energía entre las secciones extremas de aguas arriba y aguas abajo (distanciadas dx), considerando que no hay cambio de sección en el canal, será la suma de la pérdida debida a la fricción $h_f = I_f dx$ (con I_f pendiente de fricción; cuyo significado físico es el de la pérdida de energía por unidad de longitud debida a la fricción) y de la pérdida debida a la aceleración $h_a = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} dx$. La pendiente de la línea que indica la pérdida de energía debida a la aceleración es pues $I_a = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$. De manera que, a partir de la ecuación de la energía, como en el caso de flujo permanente, se puede escribir:

$$z + y + \frac{v^2}{2g} = z + dz + y + dy + \frac{v^2}{2g} + d\left(\frac{v^2}{2g}\right) + h_f + h_a,$$

es decir

$$z + y + \frac{v^2}{2g} = z + dz + y + dy + \frac{v^2}{2g} + d\left(\frac{v^2}{2g}\right) + I_f dx + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} dx,$$

y simplificando

$$d\left(z + y + \frac{v^2}{2g}\right) = -I_f dx - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} dx, \quad (12.7)$$

donde el miembro de la izquierda de la ecuación (12.7) representa la variación de la energía total (pérdida) en términos de altura de energía a lo largo de la longitud del canal, es decir, en función de la variable espacial x . Téngase en cuenta, a estos efectos, que: $z = z(x)$; $y = y(x, t)$; y $v = v(x, t)$. Mientras que, los dos términos de la derecha, representan, de izquierda a derecha a su vez, las pérdidas de energía por fricción y por la aceleración del flujo (dependiente del tiempo) respectivamente. De forma que, esta última ecuación establece que la pérdida total de energía en el flujo unidimensional gradualmente variado no permanente, depende de los efectos de la fricción y de la aceleración (supuesto un ancho de sección constante para el canal o con cambios graduales –hidrodinámicos–, donde la pérdida por remolinos sea despreciable). Recuérdese que en el caso equivalente del flujo unidimensional gradualmente variado permanente, depende exclusivamente de los efectos de la fricción.

De forma que, desde el punto de vista físico, omitiendo por simplicidad los detalles matemáticos, si ‘dividimos’ en la ecuación (12.7) anterior por dx y ‘se pasa’ a derivadas parciales, se obtiene:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + I_f + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

que podemos reescribir, teniendo en cuenta además que $-\frac{dz}{dx} = I_0$ (pendiente geométrica longitudinal del canal) como:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = I_0 - I_f, \quad (12.8)$$

que es considerada como la *ecuación general dinámica para el flujo unidimensional gradualmente variado no permanente*. En ella, la pendiente de fricción (I_f) se puede evaluar mediante la fórmula de Manning, la de Chézy o cualquier otra para flujo uniforme, asumiendo que, lo que le sucede a nivel local (sección transversal) en términos de pérdida de energía por fricción al flujo gradualmente variado es equivalente a lo que le sucedería al uniforme del mismo calado y la misma velocidad. Así, a partir de la fórmula de Manning:

$$I_f = \frac{n^2 Q^2}{A^2 R_H^{4/3}}, \quad (12.9)$$

donde R_H es el radio hidráulico, definido como la sección mojada A dividida por el perímetro mojado P (figura 12.3), y n en este caso, el coeficiente de rugosidad de Manning.

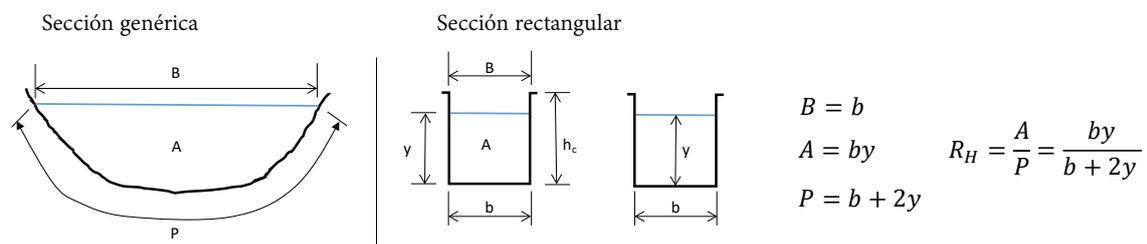


Figura 12.3. Variables y parámetros hidráulicos en sección transversal.

Esta ecuación dinámica es válida solamente cuando la distribución de presiones es la hidrostática, es decir, cuando las componentes verticales de la aceleración son despreciables. Escrita como sigue, permite observar fácilmente los términos adicionales que se van añadiendo a la ecuación a medida que se va considerando un movimiento más complejo

$$I_f = I_0 - \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$

Movimiento uniforme permanente →

Movimiento No uniforme permanente →

Movimiento No uniforme No permanente →

Si en el tramo de canal existiesen cambios de sección (ancho), de tal manera que hubiese que considerar las pérdidas locales (por remolinos) al no ser éstas despreciables, la ecuación anterior quedaría escrita como

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = I_0 - I_f - I_l, \quad (12.10)$$

donde en el miembro de la derecha se ha incluido el término $-I_l$ que representa las pérdidas locales de energía en el tramo de canal, expresadas por unidad de longitud de tramo. Estas pérdidas normalmente

se evalúan como un coeficiente constante k por la altura de velocidad del flujo $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ dividida en este caso, por la longitud del tramo considerado (o distancia entre las secciones de interés).

En aplicaciones prácticas resulta conveniente utilizar el caudal y la sección mojada en lugar de la velocidad y el calado como variables dependientes. Así, esta ecuación dinámica (con las consideraciones hidráulicas hechas en párrafos anteriores y los cambios de variables habituales) puede quedar expresada en términos de caudal ($Q = vA$) como

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial y}{\partial x} = gA(I_0 - I_f - I_l), \quad (12.11)$$

que en ocasiones también puede verse escrita como

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = gA(I_0 - I_f - I_l). \quad (12.12)$$

En estas ecuaciones, $\frac{\partial Q}{\partial t}$ es el término que representa la aceleración local; $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right)$ es el término que representa la aceleración advectiva; $gA \frac{\partial y}{\partial x}$ es el término que representa la fuerza debida a la presión (o su equivalente gI_1 como la integral de presión hidrostática en cada sección); mientras que, los términos de gAI_0 , gAI_f y gAI_l representan, respectivamente, las fuerzas gravitatoria, de rozamiento y de reacción por cambios en la sección.

En función del problema real que se quiera resolver, a veces se utilizan modelos simplificados. Así, y supuesta sección de anchura constante (o pérdidas despreciables al ser los cambios graduales), el *modelo de onda cinemática*, considera de la ecuación anterior exclusivamente los términos de fuerza gravitatoria y de fuerza de rozamiento (movimiento uniforme permanente); se trata del modelo más sencillo. El *modelo de onda difusiva* considera, además de los términos anteriores, el término de fuerza de presión. Mientras que el conocido como *modelo de onda dinámica*, utiliza la ecuación completa.

12.3. SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VENANT. CLASIFICACIÓN Y PLANTEAMIENTO NUMÉRICO

Las ecuaciones vistas de continuidad y general dinámica para flujo gradualmente variado no permanente fueron deducidas y publicadas conjuntamente por primera vez en 1871 por A. J. C. Barré de Saint-Venant [7] para describir la propagación de ondas en flujos en lámina libre [15]. En la actualidad son conocidas en la literatura científica como *sistema de ecuaciones de Saint-Venant*. Éstas pueden ser escritas, como se ha visto, tanto en términos de velocidad y calado como en términos de caudal y área mojada. Cabe añadir que el sistema de ecuaciones de Saint-Venant se puede expresar de muchas formas dependiendo de las variables, geometría del canal y otros factores que puedan tenerse en cuenta. En el apartado 13 lo expresaremos en la forma más conveniente de cara al planteamiento de los esquemas numéricos.

La validez de estas ecuaciones ha sido verificada por muchas observaciones y experimentos de laboratorio. No obstante, debido a su complejidad matemática, la solución exacta de las mismas (mediante el Método de las Características p.e.) solamente es posible para los casos más sencillos. En los casos más complejos, se utilizan métodos numéricos aproximados para la resolución de este tipo de

ecuaciones. Por ello, para aplicaciones prácticas de interés real, se recurre a métodos numéricos aproximados, como es el FVM que aquí nos ocupa.

12.3.1. Clasificación

Estas ecuaciones forman un *sistema hiperbólico no lineal*, (12.13), que se puede escribir en su forma conservativa como

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 && (ec. de continuidad) \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) &= gA(I_0 - I_f - I_l) && (ec. dinámica) \end{aligned} \right\}, \quad (12.13)$$

que, a su vez, se puede escribir de forma compacta como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (12.14)$$

donde el vector de variables conservadas \mathbf{U} , el vector de flujos de dichas variables \mathbf{F} y el de términos fuente \mathbf{S} , son

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ gA(I_0 - I_f - I_l) \end{pmatrix}.$$

Las variables conservadas son $A(x, t)$, que representa la sección mojada y $Q(x, t)$ que representa el caudal o volumen fluido por unidad de tiempo.

Como sabemos, un sistema de ecuaciones es hiperbólico cuando su matriz jacobiana, de dimensión $n \times n$, tiene n valores propios reales, λ_i , $i = 1, \dots, n$, y un conjunto de n vectores propios linealmente independientes, e_i , $i = 1, \dots, n$, que forman una base del espacio n -dimensional. En nuestro caso, la matriz jacobiana es de 2×2 , y resulta ser

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Q^2}{A^2} + g\frac{A}{B} & 2\frac{Q}{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - v^2 & 2v \end{pmatrix},$$

donde

$$c = \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} = \sqrt{g \frac{A}{B}},$$

que es la velocidad de propagación o celeridad de las ondas superficiales generadas por perturbaciones en la lámina libre. Este valor coincide con la velocidad a la que se mueve el conocido como régimen crítico en teoría del flujo en lámina libre. Este hecho resulta fundamental pues, el régimen crítico divide el espacio físico de caracterización del flujo en lámina libre en, régimen subcrítico o lento, si su velocidad v es menor que c ; y, régimen supercrítico o rápido, si su velocidad v es mayor que c . En el primer caso, régimen lento, al moverse el flujo a velocidades inferiores a las de la onda de perturbación, se dice que hay comunicación hidráulica de aguas abajo hacia aguas arriba ya que las ondas pueden remontar el flujo,

mientras que, en el caso de régimen rápido, al moverse a mayor velocidad que las ondas de perturbación, éstas no pueden remontar el flujo, y su transmisión es solo hacia aguas abajo. Esto, que es una cuestión física de comportamiento del flujo en uno y otro tipo de régimen, va a tener un reflejo numérico a la hora de plantear, posteriormente, la resolución de las ecuaciones a través del Método de Godunov, lo que explica, su amplio uso en este campo.

De tal forma que, calculando los valores propios λ :

$$|J - \lambda I| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ c^2 - v^2 & 2v - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

de donde

$$-\lambda(2v - \lambda) - (c^2 - v^2) = 0,$$

operando

$$\lambda^2 - 2v\lambda + (v^2 - c^2) = 0,$$

ecuación de segundo grado en λ que resuelta permite obtener los valores propios: $\lambda_1 = v - c$, y $\lambda_2 = v + c$; siendo los vectores propios:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v - c \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ v + c \end{pmatrix};$$

con lo que

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v - c & v + c \end{pmatrix}.$$

Nótese que, una vez calculada J , el sistema (12.14) puede escribirse de manera compacta en su forma no conservativa como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (12.15)$$

Si mantenemos las ecuaciones de Saint-Venant en función de las variables velocidad v y calado y (para una sección mojada dada A como una función conocida de y), llegamos, obviamente, a la misma conclusión. Así, para el caso de sección rectangular (o cauce muy ancho), el sistema (12.13) puede quedar expresado

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial(vy)}{\partial x} &= 0 && (ec. de continuidad) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} + gy \right) &= g(I_0 - I_f - I_l) && (ec. dinámica) \end{aligned} \right\}, \quad (12.16)$$

que es la forma en la que habitualmente se utiliza en el campo de la Hidráulica Fluvial, donde ahora, el vector de variables conservadas \mathbf{U} , el vector de flujos de dichas variables \mathbf{F} y el de términos fuente \mathbf{S} , son

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} vy \\ \frac{v^2}{2} + gy \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(I_0 - I_f - I_l) \end{pmatrix};$$

de forma que

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} v & y \\ g & v \end{pmatrix}.$$

Y, por tanto

$$|\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} v - \lambda & y \\ g & v - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

y resolviendo el determinante

$$(v - \lambda)^2 - gy = 0 \quad \rightarrow \quad v^2 - 2v\lambda + \lambda^2 - gy = 0.$$

Es decir

$$\lambda^2 - 2v\lambda + (v^2 - gy) = 0,$$

lo que, como $y = \frac{A}{B}$ considerando nuevamente la definición de c , conduce a la misma ecuación de segundo grado en λ y por tanto, a los mismos valores propios: $\lambda_1 = v - c$, y $\lambda_2 = v + c$.

12.3.2. Planteamiento numérico. Esquemas tipo upwind

Como sabemos, existen diferentes métodos de discretización de las EDPs, de entre los que nosotros hemos seleccionado el de volúmenes finitos, por las consideraciones vistas con anterioridad. A su vez, existen también diferentes maneras de resolver numéricamente las ecuaciones discretizadas, como también hemos ido exponiendo durante el presente trabajo. Las diferencias fundamentales en este caso están centradas en el cálculo de los flujos numéricos a través de las celdas en las que se divide la región de interés. De manera que, en función de la forma en que se escriban estos flujos, se pueden ‘construir’ diferentes esquemas numéricos.

Las celdas computacionales se consideran volúmenes de control en un esquema de volúmenes finitos, según el cual, las variables conservadas se integran calculando valores medios. Se tiene de esta forma, en el caso 1D, una red regular de celdas (intervalos) como se muestra en la figura 12.4 adjunta, para un dominio total o región de interés de longitud L en este caso.

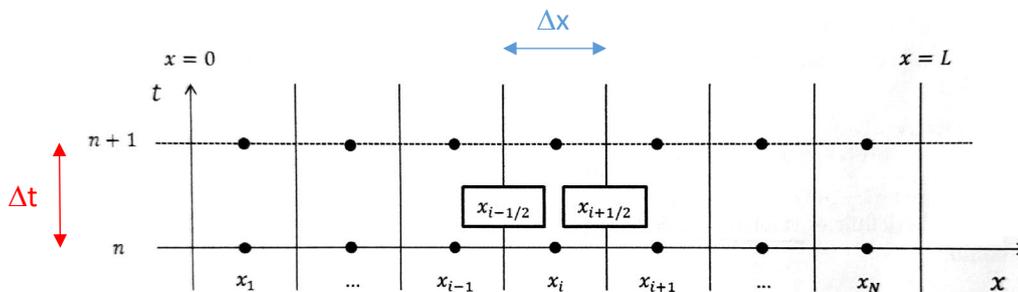


Figura 12.4. Malla 1D. Red regular de celdas.

El punto x_i es el representativo de la celda i (intervalo), que tiene una anchura Δx , y abarca desde la frontera o borde $x_{i-1/2}$ hasta la $x_{i+1/2}$. El paso temporal es Δt , de manera que, cada nuevo instante $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, se calcula resolviendo series o secuencias de problemas de Riemann, suponiendo que en cada celda las variables (incógnita) son ‘constantes definidas a trozos’.

Los problemas de Riemann consisten en suponer $k + 1$ estados constantes (valores de la variable) separados por k ondas que parten del origen, donde cada una de ellas está asociada a un valor propio de la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones hiperbólico (jacobiano del flujo). Así, la estructura de la solución del problema de Riemann consiste en k ondas que emanan del origen, una por cada valor propio λ_i . Cada onda i conlleva una discontinuidad de salto en u propagándose a una velocidad λ_i . Para sistemas no lineales, las ondas o discontinuidades que se pueden presentar son las denominadas ondas de choque (shock waves), las ondas (o discontinuidades) de contacto (contact discontinuities), o, las ondas de transición suave como las rarefacciones (rarefaction waves). El tipo de onda presente en la solución del problema de Riemann en cada caso, depende fundamentalmente de las condiciones de contorno de dicho caso. Naturalmente, la solución a la izquierda de la onda λ_1 es simplemente el dato inicial u_l y a la derecha de la onda λ_k es u_r . El asunto está en encontrar la solución en la ‘cuña’ entre las ondas λ_1 y λ_k . En nuestro caso, como el sistema SWE es de $k=2$, se tienen dos ondas, asociadas a λ_1 y λ_2 , que definen tres estados (figura 12.5).

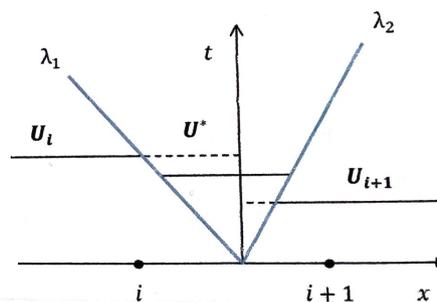


Figura 12.5. Problema de Riemann para el sistema SWE, $k=2$.

Los Resolvedores de Riemann son, como sabemos, métodos numéricos para resolver los mencionados problemas de Riemann. Uno de los más conocidos y utilizados en Dinámica de Fluidos Computacional (por las razones antes señaladas) es el esquema desarrollado por Godunov en 1959.

En los casos más sencillos, el método de discretización elegido es un esquema upwind de primer orden explícito de tipo Godunov. El término upwind alude, como sabemos, a la derivada espacial. Este método envía la información en un sentido u otro, según el signo del valor propio (lo que lo conecta físicamente con los diferentes tipos de régimen de flujo mencionados anteriormente, a saber, régimen supercrítico y subcrítico, resolviendo perfectamente los cambios de uno a otro, que suponen ondas de choque –shocks- y rarefacciones).

En cuanto a la integración temporal, los métodos explícitos se caracterizan, como es bien conocido, por apoyarse o utilizar siempre la información conocida en un paso de tiempo anterior. Son más sencillos que los implícitos, pero están sometidos a una condición de estabilidad (en nuestro caso, la condición CFL).

Nos apoyamos ahora en un sencillo ejemplo para mostrar lo fundamental del método numérico que estamos describiendo. Sea pues la siguiente ley de conservación (escalar):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (12.17)$$

donde $u(x, t)$ es la variable conservada en este caso, y $f(u)$ su flujo. La ecuación integral (de balance) correspondiente sería

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [u(x, t^{n+1}) - u(x, t^n)] dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(u(x_{i+1/2}, t)) - f(u(x_{i-1/2}, t))] dt = 0.$$

Se puede definir el **valor medio de $u(x, t)$** en la celda i , en el instante t^n como

$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^n) dx. \quad (12.18)$$

Y los flujos medios en cada borde o frontera, denominados **flujos numéricos**, como (notación compacta)

$$f_{i\pm 1/2}^* = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i\pm 1/2}, t)) dt. \quad (12.19)$$

De manera que la ecuación integral queda ahora escrita como (fórmula recursiva)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*). \quad (12.20)$$

El esquema será de tipo explícito si $f^* \approx f(u^n)$, de forma que la variable en t^{n+1} depende exclusivamente de información en el tiempo anterior t^n .

Godunov (1959) propone: $f^* = f(u^*)$, donde u^* es la variable intermedia. En el caso escalar lineal, con $f(u) = \lambda u$, con $\lambda = cte.$, es decir con

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

tendría la forma $f^* = \lambda u^*$ (figura 12.6).

Así mismo, Godunov define esta variable intermedia como

$$u^* = \frac{1}{2}(u_{i+1} + u_i) - \frac{1}{2} \text{sig}(\lambda)(u_{i+1} - u_i).$$

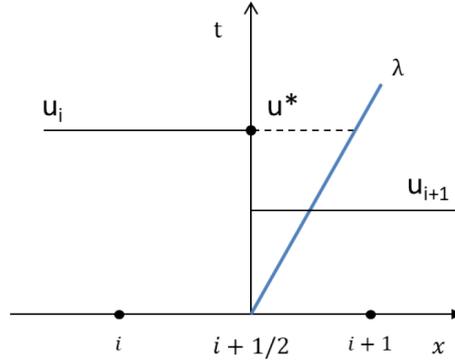


Figura 12.6. Caso escalar lineal. Variable intermedia u^* de Godunov.

De manera que, como se puede deducir,

si $\lambda > 0$, $sig(\lambda) = 1 \xrightarrow{\text{yields}} u^* = u_i$, mientras que, si $\lambda < 0$, $sig(\lambda) = -1 \xrightarrow{\text{yields}} u^* = u_{i+1}$

A partir de la definición de u^* , los flujos numéricos de Godunov quedan definidos como

$$f_{i+1/2}^* = \lambda u^* = \frac{1}{2} \lambda (u_{i+1} + u_i) - \frac{1}{2} |\lambda| (u_{i+1} - u_i),$$

$$f_{i-1/2}^* = \lambda u^* = \frac{1}{2} \lambda (u_i + u_{i-1}) - \frac{1}{2} |\lambda| (u_i - u_{i-1}).$$

De manera que, sustituyendo directamente estos flujos en la ecuación recursiva anterior, ésta queda expresada como una **formulación en flujos numéricos**, con la siguiente expresión final

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\lambda^+ (u_i - u_{i-1}) + \lambda^- (u_{i+1} - u_i)],$$

donde

$$\lambda^\pm = \frac{\lambda \pm |\lambda|}{2},$$

(de forma que, si λ es positivo, entonces $\lambda^+ = \lambda$ y $\lambda^- = 0$; mientras que, si λ es negativo, el que se anula es λ^+).

De esta forma, la información de la celda i , en el caso p.e. de $\lambda > 0$, se actualiza de la siguiente manera: el flujo $f_{i-1/2}^*$ recoge la información procedente de la celda inmediatamente anterior, $i-1$, y la ‘vuelca’ en la celda i ; al mismo tiempo, $f_{i+1/2}^*$, extrae la información de la celda i , para actualizar la $i+1$ (se va, como vemos, hacia la derecha, en términos de flujo hidráulico, hacia aguas abajo¹¹). Vemos pues, como estas definiciones dotan de ‘estructura matemática’ al método upwind, pues de esta forma, se determina en qué sentido viaja la información según el signo de λ . Lo que físicamente, en el caso del FLL, tiene que ver con el sentido desde el que se controla el flujo; todo es consistente, modelo matemático y realidad física.

¹¹ Que es coherente físicamente con lo que ocurre en el caso de los FLL, pues, si $\lambda > 0$, el régimen es supercrítico, se gobierna desde aguas arriba, por tanto, la información fluye en el sentido hacia aguas abajo.

13. ESQUEMAS NUMÉRICOS DE ALTO ORDEN BIEN EQUILIBRADOS. MÉTODO PROPUESTO

13.1. INTRODUCCIÓN

Al abordar la resolución numérica de los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación por métodos clásicos, pueden aparecer problemas como oscilaciones de las variables en torno a discontinuidades, generación de choques sin sentido físico e inestabilidades en el cálculo numérico debido a la no linealidad de las ecuaciones [10]. Para evitar este tipo de problemas suele a veces aplicarse ‘viscosidad artificial’ como se ha comentado con anterioridad. En este caso el método requiere además el ajuste de nuevos parámetros en un proceso que puede resultar farragoso y no sencillo.

Por ello, se han planteado también los denominados esquemas de alta resolución. De esta forma, se obtiene una mejor aproximación numérica de la solución. Se trata de esquemas que plantean una discretización no lineal de los términos convectivos del sistema de ecuaciones. Están basados en las teorías matemáticas denominadas de variación total decreciente (TVD por sus siglas en inglés), en este caso aplicadas a sistemas no lineales, por lo que se necesita linealizar de alguna forma el sistema. La clave está en encontrar la adecuada linealización del sistema manteniendo su carácter conservativo. En este contexto, varios son los esquemas numéricos propuestos para la resolución del sistema de ecuaciones de aguas someras a lo largo de la literatura técnica sobre este tema. De entre ellos, destacamos los esquemas de alta resolución propuestos por Brufau y García-Navarro en [10]. En ese trabajo se presentan dos esquemas de tipo upwind, de primer y segundo orden, así como lo que las autoras denominan método de extrapolación de variables. El caso de este último método es en realidad una extensión de orden superior del método de Godunov (1961), cuyo orden depende de la discretización elegida, a través del denominado como parámetro k en el método. En este esquema, se calcula el flujo numérico tipo upwind con la peculiaridad de que las variables a la izquierda y derecha de cada interfase se redefinen usando la adecuada extrapolación, de ahí el nombre que le otorgan al método. Las funciones que representan el valor de las variables en cada celda pueden ser constantes a trozos (esquema de primer orden) o lineales a trozos (esquema de segundo orden). En el método se usan también limitadores de pendiente para estas funciones lineales a trozos. Con los vectores de los valores de las variables extrapoladas en la pared se calculan los flujos numéricos de alta resolución. Para un mayor detalle, consultar [10].

En este trabajo nos centramos, en primera instancia, en dos esquemas numéricos concretos, bien equilibrados de alto orden. Se trata de un esquema de tipo centrado y de un esquema de tipo upwind con reconstrucción espacial WENO. Así, en este punto, se describen en primer lugar los esquemas numéricos desarrollados en [14], para los modelos numéricos que incluyen la pendiente del canal y el término de pérdidas de energía por fricción, adaptando la estrategia descrita por Gascón y Corberán [20] en la integración temporal, con un esquema de tipo Runge-Kutta en el caso del esquema centrado y siguiendo el esquema Runge-Kutta TVD que se describe en Shu & Osher [32] para el caso del esquema upwind.

Posteriormente, y de forma justificada, se selecciona el método propuesto para la extensión del modelo al caso de canales con geometría irregular y pérdidas locales de energía, como un paso más en ese acercamiento a la realidad de los conductos reales para el trasiego de caudales en lámina libre. Este método será descrito con mayor grado de detalle.

Así pues, trataremos en primer lugar la simulación numérica de las ecuaciones de Saint-Venant o de aguas someras en 1D (espacial) con el término fuente relativo a la pendiente del canal y a las pérdidas continuas de energía debidas a la fricción. Se considera que la solera (canal) o lecho (cauce) permanece fijo a lo largo del tiempo, es decir, la única interacción entre el flujo líquido y los contornos se debe a la fricción (no hay erosión ni sedimentación). Con todo ello, el sistema de ecuaciones de aguas someras, con la notación y en la forma en que se va a tratar en los esquemas numéricos, viene dado por:

$$\left. \begin{aligned} h_t + (q)_x &= 0 \\ (q)_t + \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x &= -gh(Z_b)_x - gn^2 \frac{q}{h} \left| \frac{q}{h} \right| R_H^{-4/3} \end{aligned} \right\}, \quad (13.1)$$

donde $h(x, t)$ es ahora el calado; $q(x, t)$ es el caudal específico o caudal por unidad de ancho de canal, definido como $q(x, t) = v(x, t)h(x, t)$, g es la aceleración de la gravedad, $Z_b(x)$ es la función que define la forma del fondo del canal, n es el coeficiente de rugosidad de Manning, y R_H es el radio hidráulico de la sección mojada, definido a su vez como el cociente entre la sección mojada y el perímetro mojado. En el caso de secciones muy anchas, puede adoptarse $R_H = h$. Asumimos esa situación, ya que es la habitual en cauces reales (naturales).

Podemos reescribir el sistema (13.1) de forma matricial tomando además como variable la cota de la lámina libre $\eta(x, t) = h(x, t) + Z_b(x)$ en lugar del calado $h(x, t)$. Se obtiene así el siguiente sistema:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \eta \\ q \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} q \\ \frac{q^2}{\eta - Z_b} + \frac{1}{2}g(\eta - Z_b)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(\eta - Z_b) \frac{\partial Z_b}{\partial x} - gn^2 \frac{q}{\eta - Z_b} \left| \frac{q}{\eta - Z_b} \right| (\eta - Z_b)^{-4/3} \end{bmatrix}, \quad (13.2)$$

donde $\mathbf{u} = [\eta \quad q]^T$ es el vector de variables incógnita; con lo que (13.2) puede quedar expresado

$$\frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t))}{\partial x} = \sum_{k=1}^2 \mathbf{s}_k(x, \mathbf{u}(x, t)) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x = \mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, \quad (13.3)$$

siendo $\mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t))$ el flujo y \mathbf{s} el término fuente, con dos componentes en este caso, \mathbf{s}_1 relativo a la pendiente del canal y \mathbf{s}_2 el término de pérdidas de energía debidas a la fricción.

A continuación, se presenta la aplicación del esquema numérico tipo upwind propuesto por Hidalgo et al. en [24] al sistema de ecuaciones de aguas someras (13.1), junto con un esquema de reconstrucción espacial tipo WENO.

Por otra parte, el esquema numérico centrado no oscilatorio propuesto en [14] considera el algoritmo propuesto por Caleffi en [11]. Para ello, se modificó el esquema propuesto por Capilla y Balaguer en [13]. Las modificaciones consistieron principalmente en el tratamiento del término fuente para prevenir

errores numéricos y en la definición de los flujos Runge-Kutta. En este trabajo, además, se modifica esta última definición para adaptarla, en primera instancia, al nuevo término fuente que incluye las pérdidas de energía debidas a la fricción.

13.2. ESQUEMA NUMÉRICO DE TIPO UPWIND CON RECONSTRUCCIÓN ESPACIAL WENO

13.2.1. Esquema de tipo upwind en volúmenes finitos

Los métodos que explotan explícitamente la información sobre la propagación de ondas que emana de la solución del Problema de Riemann, son los que, como ya se ha comentado, se denominan generalmente métodos de tipo upwind. Uno de los métodos más sencillos de este tipo es el Método de Rusanov, que solo plantea una estimación del límite superior de la máxima velocidad de propagación en el Problema de Riemann local. En este sentido, según [36], se podría definir este esquema como un ‘*resolvidor de una onda*’. Siguiendo la misma referencia, un *resolvidor de dos ondas* sería el esquema HLL [22], que requiere estimaciones de los límites superior e inferior de las velocidades que se desprenden del Problema de Riemann local. En este sentido, hablaríamos de un *resolvidor de Riemann completo* como aquel cuyo modelo de onda contenga ‘*todos los campos de características*’ presentes en la solución exacta.

En este apartado presentamos, a partir de [14], un esquema tipo upwind en volúmenes finitos para la resolución numérica del sistema de ecuaciones de Saint-Venant dado en (13.1) según su expresión en (13.3). Este esquema se combina con un esquema tipo Runge-Kutta en la integración temporal. Para su aplicación se divide el dominio espacial de cálculo en N_x subintervalos, celdas o volúmenes de control (volúmenes finitos). Seguidamente, se integran las ecuaciones sobre cada celda dividiendo por su longitud. Así, dado un volumen de control $V_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ de dimensión (en este caso longitud) $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, se integra la ecuación en dicho volumen y se divide por su longitud para obtener la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d\bar{u}_i(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta x_i} (f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) + \bar{s}_i(t), \quad (13.4)$$

donde

$$\bar{u}_i(t) = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t) dx, \quad (13.5)$$

representa el promedio espacial del vector solución¹² $u(x, t)$ en el volumen de control V_i en el instante t . Mientras,

$$f_{i+1/2} = f(u(x_{i+1/2}, t)), \quad (13.6)$$

¹² En adelante, en esta sección y siguientes, por comodidad, dejamos de utilizar negrita para indicar variable vectorial ya que, en este punto, queda claro y no ha lugar a la duda.

es el flujo interceldas, en la interfase derecha en el mismo instante t (análogamente para la interfase izquierda). Cabe señalar en este punto que, se podrían definir aproximaciones de $f_{i+1/2}$, directamente, sin requerir el valor de $u(x_{i+1/2}, t)$ [36], como veremos más adelante.

Es posible, además, construir estos flujos numéricos interceldas, de forma bastante aproximada, sin resolver explícitamente el Problema de Riemann, siempre que se conserve lo que realmente define el problema de Riemann, esto es, las ecuaciones diferenciales y la condición inicial¹³.

Finalmente,

$$\bar{s}_i(t) = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} s(u(x, t)) dx, \quad (13.7)$$

denota el promedio espacial del término fuente $s(u(x, t))$ en el volumen de control de cálculo V_i en el instante t .

Como se ha comentado, la discretización temporal de (13.4) se resuelve mediante el esquema Runge-Kutta TVD propuesto por Shu & Osher en [32].

13.2.2. Reconstrucción WENO

La resolución de (13.4) requiere el cálculo de los flujos numéricos interceldas, para lo que, según (13.6) se necesita el valor de la solución en la frontera o interfase de las celdas (o volúmenes de control), obtenido a partir de los promedios en cada celda según (13.5).

Como estamos resolviendo el caso unidimensional (una única dimensión espacial), si se quiere obtener un orden r de precisión, se necesitan r soportes (conjuntos) candidatos, cada uno de los cuales estará conformado por r celdas o volúmenes consecutivos conteniendo a V_i . Denotemos los r soportes como

$$\{V_{i-r+1}, V_{i-r+2}, \dots, V_i\}, \{V_{i-r+2}, V_{i-r+3}, \dots, V_{i+1}\}, \dots, \{V_i, V_{i+1}, \dots, V_{i+r-1}\}.$$

Observemos que, para cada volumen V_i , los r soportes considerados, contienen entre todos, $2r-1$ celdas: $V_{i-r+1}, \dots, V_{i+r-1}$. Para cada uno de ellos se pueden construir, como sabemos, polinomios $p_l(x)$, $l = 0, \dots, r-1$, de grado $r-1$. Cada uno de estos polinomios debe ser conservativo, es decir, el promedio integral de cada polinomio debe ser igual al promedio integral de la solución dentro de cada celda del soporte

$$\frac{1}{\Delta x_k} \int_{V_k} p_l(x) dx = \bar{u}_k(t), \quad 0 \leq l, k \leq r-1, \quad (13.8)$$

donde V_k es cada uno de los volúmenes de control del soporte utilizado para construir los polinomios p_l .

¹³ Los métodos de ese tipo, que construyen así los flujos, incluyen los llamados métodos centrados o simétricos. Los métodos centrados clásicos incluyen el Método de Lax-Wendroff, el Método de Lax-Friedrichs y el Método Centrado de Godunov [36], distinto al de Godunov tipo upwind.

Denotemos ahora por $u_{i+1/2}^{(k,0)}$, $1 \leq k \leq r$ los r valores que toman los r polinomios en la interfase $x_{i+1/2}$. En el método WENO, como sabemos, se definen los valores reconstruidos $u(x_{i+1/2}, t)$ como una combinación convexa de los valores que toman los polinomios ponderados con pesos positivos, es decir

$$u(x_{i+1/2}, t) = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_k u_{i+1/2}^{(k,0)}, \quad (13.9)$$

donde, ω_k son los llamados pesos no lineales, calculados mediante

$$\omega_j = \frac{\alpha_j}{\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k} \quad \text{con} \quad \alpha_j = \frac{d_j}{(\varepsilon + \beta_j)^p} \quad 0 \leq j \leq r-1, \quad (13.10)$$

(de forma que se asignan unos pesos a los polinomios en función de su suavidad, determinando así la contribución de cada uno de ellos a la aproximación final). Los coeficientes d_j son (ver 9.2.3) los denominados pesos óptimos en el método. En nuestro caso, tomamos $p = 2$ y $\varepsilon = 10^{-6}$, valor muy pequeño, que como se ha dicho, se considera para evitar la división por cero. Mientras que, β_j son los denominados indicadores de suavidad, que se calculan a partir de

$$\beta_k = \sum_{m=1}^{r-1} \Delta x^{2m-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\frac{d^m}{dx^m} p_k(x) \right)^2 dx \quad 0 \leq k \leq r-1. \quad (13.11)$$

Se pueden obtener más detalles sobre la reconstrucción WENO en el epígrafe 9.2.3 y en [5, 25, 34].

13.2.3. Tratamiento del término fuente

La discretización del término fuente se lleva a cabo a partir de una cuadratura de Gauss 2. Así, para el volumen de control V_i , los ‘puntos de integración’ son $x_i^\alpha = x_i - \frac{\Delta x_i}{2\sqrt{3}}$ y $x_i^\beta = x_i + \frac{\Delta x_i}{2\sqrt{3}}$ siendo x_i el centro de la celda o volumen de control. Los pesos en la cuadratura se toman como $\omega_i^\alpha = \omega_i^\beta = \frac{\Delta x_i}{2}$. Aproximándose, por tanto, la integral del término fuente (13.7) como

$$\bar{s}_i(t) = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} s(u(x, t)) dx \approx \frac{1}{2} \left(s(u(x_i^\alpha, t)) + s(u(x_i^\beta, t)) \right). \quad (13.12)$$

La aplicación de la ecuación anterior, requiere del conocimiento de los valores de $u(x_i^\alpha, t)$ y de $u(x_i^\beta, t)$, lo que podemos conseguir utilizando también los polinomios de reconstrucción WENO, p_i . Así, mediante un procedimiento del todo similar al comentado anteriormente para los puntos de la interfase entre volúmenes de control, se puede obtener ahora el valor de la función incógnita en cada punto de Gauss a partir de

$$u(x_i^\alpha, t) = \sum_{k=0}^{r-1} \Omega_k u_i^{(k,\alpha)}, \quad u(x_i^\beta, t) = \sum_{k=0}^{r-1} \Omega_k u_i^{(k,\beta)}, \quad (13.13)$$

donde $u_i^{(k,\alpha)}$ y $u_i^{(k,\beta)}$ son los valores de la función incógnita (reconstruidos por los polinomios) en cada punto de integración x_i^α y x_i^β , con Ω_k los pesos de la reconstrucción WENO.

Para este esquema, en [14], se implementó una reconstrucción WENO cuadrática, lo que implica que se ha tomado un valor de $r = 3$. Por tanto, los soportes considerados han sido

$$\{V_{i-2}, V_{i-1}, V_i\}, \quad \{V_{i-1}, V_i, V_{i+1}\}, \quad \{V_i, V_{i+1}, V_{i+2}\}.$$

13.2.4. Promediado de los flujos numéricos

Para obtener un único valor del flujo numérico en cada interfase entre celdas, se ha utilizado el flujo conocido como GForce α [35, 36]. En esencia, el valor del flujo numérico en la interfase $x_{i-1/2}$, por ejemplo, viene dado por

$$f_{i-1/2} = \theta f_{i-1/2}^{LF} + (1 - \theta) f_{i-1/2}^{LW}. \quad (13.14)$$

En la ecuación (13.14) anterior, con el superíndice LF se denota el flujo de Lax –Friedrichs, mientras que con el superíndice LW, se denota el de Lax-Wendroff. Habitualmente, se considera $\theta = \frac{1}{1+CFL}$, siendo CFL el número de Courant- Friedrichs-Levy, empleado para controlar la estabilidad del esquema numérico.

El flujo LF se obtiene a partir de

$$f_{i-1/2}^{LF} = \frac{1}{2} (f_{i-1/2}^+ + f_{i-1/2}^-) + \frac{\Delta x}{2\alpha\Delta t} (\bar{u}_{i-1} - \bar{u}_i), \quad (13.15)$$

en la que $f_{i-1/2}^+$ y $f_{i-1/2}^-$ son los valores de los flujos numéricos por la derecha y por la izquierda del extremo de celda o interfase $x_{i-1/2}$. Por su parte, el flujo LW, se estima en dos etapas (método de dos pasos). En primer lugar, se calcula la solución en la interfase para un instante intermedio, en nuestro caso, $t_n + \frac{\alpha}{2}\Delta t$, que viene dada por

$$u_{i-1/2}^{LW} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i-1} + \bar{u}_i) + \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x} (f(\bar{u}_{i-1}) - f(\bar{u}_i)). \quad (13.16)$$

Y a continuación, en una segunda etapa, se obtiene el flujo como¹⁴:

$$f_{i-1/2}^{LW} = f(u_{i-1/2}^{LW}). \quad (13.17)$$

A partir de los valores obtenidos en (13.15) y (13.17), mediante (13.14), se obtiene el flujo numérico. En este caso, para la aplicación del método, se ha considerado un valor de $\alpha=3$.

¹⁴ El Método Centrado de Godunov es análogo al de Lax-Wendroff expuesto, pero con el cálculo de la solución en la interfase no en un instante intermedio sino a tiempo t_n .

13.3. ESQUEMA NUMÉRICO DE TIPO CENTRADO

13.3.1. Esquema tipo centrado en volúmenes finitos

A partir de [14, 2, 3], se presenta en este apartado, un esquema de tipo centrado para el que no se necesita conocer la estructura del sistema de ecuaciones en derivadas parciales a resolver. En este caso, no podemos aplicar directamente el esquema de discretización temporal de tipo Runge-Kutta aplicado en el caso del esquema anterior, pues en los esquemas centrados, las celdas en las que se reconstruye la solución no coinciden con las celdas de integración del esquema de volúmenes finitos. Por ello, en este caso, se utiliza un nuevo esquema tipo Runge-Kutta con la ayuda de una extensión natural continua [8]. El esquema ha sido diseñado para que resulte bien equilibrado. Se describe una nueva estrategia basada en la definición de un nuevo flujo de avance temporal, que considera el flujo físico y la primitiva del término fuente del modelo de aguas someras.

Para la reconstrucción espacial, se considera un polinomio centrado de grado 3 con una corrección de la pendiente para impedir la aparición de falsos extremos en la solución numérica obtenida, el cual ha sido descrito en [13].

Se realiza una discretización espacial del dominio nuevamente en N_x nodos equidistantes, con un paso espacial Δx , de manera que $x_j = x_{j-1} + \Delta x$ y $x_{j+\frac{1}{2}} = x_j + \frac{\Delta x}{2}$, con $j = 1, 2, \dots, N_x$. El paso temporal es constante e igual a Δt de manera que el intervalo temporal se encuentra discretizado uniformemente en los valores $t^n = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots, N_T$. Como esquema de tipo centrado, éste integra el sistema (13.2) en el volumen de control $[x_j, x_{j+1}] \times [t^n, t^{n+1}]$ cuando n es par y en el volumen de control $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \times [t^n, t^{n+1}]$, cuando n es impar. Así, cuando n es par, la ecuación (13.3) se convierte en

$$\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} f_{j+1}(\tau) d\tau - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f_j(\tau) d\tau \right] + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \bar{s}_{j+\frac{1}{2}}(\tau) d\tau. \quad (13.18)$$

Y, en el siguiente paso de tiempo

$$\bar{u}_j^{n+2} = \bar{u}_j^{n+1} - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t^{n+1}}^{t^{n+2}} f_{j+\frac{1}{2}}(\tau) d\tau - \int_{t^{n+1}}^{t^{n+2}} f_{j-\frac{1}{2}}(\tau) d\tau \right] + \int_{t^{n+1}}^{t^{n+2}} \bar{s}_j(\tau) d\tau, \quad (13.18')$$

donde

$$\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(x, t^n) dx, \quad (13.19)$$

$$f_j(t) = f(u(x_j, t)), \quad (13.20)$$

$$\bar{s}_{j+\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sum_{k=1}^2 s_k(x, u(x, t)) dx, \quad (13.21)$$

con definiciones equivalentes para \bar{u}_j^{n+1} ; $f_{j+\frac{1}{2}}(t)$; $\bar{s}_j(t)$. Veamos en la sucesión de epígrafes siguientes, cómo se articula el procedimiento para llegar a obtener $\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ a partir de $\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n$ según (13.18) (malla desplazada -staggered grid-). En el caso del siguiente paso de tiempo, con (13.18') (malla no desplazada -non-staggered grid-), se usará un procedimiento de integración totalmente análogo.

13.3.2. Reconstrucción espacial puntual y promedio

En el instante $t = t^n$, se supone conocida una aproximación de orden $O((\Delta x)^4)$ de los siguientes promedios de la solución

$$\bar{u}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(\varphi, t^n) d\varphi. \quad (13.22)$$

En el epígrafe 13.3.6 se analiza la definición de los polinomios centrados de grado 3, $R_j(x; \bar{u}^n)$, de la forma

$$R_j(x; \bar{u}^n) = C_{0,j}^n + C_{1,j}^n \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right) + C_{2,j}^n \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right)^2 + C_{3,j}^n \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right)^3, \quad (13.23)$$

para la reconstrucción puntual de la solución, usando los valores promedio \bar{u}_i^n , $i \in \{j-2, j-1, j, j+1, j+2\}$. Así que:

$$R_j(x; \bar{u}^n) = u(x, t^n) + O((\Delta x)^4), \quad \forall x \in \left[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}} \right]. \quad (13.24)$$

Estos valores puntuales se usarán en la aproximación numérica de los flujos y del término fuente. En este esquema se utilizan dichos polinomios para obtener tanto los valores puntuales \hat{u}_j^n como los promedios $\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n$ de la solución en $t = t^n$. De tal forma que, los valores puntuales sobre la malla no desplazada (non-staggered grid) serían

$$\hat{u}_j^n \equiv C_{0,j}^n = \bar{u}_j^n - \frac{\theta_j^n}{24} (\bar{u}_{j-1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j+1}^n). \quad (13.25)$$

Asimismo, usando también estos polinomios, podemos aproximar los valores medios en la malla desplazada (staggered grid)

$$\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{x_j}^{x_{j+\frac{1}{2}}} R_j(x; \bar{u}^n) dx + \int_{x_{j+\frac{1}{2}}}^{x_{j+1}} R_{j+1}(x; \bar{u}^n) dx \right]. \quad (13.26)$$

Y usando (13.23), se obtiene:

$$\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n \equiv \frac{1}{128} (18(d_j^n \theta_j^n - d_{j+1}^n \theta_{j+1}^n) + \bar{u}_{j-1}^n \theta_j^n + \bar{u}_j^n (64 - \theta_{j+1}^n) + \bar{u}_{j+1}^n (64 - \theta_j^n) + \bar{u}_{j+2}^n \theta_{j+1}^n).$$

(13.27)

Los coeficientes d_j^n y θ_j^n se definen (epígrafe 13.3.6) de tal manera que se preserve la estabilidad del esquema y se eviten oscilaciones numéricas, como se ha comentado.

13.3.3. Tratamiento de los flujos numéricos

Las integrales definidas de los flujos respecto del tiempo en (13.18), se aproximan mediante una cuadratura gaussiana con dos nodos de integración. De forma que

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f_j(\tau) d\tau \equiv \frac{\Delta t}{2} \left(f(\hat{u}_j^{n+\beta_0}) + f(\hat{u}_j^{n+\beta_1}) \right), \quad (13.28)$$

donde $\beta_0 = \frac{1}{2} \left(1 - 1/\sqrt{3} \right)$ y $\beta_1 = \frac{1}{2} \left(1 + 1/\sqrt{3} \right)$.

Para aproximar los valores necesarios de $u(x_j, t^n + \beta_k \Delta t)$, $k \in [0,1]$, se aplica un método Runge-Kutta de orden 4 acoplado, como se indica en el epígrafe siguiente, a la Extensión Natural Continua [8]

$$\hat{u}_j^{n+\beta_k} \equiv u(x_j, t^n + \beta_k \Delta t) \approx \hat{u}_j^n + \Delta t \sum_{i=1}^4 b_i(\beta_k) k_j^{(i)}, \quad (13.29)$$

donde $k_j^{(i)}$ son los flujos Runge-Kutta que se definen en el siguiente epígrafe (calculados en el paso previo) y las constantes $b_i(\beta_k)$ vienen dadas por [8]

$$b_1(\beta_0) = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{108}; \quad b_2(\beta_0) = b_3(\beta_0) = \frac{1}{6} - \frac{8\sqrt{3}}{108}; \quad b_4(\beta_0) = -\frac{\sqrt{3}}{108}; \quad (13.30)$$

$$b_1(\beta_1) = \frac{18 + \sqrt{3}}{108}; \quad b_2(\beta_1) = b_3(\beta_1) = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{54}; \quad b_4(\beta_1) = -\frac{1}{36\sqrt{3}}.$$

13.3.4. Reconstrucción de los flujos Runge-Kutta

Como se ha comentado, la integración temporal se desarrolla mediante un esquema tipo Runge-Kutta acoplado con la llamada Extensión Natural Continua (NCE) [13]. Este procedimiento usa los flujos Runge-Kutta (13.29), $k_j^{(i)}$, $1 \leq i \leq 4$, que coinciden con la evaluación numérica de $(-\mathbf{f}_x + \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)$ en (13.3), calculada a partir de los valores puntuales obtenidos $\hat{u}_k^{(i)}$, $k \in \{j-2, j-1, j, j+1, j+2\}$, siendo

$$\hat{u}_j^{(1)} = \hat{u}_j^n, \quad \hat{u}_j^{(2)} = \hat{u}_j^n + \frac{\Delta t}{2} k_j^{(1)}, \quad \hat{u}_j^{(3)} = \hat{u}_j^n + \frac{\Delta t}{2} k_j^{(2)}, \quad \hat{u}_j^{(4)} = \hat{u}_j^n + \Delta t k_j^{(3)}. \quad (13.31)$$

Para calcular estos flujos Ruge-Kutta, utilizamos la aproximación descrita en [13], incorporando ahora el término de fricción al término fuente. Se define así la siguiente función vectorial $\mathbf{K}_j(x_k; \hat{u}^{(i)}) = -[\mathbf{f}_k^{(i)} - \mathbf{f}_j^{(i)}] + \left(\int_{x_j}^{x_k} (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) dx \right)^{(i)}$, es decir

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_j(x_k; \hat{u}^{(i)}) \\ &= - \left[\left(\frac{\hat{q}^2}{\hat{\eta} - \hat{Z}_b} + \frac{1}{2} g(\hat{\eta} - \hat{Z}_b)^2 \right)_k^{(i)} - \left(\frac{\hat{q}^2}{\hat{\eta} - \hat{Z}_b} + \frac{1}{2} g(\hat{\eta} - \hat{Z}_b)^2 \right)_j^{(i)} \right] \\ &+ \left[\frac{g}{2} \left((\hat{\eta}_k^{(i)} - \hat{Z}_{b,k}^{(i)})^2 - (\hat{\eta}_j^{(i)} - \hat{Z}_{b,j}^{(i)})^2 \right) - gn^2 \left(\int_{x_j}^{x_k} \frac{q}{\eta - Z_b} \left| \frac{q}{\eta - Z_b} \right| (\eta - Z_b)^{-4/3} dx \right)^{(i)} \right] \end{aligned} \quad (13.32)$$

que es considerada de esta forma porque satisface la siguiente relación con los flujos Ruge-Kutta

$$\left. \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial x} \right|_{x=x_j} = \mathbf{k}_j^{(i)} = (-\mathbf{f}_x + \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)_j^{(i)}. \quad (13.33)$$

Esta definición, además, garantiza que el esquema esté bien equilibrado.

Considerando los valores puntuales de $\hat{u}^{(i)}$ definidos en (13.31), calculamos $K_j(x_k; \hat{u}^{(i)})$, $k \in \{j-2, j-1, j, j+1, j+2\}$. Entonces consideramos los polinomios de interpolación $P_j(x; K_j^{(i)})$ definidos en el epígrafe 13.3.6 según [13]. La evaluación de los flujos Runge-Kutta $k_j^{(i)}$, se realiza a partir de la siguiente aproximación de orden 4

$$k_j^{(i)} \equiv \frac{dP_j(x; K_j^{(i)})}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \theta_j^{(i)} dP_j^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, 4 \quad (13.34)$$

Los valores del parámetro $\theta_j^{(i)}$ y el valor de la pendiente $dP_j^{(i)}$ se definen, como ha sido dicho, con el objetivo de evitar la aparición de falsos extremos y oscilaciones en la solución numérica.

13.3.5. Integración del término fuente

Las integrales temporales del término fuente, se aproximan de nuevo mediante una cuadratura gaussiana con dos nodos de integración (ya definidos)

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \bar{s}_{j+\frac{1}{2}}(\tau) d\tau = \frac{\Delta t}{2} \left(\bar{s}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\beta_0} + \bar{s}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\beta_1} \right), \quad (13.35)$$

donde a su vez

$$\bar{s}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\beta k} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(s_1 \left(u(x, t^{n+\beta k}) \right) + s_2 \left(u(x, t^{n+\beta k}) \right) \right) dx, \quad k = 0, 1. \quad (13.36)$$

Usamos el procedimiento descrito en [11] para calcular $\bar{s}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\beta k}$. El primer paso para calcular la integral del primer término $s_1 \left(u(x, t^{n+\beta k}) \right)$ en la ecuación (13.36) anterior, consiste en una manipulación analítica de la componente $\bar{s}_{1,j+\frac{1}{2}}^{[2]}$ utilizando la integración por partes [14, 11, 13], esto es

$$\begin{aligned} \bar{s}_{1,j+\frac{1}{2}}^{[2]} &= -\frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} g(\eta - Z_b) \frac{\partial Z_b}{\partial x} dx \\ &= \frac{g}{2\Delta x} [\hat{Z}_{b,j+1}^2 - \hat{Z}_{b,j}^2 - 2\hat{\eta}_{j+1}\hat{Z}_{b,j+1} + 2\hat{\eta}_j\hat{Z}_{b,j}] + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \psi(x) dx, \end{aligned} \quad (13.37)$$

donde se ha introducido la función $\psi(x) = gZ_b \frac{d\eta}{dx}$. Como se aprecia, ahora la componente $\bar{s}_{1,j+\frac{1}{2}}^{[2]}$ depende de la derivada espacial de la variable superficie libre o lámina libre η en lugar de la derivada espacial de la cota del fondo (solera o lecho), Z_b . Desde el punto de vista numérico, esto es mejor pues en general (cauces naturales), la superficie libre $\eta(x, t)$ suele ser más regular que el lecho $Z_b(x)$ ¹⁵.

Para evaluar la integral de $\psi(x)$ en (13.37), se siguen los siguientes pasos:

- A partir de los valores puntuales $\hat{\eta}_j$, se construyen los polinomios de interpolación $P_j(x; \hat{\eta})$, descritos en 13.3.6, que se utilizarán para aproximar los valores puntuales de la función $\psi(x)$. Así

$$\hat{\psi}_j = g\hat{Z}_{b,j} \frac{d\hat{\eta}_j}{dx} = g\hat{Z}_{b,j} \frac{dP_j(x; \hat{\eta})}{dx} = g\hat{Z}_{b,j} \frac{\theta_j dP_j}{\Delta x}, \quad (13.38)$$

donde $\hat{Z}_{b,j}$ son los valores puntuales reconstruidos de Z_b .

- Se calculan también los polinomios $P_j(x; \hat{\psi})$, a partir de los valores puntuales $\hat{\psi}_j$ y finalmente, se evalúa la integral

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \psi(x) dx = \int_{x_j}^{x_{j+\frac{\Delta x}{2}}} P_j(x; \hat{\psi}) dx + \int_{x_{j+\frac{\Delta x}{2}}}^{x_{j+1}} P_{j+1}(x; \hat{\psi}) dx. \quad (13.39)$$

La integral del segundo término $s_2 \left(u(x, t^{n+\beta k}) \right)$ en la ecuación (13.36)

¹⁵ En modelos de lecho móvil, es decir, con erosión, la variable (función), cota del lecho es en realidad $Z_b(x, t)$.

$$\bar{s}_{2,j+\frac{1}{2}}^{[2]} = -\frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} gn^2 \frac{q}{\eta - Z_b} \left| \frac{q}{\eta - Z_b} \right| (\eta - Z_b)^{-4/3} dx, \quad (13.40)$$

se evalúa siguiendo un procedimiento análogo al descrito para evaluar la integral de $\psi(x)$.

13.3.6. Reconstrucción polinomial no oscilatoria

En este epígrafe, detallamos el procedimiento seguido en [13] para la definición de los polinomios de tercer grado utilizados en este apartado, en epígrafes anteriores, en el caso de la reconstrucción espacial puntual y promedio $R_j(x; \bar{u}^n)$ y, tanto en la reconstrucción de los flujos Runge-Kutta $P_j(x; K_j^{(i)})$ como en la integración del término fuente $P_j(x; \hat{\eta})$. Con el primero de los polinomios, se reconstruyen valores puntuales a partir de valores medios; mientras que, con el segundo, la reconstrucción de los valores puntuales es a partir también de valores puntuales.

13.3.6.1. Reconstrucción de valores puntuales desde valores medios

Como en [13, 9], inicialmente se considera el polinomio de tercer grado que interpola valores medios con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} q_j(x_j; \bar{u}^n) &= \bar{u}_j^n; & q_j(x_{j-1}; \bar{u}^n) &= \bar{u}_{j-1}^n; & q_j(x_{j+1}; \bar{u}^n) &= \bar{u}_{j+1}^n; \\ \Delta x \frac{dq_j}{dx}(x_j; \bar{u}^n) &= d_j^n. \end{aligned} \quad (13.41)$$

La pendiente d_j^n será definida más adelante de manera que se preserve el comportamiento no oscilatorio de la reconstrucción. El objetivo en este punto es conseguir una reconstrucción de valores puntuales a partir de valores promedio, de orden cuatro, es decir, una reconstrucción puntual de $O((\Delta x)^4)$. Además, para preservar la estabilidad del esquema numérico, se considera, como se ha comentado, el parámetro θ_j^n definido en [13, 32]. De esta forma, el polinomio $R_j(x; \bar{u}^n)$ queda definido como sigue

$$R_j(x; \bar{u}^n) = \theta_j^n \left(q_j(x; \bar{u}^n) - \frac{1}{24} (\Delta x)^2 \frac{d^2 q_j(x; \bar{u}^n)}{dx^2} \right) + (1 - \theta_j^n) \bar{u}_j^n. \quad (13.42)$$

De este modo, el polinomio resultante adopta la forma

$$\begin{aligned} R_j(x; \bar{u}^n) &= \bar{u}_j^n + \theta_j^n \left(\frac{-\bar{u}_{j-1}^n + 2\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j+1}^n}{24} + \left(\frac{\bar{u}_{j-1}^n - \bar{u}_{j+1}^n + 10d_j^n}{8} \right) \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{\bar{u}_{j-1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j+1}^n}{2} \right) \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right)^2 \\ &\quad \left. + \left(\frac{-\bar{u}_{j-1}^n + \bar{u}_{j+1}^n - 2d_j^n}{2} \right) \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right)^3 \right). \end{aligned} \quad (13.43)$$

El parámetro θ_j^n está definido para eliminar extremos espurios. Así, si se considera

$$q_j^*(x; \bar{u}^n) = q_j(x; \bar{u}^n) - \frac{1}{24} (\Delta x)^2 \frac{d^2 q_j(x; \bar{u}^n)}{dx^2},$$

y definimos

$$M_j^n = \max \left\{ q_j^*(x; \bar{u}^n), \quad x \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \right\},$$

$$m_j^n = \min \left\{ q_j^*(x; \bar{u}^n), \quad x \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \right\},$$

y

$$M_{j\pm\frac{1}{2}}^n = \max \left\{ \frac{1}{2} (\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j\pm 1}^n), \quad q_{j\pm 1}^* \left(x_{j\pm\frac{1}{2}}; \bar{u}^n \right) \right\},$$

$$m_{j\pm\frac{1}{2}}^n = \min \left\{ \frac{1}{2} (\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j\pm 1}^n), \quad q_{j\pm 1}^* \left(x_{j\pm\frac{1}{2}}; \bar{u}^n \right) \right\}.$$

El limitador θ_j^n viene dado por

$$\theta_j^n = \begin{cases} \min \left\{ \frac{M_{j+\frac{1}{2}}^n - \bar{u}_j^n}{M_j^n - \bar{u}_j^n}, \frac{m_{j-\frac{1}{2}}^n - \bar{u}_j^n}{m_j^n - \bar{u}_j^n}, 1 \right\} & \text{si } \bar{u}_{j-1}^n < \bar{u}_j^n < \bar{u}_{j+1}^n \\ \min \left\{ \frac{M_{j-\frac{1}{2}}^n - \bar{u}_j^n}{M_j^n - \bar{u}_j^n}, \frac{m_{j+\frac{1}{2}}^n - \bar{u}_j^n}{m_j^n - \bar{u}_j^n}, 1 \right\} & \text{si } \bar{u}_{j-1}^n > \bar{u}_j^n > \bar{u}_{j+1}^n \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}. \quad (13.44)$$

Balaguer y Conde en [4] prueban que $R_j(x; \bar{u}^n)$ presenta un comportamiento no oscilatorio, siempre teniendo la misma forma y el mismo tipo de monotonía que la secuencia $\bar{u}_{j-1}^n, \bar{u}_j^n, \bar{u}_{j+1}^n$, con la definición para la pendiente d_j^n que se expone a continuación. Para ello, se considera la siguiente notación

$$S_j^n = \text{sign}(\bar{U}C_j^n), \quad \bar{U}C_j^n = \bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n, \quad \bar{U}R_j^n = \bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_j^n, \quad \bar{U}C2_j^n = \bar{u}_{j+2}^n - \bar{u}_{j-2}^n,$$

$$ds_j^n = \frac{2}{3} \bar{U}C_j^n - \frac{1}{12} \bar{U}C2_j^n, \quad ds1_j^n = \frac{\bar{U}C_j^n}{10}, \quad ds2_j^n = \frac{1}{2} (\bar{U}C_j^n - 4 \bar{U}R_j^n), \quad (13.45)$$

$$ds3_j^n = \frac{4 \bar{U}R_j^n - 3 \bar{U}C_j^n}{2}, \quad ds4_j^n = \frac{5 \bar{U}C_j^n - 4 \bar{U}R_j^n}{6}, \quad ds5_j^n = \frac{4 \bar{U}R_j^n + \bar{U}C_j^n}{6}.$$

Se distinguen ahora, los siguientes casos en la definición de d_j^n

Caso A. Se tiene que $\bar{u}_{j-1}^n \leq \bar{u}_j^n \leq \bar{u}_{j+1}^n$ o $\bar{u}_{j-1}^n \geq \bar{u}_j^n \geq \bar{u}_{j+1}^n$. En este caso d_j^n adoptará los siguientes valores

(A1) Si $S_j^n = 0$ entonces $d_j^n = 0$.

(A2) Si $S_j^n \neq 0$ y $(2S_j^n \bar{U}C_j^n \geq S_j^n \bar{U}C2_j^n)$ entonces $d_j^n = ds_j^n$.

(A3) Si $S_j^n \neq 0$ y $(2S_j^n \bar{U}C_j^n < S_j^n \bar{U}C2_j^n)$ entonces

(A3.1) Si $\bar{u}_j^n = \frac{\bar{u}_{j+1}^n + \bar{u}_{j-1}^n}{2}$, entonces

$$d_j^n = \begin{cases} \max\{ds1_j^n, ds_j^n\} & \text{si } S_j^n > 0 \\ \min\{ds1_j^n, ds_j^n\} & \text{si } S_j^n < 0 \end{cases}$$

(A3.2) Si $\bar{u}_j^n \neq \frac{\bar{u}_{j+1}^n + \bar{u}_{j-1}^n}{2}$, entonces

(A3.2.1) Si $|\bar{U}R_j^n - \frac{1}{2}\bar{U}C_j^n| \geq \frac{1}{8}|\bar{U}C2_j^n - 2\bar{U}C_j^n|$ entonces

$$d_j^n = \begin{cases} \max\{ds2_j^n, ds3_j^n, ds_j^n\} & \text{si } S_j^n > 0 \\ \min\{ds2_j^n, ds3_j^n, ds_j^n\} & \text{si } S_j^n < 0 \end{cases}$$

(A3.2.2) Si $|\bar{U}R_j^n - \frac{1}{2}\bar{U}C_j^n| < \frac{1}{8}|\bar{U}C2_j^n - 2\bar{U}C_j^n|$ entonces

$$d_j^n = \begin{cases} \frac{\bar{U}C_j^n}{2} - S_j^n C1 |2\bar{U}R_j^n - \bar{U}C_j^n| & \text{si } \left| \frac{\bar{U}R_j^n}{\bar{U}C_j^n} - \frac{1}{2} \right| \leq C2 \\ \frac{\bar{U}C_j^n}{2} & \text{si } \left| \frac{\bar{U}R_j^n}{\bar{U}C_j^n} - \frac{1}{2} \right| > C2 \end{cases}'$$

$$\text{con } C1 = \frac{\sqrt{15}}{15} \text{ y } C2 = \frac{15 - \sqrt{15}}{28}.$$

Caso B. Se verifica que $\bar{u}_{j-1}^n < \bar{u}_j^n > \bar{u}_{j+1}^n$. Entonces, la definición de d_j^n es la siguiente

(B1) Si $\bar{U}C2_j^n = 2\bar{U}C_j^n$ entonces $d_j^n = ds_j^n$.

(B2) Si $\bar{U}C2_j^n < 2\bar{U}C_j^n$ entonces $d_j^n = \min\{ds2_j^n, ds4_j^n, ds_j^n\}$.

(B3) Si $\bar{U}C2_j^n > 2\bar{U}C_j^n$ entonces $d_j^n = \max\{ds3_j^n, ds5_j^n, ds_j^n\}$.

Caso C. Se verifica que $\bar{u}_{j-1}^n > \bar{u}_j^n < \bar{u}_{j+1}^n$. Entonces, la definición de d_j^n es la siguiente

(C1) Si $\bar{U}C2_j^n = 2\bar{U}C_j^n$ entonces $d_j^n = ds_j^n$.

(C2) Si $\bar{U}C2_j^n < 2\bar{U}C_j^n$ entonces $d_j^n = \min\{ds3_j^n, ds5_j^n, ds_j^n\}$.

(C3) Si $\bar{U}C2_j^n > 2\bar{U}C_j^n$ entonces $d_j^n = \max\{ds2_j^n, ds4_j^n, ds_j^n\}$.

13.3.6.2. Reconstrucción de valores puntuales desde valores puntuales

Para el cálculo ahora de los polinomios $P_j(x; y^{(i)})$, se parte de los valores puntuales $\hat{y}_k^{(i)}$, $k \in \{j-2, j-1, j, j+1, j+2\}$. De este modo, se construye el polinomio tercer grado que verifica estas condiciones

$$P_j(x_j; y^{(i)}) = \hat{y}_j^{(i)}; \quad P_j(x_{j-1}; y^{(i)}) = \hat{y}_{j-1}^{(i)}; \quad P_j(x_{j+1}; y^{(i)}) = \hat{y}_{j+1}^{(i)}; \quad (13.46)$$

$$\Delta x \frac{dP_j}{dx}(x_j; y^{(i)}) = dP_j^{(i)}.$$

La pendiente dP_j^n será definida de manera que se preserve el comportamiento no oscilatorio de la reconstrucción. Bajo estas condiciones, el polinomio $P_j(x_j; y^{(i)})$ adopta la siguiente definición

$$P_j(x_j; y^{(i)}) = \hat{y}_j^{(i)} + \theta_j^{(i)} \left(dP_j^{(i)} \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right) + \left(\frac{\hat{y}_{j-1}^{(i)} - 2\hat{y}_j^{(i)} + \hat{y}_{j+1}^{(i)}}{2} \right) \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{-\hat{y}_{j-1}^{(i)} + \hat{y}_j^{(i)} - 2dP_j^{(i)}}{2} \right) \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right)^3 \right). \quad (13.47)$$

De nuevo, el limitador $\theta_j^{(i)}$ viene definido según las reglas establecidas en (13.44), cambiando en las definiciones valores medios por valores puntuales, para impedir la aparición de falsos extremos en la solución numérica.

La definición de la pendiente dP_j^n coincide con la descrita en el epígrafe anterior para d_j^n , cambiando valores medios por valores puntuales, y definiendo, en coherencia, además

$$YC_j^{(i)} = \hat{y}_{j+1}^{(i)} - \hat{y}_{j-1}^{(i)}, \quad YR_j^{(i)} = \hat{y}_{j+1}^{(i)} - \hat{y}_j^{(i)}, \quad C1 = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad C2 = \frac{6}{12 + \sqrt{3}} \quad (13.48)$$

$$ds1_j^{(i)} = 0, \quad ds2_j^{(i)} = \frac{1}{2} (YC_j^{(i)} - 8 YR_j^{(i)}), \quad ds3_j^{(i)} = \frac{1}{2} (8 YR_j^{(i)} - 7 YC_j^{(i)}).$$

Para más detalles en relación a esta reconstrucción polinomial no oscilatoria, consúltese [4].

13.4. PASO TEMPORAL. CONDICIÓN DE ESTABILIDAD

La estabilidad de los esquemas numéricos presentados, depende de la selección del paso de tiempo o paso temporal utilizado. Éste, se ha considerado constante hasta ahora. Pues bien, en aras además a optimizar el tiempo de cálculo total sin comprometer la estabilidad del esquema, se propone ahora un paso de tiempo variable (o adaptativo), satisfaciendo la condición de Courant-Friedrichs-Lewy o condición CFL de forma que

$$\Delta t^n = CFL \frac{\Delta x}{\max_j \left(\sqrt{g \hat{h}_j^n} + |\hat{v}_j^n| \right)}, \quad (13.49)$$

donde \hat{h}_j^n es el valor puntual estimado del calado o altura de agua y \hat{v}_j^n el de la velocidad del flujo líquido, en el instante t^n , en $x = x_j$ cuando n es par, y en $x = x_{j+\frac{1}{2}}$, cuando n es impar. Así, consideramos que el intervalo temporal se encuentra discretizado en los valores $t^0 = 0, t^n = t^{n-1} + \Delta t^n, n \geq 1$.

El valor del número de Courant o CFL se elegirá adecuadamente a cada problema en estudio. En nuestro caso, el valor $CFL \leq 0.35$ garantiza la estabilidad de los esquemas numéricos para los problemas estudiados, al igual que en [12].

13.5. CASOS TEST CON SOLUCIÓN EXACTA

En este apartado se presentan varios resultados numéricos, a partir de [14, 2], para varios ejemplos o casos test en los que se conoce su solución exacta. Se pretende verificar de esta manera el comportamiento no oscilatorio y la precisión de los esquemas numéricos descritos, a fin de proponer finalmente uno de ellos como el más adecuado al caso de estudio objeto de este trabajo, en el que como se ha mencionado y se detalla más adelante, se considera un canal de ancho variable en el que además de las pérdidas de energía continuas debidas a la fricción, se consideran las pérdidas de energía locales que tienen lugar precisamente por el cambio de anchura de una sección de flujo a otra. En [14] pueden consultarse además otros casos test con comportamiento análogo para los dos esquemas numéricos estudiados.

13.5.1. Rotura de presa en canal horizontal con calado inicial no nulo

Se considera el problema de rotura de presa con embalse lleno y propagación repentina por el cauce de aguas abajo de la onda de avenida generada. Este cauce, como veremos, se considera con una lámina de agua inicial, es decir, el cauce no está seco. Matemáticamente, y con la nomenclatura utilizada en este trabajo, se tiene un fondo (lecho) fijo a cota cero $Z_b(x) = 0$, para $0 \leq x \leq 50 \text{ m}$, con las siguientes condiciones iniciales para las variables de lámina libre y caudal específico

$$\eta(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \text{ m} \\ 0.1 & \text{si } x > 10 \text{ m} \end{cases}, \quad q(x, 0) = \begin{cases} 2.5 & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \text{ m} \\ 0 & \text{si } x > 10 \text{ m} \end{cases} \quad (13.50)$$

En la figura 13.1 siguiente se muestra la solución numérica obtenida con ambos esquemas, el esquema upwind-WENO y el esquema de tipo centrado, para el tiempo final $t = 7 \text{ s}$, en cuanto a cota de lámina libre y caudal de la onda de avenida en cada sección, como corresponde a un régimen no permanente. En dicha figura puede verse comparativamente ambas soluciones numéricas, entre sí, y en relación a la solución analítica obtenida a partir de [35], teórica, sin amortiguamiento de la onda debido a la fricción. Las simulaciones se han realizado con un paso espacial $\Delta x = 0.5$, lo que conduce a $N_x = 100$ nodos. Por su parte, para cumplir la condición de estabilidad, se ha tomado el valor $CFL = 0.35$. Como se puede observar en la figura, el esquema upwind-WENO es claramente más difusivo que el esquema de tipo centrado, lo que se aprecia especialmente en el caso de la lámina libre. No obstante, de las pruebas realizadas, se desprende que el primero, permite utilizar un paso de tiempo más grande (se ha probado con $CFL=0.9$). Por otra parte, en el esquema de tipo centrado aparecen ligeras oscilaciones. Éstas desaparecen al tomar pasos de tiempo menores si bien con ello aumenta ligeramente la difusión numérica.

En cualquier caso, hay que resaltar que se trata de un test absolutamente teórico en el que la onda de avenida avanza sin amortiguamiento alguno debido a la fricción y que, precisamente por ello, el fenómeno es si cabe más violento, con velocidades mayores de las que se alcanzarían en el caso real equivalente.

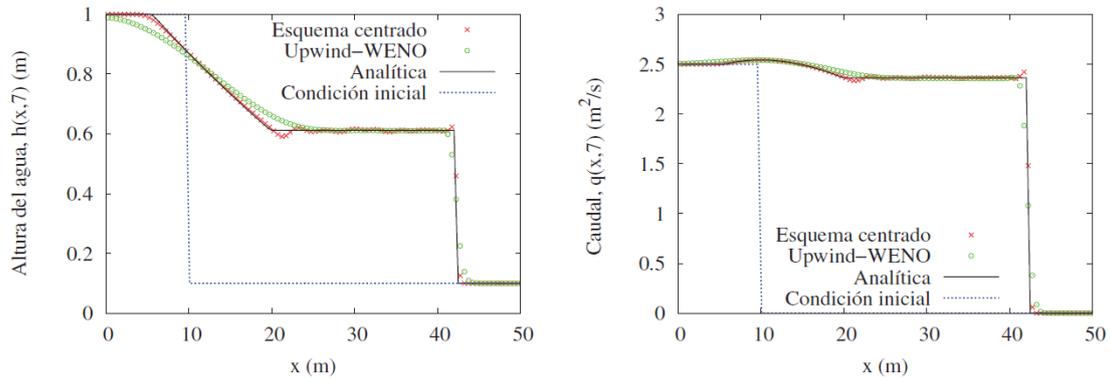


Figura 13.1. Test1: Rotura de presa en canal horizontal con calado inicial no nulo. Soluciones numéricas (aproximadas) y analítica (teórica) en $t=7$ s. Fte.: [14].

13.5.2. Rotura de presa en canal horizontal con frente de avance de la onda seco/mojado

En este segundo test, tratamos físicamente el mismo problema, es decir la rotura de presa con embalse lleno y propagación de la onda de avenida, pero en este caso, el cauce de aguas abajo está seco, es decir, con una condición inicial de calado nulo. Matemáticamente, se tiene $Z_b(x) = 0$, sobre el dominio $0 \leq x \leq 50$ m, con las siguientes condiciones iniciales

$$\eta(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \text{ m} \\ 0 & \text{si } x > 10 \text{ m} \end{cases}, \quad q(x, 0) = \begin{cases} 2.5 & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \text{ m} \\ 0 & \text{si } x > 10 \text{ m} \end{cases}, \quad (13.51)$$

es decir, embalse lleno y cauce seco aguas abajo, lo que dará lugar a lo que se conoce como frente de onda seco/mojado, y la misma condición en caudales que en el test1 anterior.

En la figura 13.2 se compara nuevamente la solución obtenida con ambos esquemas numéricos para el instante final $t = 4$ s, en cuanto a cota de lámina libre y caudal de la onda de avenida en cada sección, con la solución analítica extraída de [9]. Las condiciones de las simulaciones numéricas han sido las análogas al caso anterior, es decir, $\Delta x = 0.5$, como paso espacial, lo que conduce a $N_x = 100$ nodos y $CFL = 0.35$.

De nuevo, podemos observar que el esquema upwind-WENO es claramente más difusivo que el esquema de tipo centrado con el mismo CFL. En el esquema de tipo centrado han desaparecido las ligeras oscilaciones (del tamaño del orden del esquema) observadas en el test1. Esto puede ser debido a que la velocidad de avance de la onda de avenida es mayor en este caso. Además, su ajuste a la solución analítica es realmente bueno. Por otra parte, el comportamiento del esquema de tipo centrado en lo que respecta al frente de onda seco/mojado es mejor pues no requiere ningún tratamiento especial en las celdas en las que la columna de agua cambia de valores positivos a nulos. No obstante, para un mayor detalle en el análisis de tanto de este test como del anterior, véase [14].

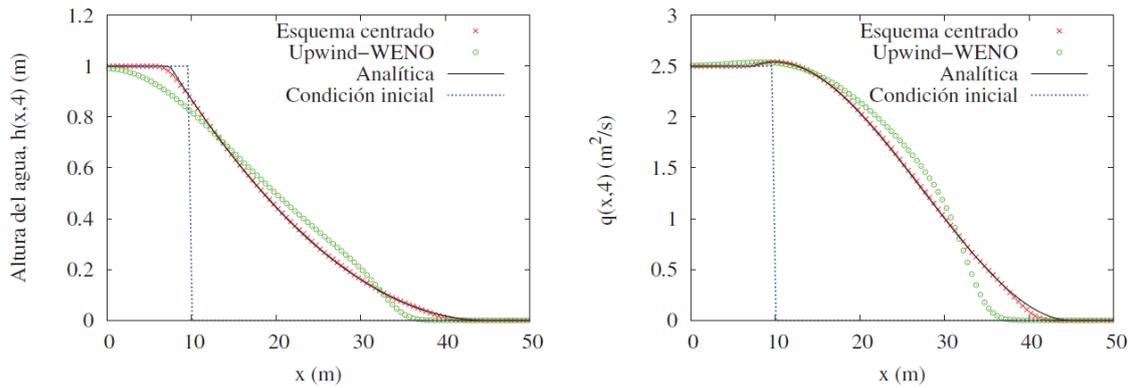


Figura 13.2. Test2: Rotura de presa en canal horizontal con frente seco/mojado. Soluciones numéricas (aproximadas) y analítica (teórica) en $t=4$ s. Fte.: [14].

13.5.3. Discusión

Se han comparado los resultados obtenidos con dos esquemas numéricos de alto orden bien equilibrados en la resolución de un modelo de ecuaciones de aguas someras como corresponde al caso de rotura de presa; en dos situaciones, con el cauce de aguas abajo con cierto nivel de agua y con el cauce seco. Se trata de casos test bastante exigentes numéricamente hablando por la discontinuidad que supone el frente de onda (físicamente hablando), sobre todo, en el caso de cauce seco aguas abajo, donde la discontinuidad es más fuerte y las celdas pasan de valores nulos de calado a valores positivos importantes. Se han comparado entre sí los resultados obtenidos y con las soluciones exactas conocidas extraídas de las referencias citadas. El comportamiento final en ambos esquemas podríamos decir es básicamente no oscilatorio, con una menor difusión y por tanto un mejor ajuste a la solución exacta, en el caso del esquema de tipo centrado.

Según [14] además, en el esquema upwind-WENO es más fácil la implementación de las condiciones de contorno y su adaptación a mallas de triángulos en el paso a dos dimensiones, lo que puede resultar interesante en ese caso; mientras que el esquema de tipo centrado presentado no necesita conocer la estructura del sistema de EDPs que se resuelve.

13.6. MODELO MATEMÁTICO. MÉTODO PROPUESTO

Adicionalmente, el esquema de tipo centrado presentado ha sido aplicado a otros casos tipo test con solución exacta [14, 2]. Así, como puede consultarse en [2] se ha evaluado, por ejemplo, en el caso del flujo en régimen estacionario en un canal de ancho constante con control hidráulico a base de una sobreelevación de la cota de solera (umbral). En este caso, como corresponde a la existencia de un control desde el punto de vista hidráulico, se produce un cambio de régimen de subcrítico aguas arriba del umbral, pasando por el crítico sobre el mismo, a un régimen supercrítico aguas abajo. Inmediatamente después, se produce un nuevo cambio de régimen desde este supercrítico al subcrítico impuesto desde aguas abajo por la condición de contorno establecida. Esto provoca la aparición de lo que se conoce como resalto hidráulico (onda de choque estacionaria que se produce en el paso de régimen rápido a lento).

Este caso es un test clásico en este campo y ha sido considerado en otras muchas referencias, como es el caso de [18] y [37]. La solución obtenida se ajusta perfectamente a la solución analítica, sin presentar oscilaciones numéricas, representando bien los cambios de régimen y el resalto hidráulico, tanto en su localización en el canal como en la evaluación de los calados conjugados involucrados.

Así pues, por todo ello, el método finalmente seleccionado en este trabajo, por los motivos expuestos, es el que responde al *ESQUEMA NUMÉRICO DE TIPO CENTRADO DE ALTO ORDEN BIEN EQUILIBRADO*. Al objeto de poder abordar el caso de estudio en este trabajo, es decir, canal de ancho variable y consideración de pérdidas locales de energía, se introducen en el modelo las oportunas modificaciones. Así, en el sistema de ecuaciones de aguas someras se introducirán, progresivamente, los términos adicionales correspondientes a la variación de anchura $B(x)$ y a la consideración de las pérdidas locales de energía por este motivo.

De esta forma, si consideramos el efecto de la variación de la anchura $B(x)$ en la sección transversal $A(x)$, teniendo en cuenta que ésta última se puede expresar como $A(x) = B(x)h(x, t)$, para sección rectangular, el sistema (13. 1) se transforma según [37] en

$$\left. \begin{aligned} h_t + (q)_x &= -q \frac{(B)_x}{B(x)} \\ (q)_t + \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 \right)_x &= -g h (Z_b)_x - \frac{q^2 (B)_x}{h B(x)} - g n^2 \frac{q}{h} \left| \frac{q}{h} \right| R_H^{-4/3} \end{aligned} \right\}, \quad (13.52)$$

donde $B(x)$ normalmente se comportará como una función continua definida a trozos. En los casos en que la función $B(x)$ sea derivable salvo en un número finito de puntos, su derivada se aproximará como el promedio de las derivadas por la derecha y por la izquierda.

A su vez ahora, y dado que, en el caso de canales para flujo en lámina libre, normalmente ya no se cumple la condición de sección muy ancha ($B \gg h$) –como ocurría en el caso de cauces naturales–, debemos considerar para el radio hidráulico la expresión

$$R_H = \frac{B(x)h(x, t)}{B(x) + 2h(x, t)}, \quad (13.53)$$

que es la adecuada para una sección rectangular genérica. Así se ha considerado en el sumando correspondiente a la pérdida de energía por fricción en el término fuente de la segunda ecuación en (13.52).

Análogamente, si consideramos $\eta(x, t)$ como variable para la cota de la lámina libre en lugar del calado $h(x, t)$, podemos reescribir (13.52) como

$$\frac{\partial}{\partial t} [\eta] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q^2}{\eta - Z_b} + \frac{1}{2} g (\eta - Z_b)^2 \right] = \left[\begin{array}{c} -q \frac{(B)_x}{B(x)} \\ -g(\eta - Z_b)(Z_b)_x - \frac{q^2}{\eta - Z_b} \frac{(B)_x}{B(x)} - gn^2 \frac{q}{\eta - Z_b} \left| \frac{q}{\eta - Z_b} \right| R_H^{\frac{-4}{3}} \end{array} \right] \quad (13.54)$$

Como antes, en notación vectorial, siendo de nuevo $\mathbf{u} = [\eta \quad q]^T$ el vector de variables incógnita, (13.54) puede quedar expresado

$$\frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t))}{\partial x} = \sum_{k=1}^3 s_k(x, \mathbf{u}(x, t)) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x = \mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3, \quad (13.55)$$

donde ahora los términos fuente $s_k(x, \mathbf{u}(x, t))$ quedan como

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(\eta - Z_b) \frac{\partial Z_b}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} -q \frac{(B)_x}{B(x)} \\ -\frac{q^2}{\eta - Z_b} \frac{B'(x)}{B(x)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -gn^2 \frac{q}{\eta - Z_b} \left| \frac{q}{\eta - Z_b} \right| R_H^{\frac{-4}{3}} \end{bmatrix}; \quad (13.56)$$

siendo \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_3 equivalentes a los \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_2 de antes (modelo básico) y el nuevo \mathbf{s}_2 (en (13.55)) el que incluye el término debido a la variación del ancho del canal.

De tal forma que, se completa el esquema numérico descrito en el apartado 13.3, usando el mismo procedimiento visto en 13.3.5 para discretizar ahora el nuevo término \mathbf{s}_2 que considera el ancho del canal.

Ahora bien, si los cambios de anchura en el canal no se producen de forma hidrodinámica¹⁶, deben considerarse las conocidas como pérdidas locales de energía. Éstas se producen físicamente por la aparición de contracciones y expansiones de la vena fluida e incluso de remolinos turbulentos asociados a esos cambios geométricos en la sección hidráulica. Estas pérdidas serán tanto más importantes cuanto más antihidrodinámica sea la transición o cambio de anchura. Se distingue así, entre las consideradas hidrodinámicas, las graduales y las bruscas. En el caso de estas últimas es donde las pérdidas son obviamente mayores. La manera de considerar estas pérdidas en el modelo matemático es introduciendo, como se indicó en el epígrafe 12.2, un nuevo sumando en el término fuente de la segunda ecuación del sistema (13.52). Concretamente, en nuestro caso, se van a modelizar a partir del término [16]

¹⁶ Se considera que un cambio de anchura (ensanchamiento o estrechamiento) es hidrodinámico, si la relación longitud/cambio de ancho es de 4/1 o superior. En tal caso, pueden despreciarse las pérdidas hidráulicas de energía por ese motivo.

$$-h(x,t) \frac{\lambda(x)}{2} \left| \frac{\partial(v^2(x,t))}{\partial x} \right|, \quad (13.57)$$

con el significado habitual para $h(x,t)$ y $v(x,t)$ como calado de la lámina libre y velocidad del flujo respectivamente, y donde $\lambda(x)$ es una función que solo toma valores no nulos cuando se produce un cambio de sección, es decir, en una contracción (estrechamiento) o en una expansión (ensanchamiento). De tal forma que (13.52) queda ahora escrito como sigue

$$\left. \begin{aligned} h_t + (q)_x &= -q \frac{(B)_x}{B(x)} \\ (q)_t + \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x &= -gh(Z_b)_x - \frac{q^2 (B)_x}{h B(x)} - gn^2 \frac{q}{h} \left| \frac{q}{h} \right| R_H^{-4/3} - h \frac{\lambda}{2} \left| \frac{\partial(v^2)}{\partial x} \right| \end{aligned} \right\}. \quad (13.58)$$

Las pérdidas locales por contracción o expansión solamente se considerarán si éstas, las contracciones o expansiones, existen. Para el caso de transiciones graduales (4:3 o incluso 1:2, p.e.), que será el caso del canal utilizado en el laboratorio (ver Apartado 14), los valores a considerar en la función $\lambda(x)$ para la transición de anchura implementada en dicho canal (primero contracción y luego, a continuación aguas abajo, expansión), serán los siguientes, quedando definida la función como

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0.1 & 0.76 \leq x \leq 0.775 \\ 0.3 & 0.825 \leq x \leq 0.84. \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (13.59)$$

(Nota: los tramos de definición de la función en (13.59) están referidos al canal de ensayos utilizado en el epígrafe 14.2; en cualquier caso, el primer tramo, correspondiente al valor 0.1 de la función, representa la contracción; mientras que, el segundo tramo, correspondiente al valor 0.3, representa a la expansión. Si la sección no cambia de ancho, el valor que toma λ es cero, y el término de pérdidas locales desaparece de la segunda ecuación del sistema).

Numéricamente, la derivada parcial del cuadrado de la velocidad del flujo que aparece en (13.57) se aproxima de forma puntual en cada nodo de la malla uniforme de puntos $x = x_i$, $\forall i = 1, \dots, n$, separados $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, $\forall i$, usando los valores de dicha velocidad en los mismos puntos en cada instante de tiempo t , $v_i(t) \equiv v(x_i, t) = q(x_i, t)/h(x_i, t)$, de tal modo que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(v^2(x,t))}{\partial x} \right| &\approx \frac{1}{\Delta x} \left| \left(\frac{v_{i+1}(t) + v_i(t)}{2} \right)^2 - \left(\frac{v_i(t) + v_{i-1}(t)}{2} \right)^2 \right| \\ &= \frac{1}{4\Delta x} |v_{i+1}^2(t) - v_{i-1}^2(t) + 2v_i(t)(v_{i+1}(t) - v_{i-1}(t))|. \end{aligned} \quad (13.60)$$

Para la resolución de (13.58) usamos el esquema numérico de volúmenes finitos de tipo centrado de alto orden bien equilibrado propuesto, considerando ahora, de manera adicional, el término propuesto para las pérdidas locales de energía. En todo caso, este término se puede discretizar del mismo modo que el término correspondiente a las pérdidas de energía por fricción.

El uso de un esquema de tipo centrado facilita la incorporación de nuevos términos al modelo matemático, obteniendo la solución numérica sin la necesidad de tener que diagonalizar la matriz asociada al sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

13.7. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA. CONDICIONES INICIALES Y DE CONTORNO

El conocimiento del tipo de EDPs es también fundamental para la formulación correcta de la resolución del problema cuya solución (aproximada) se pretende encontrar. Una EDP o sistema de EDPs debe ser resuelto en un dominio estrictamente definido y para unas condiciones auxiliares concretas, también estrictamente definidas, impuestas en los límites del dominio de la solución. En otras palabras, cada solución de una EDP o sistema de EDPs corresponde a unas condiciones impuestas a priori a esta solución desconocida, de forma que, una misma ecuación o sistema de ecuaciones, puede tener soluciones diferentes ante distintas condiciones, como es obvio. De tal manera que, la función solución del problema considerado, debe satisfacer simultáneamente tanto la ecuación o sistema de ecuaciones como las condiciones impuestas en los límites del dominio de la solución. Estas condiciones adicionales o auxiliares, en nuestro caso, ecuaciones hiperbólicas, son habitualmente llamadas condiciones límite y se dividen, como sabemos, en dos tipos: condiciones iniciales (c.i.) y condiciones de contorno (c.c). Las primeras, proporcionan información sobre la función o funciones solución en el dominio de la solución, para el instante inicial t_0 . Estas condiciones están presentes en problemas no permanentes en los que una de las variables independientes es el tiempo. Por su parte, las c.c proporcionan la información sobre las condiciones impuestas en los contornos físicos del dominio de la solución. En el caso de los problemas de flujo en lámina libre, estos contornos físicos coinciden con las secciones extremas de aguas arriba y aguas abajo. Se trata de las secciones que delimitan el tramo de canal objeto de estudio. Si en un extremo del dominio de la solución, el valor de la función solución desconocida es dado o está fijado, entonces hablamos de c.c de tipo Dirichlet; mientras que, si lo que se conoce es el valor de la derivada de la función en dicho extremo, entonces hablamos de c.c de tipo Neuman o c.c naturales. También se puede hablar de condiciones de tipo mixto, pero éstas no tienen aplicación en el caso que nos ocupa.

Matemáticamente, la ecuación o sistema de ecuaciones de gobierno del problema y sus condiciones límite (c.c. y c.i), están bien formuladas [19] si aseguran

- La existencia de solución;
- La unicidad de la solución; y
- La dependencia continua de la solución respecto de las condiciones límite.

El problema de la prueba de la existencia de la solución es importante desde el punto de vista del formalismo matemático. Desde el punto de vista físico o de la resolución de problemas de ingeniería, no obstante, es razonable asumir que el modelo matemático basado en los principios de las leyes de conservación bien planteadas tiene solución en la mayoría de los casos.

La unicidad de la solución está relacionada con la formulación de las condiciones límite para el tipo considerado de EDP. Si las condiciones no son las suficientes, la solución no será única; mientras que demasiadas condiciones pueden conducir a una solución sin sentido físico [19]. En definitiva, para definir adecuadamente las condiciones límite, se necesita conocer el tipo de ecuaciones a resolver. De ahí que la correcta clasificación de las EDPs y el conocimiento de sus *características* (curvas características) resulte fundamental para el correcto planteamiento del problema y su solución.

Para algunos problemas, la manera de formular las condiciones, inicial y de contorno, es bien conocida. Así, para el caso de las ecuaciones hiperbólicas, la siguiente regla es de aplicación: “en cada límite del dominio de solución considerado, es necesario imponer tantas condiciones adicionales como *características* ‘entren’ en dicho dominio de solución desde este contorno”. Para entender mejor la manera de aplicar esta regla, a continuación, presentamos dos ejemplos.

Así, por ejemplo, en el caso de la ecuación de advección pura (13.61)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{para } u = \text{cte.} \quad (13.61)$$

Sus *características* en el plano (x, t) vienen dadas por $dx = u dt$, con lo que en este caso, son rectas definidas por $t = t_0 + \frac{1}{u}(x - x_0)$, donde la pendiente es precisamente $1/u$, dependiente del signo de la velocidad del flujo u (figura 13.3)

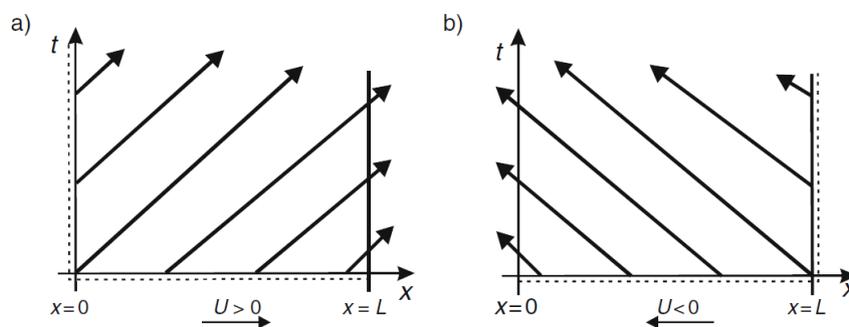


Figura 13.3. Ecuación de advección pura. Características, para $u > 0$ (a) y para $u < 0$ (b). Fuente: [33].

Entonces, si se quiere resolver (13.61) en el dominio $0 \leq x \leq L$ y $t \geq 0$ con $u > 0$, se deben imponer las siguientes condiciones auxiliares:

- c.i:
 - $f(x, 0) = f_i(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L,$
- c.c:
 - (extremo de aguas arriba) $x=0: f(0, t) = f_0(t) \quad \text{para } t \geq 0,$

donde $f_i(x)$ y $f_0(t)$ son valores dados conocidos.

Si el vector velocidad fuera el opuesto, es decir, $u < 0$, figura 13.3.(b), entonces la condición de contorno debiera ser impuesta en el extremo contrario del canal, es decir, en la sección extrema de aguas abajo, en $x=L$.

Para el caso de estudio que nos ocupa, es decir, para el sistema de ecuaciones de Saint-Venant, es conocido que dicho sistema posee dos familias de características reales que vienen dadas por

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_1 = u + \sqrt{gh}, \tag{13.62}$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_2 = u - \sqrt{gh},$$

con el significado habitual para las variables (funciones) en el que u es la velocidad del flujo y h el calado del mismo (altura de agua). Donde además, como sabemos, \sqrt{gh} es la celeridad (c) o velocidad de propagación de las ondas superficiales en el flujo en lámina libre generadas por cualquier perturbación ($c = \sqrt{gh}$). En este caso, la estructura de las características en el dominio de la solución ($0 \leq x \leq L$ y $t \geq 0$) puede variar de acuerdo a la relación entre la velocidad del flujo u y la celeridad de las ondas superficiales c . De manera que, si $u < \sqrt{gh}$, es decir, estamos en régimen subcrítico o lento (número de Froude, $F = u/\sqrt{gh} < 1$), las familias de características están inclinadas en direcciones opuestas (en (13.62), una tangente es de pendiente positiva y la otra es de pendiente negativa). Su forma puede verse en la figura 13.4 siguiente.

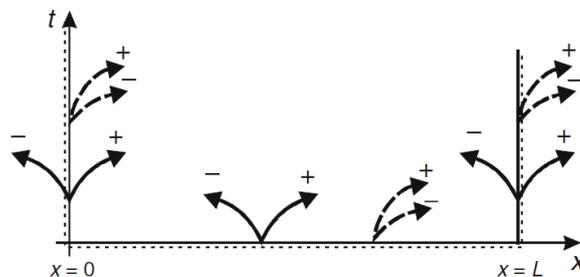


Figura 13.4. Sistema de ecuaciones de Saint-Venant. Características, para $u < \sqrt{gh}$ (líneas continuas) y para $u > \sqrt{gh}$ (líneas a trazos). Fuente: [33].

Interpretando la regla anterior, si el régimen es subcrítico ($F < 1$), como a través de la línea de $t=0$ entran dos características en el dominio de la solución, entonces, son necesarias dos c.i:

$$u(x, 0) = u_i(x) \quad \wedge \quad h(x, 0) = h_i(x) \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq L.$$

Mientras que, como una sola característica entra en el dominio de la solución en cada uno de los bordes $x = 0$ y $x = L$, entonces en cada uno de ellos hace falta solo una condición adicional, es decir:

$$u(0, t) = u_0(t) \quad \text{o} \quad h(0, t) = h_0(t) \quad \text{para} \quad t \geq 0,$$

y

$$u(L, t) = u_L(t) \quad \text{o} \quad h(L, t) = h_L(t) \quad \text{para} \quad t \geq 0.$$

Si el régimen es supercrítico ($u > \sqrt{gh}$, $F > 1$), ambas familias de características están inclinadas en la misma dirección (ver líneas de trazos en figura 13.4 anterior). Para este caso, las c.i se imponen de manera idéntica al caso anterior; mientras que las c.c, se imponen como sigue. En el extremo de aguas arriba, $x = 0$, ambas funciones deben tener valores conocidos, es decir

- (extremo de aguas arriba) $x=0$: $u(0, t) = u_0(t) \quad \text{y} \quad h(0, t) = h_0(t) \quad \text{para} \quad t \geq 0$;

mientras que en el extremo de aguas abajo, $x = L$, no se requiere c.c alguna, pues ‘no entra’ ninguna característica en el dominio de la solución.

Como se puede deducir, en el caso de las ecuaciones hiperbólicas, el conocimiento de la estructura de las características resulta fundamental para imponer correctamente las condiciones límite al problema y así asegurar su correcta formulación.

Lo que acaba de analizarse desde un punto de vista matemático, está directamente relacionado con la física del movimiento del flujo en lámina libre y sus condiciones de control. En régimen subcrítico, como el flujo se mueve más lentamente que las ondas, cualquier perturbación aguas abajo que las genere, hace que éstas remonten el flujo y que, por tanto, hidráulicamente, secciones de aguas arriba vean alterado su funcionamiento por algo ocurrido aguas abajo. Por eso se dice que, hay conexión hidráulica entre aguas arriba y aguas abajo y que lo que ocurre aguas abajo acaba imponiendo el comportamiento del flujo en régimen subcrítico. Se habla, por tanto, de que el régimen lento se controla desde aguas abajo. Por el contrario, como el régimen rápido se mueve a mayor velocidad que las ondas, éstas no pueden remontar el flujo. En este caso no hay comunicación hidráulica entre aguas arriba y aguas abajo, y por ello, se dice que el régimen rápido se controla desde aguas arriba. Esto implica físicamente que, en régimen lento la condición que lo controla está aguas abajo, y es coherente con que matemáticamente la cc a imponer deba imponerse en ese extremo; mientras que, en régimen rápido la condición que lo controla está aguas arriba y, por tanto, en coherencia, su cc debe estar también en ese extremo. Vemos pues como, a través de la estructura de las características hay una perfecta coherencia entre la física del problema y su formulación matemática.

Por analogía, se pueden formular requerimientos similares desde el punto de vista del esquema numérico de resolución. Así, numéricamente, el problema está bien definido si

- La solución numérica existe;
- La solución numérica es única; y
- La dependencia continua de la solución numérica respecto de las condiciones límite (conocidas o aproximadas).

Según Fletcher (1991) la definición correcta del problema numérico requiere no solo su correcta formulación (ecuaciones de gobierno –EDPs- y condiciones límite) sino también el correcto comportamiento del esquema numérico (estabilidad). Solo en tal caso, una solución aproximada del problema numérico estará cerca de la solución exacta del problema matemáticamente bien definido para la EDP o sistema de EPDs.

14. CASOS DE LABORATORIO. CONTRASTE NUMÉRICO-EXPERIMENTAL

Seleccionado el esquema numérico, y mejorado el modelo (sistema de ecuaciones), en este apartado se analiza su comportamiento comparando los resultados numéricos con los experimentales obtenidos a partir de los correspondientes ensayos de laboratorio realizados en el Laboratorio de Hidráulica y Obras Hidráulicas de la Universitat Politècnica de València.

El contraste numérico-experimental demuestra la importancia de modelar adecuadamente los distintos fenómenos físicos que intervienen en el proceso, así como la correcta imposición de las condiciones de contorno del problema.

14.1. CANAL CON CONTROL HIDRÁULICO POR CAMBIO DE ANCHURA HIDRODINÁMICO Y CAMBIO DE RÉGIMEN. CASO 0

En este primer caso, se considera la variación de anchura del canal, pero no se introducen pérdidas locales de energía en el modelo. Esto físicamente tiene sentido ya que, al ser la transición de anchura hidrodinámica, como se ha comentado, estas pérdidas de energía son muy pequeñas y, por tanto, se pueden despreciar.

El objetivo de este caso es evaluar la capacidad del modelo numérico para representar los cambios de régimen de flujo (hidráulico) desde régimen subcrítico o lento a régimen supercrítico o rápido y viceversa, incluyendo por tanto la presencia de resaltos hidráulicos. Para ello, se ha diseñado el experimento de laboratorio adecuado y se han tomado los datos necesarios para la caracterización de la lámina libre en el canal. Los ensayos se realizan en régimen permanente o estacionario.

El dispositivo experimental es un canal para flujo en lámina libre, de sección rectangular de 0.075 m de anchura y 0.15 m de altura de cajeros, en pendiente horizontal ($Z_b(x) = 0 \quad \forall x$), con 2.5 m de longitud. Los cajeros y la solera son de metacrilato. A este material le corresponde un coeficiente de rugosidad de Manning $n = 0.008$. En una zona intermedia de este canal de ensayos hidráulicos se ha creado un estrechamiento gradual en planta de la sección (figura 14.1.a), pasando de los 0.075 m de ancho a 0.05 m de anchura en la zona de garganta o máxima contracción. Esta anchura de 0.05 m se mantiene a lo largo de una longitud de 0.12 m. El dispositivo así diseñado, para la situación de ensayo que se detalla a continuación (caudal y condiciones de contorno fundamentalmente), hace que el estrechamiento se comporte como un control hidráulico, forzando el paso del régimen lento del flujo de aproximación desde aguas arriba a régimen rápido aguas abajo del estrechamiento, para posteriormente, y bajo la influencia de la condición de contorno de aguas abajo, en este extremo del canal, pasar de dicho régimen rápido al lento impuesto, con la aparición del correspondiente resalto hidráulico.

Las condiciones iniciales para las variables de calado y caudal específico son

$$h(x, 0) = 0.05 \text{ m} \quad \wedge \quad q(x, 0) = 0 \text{ m}^2/\text{s} \quad \forall x \in]0, 2.5[. \quad (14.1)$$

Numéricamente se consideran dos situaciones en relación a la condición de contorno de aguas arriba ($x = 0$). Esto se hace para evaluar la influencia del conocimiento del calado aguas arriba en el caso del régimen lento de aproximación. De esta forma, las condiciones de contorno comunes a los dos experimentos numéricos son

$$h(2.5, t) = 0.05 \text{ m} \quad \wedge \quad Q(0, t) = 1.638 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \quad \forall t, \quad (14.2)$$

donde, como puede apreciarse, la condición de caudal se ha dado en caudal total, ya que el específico q como caudal por unidad de ancho, cambia a lo largo del dispositivo experimental.

Los dos experimentos numéricos quedan pues definidos por la diferencia en la condición de contorno de aguas arriba. Así, en el primer caso (denominado Exp1) el calado aguas arriba, condición de contorno en $x = 0$, es el calado experimental, es decir, $h(0, t) = 0.072 \text{ m}$; mientras que en el segundo caso (Exp2), se impone un calado nulo, esto es, $h(0, t) = 0 \text{ m}$, forzando de esta manera ‘mucho la física del problema’. Las simulaciones numéricas se han realizado con una malla de $N_x = 400$ nodos y un valor de $CFL = 0.35$. En la figura 14.1, b y c, se presentan los resultados obtenidos en cuanto a la lámina libre, en el instante $t = 60 \text{ s}$ para los dos experimentos numéricos, Exp1 y Exp2, así como la lámina libre experimental medida en laboratorio mediante limnómetro de aguja con una precisión de 0.0001 m (décima de mm).

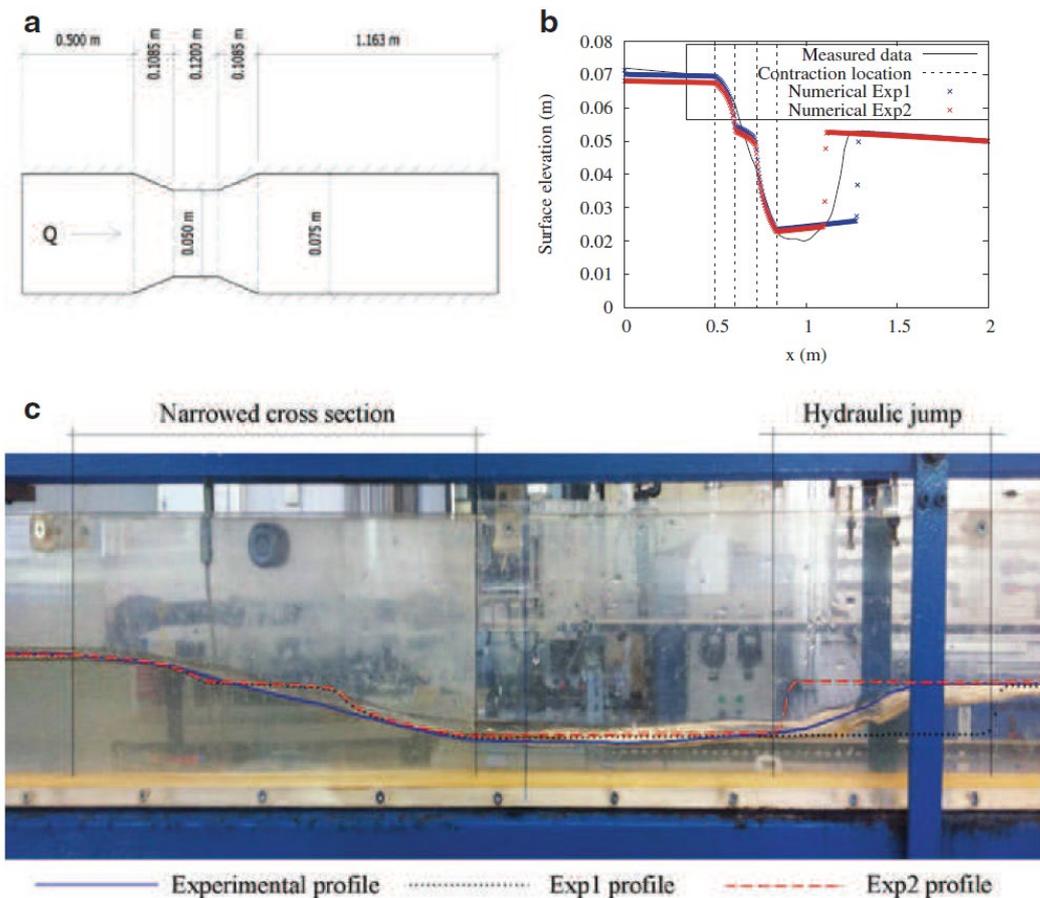


Figura 14.1. Caso 0: Canal con estrechamiento y control hidráulico. Soluciones numéricas (Exp1 y Exp2) y experimental (laboratorio) en $t=60 \text{ s}$. (a) Diseño experimental. Geometría en planta. (b) Perfiles de lámina libre. (c) Montaje de los perfiles de lámina libre numéricos sobre imagen de laboratorio. Fte.: [3].

Como puede observarse, ambos casos (Exp1 y Exp2) muestran comportamientos muy similares, con un buen ajuste general al perfil de lámina libre experimental, estando la principal diferencia entre ambos fundamentalmente en la localización del pie del resalto. A partir de la sección de máxima contracción (subtramo con sección de 0.05 m de ancho) los dos perfiles numéricos son prácticamente idénticos hasta el pie del resalto hidráulico (en el perfil experimental). Así, el cambio de régimen lento a régimen rápido en el estrechamiento está bien representado en ambos casos, obteniéndose valores de calados muy próximos a los experimentales. En el tramo de régimen lento de aguas arriba, el Exp1 se ajusta más, por su condición de contorno. No obstante, el perfil en Exp 2 arroja en esa zona un calado máximo de 0.068 m, apenas un 5.6 % por debajo del medido. En cuanto a los calados de aguas arriba y aguas abajo en el resalto hidráulico, calados conjugados, los resultados obtenidos en Exp2 coinciden con los experimentales, mientras que, los obtenidos con Exp1 difieren en menos de un 5%. Así mismo, Exp2 representa mejor el inicio del resalto, localizando perfectamente su pie. En el caso de Exp1, la localización del resalto coincide prácticamente con su final en el perfil experimental. Así pues, Exp1 localiza el resalto en lo que sería su pie, mientras que Exp2 lo hace coincidir con su final real (experimental). Hay que señalar en este sentido, que con el modelo considerado (SWE 1D), que no tiene en consideración el efecto de la turbulencia, la longitud del resalto propiamente dicha no se calcula. En cualquier caso, y desde un punto de vista práctico, es preferible localizar su pie que no su final. En este sentido, sería más deseable el comportamiento de Exp2. No obstante, en problemas reales de obtención de la lámina libre general en canales, normalmente se desprecia la longitud del resalto por ser ésta muy pequeña en relación a la longitud del canal. Esto no ocurre así en otro tipo de aplicaciones (p.e., en cuencos de resalto a pie de presa, donde precisamente la longitud de la obra es la del propio resalto).

Analizados pues estos resultados, podemos señalar que este modelo (ecuaciones con fricción y ancho variable) resuelto con el esquema numérico seleccionado, muestra un comportamiento adecuado a la hora de representar el funcionamiento hidráulico del flujo en el caso estudiado.

Cabe además señalar, que, a nuestro juicio, sería posible implementar en el modelo numérico alguna ecuación del campo de la hidráulica clásica de tal manera que, localizado el resalto, se calcule su longitud traduciendo ésta en un número adecuado de celdas de la malla, mejorando así la solución obtenida.

14.2. CANAL CON CAMBIO “GRADUAL” DE ANCHO Y PÉRDIDAS LOCALES DE ENERGÍA. CASOS 1 A 4

En este nuevo dispositivo experimental, canal de ensayos (distinto del anterior), se han diseñado dos tipos de ensayos, siempre materializando en el canal el mismo tramo interior para conseguir el estrechamiento del ancho del canal mediante la correspondiente contracción aguas arriba y la expansión aguas abajo. Los dos tipos de ensayos experimentales se han generado en base a cambios en las condiciones del flujo (hidráulico) es decir, con cambios básicamente en las condiciones de frontera matemáticamente hablando.

Los ensayos del primer tipo representan lo que se conoce como una *transición hidráulica* con régimen lento de aproximación; mientras que, los del segundo tipo, representan un *control hidráulico*, también con régimen lento de aproximación. El comportamiento como control, hace que en este segundo tipo de

ensayos se produzca un cambio de régimen, pasando de lento a rápido, previo paso por el crítico en el subtramo interior de sección más estrecha. Desde el punto de vista experimental, este segundo tipo de ensayos está conformado por un único ensayo, sin imponer en el extremo de aguas abajo del canal ninguna condición adicional, de manera que, una vez alcanzado el régimen rápido aguas abajo del estrechamiento, este régimen continúa hasta la desembocadura, con un lanzamiento al final del canal. Desde el punto de vista matemático, para este subtramo final en régimen rápido, no haría falta una condición de contorno aguas abajo, en el extremo final del canal, pues, físicamente, este tramo viene gobernado por el calado impuesto inmediatamente aguas abajo del estrechamiento-control, por el mismo control (así, cuando se resuelve la EDO correspondiente a este movimiento en régimen permanente, solo es necesaria la cc de aguas arriba). Para probar el comportamiento del esquema numérico propuesto frente a este último aspecto, este único caso experimental del segundo tipo de ensayos propuesto (control hidráulico), se convertirá en dos experimentos numéricos o casos, en definitiva, uno en el que no se impondrá la condición de contorno en la frontera de aguas abajo y otro en el que sí se hará.

El canal utilizado en estos ensayos es también un canal para flujo en lámina libre del Laboratorio de Hidráulica y Obras Hidráulicas de la UPV. Se trata ahora de un canal horizontal de 2.5 m de longitud, en sección rectangular de 0.1 m de anchura, con solera de PVC (fija y plana) y cajeros de metacrilato. El funcionamiento es en circuito hidráulico cerrado con una bomba hidráulica que impulsa el agua desde un depósito en la parte inferior, mediante una tubería de impulsión hasta pasar a lámina libre en el depósito de cabecera que alimenta directamente el canal por su extremo de aguas arriba. Se dispone del equipamiento y la instrumentación necesaria para la medición de las variables hidráulicas de interés, principalmente en nuestro caso, caudales de ensayo y calados o perfil de la lámina libre. Para la medición de caudales se dispone de contador y de caudalímetro de pulsos electromagnéticos, mientras que, para la medición de la lámina libre se utiliza un limnómetro digital calibrado, con una precisión de 10^{-2} mm. La zona de ensayo en el interior del canal, ocupa una longitud total de 1.8 m.

Para materializar el estrechamiento, se ha colocado, por la cara interior de los cajeros, en la zona de interés, unas placas de metacrilato de 0.02 m de espesor. La longitud de estas placas en la dirección del canal es de 0.05 m. Se debe señalar, que, si bien estas placas tienen sus aristas mojadas ligeramente biseladas, en sentido estricto, el estrechamiento más que gradual debiera considerarse brusco. Este hecho tendrá su principal reflejo en el perfil de la lámina libre experimental. El canal de ensayos descrito, así como el diseño geométrico experimental puede observarse en la figura 14.2.

Dadas las consideraciones realizadas en 13.6 respecto del modelo matemático y sus limitaciones en cuanto a la función $B(x)$ y su derivabilidad, hubiera sido deseable que el diseño geométrico experimental generara el estrechamiento con ciertas transiciones lineales previa y posterior, es decir, no cambiando de ancho de forma 'repentina'. En cualquier caso, estos son los experimentos de los que se disponía. Por ello, y para poder aproximar la derivada de la función $B(x)$ como el promedio de las derivadas por la derecha y por la izquierda, en el modelo numérico sí se han considerado esas dos transiciones de cajero alrededor (aguas arriba y aguas abajo) de las placas que físicamente generan el estrechamiento. La primera transición empieza en $x = 0.76$ m y termina en el inicio del estrechamiento, es decir, en $x = 0.775$ m, tiene por tanto, una longitud (de estrechamiento) de 0.015 m. La segunda, comienza donde termina el estrechamiento ($x = 0.825$ m) y acaba en $x = 0.84$ m, con una longitud, ahora de

ensanchamiento, también de 0.015m . Este tipo de transición la llamaremos, en el contexto de este epígrafe, 4:3, pues dicha proporción coincide con la relación entre el espesor de la placa ($0:02\text{ m}$) y la longitud de la transición ($0:015\text{ m}$). Dado que, en el canal experimental, como se ha dicho, no existe dicha transición, efectuaremos la comparativa numérico-experimental considerando distintos tipos de transiciones en el modelo matemático en el que, sin embargo, sí se introducen en la formulación de las pérdidas locales de energía los coeficientes correspondientes a un estrechamiento y a un ensanchamiento brusco, como el que realmente se ensaya en laboratorio. De esta forma, también usaremos la transición 1:2, que tendrá una longitud a cada lado del estrechamiento igual a 0.04 m .

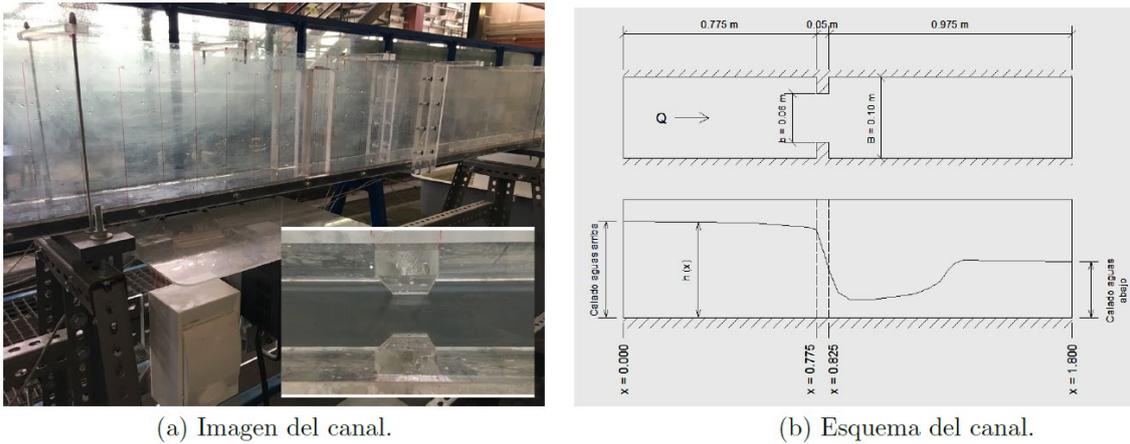


Figura 14.2. Canal experimental Casos 1 a 4. (a) Imagen del canal y detalle del estrechamiento. (b) Croquis acotado de la geometría experimental; planta (superior) y alzado (inferior).

En la tabla 14.1 siguiente se recogen los distintos casos de ensayo. Dado que el canal y la geometría del estrechamiento en él es la misma para los cuatro casos, lo que los distingue son las condiciones de caudal y calados impuestos, es decir, las condiciones de contorno e iniciales. Insistimos en que desde el punto de vista físico solamente son tres los casos, pues el caso C3 y el C4 son el mismo desde el punto de vista experimental. Desde el punto de vista numérico, difieren en que en C3 no se ha considerado condición de contorno alguna aguas abajo, por las razones comentadas, mientras que en C4 sí se ha considerado una condición de contorno de calado (el medido experimentalmente) para probar la bondad del comportamiento del modelo numérico.

Tipo	Caso	cc de aguas arriba ($x=0; t$)		cc de aguas abajo ($x=1.8; t$)		ci ($x; t=0$)		Estrech.
		q (m^2/s)	h (m)	q (m^2/s)	h (m)	q (m^2/s)	h (m)	
Transición	C1	1.569E-02			0.08412	1.569E-02	0.08412	0.0412
	C2	2.435E-02			0.09522	2.435E-02	0.09522	0.0552
Control	C3	1.569E-02	0.06078			1.569E-02	0.04236	0.0412
	C4	1.569E-02	0.06078		0.02394	1.569E-02	0.04236	0.0412

Tabla 14.1. Casos de ensayo. Leyenda: cc, condición de contorno; ci, condición inicial; y_{ce} , calado crítico en el estrechamiento (Estrech.).

En cuanto al perfil de la lámina libre, se han tomado con carácter general puntos equiespaciados aumentando la densidad de los mismos en la zona del estrechamiento. Donde se ha observado cierta

variabilidad transversal de la lámina libre en el canal¹⁷, se ha tomado, en el caso de esas secciones, al menos tres puntos de calado (eje del canal y laterales) tomando como valor del calado en la sección la media de esos valores. Esto se ha hecho así para tener un único valor del calado como representativo de la altura de agua en la sección, para su comparación con el resultado de la simulación numérica, dado que el modelo es unidimensional. Para la toma de datos experimentales, se ha esperado el tiempo necesario hasta el establecimiento del régimen estacionario. De manera equivalente, para el modelo matemático, se tendrán en cuenta los resultados obtenidos en un periodo de tiempo lo suficientemente grande como para que se alcance la situación estacionaria. Las soluciones numéricas obtenidas se estabilizan a partir de un tiempo $t = 20$ s.

Las simulaciones numéricas se han realizado con una malla de $N_x = 1080$ nodos y un valor $CFL = 0.30$ (número de Courant). Éste se ha elegido como el máximo posible para asegurar la estabilidad del esquema. Como sabemos, el esquema utiliza un paso de tiempo variable (adaptativo) a partir de la igualdad (13.37) determinada por la condición de Courant-Friedrichs-Lewy o condición CFL. De esta forma, el esquema adopta un paso de tiempo variable que se adapta a la velocidad del flujo obtenida en cada paso de tiempo. El instante final considerado para la presentación de resultados ha sido $t = 20$ s.

Los principales resultados obtenidos en cuanto a calados y perfil de la lámina libre, se muestran en las figuras siguientes. Los resultados numéricos en cuanto a $q(x, t)$, no se muestran por no tener especial interés. Ya que, se trata de un régimen estacionario, luego en realidad $q(x, t) = q(x)$, y además, éste solamente varía aumentado en la zona del estrechamiento hasta el valor correspondiente al ancho en la garganta, es decir, al ancho de 0.06 m. Estas gráficas no aportan nada, y por ello, no se incluyen.

La figura 14.3 muestra la comparativa entre el perfil de lámina libre experimental (laboratorio) y los obtenidos a partir de las simulaciones numéricas con las dos transiciones implementadas para representar en el esquema numérico el cambio de ancho del canal de laboratorio.

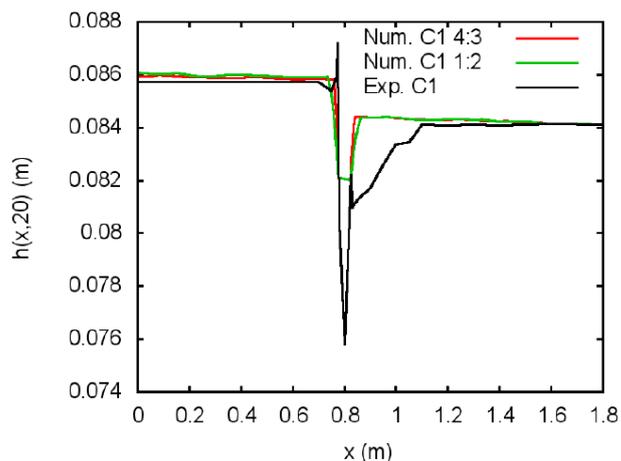


Figura 14.3. Caso C1. Comparativa numérico-experimental, según transiciones 4:3 y 1:2. Perfiles numéricos a $t=20$ s.

¹⁷ El hecho de que el estrechamiento, físicamente, sea más bien brusco, introduce patrones propios de un flujo 2D en incluso 3D y de ahí esa variabilidad espacial de la lámina libre y la necesidad de tomar más de un calado en sección transversal.

Como puede observarse, perfil experimental, la lámina libre desciende al producirse una aceleración del flujo a su paso por el estrechamiento. Esta aceleración provoca un aumento de la velocidad y, en consecuencia, una disminución de los calados. Esta es la descripción cualitativa de lo que físicamente ocurre y a lo que el modelo matemático, con el sistema (13.44) conduce, pues aquí, el papel de las pérdidas locales de energía es importante. Con ellas se explica el descenso de la lámina libre aguas abajo del estrechamiento respecto de la lámina libre aguas arriba del mismo. La disminución de calados que tiene lugar, una vez ya recuperado el ancho total de la sección, está directamente relacionada con la pérdida de energía del flujo entre ambas secciones (inmediatamente aguas arriba e inmediatamente aguas abajo del estrechamiento), y ésta tiene su componente fundamental en las pérdidas locales por el estrechamiento, pues las de fricción son sin duda pequeñas y muy inferiores, dada la escasa de distancia entre ambas secciones y el bajo valor del coeficiente de rugosidad de Manning en este caso, coherente con los materiales (muy pulidos) que conforman el canal de ensayos. Se puede afirmar que ambos perfiles numéricos, con las dos transiciones implementadas, reproducen bien en líneas generales el comportamiento descrito del flujo y el perfil general de la lámina libre, aunque con matices en el entorno local fundamentalmente, del estrechamiento. Lo calados aguas arriba, y, por tanto, la lámina libre, es simulada con suficiente aproximación (errores milimétricos), con mejores resultados en el caso del modelo numérico con transición 4:3, como cabía esperar, pues está más próxima a la realidad experimental. Aguas abajo y a cierta distancia de la zona del estrechamiento, ocurre lo mismo, los perfiles de lámina libre observado y simulados, se ajustan con bastante aproximación. Las principales discrepancias entre las simulaciones numéricas y el perfil experimental, se encuentran en el propio estrechamiento y en sus secciones inmediatamente aguas abajo, y se deben, a nuestro juicio, a la aparición de patrones de flujo 2D e incluso 3D por la forma de la contracción, al ser ésta bastante brusca o poco gradual, como ya ha sido comentado. Este hecho escapa a la capacidad del propio modelo hidráulico al ser éste un modelo unidimensional. No es por tanto una cuestión que pueda achacarse al esquema numérico de resolución en ningún caso. No obstante, la disminución de la lámina libre en la zona estrecha recogida en las simulaciones numéricas es muy inferior a la experimental.

Para ilustrar la importancia de la consideración, con sentido físico, de las pérdidas locales de energía en un caso como el que nos ocupa, se incluyen en la figura 14.4 siguiente los resultados obtenidos, para este caso, en función de los valores asignados a la función $\lambda(x)$.

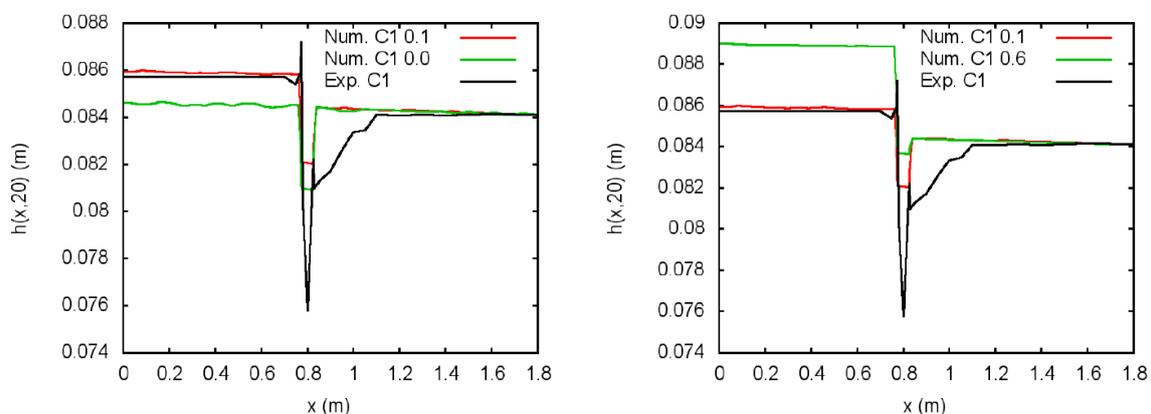


Figura 14.4. Caso C1. Comparativa numérico-experimental, según los valores asignados a la función $\lambda(x)$. Perfiles numéricos a $t=20s$.

De ella cabe extraer dos importantes conclusiones. Si no se tienen en cuenta las pérdidas locales ($\lambda(x) = 0, \forall x$), el modelo es incapaz de reproducir el perfil general de la lámina libre, no representando el aumento de calados aguas arriba del estrechamiento respecto de los de aguas abajo del mismo (figura 14.4 izda, perfil verde). Con los valores adecuados (figura 14.4 izda, perfil rojo), este fenómeno se reproduce perfectamente. La segunda conclusión iría en el sentido de que, si estos valores de $\lambda(x)$ – coeficientes de pérdidas locales- son excesivos (y por tanto carentes de sentido físico), el modelo reproduce una lámina libre exageradamente elevada en el tramo de canal de aguas arriba del estrechamiento, que nada tiene que ver con la realidad observada (figura 14.4 dcha, perfil verde).

En la figura 14.5, se muestran los resultados obtenidos para los casos C2, C3 y C4. En cuanto a los resultados para el caso C2, son directamente trasladables todos los comentarios hechos para el caso C1, como por otra parte cabía esperar ya que, se trata de casos del mismo tipo (transiciones hidráulicas). Observamos nuevamente como en la simulación que considera las pérdidas locales de energía, el perfil general simulado se ajusta bastante al experimental, representando adecuadamente el descenso (de aguas arriba a aguas abajo) generado por el estrechamiento, si bien, como en el caso anterior, dentro del propio estrechamiento y en sus inmediaciones, el modelo no recoge bien el detalle de la lámina libre. Eso es debido como se ha comentado, a efectos de patrones de flujo 2D y 3D que no pueden ser considerados en un modelo unidimensional. No obstante, el descenso de calados simulado en el interior del estrechamiento está más próximo al medido en laboratorio. Al modelo sin pérdidas locales, le ocurre lo mismo que en el caso anterior.

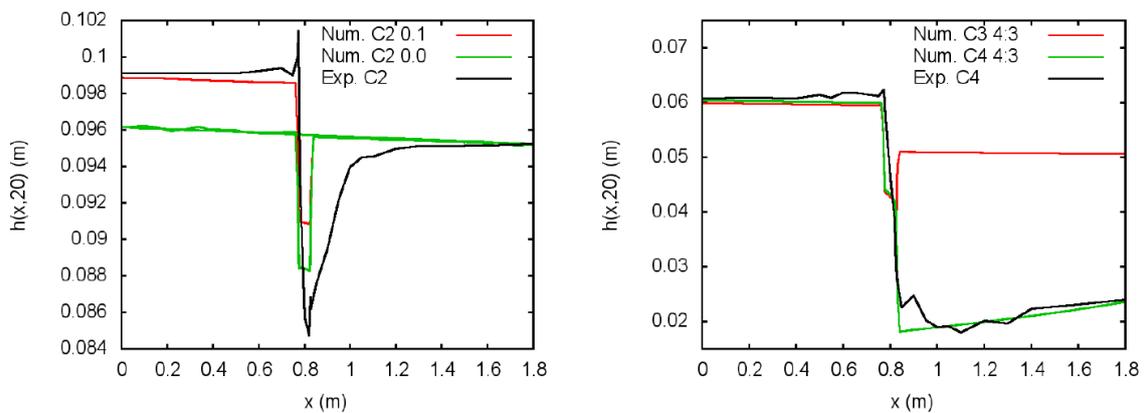


Figura 14.5. Casos C2, C3 y C4. Comparativa numérico-experimental. (Izda.) Caso C2, perfiles numéricos de la lámina libre según los valores asignados a la función $\lambda(x)$. (Dcha.) Casos (numéricos) C3 y C4, con transición 4:3, perfiles numéricos de la lámina libre. En todos los casos, perfiles numéricos a $t=20$ s.

En los casos C3 y C4, que como sabemos, desde el punto de vista experimental constituyen un único caso, lo que se tiene es un control hidráulico ejercido por el propio estrechamiento, pasando del régimen subcrítico del tramo de aguas arriba, por el crítico en el estrechamiento, al régimen supercrítico del tramo de aguas abajo. Eso es exactamente lo que se observa en el perfil experimental de la figura 14.5 derecha. La simulación numérica solo resulta conceptualmente correcta, y en ese caso, con un perfil medio general muy ajustado al experimental, en el caso C4, es decir, en la simulación numérica para la que se ha impuesto una condición de contorno de aguas abajo igual al valor experimental (calado medido en esa sección). Si esta condición no se fija, caso C3, el perfil simulado no representa el observado. De hecho,

está reproduciendo otro tipo de comportamiento hidráulico en el que, tras el paso a régimen rápido de aguas abajo, mediante un resalto hidráulico (onda de choque), se produce un nuevo cambio de régimen a régimen lento (esto es lo que ocurría en el Caso 0, pero aquí no es lo que se observa).

EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS EN EL ANÁLISIS DEL FLUJO EN LÁMINA LIBRE.
APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VÉNANT

PARTE 4. CONCLUSIÓN

15. CONCLUSIÓN

El trabajo aborda la aplicación concreta del método de volúmenes finitos en un ámbito muy específico como es el del análisis del flujo en lámina libre. Sin embargo, hasta llegar a ese nivel de concreción, se hace un planteamiento integral del tema, de la manera más auto-contenida posible, presentando el origen del método, sus primeros desarrollos en el ámbito fundamentalmente de la Dinámica de Fluidos (mucho más extenso que el flujo en lámina libre), la formalización matemática del mismo y ya, finalmente, tras la formulación de las ecuaciones de interés, y la composición del conocido como sistema de ecuaciones de Saint-Venant o modelo de SWE (por sus siglas en inglés), aplicándolo al caso concreto de estudio. Para ello, se prueba, además, dos esquemas numéricos y se analiza la bondad de su comportamiento en casos test. Finalmente se elige uno de ellos, en este caso el esquema de tipo centrado no oscilatorio de alto orden, para su contraste numérico-experimental con casos de laboratorio que responden, por fases, sucesivamente, a las implementaciones realizadas en el sistema de ecuaciones inicialmente presentado. Se aborda de esta forma en primera instancia el contraste con un caso en el que se ha permitido la variación de anchura del canal para pasar seguidamente, al caso en el que la relevancia de las pérdidas locales de energía es importante. En estos casos, además, se analiza toda una casuística variada en cuanto a cambios de régimen del flujo.

Se puede concluir que el modelo matemático finalmente presentado es capaz de simular el movimiento en lámina libre no permanente de aguas someras y su paso por un estrechamiento, ya tenga éste lugar con pérdidas de energía locales importantes o no. Como se ha comentado en el párrafo anterior, la formulación matemática se ha verificado comparando las simulaciones numéricas con los resultados obtenidos en experimentos de laboratorio analizando un total de cinco casos, cuatro de ellos implementando el tema de las pérdidas locales de energía, con dos tipos de comportamiento del flujo, transición y control hidráulicos. Los resultados obtenidos muestran la importancia de la adecuada elección de los términos que intervienen en el modelo matemático y las ventajas de la comparación con ensayos de laboratorio para controlar el grado de precisión del mismo en casos prácticos.

En los aspectos concretos del caso de estudio analizado, en el sentido amplio de la denominación, la comparativa efectuada permite concluir que el modelo matemático representa bien tanto el cambio de régimen lento a rápido alrededor del estrechamiento, como el contrario, con la aparición del conocido fenómeno del resalto hidráulico, si bien, éste simplemente se localiza, pues un modelo de estas características no puede reproducir su extensión. No obstante, en el primero de los casos, cambio de régimen lento aguas arriba a régimen rápido aguas abajo debido a un control hidráulico por estrechamiento, el modelo reproduce bien la disminución de calado y el descenso de la lámina libre hacia aguas abajo observado en laboratorio, si se le imponen condiciones de contorno fijas para el calado en los dos extremos del canal, en este caso aguas abajo, lo que no tendría que ser necesario, teóricamente, en este caso. Probablemente, esto no ocurra con un esquema tipo upwind. Esto se analizará más adelante y por ello se propone como la primera de las líneas futuras que a continuación se detallan.

16. LÍNEAS FUTURAS

Como principales líneas futuras de investigación, por orden de inmediatez y/o cronológico de desarrollo, planteamos, las siguientes:

- a. Investigar el uso de otras aproximaciones para los flujos numéricos y su promediado en el esquema tipo upwind-WENO que minimicen la difusión numérica observada en los ejemplos resueltos y que permitan su aplicación a otros ejemplos de interés real. La conexión de este tipo de esquemas, con la naturaleza física del comportamiento del flujo en lámina libre, lo convierte en una metodología de indudable interés, de ahí la profundización en su estudio.
- b. Incluir la fase sólida en el conjunto de ecuaciones. Es decir, incluir en el Sistema de Ecuaciones de Saint-Venant la ecuación de continuidad del sedimento o ecuación de Exner y utilizar las correspondientes ecuaciones de transporte de sedimentos como carga de lecho para poder simular el caudal sólido (transporte de sedimentos) y así pasar de un modelo 1D de contornos fijos (conocido como modelo de lecho fijo) a un modelo 1D de lecho móvil.
- c. Siguiendo con esta evolución del modelo matemático, implementar los cambios necesarios en el mismo para poder abordar el problema del flujo a través de puentes fluviales con losa de protección en el lecho.
- d. Una vez el modelo (ecuaciones y esquema numérico) esté listo, con las implementaciones y capacidades anteriores, el objetivo sería el salto a un modelo 2D. Solo así, por ejemplo, se podría resolver adecuadamente, desde el punto de vista de su aplicabilidad real, el problema que plantea c.
- e. A nivel de investigación teórica y ya en un estadio más avanzado (resuelto lo anterior), nos planteamos introducir técnicas de Inteligencia Artificial en los modelos (técnicas de Machine Learning, p.e.) e incluso plantear el tema de Gemelos Digitales para casos reales de relevante interés práctico, como, por ejemplo, el mencionado de los puentes sobre cauces, sobre todo para el caso de las grandes infraestructuras viarias (autovías, autopistas o puente de líneas ferroviarias de alta velocidad).

17. BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- [1]. Baeza Manzanares, A. (2010). Adaptive mesh refinement techniques for high order shock capturing schemes for hyperbolic systems of conservation laws. PhD thesis, Universitat de València.
- [2]. Balaguer-Beser A., Capilla M. T., Nácher-Rodríguez B., Vallés-Morén F. J., Andrés-Doménech I. (2013). Un esquema centrado de alto orden que resuelve el problema del transporte de sedimentos en canales con geometría irregular. Actas XXIII CEDYA, XIII CMA, pp. 479-487.
- [3]. Balaguer-Beser A., Capilla M. T., Nácher-Rodríguez B., Vallés-Morén F. J., Andrés-Doménech I. (2014). A high-order well-balanced central scheme for the shallow water equations in channels with irregular geometry. In Advances in Differential Equations and Applications, F. Casas, V. Martínez (eds.). SEMA SIMAI Springer Series Vol. 4, 229-237, DOI 10.1007/978-3-319-06953-01.
- [4]. Balaguer A.; Conde C. (2005). Fourth-order non-oscillatory upwind and central schemes for hyperbolic conservation laws. SIAM J Numer Anal 2005; 43(2):455-73.
- [5]. Balsara, D.S.; Shu, ChW. (2000). Monotonicity preserving weighted essentially nonoscillatory schemes with increasingly high order of accuracy. J. Comp. Phys Vol. 21(1), pp. 405-452.
- [6]. Barré de Saint-Venant, A. J. C. (1848). Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes. París.
- [7]. Barré de Saint-Venant, A. J. C. (1871). Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lits. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, vol. 73, pp. 147-154 et 237-240.
- [8]. Bianco, F.; Puppo, G.; Russo, G. (1999). High-order central schemes for hyperbolic systems of conservation laws. SIAM J. Sci. Comput. Vol. 21(1), pp. 294-322.
- [9]. Bokhove, O. (2005). Flooding and drying in discontinuous Galerkin finite-element discretizations of shallow-water equations. Part 1: One dimension. J. Sci. Comput. Vol. 22, pp. 47-82.
- [10]. Brufau, P.; García-Navarro, P. (2000). Esquemas de alta resolución para resolver las ecuaciones de "shallow water". Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, Vol. 16, núm. 4. <http://hdl.handle.net/2099/4657>. ISSN1886-158X.
- [11]. Caleffi, V.; Valiani, A.; Bernini, A. (2006). Fourth-order balanced source term treatment in central WENO schemes for shallow water equations. J. Comput. Phys. Vol. 218, pp. 228-245.
- [12]. Caleffi, V.; Valiani, A.; Bernini, A. (2007). High-order balanced CWENO scheme for movable bed shallow water equations. Adv. in Water Resources, 30, 730-741.
- [13]. Capilla, M.T.; Balaguer-Beser, A. (2012). A well-balanced high-resolution shapepreserving central scheme to solve one-dimensional sediment transport equations. Adv. Eng. Softw. Vol. 50, pp. 19-28.
- [14]. Capilla, M.T.; Balaguer-Beser, A., Hidalgo, A., Gascón, Ll. (2013). Esquemas upwind y centrados de alto orden bien equilibrados que resuelven las ecuaciones de aguas someras. Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. 25-28 junio, Bilbao, España. ©SEMNI, 2013.
- [15]. Chanson H (2004). The hydraulics of open channel flow: An introduction. 2nd edn. Elsevier, Oxford.

- [16]. Chow, V.T. (1959). *Open Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, New York.
- [17]. Courant, R.; Friedrichs, K.; Lewy, H. (1928). On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. *Mathematische Annalen* 100, 32-74.
- [18]. Delestre, O.; Lucas, C.; Ksinant, P. A.; Darboux, F.; Laguerre, C.; Tuoi, T.N.; Vo, F.J.; James, F.; Cordier, S. (2013). SWASHES: a compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 72, 269–300.
- [19]. Fletcher, CAJ. (1991). *Computational techniques for fluid dynamics*, vol. I. Springer-Verlag, Berlin.
- [20]. Gascón, Ll., Corberán, J.M. (2001). Construction of second-order TVD schemes for nonhomogeneous hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Phys.* Vol. 172, pp. 261-297.
- [21]. Godunov, S. K. (1959). A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. Application to the 1D-2D shallow water equations. *Mat. Sb. (N.S.)*. Volume 47(89), Number 3 (1959), 271-306.
- [22]. Harten, A. (1983). High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, Volume 49, Issue 3, Pages 357-393. ISSN 0021-9991. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5).
- [23]. Henderson, F.M. (1966). *Open Channel Flow*. MacMillan, New York.
- [24]. Hidalgo, A.; Balaguer-Beser, A.; Gascón, Ll. (2011). Numerical solution of problems based on shallow water and St. Venant models”, *Actas SCARCE 2nd annual conference*, Madrid, Spain.
- [25]. Hidalgo, A.; Tello, L. (2011). A Finite Volume Scheme for simulating the coupling between deep ocean and an atmospheric energy balance model. In: *Modern Mathematical Tools and Techniques in Capturing Complexity*. Springer, Berlin, pp. 239-255.
- [26]. Kermani, M.J.; Gerber, A.G.; Stockie, J.M. (2003). Thermodynamically Based Moisture Prediction Using Roe's Scheme. 4th Conference of Iranian AeroSpace Society, Amir Kabir University of Technology, Tehran, Iran, January 27–29.
- [27]. MacCormack, R.W.; Paullay, A.J. (1972). Computational Efficiency Achieved by Time Splitting of Finite Difference Operators. *AIAA Paper*, (72-154).
- [28]. McDonald, P.W. (1971). The Computation of Transonic Flow through Two-Dimensional Gas Turbine Cascades. *ASME Paper*, (71-GT-89).
- [29]. Mishra, S. (2013). Numerical methods for conservation laws and related equations. *Lecture Notes*. ETH Zurich. https://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/math/nhdgl/numcl_notes_HOMEPAGE.pdf
- [30]. Muñoz Gutiérrez, A. (2020). Métodos numéricos de alto orden para un modelo de cromatografía. <http://hdl.handle.net/10251/150996>
- [31]. Randall J. LeVeque. (1992). *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser.
- [32]. Shu, CW.; Osher, S. (1988). Efficient implementation of essentially non-oscillatory shockcapturing schemes. *J. Comput. Phys.* Vol. 77, pp. 439-471.
- [33]. Szymkiewicz, R. (2010). *Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics*. Water Science and Technology Library (WSTL, volume 83). Springer.
- [34]. Titarev, V.; Toro, E.F. (2004). Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws. *J. Comp. Phys.* Vol. 201, pp. 238-260, (2004).

- [35]. Toro, E. F. (2001). Shock-capturing methods for free surface shallow flows. John Wiley & Sons.
- [36]. Toro, E. F.; Hidalgo, A.; Dumbser, M. (2009). FORCE schemes on unstructured meshes I: Conservative hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, Volume 228, Issue 9, Pages 3368-3389. ISSN 0021-9991. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.01.025>.
- [37]. Vázquez-Cendón, M. E. (1999). Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry. *J. Comp. Phys.* 148, 497–526.

APÉNDICE. Teorema de Gauss o de la divergencia

El **teorema de Gauss**, también conocido como teorema de la divergencia o teorema de Gauss-Ostrogradski, es un resultado fundamental en cálculo vectorial.

De manera sintética e informal, en cálculo vectorial, el teorema de la divergencia relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la divergencia del campo en el volumen delimitado por dicha superficie cerrada.

Teorema de Gauss o de la divergencia: Sea U una región acotada por una superficie cerrada S , con $S = \partial U$. Si \mathbf{F} es un campo vectorial continuamente diferenciable en un entorno de U , entonces

$$\iint_S \mathbf{F} ds = \iiint_U \nabla \mathbf{F} dV$$

O, alternativamente

$$\iint_S \mathbf{F} \hat{\mathbf{n}} ds = \iiint_U \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV$$

Es decir, este teorema establece que la integral de superficie de un campo vectorial \mathbf{F} sobre una superficie cerrada S es igual a la integral de volumen de la divergencia de \mathbf{F} sobre la región U contenida o encerrada por la superficie cerrada S .

Este teorema constituye un resultado importante en Física e Ingeniería, en especial en los campos de la Electricidad y de la Mecánica de Fluidos. En estos campos, normalmente se utiliza el teorema en tres dimensiones. Sin embargo, puede generalizarse a cualquier número de dimensiones.

