



Escuela Técnica Superior

Ingenieros de Telecomunicación

Memoria

Aceleración de las integrales del método
de acoplo modal sobre contorno
rectangular para la caracterización
eficiente de postes circulares
dieléctricos dentro de una guía de ondas
rectangular

Autor:

Elena Bernal Mor

Director:

Héctor Esteban González
Carmen Bachiller Martín

Valencia

Octubre 2006

Índice

1. Introducción.....	2
1.1. Acoplo modal guía-espacio abierto.....	4
1.2. Metodología.....	5
2. Objetivo.....	7
3. Cálculos y discusión de resultados	
3.1. Análisis y desarrollo del problema guía-espacio abierto	
3.1.1. Matriz de dispersión generalizada.....	8
3.1.2. Acoplo modal guía-espacio abierto.....	10
3.2. Resolución de integrales	
3.2.1. Introducción.....	19
3.2.2. Integral A_{mn}	21
3.2.3. Integral B_{mn}	35
3.2.4. Integral G_{mn}	40
3.2.5. Integral H_{mn}	50
3.3. Análisis de resultados y comparación con la solución numérica	
3.3.1. Introducción.....	53
3.3.2. Matriz A_{mn}	54
3.3.3. Matriz B_{mn}	66
3.3.4. Matriz G_{mn}	67
3.3.5. Matriz H_{mn}	70
3.3.6. Matriz S	71
4. Conclusiones.....	73
5. Referencias.....	74

1. Introducción

Los satélites de comunicaciones, desde sus inicios en la década de los 60, han constituido el soporte de muy diversas aplicaciones de telecomunicación. Gracias a sus propiedades de cobertura global, con el paso de los años han dado soporte a muchas aplicaciones, como por ejemplo, la difusión de señales de radio y televisión, observación remota de la Tierra, radionavegación y comunicaciones móviles. En el futuro más inmediato estos satélites soportarán (total o parcialmente) las redes de transporte de los nuevos servicios multimedia.

Los mayores requerimientos de los sucesivos servicios prestados por los satélites de telecomunicación, básicamente calidad de servicio y contenidos, ha supuesto a su vez un aumento constante de las frecuencias de operación. Así pues, si los primeros satélites de comunicación fija operaban a bajas frecuencias (6/4 GHz y 8/7 GHz), los más modernos ya se encuentran prestando servicios de banda ancha a frecuencias más altas (14/12 GHz), y es de esperar en los próximos años un salto a la banda de frecuencias de 30/50 GHz.

Los filtros de microondas poseen una gran importancia debido a que también se emplean en diversas aplicaciones de las telecomunicaciones, tales como sistemas de acceso inalámbrico (WLL (*Wireless Local Loop*), LMDS (*Local Multipoint Distribution System*), y MVDS (*Multipoint Video Distribution System*)), sistemas de comunicaciones móviles (GSM (*Global System for Mobile Communications*) y UMTS (*Universal Mobile Telecommunication System*)) y sistemas de comunicaciones vía satélite.

Las primeras aplicaciones utilizaban filtros en tecnología guiada convencionales, con toda su estructura metálica, pero éstos han empezado a ser remplazados por filtros en tecnología guiada con resonadores dieléctricos. Esto es debido a que el uso de resonadores dieléctricos permite reducir la masa y el volumen de los filtros (alrededor de un 50%) y además proporciona mayor estabilidad térmica en aplicaciones de alta potencia. Sin embargo, modelar este tipo de filtros es mucho más complicado que modelar los filtros convencionales ya que en su geometría aparecen estructuras circulares y rectangulares. Obtener una herramienta de diseño automatizada (CAD) exacta y eficiente para este tipo de filtros resulta más complicado y actualmente es objeto de estudio.

Hasta el momento varias herramientas comerciales informáticas basadas en métodos numéricos permiten llevar a cabo el análisis de este tipo de estructuras, pero requieren de un tiempo de computación muy elevado.

Los métodos existentes para el análisis de los dispositivos de microondas pueden clasificarse en tres grandes grupos: Métodos analíticos, Métodos numéricos y Métodos híbridos.

Los métodos analíticos, también denominados modales, proporcionan resultados muy exactos y de una forma eficiente desde el punto de vista computacional. No obstante, presentan la desventaja de que son sólo aplicables a unos pocos problemas canónicos con geometrías regulares. Los métodos numéricos, o de discretización espacial son capaces de analizar problemas con geometrías arbitrarias, pero su

desventaja es el elevado consumo de memoria y de tiempo de CPU. Como alternativa tanto a los métodos analíticos como a los numéricos, nacieron los métodos híbridos que intentaban sacar partido de las ventajas de los dos grupos anteriores. Aunque su eficiencia es mayor que la de los métodos numéricos, dichos métodos híbridos todavía resultan demasiado lentos para analizar una estructura tan compleja como un filtro con resonadores dieléctricos. Parece claro que ninguno de los tres tipos de métodos existentes es capaz por sí solo de analizar filtros con resonadores dieléctricos de forma suficientemente eficiente.

Se ha intentado adaptar la estrategia de diseño para filtros convencionales [1], obteniéndose algoritmos robustos y rápidos, pero al ser el acoplo entre modos mucho mayor en los filtros con resonadores no se converge al resultado con la exactitud deseada. Se ha estudiado otro método de diseño robusto y eficiente pero el tiempo de cálculo que se requiere es elevado [2].

De entre todos los tipos de filtros se ha optado por estudiar los de plano H con postes circulares dieléctricos ya que son fáciles de fabricar y soportan mayores potencias, véase Fig.1.

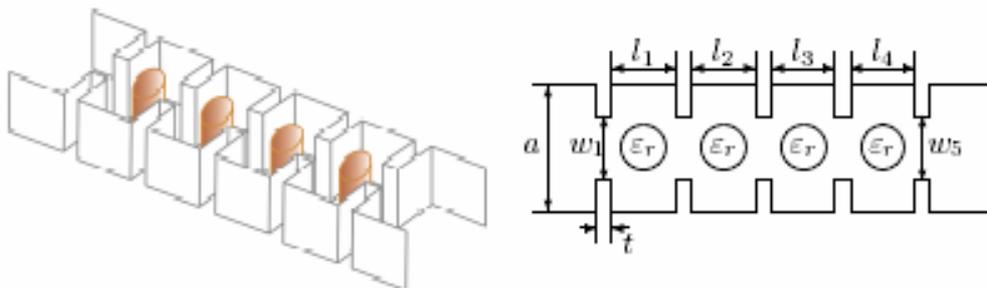


Fig.1

Como solución al problema que se plantea, se ha pensado seguir la siguiente estrategia de segmentación para analizar este tipo de estructuras, consistente en dividir el filtro con dieléctricos en varios bloques constitutivos fig.2: discontinuidades entre guías de distintas anchuras y postes dieléctricos que actúan como resonadores. Utilizando un método modal muy eficiente se pueden obtener las matrices de admitancias generalizadas de las discontinuidades en cuestión, pues se trata de estructuras canónicas. Y por otro lado se estudia un modo para obtener las matrices de dispersión generalizadas de los postes dieléctricos. Enlazando las matrices generalizadas de los distintos bloques constitutivos se puede conseguir de forma muy eficiente la respuesta eléctrica del filtro en su conjunto.

Con este proyecto se intenta encontrar un método eficiente y rápido de cálculo de las matrices de dispersión generalizada en la sección donde se encuentran los postes dieléctricos.

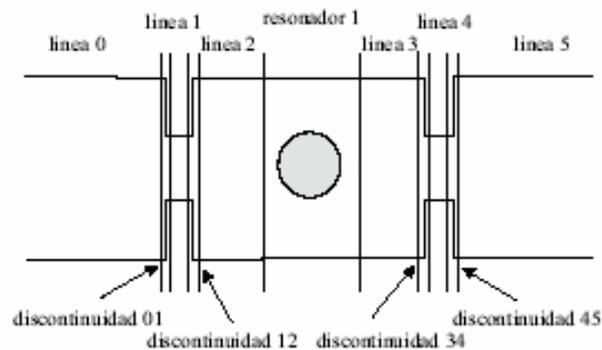


Fig. 2.

1.1. Acoplo modal Guía-Espacio abierto

Dada la geometría de la sección del filtro que se está analizando, nos enfrentamos a un problema inductivo, es decir, la geometría de la guía es invariante en altura. Cuando una guía rectangular con geometría inductiva es atacada por modos TE_{m0} tan solo se excitan modos del mismo tipo.

Se puede pensar en resolver el problema mediante acoplo de modos y así obtener la matriz de dispersión generalizada (MDG) correspondiente. La MDG relaciona amplitudes de ondas progresivas y regresivas teniendo en cuenta el modo fundamental de la guía y tantos modos de orden superior como sea necesario para caracterizar el segmento.

Para resolver el problema mediante acoplo de modos, en el tramo de guía irregular (en la que se encuentra el resonador dieléctrico) se emplea una formulación de espacio abierto y se expresan los campos eléctricos incidente y dispersado como sumas de modos cilíndricos. Estos sumatorios deben truncarse de manera que el número de términos que se tienen en cuenta (modos cilíndricos) sea lo suficientemente elevado para reconstruir correctamente los campos. De esta forma se calcula la matriz de dispersión D , que relaciona el espectro de campo cilíndrico incidente y el espectro de campo cilíndrico dispersado. Así, el tramo de guía irregular queda totalmente caracterizado.

Para caracterizar el segmento desde el punto de vista de modos guiados se realiza un acoplo de modos de una guía rectangular estándar a modos cilíndricos. Esto se hace forzando continuidad de campos eléctrico y magnético en un contorno que encierre el segmento irregular.

La tesis realizada por el Dr. Héctor Esteban González [3] analiza, entre otras cosas, guías rectangulares con postes dieléctricos de sección arbitraria mediante el uso de matrices de dispersión generalizadas. Para resolver este acoplo modal relaciona el espectro de campo incidente con las amplitudes de los modos guiados progresivos y regresivos forzando continuidad de campo eléctrico en la circunferencia que encierra el

segmento irregular. Forzando continuidad de campo magnético en dicha circunferencia se pueden despejar las amplitudes de los modos guiados regresivos en función de los progresivos y obtener así la MDG.

Esta forma de resolver el acoplo modal funciona bien en la mayoría de los casos, pero no es así si los planos de referencia están muy próximos al objeto, en nuestro caso al resonador dieléctrico. Puesto que en nuestro proyecto los planos de referencia están próximos al resonador debemos encontrar otra forma de resolver el acoplo modal.

1.2. Metodología

Para realizar el nuevo acoplo modal, suponiendo que sólo hay un objeto dispersor en el centro de la guía con una matriz de dispersión D diagonal y sólo dos accesos guiados iguales, se puede pensar en realizar el acoplo en un contorno circular o en un contorno rectangular.

En cuanto a resolver el acoplo modal en un contorno circular Fig. 3. Dentro del contorno se emplea la formulación de espacio abierto y se expresan los campos eléctricos incidente y dispersado como sumas de modos cilíndricos. Fuera del contorno se trata el problema desde el punto de vista de modos guiados. A continuación se fuerza continuidad de campo eléctrico y magnético en todo el contorno circular.

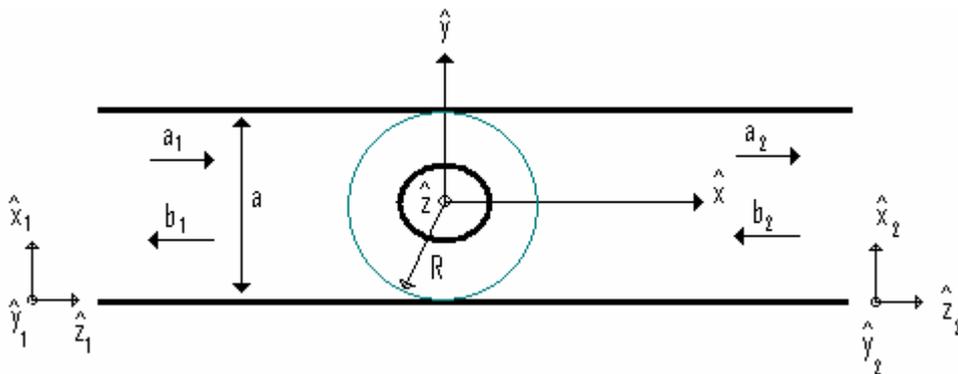


Fig. 3

Se proyecta sobre los modos de dentro del contorno y sobre los de fuera. Para obtener una solución es necesario calcular varias integrales. El problema que presenta este método es que probablemente no converja por el mal condicionamiento de las matrices que se obtienen.

Por tanto este proyecto se centra en el contorno rectangular (fig.4). Dentro del contorno se emplea la formulación de espacio abierto y se expresan los campos eléctricos incidente y dispersado como sumas de modos cilíndricos. Fuera del contorno se trata el problema desde el punto de vista de modos guiados. A continuación se fuerza continuidad de campo eléctrico y magnético en todo el contorno rectangular.

2. Objetivo

En este proyecto, dado lo expuesto anteriormente, se desarrollará un nuevo acoplo modal eficiente para obtener la matriz de dispersión generalizada de un tramo de guía con dos accesos y con un resonador dieléctrico cilíndrico en el centro.

Para ello, si es posible, las expresiones involucradas en la resolución del problema se calcularán de forma analítica y posteriormente se compararán con los resultados numéricos. El objetivo que se busca resolviendo el problema analíticamente es poder disminuir el coste computacional y temporal que se obtiene con las resoluciones numéricas, pues es demasiado elevado. Pero además se debe prestar especial atención a los posibles errores que se cometan, ya que para poder resolver algunas expresiones analíticamente se han de realizar ciertas aproximaciones que introducen dichos errores.

Finalmente, se busca resolver la matriz de dispersión generalizada utilizando las expresiones calculadas de forma eficiente, y de este modo obtener valores correctos con bajo error consumiendo el menor tiempo posible en sus cálculos.

3. Cálculos y discusión de resultados

3.1 Análisis y desarrollo del problema guía-espacio abierto

En esta sección se describe como es la matriz de dispersión generalizada en nuestro problema y a continuación se describe el análisis hecho de la guía con el objeto dispersor utilizando acoplo modal guía-espacio abierto en un contorno rectangular.

3.1.1. Matriz de dispersión generalizada

La matriz de dispersión generalizada de una red de N accesos de guíaondas proporciona una relación entre las amplitudes normalizadas de las ondas modales progresivas y regresivas en cada puerto de acceso de la red definida por:

$$b_m^{(i)} = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{M_j} S_{mn}^{(i,j)} a_n^j \quad i \in [1, \dots, N], m \in [1, \dots, M_i] \quad (2.1)$$

siendo M_i el número de modos que se consideran necesarios para expresar correctamente el campo en el acceso i , y teniendo en cuenta que $a_m^{(i)}$ y $b_m^{(i)}$ representan las amplitudes normalizadas para las m -ésimas ondas progresivas y regresivas definidas de la siguiente forma:

$$a_m^{(i)} = \frac{V_m^{+(i)}}{\sqrt{Z_{0m}^{(i)}}} \quad (2.2)$$

$$b_m^{(i)} = \frac{V_m^{- (i)}}{\sqrt{Z_{0m}^{(i)}}} \quad (2.3)$$

donde $V_m^{+(i)}$ y $V_m^{- (i)}$ son las amplitudes de las m -ésimas ondas modales de tensión (progresiva y regresiva respectivamente) en el acceso i , y $Z_{0m}^{(i)}$ es la impedancia característica del m -ésimo modo en el acceso i .

En la expresión (2.1) se expande la amplitud normalizada del m -ésimo modo reflejado en acceso i como combinación lineal de las amplitudes normalizadas de todos los modos incidentes de cada uno de los accesos. Los pesos de esa suma son los coeficientes $S_{mn}^{(i,j)}$. Se puede escribir el sistema de ecuaciones de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} b^{(1)} \\ \vdots \\ b^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{(1,1)} & \dots & S^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S^{(N,1)} & \dots & S^{(N,N)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(N)} \end{bmatrix} = \underline{\underline{S}} \cdot \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(N)} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

donde cada elemento es un sub-bloque:

$$a^{(i)} = [a_1^{(i)} \quad \dots \quad a_{M_i}^{(i)}]^T \quad (2.5)$$

$$b^{(i)} = [b_1^{(i)} \quad \dots \quad b_{M_i}^{(i)}]^T \quad (2.6)$$

$$S^{(i,j)} = \begin{bmatrix} S_{1,1}^{(i,j)} & \dots & S_{1,M_j}^{(i,j)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{M_i,1}^{(i,j)} & \dots & S_{M_i,M_j}^{(i,j)} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Cada sub-bloque $b^{(i)}$ o $a^{(i)}$ representa todas las amplitudes normalizadas de ondas incidentes o reflejadas del acceso i . Los sub-bloques $S^{(i,j)}$ contienen las contribuciones de las ondas incidentes de los modos del acceso j sobre las ondas reflejadas de los modos del acceso i .

Si M es el número total de ondas progresivas y regresivas que existen, definiéndose como:

$$M = \sum_{i=1}^N M_i \quad (2.8)$$

Resulta que el sistema de ecuaciones descrito en (2.4) está formado por M ecuaciones con M incógnitas.

Por tanto si particularizamos todas estas expresiones para nuestro problema particular, es decir una guíaonda con dos accesos iguales (ver figura 5) tenemos:

$$\begin{bmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{(1,1)} & S^{(1,2)} \\ S^{(2,1)} & S^{(2,2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \end{bmatrix} = \underline{\underline{S}} \cdot \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

donde $a^{(i)}, b^{(i)}, S^{(i,j)}$ se definen como en (2.5), (2.6) y (2.7) respectivamente y por tanto según (2.8) se tendrá que resolver un sistema de $M = M_1 + M_2$ ecuaciones con $M = M_1 + M_2$ incógnitas.

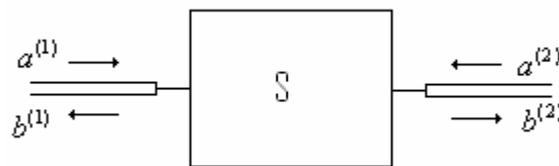


Fig. 5

3.1.2. Acoplo modal guía-espacio abierto

Suponemos un sólo objeto dispersor en el centro de la guía con una matriz de dispersión D diagonal y sólo dos accesos guiados iguales, (ver figura 6). Nos referiremos como $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i$, con $i \in [1,2]$, a los vectores unitarios del sistema de coordenadas local al acceso i . Fijamos también un sistema de coordenadas global definido por $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Puesto que vamos a utilizar formulación de espacio abierto usaremos con frecuencia coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ) , siendo:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por cada acceso inciden al segmento únicamente modos TE_{m0} , como se ha indicado anteriormente los modos que se excitan en él son sólo TE_{m0} pues el segmento es invariante en la dimensión \hat{z} . Por tanto, todos los campos eléctricos están polarizados linealmente según \hat{z} .

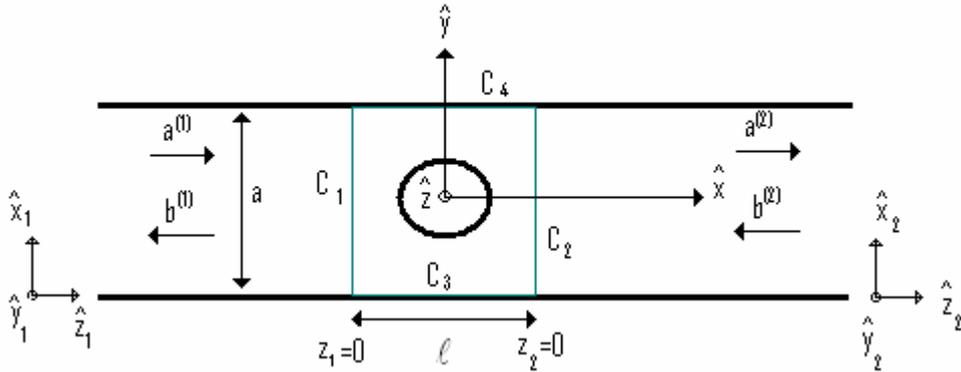


Fig. 6

Como se puede observar en la figura 6 a partir de ahora $a^{(2)}, b^{(2)}$ estarán definidos en sentidos opuestos a lo expuesto anteriormente con lo que (2.9) quedará:

$$\begin{bmatrix} b^{(1)} \\ a^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{(1,1)} & S^{(1,2)} \\ S^{(2,1)} & S^{(2,2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \end{bmatrix} = \underline{\underline{S}} \cdot \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ b^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Una vez expuesto todo esto podemos pasar a analizar el problema. Dentro del contorno rectangular se debe caracterizar el segmento mediante formulación de espacio abierto. Para ello expresaremos los campos eléctricos incidente y dispersado como sumas de modos cilíndricos.

$$\vec{E}^{in}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i_n J_n(K\rho) e^{jn\phi} \hat{z} \quad (\text{Campo incidente}) \quad (2.12)$$

$$\vec{E}^{sc}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H_n^{(2)}(K\rho) e^{jn\phi} \hat{z} \quad (\text{Campo dispersado}) \quad (2.13)$$

donde $J_n(K\rho)e^{jn\phi}$ es el modo espectral cilíndrico incidente n -ésimo (finito en el origen de coordenadas) y $H_n^{(2)}(K\rho)e^{jn\phi}$ es el modo espectral cilíndrico emergente n -ésimo (singular en el origen de coordenadas). Los coeficientes i_n representan el espectro cilíndrico de campo incidente y los coeficientes c_n el espectro cilíndrico de campo dispersado. Estos espectros vienen relacionados por la matriz de dispersión conocida D del siguiente modo:

$$[c_q] = \underline{D} \cdot [i_p] \rightarrow c_q = \sum_{p=-N_i}^{N_i} D_{qp} i_p \quad (2.14)$$

Y puesto que la matriz \underline{D} es diagonal, si llamamos d_n al elemento n -ésimo de su diagonal tenemos:

$$c_n = d_n i_n \quad (2.15)$$

Por razones computacionales las sumas infinitas de modos incidentes y dispersados se deben truncar, quedando:

$$\vec{E}^{in}(\rho, \phi) = \sum_{n=-N_i}^{N_i} i_n J_n(K\rho) e^{jn\phi} \hat{z} \quad (2.16)$$

$$\vec{E}^{sc}(\rho, \phi) = \sum_{n=-N_i}^{N_i} c_n H_n^{(2)}(K\rho) e^{jn\phi} \hat{z} = \sum_{n=-N_i}^{N_i} d_n i_n H_n^{(2)}(K\rho) e^{jn\phi} \hat{z} \quad (2.17)$$

donde debe cumplirse que $N_i > KR$, siendo R el radio de la circunferencia que contiene la zona delimitada por el contorno rectangular. En secciones posteriores se estudiará que valor de N_i se toma para que la suma de modos cilíndricos incidentes y dispersados reconstruya correctamente el campo incidente y dispersado dentro del contorno.

Teniendo en cuenta todo esto el campo total dentro del rectángulo será:

$$\vec{E} = \vec{E}^{in}(\rho, \phi) + \vec{E}^{sc}(\rho, \phi) = \sum_{n=-N_i}^{N_i} (J_n(K\rho) + d_n H_n^{(2)}(K\rho)) i_n e^{jn\phi} \hat{z} \quad (2.18)$$

A partir del campo eléctrico como ya sabemos se puede obtener el campo magnético utilizando una de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (2.19)$$

Por tanto podemos expresar el campo magnético de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\hat{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\delta E_z}{\delta \phi} \right) + \hat{\phi} \left(-\frac{\delta E_z}{\delta \rho} \right) \right) = \\ &= \frac{-1}{\eta} \sum_{n=-N_i}^{N_i} \left[\frac{n}{K\rho} \left(J_n(K\rho) + d_n H_n^{(2)}(K\rho) \right) \hat{\rho} + j \left(J_n'(K\rho) + d_n H_n^{(2)'}(K\rho) \right) \hat{\phi} \right] i_n e^{jn\phi} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Por otro lado, fuera del contorno los campos transversales totales pueden expresarse como una suma de modos guiados. Teniendo en cuenta que en los contornos C_3 y C_4 (ver figura 4) el campo transversal es nulo puesto $E_z = 0$ y que el campo magnético normal a los mismos es también nulo $H_y = 0$ podemos expresar los campos como:

$$\vec{E}_t^{(i)} = \sum_{m=1}^{M_i} a_m^{(i)} \vec{e}_m^{(i)'}(x_i) e^{-\gamma_m^{(i)} z_i} + \sum_{m=1}^{M_i} b_m^{(i)} \vec{e}_m^{(i)'}(x_i) e^{\gamma_m^{(i)} z_i}, \quad i=1,2 \quad (2.21)$$

$$\vec{H}_t^{(i)} = \sum_{m=1}^{M_i} a_m^{(i)} Y_{0m}^{(i)} \vec{h}_m^{(i)'}(x_i) e^{-\gamma_m^{(i)} z_i} - \sum_{m=1}^{M_i} b_m^{(i)} Y_{0m}^{(i)} \vec{h}_m^{(i)'}(x_i) e^{\gamma_m^{(i)} z_i}, \quad i=1,2 \quad (2.22)$$

Reordenando términos se tiene:

$$\vec{E}_t^{(i)} = \sum_{m=1}^{M_i} \left(a_m^{(i)} e^{-\gamma_m^{(i)} z_i} + b_m^{(i)} e^{\gamma_m^{(i)} z_i} \right) \vec{e}_m^{(i)'}(x_i), \quad i=1,2 \quad (2.23)$$

$$\vec{H}_t^{(i)} = \sum_{m=1}^{M_i} \left(a_m^{(i)} e^{-\gamma_m^{(i)} z_i} - b_m^{(i)} e^{\gamma_m^{(i)} z_i} \right) Y_{0m}^{(i)} \vec{h}_m^{(i)'}(x_i), \quad i=1,2 \quad (2.24)$$

donde para guía de onda rectangular y para modos TE_{m0} :

$$\vec{e}_m^{(i)'}(x_i) = -\hat{y}_i \sqrt{\frac{2Z_{0m}^{(i)}}{a_i b_i}} \text{sen} \left(\frac{m\pi}{a_i} x_i \right), \quad i=1,2 \quad (2.25)$$

$$\vec{h}_m^{(i)'}(x_i) = -\hat{x}_i \sqrt{\frac{2Z_{0m}^{(i)}}{a_i b_i}} \text{sen} \left(\frac{m\pi}{a_i} x_i \right) = \hat{z}_i \times \vec{e}_m^{(i)'}(x_i), \quad i=1,2 \quad (2.26)$$

$$\gamma_m^{(i)} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a_i}\right)^2 - K^2} \quad i = 1,2 \quad (2.27)$$

$$Y_{0m}^{(i)} = \frac{1}{Z_{0m}^{(i)}} = \frac{\gamma_m^{(i)}}{j\omega\mu} = \frac{\gamma_m^{(i)}}{jK\eta} \quad i = 1,2 \quad (2.28)$$

Siendo a_i y b_i la anchura y altura respectivamente del acceso i , K es el número de onda ($K = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$), $\gamma_m^{(i)}$ es la constante de propagación del m -ésimo modo de propagación en el acceso i y los vectores unitarios son los definidos en la figura 6, por tanto $\hat{y}_1 = \hat{y}_2 = \hat{z}$.

Teniendo en cuenta todo esto vamos a definir una serie de vectores para que resulte más sencillo escribir una expresión más compacta del campo fuera del contorno. (Ver figura 6)

$$a = \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ b^{(2)} \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad a^{(1)} = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ \vdots \\ a_{M_1}^{(1)} \end{bmatrix} \quad b^{(2)} = \begin{bmatrix} b_1^{(2)} \\ \vdots \\ b_{M_2}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$b = \begin{bmatrix} b^{(1)} \\ a^{(2)} \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad b^{(1)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_{M_1}^{(1)} \end{bmatrix} \quad a^{(2)} = \begin{bmatrix} a_1^{(2)} \\ \vdots \\ a_{M_2}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

De modo que a y b son vectores de $M = M_1 + M_2$ elementos, correspondiendo los M_1 elementos superiores a la guía 1 y los M_2 siguientes a la guía 2. De igual forma si nos fijamos en la figura 7 tenemos:

$\phi \in [0, 2\pi]$ recorre la curva $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.
 $d_o(\phi) \equiv$ es la distancia del centro a C para cada ϕ .

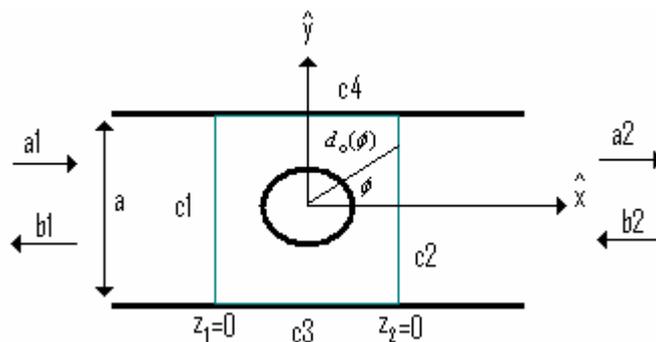


Fig.7.

Definimos también,

$$g_m^\circ(\phi) = \begin{cases} e_m^{(1)'}(x_1(\phi)) & \phi \in C_1 \\ 0 & \phi \notin C_1 \end{cases} \quad \text{donde } m \in [1, \dots, M_1] \quad (2.31)$$

$$g_m^\circ(\phi) = \begin{cases} e_{m-M_1}^{(2)'}(x_2(\phi)) & \phi \in C_2 \\ 0 & \phi \notin C_2 \end{cases} \quad \text{donde } m \in [M_1 + 1, \dots, M] \quad (2.32)$$

$$g_\circ(\phi) = \begin{bmatrix} g_1^\circ(\phi) \\ g_2^\circ(\phi) \\ \vdots \\ g_M^\circ(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Finalmente el campo fuera del contorno se puede escribir de la siguiente forma teniendo en cuenta que en C_1 y C_2 tenemos que $z_1 = 0$ y que $z_2 = 0$ respectivamente, por tanto $e^{-\gamma_m^{(i)} z_i} = 1$, y $e^{\gamma_m^{(i)} z_i} = 1$, con lo que finalmente se tiene:

$$\vec{E}_t^{(\phi)} = \sum_{m=1}^M (a_m + b_m) g_m^\circ(\phi) \hat{z} \quad (2.34)$$

$$\vec{H}_t^{(\phi)} = \sum_{m=1}^M (a_m - b_m) Y_{0m} g_m^\circ(\phi) \hat{y} \quad (2.35)$$

definiendo Y_{0m} como:

$$Y_0 = \begin{bmatrix} -Y_0^{(1)} \\ Y_0^{(2)} \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad Y_0^{(1)} = \begin{bmatrix} Y_{01}^{(1)} \\ \vdots \\ Y_{0M_1}^{(1)} \end{bmatrix} \quad Y_0^{(2)} = \begin{bmatrix} Y_{01}^{(2)} \\ \vdots \\ Y_{0M_2}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

El signo negativo que aparece al definir el vector de impedancias características es necesario para que $H_t = H_y$ siempre.

Vistas todas estas expresiones ya se puede forzar continuidad de campo eléctrico y magnético en el contorno cuadrado C . Primero forzamos continuidad de campo eléctrico:

$$\vec{E}^{in}(\rho, \phi) + \vec{E}^{sc}(\rho, \phi) = \vec{E}_t^{(\phi)}(\rho, \phi) \quad (2.37)$$

Sustituyendo (2.18) y (2.34) en (2.37) obtenemos la siguiente expresión:

$$\sum_{n=-N_i}^{N_i} \left(J_n(K\rho) + d_n H_n^{(2)}(K\rho) \right) i_n e^{jn\phi} = \sum_{m=1}^M (a_m + b_m) g_m^\circ(\phi) \quad (2.38)$$

A continuación forzamos continuidad de campo magnético en todo el contorno rectangular:

$$\vec{H}^{in}(\rho, \phi) + \vec{H}^{sc}(\rho, \phi) = \vec{H}_t^{(\phi)}(\rho, \phi) \quad (2.39)$$

Concretamente forzaremos continuidad de campo magnético transversal. Para ello proyectamos (2.20) en dirección \hat{y} , posteriormente sustituimos la expresión obtenida y (2.35) en (2.39):

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\eta} \sum_{n=-N_i}^{N_i} \left[\frac{n}{K\rho} \left(J_n(K\rho) + d_n H_n^{(2)}(K\rho) \right) (\hat{\rho} \cdot \hat{y}) + j \left(J_n'(K\rho) + d_n H_n^{(2)'}(K\rho) \right) (\hat{\phi} \cdot \hat{y}) \right] i_n e^{jn\phi} = \\ = \vec{H}_t^{(\phi)} = \sum_{m=1}^M (a_m - b_m) Y_{0m} g_m^\circ(\phi) \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde:

$$\begin{aligned} (\hat{\rho} \cdot \hat{y}) &= \text{sen}(\phi) \\ (\hat{\phi} \cdot \hat{y}) &= \text{cos}(\phi) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Sustituyendo (2.41) en (2.40)

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\eta} \sum_{n=-N_i}^{N_i} \left[\frac{n}{K\rho} \left(J_n(K\rho) + d_n H_n^{(2)}(K\rho) \right) \text{sen}(\phi) + j \left(J_n'(K\rho) + d_n H_n^{(2)'}(K\rho) \right) \text{cos}(\phi) \right] i_n e^{jn\phi} = \\ = \vec{H}_t^{(\phi)} = \sum_{m=1}^M (a_m - b_m) Y_{0m} g_m^\circ(\phi) \end{aligned} \quad (2.42)$$

A partir de las expresiones (2.38) y (2.42) obtendremos las ecuaciones necesarias para calcular la matriz de dispersión buscada. Para ello en primer lugar proyectamos estas ecuaciones sobre los modos de dentro del contorno. Para ello multiplicamos a ambos lados por el factor adecuado $(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)))^*$ y aplicamos la integral sobre el contorno.

Como resultado de proyectar las ecuaciones (2.38) y (2.42) sobre los modos de dentro obtenemos unas ecuaciones que quedan:

$$\sum_{n=-N_i}^{N_i} A_{mn} i_n = \sum_{n=1}^M B_{mn} (a_n + b_n) \quad m = -N_i, \dots, N_i \quad (2.43)$$

$$\sum_{n=-N_i}^{N_i} C_{mn} i_n = \sum_{n=1}^M D_{mn} (a_n - b_n) \quad m = -N_i, \dots, N_i \quad (2.44)$$

donde:

$$A_{mn} = \int_C [J_n(K\rho(\phi)) + d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi))] e^{jm\phi} (e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)))^* dc \quad (2.45)$$

$$B_{mn} = \int_C g_n^\circ(\phi) (e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)))^* dc \quad (2.46)$$

$$C_{mn} = \int_C \frac{-1}{\eta} \left[\frac{n}{K\rho(\phi)} (J_n(K\rho(\phi)) + d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi))) \right] \text{sen}(\phi) + j \left[J_n'(K\rho(\phi)) + d_n H_n^{(2)'}(K\rho(\phi)) \right] \text{cos}(\phi) \Big| e^{jm\phi} (e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)))^* dc \quad (2.47)$$

$$D_{mn} = \int_C g_n^\circ(\phi) Y_{0n} (e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)))^* dc = Y_{0n} B_{mn} \quad (2.48)$$

Por otro lado proyectamos también las ecuaciones obtenidas al forzar continuidad de campo (2.38) y (2.42) sobre los modos de fuera del contorno. Se opera igual que en el caso anterior, multiplicamos a ambos lados de la igualdad por el factor adecuado, que en este caso será:

$$g_m^*(\phi) = \begin{cases} e_m^{(1)'}(x_1(\phi)) & \phi \in C_1 \text{ y } m \in (1, \dots, M_1) \\ e_m^{(2)'}(x_2(\phi)) & \phi \in C_2 \text{ y } m \in (M_1 + 1, \dots, M) \\ \text{sen}\left(\frac{m\pi}{l}\left(x - \frac{l}{2}\right)\right) & \phi \in C_3 \text{ o } C_4 \text{ y } m \in (1, \dots, M_1) \\ \text{sen}\left(\frac{(m - M_1)\pi}{l}\left(x - \frac{l}{2}\right)\right) & \phi \in C_3 \text{ o } C_4 \text{ y } m \in (M_1 + 1, \dots, M) \end{cases} \quad (2.49)$$

A continuación se aplica la integral sobre todo el contorno en las dos partes de la igualdad. De este modo obtenemos nuevas ecuaciones:

$$\sum_{n=-N_i}^{N_i} E_{mn} i_n = \sum_{n=1}^M F_{mn} (a_n + b_n) \quad m = 1, \dots, M \quad (2.50)$$

$$\sum_{n=-N_i}^{N_i} G_{mn} i_n = \sum_{n=1}^M H_{mn} (a_n - b_n) \quad m = 1, \dots, M \quad (2.51)$$

donde:

$$E_{mn} = \int_C [J_n(K\rho(\phi)) + d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi))] e^{jn\phi} g_m^{\circ*}(\phi) dc \quad (2.52)$$

$$F_{mn} = \int_C g_n^{\circ}(\phi) g_m^{\circ*}(\phi) dc \quad (2.53)$$

$$G_{mn} = \int_C \frac{-1}{\eta} \left[\frac{n}{K\rho(\phi)} (J_n(K\rho(\phi)) + d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi))) \right] \text{sen}(\phi) + j \left[J_n'(K\rho(\phi)) + d_n H_n^{(2)'}(K\rho(\phi)) \right] \text{cos}(\phi) \Big| e^{jn\phi} g_m^{\circ*}(\phi) dc \quad (2.54)$$

$$H_{mn} = \int_C g_n^{\circ}(\phi) Y_{0n} g_m^{\circ*}(\phi) dc = Y_{0n} F_{mn} \quad (2.55)$$

Escribiendo matricialmente el sistema de ecuaciones que proviene de las expresiones obtenidas (2.43), (2.44) y (2.50), (2.51) llegamos al siguiente sistema de ecuaciones matricial:

$$Ai = B(a + b) \quad (2.56)$$

$$Ci = D(a - b) \quad (2.57)$$

$$Ei = F(a + b) \quad (2.58)$$

$$Gi = H(a - b) \quad (2.59)$$

donde a y b son las definidas en (2.29) y (2.30) respectivamente, A y C son matrices cuadradas de tamaño $(2N_i + 1) \times (2N_i + 1)$, B y D son matrices de tamaño $(2N_i + 1) \times M$, E y G son de tamaño $M \times (2N_i + 1)$, y F y H son matrices diagonales cuadradas de tamaño $M \times M$.

Para resolver nuestras incógnitas a y b y de este modo calcular la matriz de dispersión necesitamos dos de las expresiones. Debemos tomar una que proceda de expresiones de campo eléctrico y otra que proceda de expresiones de campo magnético. Por tanto existen dos posibilidades, tomar (2.56) y (2.59) o (2.57) y (2.58).

Si elegimos (2.56) y (2.59) tenemos:

$$\begin{aligned}
 i &= A^{-1}B(a + b) \\
 GA^{-1}B(a + b) &= H(a - b) \\
 (H - GA^{-1}B)a &= (H + GA^{-1}B)b \\
 b &= (H + GA^{-1}B)^{-1}(H - GA^{-1}B)a \\
 S &= (H + GA^{-1}B)^{-1}(H - GA^{-1}B)
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

donde S es la matriz de dispersión que buscamos definida en (2.11).

Si optamos por utilizar (2.57) y (2.58) tenemos:

$$\begin{aligned}
 i &= C^{-1}D(a - b) \\
 EC^{-1}D(a - b) &= F(a + b) \\
 (EC^{-1}D - F)a &= (F + EC^{-1}D)b \\
 b &= (F + EC^{-1}D)^{-1}(EC^{-1}D - F)a \\
 S &= (F + EC^{-1}D)^{-1}(EC^{-1}D - F)
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

En ambos casos se necesita invertir una matriz cuadrada A o C de tamaño $(2N_i + 1) \times (2N_i + 1)$ y otra matriz $(H + GA^{-1}B)$ o $(F + EC^{-1}D)$ de tamaño $M \times M$. Por tanto la elección vendrá dada por el coste computacional y temporal de cada una de las opciones así como del mejor o peor condicionamiento de las matrices que han de invertirse para obtener la S .

Para calcular las matrices se han de resolver una serie de integrales, con lo que la elección de alguna de las posibilidades pasa por decidir que integrales son más sencillas de calcular analíticamente para conseguir reducir al máximo el coste computacional y temporal de cálculo de la matriz de dispersión S .

Las integrales a calcular son A_{mn} , B_{mn} , G_{mn} y H_{mn} en el caso que se opte por resolver (2.60) y C_{mn} , D_{mn} , E_{mn} y F_{mn} si se resuelve (2.61). Comparando vemos que B_{mn} y D_{mn} van a tener el mismo coste, F_{mn} y H_{mn} también son prácticamente iguales. Observando las integrales restantes, entre escoger A_{mn} y G_{mn} o por el contrario C_{mn} y E_{mn} parece mejor la primera opción puesto que a pesar que A_{mn} es algo más complicada que E_{mn} , la integral C_{mn} resulta mucho más compleja que la G_{mn} . Esto es debido a que en C_{mn} además de la complicación que suponen las derivadas de las funciones de Bessel

y Hankel, se añade otra dificultad dada por el factor por el que se multiplica para proyectar sobre los modos de dentro del contorno $(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)))^*$, ya que este factor supone agregar un sumatorio más a la expresión completa. Por otro lado el factor que se añade en G_{mn} dado por (2.49) es mucho más sencillo, puesto que se multiplica por funciones trigonométricas.

Dado lo expuesto anteriormente, finalmente se resolverá (2.60), con lo que las integrales a calcular serán A_{mn} , B_{mn} , G_{mn} y H_{mn} dadas por las expresiones (2.45), (2.46), (2.54) y (2.55).

3.2. Resolución de integrales

En esta sección se desarrollarán las integrales para poder llevar a cabo su resolución analítica que se comparará en sucesivas secciones con los resultados numéricos.

3.2.1 Introducción

Para poder resolver algunas integrales analíticamente se hace uso de una expansión en series de ondas planas de $J_n(K\rho(\phi))e^{jn\phi}$, para ello se utiliza una expresión con la que se aproximan, bajo ciertas condiciones, los productos de Bessel y funciones trigonométricas por una serie de funciones exponenciales. Esta expresión es:

$$J_n(K\rho(\phi))e^{jn\phi} \cong \frac{j^n}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{jl\frac{2n\pi}{L}} e^{-jK(C_l x + S_l y)} \quad (3.1)$$

donde

$$\begin{aligned} C_l &= \cos\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \\ S_l &= \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

El valor de L deberá ser lo suficientemente elevado para llegar a la convergencia de la serie, cuanto mayor sea n será necesario tener en cuenta más términos de la serie.

Además se utilizará otra expresión para poder expresar las funciones de Hankel de segunda especie a través de funciones de Bessel y de este modo poder escribirlas también como una serie de funciones exponenciales. Sabemos que la función de Hankel de segunda especie es infinita en el origen y en las expresiones de campo como modos cilíndricos representa modos emergentes. Sabemos también que se pueden escribir los modos emergentes como incidentes cambiando el plano de referencia, de este modo se puede expresar la distribución de campo representada por modos emergentes como una distribución de campo dada por modos incidentes con un origen de coordenadas desplazado. Dado que la función de Bessel en las expresiones de campo como modos

cilíndricos representa modos incidentes podemos escribir la función de Hankel de segunda especie como suma de funciones de Bessel de la siguiente forma:

$$H_n^{(2)}(K\rho_1)e^{jn\phi_1} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21})e^{-j(p-n)\phi_{21}} \cdot J_p(K\rho_2)e^{jp\phi_2} \quad (3.3)$$

donde $\rho_2 \leq d_{21}$, siendo $\phi_1, \phi_2, \phi_{21}, \rho_1, \rho_2, d_{21}$ los definidos en la figura 8.

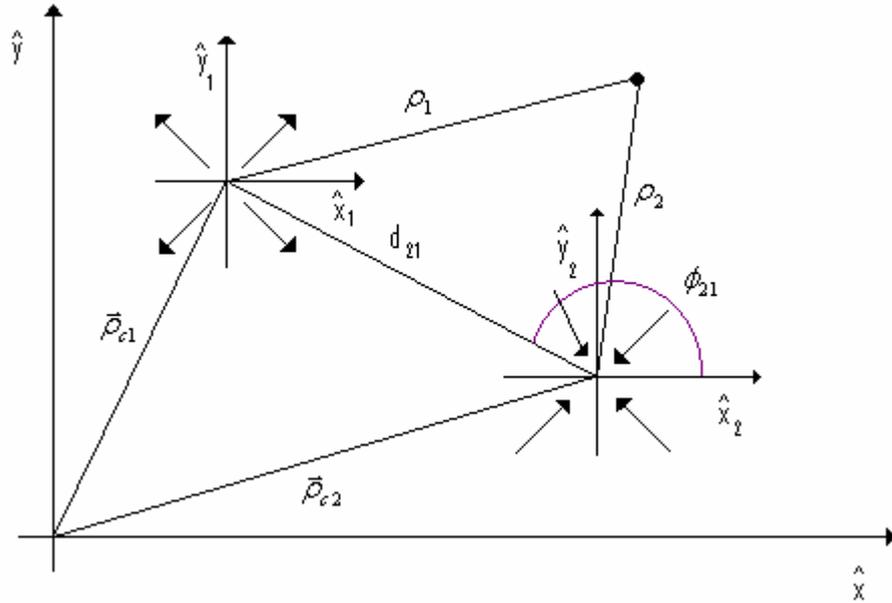


Fig. 8

Por razones computacionales las sumas infinitas de (3.3) han de truncarse, quedando:

$$H_n^{(2)}(K\rho_1)e^{jn\phi_1} \cong \sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21})e^{-j(p-n)\phi_{21}} \cdot J_p(K\rho_2)e^{jp\phi_2} \quad (3.4)$$

con $P \geq KR$ siendo R el radio de la circunferencia donde queremos reconstruir correctamente la distribución de campo. Debemos tener en cuenta que si utilizamos esta expresión la distribución de campo se reconstruirá adecuadamente en toda la circunferencia de radio R menos en el origen de coordenadas que tomará un valor infinito. Esto queda ilustrado en la figura 9.

Para cada tramo del contorno del rectángulo se deberán escoger los valores adecuados de d_{21} y ϕ_{21} dependiendo de donde se sitúe el nuevo sistema de referencia. Además también se deberá elegir el valor más conveniente para el radio de la circunferencia donde esta expresión es válida.

Una vez expuesto todo esto ya podemos pasar a describir como obtener la solución analítica de cada una de las cuatro integrales necesarias para calcular la matriz de dispersión.

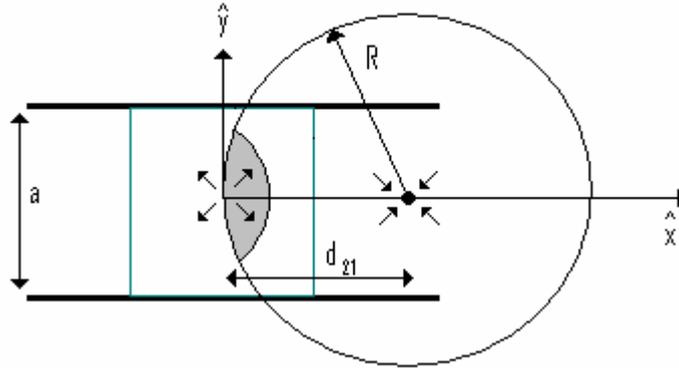


Fig.9

3.2.2. Integral A_{mn}

La integral a calcular es:

$$A_{mn} = \int_C [J_n(K\rho(\phi)) + d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi))] e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* dc \quad (3.5)$$

donde $m = -N_i, \dots, N_i$ y $n = -N_i, \dots, N_i$. Esta integral la dividiremos en dos partes para simplificar los cálculos, por un lado una integral que contenga las funciones de Bessel, y por otro una integral que contenga las funciones de Hankel.

$$A_{mn} = \int_C J_n(K\rho(\phi)) e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* dc + \int_C d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi)) e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* dc = A_J + A_H \quad (3.6)$$

Nos centraremos en primer lugar en el cálculo de A_J . Para calcular esta integral se divide el contorno rectangular en cuatro tramos $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. Como se puede ver en la figura 6 en el contorno C_1 sólo se depende de la coordenada y , siendo la coordenada x fija. Del mismo modo ocurre en el resto de tramos que sólo dependen de una coordenada, C_2 sólo depende de y mientras que C_3 y C_4 sólo dependen de x .

Para escribir las integrales de cada uno de los contornos recorreremos el rectángulo en sentido contrario a las agujas del reloj empezando por C_2 (ver figura 6). Por tanto nos quedará:

$$\begin{aligned}
A_J = & \int_{-a/2}^{a/2} J_n(K\rho(\phi))e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* dy \\
& + \int_{-\ell/2}^{\ell/2} J_n(K\rho(\phi))e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* (-dx) \\
& + \int_{-a/2}^{a/2} J_n(K\rho(\phi))e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* (-dy) \\
& + \int_{-\ell/2}^{\ell/2} J_n(K\rho(\phi))e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* dx = A_{j1} + A_{j2} + A_{j3} + A_{j4} \quad (3.7)
\end{aligned}$$

donde a partir de ahora, teniendo en cuenta que a es la anchura de la guía como se indica en la figura 6, vamos a considerar que el lado del rectángulo paralelo al eje x es:

$$\ell = 0.7a \quad (3.8)$$

Pasamos a resolver la primera de las integrales, la que recorre el tramo C_2 :

$$A_{j1} = \int_{-a/2}^{a/2} J_n(K\rho(\phi))e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* dy \quad (3.9)$$

Sustituyendo la expresión (3.1) en (3.9) dos veces, teniendo en cuenta que en el segundo caso la expresión debe de estar conjugada y que para el tramo C_2 la coordenada x es fija obtenemos:

$$A_{j1} \cong \int_{-a/2}^{a/2} \frac{j^n}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{jl\frac{2n\pi}{L}} e^{-jK(C_l x_0 + S_l y)} \left(\frac{j^{-m}}{L} \sum_{l'=0}^{L-1} e^{-jl'\frac{2m\pi}{L}} e^{+jK(C_{l'} x_0 + S_{l'} y)} \right) dy \quad (3.10)$$

donde teniendo en cuenta el contorno en el que nos encontramos y las expresiones definidas en (3.2):

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{0.7a}{2} \\
C_{l'} &= \cos\left(\frac{2\pi l'}{L}\right) \\
S_{l'} &= \sin\left(\frac{2\pi l'}{L}\right) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Reordenando términos en (3.10) y haciendo cálculos obtenemos:

$$A_{j1} \cong \frac{j^{n-m}}{L^2} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} e^{j\frac{2\pi}{L}(nl - ml')} e^{-jKx_0(C_l - C_{l'})} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jKy(S_l - S_{l'})} dy \quad (3.12)$$

Por tanto ahora se trata de calcular una integral mucho más sencilla ya que se trata de una integral directa:

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{-jKy(S_l - S_l')} dy = \frac{e^{-jK(S_l - S_l')\frac{a}{2}}}{-jK(S_l - S_l')} - \frac{e^{+jK(S_l - S_l')\frac{a}{2}}}{-jK(S_l - S_l')} = \frac{2j \sin\left(K(S_l - S_l')\frac{a}{2}\right)}{jK(S_l - S_l')}$$

$$= \frac{2 \sin\left(K(S_l - S_l')\frac{a}{2}\right)}{K(S_l - S_l')\frac{a}{2}} \frac{a}{2} = a \operatorname{sinc}\left(K(S_l - S_l')\frac{a}{2\pi}\right) \quad (3.13)$$

Sustituyendo (3.13) en (3.12) obtenemos la integral completa:

$$A_{j1} \cong \frac{aj^{n-m}}{L^2} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} e^{j\frac{2\pi}{L}(nl - ml')} e^{-jKx_0(C_l - C_{l'})} \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda}(S_l - S_{l'})\right) \quad (3.14)$$

donde $\lambda = \frac{2\pi}{K}$ es la longitud de onda.

Si Seguimos recorriendo el contorno en sentido contrario a las agujas del reloj la siguiente integral a resolver será la que recorre el tramo C_4 , que teniendo en cuenta (3.8) queda:

$$A_{j2} = \int_{-0.7a/2}^{0.7a/2} J_n(K\rho(\phi)) e^{jm\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* (-dx) \quad (3.15)$$

De igual forma que con la integral anterior sustituimos (3.1) en (3.15) conjugando los términos adecuados y teniendo en cuenta que en este caso la coordenada fija es y obtenemos:

$$A_{j2} \cong \int_{-0.7a/2}^{0.7a/2} \frac{j^n}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{jl\frac{2n\pi}{L}} e^{-jK(C_l x + S_l y_0)} \left(\frac{j^{-m}}{L} \sum_{l'=0}^{L-1} e^{-jl'\frac{2m\pi}{L}} e^{+jK(C_{l'} x + S_{l'} y_0)} \right) (-dx) \quad (3.16)$$

donde teniendo en cuenta el contorno en el que nos encontramos:

$$y_0 = \frac{a}{2} \quad (3.17)$$

Reordenando términos en (3.15) y haciendo cálculos obtenemos:

$$A_{j2} \cong -\frac{j^{n-m}}{L^2} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} e^{j\frac{2\pi}{L}(nl-m'l')} e^{-jKy_0(S_l-S_{l'})} \int_{-0.7a/2}^{0.7a/2} e^{-jKx(C_l-C_{l'})} dx \quad (3.18)$$

La integral a resolver es muy parecida a la anterior, tratándose también de una integral directa que se resuelve fácilmente:

$$\begin{aligned} \int_{-0.7a/2}^{0.7a/2} e^{-jKx(C_l-C_{l'})} dx &= \frac{e^{-jK(C_l-C_{l'})\frac{0.7a}{2}}}{-jK(C_l-C_{l'})} - \frac{e^{+jK(C_l-C_{l'})\frac{0.7a}{2}}}{-jK(C_l-C_{l'})} = \frac{2j \sin\left(K(C_l-C_{l'})\frac{0.7a}{2}\right)}{jK(C_l-C_{l'})} \\ &= \frac{2 \sin\left(K(C_l-C_{l'})\frac{0.7a}{2}\right)}{K(C_l-C_{l'})\frac{0.7a}{2}} \frac{0.7a}{2} \\ &= 0.7a \operatorname{sinc}\left(K(C_l-C_{l'})\frac{0.7a}{2\pi}\right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Sustituyendo (3.19) en (3.18) obtenemos la expresión que se buscaba:

$$A_{j2} \cong -\frac{0.7aj^{n-m}}{L^2} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} e^{j\frac{2\pi}{L}(nl-m'l')} e^{-jKy_0(S_l-S_{l'})} \operatorname{sinc}\left(\frac{0.7a}{\lambda} K(C_l-C_{l'})\right) \quad (3.20)$$

Con esto ya sólo nos queda calcular dos integrales más para obtener A_j . Estas dos integrales resultarán muy sencillas de calcular pues se resuelven prácticamente igual que las anteriores.

Continuamos calculando A_{j3} en la que se recorre el tramo C_1 y cuya expresión es:

$$A_{j3} = \int_{-a/2}^{a/2} J_n(K\rho(\phi)) e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* (-dy) \quad (3.21)$$

Sustituyendo la expresión (3.1) en (3.21) como ya se ha hecho con las integrales anteriores teniendo en cuenta que en el segundo caso la expresión debe de estar conjugada y que la coordenada fija es x obtenemos:

$$A_{j3} \cong \int_{-a/2}^{a/2} \frac{j^n}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{jl\frac{2n\pi}{L}} e^{-jK(C_l x_0 + S_l y)} \left(\frac{j^{-m}}{L} \sum_{l'=0}^{L-1} e^{-jl'\frac{2m\pi}{L}} e^{+jK(C_{l'} x_0 + S_{l'} y)} \right) (-dy) \quad (3.22)$$

Pero en este caso el valor de x_0 es diferente que en la integral A_{j1} pues nos movemos en un tramo del contorno diferente (ver figura 6). En este caso se tendrá:

$$x_0 = -\frac{0.7a}{2} \quad (3.23)$$

De todas formas la resolución de la integral (3.22) es igual que la (3.10) ya que sólo se diferencian en un signo y el valor de x_0 se deja indicado. Por tanto se tendrá:

$$A_{j3} \cong -\frac{aj^{n-m}}{L^2} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} e^{j\frac{2\pi}{L}(nl-m'l')} e^{-jKx_0(C_l - C_{l'})} \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda}(S_l - S_{l'})\right) \quad (3.24)$$

Por último queda calcular A_{j4} , integral que recorre el tramo C_3 y cuya expresión a partir de (3.7) y (3.8) queda:

$$A_{j4} = \int_{-0.7a/2}^{0.7a/2} J_n(K\rho(\phi)) e^{jn\phi} \left(e^{im\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* dx \quad (3.25)$$

Como se ha hecho en las integrales anteriores sustituimos (3.1) en (3.25) conjugando los términos adecuados y teniendo en cuenta que la coordenada fija en este caso es la y . Obtenemos una nueva expresión:

$$A_{j4} \cong \int_{-0.7a/2}^{0.7a/2} \frac{j^n}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{jl\frac{2n\pi}{L}} e^{-jK(C_l x + S_l y_0)} \left(\frac{j^{-m}}{L} \sum_{l'=0}^{L-1} e^{-jl'\frac{2m\pi}{L}} e^{+jK(C_{l'} x + S_{l'} y_0)} \right) dx \quad (3.26)$$

Al igual que antes en este caso el valor de y_0 es diferente que en la integral A_{j2} pues nos movemos en un tramo del contorno diferente (ver figura 6). En este caso se tendrá:

$$y_0 = -\frac{a}{2} \quad (3.27)$$

La resolución de la integral (3.26) es igual a la (3.16) salvo por un signo y el valor de y_0 , por tanto la integral quedará:

$$A_{j4} \cong \frac{0.7aj^{n-m}}{L^2} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} e^{j\frac{2\pi}{L}(nl-ml')} e^{-jKy_0(S_l-S_{l'})} \operatorname{sinc}\left(\frac{0.7a}{\lambda}K(C_l-C_{l'})\right) \quad (3.28)$$

Con esto tenemos resuelta la primera parte de la integral A_{mn} que teniendo en cuenta que $A_j = A_{j1} + A_{j2} + A_{j3} + A_{j4}$ y todas las expresiones dadas por (3.14), (3.20), (3.24) y (3.28) obtenemos la expresión final sobre la que se tendrán que hacer las pruebas adecuadas para ver si las aproximaciones hechas son válidas y al mismo tiempo se tendrá que programar de la forma más eficiente posible.

Por tanto si nos fijamos en todas las expresiones señaladas sustituimos y simplificamos obtenemos:

$$A_j \cong \frac{aj^{n-m}}{L^2} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} e^{j\frac{2\pi}{L}(nl-ml')} \left(e^{-jKx_0(C_l-C_{l'})} - e^{+jKx_0(C_l-C_{l'})} \right) \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda}(S_l-S_{l'})\right) \\ + \frac{0.7aj^{n-m}}{L^2} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} e^{j\frac{2\pi}{L}(nl-ml')} \left(e^{+jKy_0(S_l-S_{l'})} - e^{-jKy_0(S_l-S_{l'})} \right) \operatorname{sinc}\left(\frac{0.7a}{\lambda}K(C_l-C_{l'})\right) \quad (3.29)$$

donde en este caso se definen x_0 y y_0 simultáneamente para poder escribir la expresión de forma más compacta:

$$x_0 = \frac{0.7a}{2} \\ y_0 = \frac{a}{2}$$

Una vez calculada A_j continuamos calculando A_H , que como se ha visto anteriormente en (3.6) se define como:

$$A_H = \int_C d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi)) e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* dc$$

donde recordemos que d_n es el elemento n -ésimo de la matriz de dispersión \underline{D} .

Se procede exactamente igual que con A_j , se divide el contorno rectangular en cuatro tramos $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.

Para escribir las integrales de cada uno de los contornos recorreremos el rectángulo en sentido contrario a las agujas del reloj empezando por C_2 (ver figura 6). Por tanto nos quedará:

$$\begin{aligned}
 A_H = & \int_{-a/2}^{a/2} d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi)) e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* dy \\
 & + \int_{-0.7a/2}^{0.7a/2} d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi)) e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* (-dx) \\
 & + \int_{-a/2}^{a/2} d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi)) e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* (-dy) \\
 & + \int_{-0.7a/2}^{0.7a/2} d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi)) e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* dx = A_{h1} + A_{h2} + A_{h3} + A_{h4} \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

A continuación pasamos a resolver la primera de estas integrales A_{h1} sobre el tramo C_2 (ver figura 6), para ello haremos uso de la expresión definida en la introducción de esta sección (3.4), donde en este caso concreto se deberá calcular el valor de los parámetros d_{21} y ϕ_{21} (ver figura 10). Así la integral a calcular será:

$$A_{h1} \cong \int_{-a/2}^{a/2} d_n \sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21}) e^{-j(p-n)\phi_{21}} \cdot J_p(K\rho') e^{jp\phi_{21}'} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* dy \quad (3.31)$$

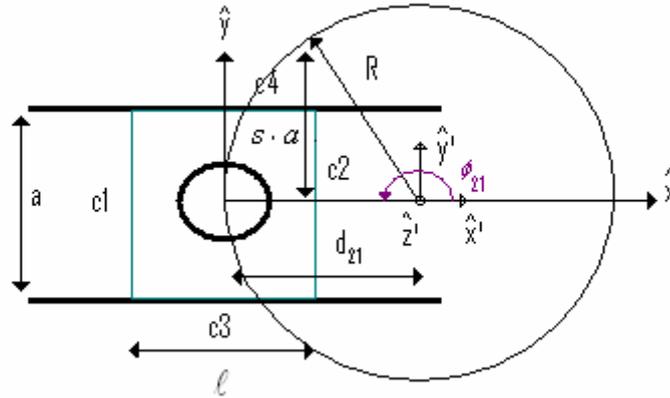


Fig. 10

De la fig. 10. podemos extraer los valores que tomarán d_{21} y ϕ_{21} y la relación entre las coordenadas del nuevo sistema de referencia y el sistema de referencia original. Se han de tomar unos de manera que el tramo sobre el que se calcula la integral C_2 este contenido totalmente en la circunferencia de radio R y como el origen de coordenadas del sistema de referencia original, donde la expresión (3.4) no es válida, coincide con el centro del poste dieléctrico, donde no estamos haciendo el estudio, no tendremos

problemas en ese sentido. Tenemos pues $d_{21} = \max(x_0, R)$, para calcular el valor del radio de la circunferencia nos fijamos en la figura 10 y obtenemos:

$$(R - x_0)^2 + (s \cdot a)^2 = R^2 \quad (3.32)$$

donde x_0 se corresponde a la coordenada fija respecto al sistema de referencia original en el tramo C_2 :

$$x_0 = \frac{0.7a}{2}$$

Despejamos R de la expresión (3.32):

$$R = \frac{x_0^2 + s^2 \cdot a^2}{2x_0} \quad (3.33)$$

En posteriores secciones se deberá hacer un estudio para averiguar que valor de s es el más adecuado para conseguir que el error sea lo más pequeño y uniforme posible en todo el tramo C_2 . Ya sólo queda determinar el valor del parámetro ϕ_{21} y la relación entre los dos sistemas de referencia. Observando la figura 10 resulta sencillo determinar que $\phi_{21} = \pi$. Mientras que las coordenadas cartesianas del nuevo sistema de referencia respecto a las del original se deducen fácilmente observando una vez más la figura 10:

$$\begin{aligned} y' &= y \\ x' &= x - R \end{aligned} \quad (3.34)$$

Una vez deducidos todos estos parámetros ya se puede calcular la integral A_{h1} . Como primer paso sustituimos (3.1) en (3.31) teniendo en cuenta que hay que conjugar la expresión cuando proceda y que al estar en el tramo C_2 la coordenada x es fija al igual que la coordenada x' . Obtenemos la siguiente integral:

$$\begin{aligned} A_{h1} \cong \int_{-a/2}^{a/2} & \left[d_n \sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21}) e^{-j(p-n)\phi_{21}} \cdot \frac{j^p}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{jl \frac{2p\pi}{L}} e^{-jK(C_l x_0' + S_l y')} \right. \\ & \left. \cdot \left(\frac{j^{-n}}{L} \sum_{l'=0}^{L-1} e^{-jl' \frac{2m\pi}{L}} e^{jK(C_l' x_0 + S_l' y)} \right) \right] dy \end{aligned}$$

donde fijándonos en (3.34):

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{0.7a}{2} \\ x_0' &= x_0 - R \end{aligned} \quad (3.35)$$

Reordenando términos y teniendo en cuenta (3.34) obtenemos:

$$A_{h1} \cong d_n \sum_{p=-P}^P \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \left[H_{n-p}^{(2)}(KR) e^{-j(p-n)\pi} \frac{j^{p-m}}{L^2} e^{jl \frac{2p\pi}{L}} e^{-jKC_l(x_0-R)} e^{-jl' \frac{2m\pi}{L}} e^{jKC_{l'}x_0} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jKy(S_l - S_{l'})} dy \right]$$

donde la integral a resolver resulta ser directa e igual a las resueltas anteriormente, tomando el resultado de la integral de (3.13) y teniendo presente (3.2) y (3.11) finalmente se tiene:

$$A_{h1} \cong d_n a \sum_{p=-P}^P \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \left[H_{n-p}^{(2)}(KR) e^{-j(p-n)\pi} \frac{j^{p-m}}{L^2} e^{jl \frac{2p\pi}{L}} e^{-jKC_l(x_0-R)} e^{-jl' \frac{2m\pi}{L}} e^{jKC_{l'}x_0} \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{a}{\lambda} (S_l - S_{l'}) \right) \right] \quad (3.36)$$

A continuación pasamos a resolver la siguiente integral A_{h2} definida en el tramo C_4 . Para ello debemos de volver a deducir tanto los parámetros d_{21} y ϕ_{21} como la relación entre las coordenadas del sistema de referencia original y el nuevo sistema de referencia ilustrado en la figura 11.

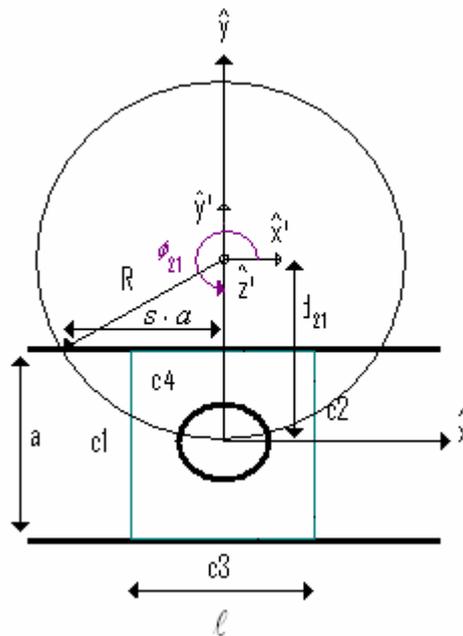


Fig. 11.

A partir de (3.30) y (3.4) obtenemos una primera aproximación de la integral que deberemos calcular:

$$A_{h2} \cong \int_{-0.7a/2}^{0.7a/2} d_n \sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21}) e^{-j(p-n)\phi_{21}} \cdot J_p(K\rho') e^{jp\phi_2'} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* (-dx) \quad (3.37)$$

Fijándonos en la figura 11. deducimos que $d_{21} = \max(y_0, R)$ donde el radio de la circunferencia en este caso es:

$$(R - y_0)^2 + (s \cdot a)^2 = R^2 \quad (3.38)$$

donde y_0 se corresponde a la coordenada fija respecto al sistema de referencia original en el tramo C_4 :

$$y_0 = \frac{a}{2}$$

Despejamos R de la expresión (3.38):

$$R = \frac{y_0^2 + s^2 \cdot a^2}{2y_0} \quad (3.39)$$

Al igual que en el caso anterior en secciones posteriores se deberá hacer un estudio para averiguar que valor de s es el más adecuado para conseguir que el error sea lo más pequeño y uniforme posible.

Por último en este caso como se aprecia en la figura 11. se tiene $\phi_{21} = \frac{3\pi}{2}$, mientras que las coordenadas del nuevo sistema de referencia serán:

$$\begin{aligned} y' &= y - R \\ x' &= x \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ya estamos preparados para calcular A_{h2} . Sustituimos (3.1) en (3.37) teniendo en cuenta que hay que conjugar la expresión cuando proceda y que al estar en el tramo C_4 la coordenada y es fija al igual que la coordenada y' . Obtenemos la siguiente integral.

$$A_{h2} \cong \int_{-0.7a/2}^{0.7a/2} d_n \sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21}) e^{-j(p-n)\phi_{21}} \cdot \frac{j^p}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{jl\frac{2p\pi}{L}} e^{-jK(C_l x' + S_l y_0)} \cdot \left(\frac{j^{-n}}{L} \sum_{l'=0}^{L-1} e^{-jl'\frac{2m\pi}{L}} e^{jK(C_{l'} x' + S_{l'} y_0)} \right) (-dx)$$

Recordemos que C_l, C_l', S_l y S_l' vienen definidas en (3.2) y (3.11). Además si tenemos en cuenta (3.40) se ve que:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{a}{2} \\ y_0' &= y_0 - R \end{aligned} \quad (3.41)$$

Reordenando y sustituyendo términos:

$$A_{h2} \cong -d_n \sum_{p=-P}^P \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \left[H_{n-p}^{(2)}(KR) e^{-j(p-n)\frac{3\pi}{2}} \frac{j^{p-m}}{L^2} e^{jl\frac{2p\pi}{L}} e^{-jKS_l(y_0-R)} e^{-jl'\frac{2m\pi}{L}} e^{jKS_{l'}y_0} \cdot \int_{-0.7a/2}^{0.7a/2} e^{-jKx(C_l-C_l')} dx \right]$$

donde la integral a resolver resulta ser directa como en el caso de antes. Además es igual a una de las integrales resueltas anteriormente, tomando el resultado de la integral de (3.19) finalmente se tiene:

$$A_{h2} \cong -0.7a \cdot d_n \sum_{p=-P}^P \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \left[H_{n-p}^{(2)}(KR) e^{-j(p-n)\frac{3\pi}{2}} \frac{j^{p-m}}{L^2} e^{jl\frac{2p\pi}{L}} e^{-jKS_l(y_0-R)} e^{-jl'\frac{2m\pi}{L}} e^{jKS_{l'}y_0} \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{0.7a}{\lambda} (C_l - C_{l'}) \right) \right] \quad (3.42)$$

Calcular A_{h3} y A_{h4} resultará más sencillo ya que se podrán reutilizar las expresiones de A_{h1} y A_{h2} respectivamente. De todos modos es necesario determinar tanto los parámetros d_{21} y ϕ_{21} como la relación entre las coordenadas del sistema de referencia original y los nuevos sistema de referencia en cada caso. Veamos que ocurre con A_{h3} .

A la vista de la figura 12. deducimos que $d_{21} = \max(\operatorname{abs}(x_0), R)$, el valor del radio de la circunferencia será:

$$(R - \operatorname{abs}(x_0))^2 + (s \cdot a)^2 = R^2 \quad (3.43)$$

donde x_0 se corresponde a la coordenada fija respecto al sistema de referencia original en el tramo C_1 :

$$x_0 = -\frac{0.7a}{2}$$

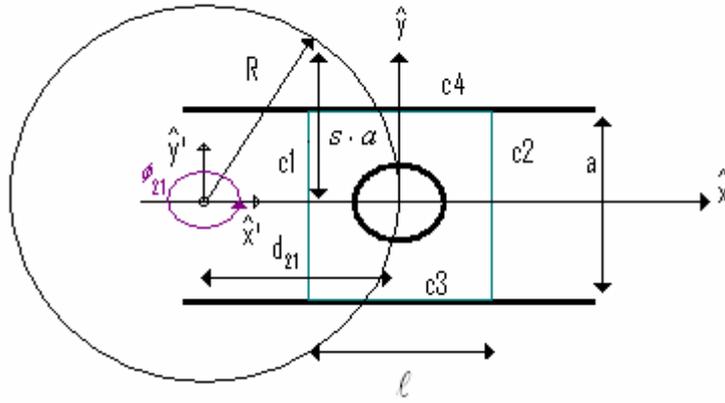


Fig. 12

Despejamos R de la expresión (3.44):

$$R = \frac{x_0^2 + s^2 \cdot a^2}{2abs(x_0)} \quad (3.45)$$

El valor de s al igual que antes se estudiará más adelante. Por otro lado observando la figura 12 resulta sencillo determinar que $\phi_{21} = 2\pi$. Mientras que las coordenadas cartesianas del nuevo sistema de referencia respecto a las del original se deducen fácilmente:

$$\begin{aligned} y' &= y \\ x' &= x + R \end{aligned} \quad (3.46)$$

Para calcular la integral se opera igual que con A_{h1} . De este modo A_{h3} queda:

$$\begin{aligned} A_{h3} \cong -d_n a \sum_{p=-P}^P \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \left[H_{n-p}^{(2)}(KR) e^{-j(p-n)2\pi} \frac{j^{p-m}}{L^2} e^{jl \frac{2p\pi}{L}} e^{-jKC_l(x_0+R)} e^{-jl' \frac{2m\pi}{L}} e^{jKC_{l'}x_0} \right. \\ \left. \cdot \sin c \left(\frac{a}{\lambda} (S_l - S_{l'}) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

Si comparamos (3.36) y (3.47) vemos que se diferencian por el signo, por los parámetros deducidos de la figura 12 y por el valor de x_0' . La expresión (3.47) aún puede simplificarse de la forma:

El valor de $\phi_{21} = \frac{\pi}{2}$ como se ve en la figura 13., mientras que las coordenadas del nuevo sistema de referencia serán:

$$\begin{aligned} y' &= y + R \\ x' &= x \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ya conocidos los parámetros necesarios, calcular la integral es igual que con A_{h2} . De este modo A_{h4} queda:

$$\begin{aligned} A_{h4} \cong 0.7a \cdot d_n \sum_{p=-P}^P \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \left[H_{n-p}^{(2)}(KR) e^{-j(p-n)\frac{\pi}{2}} \frac{j^{p-m}}{L^2} e^{j\frac{2p\pi}{L}} e^{-jKS_l(y_0+R)} e^{-j\frac{2m\pi}{L}} e^{jKS_l'y_0} \right. \\ \left. \cdot \operatorname{sinc} \left(\frac{0.7a}{\lambda} (C_l - C_{l'}) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

Si comparamos (3.42) y (3.57) vemos que se diferencian por el signo, por los parámetros deducidos y por el valor de y_0' .

Ya conocemos las expresiones necesarias para obtener una solución de $A_H = A_{h1} + A_{h2} + A_{h3} + A_{h4}$. Si nos fijamos en (3.36), (3.42), (3.48) y (3.52) sustituimos y simplificamos se obtiene:

$$\begin{aligned} A_H \cong d_n a \sum_{p=-P}^P \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \left[\frac{j^{p-m}}{L^2} e^{j\frac{2\pi}{L}(lp-l'm)} \left(H_{n-p}^{(2)}(KR) e^{-j(p-n)\pi} e^{-jKC_l(x_0-R)} e^{jKC_l'x_0} \right. \right. \\ \left. \left. - H_{n-p}^{(2)}(KR) e^{jKC_l(x_0-R)} e^{-jKC_l'x_0} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{a}{\lambda} (S_l - S_{l'}) \right) \right] \\ + 0.7a \cdot d_n \sum_{p=-P}^P \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \left[\frac{j^{p-m}}{L^2} e^{j\frac{2\pi}{L}(lp-l'm)} \left(H_{n-p}^{(2)}(KR) e^{-j(p-n)\frac{\pi}{2}} e^{jKS_l(y_0-R)} e^{-jKS_l'y_0} \right. \right. \\ \left. \left. - H_{n-p}^{(2)}(KR) e^{-j(p-n)\frac{3\pi}{2}} e^{-jKS_l(y_0-R)} e^{jKS_l'y_0} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{0.7a}{\lambda} (C_l - C_{l'}) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde en este caso se definen x_0 y y_0 simultáneamente para poder escribir la expresión de forma más compacta:

$$x_0 = \frac{0.7a}{2}$$

$$y_0 = \frac{a}{2}$$

Por lo tanto $A_{mn} = A_J + A_H$ queda definida a partir de (3.29) y (3.53).

3.2.3. Integral B_{mn}

La integral de la que nos ocuparemos es:

$$B_{mn} = \int_C g_n^\circ(\phi) \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* dc$$

donde $m = -N_i, \dots, N_i$ y $n = 1, \dots, M$. Para calcular esta integral al igual que con las anteriores se divide el contorno rectangular en cuatro tramos $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ (ver figura 6). Recordemos que en los tramos C_1 y C_2 la coordenada x es fija y por lo tanto la integral sólo va a depender de y . Ocurriría de forma parecida con C_3 y C_4 al ser la coordenada y fija, pero si nos fijamos en la expresión que define a g_n° (2.31) y (2.32) vemos que para estos tramos es nula. Por tanto para esta integral sólo tendremos que recorrer los dos tramos en los que y es variable C_1 y C_2 , siendo además su valor nulo o no dependiendo del valor que tome n .

La integral quedará:

$$B_{mn} = \int_{-a/2}^{a/2} g_n^\circ(\phi) \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* dy$$

$$+ \int_{-a/2}^{a/2} g_n^\circ(\phi) \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* (-dy) = B_1 + B_2 \quad (3.55)$$

donde B_1 es la integral sobre el tramo C_2 recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj que toma valores no nulos cuando $n \in [1, \dots, M_1]$. B_2 es la integral sobre el tramo C_1 que toma valores no nulos cuando $n \in [M_1 + 1, \dots, M]$, siendo M_i el número de modos guiados considerados en la guía i y $M = M_1 + M_2$.

En primer lugar resolveremos B_1 , para ello utilizamos (2.32), (2.25) y (3.1) conjugada, sustituimos teniendo en cuenta que la coordenada x es fija con valor $x_0 = \frac{0.7a}{2}$ y nos queda:

$$B_1 \cong \int_{-a/2}^{a/2} -\sqrt{\frac{2Z_{0(n-M_1)}^{(2)}}{a_2 b_2}} \operatorname{sen}\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a_2} x_2\right) \left(\frac{j^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{-jl\frac{2m\pi}{L}} e^{jK(C_l x_0 + S_l y)}\right) dy$$

donde recordemos que los dos accesos son iguales y por tanto cada modo tiene la misma impedancia característica en los dos accesos. Además observando la figura 6. se puede deducir que $x_2 = y + \frac{a}{2}$. Reescribiendo la expresión anterior tenemos:

$$B_1 \cong \int_{-a/2}^{a/2} -\sqrt{\frac{2Z_{0(n-M_1)}}{ab}} \operatorname{sen}\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2}\right)\right) \left(\frac{j^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{-jl\frac{2m\pi}{L}} e^{jK(C_l x_0 + S_l y)}\right) dy$$

Reordenando términos obtenemos:

$$B_1 \cong -\sqrt{\frac{2Z_{0(n-M_1)}}{ab}} \frac{j^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{-jl\frac{2m\pi}{L}} e^{+jK C_l x_0} \int_{-a/2}^{a/2} \operatorname{sen}\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2}\right)\right) e^{+jK S_l y} dy \quad (3.56)$$

Vemos que la integral que nos queda es un producto entre un seno y una exponencial que efectivamente tiene solución analítica. Este tipo de integrales se resuelven por partes, haciendo uso de esta resolución por partes dos veces, despejando luego la integral que vuelve a aparecer en la propia solución y reordenando términos se obtiene la solución, veamos:

$$\begin{aligned} & \int_{-a/2}^{a/2} \operatorname{sen}\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2}\right)\right) e^{+jK S_l y} dy = \\ & = \int_{-a/2}^{a/2} \operatorname{sen}\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2}\right)\right) e^{+jK S_l y} \frac{1}{jK S_l} \\ & - \frac{1}{jK S_l} \frac{(n-M_1)\pi}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2}\right)\right) e^{+jK S_l y} dy \end{aligned}$$

Aplicando a continuación la segunda integración por parte queda:

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{sen}\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a}\left(y+\frac{a}{2}\right)\right)e^{+jKS_l y} \frac{1}{jKS_l} \\
&- \frac{1}{jKS_l} \frac{(n-M_1)\pi}{a} \left[\frac{1}{jKS_l} \cos\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a}\left(y+\frac{a}{2}\right)\right)e^{+jKS_l y} \right. \\
&\left. + \frac{1}{jKS_l} \frac{(n-M_1)\pi}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \operatorname{sen}\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a}\left(y+\frac{a}{2}\right)\right)e^{+jKS_l y} dy \right]
\end{aligned}$$

Despejando la expresión de la integral tenemos:

$$\begin{aligned}
1 + \left(\frac{1}{jKS_l} \frac{(n-M_1)\pi}{a}\right)^2 \int_{-a/2}^{a/2} \operatorname{sen}\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a}\left(y+\frac{a}{2}\right)\right)e^{+jKS_l y} dy &= \\
= \left. \frac{a/2}{-a/2} \right] \frac{1}{jKS_l} \operatorname{sen}\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a}\left(y+\frac{a}{2}\right)\right)e^{+jKS_l y} & \\
- \left(\frac{1}{jKS_l}\right)^2 \frac{(n-M_1)\pi}{a} \cos\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a}\left(y+\frac{a}{2}\right)\right)e^{+jKS_l y} &=
\end{aligned}$$

Por tanto, finalmente obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
\int_{-a/2}^{a/2} \operatorname{sen}\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a}\left(y+\frac{a}{2}\right)\right)e^{+jKS_l y} dy &= \\
= \left. \frac{a/2}{-a/2} \right[K_1 \left(K_2 \operatorname{sen}\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a}\left(y+\frac{a}{2}\right)\right)e^{+jKS_l y} \right. & \\
\left. - K_3 \cos\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a}\left(y+\frac{a}{2}\right)\right)e^{+jKS_l y} \right) & \quad (3.57)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{jKS_l} \frac{(n - M_1)\pi}{a} \right)^2} \\
 K_2 &= \frac{1}{jKS_l} \\
 K_3 &= \left(\frac{1}{jKS_l} \right)^2 \frac{(n - M_1)\pi}{a}
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Si acabamos de calcular la integral, finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \int_{-a/2}^{a/2} \text{sen} \left(\frac{(n - M_1)\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) e^{+jKS_l y} dy &= \\
 &= K_1 K_3 \left(e^{-jKS_l \frac{a}{2}} - \cos((n - M_1)\pi) e^{+jKS_l \frac{a}{2}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Y sustituyendo (3.59) en (3.56) se tiene que:

$$B_1 \cong -\sqrt{\frac{2Z_{0(n-M_1)}}{ab}} \frac{j^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{-jl \frac{2m\pi}{L}} e^{+jKClx_0} K_1 K_3 \left(e^{-jKS_l \frac{a}{2}} - \cos((n - M_1)\pi) e^{+jKS_l \frac{a}{2}} \right) \tag{3.60}$$

donde $n \in [M_1 + 1, \dots, M]$.

Esta expresión presenta un problema puesto que cuando $l = 0$ el valor de $K_1 K_3$ es una indeterminación, para solucionar este inconveniente calculamos el límite de $K_1 K_3$ cuando l tiende a 0, y por tanto según (3.2) $S_l \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{S_l \rightarrow 0} K_1 K_3 &= \lim_{S_l \rightarrow 0} \frac{(jKS_l a)^2}{(jKS_l a)^2 + ((n - M_1)\pi)^2} \frac{(n - M_1)\pi}{(jKS_l a)^2 a} = \\
 &= \lim_{S_l \rightarrow 0} \frac{(n - M_1)\pi a}{(jKS_l a)^2 + ((n - M_1)\pi)^2} = \frac{a}{(n - M_1)\pi}
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Cuando programemos (3.59) deberemos de tener en cuenta este detalle.

Pasamos a resolver B_2 sobre el tramo C_1 , para ello utilizamos (2.31), (2.25) y (3.1) conjugada, sustituimos teniendo en cuenta que la coordenada x es fija pero esta vez con valor $x_0 = -\frac{0.7a}{2}$, además los dos accesos son iguales y según la figura 6. $x_1 = y + \frac{a}{2}$, con todo esto y reordenando términos nos queda:

$$B_2 \cong -\sqrt{\frac{2Z_{0n}}{ab}} \frac{j^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{-jl\frac{2m\pi}{L}} e^{+jKC_l x_0} \int_{-a/2}^{a/2} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}\left(y + \frac{a}{2}\right)\right) e^{+jKS_l y} (-dy)$$

La integral que queda es muy parecida a la anterior, sólo se diferencian por un signo y porque en lugar de $n - M_1$ aparece simplemente n . Por tanto la solución será:

$$B_2 \cong \sqrt{\frac{2Z_{0n}}{ab}} \frac{j^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{-jl\frac{2m\pi}{L}} e^{+jKC_l x_0} K_1 K_3 \left(e^{-jKS_l \frac{a}{2}} - \cos(n\pi) e^{+jKS_l \frac{a}{2}} \right) \quad (3.62)$$

donde K_1 y K_3 tienen la misma expresión que en (3.58) pero con n en lugar de $n - M_1$, y $n \in [1, \dots, M_1]$. Cuando $l = 0$ el valor de $K_1 K_3$ es una indeterminación que se soluciona como en el caso anterior, Obtenemos lógicamente el mismo resultado que (3.61) pero con n en lugar de $n - M_1$.

Conocidas (3.60) y (3.62) ya tenemos la solución para $B_{mn} = B_1 + B_2$.

$$B_{mn} \cong \begin{cases} \left[\sqrt{\frac{2Z_{0n}}{ab}} \frac{j^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{-jl\frac{2m\pi}{L}} e^{-jKC_l x_0} \cdot K_1 K_3 \left(e^{-jKS_l \frac{a}{2}} - \cos(n\pi) e^{+jKS_l \frac{a}{2}} \right) \right] & n \in [1, \dots, M_1] \\ \left[-\sqrt{\frac{2Z_{0(n-M_1)}}{ab}} \frac{j^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{-jl\frac{2m\pi}{L}} e^{+jKC_l x_0} \cdot K_1 K_3 \left(e^{-jKS_l \frac{a}{2}} - \cos((n-M_1)\pi) e^{+jKS_l \frac{a}{2}} \right) \right] & n \in [M_1 + 1, \dots, M] \end{cases} \quad (3.63)$$

Donde se considera $x_0 = \frac{0.7a}{2}$.

3.2.4. Integral G_{mn}

Esta integral es, a primera vista, la más complicada ya que aparecen funciones de Bessel y Hankel derivadas respecto de ρ :

$$G_{mn} = \int_C \frac{-1}{\eta} \left[\frac{n}{K\rho(\phi)} \left(J_n(K\rho(\phi)) + d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi)) \right) \right] \text{sen}(\phi) \\ + j \left(J_n'(K\rho(\phi)) + d_n H_n^{(2)'}(K\rho(\phi)) \right) \text{cos}(\phi) \Big| e^{jn\phi} g_m^*(\phi) d\phi$$

Para evitar el tener que calcular derivadas respecto de ρ utilizaremos la regla de la cadena para obtener una nueva expresión equivalente a la anterior pero más sencilla. Sabemos que esta expresión proviene de imponer continuidad de campo magnético en el contorno rectangular y por tanto las derivadas aparecen como consecuencia de utilizar una de las ecuaciones de Maxwell para obtener el campo magnético (2.19). Utilizando la regla de la cadena podemos escribir (2.20) de la siguiente forma:

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{j\omega\mu} \left(\hat{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} \right) + \hat{\phi} \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} \right) \right) \quad (3.64)$$

Y puesto que lo que buscamos es la componente en \hat{y} del campo magnético, como se vio en secciones anteriores se proyecta \vec{H} sobre la dirección \hat{y} . Así, teniendo en cuenta que:

$$x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ \hat{\rho} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \\ \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$$

podemos escribir $\vec{H} \cdot \hat{y}$ de la siguiente forma:

$$\vec{H} \cdot \hat{y} = -\frac{1}{j\omega\mu} \left(\sin \phi \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial x} (-\rho \sin \phi) \right) - \cos \phi \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \cos \phi \right) \right) \\ = -\frac{1}{j\omega\mu} \left(-\sin^2 \phi \frac{\partial E_z}{\partial x} - \cos^2 \phi \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (3.65)$$

donde puesto que las funciones de Bessel y Hankel provienen de los modos cilíndricos la expresión para E_z es:

$$E_z = \sum_{n=-N_i}^{N_i} \left(J_n(K\rho) + d_n H_n^{(2)}(K\rho) \right) j_n e^{jn\phi}$$

y por tanto según el desarrollo hecho en secciones anteriores la integral a resolver se reduce a:

$$G_{mn} = \int_C \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\delta(J_n(K\rho)e^{jn\phi})}{\delta x} + d_n \frac{\delta(H_n^{(2)}(K\rho)e^{jn\phi})}{\delta x} \right) g_m^*(\phi) dc \quad (3.66)$$

donde g_m^* esta definido en (2.49), $m = 1, \dots, M$ y $n = -N_i, \dots, N_i$. Para que resulte más sencillo el proceso de resolución vamos a separar esta integral en la suma de otras dos:

$$G_{mn} = \int_C \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\delta(J_n(K\rho)e^{jn\phi})}{\delta x} g_m^*(\phi) dc + \int_C \frac{1}{j\omega\mu} d_n \frac{\delta(H_n^{(2)}(K\rho)e^{jn\phi})}{\delta x} g_m^*(\phi) dc = G_J + G_H$$

En primer lugar resolveremos G_J . Para ello como ya se ha hecho en las integrales anteriores recorreremos la curva $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ (ver figura 6) en sentido contrario a las agujas del reloj empezando por C_2 y nos queda:

$$\begin{aligned} G_J &= \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\delta(J_n(K\rho)e^{jn\phi})}{\delta x} g_m^*(\phi) dy \\ &+ \int_{-0.7a/2}^{0.7/2} \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\delta(J_n(K\rho)e^{jn\phi})}{\delta x} g_m^*(\phi) (-dx) \\ &+ \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\delta(J_n(K\rho)e^{jn\phi})}{\delta x} g_m^*(\phi) (-dy) \\ &+ \int_{-0.7a/2}^{0.7a/2} \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\delta(J_n(K\rho)e^{jn\phi})}{\delta x} g_m^*(\phi) dx = G_{j1} + G_{j2} + G_{j3} + G_{j4} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Debido a la propia definición de g_m^* las integrales G_{j1} y G_{j3} tendrán valores nulos para ciertos valores de m .

Pasamos a resolver G_{j_1} . Sustituimos (3.1) en G_{j_1} y derivamos la expresión respecto x , sustituimos también (2.49) y utilizamos a su vez (2.25), a continuación puesto que nos encontramos en el tramo C_2 fijamos la coordenada x con lo que la integral sólo dependerá de y . Teniendo en cuenta que los dos accesos son iguales y que $x_2 = y + \frac{a}{2}$ (ver figura 6) reordenando términos queda:

$$G_{j_1} \cong -\frac{1}{jK\eta} \sqrt{\frac{2Z_{0(m-M_1)}}{ab}} \frac{j^n}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[(-jKC_l) e^{jl\frac{2n\pi}{L}} e^{-jKC_l x_0} \right. \\ \left. \cdot \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jKS_l y} \operatorname{sen} \left(\frac{(m-M_1)\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) dy \right]$$

donde $x_0 = \frac{0.7a}{2}$ y $m \in [M_1 + 1, \dots, M]$ ya que así se define $g_m^{\circ*}$ para C_2 en (2.49).

La integral que se ha de resolver es casi igual a la resuelta para B_{mm} (3.59), sólo cambia que en este caso la exponencial es la conjugada. Se puede aprovechar el desarrollo hecho anteriormente en el que las constantes definidas en (3.58) K_1 y K_3 tendrían el mismo valor y K_2 estaría cambiada de signo en este caso. Por tanto la expresión sustituyendo la integral por su solución quedaría:

$$G_{j_1} \cong \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{2Z_{0(m-M_1)}}{ab}} \frac{j^n}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[C_l e^{jl\frac{2n\pi}{L}} e^{-jKC_l x_0} \right. \\ \left. \cdot K_1 K_3 \left(e^{jKS_l \frac{a}{2}} - \cos((m-M_1)\pi) e^{-jKS_l \frac{a}{2}} \right) \right] \quad (3.68)$$

donde no olvidemos que sólo tiene valores no nulos para $m \in [M_1 + 1, \dots, M]$. Y además cuando $l \rightarrow 0$ aparece una indeterminación que se soluciona como (3.61).

Para calcular G_{j_2} , integral sobre el tramo C_4 , se debe tener en cuenta que su expresión variará ligeramente dependiendo del valor que tome m debido a la forma en la que está definida $g_m^{\circ*}$, en principio le llamaremos m y más adelante matizaremos sus valores. Sustituimos (3.1) en G_{j_2} y derivamos la expresión respecto x , sustituimos también $g_m^{\circ*}$ por la expresión adecuada de (2.49) recordando que $\ell = 0.7a$, a

continuación puesto que nos encontramos en el tramo C_4 fijamos la coordenada y con lo que la integral sólo dependerá de x . Simplificando y reordenando términos queda:

$$G_{j_2} \cong \frac{1}{jK\eta} \frac{j^n}{L} \sum_{l=0}^{L-1} (-jKC_l) e^{jl\frac{2n\pi}{L}} e^{-jKS_l y_0} \int_{-0.7a/2}^{0.7/2} e^{-jKC_l x} \sin\left(\frac{m\pi}{0.7a} \left(x - \frac{0.7a}{2}\right)\right) (-dx)$$

donde $y_0 = \frac{a}{2}$.

La integral es parecida a las anteriores resueltas por partes, aunque hay que tener en cuenta que dentro del seno se le resta un término a x en contra de lo que ocurría en las integrales anteriores, esto cambiará las cosas cuando se sustituyan los límites de integración. De todos modos es sencillo llegar a la expresión final de G_{j_2} simplificada:

$$G_{j_2} \cong \frac{1}{\eta} \frac{j^n}{L} \sum_{l=0}^{L-1} C_l e^{jl\frac{2n\pi}{L}} e^{-jKS_l y_0} \cdot K_1 K_3 \left[e^{-jKC_l \frac{0.7a}{2}} - \cos(m\pi) e^{+jKC_l \frac{0.7a}{2}} \right] \quad (3.69)$$

donde dependiendo del valor que tome m la expresión variará un poco. Si $m \in [1, \dots, M_1]$ la expresión no cambia, pero si $m \in [M_1 + 1, \dots, M]$ la expresión variará siendo $m = m - M_1$.

Para resolver G_{j_3} y G_{j_4} sobre los contornos C_1 y C_3 respectivamente el proceso es igual que el seguido hasta ahora. Se sustituye (3.1) en las expresiones, se deriva respecto x , y sustituimos también la expresión de g_m^* correspondiente en cada caso. En el caso de G_{j_3} puesto que nos encontramos en el tramo C_1 fijamos la coordenada x con lo que la integral sólo dependerá de y además los dos accesos son iguales y $x_1 = y + \frac{a}{2}$ (ver figura 6). Reordenamos términos y queda:

$$G_{j_3} \cong -\frac{1}{jK\eta} \sqrt{\frac{2Z_{0m}}{ab}} \frac{j^n}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[(-jKC_l) e^{jl\frac{2n\pi}{L}} e^{-jKC_l x_0} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jKS_l y} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2}\right)\right) (-dy) \right]$$

donde $x_0 = -\frac{0.7a}{2}$ y $m \in [1, \dots, M_1]$ ya que así se define $g_m^{\circ*}$ para C_1 en (2.49).

Finalmente la integral quedará:

$$G_{j3} \cong -\frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{2Z_{0m}}{ab}} \frac{j^n}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[C_l e^{jl \frac{2n\pi}{L}} e^{-jKC_l x_0} \cdot K_1 K_3 \left(e^{jKS_l \frac{a}{2}} - \cos(m\pi) e^{-jKS_l \frac{a}{2}} \right) \right] \quad (3.70)$$

Por otro lado G_{j4} es prácticamente igual que G_{j2} . Las expresiones que quedan son las mismas pero cambiadas de signo y con $y_0 = -\frac{a}{2}$. Por tanto finalmente tendremos:

$$G_{j4} \cong -\frac{1}{\eta} \frac{j^n}{L} \sum_{l=0}^{L-1} C_l e^{jl \frac{2n\pi}{L}} e^{-jKS_l y_0} \cdot K_1 K_3 \left(e^{-jKC_l \frac{0.7a}{2}} - \cos(m\pi) e^{+jKC_l \frac{0.7a}{2}} \right) \quad (3.71)$$

donde al igual que antes dependiendo del valor que tome m la expresión variará un poco. Si $m \in [1, \dots, M_1]$ la expresión no cambia, pero si $m \in [M_1 + 1, \dots, M]$ la expresión variará siendo $m = m - M_1$. Recordemos que en todos los casos $K_1 K_3$ cuando $l = 0$ es una indeterminación que se soluciona como (3.61).

Finalmente obtenemos:

$$G_j = \begin{cases} G_{j3} + G_{j2} + G_{j4} & m \in [1, \dots, M_1] \\ G_{j1} + G_{j2} + G_{j4} & m \in [M_1 + 1, \dots, M] \end{cases}$$

donde las expresiones están definidas en (3.68), (3.69), (3.70) y (3.71). Sustituimos estas expresiones en G_j y obtenemos la solución analítica de la integral.

$$G_J = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\eta} \frac{j^n}{L} \sum_{l=0}^{L-1} C_l e^{jl \frac{2n\pi}{L}} \left[(e^{-jKS_l y_0} - e^{+jKS_l y_0}) \cdot K_1 K_3 \left(e^{-jKC_l \frac{0.7a}{2}} - \cos(m\pi) e^{+jKC_l \frac{0.7a}{2}} \right) \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{2Z_{0m}}{ab}} e^{+jKC_l x_0} K_1 K_3 \left(e^{jKS_l \frac{a}{2}} - \cos(m\pi) e^{-jKS_l \frac{a}{2}} \right) \right] \\ \qquad \qquad \qquad m \in [1, \dots, M_1] \\ \\ \frac{1}{\eta} \frac{j^n}{L} \sum_{l=0}^{L-1} C_l e^{jl \frac{2n\pi}{L}} \left[(e^{-jKS_l y_0} - e^{+jKS_l y_0}) \cdot K_1 K_3 \left(e^{-jKC_l \frac{0.7a}{2}} - \cos((m - M_1)\pi) e^{+jKC_l \frac{0.7a}{2}} \right) \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{2Z_{0(m-M_1)}}{ab}} e^{-jKC_l x_0} K_1 K_3 \left(e^{jKS_l \frac{a}{2}} - \cos((m - M_1)\pi) e^{-jKS_l \frac{a}{2}} \right) \right] \\ \qquad \qquad \qquad m \in [M_1 + 1, \dots, M] \end{array} \right. \quad (3.72)$$

donde $x_0 = \frac{0.7a}{2}$ e $y_0 = \frac{a}{2}$.

Continuamos resolviendo G_H . Para ello como ya se ha hecho en las integrales anteriores recorreremos la curva $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ (ver figura 6) en sentido contrario a las agujas del reloj empezando por C_2 :

$$\begin{aligned}
G_H &= \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{j\omega\mu} d_n \frac{\delta(H_n^{(2)}(K\rho)e^{jn\phi})}{\delta x} g_m^{\circ*}(\phi) dy \\
&+ \int_{-0.7a/2}^{0.7/2} \frac{1}{j\omega\mu} d_n \frac{\delta(H_n^{(2)}(K\rho)e^{jn\phi})}{\delta x} g_m^{\circ*}(\phi) (-dx) \\
&+ \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{j\omega\mu} d_n \frac{\delta(H_n^{(2)}(K\rho)e^{jn\phi})}{\delta x} g_m^{\circ*}(\phi) (-dy) \\
&+ \int_{-0.7a/2}^{0.7a/2} \frac{1}{j\omega\mu} d_n \frac{\delta(H_n^{(2)}(K\rho)e^{jn\phi})}{\delta x} g_m^{\circ*}(\phi) dx = G_{h1} + G_{h2} + G_{h3} + G_{h4} \quad (3.73)
\end{aligned}$$

Debido a la propia definición de $g_m^{\circ*}$ las integrales G_{h1} y G_{h3} tendrán valores nulos para ciertos valores de m .

Primero resolvemos G_{h1} . Sustituimos (3.4) en G_{h1} :

$$G_{h1} \cong \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{j\omega\mu} d_n \frac{\delta}{\delta x} \left(\sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21}) e^{-j(p-n)\phi_{21}} \cdot J_p(K\rho') e^{jp\phi'} \right) \mathbf{g}_m^*(\phi) dy$$

Los valores de los parámetros ϕ_{21} y d_{21} se pueden determinar al igual que se hizo en A_H observando la figura 10, ya que nos encontramos en el tramo C_2 . Así $d_{21} = \max(x_0, R)$ donde R viene definida por (3.33) y $\phi_{21} = \pi$. En cuanto a las coordenadas del nuevo sistema de referencia $y' = y$, $x' = x - R$. Sustituimos (3.1) y derivamos la expresión respecto x :

$$G_{h1} \cong \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{j\omega\mu} d_n \left[\sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21}) e^{-j(p-n)\pi} \cdot \frac{j^p}{L} \sum_{l=0}^{L-1} (-jKC_l) e^{jl\frac{2p\pi}{L}} e^{-jK(C_l(x-R)+S_ly)} \right] \mathbf{g}_m^*(\phi) dy$$

Sustituimos también (2.49) y utilizamos a su vez (2.25), a continuación puesto que nos encontramos en el tramo C_2 fijamos la coordenada x con lo que la integral sólo dependerá de y . Teniendo en cuenta que los dos accesos son iguales y que $x_2 = y + \frac{a}{2}$ (ver figura 6) reordenando términos queda:

$$G_{h1} \cong -\frac{1}{jK\eta} \sqrt{\frac{2Z_{0(m-M_1)}}{ab}} d_n \sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21}) e^{-j(p-n)\pi} \frac{j^p}{L} \sum_{l=0}^{L-1} (-jKC_l) e^{jl\frac{2p\pi}{L}} e^{-jKC_l(x_0-R)} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jKS_ly} \text{sen} \left(\frac{(m-M_1)\pi}{a_i} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) dy$$

Esta integral ya se resolvió anteriormente en G_{j1} :

$$G_{h1} \cong \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{2Z_{0(m-M_1)}}{ab}} d_n \sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21}) e^{-j(p-n)\pi} \frac{j^p}{L} \sum_{l=0}^{L-1} C_l e^{jl\frac{2p\pi}{L}} e^{-jK C_l(x_0-R)} \cdot K_1 K_3 \left(e^{jK S_l \frac{a}{2}} - \cos((m-M_1)\pi) e^{-jK S_l \frac{a}{2}} \right) \quad (3.74)$$

donde no olvidemos que tiene valores no nulos para $m \in [M_1 + 1, \dots, M]$, y $x_0 = \frac{0.7a}{2}$.

Calculamos ahora G_{h2} , integral sobre el tramo C_4 . Al igual que G_{j2} su expresión variará ligeramente dependiendo del valor que tome m debido a la forma en la que está definida g_m^* . Seguimos el mismo proceso que con G_{h1} , puesto que nos encontramos en el tramo C_4 la integral sólo dependerá de x , y viendo la figura 11, deducimos que $d_{21} = \max(y_0, R)$ donde R está definido en (3.39), $\phi_{21} = \frac{3\pi}{2}$ y según el nuevo sistema de referencia $x' = x$, $y' = y - R$. Simplificando y reordenando términos queda:

$$G_{h2} \cong -\frac{1}{\eta} d_n \sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21}) e^{-j(p-n)\frac{3\pi}{2}} \frac{j^p}{L} \sum_{l=0}^{L-1} C_l e^{jl\frac{2p\pi}{L}} e^{-jK S_l(y_0-R)} \cdot \int_{-0.7a/2}^{0.7/2} e^{-jK C_l x} \sin\left(\frac{m\pi}{0.7a} \left(x - \frac{0.7a}{2}\right)\right) (-dx)$$

donde esta integral ya se resolvió (3.69), por tanto queda:

$$G_{h2} \cong \frac{1}{\eta} d_n \sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21}) e^{-j(p-n)\frac{3\pi}{2}} \frac{j^p}{L} \sum_{l=0}^{L-1} C_l e^{jl\frac{2p\pi}{L}} e^{-jK S_l(y_0-R)} \cdot K_1 K_3 \left(e^{-jK C_l \frac{0.7a}{2}} - \cos(m\pi) e^{+jK C_l \frac{0.7a}{2}} \right) \quad (3.75)$$

donde $y_0 = \frac{a}{2}$, y dependiendo del valor que tome m la expresión variará un poco. Si $m \in [1, \dots, M_1]$ la expresión no cambia, pero si $m \in [M_1 + 1, \dots, M]$ la expresión variará siendo $m = m - M_1$.

La integral G_{h3} es prácticamente igual a G_{h1} . Cambia el signo del diferencial, el valor de x_0 , los parámetros y cambio de sistema de referencia derivados de utilizar (3.4) y el rango de m en el que la integral es no nula. De la figura 12, pues esta integral es sobre C_2 , tenemos que $d_{21} = \max(\text{abs}(x_0), R)$, donde el valor de R viene dado por (3.45) $\phi = 2\pi$ y las coordenadas del nuevo sistema de referencia respecto al original son $y' = y$, $x' = x + R$. La solución a la integral queda:

$$G_{h3} \cong -\frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{2Z_{0m}}{ab}} d_n \sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21}) \frac{j^p}{L} \sum_{l=0}^{L-1} C_l e^{jl \frac{2p\pi}{L}} e^{-jKC_l(x_0+R)} \cdot K_1 K_3 \left(e^{jKS_l \frac{a}{2}} - \cos(m\pi) e^{-jKS_l \frac{a}{2}} \right) \quad (3.76)$$

donde no olvidemos que tiene valores no nulos para $m \in [1, \dots, M_1]$, y $x_0 = -\frac{0.7a}{2}$.

Por último la integral G_{h4} se diferencia de G_{h2} en el signo que toma el diferencial, el valor de y_0 , por los nuevos parámetros y el cambio de sistema de referencia derivados del uso de la expresión (3.4). Esta integral sólo dependerá de x puesto que nos encontramos en el tramo C_3 . De la figura 13 extraemos que $d_{21} = \max(\text{abs}(y_0), R)$, donde R viene dado por (3.50), $\phi = \frac{\pi}{2}$, y las coordenadas del nuevo sistema de referencia respecto al sistema de referencia original son $x' = x$, $y' = y + R$:

$$G_{h4} \cong \frac{1}{\eta} d_n \sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21}) e^{-j(p-n)\frac{\pi}{2}} \frac{j^p}{L} \sum_{l=0}^{L-1} C_l e^{jl \frac{2p\pi}{L}} e^{-jKS_l(y_0+R)} \cdot K_1 K_3 \left(e^{-jKC_l \frac{0.7a}{2}} - \cos(m\pi) e^{+jKC_l \frac{0.7a}{2}} \right) \quad (3.77)$$

donde $y_0 = -\frac{a}{2}$, y dependiendo del valor que tome m la expresión variará un poco. Si $m \in [1, \dots, M_1]$ la expresión no cambia, pero si $m \in [M_1 + 1, \dots, M]$ la expresión variará siendo $m = m - M_1$.

Recordemos que en todos estas integrales cuando $l = 0$ y por tanto $S_l \rightarrow 0$, $K_1 K_3$ es una indeterminación que se soluciona tomando el límite como se muestra en (3.61).

Finalmente ya sólo queda obtener G_H :

$$G_H = \begin{cases} G_{h3} + G_{h2} + G_{h4} & m \in [1, \dots, M_1] \\ G_{h1} + G_{h2} + G_{h4} & m \in [M_1 + 1, \dots, M] \end{cases}$$

donde las expresiones están definidas en (3.74), (3.75), (3.76) y (3.77).

$$G_H = \begin{cases} \frac{1}{\eta} d_n \sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)} (Kd_{21}) \frac{j^p}{L} \sum_{l=0}^{L-1} C_l e^{jl \frac{2p\pi}{L}} \left[\left(e^{-j(p-n)\frac{3\pi}{2}} e^{-jKS_l(y_0-R)} - e^{-j(p-n)\frac{\pi}{2}} e^{+jKS_l(y_0-R)} \right) \right. \\ \cdot K_1 K_3 \left(e^{-jKC_l \frac{0.7a}{2}} - \cos((m-M_1)\pi) e^{+jKC_l \frac{0.7a}{2}} \right) \\ \left. - \sqrt{\frac{2Z_{0m}}{ab}} e^{-j(p-n)\pi} e^{+jKC_l(x_0-R)} K_1 K_3 \left(e^{jKS_l \frac{a}{2}} - \cos(m\pi) e^{-jKS_l \frac{a}{2}} \right) \right] \\ m \in [1, \dots, M_1] \\ \\ \frac{1}{\eta} d_n \sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)} (Kd_{21}) \frac{j^p}{L} \sum_{l=0}^{L-1} C_l e^{jl \frac{2p\pi}{L}} \left[\left(e^{-j(p-n)\frac{3\pi}{2}} e^{-jKS_l(y_0-R)} - e^{-j(p-n)\frac{\pi}{2}} e^{+jKS_l(y_0-R)} \right) \right. \\ \cdot K_1 K_3 \left(e^{-jKC_l \frac{0.7a}{2}} - \cos((m-M_1)\pi) e^{+jKC_l \frac{0.7a}{2}} \right) \\ \left. + \sqrt{\frac{2Z_{0(m-M_1)}}{ab}} e^{-j(p-n)\pi} e^{-jKC_l(x_0-R)} K_1 K_3 \left(e^{jKS_l \frac{a}{2}} - \cos((m-M_1)\pi) e^{-jKS_l \frac{a}{2}} \right) \right] \\ m \in [M_1 + 1, \dots, M] \end{cases} \quad (3.78)$$

donde en este caso se definen x_0 y y_0 simultáneamente para poder escribir la expresión de forma más compacta:

$$x_0 = \frac{0.7a}{2}$$

$$y_0 = \frac{a}{2}$$

Por lo tanto $G_{mn} = G_J + G_H$ queda definida a partir de (3.72) y (3.78).

3.2.5. Integral H_{mn}

Esta integral es de la forma:

$$H_{mn} = \int_C g_n^\circ(\phi) Y_{0n} g_m^{\circ*}(\phi) dc$$

donde g_n° y $g_m^{\circ*}$ vienen definidas según (2.31), (2.32), (2.25) y (2.49), $m = 1, \dots, M$ y $n = 1, \dots, M$. Para calcular esta integral al igual que con las anteriores se divide el contorno rectangular en cuatro tramos $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ (ver figura 6). Recordemos que en los tramos C_1 y C_2 la coordenada x es fija y por lo tanto la integral sólo va a depender de y . Como ocurría con B_{mn} la integral sobre C_3 y C_4 si nos fijamos en la expresión que define a g_n° (2.31) y (2.32) es nula. Por tanto para esta integral sólo tendremos que recorrer los dos tramos en los que y es variable C_1 y C_2 , siendo además su valor nulo o no dependiendo del valor que tome n y m .

La integral quedará:

$$\begin{aligned} H_{mn} &= Y_{0n} \int_{-a/2}^{a/2} g_n^\circ(\phi) g_m^{\circ*}(\phi) dy \\ &+ Y_{0n} \int_{-a/2}^{a/2} g_n^\circ(\phi) g_m^{\circ*}(\phi) (-dy) = H_1 + H_2 \end{aligned} \quad (3.79)$$

donde H_1 es la integral sobre el tramo C_2 recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj que toma valores no nulos cuando $[m, n] \in [1, \dots, M_1]$. Mientras que H_2 es la integral sobre el tramo C_1 que toma valores no nulos cuando $[m, n] \in [M_1 + 1, \dots, M]$, siendo M_i el número de modos guiados considerados en la guía i y $M = M_1 + M_2$.

Resolvemos en primer lugar H_1 . Para ello sustituimos g_n° y $g_m^{\circ*}$ por (2.32) y (2.49), que al mismo tiempo utilizan (2.25). La integral a resolver es:

$$H_1 = Y_{0(n-M_1)} \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{\frac{2Z_{0(n-M_1)}^{(2)}}{a_2 b_2}} \operatorname{sen}\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a_2} x_2\right) \sqrt{\frac{2Z_{0(m-M_1)}^{(2)}}{a_2 b_2}} \operatorname{sen}\left(\frac{(m-M_1)\pi}{a_2} x_2\right) dy$$

donde teniendo en cuenta que los dos accesos son iguales, que $x_2 = y + \frac{a}{2}$ (ver figura 6), simplificando y reordenando términos obtenemos:

$$H_1 = Y_{0(n-M_1)} \frac{2}{a b} \sqrt{Z_{0(n-M_1)}} \sqrt{Z_{0(m-M_1)}} \\ \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \text{sen} \left(\frac{(n-M_1)\pi}{a_2} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) \text{sen} \left(\frac{(m-M_1)\pi}{a_2} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) dy$$

La integral que nos queda para calcular es muy sencilla, se trata de un producto de funciones trigonométricas que se resuelve de forma directa:

$$\int_{-a/2}^{a/2} \text{sen} \left(\frac{(n-M_1)\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) \text{sen} \left(\frac{(m-M_1)\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) dy \\ = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2} \cos \left(\frac{(n-m)\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{(n+m-2M_1)\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) dy \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{(n-m)\pi} \right) \sin \left(\frac{(n-m)\pi}{a} a \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{(n+m-M_1)\pi} \right) \sin \left(\frac{(n+m-M_1)\pi}{a} a \right) \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{(n-m)\pi} \right) \sin(0) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{(n+m-M_1)\pi} \right) \sin(0) \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{(n-m)\pi} \right) \sin((n-m)\pi) - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{(n+m-M_1)\pi} \right) \sin((n+m-M_1)\pi) \\ = \frac{a}{2} \sin c(n-m) - \frac{a}{2} \sin c(n+m-M_1) \quad (3.80)$$

Y por tanto:

$$H_1 = Y_{0(n-M_1)} \frac{2}{a b} \sqrt{Z_{0(n-M_1)}} \sqrt{Z_{0(m-M_1)}} \left(\frac{a}{2} \sin c(n-m) - \frac{a}{2} \sin c(n+m-M_1) \right) \\ = Y_{0(n-M_1)} \frac{2}{a b} \sqrt{Z_{0(n-M_1)}} \sqrt{Z_{0(m-M_1)}} \left(\frac{a}{2} \sin c(n-m) \right)$$

donde se puede ver fácilmente que esta integral sólo tomará valores no nulos cuando $n = m$.

Finalmente la solución será:

$$H_1 = \begin{cases} Y_{0(n-M_1)} \frac{1}{b} Z_{0(n-M_1)} & n = m \in [M_1 + 1, \dots, M] \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (3.81)$$

Por otra parte la resolución de H_2 es prácticamente igual a la de H_1 , veamos:

$$H_2 = Y_{0n} \int_{-a/2}^{a/2} g_n^\circ(\phi) g_m^{\circ*}(\phi) (-dy)$$

Al igual que antes sustituyendo g_n° y $g_m^{\circ*}$ por (2.31) y (2.49), que utilizan a su vez (2.25) y recordando que como esta integral es sobre C_1 tenemos que $[m, n] \in [1, \dots, M_1]$:

$$H_2 = Y_{0n} \frac{2}{a b} \sqrt{Z_{0n}} \sqrt{Z_{0m}} \int_{-a/2}^{a/2} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) (-dy)$$

Vemos que la integral es prácticamente la misma, quedando finalmente:

$$H_2 = -Y_{0n} \frac{2}{a b} \sqrt{Z_{0n}} \sqrt{Z_{0m}} \left(\frac{a}{2} \sin c(n-m) \right)$$

Y por tanto:

$$H_2 = \begin{cases} -Y_{0n} \frac{1}{b} Z_{0n} & n = m \in [1, \dots, M_1] \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (3.82)$$

Sabemos que $Y_{0n} = \frac{1}{Z_{0n}}$ y $b = \frac{a}{2}$ ya que suponemos que la guía con la que estamos trabajando está normalizada, sustituyendo (2.36) y teniendo en cuenta (3.81) y (3.82):

$$H_{mn} = \begin{cases} \frac{2}{a} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (3.83)$$

3.3. Análisis de resultados y comparación con la solución numérica

3.3.1. Introducción

Para averiguar si las expresiones anteriores van a proporcionar valores suficientemente cercanos a la solución exacta y si van a cumplir los requisitos temporales que se buscan, calcularemos la solución numérica de las expresiones obtenidas y compararemos dichos resultados calculando el error cometido debido a las aproximaciones realizadas y el coste temporal que tiene cada una de las formas de resolución del problema.

En primer lugar se compararán las integrales sobre un solo tramo, utilizando el tramo C_2 por ejemplo, para ello será necesario fijar el valor de $[m, n]$. A continuación se comparará la expresión completa de las integrales a lo largo de todo el contorno manteniendo aún un valor de $[m, n]$ fijo. Finalmente se calculará la matriz completa y se comparará, sobretodo, el coste temporal respecto a la matriz obtenida utilizando métodos numéricos.

Una vez obtenidas todas las matrices necesarias, se pasará a calcular la matriz de dispersión generalizada. Para asegurarnos de que se obtiene un resultado correcto de S se deberá estudiar el mal condicionamiento de las matrices y en caso de obtener resultados negativos se puede estudiar la posibilidad de solucionar el problema mediante el cálculo del otro conjunto de integrales.

El valor que se le dará a la anchura de la guía a partir de ahora será $a = 19.05mm$. El diámetro del poste circular será $0.6a$ y los tramos sobre los que integramos paralelos al eje x tendrán una medida de $\ell = 0.7a$. Además tomaremos un valor de $\frac{a}{\lambda_0} = 0.9$, de donde podremos obtener la frecuencia en la que estamos trabajando.

Además para hacer todos estos cálculos se deberá determinar el valor de algunos parámetros que en secciones anteriores no se especificaron, pues tomarán el valor que haga que el error entre las expresiones calculadas analíticamente y la resolución con métodos numéricos sea mínima. Estos parámetros son, por ejemplo, la L de la expresión (3.1) en cada una de las integrales en las que se utiliza, la P de (3.4) que como veremos es la que más complicaciones dará, la s de las figuras 10, 11, 12 y 13 que se necesita para obtener la R , etc.

El lenguaje que se utilizará para programar las integrales necesarias y poder realizar las comparaciones oportunas será Matlab. Como ya se ha indicado, se tendrá que utilizar un método numérico. En principio se utilizará una función interna de Matlab que evalúa numéricamente integrales definidas utilizando el método de Newton-Cotes adaptativo de orden 8, esta función es 'quad8'. En algunos casos este método alcanza el nivel límite de recursión dependiendo del valor de $[m, n]$, con lo que para obtener un resultado más fiable se utilizará un método programado que evalúa integrales definidas utilizando Simpson adaptativo.

Una vez señalado todo esto pasamos a comparar los resultados empezando por la Matriz A , pues es la que más complicaciones dará, puesto que las matrices B y H son sencillas y con la matriz G se tendrán prácticamente los mismos problemas que los ocasionados por la matriz A .

3.3.2. Matriz A_{mn}

Para poder determinar con mayor facilidad el valor de los parámetros que nos faltan por especificar para hacer que el error sea mínimo, volvemos a separar la integral A_{mn} en dos partes A_J y A_H como se hizo en (3.6). En primer lugar estudiaremos A_J .

Como ya se hizo anteriormente (3.7) A_J se divide en la suma de cuatro integrales, cada una dada sobre uno de los tramos que conforman el contorno rectangular. Estudiaremos lo que ocurre con la integral A_{J1} definida sobre el contorno C_2 (ver figura 6) y una vez definidos los parámetros necesarios generalizaremos sobre toda la integral para ver si se obtienen los resultados deseados. Recordemos la expresión de esta integral definida en (3.6) que será lo que se resolverá numéricamente:

$$A_{J1} = \int_{-a/2}^{a/2} J_n(K\rho(\phi)) e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* dy$$

La solución analítica de esta integral definida en (3.14) quedaba:

$$A_{J1} \cong \frac{aj^{n-m}}{L^2} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} e^{j\frac{2\pi}{L}(nl-m'l')} e^{-jKx_0(C_l-C_{l'})} \operatorname{sinc} \left(\frac{a}{\lambda} (S_l - S_{l'}) \right)$$

donde falta determinar el valor que debe tomar L para que la serie converja. Recordemos también que esta serie aparece dado que se utiliza una expresión con la que se aproximan los productos de Bessel y funciones trigonométricas por una serie de funciones exponenciales definida en (3.1) y es:

$$J_n(K\rho(\phi)) e^{jn\phi} \cong \frac{j^n}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{jl\frac{2n\pi}{L}} e^{-jK(C_l x + S_l y)}$$

De esta expresión obtendremos el valor de L adecuado. Para ello realizamos unas gráficas donde se expresa el valor absoluto cometido respecto al número de ondas planas L que se consideran en la expansión. Como el valor de L dependerá del valor de n dibujamos gráficas para diferentes valores de n . Observando la figura 14 vemos que cuanto mayor es el valor de n se necesita una mayor L para llegar a la convergencia. Vamos a tomar un valor de $L = 45$.

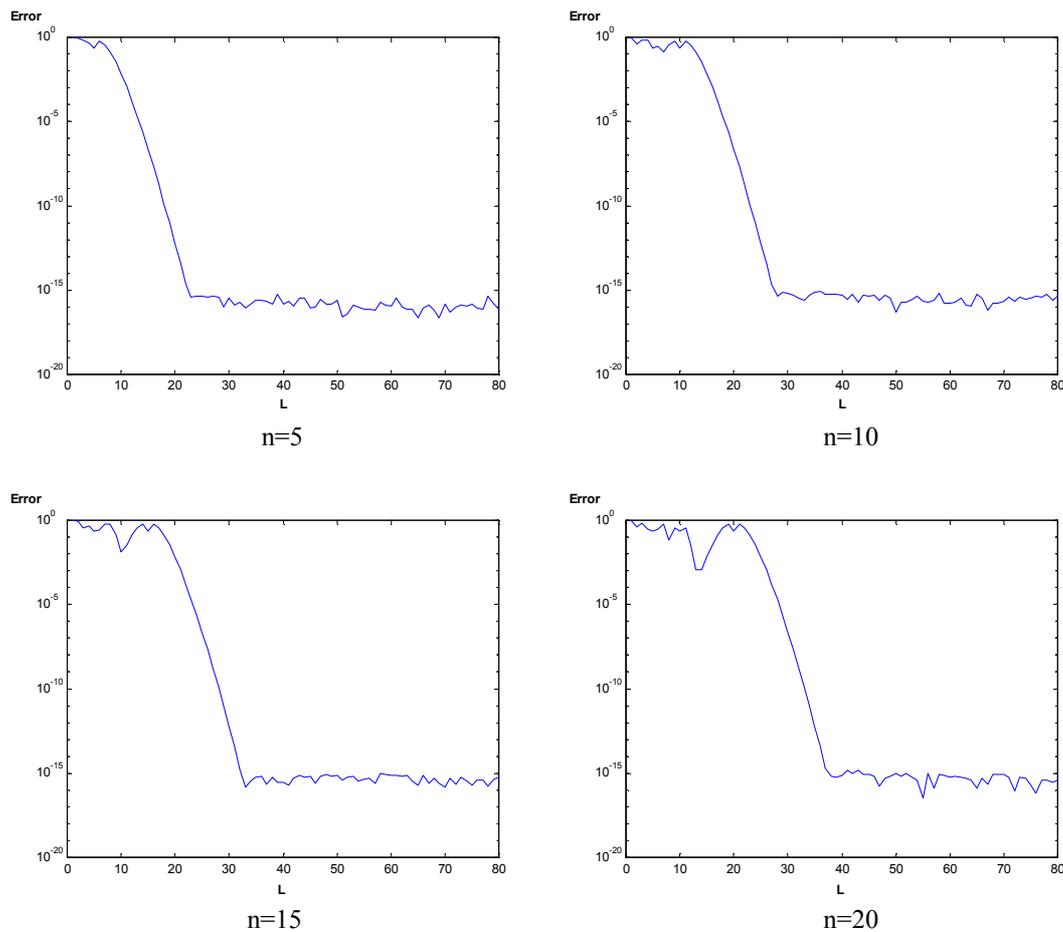


Fig. 14

Una vez determinado que valor tomará L ya se puede pasar a comparar los resultados obtenidos con la expresión evaluada numéricamente y la obtenida analíticamente. Comparamos en primer lugar que pasa con la integral sobre el tramo C_2 , si tomamos por ejemplo $[m, n] = [5, 5]$ el error absoluto cometido es del orden de 10^{-14} , mientras que el error relativo (cociente entre error absoluto y valor numérico) es del orden de 10^{-9} .

El error obtenido es pequeño, por tanto válido. Para $[m, n]$ elevados en este caso por contener la integral funciones de Bessel los resultados son prácticamente 0 en ambos casos, por tanto el error absoluto es muy pequeño mientras que el relativo es mayor, pero como el valor de la integral es prácticamente 0 esto no se tiene en cuenta.

Si pasamos a evaluar la integral A_j completa (3.29) sobre todo el contorno tendremos que el valor de L en todos los tramos será el mismo que el calculado para el tramo C_2 puesto que las expresiones y aproximaciones hechas en todos los tramos son las mismas. Para $[m, n] = [4, 5]$ el error absoluto obtenido es del orden de 10^{-14} , mientras que el relativo es de 10^{-9} . Siendo estos errores válidos. Cabe notar que para $[m, n]$ elevadas ocurre lo mismo que antes y que para muchos valores de $[m, n]$, el valor de la integral se anula.

Por otro lado también interesa ver el coste computacional de cada uno de los métodos de resolución. La resolución numérica supone un tiempo de aproximadamente 0.15 segundos, mientras que la analítica con $L = 45$ necesita un tiempo de 0.18 segundos y con $L = 30$ el tiempo es de aproximadamente 0.09 segundos. Vemos que para $[m, n]$ pequeñas el tiempo mejoraría pues se necesita un valor de L menor, pero como el valor de L ha de ser único para calcular la matriz se ha de tomar $L = 45$ con lo que los tiempos empeoran. De todos modos a la hora de calcular la matriz analíticamente se pueden aprovechar muchos cálculos redundantes, con lo que es posible que el coste computacional y temporal necesario para calcular A de forma analítica mejore respecto a la solución numérica en la que no es posible aprovechar ningún cálculo y el tiempo total de cálculo de la matriz será la suma de tiempos de cada uno de sus componentes.

Pasamos a estudiar las expresiones obtenidas con A_H . Al igual que antes en primer lugar nos centraremos en la integral sobre el tramo C_2 , cuya expresión tiene esta forma:

$$A_{h1} = \int_{-a/2}^{a/2} d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi)) e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* dy$$

Esta integral es la que se evaluará numéricamente, mientras que la integral resuelta analíticamente es, según (3.36):

$$A_{h1} \cong d_n a \sum_{p=P}^P \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \left[H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21}) e^{-j(p-n)\pi} \frac{j^{p-m}}{L^2} e^{jl^2 \frac{p\pi}{L}} e^{-jKc_l(x_0-R)} e^{-jl' \frac{2m\pi}{L}} e^{jKc_{l'}x_0} \cdot \sin c \left(\frac{a}{\lambda} (S_l - S_{l'}) \right) \right]$$

donde recordemos que falta especificar el valor de R, P y L .

El valor de L dependerá del valor que tome P , pues el parámetro L viene de utilizar la expansión de ondas planas de $J_p(K\rho') e^{jp\phi'}$ que aparece como consecuencia de sustituir (3.4) en la expresión de la integral de A_{h1} y según el estudio que se acaba de hacer de la convergencia de la expresión (3.1) el valor de L será tanto más grande cuanto mayores valores se alcancen de p . Por otro lado P dependerá a su vez del valor que tome R , pues como se explicó $P \geq KR$. Dado todo esto deduciremos R, P y L conjuntamente.

Para determinar estos parámetros evaluaremos el error que se comete en la expresión (3.4), utilizada para aproximar los modos cilíndricos dispersados, representados por funciones de Hankel y exponenciales, por una suma de modos

cilíndricos incidentes, representados por funciones de Bessel y exponenciales. Además sustituiremos (3.1) en ella. La expresión queda de la forma:

$$H_n^{(2)}(K\rho_1)e^{jn\phi_1} \cong \sum_{p=-P}^P \sum_{l=0}^{L-1} H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21})e^{-j(p-n)\phi_{21}} \frac{J^p}{L} e^{jl\frac{2p\pi}{L}} e^{-jK(C_1x+S_1y)} \quad (4.1)$$

El valor de R en el tramo en el que estamos haciendo un primer estudio, según (3.33) tiene esta expresión:

$$R = \frac{x_0^2 + s^2 \cdot a^2}{2x_0}$$

donde $x_0 = \frac{0.7a}{2}$ y hay que determinar cuanto vale s (ver figura 10) para cometer un error lo más pequeño posible.

Por otro lado $P \geq KR$, es decir $P = QKR$ con redondeo hacia arriba, siendo Q un valor real mayor a 1, cuyo valor también ha de determinarse. Además se debe tener en cuenta qué valor máximo se le da a P para que no se alcance un valor de L demasiado elevado puesto que esto conllevaría un coste computacional y temporal mayores.

Dado todo lo expuesto se deben encontrar valores de s y Q adecuados para que el sumatorio de P converja y de errores pequeños, pero al mismo tiempo se debe de tener en cuenta que estos parámetros no han de proporcionar valores de P demasiado elevados para no disparar el coste computacional de la solución.

En primer lugar estudiaremos qué valor máximo debe de tomar P . Para ello nos fijamos en la expresión (4.1) y evaluamos el error que se comete para un cierto término del sumatorio de P al sustituir el producto de las funciones de Bessel y exponenciales por la expresión (3.1), de este modo estamos evaluando el error de:

$$H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21})e^{-j(p-n)\phi_{21}} J_p(K\rho_2)e^{jp\phi_2} \\ \cong \sum_{l=0}^{L-1} H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21})e^{-j(p-n)\phi_{21}} \frac{J^p}{L} e^{jl\frac{2p\pi}{L}} e^{-jK(C_1x+S_1y)} \quad (4.2)$$

donde p toma un valor fijo y puesto que estamos en el tramo C_2 se tiene que $\phi_{21} = \pi$ y $d_{21} = \max(R, x_0)$. Puesto que el valor de R aún no se ha determinado, en este caso lo calcularemos tomando $s = 0.7$, de todas formas el orden del error que se comete no va a depender fuertemente de este parámetro, y por tanto tomamos $d_{21} = R$.

A partir de esta expresión necesitamos ver para qué p el valor que toma L es demasiado elevado. Construimos unas gráficas cada una para un valor fijo de p que nos muestren el error absoluto que se comete en la expresión (4.2) para un valor de $n = 1$ en función de L para diferentes p . El resultado se muestra en la figura 15. Como se puede apreciar el problema real no es que L alcance valores demasiado grandes para llegar a la convergencia, si no que aún alcanzada la convergencia el error que se comete con la aproximación hecha utilizando (3.1) sobre (3.4) es enorme cuando p alcanza valores mayores a 25 aproximadamente.

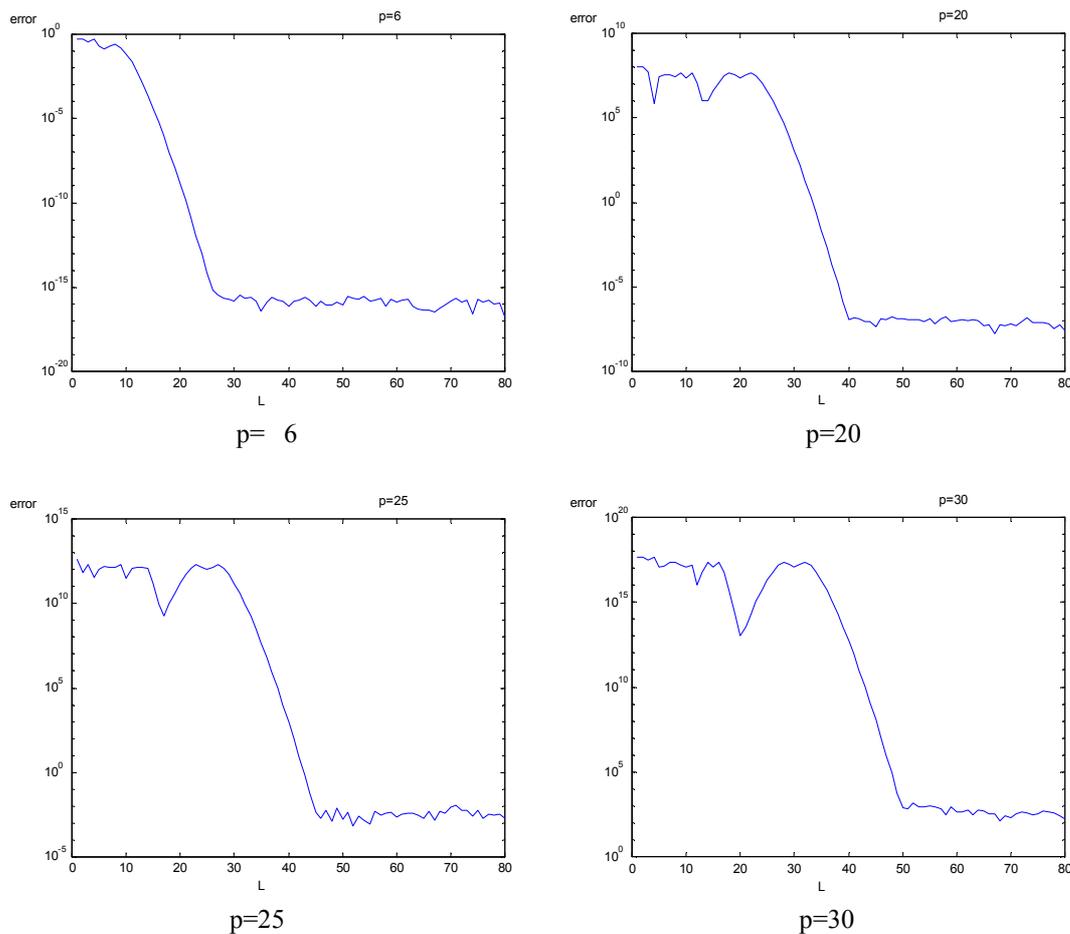


Fig. 15

Por tanto si se toman valores de P elevados en la expresión (4.1) cada término del sumatorio de p estará añadiendo un error que dado lo expuesto en los primeros y últimos términos, donde el valor absoluto de p es elevado, este error será elevado.

Si analizamos el problema se puede deducir porqué en la expresión (4.1) el error es tanto más elevado cuanto P es mayor, al contrario de lo que cabría esperar ya que a mayor P debería de alcanzarse la convergencia según (3.4). Esto es debido al conjunto dado por la sustitución que se hace de $J_p(K\rho')e^{ip\phi_2'}$ por su expansión en serie de ondas

planas y la función de Hankel por la que se multiplica esta expresión. El problema está en que cuando hacemos esta sustitución en términos del sumatorio con p elevadas el producto de la función de Hankel por la exponencial $(H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21})e^{-j(p-n)\phi_{21}})$ toma valores realmente elevados y por tanto el error que se comete al sustituir $J_p(K\rho')e^{jp\phi_2}$ por la serie de ondas planas, aunque en realidad es pequeño, se multiplica por un número de orden mucho mayor, dando lugar a un término que introduce un error enorme dentro del sumatorio.

Por eso las gráficas con p grande tienen el error elevado incluso con valores de L para los que ya se ha alcanzado la convergencia. Por tanto, para evitar errores elevados debidos a este problema limitaremos el valor a $P = 25$ y fijándonos en la gráfica de la figura 15 donde $p = 25$, pues es el sumatorio alcanzará como máximo este valor, tomaremos como mínimo $L = 50$.

Una vez ya se ha deducido el valor máximo de P pasamos a averiguar qué valores deben de tener los parámetros antes citados s, Q y por tanto R . Para darles unos valores óptimos se construyen unas gráficas donde se evalúa el error absoluto cometido en la expresión (3.4) que recordamos:

$$H_n^{(2)}(K\rho_1)e^{jn\phi_1} \cong \sum_{p=-P}^P H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21})e^{-j(p-n)\phi_{21}} \cdot J_p(K\rho_2)e^{jp\phi_2} \quad (3.4)$$

Las gráficas que se muestran en la figura 16 representan el error absoluto cometido en esta expresión en todo el contorno C_2 , es decir el eje y , tomando una $n = 1$, que es donde estamos haciendo este primer estudio. Cada gráfica representa una Q fija y cada color una s diferente.

Además también cabe señalar que para $Q = 2.5$ el valor de P se mantiene por debajo de 25 para cualquier valor de s , si $Q = 3$ sólo toma valores mayores a 25 para $s = 1$ y si $Q = 4$ pasa lo mismo que en el caso anterior, sólo toma valores mayores a 25 para $s = 1$.

Si nos paramos a estudiar los resultados mostrados en la gráficas podemos ver que tienen sentido, pues para un Q fijo, a mayores valores de s y por tanto mayores valores de R el error en los bordes es menor puesto que el área definida por la circunferencia de radio R donde es válida la aproximación hecha en (3.4) es más amplia y los bordes superior e inferior del tramos C_2 están más alejados de ella y por tanto de la frontera límite está más lejana. Por otro lado también se observa que en el centro del tramo el error cometido es mayor que para valores de s menores debido a que el centro de la circunferencia, al ser el radio mayor, está más alejado del centro del tramo que se está estudiando y por tanto está más alejado de la zona del área del círculo donde dicha expresión tiene errores menores.

Si se estudia lo que pasa cuando consideramos un s fijo, vemos que como era de esperar, para un valor de Q mayor el error es menor, puesto que por definición

$P = QKR$ y por tanto también P es mayor, tomándose de este modo más términos del sumatorio y aumentando la convergencia, siempre teniendo en cuenta que no se debe superar el valor de P máximo definido anteriormente.

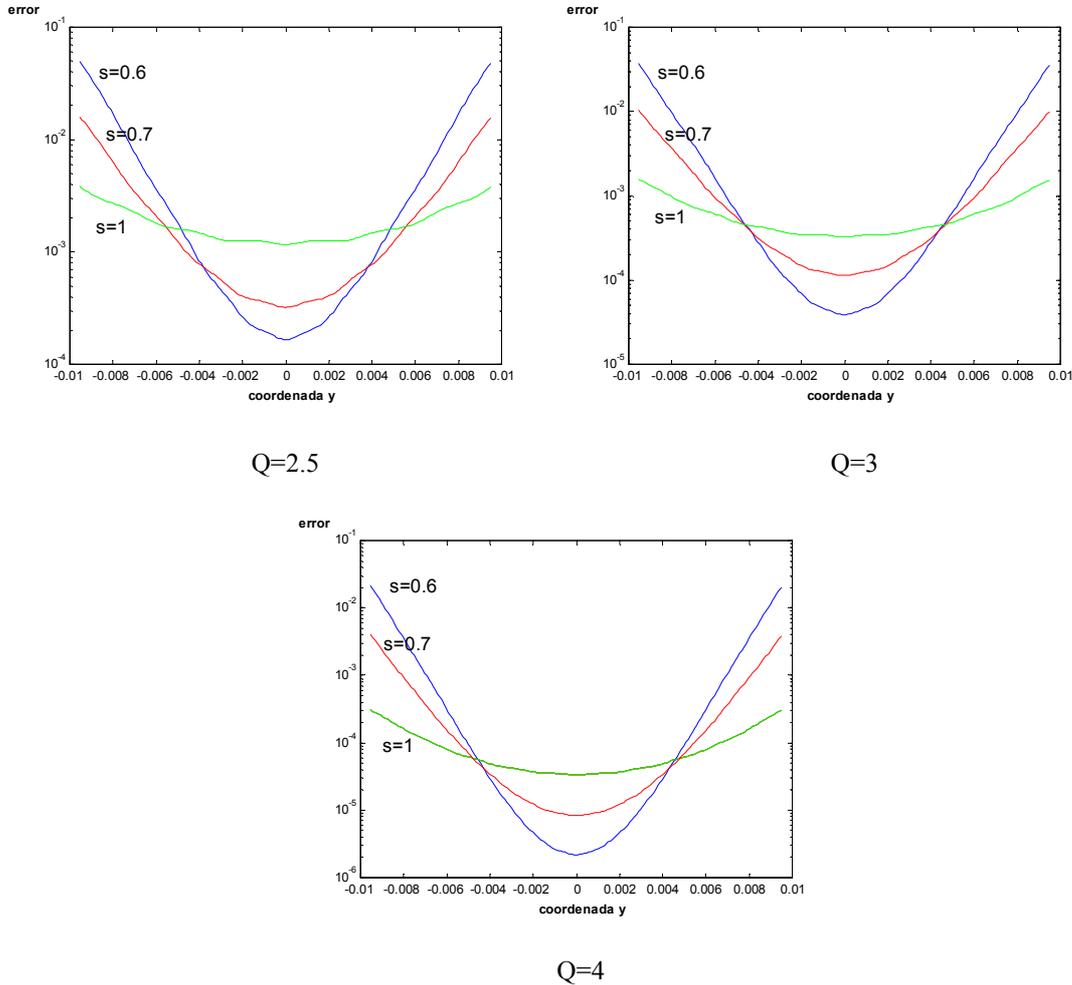


Fig. 16

Teniendo en cuenta todos estos datos vamos a tomar un valor de $Q = 3$, ya que si su valor fuera 2.5 el error sería un poco demasiado alto y si fuera de 4, aunque P no llegue a valer 25 para algunos valores de s , alcanza valores cercanos a 20 y el coste computacional aumentaría demasiado a cambio de la mejora que ofrece esta solución. En cuanto al valor de s , si nos fijamos en la gráfica con $Q = 3$ tomaremos $s = 0.7$, pues es una solución intermedia donde el error entre el centro y los bordes del tramo están más compensados que con las otras dos soluciones, con estos dos valores $P = 15$. Recopilando datos nos queda:

$$\begin{aligned}
 Q &= 3 \\
 s &= 0.7 \\
 P &= 15 \\
 L &= 50
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Con estos valores podemos imaginar que el error para $n = 1$ puede ser aceptable pero no sabemos que puede pasar para n mayores. Para estudiar que pasa construimos otro conjunto de gráficas que se encuentran en la figura 17, donde se muestra el error relativo que se comete en la expresión (3.4) en un área determinada entre $y \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ y $x \in [x_0, R]$ para diferentes valores de n .

Como se aprecia en las gráficas el error aumenta de forma muy rápida con n , pues sólo hace falta ver los errores que se alcanzan con $n = 10$ incluso habiendo utilizado un valor de $Q = 5$ y $s = 0.9$ que nos dan un valor de $P = 38$, lo cual también influye en el hecho de que el error sea tan elevado.

En realidad esto no presentará un gran problema puesto que para valores elevados de n los elementos diagonales de la matriz de dispersión \underline{D} se hacen nulos y por tanto al ser $d_n = 0$ la integral A_H también se anula. Veamos a partir de qué valores de n los d_n se anulan.

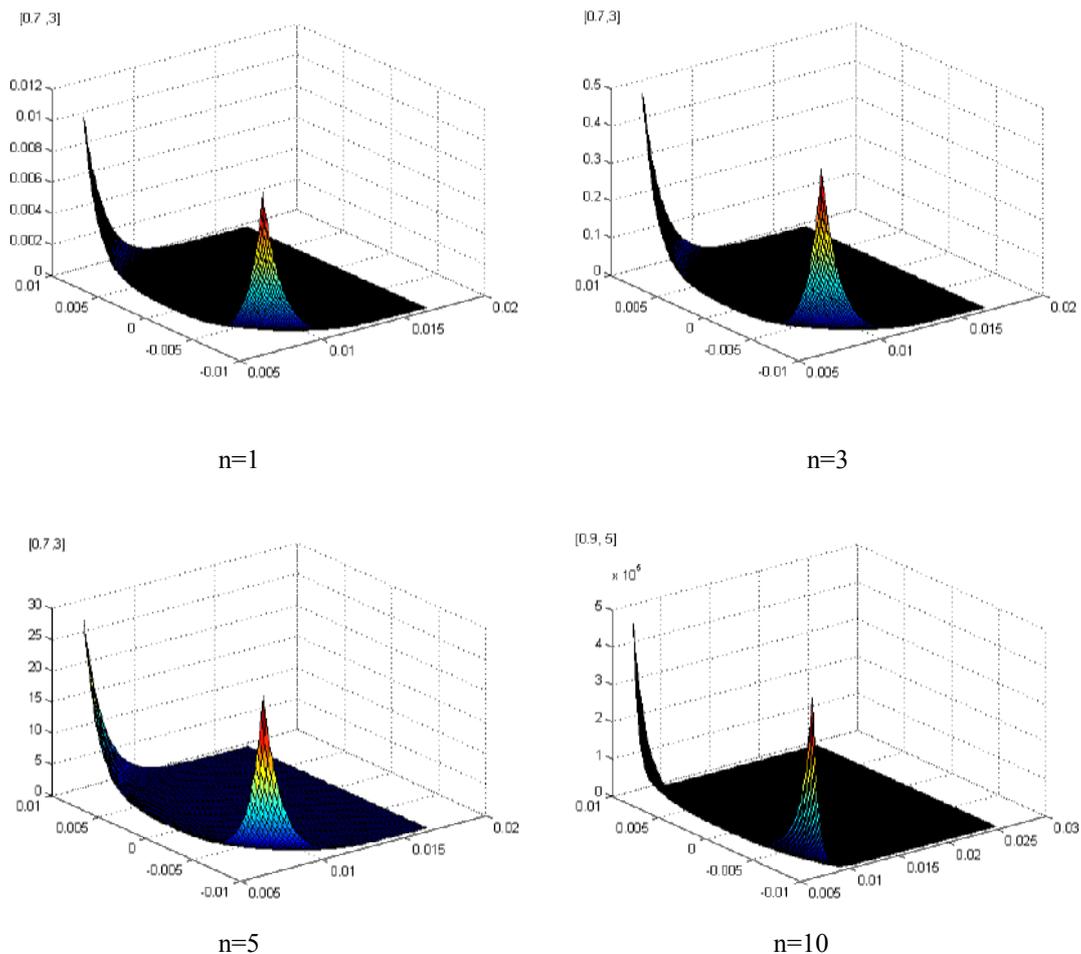


Fig. 17

La norma dice que:

$$n > 1.2Kr_{cil} \rightarrow d_n = 0 \quad (4.4)$$

donde r_{cil} es el radio del cilindro, en nuestro caso el poste metálico, por tanto $r_{cil} \leq \frac{a}{2}$ y haciendo cálculos obtenemos:

$$Kr_{cil} = \frac{2\pi}{\lambda} r_{cil} \leq \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} = \pi \frac{a}{\lambda} \quad (4.5)$$

Sabemos que $0.5 \leq \frac{a}{\lambda} \leq 1$. Si tomamos como peor caso $\frac{a}{\lambda} = 1$, tenemos:

$$n \leq 1.2Kr_{cil} \leq 1.2\pi \frac{a}{\lambda} = 1.2\pi \cong 3.77 \quad (4.6)$$

con lo que $n \leq 3$.

Por tanto viendo la figura 17, se observa que el error que se comete no es tan elevado. Cuando evaluemos la integral veremos que resultados se obtienen.

Sólo falta decidir que valor de d_{21} es el correcto. Como se ha señalado anteriormente $d_{21} = \max(R, x_0)$, y con los valores definidos en la introducción se obtiene efectivamente como habíamos supuesto que $d_{21} = R$.

Ahora ya estamos en condiciones de calcular el error que se comete al evaluar la integral sobre el tramo C_2 de las dos formas expuestas. Se tiene que el error absoluto para $[m, n] = [4, 3]$ es del orden de 10^{-4} , mientras que el error relativo es de 10^{-1} debido sobretodo a la parte imaginaria puesto que en la parte real el error relativo es del orden de 10^{-9} .

A continuación vamos a seguir el mismo proceso que se ha seguido con A_{h1} para ver que ocurre con A_{h2} , integral sobre el contorno C_4 . Para ello recordemos cual es la expresión que se evaluará numéricamente definida en (3.30):

$$A_{h1} = \int_{-0.7a/2}^{0.7/2} d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi)) e^{jn\phi} \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^* (-dx)$$

mientras que la expresión analítica obtenida anteriormente definida en (3.42) es:

$$A_{h2} \cong -0.7a \cdot d_n \sum_{p=-P}^P \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \left[H_{n-p}^{(2)}(Kd_{21}) e^{-j(p-n)\frac{3\pi}{2}} \frac{j^{p-m}}{L^2} e^{jl\frac{2p\pi}{L}} e^{-jKS_l(y_0-R)} e^{-jl'\frac{2m\pi}{L}} e^{jKS_{l'}y_0} \cdot \sin c \left(\frac{0.7a}{\lambda} (C_l - C_{l'}) \right) \right] \quad (3.42)$$

donde recordemos que al igual que con la integral anterior falta especificar el valor de R, P y L .

En este caso puesto que la se han hecho las mismas aproximaciones que las vistas en la integral anterior, nos enfrentamos al mismo problema con la diferencia de que el valor de R según (3.39) es diferente al anterior:

$$R = \frac{y_0^2 + s^2 \cdot a^2}{2y_0}$$

donde $y_0 = \frac{a}{2}$.

El estudio para determinar el valor máximo de P es el mismo que se ha hecho anteriormente y por tanto $P_{\max} = 25$. Ahora falta averiguar que valores de s y Q son los adecuados. Y puesto que $P = QKR$ determinar a continuación el valor de P .

Para averiguar los valores de s y Q al igual que antes construimos unas gráficas que se representan en la figura 18 que representan el error absoluto cometido en todo en contorno C_4 , es decir el eje x , tomando $n = 1$. Cada gráfica representa una Q fija y cada color una s diferente.

Además también cabe señalar que tanto para $Q = 2.5$ como $Q = 3$ el valor de P se mantiene por debajo de 25 para cualquier valor de s , siendo estos valores ligeramente superiores para $Q = 3$.

Si nos fijamos en las gráficas se puede observar que en este caso los valores de s y Q pueden ser menores, obteniendo errores aceptables en todos los casos, aunque muy diferentes de los bordes al centro. Esto es debido a que los tramos con coordenada y fija son más cortos que los que tienen coordenadas x fijas, por tanto puesto que C_4 pertenece a los primeros, esto permite que el área de la circunferencia necesite abarcar menos espacio que en el caso de C_2 , y por tanto el centro de la circunferencia siempre estará más cerca del tramo que se estudia. Además el pico que se observa para $s = 0.5$ en la coordenada $x = 0$ es debido a que el centro de la circunferencia de radio R coincide exactamente con este punto.

Por tanto se podría escoger valores que hicieran que P fuera menor a la obtenida para el tramo C_2 pero dado que para calcular la integral completa debemos tomar un valor único para estos parámetros, tomaremos $s = 7$ y $Q = 3$.

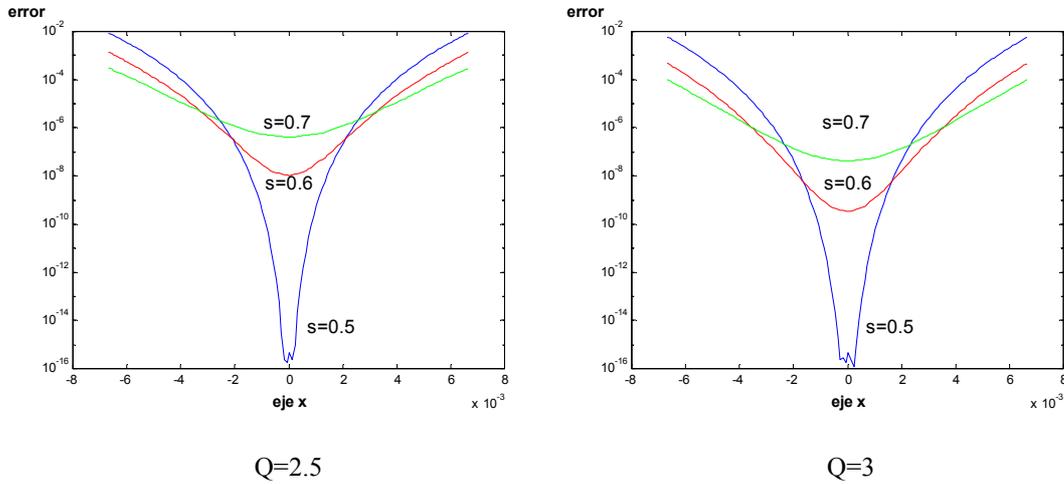


Fig. 18

Además puesto que el valor de R y por tanto el de P también deben de ser únicos, se deberá de escoger el peor caso, de modo que R tomará el valor que tomaba para la integral del primer tramo calculado, en vez de el valor que debería tomar según la expresión definida por (3,39) en este tramo. Recopilando nos queda:

$$\begin{aligned} Q &= 3 \\ s &= 0.7 \\ P &= 15 \\ L &= 50 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Todo lo expuesto hasta se ha hecho considerando $n = 1$, para valores de n mayores ocurre lo mismo que en la integral anterior, con lo que sólo se considerará esta integral para $n \leq 3$ según (4.6).

Falta decidir que valor de d_{21} es el correcto. Como se ha señalado anteriormente $d_{21} = \max(R, y_0)$ para evitar que el centro de la circunferencia caiga dentro de la guía, y con los valores definidos en la introducción se obtiene efectivamente que $d_{21} = R$.

Pasamos a calcular el error que se comete al evaluar la integral sobre el tramo C_4 de las dos formas expuestas. Se tiene que el error absoluto para $[m, n] = [4, 3]$ es del orden de 10^{-6} , mientras que el error relativo es de 10^{-3} . Efectivamente se ve que los errores son algo mejores que en el caso anterior.

Para las integrales A_{h3} y A_{h4} tendríamos exactamente los mismos razonamientos, y los parámetros que se obtendrían serían los mismos.

Ya estamos en condiciones de evaluar para la integral A_H completa (3.53). Para $[m,n] = [4,5]$ el error absoluto obtenido es del orden de 10^{-4} , mientras que el relativo es de 10^{-2} . Cabe notar que para n elevadas la integral se anula dado lo que se ha expuesto anteriormente respecto a los diferentes valores de d_n y que para valores elevados de m la integral también se hace muy pequeña.

Ya tenemos los resultados de A_H y A_J . Y por tanto vamos a comparar los errores cometidos al evaluar la integral A de forma numérica y analítica. El error absoluto que se obtiene para $[m,n] = [4,3]$ es del orden de 10^{-5} , mientras que el relativo es de 10^{-3} . Los valores obtenidos son aceptables.

En cuanto a coste temporal tenemos que numéricamente el tiempo que se emplea para realizar los cálculos es de aproximadamente 0.25 segundos, mientras que si se utiliza la expresión analítica utilizada para calcular esta integral es de 0.5 segundos pero se ha de tener en cuenta que dado que esta integral supone un paso intermedio para calcular la matriz completa, no se ha optimizado el número de operaciones y probablemente cuando se calcule la matriz se podrán mejorar estos tiempos.

Dicho esto, pasamos a estudiar la construcción de un programa que calcule la matriz A optimizado en cuanto a coste temporal. Para ello se aprovechan todas las operaciones comunes que tienen A_H y A_J y sobretodo se explota el uso de matrices y vectores que ofrece Matlab.

De las expresiones de A_H y A_J definidas en (3.29) y (3.53) respectivamente, se observa que hay muchos términos en común, sobretodo las exponenciales y las sinc. Para reducir el coste temporal al máximo se calculan los C_l, C_l', S_l y S_l' como vectores y por tanto se opera con ellos en forma de vector, este hecho permite a su vez poder calcular las sinc sin necesidad de bucles, puesto que sólo es necesario convertir los C_l, C_l', S_l y S_l' en matrices donde sus filas o columnas se repitan según convenga. Esto se consigue multiplicando adecuadamente el vector C_l, C_l', S_l o S_l' que se precise por vectores fila o columna según convenga llenos de unos.

Además utilizando el producto de matrices combinando adecuadamente las matrices que están involucradas se puede eliminar uno de los tres bucles que supondrían los tres sumatorios, quedando el programa reducido a dos bucles que contienen operaciones con matrices sencillas, puesto que todo aquello que no dependa de las variables que definen el bucle se calcula anteriormente e ellos. Luego fuera de los bucles ya se acabaría de multiplicar por las constantes oportunas. A parte se utiliza también un bucle sencillo auxiliar para calcular algunos valores de exponenciales ya que también se ha de tener en cuenta que los valores de $[m,n]$ ahora ya no son fijos y también toman una serie de valores para formar la matriz, por tanto se definirán como vectores también.

Otra forma de agilizar cálculos es tener en cuenta que la matriz A_H es nula para valores de n mayores a 3 con lo que de esta forma se reduce el tamaño de muchas matrices que intervienen en cálculos.

Teniendo en cuenta todo esto los resultados temporales que obtenemos son francamente buenos, siendo por ejemplo para $L = 50$ y $N_i = 20$ el coste temporal aproximadamente es de 0.25 segundos. No olvidemos que $m \in [-N_i, \dots, N_i]$ y $n \in [-N_i, \dots, N_i]$ y por tanto estaríamos hablando de una matriz de $[41 \times 41]$ es decir de 1681 elementos que son integrales. Si esos 1681 elementos los calculásemos numéricamente el tiempo ascendería a $0.25 \times 1681 = 420.25$ segundos, es decir, aproximadamente 7 minutos.

Ahora falta evaluar las prestaciones de esta matriz y el valor adecuado de N_i para obtener la matriz de dispersión generalizada correcta. Los errores cometidos en cada elemento de la matriz serían aproximadamente iguales a los expuestos anteriormente para un $[m, n]$ fijo. Estas prestaciones se evaluarán en secciones posteriores.

3.3.3. Matriz B_{mn}

Esta matriz resulta mucho más sencilla que la anterior, pues no es necesario determinar tantos parámetros adicionales. En este caso sólo necesitamos conocer qué valor de L es el adecuado.

Para esta integral no hace falta evaluar en primer lugar, como prueba, el error cometido en uno de los tramos, pues si nos fijamos en su definición (3.55) sólo toma valores diferentes de 0 en dos tramos y dependiendo del valor que toma n el valor de la integral total será, o la integral sobre uno de los dos tramos o sobre el otro tramo, anulándose la integral sobre todos los demás. Recordemos las expresiones. Por un lado está la expresión que se resolverá numéricamente que es:

$$B_{mn} \cong \begin{cases} \sqrt{\frac{2Z_{0n}}{ab}} \frac{j^{-m}}{L} \int_{-a/2}^{a/2} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}\left(y + \frac{a}{2}\right)\right) \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi))\right)^* dy & n \in [1, \dots, M_1] \\ -\sqrt{\frac{2Z_{0(n-M_1)}}{ab}} \int_{-a/2}^{a/2} \text{sen}\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a}\left(y + \frac{a}{2}\right)\right) \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi))\right)^* dy & n \in [M_1 + 1, \dots, M] \end{cases} \quad (4.8)$$

mientras que la expresión analítica que ha de programarse es la definida en (3.63).

Recordemos que para programar (3.63) se debe de tener en cuenta que el término del sumatorio con $l = 0$ tiene un trato especial, puesto que si se programa como el resto de términos divergirá. Por tanto se le ha de dar un valor teniendo en cuenta la expresión (3.61). Para ello como trabajamos con vectores se ha de tener cuidado en darle el valor adecuado al primer elemento del vector. Para calcular la integral analítica antes ha de fijarse un valor L , que viendo las gráficas de la figura 14, tomaremos $L = 50$.

Si comparamos los resultados obtenidos para $[m, n] = [4, 3]$ por ejemplo, el error absoluto es del orden de 10^{-11} mientras que el error relativo es del orden de 10^{-9} . Los errores que obtenemos están muy bien. Por otro lado los tiempos utilizados para hacer los cálculos tanto numéricamente como analíticamente son prácticamente 0, del orden de 0.01 segundos.

Pasemos ahora a evaluar los tiempos obtenidos con la matriz B completa. Para minimizar cálculos se aprovechan todos los términos que se repiten en la expresión (3.63), además como ya se hizo con la matriz A se explotan todas las posibilidades que ofrece el cálculo con vectores. Gracias a esto evitamos utilizar ningún bucle, pero hay que tener cuidado con todo lo relacionado con el término $l = 0$ para que no cause ninguna indeterminación, esto se soluciona definiendo adecuadamente todos los vectores.

Además el programa realizado tiene en cuenta la posibilidad de que $M_1 \neq M_2$ tanto si es mayor M_1 como si por el contrario lo es M_2 . En teoría al ser los dos accesos iguales M_1 y M_2 también lo serían.

Probemos el programa con por ejemplo $L = 50$, $N_i = 20$, $M = 10$ y vamos a suponer que $M_1 = M_2$ puesto que los dos accesos son iguales. El coste temporal aproximadamente es de 0.016 segundos. No olvidemos que $m \in [-N_i, \dots, N_i]$ y $n \in [1, \dots, M]$ y por tanto estaríamos hablando de una matriz de $[41 \times 10]$ es decir de 410 elementos que son integrales. Si esos 410 elementos los calculásemos numéricamente el tiempo ascendería a $0.01 \times 410 = 4.1$ segundos. La mejora de coste temporal también está bien.

Falta evaluar las prestaciones de esta matriz, el valor de N_i y el de M adecuados. Los errores cometidos en cada elemento de la matriz serían aproximadamente iguales a los expuestos anteriormente para un $[m, n]$ fijo. Estas prestaciones se evaluarán en secciones posteriores.

3.3.4. Matriz G_{mn}

Con esta matriz nos vamos a encontrar los mismos problemas que con A . La expresión que se evaluará de esta integral de forma numérica es de la forma:

$$G_{mn} = \int_c^{-1} \left[\frac{n}{\eta} \left(J_n(K\rho(\phi)) + d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi)) \right) \right] \text{sen}(\phi) + j \left(J_n'(K\rho(\phi)) + d_n H_n^{(2)'}(K\rho(\phi)) \right) \cos(\phi) \Big| e^{jn\phi} g_m^{\circ*}(\phi) dc \quad (4.9)$$

donde $g_m^{\circ*}$ dependerá del contorno en el que analicemos la integral.

Para calcular esta integral con Matlab sustituimos las funciones de Bessel y Hankel derivadas por las expresiones equivalentes que se detallan a continuación:

$$J_n'(K\rho) = J_{n-1}(K\rho) - \frac{n}{K\rho} J_n(K\rho)$$

$$H_n^{(2)'}(K\rho) = H_{n-1}^{(2)}(K\rho) - \frac{n}{K\rho} H_n^{(2)}(K\rho) \quad (4.10)$$

La expresión que se ha de evaluar numéricamente finalmente será:

$$G_{mn} = \int_c^{-1} \frac{1}{\eta} \left[\frac{n}{K\rho(\phi)} \left(J_n(K\rho(\phi)) + d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi)) \right) \text{sen}(\phi) \right. \\ \left. + j \left(J_{n-1}(K\rho) - \frac{n}{K\rho} J_n(K\rho) + d_n H_{n-1}^{(2)}(K\rho) - \frac{n}{K\rho} H_n^{(2)'}(K\rho) \right) \cos(\phi) \right] e^{jn\phi} g_m^*(\phi) d\phi \quad (4.11)$$

Por otro lado, recordemos que para obtener la solución analítica se hace uso de la regla de la cadena y por tanto la integral que queda para resolver es mucho más sencilla. La solución analítica es la suma de las expresiones (3.72) y (3.78). Vemos que los parámetros que se han de determinar y sus limitaciones son los mismos que en el caso de A , pues provienen de las mismas expresiones y sustituciones. De este modo se tiene:

$$Q = 3$$

$$s = 0.7$$

$$P = 15$$

$$L = 50$$

donde todos los parámetros se definen de igual forma que hasta ahora. Además en la expresión también aparece el problema de B en el término del sumatorio que $l = 0$. Para resolver el problema se ha de tener en cuenta (3.61), y cuando se programe, tener cuidado de darle el valor adecuado al primer elemento de los vectores el los que participe l .

Con todo lo señalado no es necesario relatar la evaluación para cada parte de la integral y cada uno de los tramos, puesto que la integral G es la mezcla entre A y B . La primera parte de la integral es muy parecida a la primera parte de A , salvo por una constante gracias a la regla de la cadena que proviene de derivar respecto a x (ver (3.66), (3.55) y (3.6)), mientras que la segunda parte de la integral es como la primera

parte de B . Se tienen todos los problemas derivados de A , con la suerte de tener un sumatorio menos, y por otro lado la integral final a resolver en cada uno de los tramos es del mismo tipo que en B , una integral directa por partes.

Cuando programemos la integral hay que tener en cuenta que dependiendo del valor de m en algunos tramos la integral es nula o no. Además el programa realizado tiene en cuenta la posibilidad de que $M_1 \neq M_2$ tanto si es mayor M_1 como si por el contrario lo es M_2 . En teoría al ser los dos accesos iguales M_1 y M_2 también lo serían.

Pasemos pues a evaluar qué ocurre con el error y el coste computacional con los dos procedimientos para la integral completa sobre todo el contorno rectangular. Se comparan los resultados obtenidos para $[m,n]=[4,3]$ por ejemplo, el error absoluto es del orden de 10^{-3} mientras que el error relativo es del orden de 10^{-2} . Los errores que obtenemos son aceptables. Por otro lado si analizamos los tiempos utilizados para hacer los cálculos de forma numérica el tiempo es de 0.25 segundos mientras que analíticamente el tiempo es de 0.02 aproximadamente.

Para programar la matriz completa minimizando cálculos se aprovechan todos los términos que se repiten en las expresiones (3.72) y (3.78), tales como las exponenciales comunes, las constantes K_1 y K_3 y las soluciones a las integrales reducidas que se repiten en dichas expresiones. Además como ya se hizo con las otras matrices, se explotan todas las posibilidades que ofrece el cálculo con vectores.

Gracias a esto sólo se necesita utilizar un bucle que representa el sumatorio de p pues el otro sumatorio se soluciona utilizando la capacidad de cálculo con vectores que tiene Matlab. Este bucle, por tanto, tiene que ver con la parte de la integral representada por la función de Hankel, que como se ha indicado anteriormente sólo toma valores diferentes de 0 para $n \leq 3$, por tanto las matrices con las que se trabaja en el bucle no son de gran tamaño. Recordemos que además hay que tener cuidado con todo lo relacionado con el término $l=0$ para que no cause ninguna indeterminación en la multiplicación entre K_1 y K_3 , esto se soluciona definiendo adecuadamente todos los vectores.

Veamos que resultados obtenemos al programar la matriz completa. Se supone por ejemplo $L=50$, $N_i=20$, $M=10$ y que $M_1=M_2$ puesto que los dos accesos son iguales. El coste temporal aproximadamente es de 0.11 segundos. No olvidemos que $m \in [1, \dots, M]$ y $n \in [-N_i, \dots, N_i]$ y por tanto estaríamos hablando de una matriz de $[10 \times 41]$ es decir de 410 elementos que son integrales. Si esos 410 elementos los calculásemos numéricamente el tiempo ascendería a $0.25 \times 410 = 102.5$ segundos, es decir 1.7 minutos aproximadamente. La mejora de coste temporal está muy bien.

Falta evaluar las prestaciones de esta matriz, el valor de N_i y el de M adecuados. Los errores cometidos en cada elemento de la matriz serían aproximadamente iguales a los expuestos anteriormente para un $[m,n]$ fijo. Estas prestaciones se evaluarán posteriormente.

3.3.5. Matriz H_{mn}

Esta es la matriz más sencilla. No es necesario determinar ningún parámetro adicional, ni tan siquiera L , ya que no contiene ningún sumatorio.

Para esta integral no hace falta evaluar en primer lugar el error cometido en uno de los tramos, pues si nos fijamos en su definición (3.79) sólo toma valores diferentes de 0 en dos tramos y dependiendo del valor que toma n la integral total será, o la integral sobre uno de los dos tramos o sobre el otro tramo, anulándose la integral sobre todos los demás. Por un lado está la expresión que se resolverá numéricamente que es:

$$H_{mn} \cong \begin{cases} Y_{0n} \frac{2}{ab} \sqrt{Z_{0n}} \sqrt{Z_{0m}} \int_{-a/2}^{a/2} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x_2\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x_2\right) dy & [m,n] \in [1, \dots, M_1] \\ Y_{0(n-M_1)} \frac{2}{ab} \sqrt{Z_{0(n-M_1)}} \sqrt{Z_{0(m-M_1)}} \int_{-a/2}^{a/2} \text{sen}\left(\frac{(n-M_1)\pi}{a_2} x_2\right) \text{sen}\left(\frac{(m-M_1)\pi}{a_2} x_2\right) dy & [m,n] \in [M_1 + 1, \dots, M] \end{cases} \quad (4.12)$$

mientras que la expresión analítica que ha de programarse es muy sencilla y está definida en (3.83).

Si comparamos los resultados obtenidos para $[m,n] = [3,3]$ por ejemplo, el error absoluto es del orden de 10^{-14} mientras que el error relativo es del orden de 10^{-16} . Los errores que obtenemos están muy bien. Por otro lado los tiempos utilizados para hacer los cálculos tanto numéricamente como analíticamente son prácticamente 0.

Pasemos ahora a evaluar los tiempos obtenidos con la matriz H completa. Esta matriz es muy sencilla de programar pues se trata de una matriz diagonal con los términos constantes e iguales.

Además el programa realizado tiene en cuenta la posibilidad de que $M_1 \neq M_2$ tanto si es mayor M_1 como si por el contrario lo es M_2 . En teoría al ser los dos accesos iguales M_1 y M_2 también lo serían.

Probemos el programa con por ejemplo $M = 10$ y vamos a suponer que $M_1 = M_2$ puesto que los dos accesos son iguales. El coste temporal aproximadamente nulo. No olvidemos que $m \in [1, \dots, M]$ y $n \in [1, \dots, M]$ y por tanto estaríamos hablando de una matriz de $[10 \times 10]$ es decir de 100 elementos que son integrales si se calcula la matriz de forma numérica. De todos modos el tiempo que se utiliza si hacemos los cálculos numéricamente también es prácticamente 0.

Falta evaluar las prestaciones de esta matriz y el valor de M adecuado. Los errores cometidos en cada elemento de la matriz serían aproximadamente iguales a los expuestos anteriormente para un $[m, n]$ fijo. Estas prestaciones se evaluarán a continuación.

3.3.6. Matriz S

Para calcular la matriz de dispersión generaliza S se utiliza la expresión (2.60) que recordemos que es:

$$S = (H + GA^{-1}B)^{-1}(H + GA^{-1}B)$$

Es necesario invertir la matriz A , por tanto, será interesante estudiar su condicionamiento. A es una matriz cuadrada de tamaño $(2N_i + 1) \times (2N_i + 1)$. Para ver su mal o buen condicionamiento se calcula su número de condición, cuanto mayor sea su valor peor condicionada estará la matriz. Construimos una gráfica que muestre el número de condición en función de N_i . Esta gráfica está representada en la figura 19.

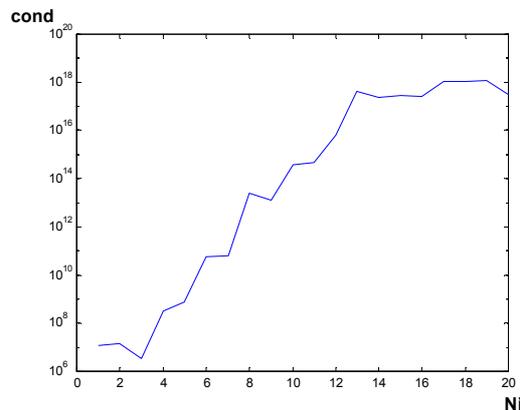


Fig.19

Como se aprecia en la gráfica esta matriz está bastante mal condicionada. Con lo que los resultados que se obtienen a partir de (2.60) no van a ser demasiado fiables.

Podría tenerse en cuenta la posibilidad de seguir el mismo proceso pero con la otra posibilidad de cálculo de S , utilizando las otras cuatro integrales que se han deducido en secciones anteriores. La matriz se calcula como se define en (2.61):

$$S = (F + EC^{-1}D)^{-1}(EC^{-1}D - F)$$

En este caso la matriz que ha de invertirse es C , cuya expresión es:

$$C_{mn} = \int_c \frac{-1}{\eta} \left[\frac{n}{K\rho(\phi)} \left(J_n(K\rho(\phi)) + d_n H_n^{(2)}(K\rho(\phi)) \right) \right] \text{sen}(\phi) \\ + j \left(J_n'(K\rho(\phi)) + d_n H_n^{(2)'}(K\rho(\phi)) \right) \text{cos}(\phi) \left[e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right]^* dc$$

que utilizando la regla de la cadena queda:

$$C_{mn} = \int_c \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\delta(J_n(K\rho)e^{jn\phi})}{\delta x} + d_n \frac{\delta(H_n^{(2)}(K\rho)e^{jn\phi})}{\delta x} \right) \left(e^{jm\phi} J_m(K\rho(\phi)) \right)^*(\phi) dc$$

y se puede deducir, según los desarrollos hechos anteriormente con G_{mn} , que la integral quedaría igual que A_{mn} con la diferencia que estaría multiplicada por una constante que procede de las derivadas respecto x . Por tanto tampoco sería una solución.

Si la matriz A al menos no estuviera tan mal condicionada para valores de N_i pequeños debería de hacerse un estudio para averiguar el valor adecuado de N_i que permitiera por un lado llegar a la convergencia y obtener valores de S correctos y por otro lado evitar que la matriz A alcanzara un excesivo mal condicionamiento. Pero en nuestro caso este estudio no tendría mucho sentido pues para valores pequeños de N_i la matriz está igualmente mal condicionada.

4. Conclusiones

Como se ha indicado en otras secciones lo que se buscaba con este proyecto es encontrar un método más efectivo, computacional y temporalmente, para calcular la matriz de dispersión generalizada en una guía con dos accesos y un objeto dispersor cilíndrico en el centro. Para ello se ha desarrollado un método basado en el acoplo modal guía- espacio abierto, cuya solución ha sido objeto de estudio para determinar si es posible llegar a ella analíticamente, evitando cálculos numéricos.

Los elementos necesarios para calcular finalmente la matriz de dispersión generalizada se han podido hallar analíticamente como se pretendía. Los errores que se han cometido en estos cálculos intermedios, como consecuencia de las aproximaciones hechas para llegar a una solución analítica de las expresiones, han resultado aceptables, aunque en algunas ocasiones se han obtenido resultados muy buenos y en otras el error ha estado más ajustado.

Por otro lado, vistos los resultados que se han obtenido, el método es efectivo en cuanto a tiempo, pues se logran mejorar bastante los tiempos numéricos, pero presenta un gran inconveniente. En los cálculos interviene una matriz con número de condición bastante elevado, provocando de este modo, que los resultados obtenidos no sean fiables.

El tamaño de esta matriz viene dado por el número de modos cilíndricos que se consideren en el acoplo de modos guía-espacio abierto. Si al menos el número de condición fuera aceptable considerando hasta un cierto valor de modos cilíndricos, podría hacerse un estudio para averiguar el número adecuado de modos que permitiera, por un lado, llegar a la convergencia y obtener valores de S correctos, y por otro lado, evitar que la matriz A alcanzara un excesivo mal condicionamiento. En nuestro caso podría hacerse este estudio pero sin garantía de éxito, pues incluso considerando pocos modos cilíndricos, el número de condición de esta matriz sigue siendo elevado.

Finalmente, aunque se ha encontrado un proceso de resolución puramente analítico con error aceptable y un coste temporal francamente bajo, la solución de la matriz de dispersión generalizada a la que se llega no es fiable, pues una de las matrices que intervienen en el cálculo está mal condicionada, y hace que el sistema que ha de resolverse sea inestable.

5. Referencias

[1] C. BACHILLER, H. ESTEBAN, V. E. BORJA, J. V. MORRO, L. J. ROGLÁ, M. TARONCHER, AND A. BELENGUER, "EFFICIENT CAD TOOL FOR DIRECT-COUPLED-CAVITIES FILTERS WITH DIELECTRIC RESONATORS," IN 2005 IEEE AP-S INT. SYMP. DIG., VOL. 1B, WASHINGTON D.C., JUNE 2005, PP. 578–581.

[2] J. V. MORRO*, C. BACHILLER, H. ESTEBAN, AND V. E. BORJA, "NEW EFFICIENT AND ROBUST AUTOMATED DESIGN STRATEGY FOR H PLANE DIRECT-COUPLED-CAVITIES FILTERS WITH DIELECTRIC RESONATORS", IN 2006 IEEE.

[3] H. ESTEBAN, "ANÁLISIS DE PROBLEMAS ARBITRARIOS DE DISPERSIÓN ELECTROMAGNÉTICA MEDIANTE MÉTODOS HÍBRIDOS", PHD THESIS, UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA, 2002.