



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



# UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Caminos,  
Canales y Puertos

Modelización por el método de los elementos finitos de  
paneles de madera contralaminada (CLT) para la  
optimización de su proceso de dimensionamiento.  
Aplicación al edificio Saggården.

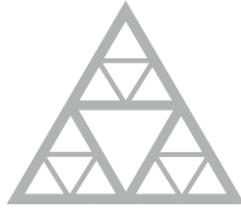
Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

AUTOR/A: Lliso i Navarro, Josep Màxim

Tutor/a: Molines Llodrà, Jorge

CURSO ACADÉMICO: 2023/2024



École des Ponts

ParisTech

2022-2023

## Projet de Fin d'Etudes

Département Génie Civil et Construction

Josep Màxim LLISO I NAVARRO

Elève Ingénieur en Double Diplôme

Tuteur professionnel : M. Manuel SANCHEZ-SOLIS RABADAN

Tuteur académique : M. Arthur LEBEE

## Modélisation par Eléments Finis de Panneaux en Bois Lamellé-Croisé (CLT) pour l'Optimisation de leur Processus de Dimensionnement

Projet réalisé au sein de Degree of Freedom  
Carrer Colón, 18 – 5B, 46004 València, Espagne

13 février 2023 – 12 août 2023

## Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Fernando Ibáñez, directeur de Degree of Freedom, pour la grande confiance qu'il m'a accordée et pour l'opportunité qu'il m'a offerte au sein de son entreprise. Il n'est pas évident de trouver les moyens pour assurer l'excellent déroulement d'un Projet de Fin d'Études de l'École Nationale des Ponts et Chaussées pour un bureau d'étude qui n'appartient pas à l'environnement de la construction française. Il a mis en place, dès nos conversations initiales, tous les outils permettant de bâtir un cadre approprié pour que la réussite de ce projet devienne une réalité.

Que la professeure Isabelle Salengros trouve, à travers ces présentes lignes, ma gratitude pour son accompagnement tout au long de ma scolarité.

Je tiens également à remercier mon tuteur académique, Arthur Lebée, pour ses contributions, son aide et sa réactivité lorsque je l'ai sollicité. Il m'a fait comprendre la complexité du sujet abordé tout en me saisissant de ses conseils, qui ont été essentiels pour mener à bien l'ensemble du projet. Il m'a poussé à apprendre.

Je remercie tout particulièrement mon tuteur professionnel Manuel Sánchez. Il a su encadrer le projet à tout moment et il s'y est investi afin que le résultat soit aussi satisfaisant que nous le voulions. Sa disponibilité et prédisposition pour améliorer l'ensemble du travail ont été remarquables.

Enfin, merci à mon père qui a été mon premier professeur de mathématiques.

## Résumé

Le présent Projet de Fin d'Études vise à développer un outil numérique de calcul de systèmes structuraux utilisant des panneaux en bois lamellé-croisée (*Cross Laminated Timber*) puisque, non seulement l'État de l'Art est incomplet, au regard des méthodes de dimensionnement applicables, mais aussi le secteur du BTP ne possède pas encore de logiciels de calcul industriel suffisamment développés quant aux vérifications de dimensionnement de panneaux CLT. En outre, compte tenu du contexte d'urgence climatique, l'utilisation du bois en tant que matériau structurel devient essentielle et les outils de calcul pointus jouent un rôle majeur dans le développement de cette industrie. L'accent est mis sur les bâtiments de hauteur considérable car les calculs structurels se complexifient à cause des effets des sollicitations horizontales, principalement dues au vent, sur la structure.

Le travail est divisé en trois grands chapitres : modélisation des panneaux CLT et définition des critères de rupture en État Limite Ultime, implémentation du modèle dans la méthode des éléments finis ainsi que validation de l'outil de calcul conçu et finalement application de l'outil de calcul sur un projet de bâtiment. Dans la première des parties, les panneaux CLT sont modélisés en tant qu'éléments dits de plaque épaisse monocouche équivalente, qui contiennent les caractéristiques de raideur des panneaux CLT multicouche originaux. Ensuite, les ratios fournissant des taux d'utilisation à l'État Limite Ultime sont définis. Dans la deuxième partie, la raideur équivalente est implémentée dans les éléments plaque associés aux panneaux CLT sur deux modèles aux éléments finis, puis l'analyse structurelle est exécutée et un post-traitement des résultats est effectué pour calculer les ratios d'utilisation en État Limite Ultime sur chaque point d'intégration des plaques. L'outil de calcul développé est validé à l'aide de résultats graphiques montrant les taux d'utilisation obtenus pour les deux cas. Finalement, le logiciel développé est utilisé pour dimensionner la section transversale de deux noyaux de contreventement en CLT d'un bâtiment à six étages en Norvège. Le bâtiment est fortement sollicité par le vent à cause de sa position géographique.

Mots-clés : Méthode des éléments finis, CLT, plaque épaisse, plaque stratifiée, orthotropie

## Abstract

The aim of this End-of-Studies Project is to develop a *plug-in* for calculating structural systems using Cross Laminated Timber (CLT) panels, since not only is the state-of-the-art incomplete in terms of the applicable dimensioning methods, but the construction sector does not yet have sufficiently developed industrial calculation software for checking the dimensions of CLT panels. Furthermore, given the urgent climate situation, the use of wood as a structural material is becoming increasingly important, and advanced calculation tools play a major role in the development of this industry. The focus is on buildings of considerable height, as structural behaviour become more complex due to the effects of horizontal loads, mainly due to the wind, on the structure.

The work is divided into three main chapters: modelling of CLT panels and definition of Ultimate Limit State failure criteria, implementation of the model in the finite element method and validation of the calculation tool designed and finally application of the calculation tool on a building project. In the first part, CLT panels are modelled as equivalent single-layer thick plate elements that contain the stiffness characteristics of the original multi-layer CLT panel. Next, ratios providing Ultimate Limit State utilisation rates are defined. On the second part, the equivalent stiffness is implemented in the shell elements associated with the CLT panels on two finite element models, after which the structural analysis is performed and post-processing of the results is carried out to calculate the Ultimate Limit State utilisation ratios at each shell integration point. The calculation tool developed is validated using graphical results showing the utilisation ratios obtained for the two cases. Finally, the software developed is used to design the cross-section of two CLT bracing cores for a six-storey building in Norway. The building is subject to high wind loads due to its geographical location.

Keywords: Finite Element Method, CLT, thick shell, multi-layered shell, orthotropy

## Table des matières

Remerciements.....	2
Résumé.....	3
Abstract.....	4
Table des matières .....	5
Liste des tableaux.....	8
Liste des figures .....	9
Liste des abréviations.....	12
Liste des annexes .....	15
1. Introduction .....	16
2. Modélisation, calcul et vérifications de résistance des panneaux CLT – État de l’art 20	
2.1. Eurocode 5 : Calcul des Structures en Bois .....	20
2.2. Approches de modélisation et dimensionnement des panneaux CLT dans la littérature 21	
3. Modélisation des panneaux CLT.....	25
3.1. Matériau bois : propriétés mécaniques.....	25
3.1.1. Effets de l’orthotropie sur le comportement élastique du matériau .....	25
3.1.2. Résistance du bois et résistance des panneaux CLT. Influence de l’orthotropie et des défauts du matériau .....	28
3.2. Configuration des panneaux CLT .....	29
LLISO I NAVARRO Josep Màxim – Département Génie Civil et Construction	5

3.3.	Panneaux CLT modélisés en tant que plaques épaisses de Reissner – Mindlin	.30
3.3.1.	Cinématique	32
3.3.2.	Efforts intérieurs	34
3.3.3.	Équations d'équilibre	35
3.3.4.	Loi de comportement élastique linéaire	36
3.3.5.	Relation entre forces généralisées et déformations généralisées. Matrice de raideur	36
3.3.6.	Modèle de plaque orthotrope monocouche équivalente pour les panneaux CLT	41
3.4.	Calcul de contraintes et ratios d'utilisation d'un panneau CLT en ELU	45
3.4.1.	Contraintes axiales	46
3.4.2.	Contraintes de cisaillement	47
3.4.3.	Interaction d'efforts axiaux et de flexion	50
3.4.4.	Analyse du système de ratios défini	51
4.	Validation du logiciel de dimensionnement de panneaux CLT	52
4.1.	Cas d'application simple 1	53
4.1.1.	Résultats analytiques	57
4.1.2.	Résultats obtenus par la Méthode des Éléments Finis	58
4.1.3.	Comparaison de la valeur des déflexions analytique et en utilisant la MEF	63
4.2.	Cas d'application simple 2	65
4.2.1.	Résultats analytiques	66

4.2.2.	Résultats obtenus par la Méthode des Éléments Finis .....	67
5.	Application de l'outil de calcul développé : noyaux de contreventement du bâtiment Saggården	70
5.1.	Géométrie du bâtiment .....	70
5.2.	Système structurel .....	71
5.3.	Modélisation des noyaux de contreventement en CLT .....	75
5.3.1.	Modélisation des panneaux CLT .....	75
5.3.2.	Modélisation des assemblages .....	77
5.4.	Résultats obtenus à l'aide de l'outil élaboré.....	78
6.	Conclusion et perspectives .....	82
6.1.	Conclusions principales.....	82
6.2.	Perspectives .....	84
	Bibliographie .....	86
	Annexes .....	88

## Liste des tableaux

Tableau 1 : Constantes élastiques d'un matériau orthotrope. ....	27
Tableau 2 : Résistances caractéristiques et de calcul d'un panneau CLT en bois C24 issues de l'ETA du fabricant KLH. ....	54
Tableau 3 : Dalle. Ratios obtenus par le logiciel développé. ....	62
Tableau 4 : Voile de cisaillement. Ratios obtenus par le logiciel développé. ....	69
Tableau 5 : Propriétés mécaniques du bois T15 et T22. Tableaux fournis par le logiciel CLT Designer selon les ETA du fabricant Splitkon. ....	76
Tableau 6 : Paramètres de dimensionnement à l'ELU des panneaux CLT du bâtiment Saggården. ....	77
Tableau 7 : Ratios d'utilisation de la résistance des noyaux CLT du bâtiment Saggården. ....	79

## Liste des figures

Figure 1 : Diagramme du flux de travail du projet TIMPS .....	19
Figure 2 : Résumé schématique des méthodes possibles de modélisation des panneaux CLT selon [2] et [3].....	22
Figure 3 : Repère orthoradial du bois. Figure tirée de [9].....	25
Figure 4 : Rupture par cisaillement de roulement. Figure tirée de [2]. .....	29
Figure 5 : Section d'un panneau CLT 240 L7s-2. ....	30
Figure 6 : Sections transversales et directions de portance d'un panneau CLT. Figure tirée de [2]. .....	30
Figure 7 : Plaque vue comme un milieu continu tridimensionnel. Figure tirée de [13].....	31
Figure 8 : Forces généralisées d'une plaque épaisse.....	35
Figure 9 : Schéma reliant les concepts basiques de la mécanique des milieux continus en régime élastique.....	40
Figure 10 : Distribution du moment statique d'une poutre carrée isotrope. ....	44
Figure 11 : Distribution du moment statique sur une section en CLT. ....	44
Figure 12 : Schéma pour le calcul des contraintes de flexion. Figure tirée de [2]. ....	46
Figure 13 : Distribution de contraintes de flexion et de cisaillement transversal. Figure tirée de [2]. ....	47
Figure 14 : Rupture par cisaillement des plis le long d'un joint. Figure tirée de [2]. ....	48
Figure 15 : Épaisseurs de calcul pour la rupture par cisaillement des couches le long d'un joint. .....	49

Figure 16 : Schéma de la rupture par cisaillement des interfaces aux points d'intersection. Figure tirée de [2]. .....	49
Figure 17 : Comparaison de la déformée d'un élément fini de type T4 à interpolation bilinéaire du champ de déplacements et un autre à interpolation utilisant des fonctions de forme quadratiques non conformes. Figure tirée de [19].....	52
Figure 18 : Section du panneau 240 L7s. Figure tirée du logiciel CLT Designer. ....	53
Figure 19 : Plaque soumise à un état de flexion cylindrique. Figure tirée de [22]. ....	55
Figure 20 : Schéma statique de la plaque du cas d'application 1. Approximation utilisant le modèle de Poutre de Timoshenko. ....	58
Figure 21 : Distribution de l'effort de flexion $m_{xx}$ pour le cas d'application simple 1. Résultat obtenu à l'aide de Sofistik 2023. ....	59
Figure 22 : Distribution de l'effort de flexion $m_{yy}$ pour le cas d'application simple 1. Résultat obtenu à l'aide de Sofistik 2023. ....	59
Figure 23 : Distribution de l'effort de torsion $m_{xy}$ pour le cas d'application simple 1. Résultat obtenu à l'aide de Sofistik 2023. ....	60
Figure 24 : Distribution de l'effort de cisaillement transversal $v_{xz}$ pour le cas d'application simple 1. Résultat obtenu à l'aide de Sofistik 2023. ....	60
Figure 25 : Distribution de l'effort de cisaillement transversal $v_{yz}$ pour le cas d'application simple 1. Résultat obtenu à l'aide de Sofistik 2023. ....	61
Figure 26 : Déflexion au centre d'une série de dalles rectangulaires simplement appuyées sur tous les bords. La direction la plus raide des panneaux porte selon $L_0$ . ....	63
Figure 27 : Déflexion au centre d'une série de dalles rectangulaires simplement appuyées sur tous les bords. La direction forte des panneaux porte selon $L_0$ . ....	64
Figure 28 : Écart des résultats numériques et analytiques .....	65
Figure 29 : Schéma statique du cas d'application simple 2. ....	66

Figure 30 : Distribution de $n_{xx}$ au bord encastré du voile de cisaillement du cas d'application 2. .....	66
Figure 31 : Distribution de l'effort de membrane $n_{xx}$ pour le cas d'application simple 2. Résultat obtenu à l'aide de Sofistik 2023. ....	67
Figure 32 : Distribution de l'effort de membrane $n_{yy}$ pour le cas d'application simple 2. Résultat obtenu à l'aide de Sofistik 2023. ....	68
Figure 33 : Distribution du cisaillement de membrane $n_{xy}$ pour le cas d'application simple 2. Résultat obtenu à l'aide de Sofistik 2023. ....	68
Figure 34 : Extrait du modèle BIM du bâtiment Saggården. ....	71
Figure 35 : Extrait du modèle BIM du bâtiment Saggården. Ossature bois et noyaux en CLT. ....	72
Figure 36 : Plan d'étage courant du bâtiment Saggården. Système de contreventement. ....	73
Figure 37 : Rigidification des noyaux par l'influence des murs du sous-sol. ....	73
Figure 38 : Effet favorable – conséquence de connecter la dalle inférieure aux noyaux de contreventement en CLT. ....	74
Figure 39 : Comportement structurel des noyaux de contreventement en CLT. ....	75
Figure 40 : Panneau CLT 240 L7s. Figure tirée du logiciel CLT Designer. ....	75
Figure 41 : Assemblages entre les noyaux CLT et le radier en béton armé des fondations. Figurée tirée du modèle BIM du bâtiment. ....	78
Figure 42 : Résultats du calcul du ratio de contraintes axiales dans la direction $0^\circ$ des panneaux CLT en adaptant le coefficient de flambement. ....	80
Figure 43 : Résultats du calcul du ratio de contraintes axiales dans la direction $0^\circ$ des panneaux CLT en adaptant le coefficient de flambement (suite). ....	81

## Liste des abréviations

<b>ACRONYMES</b>			
		$G_{12}$	Module de cisaillement du plan 1-2 du repère du bois
BTP	Bâtiment et Travaux Publiques	$G_{13}$	Module de cisaillement du plan 1-3 du repère du bois
CLT	Cross Laminated Timber	$G_{23}$	Module de cisaillement
ETA	European Technical Assessment	$\nu_{ij}$	Coefficients de Poisson
TIMPS	Timber Interactive Modelling and Post-Processing Software	$C_{ijkl}$	Tenseur de raideur en élasticité linéarisée
ELU	État Limite Ultime	$\sigma_{ij}$	Tenseur de contraintes de Cauchy
ELS	État Limite de Service	$\varepsilon_{ij}$	Tenseur de déformations généralisées
MEF	Méthode des Éléments Finis	$f_{t,0,d}$	Résistance de calcul à traction du bois
FOSDT	First Order Shear Deformation Theory	$f_{c,0,d}$	Résistance de calcul à compression parallèle aux fibres du bois
CSTB	Centre Scientifique et Technique du Bâtiment	$f_{c,90,d}$	Résistance de calcul à compression orthogonale aux fibres du bois
HOSDT	Higher Order Shear Deformation Theory	$f_{m,d}$	Résistance de calcul à flexion du bois
RVE	Representative Volume Element	$f_{v,d}$	Résistance de calcul à cisaillement transverse du bois
FC	Flexion Cylindrique	$k_{mod}$	Facteur de réduction de résistance par durée de la sollicitation
BIM	Building Information Modelling	$\gamma_m$	Facteur de réduction partielle de la résistance
<b>SYMBOLES</b>		$f_{v,R,d}$	Résistance à la rupture par roulement
$\kappa$	Facteur de correction de l'aire de cisaillement transverse	$f_{v,CLT,d}$	Résistance à la rupture par cisaillement des couches le long d'un joint
$k_{tors}$	Facteur de correction de la raideur à torsion	$f_{T,CLT,d}$	Résistance à la rupture par cisaillement aux surfaces encollées
$\alpha_{FE}$	Facteur de correction de la raideur à cisaillement de membrane	$f_{v,gross,d}$	Résistance par cisaillement du panneau complet
E	Module d'Young d'un matériau isotrope	$\nu_{xy}$	Force généralisée de cisaillement transverse au plan X-Z

$E_1$	Module d'Young sur la direction des fibres du bois	$\nu_{yz}$	Force généralisée de cisaillement transverse au plan Y-Z
$E_2$	Module d'Young sur la direction radiale du repère du bois	$\Omega$	Domaine d'une plaque dans l'espace
$E_3$	Module d'Young sur la direction tangentielle du repère du bois	$\Sigma$	Feuillet de référence d'une plaque
$G$	Module de Cisaillement d'un matériau isotrope	$u_0$	Déplacement du feuillet moyen selon X
$\theta_x$	Rotation d'axe X	$v_0$	Déplacement du feuillet moyen selon Y
$\theta_y$	Rotation d'axe Y	$w_0$	Déplacement du feuillet moyen selon Z
$u^*$	Déplacement généralisé sur l'axe X	$\varepsilon^*_x$	Déformation généralisée sur l'axe X
$v^*$	Déplacement généralisé sur l'axe Y	$\varepsilon^*_y$	Déformation généralisée sur l'axe Y
$w^*$	Déplacement généralisé sur l'axe Z	$\varepsilon^*_z$	Déformation généralisée sur l'axe Z
$\chi_x$	Courbure d'une plaque selon l'axe X	$\varepsilon^*_{xy}$	Déformation généralisée du plan X-Y
$\chi_y$	Courbure d'une plaque selon l'axe Y	$\varepsilon^*_{xz}$	Déformation généralisée du plan X-Z
$\chi_{xy}$	Courbure de gauchissement	$\varepsilon^*_{yz}$	Déformation généralisée du plan Y-Z
$\gamma_{xz}$	Distorsion angulaire en X-Z	$\varepsilon_{x0}$	Déformation du feuillet moyen selon l'axe X
$\gamma_{yz}$	Distorsion angulaire en Y-Z	$\varepsilon_{y0}$	Déformation du feuillet moyen selon l'axe Y
$d\Gamma$	Différentiel de surface	$\varepsilon_{xy0}$	Déformation du feuillet moyen au plan X-Y
$n_{xx}$	Force de membrane sur l'axe X	$\underline{F}$	Vecteur de forces généralisées
$n_{yy}$	Force de membrane sur l'axe Y	$\underline{K}$	Matrice de raideur
$n_{xy}$	Force de cisaillement dans le plan X-Y	$\underline{U}$	Vecteur de déplacements généralisés
$m_{xx}$	Moment fléchissant d'axe Y	$W_{i,net}$	Module résistant de flexion d'une section nette de CLT

$m_{yy}$	Moment fléchissant d'axe X	$\beta_c$	Coefficient d'imperfection
$m_{xy}$	Moment de torsion en X-Y		
$h$	Hauteur d'une section		
$I_{i,nette}$	Inertie nette d'une section ELU d'un panneau CLT		
$A_{i,nette}$	Surface nette d'une section ELU d'un panneau CLT		
$b$	Largeur des sections/largeur du mur de cisaillement		
$L_0$	Longueur de la direction $0^\circ$ des panneaux CLT		
$F$	Force		
$k_c$	Coefficient de flambement		
$i_i$	Rayon de giration		
$\lambda_i$	Élancement d'un panneau CLT		
$S_{i,R,net}$	Moment statique d'une section nette de CLT		
$t_i^*$	Épaisseurs du RVE pour le cisaillement de membrane		
$t_{tor}^*$	Épaisseur du RVE pour la torsion		
$L$	Portée de la direction à $0^\circ$		
$L'$	Portée de la direction $90^\circ$		
$q$	Charge uniformément distribuée		
$L_{90}$	Longueur de la direction $90^\circ$ des panneaux CLT		
$p$	Force		
$l_k$	Longueur de flambement		
$k_i$	Valeur auxiliaire pour l'obtention de $k_c$		
$\lambda_{rel,i}$	Élancement de flambement latéral		

## Liste des annexes

Annexes .....	88
Annexe 1 : algorithmes .....	89
Algorithme de pré-traitement des données, matrice de raideur .....	90
Algorithme de post-traitement des données, extraction et sélection des données de Sofistik .....	91
Algorithme de post-traitement des données, calcul des ratios à chaque nœud .....	92
Algorithme de post-traitement des données, représentation graphique des résultats.....	93

# 1. Introduction

---

Au cours des deux dernières décennies, l'utilisation du bois comme matériau structurel dans la construction a connu une croissance exponentielle dans le monde entier. Dans certains pays, le bois structurel est généralement utilisé pour les toits, les passerelles et les maisons individuelles, son emploi n'étant pas aussi étendu dans les grands bâtiments. En effet, ceux-ci ont tendance à être plus complexes à cause de surfaces importantes de plancher ou même des hauteurs considérables (jusqu'à 20-25 étages). Dans cette dernière application, la typologie structurelle basée sur des éléments surfaciques (murs et dalles) prédomine globalement en utilisant des panneaux de bois lamellé-croisé, désormais CLT (*Cross-Laminated Timber*) dans le texte.

En ce qui concerne la conception structurelle de ce type de bâtiments, deux grands défis apparaissent en comparaison au calcul de bâtiments conventionnels : d'une part la modélisation et vérification des éléments linéaires et des panneaux en tant qu'éléments structurels et d'autre part, la modélisation et conception des joints entre les panneaux.

L'une des principales caractéristiques des panneaux CLT est leur orthotropie (à la fois sectionnelle et au niveau du matériau), ce qui ajoute de la complexité à la modélisation structurelle dans les logiciels de calcul commerciaux non spécifiques, puisqu'un processus préalable devient nécessaire pour transformer les caractéristiques du panneau en caractéristiques exploitables par la méthode des éléments finis. Les logiciels industriels de calcul sont aujourd'hui capables de réaliser ce type de processus, et chacun d'entre eux l'applique de manière différente car aucune norme n'existe à ce titre.

Quant aux vérifications en État Limite Ultime de ces éléments, une formulation spécifique est encore à développer. Les logiciels industriels de calcul de structures couramment utilisés n'incluent pas de méthodes suffisamment précises pour répondre à ce besoin et, par conséquent un post-traitement externe, de la part de l'ingénieur, pour transformer les forces de l'élément fini en contraintes et en ratios de demande / capacité est nécessaire.

En ce qui concerne les joints entre les panneaux, la situation est analogue. Les modéliser dans un logiciel conventionnel de manière suffisamment fiable est possible, mais un post-

traitement externe est nécessaire pour permettre aux assemblages d'être dimensionnés. Il faut signaler qu'une modélisation correcte des joints entre les panneaux est essentielle pour être en mesure de traiter les panneaux CLT eux-mêmes.

Néanmoins, plusieurs logiciels destinés au calcul de sections et à la vérification d'éléments isolés en bois, notamment en CLT, existent. L'utilisation de ces logiciels est utile pour la conception de bâtiments à petite échelle et pour le prédimensionnement des éléments, mais devient limitée s'ils sont appliqués à des projets complexes. Lorsque l'absence de régularité de la trame structurelle ou des sollicitations de modélisation sophistiquée apparaissent, il faut traiter séparément chaque élément de la structure pour être en mesure de se servir de ces outils. La situation décrite entraîne un processus peu agile et coûteux en termes de temps et qui, en plus, donne lieu à des erreurs par la simple manipulation des données.

Parmi les logiciels de calcul aux éléments finis habituellement utilisés, une gamme d'alternatives pour la conception d'éléments en bois linéaires (1D) et plans (2D) existe, mais elles ne satisfont pas toujours les exigences de projet à cause de la disparité de fabricants et des propriétés de leur produits, leur disponibilité dans une certaine région ou des changements induits par les dernières approbations techniques ou codes. Enfin, ces logiciels n'ont pas la polyvalence et la puissance par rapport à ce qu'ils sont capables d'élaborer comme résultat d'analyses structurels quand il s'agit de matériaux comme l'acier ou le béton armé (voir précontraint). Les logiciels de calcul commerciaux sont plus avancés dans ces derniers cas et, en conséquence, ils permettent de réaliser des applications significativement plus complexes.

Le projet *Timber Interactive Modelling and Post-Processing Software* (désormais TIMPS) est un projet du bureau d'étude Degree of Freedom dans lequel s'inscrit le présent Projet de Fin d'Études. TIMPS vise à développer un outil de pré-traitement et post-traitement numérique lié au calcul et à la conception de structures en bois, notamment celles en CLT, permettant ainsi de résoudre les problèmes décrits, dans le paragraphe précédent, au sein de l'agence. Le flux de travail conçu pour le développement du logiciel qui fait l'objet du présent PFE se trouve dans le diagramme de la figure 1, où toutes les étapes de modélisation et calcul sont présentes. Celles qui sont sur un fond foncé correspondent à des processus menés par un logiciel de calcul industriel aux éléments finis, tandis que celles présentées sur un fond blanc sont associés aux processus élaborés dans le cadre de ce projet.

Les processus concernant les assemblages ne sont pas détaillés dans le présent Projet de Fin d'Études, mais il faut bien qu'ils soient présents puisqu'il n'est pas possible de mener une analyse d'une structure en CLT sans prendre en considération les joints entre les panneaux.

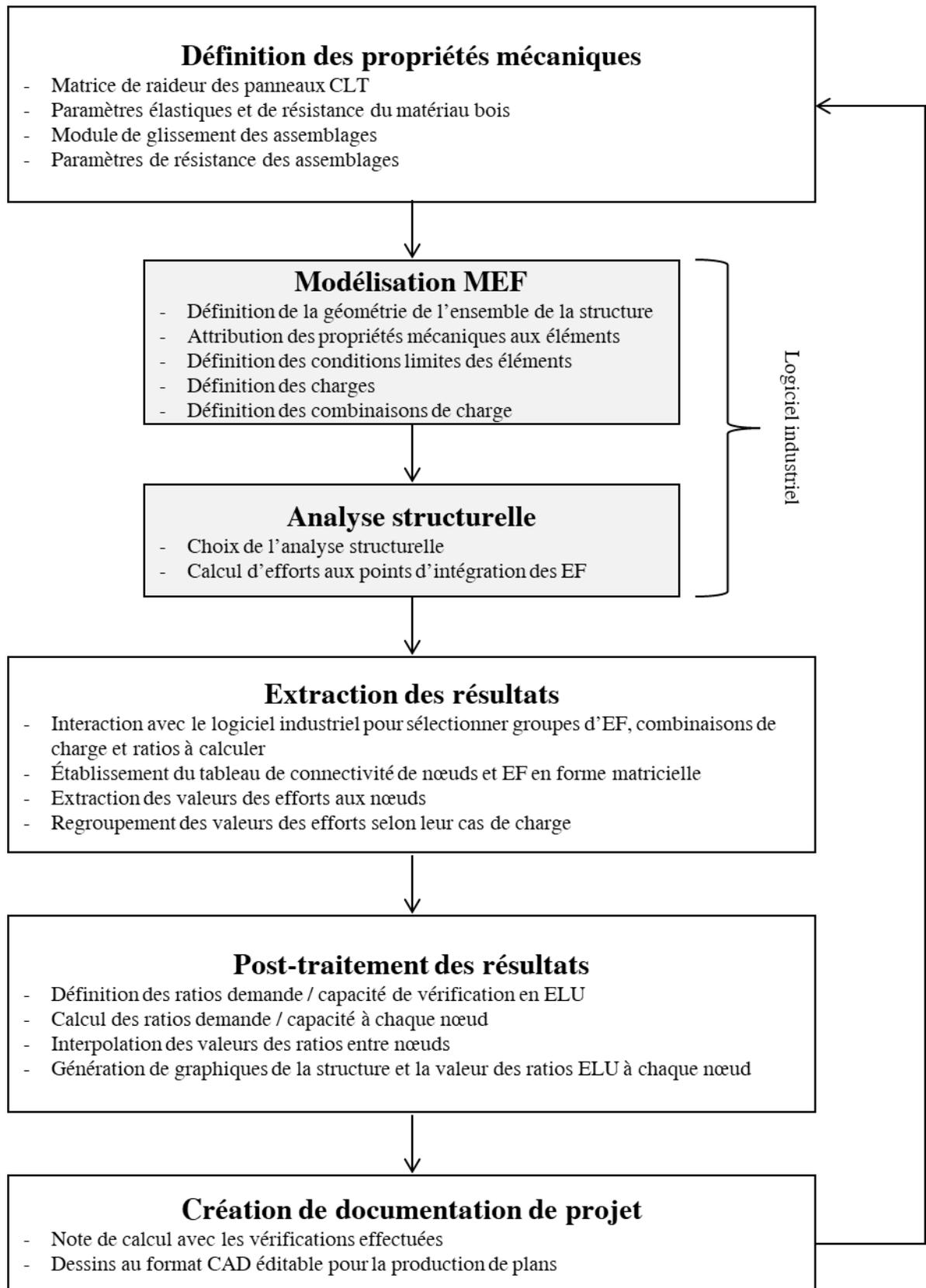


Figure 1: Diagramme du flux de travail du projet TIMPS

## 2. Modélisation, calcul et vérifications de résistance des panneaux CLT – État de l'art

---

### 2.1. Eurocode 5 : Calcul des Structures en Bois

Il n'existe pas une méthode de calcul et vérification de panneaux CLT, en termes normatifs, préconisée par l'Eurocode 5 : Calcul des Structures en Bois [1]. Néanmoins, un certain savoir-faire a été développé par les ingénieurs afin de contrôler son emploi dans le domaine de la construction. Cet emploi est devenu habituel.

Par conséquent, certains documents techniques ont été établis pour faciliter le processus de conception et dimensionnement des panneaux CLT de manière alternative. Les documents les plus couramment utilisés sont les ETA (*European Technical Assessment*). Il s'agit d'un type de document que chaque fournisseur de panneaux CLT doit posséder afin de démontrer que son produit respecte les critères de qualité exigés en Europe. Les ETA sont ainsi des documents que chaque entreprise fabricante de panneaux CLT élabore pour déterminer le domaine d'application de son produit, sa vie utile, ses caractéristiques mécaniques et résistantes, sa réponse au feu, ses propriétés acoustiques et thermiques etc., mais en aucun cas ces documents n'entrent dans des aspects de modélisation structurelle. De plus, ils se réfèrent souvent à l'Eurocode 5, en l'état, afin que le concepteur effectue des approximations pour pouvoir être en mesure de calculer les contraintes en État Limite Ultime et les comparer aux résistances fournies. De leur côté, certains états de l'Union Européenne offrent la possibilité aux fabricants de faire tester leurs produits par des organismes publics afin qu'ils obtiennent une attestation officielle qui vérifie leurs propriétés et délimite leur domaine d'application de manière précise. Ce type de documents techniques permettent, eux, d'entrer dans des aspects liés aux méthodes de vérification en faisant appel aux États Limites de Service et aux États Limites Ultimes tout en proposant des méthodes de calcul approximatives, mais ils ne restent applicables qu'aux cas particuliers étudiés. Les assemblages peuvent aussi être traités, même si c'est de manière non exhaustive, et des recommandations constructives sont fournies. En France ce type de document s'appelle Document Technique d'Application, et il est délivré par le CSTB.

## **2.2.Approches de modélisation et dimensionnement des panneaux CLT dans la littérature**

Dans un cadre où la construction bois occupe une place grandissante sur le marché, une importante communauté de chercheurs a bâti un environnement permettant de répondre aux besoins de standardisation du processus de calcul et conception des structures utilisant des panneaux CLT. De cette manière, les points les plus complexes, quant à la modélisation de ces éléments ont déjà été soulevés. Plus précisément, les aspects qui font des panneaux CLT des éléments complexes à modéliser sont les suivants :

- Le caractère orthotrope du bois.
- Le caractère orthotrope des sections transversales des panneaux.
- La division des panneaux en différentes couches collées entre-elles.
- La division de chacune des couches en lamelles.

Quant à la modélisation, différentes méthodes peuvent être employées afin d'aboutir à une gestion correcte des particularités imposées par les caractéristiques de ces panneaux. Les approches s'adaptent au comportement de l'élément plaque, à la manière dont il est sollicité et à ses liaisons extérieures.

Selon M. Wallner – Novak et al. [2], lorsqu'un axe du repère suffit pour étudier la distribution des efforts sur une plaque, réduire le problème à une dimension est possible, et donc, la plaque peut être étudiée en tant qu'un élément poutre. Les vérifications de dimensionnement à l'ELU peuvent être donc effectuées à l'aide de l'Eurocode 5. Les résultats d'efforts intérieurs seront obtenus par mètre de largeur de plaque.

Dans le cas contraire, la réponse en flexion peut porter sur deux directions et une torsion peut apparaître. Il serait donc nécessaire de mener une analyse structurelle en deux dimensions. Les effets de couplage de la réponse en flexion sont provoqués par le rapport de raideurs à flexion entre les directions de portance de la dalle. Wallner – Novak et al. [2] et Borgström et Fröbel [3] proposent l'élaboration, soit d'un modèle de grille de poutres, soit d'un modèle de plaque orthotrope monocouche équivalente afin d'être en disposition de mener les calculs en deux dimensions pour les panneaux CLT.

Concernant le modèle de grille de poutres, deux possibilités sont envisagées pour la prise en compte des déformations induites par les efforts tranchants : l'utilisation de la Méthode Gamma [1] ou une adaptation de la Théorie de Poutres de Timoshenko [4] pour un matériau stratifié. De plus, pour le modèle de plaque orthotrope monocouche équivalente, deux possibilités sont envisagées par les mêmes auteurs : l'introduction d'une épaisseur effective ou la déclaration directe de la raideur de l'élément. La figure 2 résume les possibilités de modélisation exposées :

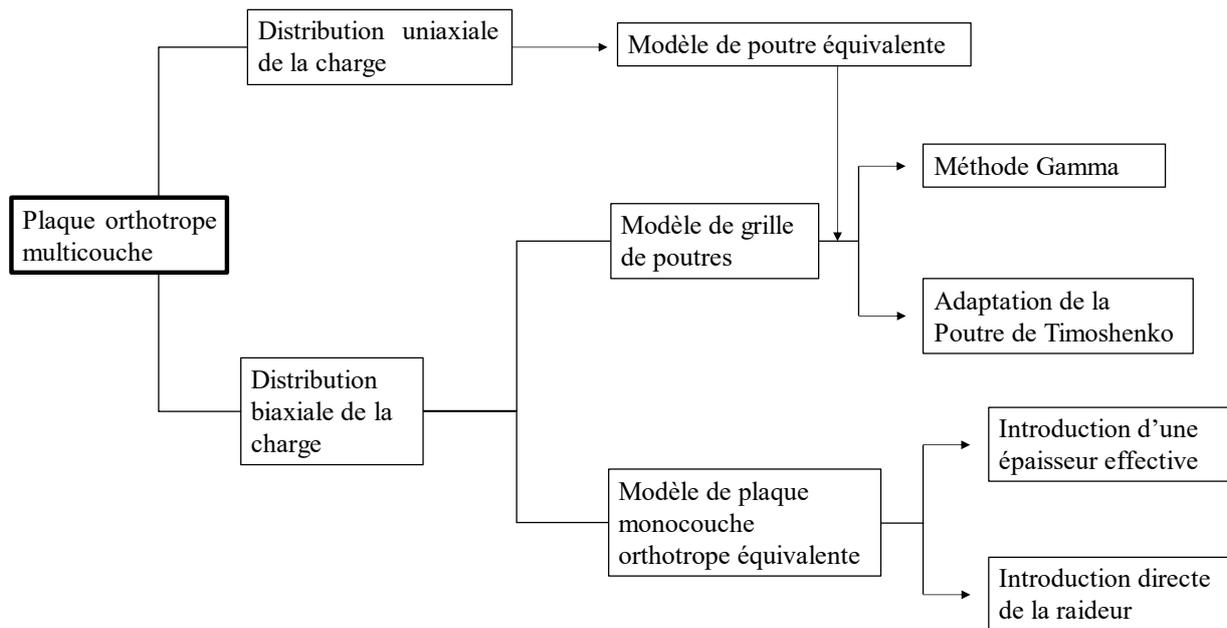


Figure 2 : Résumé schématisé des méthodes possibles de modélisation des panneaux CLT selon [2] et [3].

Le modèle de grille de poutres possède quelques désavantages face à celui de plaque orthotrope monocouche équivalente.

- Il est plus coûteux d'élaborer puisqu'il faut diviser un panneau CLT en plusieurs poutres et modéliser la liaison entre-elles.
- L'influence de la raideur à torsion de l'élément est négligée.
- Il est souvent nécessaire d'introduire le poids propre de l'élément manuellement dans les logiciels de calcul aux éléments finis.

Quant au modèle de plaque orthotrope monocouche équivalente, il est plus efficace et plus approprié de calculer les raideurs face aux différents efforts de l'élément plaque que d'établir

une épaisseur équivalente à partir de laquelle les raideurs seront recalculées. Le calcul desdites raideurs se fait en respectant le modèle de plaque épaisse de Reissner – Mindlin [5], qui peut être appliqué à l'aide du facteur de correction de l'aire de cisaillement,  $\kappa$ , puisque le passage de plaque multicouche à plaque monocouche équivalente a été réalisé. D'autres facteurs de correction sont nécessaires afin de prendre en compte correctement la raideur du CLT concernant la torsion ( $k_{tors}$ ) et cisaillement dans le plan de la plaque ( $\alpha_{FE}$ ) d'après G. Silly [6].

Néanmoins, une théorie alternative existe. Elle permet de s'affranchir de la conversion de plaque stratifiée en plaque monocouche. Il s'agit de la *Bending – Gradient Theory* [7], qui remplace l'effort de cisaillement transverse de Reissner – Mindlin par une force de cisaillement généralisée liée au premier gradient du moment fléchissant. En effet, la théorie de Reissner – Mindlin est une théorie dite de déformation de cisaillement de premier ordre, ou *First Order Shear Deformation Theory* « FOSDT » en anglais, qui n'est pas directement applicable aux plaques multicouches, tandis que la *Bending – Gradient Theory* est une théorie dite de déformation de cisaillement d'ordre supérieur, « HOSDT », capable de prédire la déflexion, la distribution des contraintes de cisaillement et la distribution de déplacements dans le plan de n'importe quelle configuration matérielle [8].

Quant au dimensionnement des panneaux CLT, l'approche proposée par M. Wallner – Novak et al. [2] consiste à définir une section nette en ELU pour chacune des deux sections transversales des panneaux CLT dans lesquelles il est possible d'injecter les efforts généralisés issus d'un calcul selon le modèle de Reissner – Mindlin, et ensuite effectuer le calcul des contraintes résultantes. Des ratios de demande / capacité de résistance sont alors définis. Il s'agit d'une approche basée sur l'Eurocode 5. Une méthode similaire est proposée par E. Borgström et J. Fröbel [3]. L. Franzoni et al. [9] comparent la dispersion de résultats fournis par une modélisation selon la *Bending – Gradient Theory* et la théorie de Reissner – Mindlin de panneaux CLT soumis à un essai de flexion en quatre points en concluant qu'en absence d'espacement entre les lamelles, la différence apportée par les deux modèles n'est pas significative pour panneaux à plus de 3 plis.

Du fait que les sections transversales des panneaux CLT sont parallèles aux deux directions sur lesquelles les fibres de bois des couches sont orientées, la méthode de vérification décrite s'adapte bien aux cas de flexion cylindrique.

En définitive, les panneaux CLT sont des éléments ayant un comportement mécanique remarquablement complexe. Les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur permettent de prendre en compte les effets de l'orthotropie et de la stratification des plaques quant à la distribution de l'effort tranchant sur une section transversale. Ces théories sont utiles lorsqu'on envisage une approche purement analytique du problème, mais leur implémentation dans des modèles aux éléments finis nécessite d'un maillage suffisamment fin des sections transversales. Par conséquent, l'application d'une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur serait trop coûteuse en termes computationnels et de difficile application en projets à grande échelle. Il devient donc pratique de passer d'un modèle de plaque orthotrope stratifiée à un modèle de plaque orthotrope monocouche équivalente car cela permet de rendre exploitables les modèles aux éléments finis de projets de bâtiments complets, même si une quantité considérable de facteurs de correction doit être calculée. Concernant la définition des mécanismes de rupture et des résistances associées à ces mécanismes, l'établissement de ratios demande / capacité est la méthode la plus répandue pour les panneaux CLT, à la différence d'éléments en matériaux dont le comportement mécanique est moins complexe, comme l'acier ou le béton. L'établissement de ratios demande / capacité n'a pas une grande rigueur scientifique mais reste pratique même si des simplifications sécuritaires doivent être mises en place. Enfin, des études plus approfondies concernant ces ratios de résistance, notamment en ce qui concerne l'interaction des différents efforts intérieurs, doivent être menées car il existe une certaine dispersion quant à la manière de les définir.

### 3. Modélisation des panneaux CLT

---

Le présent chapitre vise à décrire le modèle de calcul et la vérification des panneaux CLT implémentés dans le logiciel élaboré, qui travaille avec la méthode des éléments finis. Dans la première partie, la matrice de raideur des panneaux CLT en tant qu'éléments de plaque épaisse est obtenue suivant un processus logique, et la deuxième partie a pour but de montrer les hypothèses permettant de calculer les contraintes sur les panneaux et de décrire les critères de rupture à l'État Limite Ultime pris en compte.

#### 3.1. Matériau bois : propriétés mécaniques

##### 3.1.1. Effets de l'orthotropie sur le comportement élastique du matériau

Le bois est un matériau localement orthotrope, c'est-à-dire, qu'il présente deux plans de symétrie orthogonaux vis-à-vis de ses propriétés mécaniques en régime élastique. L'orientation des deux plans orthogonaux de symétrie varie puisque l'orthotropie du bois suit un repère orthoradial guidé par la direction des fibres et les anneaux de croissance d'un tronc.

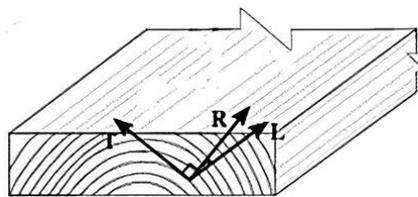


Figure 3 : Repère orthoradial du bois. Figure tirée de [9].

Rappelons que les contraintes de Cauchy sont liées aux déformations à travers de la Loi de Hooke Généralisée :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{lk} \quad (1)$$

En élasticité linéarisée en petites perturbations, le tenseur de rigidité tridimensionnelle  $C_{ijkl}$  est un tenseur d'ordre quatre :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Les contraintes de Cauchy sont définies, en notation ingénieur et en forme de vecteur comme :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Les déformations généralisées sont :

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Si l'orthotropie est prise en compte, certains termes du tenseur de rigidité deviennent nuls grâce aux symétries matérielles introduites sur la loi de comportement élastique [10]. Le tenseur de rigidité d'un matériau orthotrope devient donc de la forme :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Les constantes élastiques à déterminer sont 9 : 3 modules d'Young, 3 modules de cisaillement et 3 coefficients de Poisson.

Module d'Young	Module de Cisaillement	Coefficient de Poisson
$E_1$	$G_{12}$	$\nu_{12}$
$E_2$	$G_{13}$	$\nu_{13}$
$E_3$	$G_{23}$	$\nu_{23}$

Tableau 1 : Constantes élastiques d'un matériau orthotrope.

Ces 9 constantes sont définies sur le repère orthoradial dans le cas du bois. Le Module d'Young  $E_1$  est celui associé à la direction des fibres,  $E_2$  celui associé à la direction radiale et  $E_3$  à la direction tangentielle. Tout comme les modules de cisaillement, les coefficients de Poisson sont définis dans les plans formés par les axes du repère.

Par conséquent, le calcul des termes du tenseur de rigidité se fait, selon la Loi de Hooke Généralisée et le tenseur de rigidité en élasticité linéarisée en petites perturbations du bois est le suivant :

$$[C] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32}) & E_2(\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}) & E_3(\nu_{13} + \nu_{23}\nu_{12}) & 0 & 0 & 0 \\ E_1(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}) & E_2(1 - \nu_{31}\nu_{13}) & E_3(\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ E_1(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}) & E_2(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}) & E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta G_{12} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Où le coefficient  $\Delta$  est :

$$\Delta = 1 - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{32}\nu_{21}\nu_{13} \quad (7)$$

Il est à remarquer que l'ordre de grandeur du Module d'Young de la direction des fibres,  $E_1$ , est significativement supérieur à celui des deux autres Modules d'Young (approximativement 22 fois supérieur). Un phénomène semblable concerne les modules de cisaillement car la valeur de  $G_{23}$  est de l'ordre de 10 fois inférieure aux deux autres des modules de cisaillement.

La dispersion de valeurs des modules d'Young est due au fait que le bois présente un comportement envers les sollicitations axiales significativement plus raide dans la direction des fibres (et donc du tronc de l'arbre auquel elles appartiennent) que dans les autres directions. Concernant les différents modules de cisaillement, la valeur de  $G_{23}$  est importante à cause de la différence qu'elle présente par rapport aux deux autres et à prendre en compte pour la suite.

### 3.1.2. Résistance du bois et résistance des panneaux CLT. Influence de l'orthotropie et des défauts du matériau

On peut conclure de la section précédente qu'un élément structurel en bois travaillera de manière optimale en orientant ses fibres vers la direction la plus sollicitée. Par conséquent, la direction de la ligne moyenne des poutres en bois est toujours parallèle à celles des fibres et, dans les plis du CLT, les fibres sont parallèles aux directions des lamelles.

Le bois possède une particularité concernant sa résistance en tant que matériau de construction : la présence de nœuds et accidents de croissance exerce une influence importante sur sa résistance à la traction axiale. La distribution de défauts et nœuds de croissance est traitée de manière statistique (lois probabilistes de type Weibull) afin de définir la valeur des résistances caractéristiques du bois [11]. La raison pour laquelle la contrainte de rupture dépend du type de sollicitation est liée au volume de pièce sollicitée en traction. Lorsqu'une sollicitation de traction pure apparaît, le volume de l'élément en traction est plus grand que le volume en traction engendré par une sollicitation de flexion. La probabilité de trouver des défauts est donc plus grande sous l'effet de traction pure que sous une sollicitation de flexion. La contrainte admissible sera plus réduite pour une sollicitation de traction pure que pour une sollicitation de flexion pure.

En effet, les résistances des poutres en bois sont définies comme suit [1] :

- Résistance à traction parallèle aux fibres  $f_{t,0,d}$ .
- Résistance à compression parallèle aux fibres  $f_{c,0,d}$ .
- Résistance à compression orthogonale aux fibres  $f_{c,90,d}$ .
- Résistance à flexion dans les axes principaux d'une poutre  $f_{m,d}$ .
- Résistance à cisaillement  $f_{v,d}$ .

L'indice  $d$  indique qu'il s'agit de résistances de calcul qui ont été minorées en utilisant les facteurs  $k_{mod}$  et  $\gamma_m$ . Ces facteurs sont introduits par l'Eurocode 5 et seront calculés selon le processus préconisé.

$$R_d = k_{mod} \frac{R_k}{\gamma_m} \quad (8)$$

Reprenant le paramètre  $G_{23}$  (3.1.1.), celui-ci représente la capacité d'absorber des contraintes de cisaillement dans le plan formé par les vecteurs tangentiel et radiale du repère

orthoradial établi pour le bois. Ce plan est orthogonal aux fibres et contient les anneaux de croissance dont les troncs des arbres sont composés. L'interface de ces anneaux ne possède pas de propriétés aptes pour résister aux sollicitations de cisaillement, raison pour laquelle la constante  $G_{23}$  est significativement plus faible que les deux autres. Une sollicitation de cisaillement sur le plan 2-3 du repère peut faire rouler un de ces anneaux sur un autre, en conséquence, il existe un mode de rupture associé appelé « rupture par roulement » (*rolling shear* en anglais).

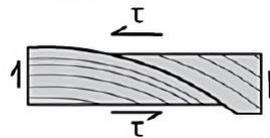


Figure 4 : Rupture par cisaillement de roulement. Figure tirée de [2].

La rupture par roulement joue un rôle essentiel dans les panneaux CLT puisque, pour une section transversale d'un panneau quelconque, l'effort tranchant,  $v_{xz}$  ou  $v_{xy}$ , induit, sur les couches orientées selon la direction contenue dans le plan de section, un effort de cisaillement mobilisant le mécanisme de roulement.

De cette manière, quand il s'agit de CLT, M. Wallner – Novak et al. [2] proposent de prendre en compte la résistance à la rupture par roulement  $f_{v,R,d}$  ainsi que trois types de résistance associés aux trois mécanismes de rupture par cisaillement dans le plan définis dans le chapitre 3.4.2.2.

- Résistance à la rupture par cisaillement des couches le long d'un joint  $f_{v,CLT,d}$ .
- Résistance à la rupture par cisaillement aux surfaces encollées  $f_{T,CLT,d}$ .
- Résistance à la rupture par cisaillement du panneau complet  $f_{v,gross,d}$ .

Les valeurs des résistances sont fournies par les fabricants dans les ETA.

### 3.2. Configuration des panneaux CLT

Les panneaux CLT sont des éléments plaque formés par des planches superposées de bois qui sont orientées perpendiculairement les unes par rapport aux autres. Chaque couche est constituée de plusieurs lamelles dont la direction des fibres du bois est parallèle à leur ligne moyenne. L'épaisseur des lamelles varie généralement de 20 mm à 45 mm et leur largeur est

souvent quatre fois plus grande que l'épaisseur. Les couches sont collées les unes les autres avec des adhésifs structuraux.

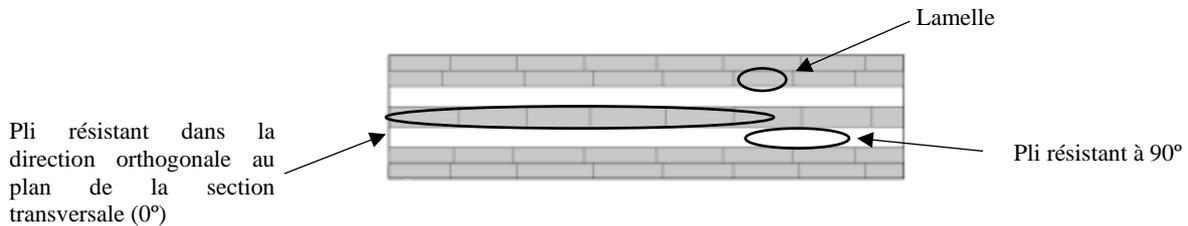


Figure 5 : Section d'un panneau CLT 240 L7s-2.

La stratification croisée des couches (plis) en bois confère aux panneaux CLT une importante résistance structurelle qui leur permet d'être utilisés dans le domaine de la construction. Pourtant, elle complexifie la tâche de modélisation mécanique de ces éléments.

La configuration interne des panneaux engendre des différences en termes de caractéristiques mécaniques entre deux sections transversales orthogonales. Par la suite, deux directions de portance principales sont définies : la direction sur laquelle la section transversale possède des caractéristiques mécaniques les plus fortes est couramment appelée « direction  $0^\circ$  » de manière que l'autre des directions est la « direction  $90^\circ$  ».

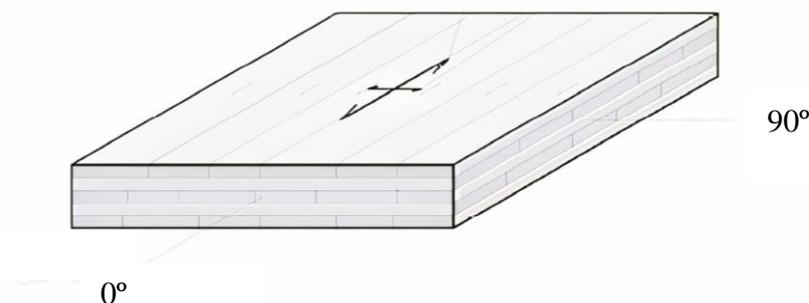


Figure 6 : Sections transversales et directions de portance d'un panneau CLT. Figure tirée de [2].

### 3.3. Panneaux CLT modélisés en tant que plaques épaisses de Reissner – Mindlin

Une modélisation de plaque monocouche orthotrope équivalente par introduction directe de la matrice de raideur est choisie afin de concevoir l'outil de vérification de panneaux CLT. Dans le présent chapitre on déduit, tout d'abord, le modèle de Reissner – Mindlin valable dans le cadre de l'élasticité linéarisée en petites perturbations pour une plaque homogène isotrope.

Ainsi, les sous chapitres allant du 3.3.1. jusqu'au 3.3.5. servent à la déduction de la matrice de raideur d'une plaque homogène isotrope de Reissner – Mindlin. Ensuite, ladite matrice est adaptée au cas des panneaux CLT. La matrice obtenue sera implémentée ultérieurement dans les modèles aux éléments finis des panneaux CLT.

Le modèle de plaque épaisse proposé par Max Eric Reissner [5], et ultérieurement complété par Raymond Mindlin [12] est utilisé afin de modéliser les plaques épaisses monocouches équivalentes aux panneaux CLT. En effet, un modèle de plaque épaisse est nécessaire car les effets provoqués par les efforts tranchants  $v_{xz}$  et  $v_{yz}$  sur les panneaux ne sont pas négligeables.

Avant d'établir le modèle de plaque épaisse il devient judicieux de donner une définition de plaque. « Une plaque est un solide tridimensionnel dont l'une des dimensions, l'épaisseur, mesurée par rapport à un feuillet de référence plan, est petite devant les deux autres » [13].

Une définition plus rigoureuse est fournie par le même auteur : « Un domaine de l'espace  $\Omega \subset \delta$  est une plaque s'il existe un domaine plan  $\Sigma$  (son feuillet de référence) de normale  $N$ , et deux champs scalaires  $Z^+(M)$  et  $Z^-(M)$  définis en tout point  $M$  de  $\Sigma$ , tels que :

$$\Omega = \{P \in \delta | P = M + zN, M \in \Sigma \text{ et } Z^-(M) \leq z \leq Z^+(M)\} \quad (9)$$

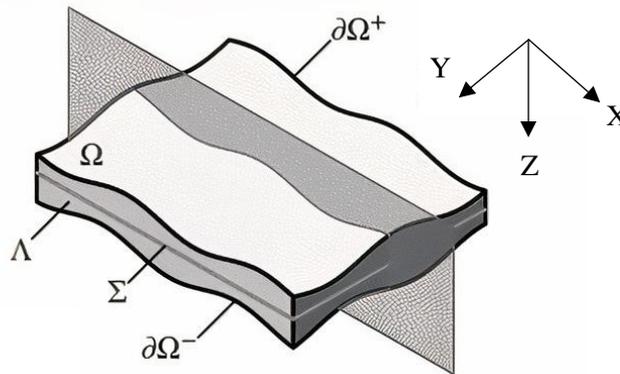


Figure 7 : Plaque vue comme un milieu continu tridimensionnel. Figure tirée de [13].

Dans le cadre de l'étude des panneaux CLT, étant donné que ce sont dans leur majorité des panneaux symétriques d'épaisseur constante, par abus de langage le feuillet de référence sera dénommé *feuillet moyen* puisqu'il sera placé sur le plan qui divise la plaque en deux moitiés de la même épaisseur.

### 3.3.1. Cinématique

En considérant un repère orthonormé direct avec l'axe Z orienté vers le bas, les degrés de liberté de l'élément plaque épaisse sont définis comme [14] :

- Déplacement d'un point du feuillet moyen selon la direction de l'axe X :  $u_0$
- Déplacement d'un point du feuillet moyen selon la direction de l'axe Y :  $v_0$
- Déplacement d'un point du feuillet moyen selon la direction de l'axe Z :  $w_0$
- Rotation d'une section transversale contenue dans un plan X-Z autour de l'axe X :  $\theta_x$
- Rotation d'une section transversale contenue dans un plan Y-Z autour de l'axe Y :  $\theta_y$

Le champ de déplacements d'un point quelconque appartenant à une section transversale contenue dans un plan X-Z ou Y-Z d'une plaque épaisse est donc :

$$u^*(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_y \quad (10)$$

$$v^*(x, y, z) = v_0(x, y) - z\theta_x \quad (11)$$

$$w^*(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (12)$$

Ainsi, les termes portant un indice 0 sont associés aux déplacements localisés sur le feuillet moyen de la plaque et ceux portant le symbole \* indiquent qu'il s'agit d'un changement de position d'un point quelconque sur une section [15].

La première des conséquences qui découlent de la définition de cette cinématique est l'indépendance de la valeur du déplacement vertical  $w_0$  d'un point quelconque de sa coordonnée z.

En appliquant la définition du tenseur de déformations linéarisées en hypothèse de petites perturbations, le champ de déformations devient :

$$\varepsilon^*_x = \frac{\partial u^*(x, y, z)}{\partial x} = \varepsilon_{x0} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \varepsilon_{x0} + z \chi_x \quad (13)$$

$$\varepsilon^*_y = \frac{\partial v^*(x, y, z)}{\partial y} = \varepsilon_{y0} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \varepsilon_{y0} - z \chi_y \quad (14)$$

$$\varepsilon^*_z = \frac{\partial w^*(x, y, z)}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^*_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^*(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v^*(x,y,z)}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} \right) + \frac{z}{2} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\varepsilon_{xy0} + z \chi_{xy})\end{aligned}\quad (16)$$

$$\varepsilon^*_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^*(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w^*(x,y,z)}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( \theta_y + \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \quad (17)$$

$$\varepsilon^*_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^*(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w^*(x,y,z)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( -\theta_x + \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \quad (18)$$

Il est à signaler que l'équation (15) n'est pas compatible avec la loi de comportement élastique linéaire et, donc, à ne pas prendre en compte pour ne pas s'exposer à des incohérences statiques. L'état de déformation plane qui découle de l'équation (15) est, en réalité, faux.

Conséquemment, les déformations  $\varepsilon_{x0}$  et  $\varepsilon_{y0}$  représentent, respectivement, l'allongement unitaire d'un segment dX et dY du feuillet moyen et  $\varepsilon_{xy0}$  est la distorsion angulaire entre un segment dX et dY du même domaine.

Deux paramètres fondamentaux dans le modèle de Reissner – Mindlin sont les distorsions angulaires,  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ , dues aux déformations de cisaillement hors plan. Le fait de ne pas introduire une relation entre la rotation d'une section autour des axes X ou Y et la première dérivée de la flèche permet de prendre en compte les effets du cisaillement transversal, qui sont importants lorsque l'élançement d'une plaque est faible. Naturellement, la dénomination de ce modèle comme de *plaque épaisse* est la conséquence de ce raisonnement. Inversement, le modèle dit de *plaque mince*, ou de Love-Kirchoff, propose un champ de déplacement où les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont égales, en valeur absolue, à la première dérivée de la flèche selon Y et X respectivement :

$$\theta_x = \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \quad (19)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \quad (20)$$

L'introduction des relations précédentes étend la théorie de poutres d'Euler – Bernouilli aux plaques. L'utilisation du modèle de plaque mince est pertinente lorsque l'élançement de l'élément plaque devient significatif, mais généralement il est judicieux d'employer le modèle

de plaque épaisse puisqu'il est d'application pour la quasi-totalité des cas d'étude dans la pratique de l'ingénieur. De la même manière, le modèle de Reissner – Mindlin est une extension, pour les solides 2D, de la théorie des poutres de Timoshenko.

### 3.3.2. Efforts intérieurs

Les équations de la statique établissent les relations entre efforts généralisés sur une section du solide et les contraintes correspondantes. Bien entendu, lesdites contraintes sont celles au sens du tenseur de contraintes de Cauchy, présenté sur l'équation (3) en forme de vecteur.

L'équilibre statique des forces généralisées sur une section d'un solide avec les contraintes induites amène aux relations suivantes :

$$n_{xx} = \int_{\Gamma} \sigma_x(x, y, z) d\Gamma \quad (21)$$

$$n_{yy} = \int_{\Gamma} \sigma_y(x, y, z) d\Gamma \quad (22)$$

$$n_{xy} = \int_{\Gamma} \sigma_{xy}(x, y, z) d\Gamma \quad (23)$$

$$m_{xx} = \int_{\Gamma} z \sigma_{x \text{ flex}}(x, y, z) d\Gamma \quad (24)$$

$$m_{yy} = \int_{\Gamma} z \sigma_{y \text{ flex}}(x, y, z) d\Gamma \quad (25)$$

$$m_{xy} = \int_{\Gamma} z \sigma_{xy \text{ tors}}(x, y, z) d\Gamma \quad (26)$$

$$v_{xz} = \int_{\Gamma} \sigma_{xz}(x, y, z) d\Gamma \quad (27)$$

$$v_{yz} = \int_{\Gamma} \sigma_{yz}(x, y, z) d\Gamma \quad (28)$$

Où  $\Gamma$  désigne la surface d'une section transversale de l'élément obtenue en prenant 1 mètre de largeur et la hauteur correspondante. L'intégrale sur l'axe Z a comme limites d'intégration les fibres supérieure et inférieure de l'épaisseur  $-\frac{h}{2}$  et  $\frac{h}{2}$  puisque le repère se situe sur le feuillet moyen de la plaque.

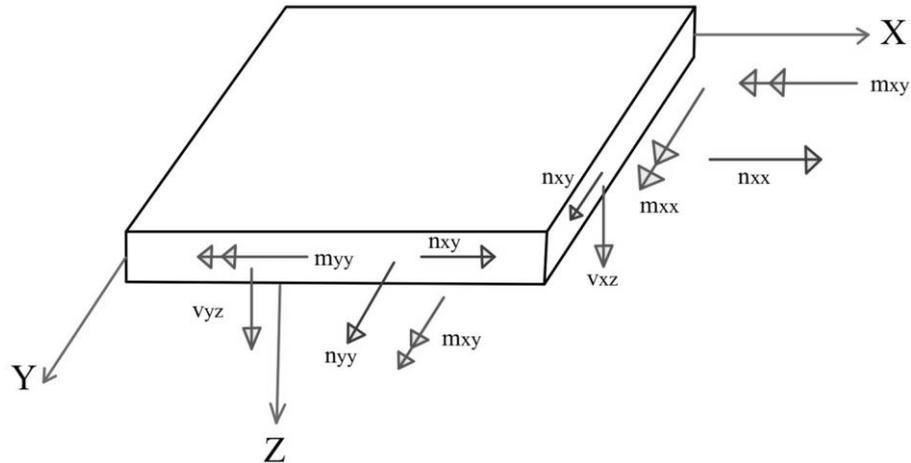


Figure 8 : Forces généralisées d'une plaque épaisse

### 3.3.3.Équations d'équilibre

L'équilibre d'efforts intérieurs sur un élément différentiel de plaque pour un comportement de membrane donne les équations différentielles aux dérivées partielles (29) et (30) et pour un comportement de plaque fléchie, le système d'équations différentielles à dérivées partielles (31), (32) et (33). Les charges  $p(x, y)$  et  $q(x, y)$  sont une charge distribuée contenue dans le plan du feuillet moyen de la plaque et une charge distribuée d'axe orthogonal au feuillet moyen de la plaque respectivement [14].

$$\frac{\partial n_{xx}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}(x,y)}{\partial y} + p(x, y) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial n_{yy}(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}(x,y)}{\partial x} + p(x, y) = 0 \quad (30)$$

} Équilibre de membrane

$$\frac{\partial v_{xz}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v_{yz}(x,y)}{\partial y} + q(x, y) = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial m_{xx}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}(x,y)}{\partial y} = v_{xz}(x, y) \quad (32)$$

$$\frac{\partial m_{yy}(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}(x,y)}{\partial x} = v_{yz}(x, y) \quad (33)$$

} Équilibre de plaque fléchie

Il est possible d'exprimer l'équilibre de plaque fléchie en une seule équation à trois inconnues (34) en substituant les efforts tranchants de l'équation (31) à l'aide des équations (32) et (33).

$$\frac{\partial^2 m_{xx}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{yy}(x,y)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}(x,y)}{\partial x \partial y} + q(x,y) = 0 \quad (34)$$

La résolution du système d'équations d'équilibre d'une plaque fléchie épaisse et orthotrope est traitée dans le chapitre 4.

### 3.3.4. Loi de comportement élastique linéaire

Une fois les champs de déplacements et de déformations définis ainsi que les relations des forces généralisées et les contraintes établies par équilibre statique, il ne reste qu'à introduire la loi de comportement reliant les contraintes avec les déformations. Tel qu'il est décrit dans le chapitre 3.1.1., pour un matériau élastique linéaire en 3 dimensions, cette loi est la Loi de Hooke Généralisée. Pour un matériau isotrope, les constantes élastiques à déterminer sont au nombre de 2, le Module d'Young et le Coefficient de Poisson.

Sous forme matricielle, la Loi de Hooke Généralisée devient :

$$\underline{\sigma} = [C] \cdot \underline{\varepsilon} \quad (35)$$

Ce qui équivaut, en notation ingénieur, à l'expression (36) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y^* \\ \varepsilon_z^* \\ \varepsilon_{xy}^* \\ \varepsilon_{xz}^* \\ \varepsilon_{yz}^* \end{pmatrix} \quad (36)$$

L'hypothèse de contraintes planes  $\sigma_z = 0$  est introduite et, par conséquence, la déformation  $\varepsilon_z^*$  devient :

$$\varepsilon_z^* = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x^* + \varepsilon_y^*) \quad (37)$$

### 3.3.5. Relation entre forces généralisées et déformations généralisées. Matrice de raideur

Finalement, il est intéressant d'obtenir la relation entre les forces généralisées et les déformations. Cette relation est de la forme suivante :

$$\underline{F} = [K] \cdot \underline{U} \quad (38)$$

Le vecteur  $\underline{F}$  représente les forces généralisées sur une section transversale, le vecteur  $\underline{U}$  contient les allongements unitaires en X et Y, les distorsions angulaires et les courbures du feuillet moyen. La matrice  $[K]$  est la matrice de raideur de la plaque. L'obtention des tenseurs de l'équation (38) devient essentielle lors de l'implémentation du modèle de plaque établi dans un logiciel qui travaille avec la méthode des éléments finis.

Il devient pratique par la suite d'écrire la Loi de Hooke Généralisée en inversant l'expression (1) et en notation indicielle :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}] \quad (39)$$

À l'aide de l'équation (36), les expressions des contraintes en fonction des déformations deviennent :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon^*_x + \nu \varepsilon^*_y) \quad (40)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon^*_y + \nu \varepsilon^*_x) \quad (41)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\varepsilon^*_{xy} E}{(1+\nu)} \quad (42)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{\varepsilon^*_{xz} E}{(1+\nu)} \quad (43)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\varepsilon^*_{yz} E}{(1+\nu)} \quad (44)$$

Dans le cas des plaques épaisses de Reissner – Mindlin, en injectant la relation entre contraintes et déformations dans les équations définissant les forces généralisées, les expressions résultantes sont présentées par la suite.

D'abord les efforts de membrane :

$$n_{xx} = \int_{\Gamma} \sigma_{x0}(x, y, z) d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon^*_x + \nu \varepsilon^*_y) d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{x0} + \nu \varepsilon_{y0}) d\Gamma = \frac{E h}{1-\nu^2} (\varepsilon_{x0} + \nu \varepsilon_{y0}) \quad (45)$$

$$n_{yy} = \int_{\Gamma} \sigma_{y0}(x, y, z) d\Gamma = \frac{E h}{1-\nu^2} (\varepsilon_{y0} + \nu \varepsilon_{x0}) \quad (46)$$

$$n_{xy} = \int_{\Gamma} \sigma_{xy0}(x, y, z) d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy0} d\Gamma = \frac{E h}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy0} \quad (47)$$

Les moments fléchissants et la torsion :

$$\begin{aligned} m_{xx} &= \int_{\Gamma} z \sigma_{x flex}(x, y, z) d\Gamma = \int_{\Gamma} z \left( \frac{E}{1-\nu^2} z (\chi_x - \nu \chi_y) \right) d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma} z^2 \left( \frac{E}{1-\nu^2} (\chi_x - \nu \chi_y) \right) d\Gamma = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_x - \nu \chi_y) \end{aligned} \quad (48)$$

$$m_{yy} = \int_{\Gamma} z \sigma_{y flex}(x, y, z) d\Gamma = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_y - \nu \chi_x) \quad (49)$$

$$m_{xy} = \int_{\Gamma} z \sigma_{xy tors}(x, y, z) d\Gamma = \int_{\Gamma} z^2 \frac{E}{2(1+\nu)} \chi_{xy} d\Gamma = \frac{E h^3}{24(1+\nu)} \chi_{xy} \quad (50)$$

Et, finalement, les efforts tranchants :

$$v_{xz} = \int_{\Gamma} \sigma_{xz}(x, y, z) d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\frac{1}{2} \gamma_{xz} E}{1+\nu} d\Gamma = \frac{\kappa E h}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \quad (51)$$

$$v_{yz} = \int_{\Gamma} \sigma_{yz}(x, y, z) d\Gamma = \frac{\kappa E h}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \quad (52)$$

La variable  $\kappa$  a été introduite, de manière artificielle, afin de donner les expressions correctes de la valeur des efforts tranchants. Cette variable est le coefficient de correction de l'aire de cisaillement transverse et son calcul est détaillé sur la section 3.3.6.

La matrice de raideur d'une plaque homogène isotrope de Reissner – Mindlin en élasticité linéarisée en petites perturbations est donc :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{\nu E h^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E h^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E h^3}{24(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa E h}{2(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa E h}{2(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E h}{1-\nu^2} & \frac{\nu E h}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E h}{1-\nu^2} & \frac{E h}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E h}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (53)$$

Il est possible de distinguer trois types de réponse : une réponse associée aux déformations dites « membranaires », qui ne sont en fonction que des déplacements de la plaque dans son plan,  $u_0(x, y)$  et  $v_0(x, y)$ , une seconde associée aux courbures  $\chi_x$ ,  $\chi_y$ , et  $\chi_{xy}$  puis finalement une troisième liée aux distorsions angulaires  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  dues au cisaillement transversal.

Pour la suite, le Module de Cisaillement,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  (54) sera introduit dans les expressions.

Afin de compléter la définition de tous les termes de l'équation (38), les vecteurs de forces généralisées et déplacements sont présentés ci-dessous :

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \\ v_{xz} \\ v_{yz} \\ n_{xx} \\ n_{yy} \\ n_{xy} \end{pmatrix} \quad (55)$$

Il est à souligner que le choix d'utiliser des lettres minuscules pour représenter les efforts indique que ceux-ci sont des efforts par mètre linéaire de largeur de plaque.

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \varepsilon_{xy0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (56)$$

Le schéma de la figure 9 montre le processus mené jusqu'à aboutir à l'obtention du modèle ainsi que les relations entre les termes qui le composent.

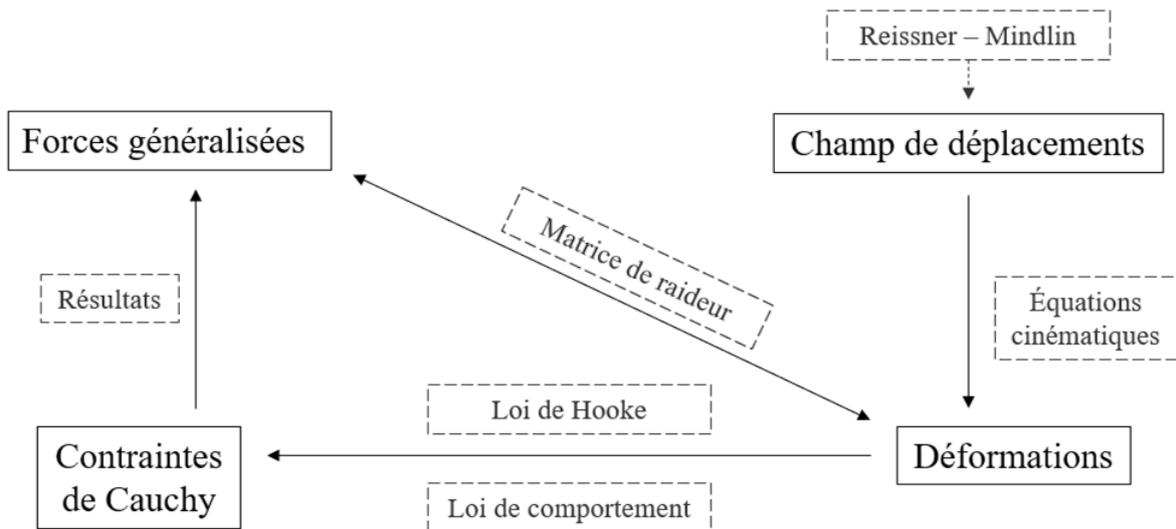


Figure 9 : Schéma reliant les concepts basiques de la mécanique des milieux continus en régime élastique.

De cette manière, le modèle de plaque épaisse de Reissner – Mindlin pour une plaque homogène isotrope est déduit. Dans la section qui suit le modèle de plaque épaisse présenté est adapté pour une plaque orthotrope monocouche équivalente.

### **3.3.6. Modèle de plaque orthotrope monocouche équivalente pour les panneaux CLT**

Les panneaux CLT doivent être modélisés en prenant en compte les effets induits par les efforts tranchants,  $v_{xz}$  et  $v_{xy}$ , puisqu'ils génèrent des contraintes pouvant épuiser la résistance de la section, notamment au travers du mécanisme de rupture par roulement. En plus, comme les panneaux sont orthotropes au niveau de sections transversales, le modèle doit prendre en considération les différences, en termes mécaniques, entre les deux sections transversales d'étude (aires, inerties, moments statiques et modules résistants en flexion). Les plis travaillant sur la direction parallèle au plan de la section transversale d'étude sont négligés en ce qui concerne la reprise de contraintes axiales sur ladite section.

Par le raisonnement précédent, un modèle de plaque orthotrope épaisse de Reissner – Mindlin adapté aux caractéristiques des panneaux CLT peut être élaboré. Une précision additionnelle est à inclure : à cause de la composition du CLT, en plis formées par des lamelles qui ne sont pas collées entre-elles, les expansions transversales dues au comportement de plaque sont nulles. Ces expansions transversales sont contrôlées par les coefficients de Poisson donc  $\nu = 0$ .

Le fait que tous les coefficients de Poisson soient nuls pour un élément de plaque épaisse entraîne des conséquences importantes dans la signification physique des éléments modélisés. Évidemment, cette simplification est faite au niveau de la plaque. Du point de vue du matériau, les coefficients de Poisson ne sont pas nuls.

Le modèle de plaque épaisse obtenu, en remplaçant les coefficients de Poisson par 0, équivaut à représenter le comportement de deux poutres orthogonales de section rectangulaire (par mètre linéaire de largeur dans les deux directions du plan de la plaque) qui répondent de façon solidaire aux sollicitations dans leur plan (cisaillement dans le plan de la plaque et torsion).

La matrice de raideur résultante en tenant compte de  $\nu = 0$  est :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{E h^3}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E h^3}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G h^3}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \kappa h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \kappa h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G h \end{bmatrix} \quad (57)$$

En effet, il est possible de reconnaître les raideurs d'une poutre de section rectangulaire de largeur égale à 1 mètre dans la matrice (57), sauf pour le cas de la raideur de cisaillement de membrane :

- Raideur de flexion d'une poutre de section carrée :

$$K_{flexion} = \frac{E h^3}{12} \quad (58)$$

- Raideur de cisaillement transversal d'une poutre de section carrée :

$$K_{tranchant} = G \kappa h \quad (59)$$

- Raideur axiale d'une poutre de section carrée :

$$K_{axiale} = E h \quad (60)$$

- Raideur de torsion d'une poutre de section carrée de 1 mètre de largeur :

$$K_{torsion} = G I_G = G \frac{h^3}{12} \quad (61)$$

Quant à la raideur de cisaillement de membrane, elle est apportée par tout l'épaisseur multipliée par le Module de Cisaillement.

La dernière étape à effectuer afin de parvenir à l'obtention de la matrice de raideur d'une plaque monocouche orthotrope équivalente pour les panneaux CLT est utiliser les paramètres adéquats quant au matériau et aux sections. Les aires, inerties, facteurs de correction liés au CLT, facteurs de correction de l'aire de cisaillement, Module d'Young et Module de Cisaillement sont intégrés à l'équation (62) :

$$[K] = \begin{bmatrix} E_1 I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 I_{90} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_{tors} G_{12} A^3}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_0 G_{12} A_{0,nette} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_{90} G_{12} A_{90,nette} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 A_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 A_{90} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{FE} G_{12} A \end{bmatrix}$$

(62)

Le Module d'Young et le Module de Cisaillement sont définis tel que dans le chapitre 3.1.1. Les variables portant un indice 0 ou 90 font référence au fait que les sections transversales sur les deux directions principales ne sont pas égales. Les aires et inerties sont calculées conformément aux sections nettes définies au chapitre qui suit. Le choix d'orienter la direction à 0° parallèle à l'axe X est fait. Finalement, les paramètres  $k_{tors}$ , et  $\beta_{FE}$  corrigent la raideur à torsion et de cisaillement de membrane des panneaux CLT, et leur valeur est de 0,65 et 0,75 respectivement [6].

Une remarque est à faire concernant les facteurs de correction de l'aire de cisaillement transverse  $\kappa_0$  et  $\kappa_{90}$ . L'équation (63) donne sa valeur pour une poutre homogène isotrope de section carrée comme celle de la figure 10 [16] :

$$\kappa = \frac{I_Y^2}{A \int_{\Gamma} \left( \frac{S_Y(z)}{b(z)} \right)^2 d\Gamma} \quad (63)$$

Le facteur de correction de l'aire de cisaillement transverse dépend du moment statique de la section, qui est défini par l'équation (64).

$$S_Y = \int_{\Gamma} z d\Gamma \quad (64)$$

En prenant comme limite d'intégration inférieure sur la hauteur de la section une valeur  $z$  :

$$S_Y(z) = b \int_z^{\frac{h}{2}} z dz = \frac{b}{8} (h^2 - 4z^2) \quad (65)$$

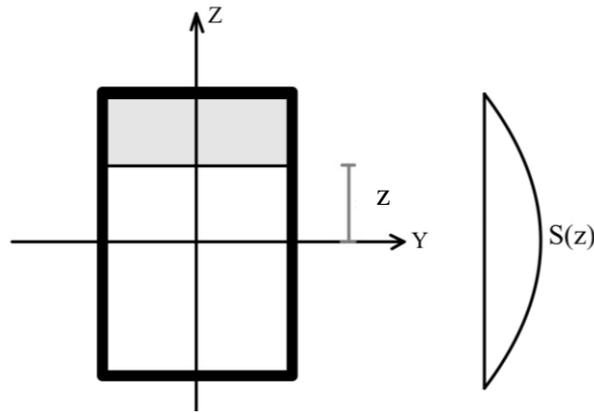


Figure 10 : Distribution du moment statique d'une poutre carrée isotrope.

$$\int_{\Gamma} S_Y^2 d\Gamma = b^3 \left[ \frac{z^5}{20} - \frac{h^2 z^3}{24} + \frac{h^4 z}{64} \right]_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b^3 h^5}{120} \quad (66)$$

$$I_Y^2 = \frac{b^2 h^6}{144} \quad (67)$$

$$\kappa = \frac{\frac{b^2 h^6}{144}}{\frac{bh}{b^2} \frac{b^3 h^5}{120}} = \frac{5}{6} \quad (68)$$

Dans le cas du CLT, les plis travaillant dans la direction contenue dans le plan de la section transversale d'étude n'apportent pas de moment statique, tel qu'il est représenté sur la figure 11 :

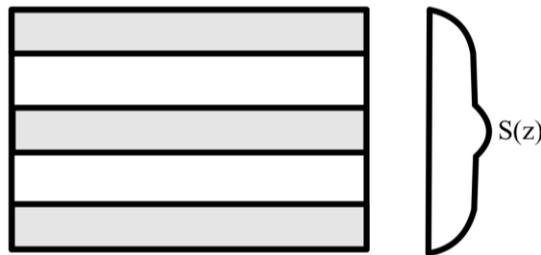


Figure 11 : Distribution du moment statique sur une section en CLT.

La fonction du moment statique de la section est donc définie par morceaux. Afin de calculer la valeur du facteur de correction de l'aire de cisaillement transversale, il faut distinguer les intervalles des deux types de plis. En outre, lesdits types de plis n'ont pas le même Module de Cisaillement puisque le Module de Cisaillement roulant entre toujours en jeu et différents

matériaux peuvent être utilisés. L'équation (69) donne l'expression du facteur de correction de l'aire de cisaillement transverse d'une section en CLT [2] :

$$\kappa = \frac{(\sum_1^m E_j I_j)^2}{\int_a^b \frac{(E(z)S(z))^2}{G(z)} dz \sum_1^n G_i h_i} \quad (69)$$

Sur l'équation (69) l'indice  $n$  est égal au nombre total de plis et l'indice  $m$  est égal au nombre de plis travaillant dans la direction orthogonale au plan de la section d'étude. Les paramètres  $a$  et  $b$  désignent les limites d'intégration sur l'épaisseur de la section.

### 3.4. Calcul de contraintes et ratios d'utilisation d'un panneau CLT en ELU

Le calcul de vérification des panneaux CLT, à l'État Limite Ultime, est mené au travers de ratios indiquant le taux d'utilisation de leur capacité résistante.

La méthode pour la définir les ratios d'utilisation prend en considération cinq hypothèses principales [17].

- Les contraintes de cisaillement et les contraintes axiales n'interagissent pas entre-elles puisqu'elles sont reprises au travers de mécanismes différents.
- Les efforts de flexion, les efforts de cisaillement transverse et les efforts axiaux sont résistés selon les deux directions principales de portance des panneaux CLT.
- Les contraintes axiales sont reprises par les plis aux fibres orthogonales au plan de chaque section transversale.
- Les contraintes de cisaillement transverse augmentent paraboliquement sur les plis longitudinaux dans chaque direction et restent constantes sur les plis orientés selon l'autre direction.
- Les contraintes de cisaillement dans le plan sont reprises par une partie de l'épaisseur de deux plis consécutifs s'ils possèdent des directions de portance orthogonales.

Dans ce chapitre, le sous-indice  $i$  fait référence à la section transversale des panneaux ( $0^\circ$  ou  $90^\circ$ ) et le sous-indice  $d$  au fait qu'il s'agit d'un effort ou résistance de calcul. Par exemple,  $m_{i,d}$  est un moment fléchissant de calcul agissant sur l'une des deux sections transversales du panneau CLT. Les résistances de calcul ( $f_{m,d}$ ,  $f_{t,i,d}$ ,  $f_{c,i,d}$ , etc.) sont celles qui ont été présentées

sur le chapitre 3.1.2. L'inertie, l'aire et le moment statique nets d'une section transversale d'un panneau CLT sont définis comme :

$$A_{i,nette} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{E_c} \cdot h_j \quad (70)$$

$$I_{i,nette} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{E_c} \cdot \frac{h_j^3}{12} + \sum_{i=1}^n \frac{E_j}{E_c} \cdot h_j \cdot a_j^2 \quad (71)$$

$$S_{i,R,net} = \sum_{j=1}^{mL} \frac{E_j}{E_c} \cdot h_j \cdot a_j \quad (72)$$

Dans les expressions (70), (71) et (72) le sous-indice  $n$  représente le nombre de plis travaillant sur une section transversale  $i$ ,  $E_c$  est le Module d'Young de référence,  $E_j$  le Module d'Young du pli  $j$ ,  $h_j$  l'épaisseur du pli  $j$ ,  $a$  la distance du centre de gravité du pli  $j$  au centre de gravité de la section transversale et  $mL$  l'indice du pli non-travaillant plus proche du centre de gravité de la section. La numérotation des plis doit être faite du haut vers le bas.

### 3.4.1. Contraintes axiales

#### 3.4.1.1. Contraintes de flexion

Seuls les plis travaillant dans la direction orthogonale au plan de section analysée peuvent supporter un moment fléchissant donné.

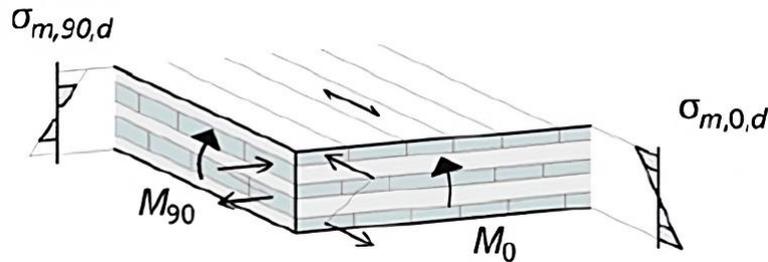


Figure 12 : Schéma pour le calcul des contraintes de flexion. Figure tirée de [2].

$$\frac{m_{i,d}}{W_{i,net}} \leq f_{m,d} \quad (73)$$

Où le moment résistant  $W_{i,net} = \frac{I_{i,nette}}{\max\{z_1; z_2\}}$  (74) étant  $z_1$  et  $z_2$  la position des fibres supérieure et inférieure des plis dont la résistance est mobilisée.

### 3.4.1.2. Contraintes dues aux efforts axiaux

#### Traction

De manière analogue à la flexion, les efforts axiaux sont résistés par les plis ayant une direction des fibres parallèle.

$$\frac{n_{i,d}}{A_{i,nette}} \leq f_{t,i,d} \quad (75)$$

#### Compression

La résistance à compression se vérifie selon le ratio (76) :

$$\frac{n_{i,d}}{A_{i,nette}} \leq f_{c,i,d} \quad (76)$$

### 3.4.2. Contraintes de cisaillement

#### 3.4.2.1. Cisaillement transverse

Seuls les plis travaillant sur l'axe orthogonal au plan de section font croître les contraintes de cisaillement transverse parce qu'ils sont les seuls qui incrémentent le moment statique sur la section.

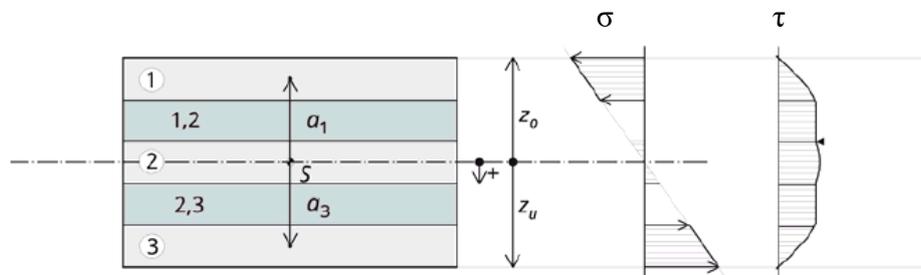


Figure 13 : Distribution de contraintes de flexion et de cisaillement transversal. Figure tirée de [2].

L'équation (77) définit le ratio de résistance pour le cas des contraintes de cisaillement transverse :

$$\frac{v_{i,d} S_{I,R,net}}{I_{i,nette}} \leq f_{V,R,d} \quad (77)$$

Il est à souligner que la rupture par roulement est dimensionnante dans tous les cas sauf lorsque la section la plus faible d’un panneau CLT à 3 plis est analysée car, par hypothèse, seul le pli central supporte des contraintes de cisaillement. L’équation (77) est l’application de la formule de Jourawski [18] au cas des panneaux CLT.

### 3.4.2.2. Cisaillement dans le plan du feuillet moyen de la plaque

Trois mécanismes de rupture par cisaillement dans le plan sont définis par G. Silly [6]. Ils sont tous les trois basés sur une approche introduisant une homogénéisation des propriétés mécaniques des sections transversales à l’aide d’un volume représentatif équivalent « *Representative Volume Element* ». Il est à souligner que les ratios présentés sur ce chapitre ont été modifiés vis-à-vis de ceux proposés par [2] puisque, dans cette référence bibliographique, la prise en compte de moment de torsion  $m_{xy}$  n’est pas suffisamment détaillée. Le moment de torsion  $m_{xy}$  est donc introduit dans la formulation de manière alternative et conservatrice.

*Mécanisme 1 : rupture par cisaillement de torsion des joints entre les planches*

Le premier des mécanismes fait référence à la rupture par cisaillement des plis le long d’un joint.

$$2 \frac{n_{xy}}{\sum t_i^*} + \frac{3}{2} \frac{m_{xy}}{z t_{tor}^*} \leq f_{V,CLT,d} \quad (78)$$

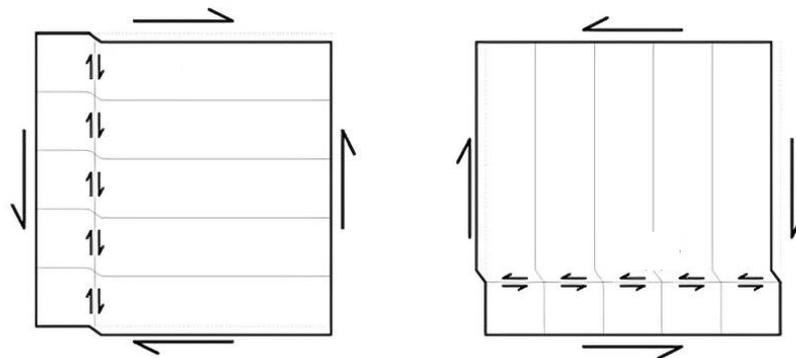


Figure 14 : Rupture par cisaillement des plis le long d’un joint. Figure tirée de [2].

Pour le calcul, le moment  $m_{xy}$  est décomposé en deux forces dans le plan de la section en le divisant par son bras de levier  $z$ , qui est égal à la distance maximale entre deux interfaces entre

plis. Seule une des forces augmente la contrainte de cisaillement dans le plan puisque l'autre va dans le sens contraire à  $n_{xy}$  et soulage ainsi la section.

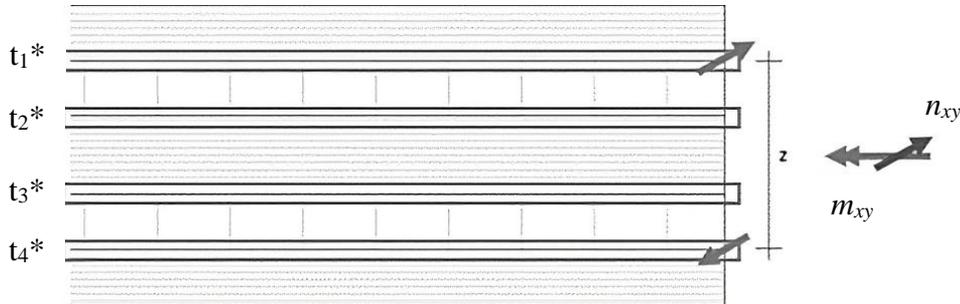


Figure 15 : Épaisseurs de calcul pour la rupture par cisaillement des couches le long d'un joint.

Les épaisseurs  $t_i^*$  sont prises comme l'épaisseur la plus faible entre deux plis ayant des directions de résistance orthogonales. Leur somme est divisée par 2 afin de ne prendre en compte que les plis travaillant dans la direction orthogonale au plan de section. Le paramètre  $t_{tor}^*$  est le maximum des valeurs  $t_i^*$ .

*Mécanisme 2 : rupture par cisaillement au croisement des planches entre plis*

Le ratio du mécanisme 2 est défini à l'équation (79). La valeur de  $a$  est habituellement fournie par les fabricants. Le moment de torsion  $m_{xy}$  est également introduit en considérant deux tiers du couple qui le provoque.

$$3 \frac{n_{xy} t_{max}^*}{\sum t_i^* a} + 3 \frac{m_{xy}}{z} \leq f_{T,CLT,d} \quad (79)$$

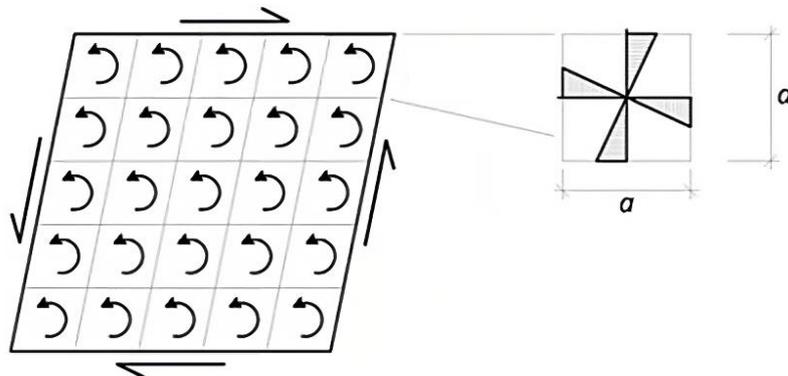


Figure 16 : Schéma de la rupture par cisaillement des interfaces aux points d'intersection.

Figure tirée de [2].

*Mécanisme 3 : rupture par cisaillement du panneau entier*

La rupture globale du panneau due à un cisaillement dans le plan se vérifie selon la relation (80) :

$$\frac{n_{xy}}{h} + \frac{6 m_{xy}}{h^2} \leq f_{Vgross,CLT,d} \quad (80)$$

### 3.4.3. Interaction d'efforts axiaux et de flexion

Les ratios présentés sur les équations (81), interaction de flexion et traction, et (82), interaction de flexion et compression, sont issus de l'Eurocode 5.

$$\frac{\frac{n_d}{A_{i,nette}}}{f_{t,i,d}} + \frac{\frac{m_{i,d}}{W_{i,net}}}{f_{m,i,d}} \leq 1 \quad (81)$$

$$\left( \frac{\frac{n_d}{A_{i,nette}}}{f_{c,i,d}} \right)^2 + \frac{\frac{m_{i,d}}{W_{i,net}}}{f_{m,i,d}} \leq 1 \quad (82)$$

#### 3.4.3.1. Instabilités de flambement

Dans le cas des murs, prendre en compte les instabilités de flambement est essentiel. Le flambement est introduit comme une pénalisation de la résistance à compression pure d'une section à travers le coefficient  $k_c$ , qui dépend des imperfections et de l'élançement de la pièce.

$$\frac{\frac{n_d}{A_{i,nette}}}{k_c f_{c,i,d}} + \frac{\frac{m_{i,d}}{W_{i,net}}}{f_{m,d}} \leq 1 \quad (83)$$

Le coefficient  $k_c$  dépend du rayon de giration  $i_i$ , l'élançement  $\lambda_i$ , le coefficient auxiliaire  $k_i$ , l'élançement vis-à-vis du flambement latéral  $\lambda_{rel,i}$  et le coefficient d'imperfection  $\beta_c$ . L'indice  $i$  varie selon la position du repère et la section transversale.

$$i_i = \sqrt{\frac{I_{i,nette}}{A_{i,nette}}} \quad (84)$$

$$\lambda_i = \frac{l_k}{i_i} \quad (85)$$

$$k_i = 0.5 \left[ (1 + \beta_c (\lambda_{rel,i} - 0.3) + \lambda_{rel,i}^2) \right] \quad (86)$$

$$\lambda_{rel,i} = \frac{\lambda_i}{\pi} \sqrt{\frac{f_{c,i,k}}{E_{0,05}}} \quad (87)$$

$$k_c = \frac{1}{k_i + \sqrt{k_i^2 - \lambda_{rel,i}^2}} \quad (88)$$

$$\beta_c = 0,1 \quad (89)$$

#### 3.4.4. Analyse du système de ratios défini

Suite à la présentation des ratios demande / capacité définis pour les panneaux CLT il est judicieux d'analyser leur aptitude en termes mécaniques. Il faut signaler, tout d'abord, que définir un « ratio demande / capacité » pour chaque type de sollicitation n'a pas de sens à priori. En effet, une contrainte, au sens du tenseur de contraintes de Cauchy, est conséquence de l'état mécanique global de l'élément, et si on se place sur un point de celui-ci, son calcul est associé à l'interaction de tous les efforts agissant en ce point. Malheureusement, la complexité des panneaux CLT ne permet pas de calculer les contraintes comme on le fait pour les éléments en acier, où le calcul est cohérent avec l'idée de tenseur de contraintes de Cauchy. Dans le cas des panneaux CLT, une nécessité de définir des sections nettes à l'ELU apparaît, de la même manière que pour les dalles en béton armé, et donc des hypothèses simplificatrices du côté de la sécurité sont également à introduire. Admettant la définition de section nette en ELU proposée par [2], la manière dont les efforts interagissent entre eux devient le sujet le plus difficile à gérer. Une des hypothèses permettant l'utilisation des ratios établis est l'indépendance des mécanismes résistants des contraintes axiales et des contraintes de cisaillement, ce qui reste une approche excessivement simplifiée, notamment en ce qui concerne la non-interaction des contraintes axiales et les contraintes provoquées par le cisaillement dans le plan du feuillet moyen de la plaque. Une recherche plus approfondie vis-à-vis des mécanismes de rupture par cisaillement dans le plan du feuillet moyen des panneaux est essentielle afin d'améliorer la méthode de dimensionnement de ces éléments. La définition des épaisseurs  $t_i^*$  reste arbitraire et les moments de torsion ont dû être inclus par initiative propre et de manière trop conservatrice. En définitive, la méthode de dimensionnement prise en compte présente certains aspects qui ne sont pas suffisamment cohérents et à améliorer en effectuant des recherches plus approfondies, mais reste une méthode sécuritaire permettant de proportionner une solution au problème auquel l'ingénieur doit faire face.

## 4. Validation du logiciel de dimensionnement de panneaux CLT

Le chapitre 4 vise à démontrer que le logiciel créé fournit des résultats corrects et cohérents avec les résultats de Sofistik 2023. Deux cas « test » simples sont étudiés à cet effet. Les éléments finis utilisés sont quadrangulaires (type T4) par recommandation du manuel de l'utilisateur *ASE General Static Analysis of FE Structures* [19].

Les degrés de liberté de chaque nœud sont 5 : trois déplacements ( $u$  en X,  $v$  en Y et  $w$  en Z) et deux rotations ( $\theta_x$  autour de l'axe X et  $\theta_y$  autour de l'axe Y). Les degrés de liberté  $u$  et  $v$  peuvent être associés à un comportement de membrane ainsi que  $w$ ,  $\theta_x$  et  $\theta_y$  à un comportement de plaque fléchie. Une interpolation du champ de déplacements aux nœuds utilisant des fonctions de forme quadratiques non conformes est employée pour le comportement de membrane par Sofistik [19]. Les fonctions de forme quadratiques non conformes sont celles proposées par T.J.R. Hughes et T.E. Tezduyar [20].

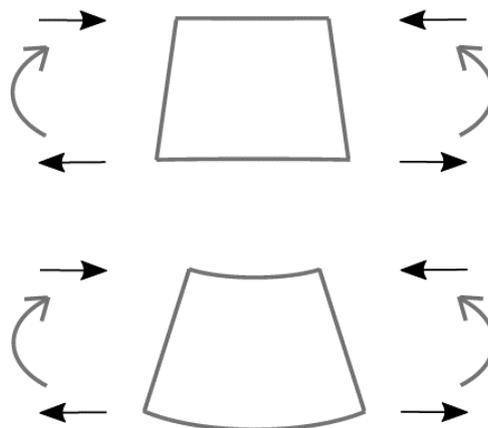


Figure 17 : Comparaison de la déformée d'un élément fini de type T4 à interpolation bilinéaire du champ de déplacements et un autre à interpolation utilisant des fonctions de forme quadratiques non conformes. Figure tirée de [19].

Quant au comportement de plaque fléchie,  $w$  est interpolée biquadratiquement (90), tandis que les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont interpolées bilinéairement (91), tel que proposé par A. Tessler et T.J.R. Hughes [21] :

$$N_i = \frac{1}{4}[(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) - (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) - (1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)]\xi_i^2\eta_i^2 + \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi_i^2)\eta_i^2 + \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta_i^2)\xi_i^2 \quad (90)$$

$$P_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (91)$$

Les variables  $\xi$  et  $\eta$  représentent les axes cartésiens du repère local d'un élément fini T4.  $N_i$  et  $P_i$  sont les fonctions de forme résultantes.

#### 4.1. Cas d'application simple 1

Afin de vérifier les résultats fournis par le logiciel développé, une plaque de 9 x 3 mètres simplement appuyée sur son périmètre, à rotation d'axe orthogonal au bord bloquée, de section 240 L7s et en CLT de type C24 est analysée. Les plis ayant les fibres du bois selon la direction à 0° ont 45 millimètres d'épaisseur, tandis que les autres ont 20 millimètres. La direction à 0° est parallèle aux côtés courts du panneau. Une charge distribuée uniformément de 40 kN/m<sup>2</sup> est appliquée sur toute sa surface.

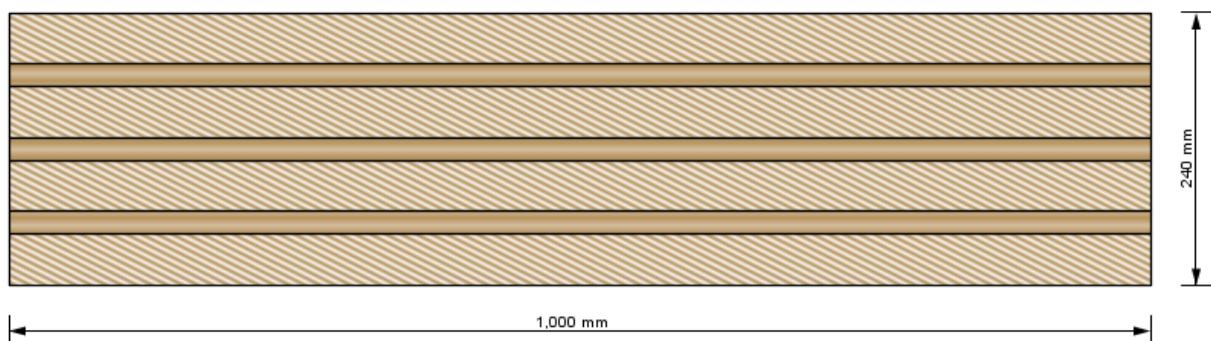


Figure 18 : Section du panneau 240 L7s. Figure tirée du logiciel CLT Designer.

Le Module d'Young moyen sur la direction des fibres  $E_l$  est de 12000 MPa, le Module de Cisaillement moyen du plan orthogonal à la direction des fibres  $G_{12}$  est de 690 MPa et le Module de Cisaillement moyen de roulement  $G_{23}$  est de 50 MPa. La valeur des résistances du matériau employé se trouve dans le tableau 2.

Résistance	k	d	
$f_m$	24	15,36	MPa
$f_{t,0}$	16,5	10,56	MPa
$f_{c,0}$	24	15,36	MPa
$f_v$	2,7	1,73	MPa
$f_{v,R}$	1,2	0,77	MPa
$f_{v,CLT}$	5,2	3,33	MPa
$f_{T,CLT}$	2,5	1,60	MPa
$f_{v,gross}$	2,5	1,60	MPa

Tableau 2 : Résistances caractéristiques et de calcul d'un panneau CLT en bois C24 issues de l'ETA du fabricant KLH.

La matrice de raideur du panneau CLT en tant que plaque monocouche orthotrope équivalente résulte de l'application de la matrice (62) :

$$[K] = \begin{bmatrix} 11,772 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,052 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,517 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28,62 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8,42 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2160 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 720 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 124,2 \end{bmatrix} \quad (92)$$

Les unités des termes [1,1], [2,2] et [3,3] sont en MN·m. Le reste sont en MN/m. Les valeurs obtenues sont similaires à celles fournies par le logiciel CLT Designer.

L'hypothèse de flexion cylindrique sera considérée pour calculer les efforts sur la direction la plus courte ((109) et (110)), qui est souvent la plus raide. La flexion cylindrique des plaques est étudiée, entre autres, par S. Timoshenko et S. Woinowsky – Krieger. Les auteurs analysent le comportement en flexion d'une plaque homogène, isotrope, rectangulaire et *longue* simplement appuyée sur ses quatre bords et sollicitée par une charge distribuée uniformément sur sa surface. Ils arrivent à la conclusion que la déflexion de la plaque à une distance suffisamment grande des bords peut être supposée comme cylindrique avec l'axe du cylindre parallèle à la dimension longue de la plaque. Il devient donc possible de n'étudier qu'une bande élémentaire de la plaque entre deux plans orthogonaux à sa direction longue, ramenant le problème à un problème similaire à celui d'une poutre fléchie [22].

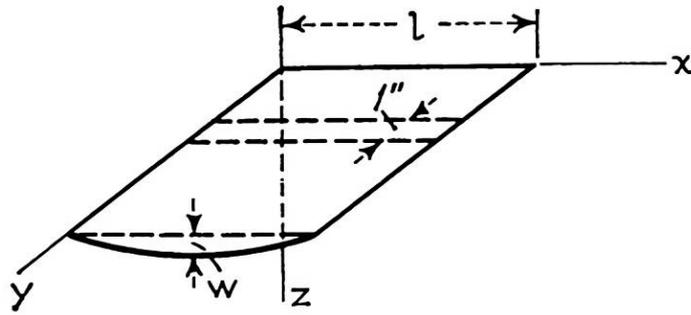


Figure 19 : Plaque soumise à un état de flexion cylindrique. Figure tirée de [22].

L'hypothèse de flexion cylindrique n'est pas toujours applicable. Lorsque la raideur sur une direction n'est pas significativement plus grande que sur les autres, il est nécessaire d'employer la théorie des plaques, qui dans le cas présent est celle de Reissner – Mindlin, afin d'obtenir la solution analytique au problème.

Reprenant les équations d'équilibre de la plaque de Reissner – Mindlin (31), (32) et (33), le système d'équations différentielles aux dérivées partielles résultant peut être écrit en termes de déplacements et rotations :

$$G\kappa h \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} + G\kappa h \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} + q(x, y) = G\kappa h \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + q(x, y) = 0 \quad (93)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \right) D + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \right) D(1 - \nu) = G\kappa h \left( \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (94)$$

$$\left( \nu \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} \right) D + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right) D(1 - \nu) = G\kappa h \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x \right) \quad (95)$$

Où D est la raideur à flexion d'une plaque isotrope homogène tel qu'elle est définie sur la matrice (53).

Selon S. Monleón [18], la solution du système d'équations n'est calculable que pour certaines géométries et sollicitations particulières. La solution en série de Navier pour le calcul de  $w_0$  au centre de la plaque est applicable si la rotation d'axe orthogonal au bord est bloquée. Les déplacements verticaux et horizontaux sont également bloqués aux bords de la plaque. Le champ de déplacements et la charge distribuée uniformément doivent être de la forme :

$$w_0 = w_{mn} \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \quad (96)$$

$$\theta_y = \theta_{y,mn} \cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \quad (97)$$

$$\theta_x = \theta_{x,mn} \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \quad (98)$$

$$q(x, y) = \frac{16q}{\pi^2 mn} \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \quad (99)$$

Dans le cas particulier des plaques orthotropes, les équations d'équilibre de la plaque de Reissner – Mindlin sont :

$$G_x \kappa_0 h_0 \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + G_y \kappa_{90} h_{90} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + q(x, y) = 0 \quad (100)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \right) D_x + \left( \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \right) D_{xy} = G_x \kappa_0 h_0 \left( \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (101)$$

$$\left( \nu \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} \right) D_y + \left( \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right) D_{xy} = G_y \kappa_{90} h_{90} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x \right) \quad (102)$$

Où les indices  $x$  et  $y$  indiquent l'axe sur lequel porte chacune des raideurs.  $D_{xy}$  est la raideur à torsion. Les équations (100), (101) et (102) pour le cas des panneaux CLT, qui sont orthotropes et à Coefficient de Poisson nul, deviennent donc les suivantes :

$$G_x \kappa_0 h_0 \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + G_y \kappa_{90} h_{90} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + q(x, y) = 0 \quad (103)$$

$$D_x \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + D_{xy} \left( \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \right) = G_x \kappa_0 h_0 \left( \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (104)$$

$$-D_y \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + D_{xy} \left( \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right) = G_y \kappa_{90} h_{90} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x \right) \quad (105)$$

En injectant le champ de déplacements défini en (96), (97) et (98) ainsi que la charge définie en (99) dans les équations (103), (104) et (105), un système linéaire d'équations est obtenu pour chaque paire  $m, n$  :

$$G_x \kappa_0 h_0 \left( -\frac{\pi \theta_{y,mn} m \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}{a} - \frac{\pi^2 w_0 m^2 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}{a^2} \right) +$$

$$G_y \kappa_{90} h_{90} \left( \frac{\pi \theta_{x,mn} n \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}{b} - \frac{\pi^2 w_0 n^2 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}{b^2} \right) + \frac{16 q}{\pi^2 m n} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) = 0 \quad (106)$$

$$-\frac{\pi^2 D_x \theta_{y,mn} m^2 \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right)}{a^2} + D_{xy} \left( -\frac{\pi^2 \theta_{y,mn} n^2 \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right)}{b^2} + \right.$$

$$\left. \frac{\pi^2 \theta_{x,mn} m n \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right)}{a b} \right) = G_x \kappa_0 h_0 \left( \theta_{y,mn} \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) + \frac{\pi w_0 m \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right)}{a} \right) \quad (107)$$

$$D_{xy} \left( \frac{-\pi^2 \theta_{y,mn} m n \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}{a b} + \frac{\pi^2 \theta_{x,mn} m^2 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}{a^2} \right) +$$

$$\frac{\pi^2 D_y \theta_{x,mn} n^2 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}{b^2} = G_y \kappa_{90} h_{90} \left( -\theta_{x,mn} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) + \frac{\pi w_0 n \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}{b} \right)$$

(108)

La solution du système doit être obtenue pour tous les paires  $m, n$  afin qu'il soit possible d'obtenir la déflexion  $w_0$  et les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . La déflexion au centre de la plaque est donc :

$$w_0 = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \quad (109)$$

Un code en langage Python dont les résultats sont analysés dans la section 4.1.3. a été élaboré à ce titre.

#### 4.1.1. Résultats analytiques

Le poids volumique du CLT est  $4,2 \text{ kN/m}^3$ . Si l'on respecte l'hypothèse de flexion cylindrique, les efforts sur une bande d'1 mètre de largeur au centre de la plaque selon l'axe X sont :

$$m_{xx} \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{q L^2}{8} = \frac{41,008 \cdot 3^2}{8} = 46,13 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} \quad (110)$$

$$-v_{xz}(0) = v_{xz}(L) = \frac{q \cdot b}{2} = \frac{41,008 \cdot 3}{2} = 61,51 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad (111)$$

Pour le calcul de la déflexion, en utilisant le modèle de Reissner – Mindlin, tout en négligeant la variation des déformations sur l'axe Y, le modèle de Poutre de Timoshenko est obtenu et peut être utilisé comme approximation. À l'aide des conditions limites d'une poutre simplement appuyée  $w_0(0) = 0$  (112) et  $\theta_y \left(\frac{L}{2}\right) = 0$  (113) la flèche à mi-portée devient :

$$w_0 = \frac{qL^2}{8 G_{12} A_{0,nette} \kappa_0} + \frac{5qL^4}{384 E_1 I_{0,nette}} \quad (114)$$

Le résultat pour la déflexion au centre de la plaque en faisant l'application numérique est de 5,29 millimètres.

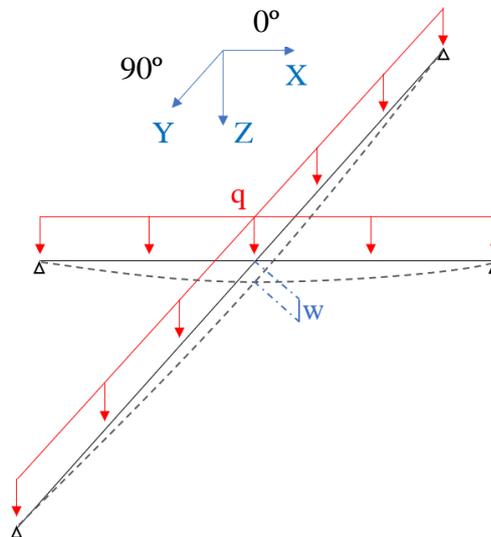


Figure 20 : Schéma statique de la plaque du cas d'application 1. Approximation utilisant le modèle de Poutre de Timoshenko.

La solution exacte pour la déflexion au centre de la plaque est calculée à l'aide de la solution en série de Navier en faisant varier  $n$  et  $m$  jusqu'à la valeur de 50. La valeur de  $w_0$  résulte de 5,32 millimètres.

#### 4.1.2. Résultats obtenus par la Méthode des Éléments Finis

Les résultats obtenus à l'aide du logiciel Sofistik 2023 sont présentés sur les figures 21 à 25.

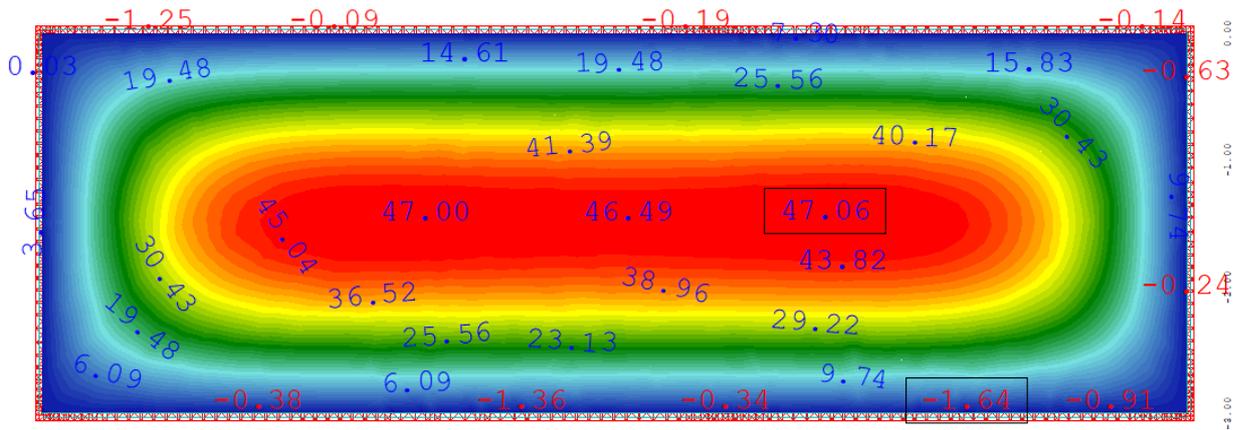


Figure 21 : Distribution de l’effort de flexion  $m_{xx}$  pour le cas d’application simple 1.

Résultat obtenu à l’aide de Sofistik 2023.

Le moment fléchissant maximal  $m_{xx}$  est de 46,49 kNm/m sur la partie en flexion cylindrique. La valeur analytique étant de 46,13 kNm/m, il est légitime de considérer les résultats corrects.

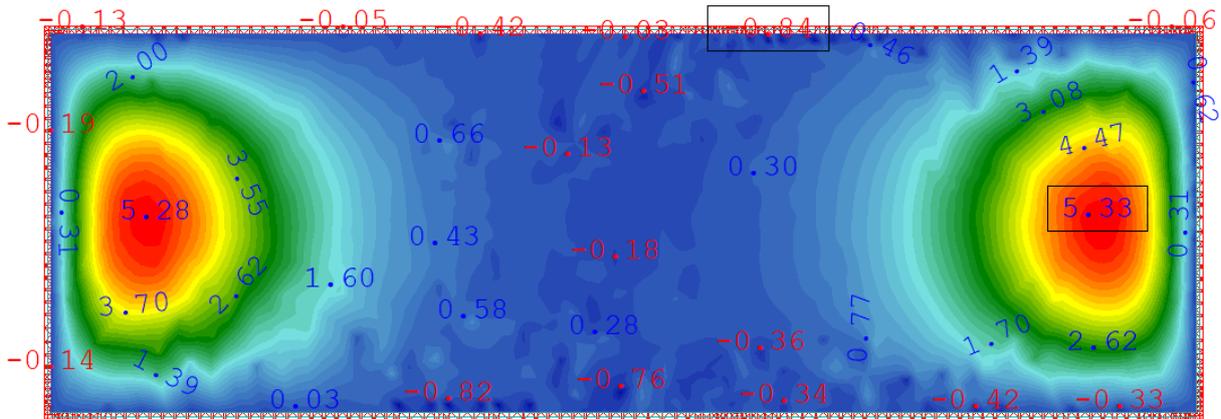


Figure 22 : Distribution de l’effort de flexion  $m_{yy}$  pour le cas d’application simple 1.

Résultat obtenu à l’aide de Sofistik 2023.

Les valeurs de l’effort fléchissant  $m_{yy}$  sont faibles comparées avec celles de  $m_{xx}$ . La distribution de ces valeurs est logique.

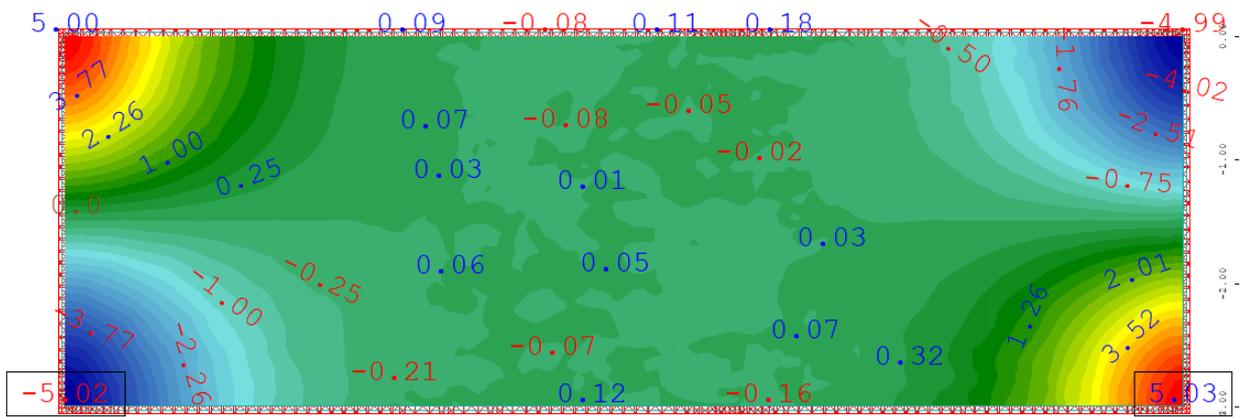


Figure 23 : Distribution de l'effort de torsion  $m_{xy}$  pour le cas d'application simple 1. Résultat obtenu à l'aide de Sofistik 2023.

Des torsions apparaissent aux coins de la plaque à cause de ses conditions d'appui (rotation d'axe orthogonal au bord bloquée). Les valeurs des torsions sont faibles et loin des efforts dimensionnants.

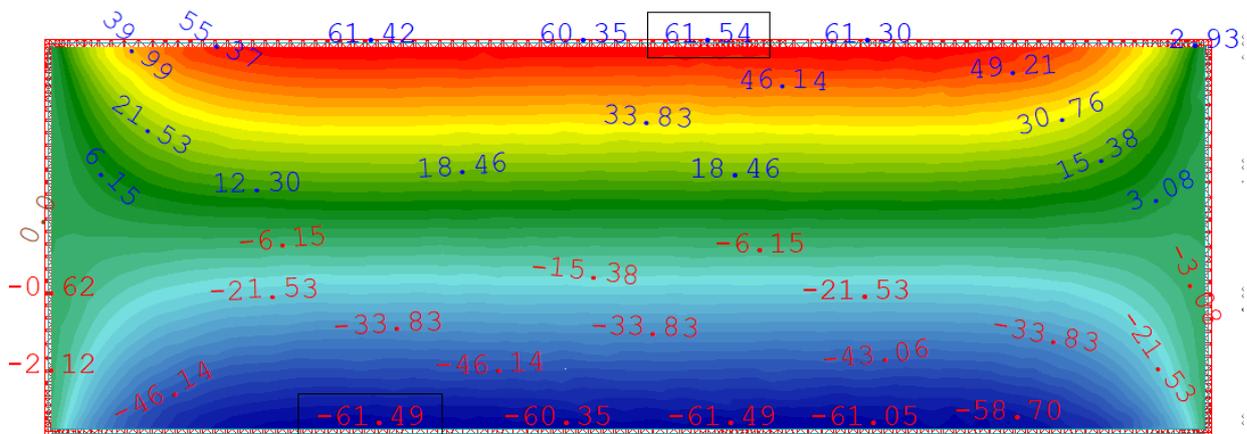


Figure 24 : Distribution de l'effort de cisaillement transversal  $v_{xz}$  pour le cas d'application simple 1. Résultat obtenu à l'aide de Sofistik 2023.

La valeur et la distribution de l'effort tranchant  $v_{xz}$  sur la partie de la plaque en flexion cylindrique sont comme celles d'une poutre simplement appuyée. La valeur maximale est très proche de celle calculée.

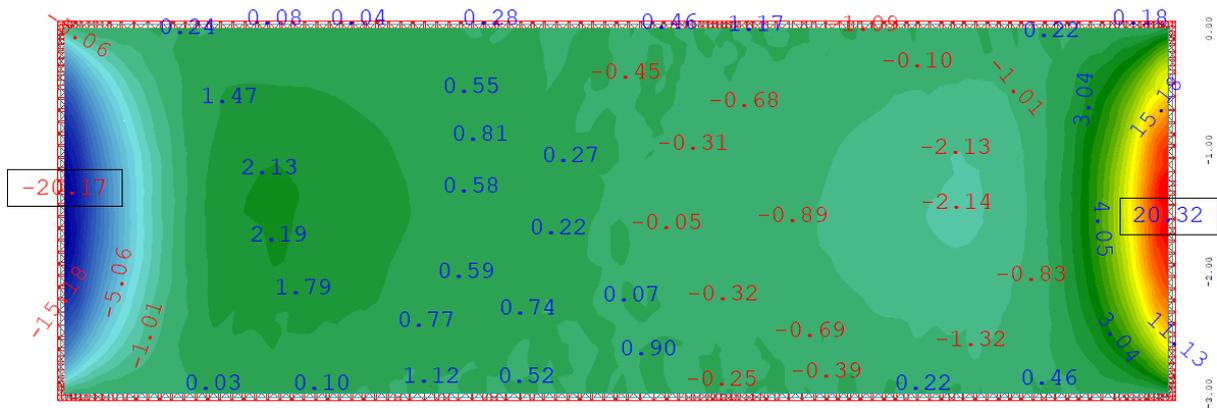


Figure 25 : Distribution de l'effort de cisaillement transversal  $v_{yz}$  pour le cas d'application simple 1. Résultat obtenu à l'aide de Sofistik 2023.

La valeur maximale de l'effort tranchant  $v_{yz}$  est significativement plus faible que celle de  $v_{xz}$ , néanmoins, elle peut jouer un rôle important à cause du phénomène de rupture par roulement.

Finalement, la déflexion au centre de la plaque résulte de 5,65 millimètres. Les résultats obtenus analytiquement et à travers la méthode des éléments finis peuvent être considérés comme valides.

Il est à souligner que, lorsque la relation entre les côtés de la plaque ne permet pas de poser l'hypothèse de flexion cylindrique, le modèle de poutre de Timoshenko n'est plus valable comme approximation pour le calcul des efforts car les raideurs dans les deux directions d'orthotropie sont du même ordre de grandeur. Il reste à vérifier les résultats des ratios issus du logiciel de dimensionnement élaboré. Dans le présent cas d'étude, avec les efforts obtenus et les résistances choisies, les résultats s'affichent dans le tableau 3 :

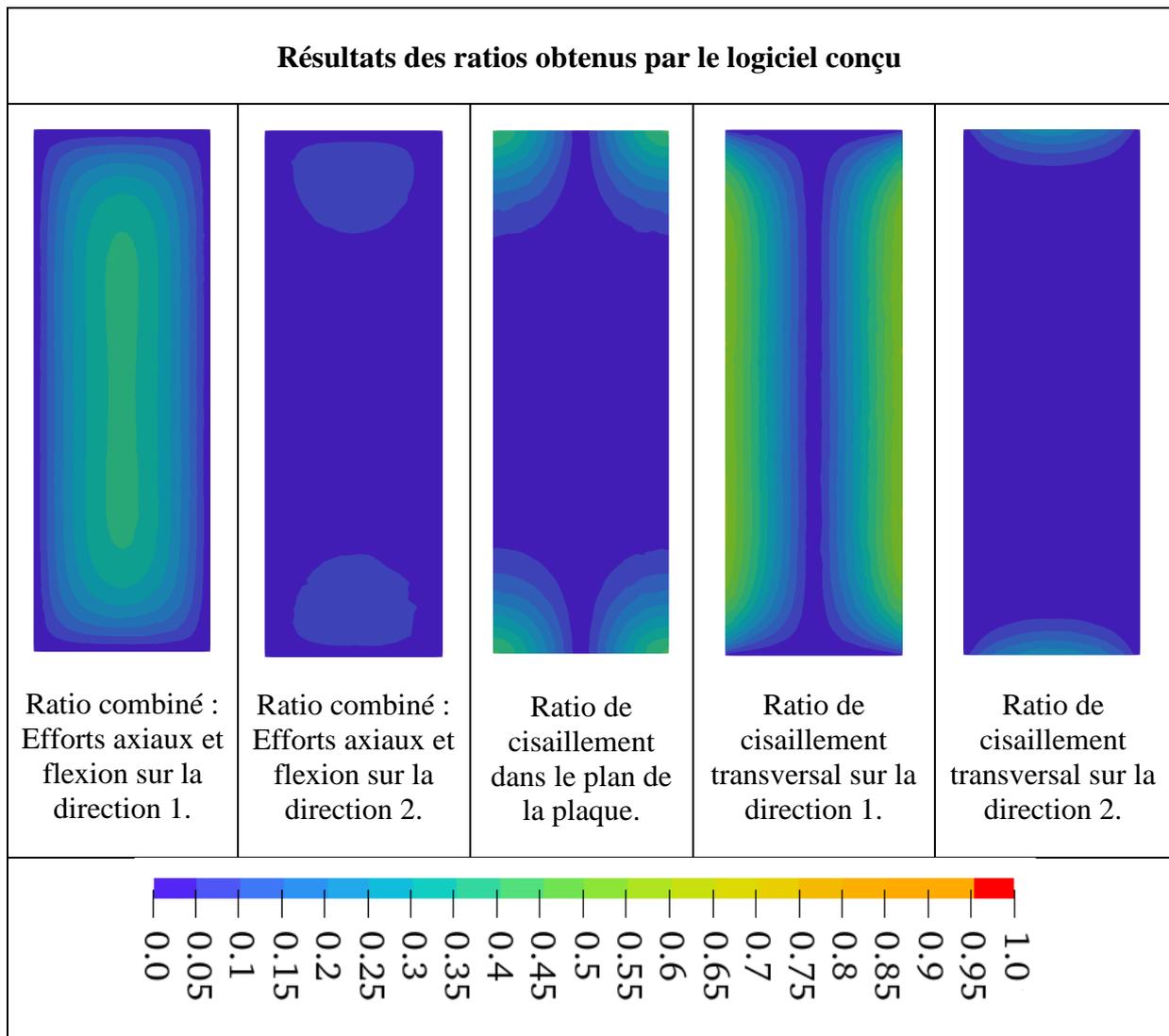


Tableau 3 : Dalle. Ratios obtenus par le logiciel développé.

Un calcul à la main des ratios définis dans la section 3.4. sur la direction 0° est fait afin de vérifier les valeurs du tableau 3 :

- Efforts axiaux et flexion sur la direction 0° :  $\frac{47,69 \cdot 0,12}{\frac{0,000981}{15360}} = 0,38$
- Cisaillement transversal sur la direction 0° :  $\frac{61,54 \cdot 5,85 \cdot 10^{-6}}{\frac{0,000981}{0,77}} = 0,48$

Le logiciel développé fournit des résultats corrects lorsqu'il s'agit du dimensionnement de panneaux CLT fléchis.

### 4.1.3. Comparaison de la valeur des déflexions analytique et en utilisant la MEF

Diverses plaques rectangulaires à rapports de longueurs des côtés différents et mêmes conditions limites et de charge ont été analysées afin de comparer la valeur des déflexions au centre. Les figures 26 (cas A) et 27 (cas B) montrent les résultats obtenus et les confrontent à ceux issus d'un calcul utilisant la méthode des éléments finis. Dans le premier des graphiques, la longueur sur la direction la plus souple du panneau est fixe, et inversement, dans le graphique 27 c'est la longueur de la direction la plus raide qui est fixe :

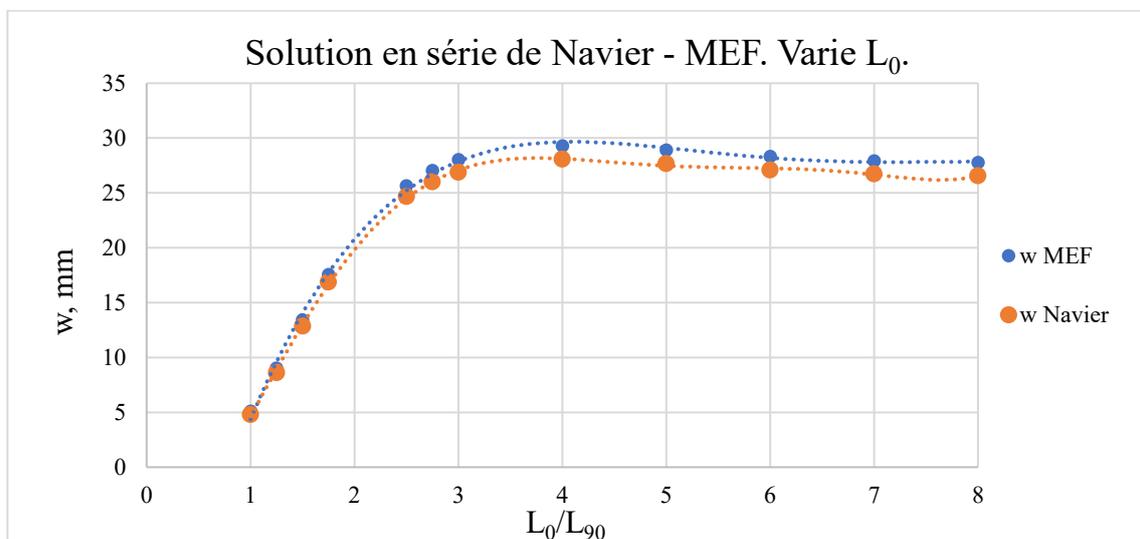


Figure 26 : Déflexion au centre d'une série de dalles rectangulaires simplement appuyées sur tous les bords. La direction la plus raide des panneaux porte selon  $L_0$ .

Dans la figure 26 il est possible d'apprécier la perte de raideur de la plaque lorsque la longueur du côté le plus raide augmente. Les deux courbes, analytique et MEF, possèdent la même allure, ce qui confirme la véracité des calculs même si un écart à prendre en compte apparaît.

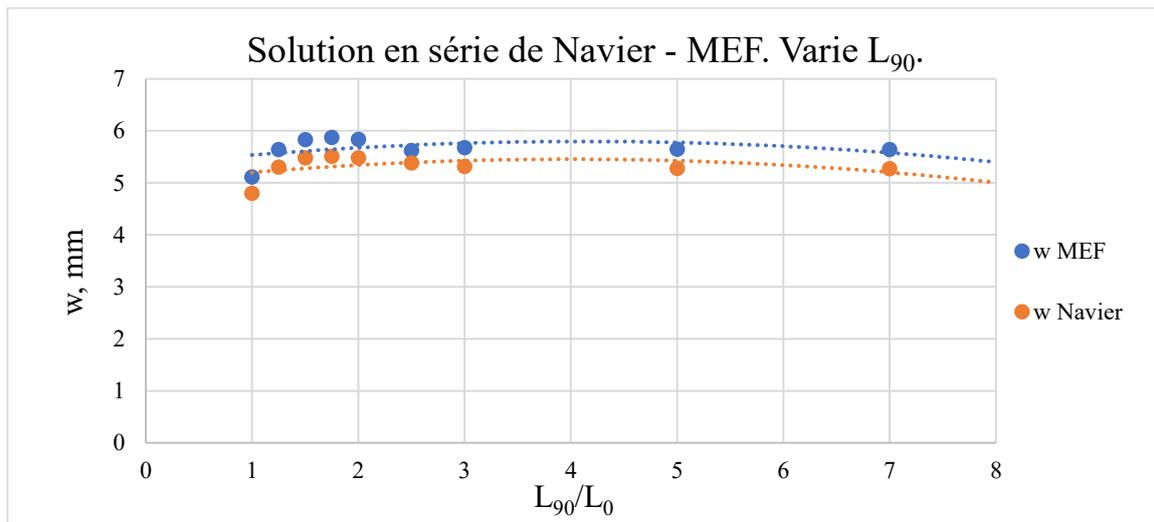


Figure 27 : Déflexion au centre d'une série de dalles rectangulaires simplement appuyées sur tous les bords. La direction forte des panneaux porte selon  $L_0$ .

Les courbes des résultats analytiques et obtenus par la MEF de la figure 27 sont également cohérentes. Les valeurs de déflexion sont moins dispersées car le côté parallèle à la direction raide reste de longueur constante.

Une réflexion par rapport aux écarts résultants entre les solutions analytique et MEF est à faire. Cet écart devrait être nul vu que le maillage des panneaux est suffisamment fin (la densité maximale d'un côté d'un élément fini quadrangulaire est de 1 centimètre) et que le nombre d'itérations de calcul pour les séries de Navier est de 50 pour les deux paramètres  $n$  et  $m$ .

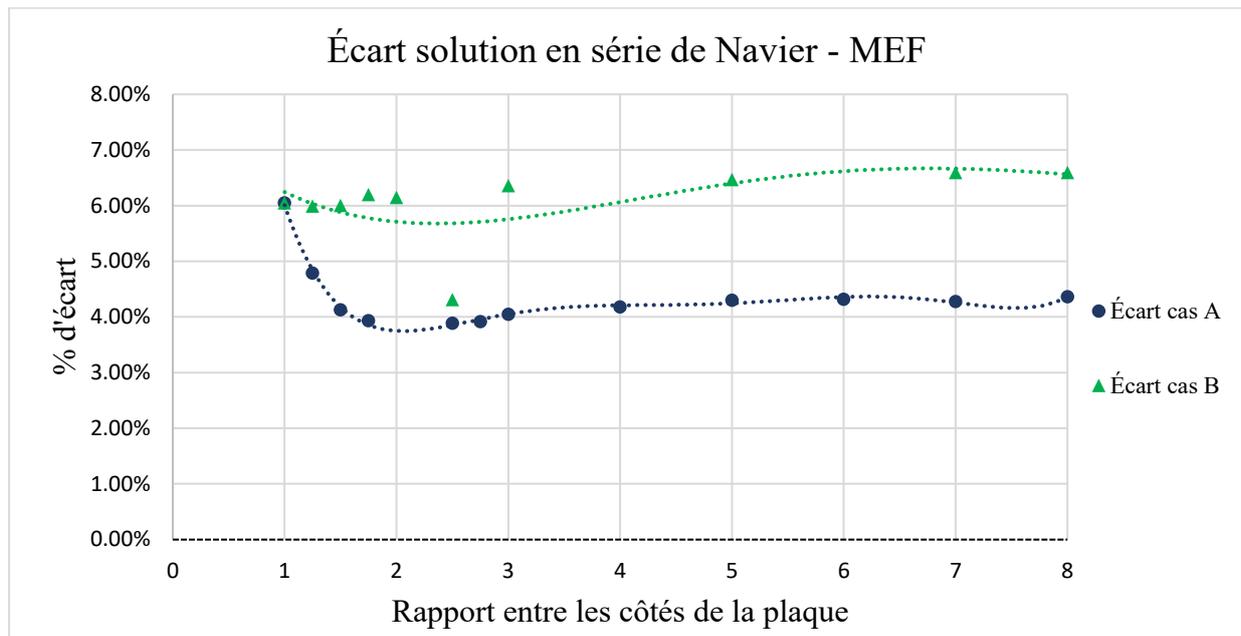


Figure 28 : Écart des résultats numériques et analytiques

Conséquemment, la valeur des écarts, qui est entre 4% et 6% est trop élevée et des études plus approfondies à ce sujet devraient être menées, mais, en tout cas, les valeurs des déflexions indiquent que les calculs peuvent être utilisés en tant qu'une approximation. En effet, un écart de 6% quand l'ordre de grandeur est du millimètre n'est pas important. En plus, les hypothèses sous lesquelles les calculs présentés sont valables représentent déjà des approximations de la réalité assez simplificatrices.

## 4.2. Cas d'application simple 2

Le présent cas d'application est mené à terme afin de vérifier le bon fonctionnement du logiciel développé lorsque les panneaux CLT sont utilisés en tant que voiles de cisaillement. La direction à  $0^\circ$  du panneau est orthogonale au bord encastré du mur de la figure 29. Le même panneau que pour le cas d'application simple 1 est utilisé. Il est à signaler que la force ponctuelle  $F$  a été modélisée comme une force distribuée uniformément sur 10 cm.

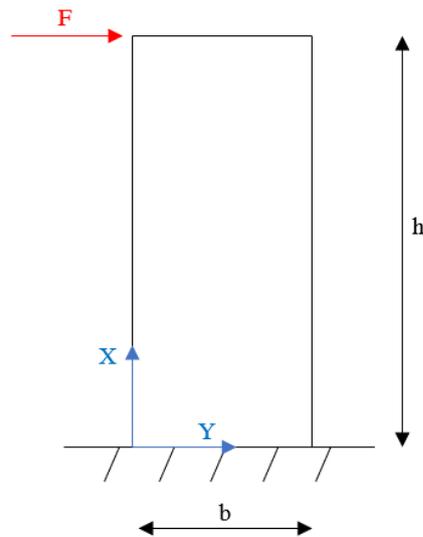


Figure 29 : Schéma statique du cas d'application simple 2.

#### 4.2.1. Résultats analytiques

La simplification du modèle de membrane en un modèle de poutre est utile pour obtenir les efforts au bord encastré. Par équilibre, le cisaillement  $n_{xy}$  et le moment fléchissant  $m_z$  sont ceux d'une poutre en porte-à-faux. L'effort de cisaillement est constant de valeur  $-\frac{F}{b}$  tandis que le moment fléchissant  $m_z$  varie linéairement en X, sa valeur sur le bord encastré étant égale à  $-Fh$  et sur le bord libre égale à 0.

Le moment  $m_z$  engendre une distribution d'efforts axiaux supposée linéaire au bord encastré du mur :

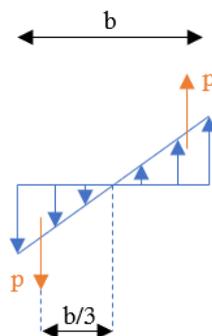


Figure 30 : Distribution de  $n_{xx}$  au bord encastré du voile de cisaillement du cas d'application 2.

La relation entre  $m_z$  et la force résultante de la distribution linéaire d'efforts axiaux,  $p$ , est :

$$m_z = \frac{b}{3} p \quad (115)$$

En faisant une application numérique avec :

- $h = 9$  mètres.
- $b = 3$  mètres.
- $F = 100$  kN.

Les résultats sont :

- $n_{xy} = -33,33$  kN.
- $m_z(0) = 900$  kNm.
- $p = \frac{3}{3} \cdot 900 = 900$  kN.

#### 4.2.2. Résultats obtenus par la Méthode des Éléments Finis

Les résultats fournis par Sofistik 2023 se trouvent sur les figures 31 à 33 :

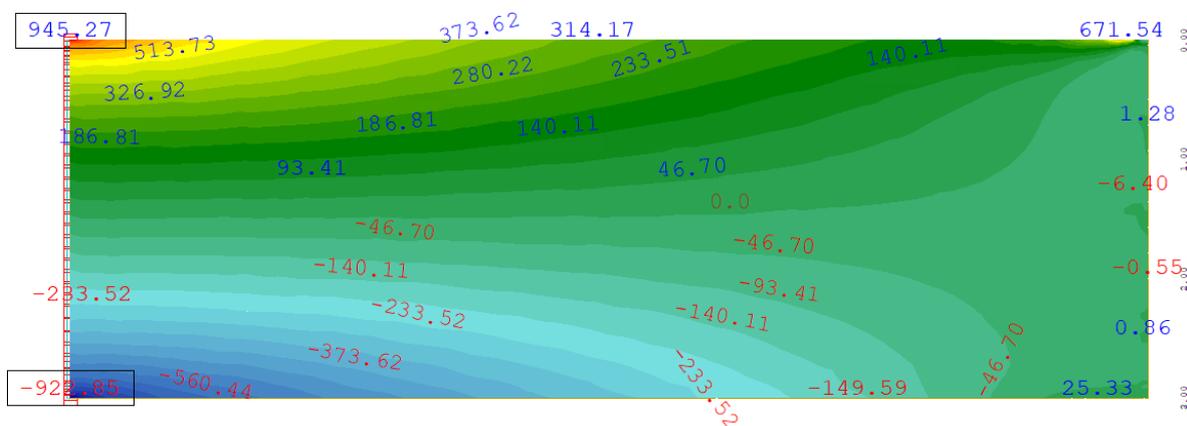


Figure 31 : Distribution de l'effort de membrane  $n_{xx}$  pour le cas d'application simple 2.

Résultat obtenu à l'aide de Sofistik 2023.

La valeur de l'effort  $n_{xx}$  au bord encastré est proche de celle fournie par la solution analytique. En effet, la distribution des efforts axiaux n'est pas exactement linéaire, raison pour laquelle ces valeurs ne sont pas égales. En tout cas, l'approximation reste valable afin de vérifier le bon comportement du logiciel de vérification des panneaux CLT.

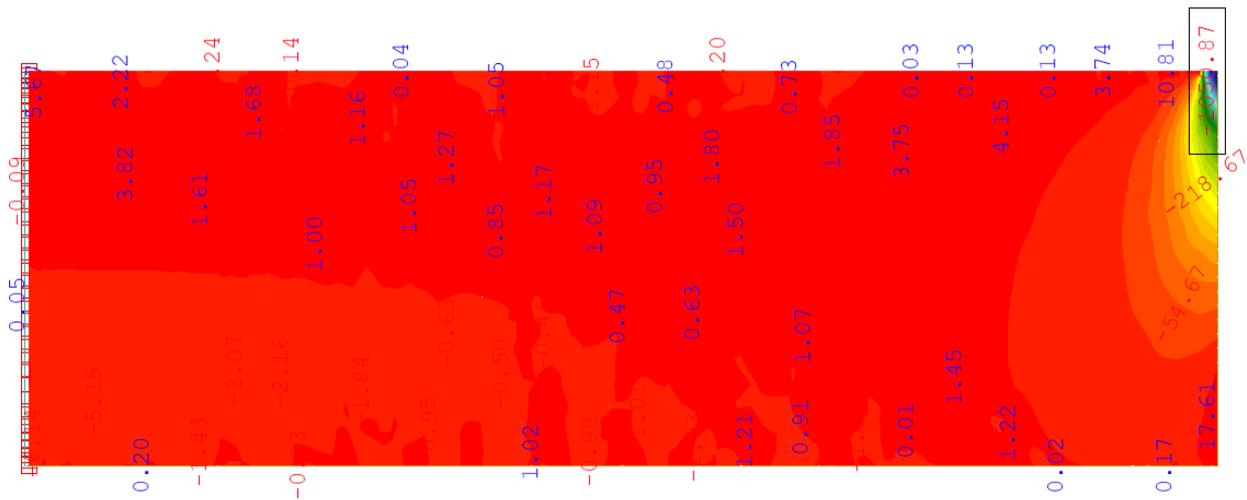


Figure 32 : Distribution de l’effort de membrane  $n_{yy}$  pour le cas d’application simple 2. Résultat obtenu à l’aide de Sofistik 2023.

L’effort  $n_{yy}$  n’a pas été calculé analytiquement puisqu’un modèle de poutre ne le permet pas. Par ailleurs, son ordre de grandeur est négligeable en ce qui concerne le dimensionnement de voiles en CLT.

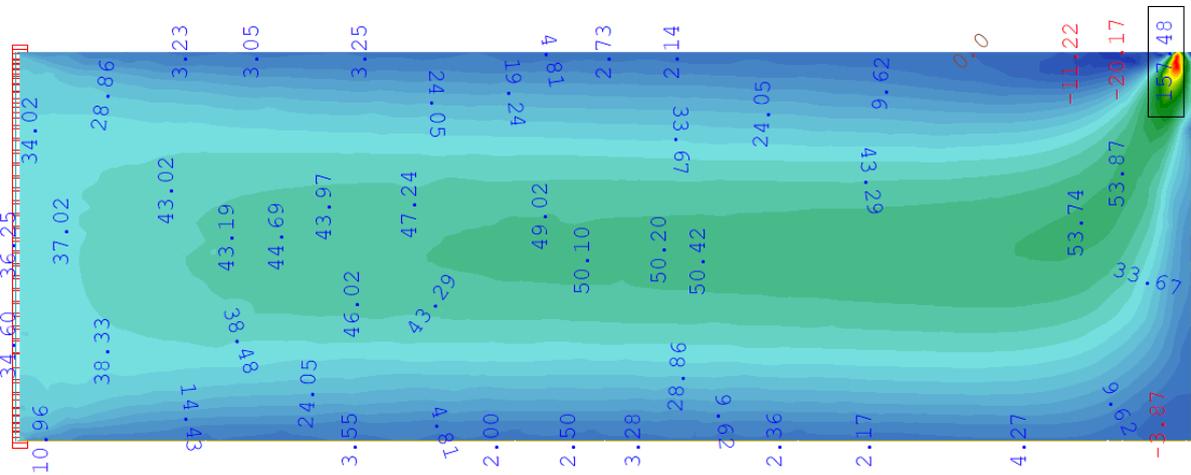


Figure 33 : Distribution du cisaillement de membrane  $n_{xy}$  pour le cas d’application simple 2. Résultat obtenu à l’aide de Sofistik 2023.

Le cisaillement de membrane présente également au bord encastéré,  $n_{xy}$ , une valeur égale dans la pratique à celle obtenue par le biais de la solution analytique. Il est à souligner que la distribution des efforts ne peut pas être prédite à l’aide du modèle poutre employé.

Il est donc judicieux de ne pas employer des forces excessivement concentrées dans les modèles aux éléments finis puisque, dès un point de vue mathématique, il est incorrect et elles n'ont pas de sens physique, ce qui conduit à des résultats qui risquent dans certains cas d'être incorrects.

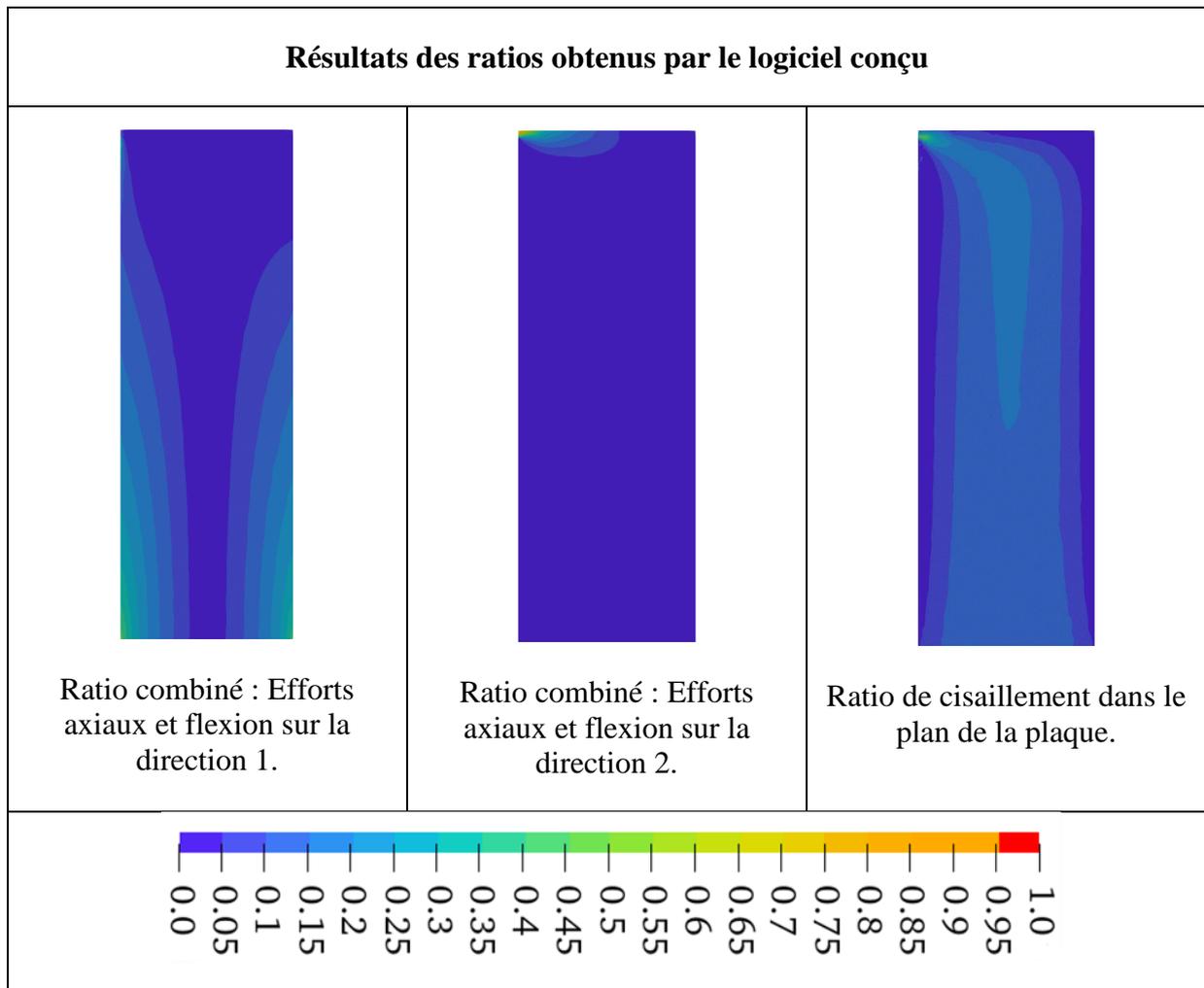


Tableau 4 : Voile de cisaillement. Ratios obtenus par le logiciel développé.

Quant au comportement du logiciel élaboré, les distributions des valeurs des ratios sont cohérentes avec les distributions d'efforts obtenues. À cause de l'emploi d'une force concentrée, son point d'application donne une valeur trop élevée pour les trois vérifications. Il est nécessaire de surveiller le phénomène décrit afin de juger les résultats des vérifications car, quand des forces ponctuelles apparaissent, les valeurs supérieures à 1 localisées seulement à leur point d'application ne sont pas nécessairement réelles et le panneau CLT respecte tous les critères de résistance.

## 5. Application de l'outil de calcul développé : noyaux de contreventement du bâtiment Saggården

---

L'outil de vérification de panneaux CLT a été employé pour dimensionner les deux noyaux de contreventement du bâtiment Saggården à Larvik, en Norvège. Il est à souligner que, afin de mener un dimensionnement à l'ELU précis, le logiciel élaboré prend en compte l'enveloppe des efforts définis en (55) issue des combinaisons de charge du modèle aux éléments finis de la structure. Le but de ce chapitre est de présenter la structure du bâtiment et les particularités jouant un rôle majeur sur le comportement des noyaux pour ensuite concentrer l'analyse sur le processus de dimensionnement des panneaux CLT. Les charges agissant sur la structure ne sont pas détaillées, mais il est nécessaire de mettre en évidence l'importance des sollicitations du vent, qui sont appliquées selon l'Eurocode 1 : Actions sur les structures [23], et qui découlent de la localisation du bâtiment entre la côte du Mer du Nord et le lac Farris.

### 5.1. Géométrie du bâtiment

Le bâtiment Saggården est un complexe de bureaux ayant un centre commercial au rez-de-chaussée. Il est composé de quatre immeubles structurellement imbriqués, « *Bygg A* », « *Bygg B* », « *Bygg C* » et « *Bygg D* ». « *Bygg A* » et « *Bygg C* » sont des bâtiments de cinq étages sur un sous-sol d'un étage. « *Bygg B* » et « *Bygg D* » sont des immeubles de quatre étages sur un sous-sol d'un étage avec une terrasse accessible sur le toit.

« *Bygg A* » est séparé des autres blocs et relié par un passage extérieur au niveau 2 et par un pont vitré aux niveaux 3 et 4. Chaque bloc se différencie par le type de construction de la façade. En général, un système de façade léger est utilisé, à l'exception de « *Bygg B* » qui a une façade en briques. Au-dessus du niveau 1 (rez-de-chaussée), le bâtiment a un usage de bureaux. Au rez-de-chaussée, le plan d'occupation des sols est divisé en un espace commercial pour les magasins et un hall d'entrée et des espaces dédiés aux cafétérias.

Les dimensions en plan de chaque bloc sont approximativement les suivantes :

- *Bygg A*: 19,5 m par 31,7 m.
- *Bygg B*: 14,3 m par 29,2 m.
- *Bygg C*: 15,9 m par 23,6 m.

- *Bygg D*: 14,3 m par 25,2 m.

La hauteur maximale du bâtiment au-dessus du niveau du sol est de 21 m. La hauteur des étages courants est de 3,6 m, à l'exception du rez-de-chaussée qui est de 5 m.

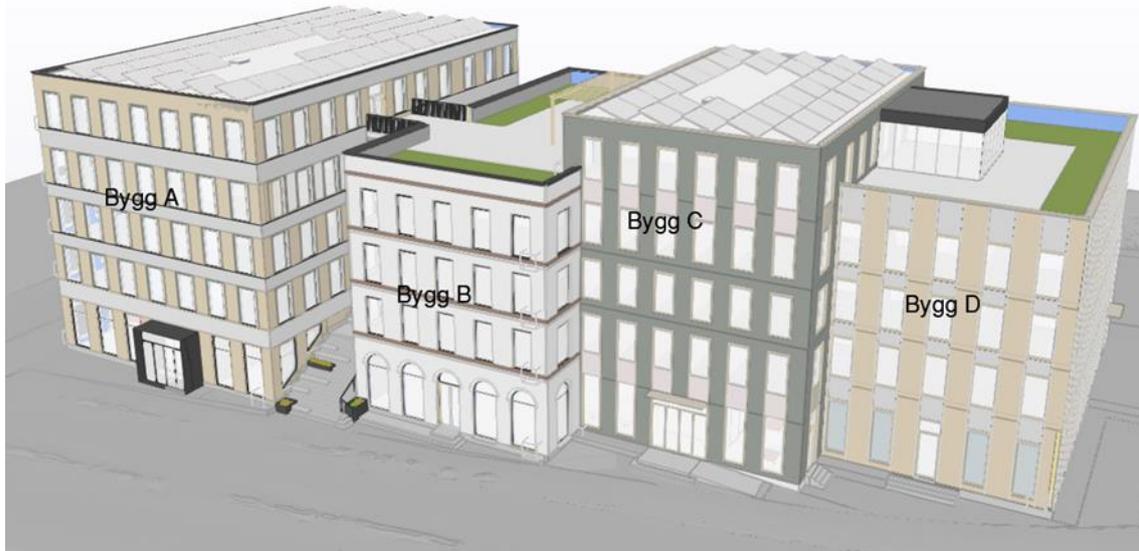


Figure 34 : Extrait du modèle BIM du bâtiment Saggården.

## 5.2. Système structurel

Les quatre immeubles possèdent un système structurel de la même typologie. Le bâtiment est fondé sur un radier en béton armé reposant directement sur le sol. Le niveau du sol autour du bâtiment varie de 3,3 m à 4,2 m. Le radier possède une épaisseur nominale de 800 mm et le dessous de la dalle est fixé à -0,35 m. Les niveaux de la nappe phréatique sont actuellement à un niveau maximum de 1,0 m mais les valeurs à long terme, y compris les effets du changement climatique, prévoient des niveaux de la nappe phréatique allant jusqu'à 2,2 m. Les murs extérieurs du sous-sol sont en béton armé de 350 mm d'épaisseur jusqu'au niveau de la dalle du rez-de-chaussée. Des poteaux en béton armé sont placés au sous-sol afin de ramener les charges verticales vers le radier.

Un système de portiques composés de poteaux en bois GL28h et poutres en acier S355 forme l'ossature des bâtiments au-dessus du rez-de-chaussée. Les poteaux sont discontinus à chaque étage et donc articulés en leur connexion aux poutres.



Figure 35 : Extrait du modèle BIM du bâtiment Saggården. Ossature bois et noyaux en CLT.

À chaque niveau, les planchers en béton préfabriqué transfèrent les charges horizontales, principalement dues au vent, par effet de diaphragme aux éléments qui assurent la stabilité latérale de la structure. Ces éléments sont deux noyaux en CLT 240 L7s et trois poutres au vent en bois GL28h.



Figure 36 : Plan d'étage courant du bâtiment Saggården. Système de contreventement.

Pour réaliser une analyse adéquate du comportement structurel global du bâtiment face aux charges horizontales, un modèle aux éléments finis de la structure a été élaboré. Dans ce modèle, la connexion entre les noyaux en CLT et la dalle du plancher inférieur est supprimée. Cette suppression est appliquée pour éviter la participation de la rigidité des murs de soutènement du sous-sol vis-à-vis de la reprise de charges horizontales. La dalle du plancher inférieur agit comme un diaphragme transférant toutes les charges aux murs périmétriques si elle n'est pas dissociée des noyaux, ce qui entraînerait un effet excessivement favorable en ce qui concerne le dimensionnement des noyaux.

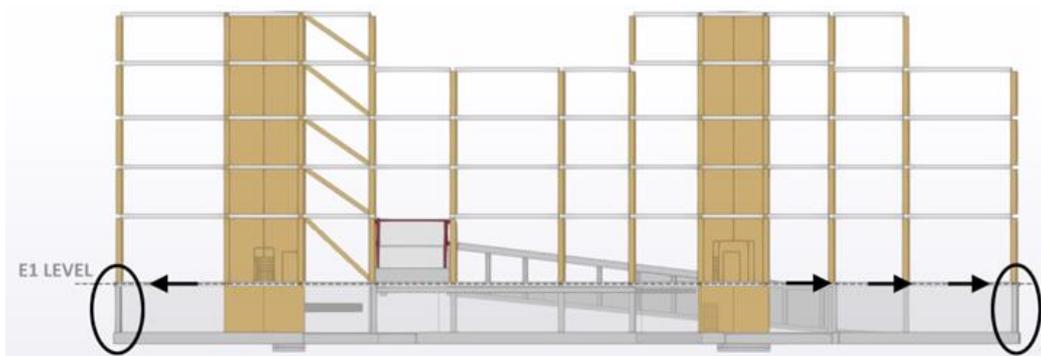


Figure 37 : Rigidification des noyaux par l'influence des murs du sous-sol.

L'influence sur le comportement des noyaux en CLT du phénomène décrit est schématisée sur la figure 37.

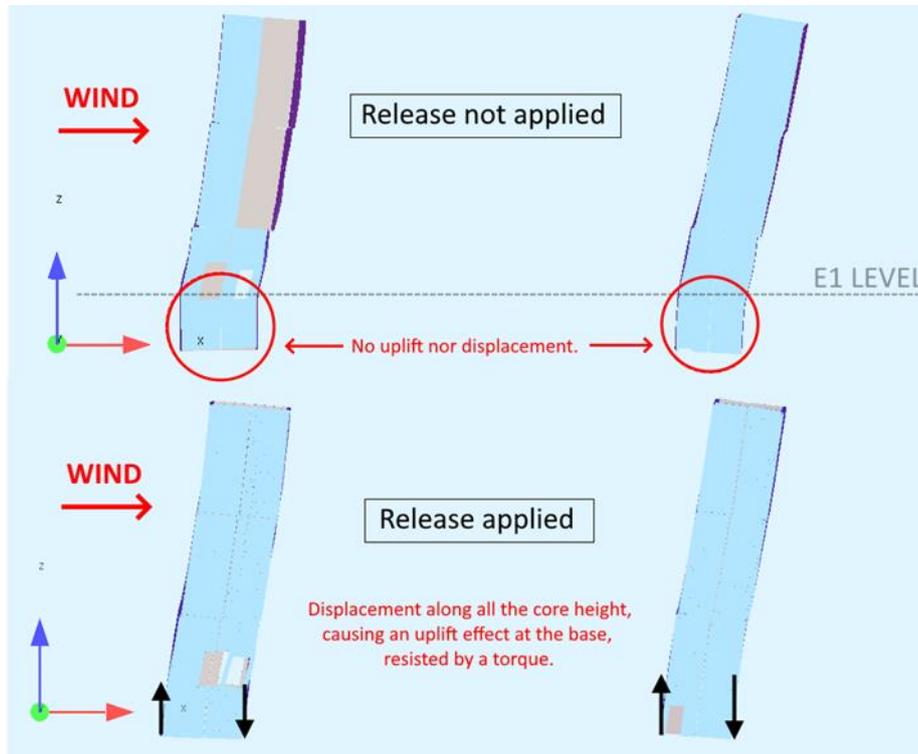


Figure 38 : Effet favorable – conséquence de connecter la dalle inférieure aux noyaux de contreventement en CLT.

Le système de contreventement est donc dimensionné en considérant une approche conservatrice puisque la situation réelle sera intermédiaire entre les deux scénarios de la figure 38.

Comme les noyaux résistent aux forces gravitationnelles et aux charges de vent en tant que « poutres » en porte-à-faux, la flexion et le cisaillement dans le plan dominant la distribution des forces internes de ces éléments. Le flambement jouera aussi un rôle déterminant. Les faits décrits conduisent automatiquement à placer la direction principale des panneaux CLT ( $0^\circ$ ) parallèlement à la direction de la gravité. Le cisaillement induit par les charges de vent sera supporté par les panneaux parallèles à la direction de la charge. Par conséquent, le cisaillement hors plan ( $v_{xz}$  ou  $v_{yz}$ ) tendra vers zéro à chaque mur puisque toutes les contraintes de cisaillement seront résistées dans le plan des murs parallèles à la direction du vent. Les effets de flexion dus au vent seront principalement supportés par les panneaux perpendiculaires à la direction du vent.

En l'absence de torsion, la répartition des forces internes est assimilable à celle d'une poutre de section « I » soumise à une charge parallèle à son âme.

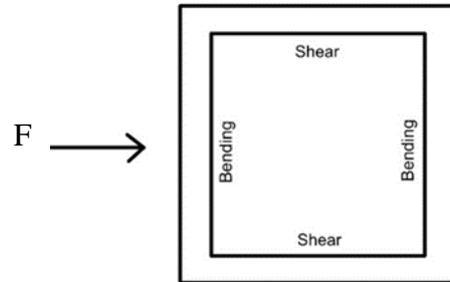


Figure 39 : Comportement structurel des noyaux de contreventement en CLT.

Étant donné que l'effet des excentricités (géométriques et des sollicitations) est important, une torsion significative aura également lieu dans les noyaux. En outre, les ouvertures sur les noyaux sont de tailles considérables et elles auront un impact majeur sur les calculs de dimensionnement. Les charges appliquées sur les noyaux sont, dans leur majorité, transférées par effet diaphragme des planchers en béton armé. Ponctuellement, des poutres sont connectées aux noyaux.

### 5.3. Modélisation des noyaux de contreventement en CLT

#### 5.3.1. Modélisation des panneaux CLT

Une section de panneau CLT 240 L7s de 34 mm d'épaisseur par pli et utilisant différents types de bois est mise en œuvre. De cette manière, les plis extérieurs sont en bois T22 tandis que les intérieurs sont en bois T15.



Figure 40 : Panneau CLT 240 L7s. Figure tirée du logiciel CLT Designer.

Les propriétés mécaniques des matériaux T15 et T22 sont les suivantes :

Résistance	T 22	T 15	
$f_{m,k}$	30,5	22	MPa
$f_{t,0,k}$	22	15	MPa
$f_{c,0,k}$	26	21	MPa
$f_{v,k}$	4	4	MPa
$f_{v,R,k}$	1	1	MPa
$f_{v,CLT,k}$	5	5	MPa
$f_{T,CLT,k}$	2,5	2,5	MPa
$f_{V,gross,k}$	2,5	2,5	MPa
$E_1$	13000	11500	MPa
$G_{12}$	810	720	MPa
$G_{23}$	50	50	MPa
$\gamma$	3900	3600	kN/m <sup>3</sup>

Tableau 5 : Propriétés mécaniques du bois T15 et T22. Tableaux fournis par le logiciel CLT Designer selon les ETA du fabricant Splitkon.

La matrice de raideur à implémenter dans le modèle aux éléments finis est donc :

$$[K] = \begin{bmatrix} 10,262 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,729 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,506 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19,469 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13,595 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1666 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1173 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 115,6 \end{bmatrix} \quad (116)$$

Les paramètres utilisés pour ces panneaux considèrent une section homogénéisée équivalente (mise à l'échelle des couches d'épaisseur T15) utilisant uniquement du bois T22 dans la direction 0°. Pour la direction 90°, seul le T15 est utilisé.

En ce qui concerne les vérifications de flambement, une longueur de flambement de 5 mètres est prise en compte puisqu'il s'agit de la portée la plus élevée entre deux niveaux d'étage. Une bi-articulation est supposée pour le coefficient de longueur de flambement, donc il est égal à 1. En utilisant ces paramètres, le facteur de flambement,  $k_c$  est égal à 0,72. Le tableau 6 montre les valeurs permettant de mener les vérifications à l'État Limite Ultime des panneaux CLT.

Type d'élément		Paramètres direction 0°		Parameters direction 90°		Aire effective Coeff. Flambement
Voile		A <sub>0,nette</sub> (mm <sup>2</sup> )	1.28E+05	A <sub>90,nette</sub> (mm <sup>2</sup> )	1.02E+05	
Facteurs de calcul		kc	0.72	kc	1.00	Rolling shear
k <sub>mod</sub>	0.80	W <sub>0,net</sub> (mm <sup>3</sup> )	6.63E+06	W <sub>90,net</sub> (mm <sup>3</sup> )	3.81E+06	
γ <sub>m</sub>	1.25	V <sub>k,max</sub> (kN)	172.00	V <sub>k,max</sub> (kN)	140.00	Épaisseur pour la torsion Bras de levier du couple de torsion
Paramètres de cisaillement dans le plan		a (mm)		136.00		
		t* <sub>tor</sub> (mm)		34.00		
		z (mm)		170.00		
		Σt* (mm)		204.00		

Tableau 6 : Paramètres de dimensionnement à l'ELU des panneaux CLT du bâtiment Saggården.

### 5.3.2. Modélisation des assemblages

Les assemblages des panneaux CLT ont été modélisés à l'aide d'éléments de type « *spring* » sur le modèle numérique élaboré à l'aide de Sofistik 2023. Deux types d'assemblages sont envisagés : assemblages pour les joints verticaux et assemblages pour les joints horizontaux.

Les assemblages pour les joints verticaux possèdent les raideurs suivantes :

- Raideur de cisaillement (direction de la gravité) de 280.000 kN/m.
- Raideur de cisaillement (glissement relatif des panneaux) 30.000 kN/m.
- Raideur axiale 280.000 kN/m.

De la même manière, pour les joints horizontaux :

- Raideur axiale (direction de la gravité) de 280.000 kN/m de traction et infiniment rigide à compression.
- Raideur de cisaillement (glissement relatif des panneaux) 30.000 kN/m.

Les deux types d'assemblages sont exécutés par vis croisées.

La connexion entre les noyaux et le radier en béton armé de la fondation est également réalisée à l'aide d'éléments « *spring* ». Trois raideurs différentes sont considérées :

- Raideur à traction et à compression de 30.000 kN/m distribuée uniformément à l'interface des deux éléments.

- Raideur de 40.000 kN/m à cisaillement distribuée uniformément à l'interface des deux éléments.
- Éléments « *spring* » ponctuels localisés à chaque coin des panneaux CLT avec 30.000 kN/m de raideur à traction uniquement.

Les valeurs des raideurs sont obtenues à l'aide de l'Eurocode 5 à partir des types d'assemblage proposés dans chaque cas.

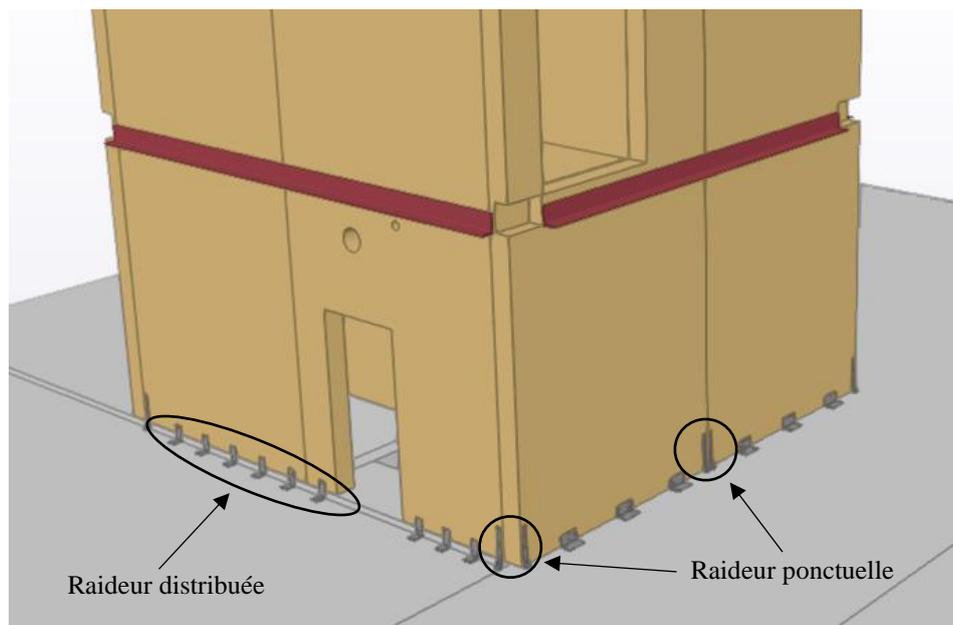


Figure 41 : Assemblages entre les noyaux CLT et le radier en béton armé des fondations.  
Figurée tirée du modèle BIM du bâtiment.

#### 5.4. Résultats obtenus à l'aide de l'outil élaboré

Une analyse élastique linéaire en considérant des imperfections géométriques est effectuée pour le dimensionnement des noyaux en CLT.

La section choisie pour les panneaux CLT s'ajuste de manière optimale à des valeurs proches, voire légèrement supérieures à points très localisés, à 1 pour le ratio d'efforts axiaux et de flexion sur la direction 1 ainsi que pour le ratio de contraintes de cisaillement dans le plan. Les zones critiques apparaissent à côté des ouvertures, ce qui est logique puisque les contraintes s'accumulent et leur flux devient plus tortueux à ces zones. En tout cas, les zones critiques sont de caractère local.

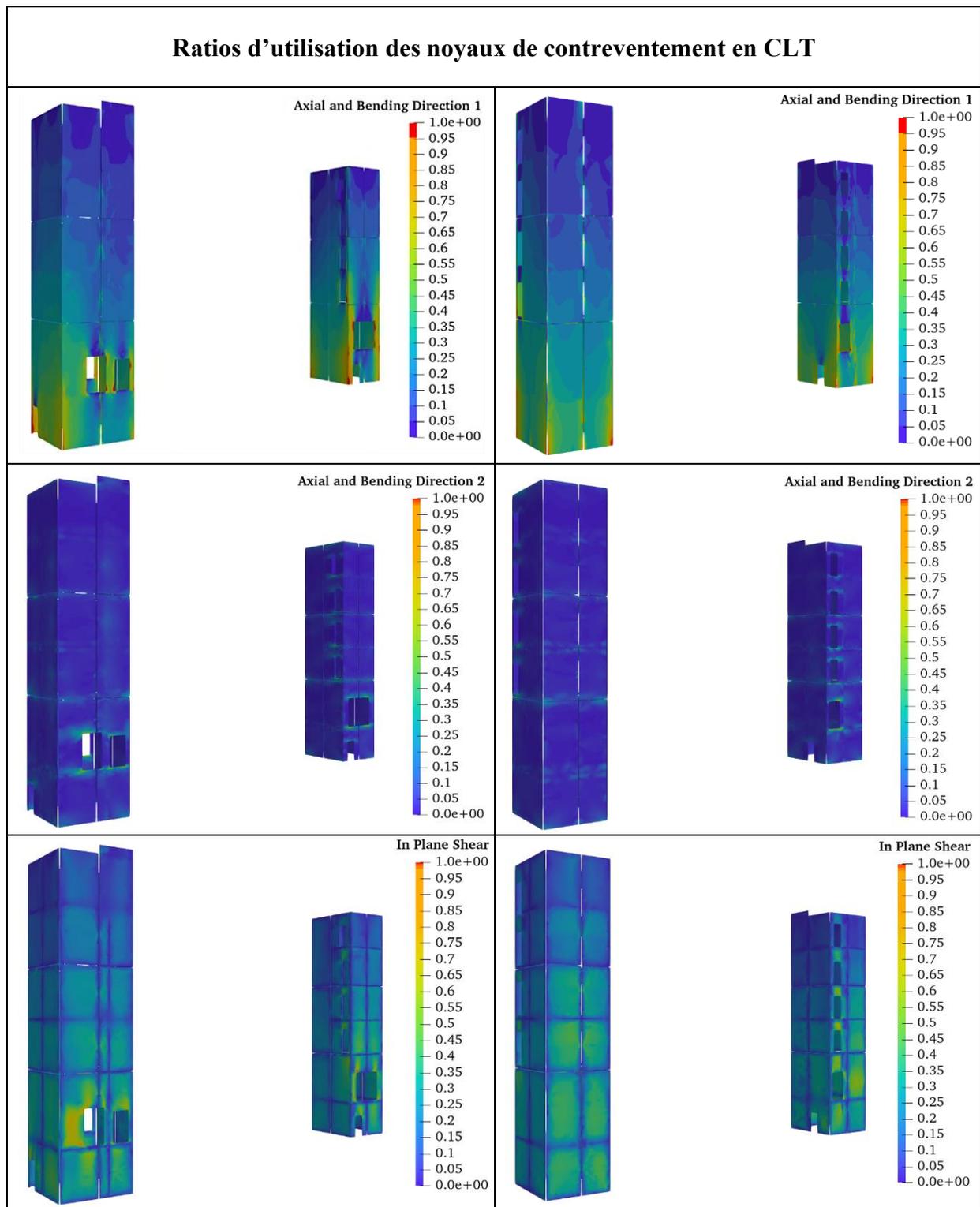


Tableau 7 : Ratios d’utilisation de la résistance des noyaux CLT du bâtiment Saggården.

Dans le cas du ratio d’efforts axiaux et flexion sur la direction 1, la surutilisation de la capacité de résistance du CLT peut être négligée car le facteur de flambement,  $k_c$ , réduit la

résistance à la compression de la réponse globale. En effet,  $k_c$  a été calculé pour le cas défavorable concernant la longueur de flambement  $l_k = 5$  mètres et toutes les bandes mentionnées ci-dessus sont plus courtes (la plus longue mesure 3,01 mètres). En outre, la plupart des zones rouges apparaissent à côté des angles d'ouverture des murs en raison d'imprécisions de calcul liées à la concentration des efforts dans les angles aigus. Une grande concentration de forces dans lesdites zones n'est pas réaliste.

Un calcul local complémentaire, pour vérifier les cas décrits, a été réalisé en considérant un coefficient de longueur de flambement égal à 0,7, qui émule une liaison de poutre articulée – encastrée et une longueur de flambement de 3,01 mètres. L'hypothèse pour le coefficient de longueur de flambement est légitime car les planchers empêchent un mouvement horizontal à l'intérieur et à l'extérieur des noyaux.  $k_c$  devient alors 0,96.

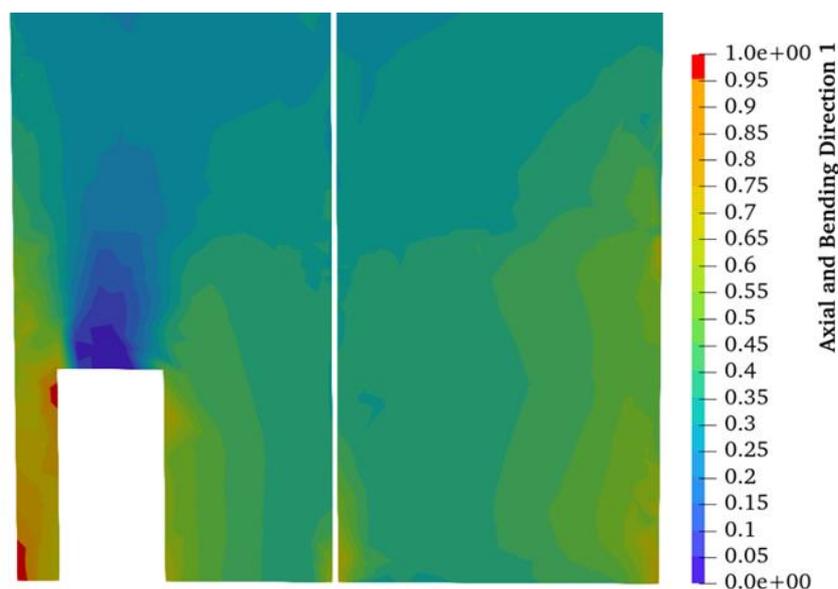


Figure 42 : Résultats du calcul du ratio de contraintes axiales dans la direction 0° des panneaux CLT en adaptant le coefficient de flambement.

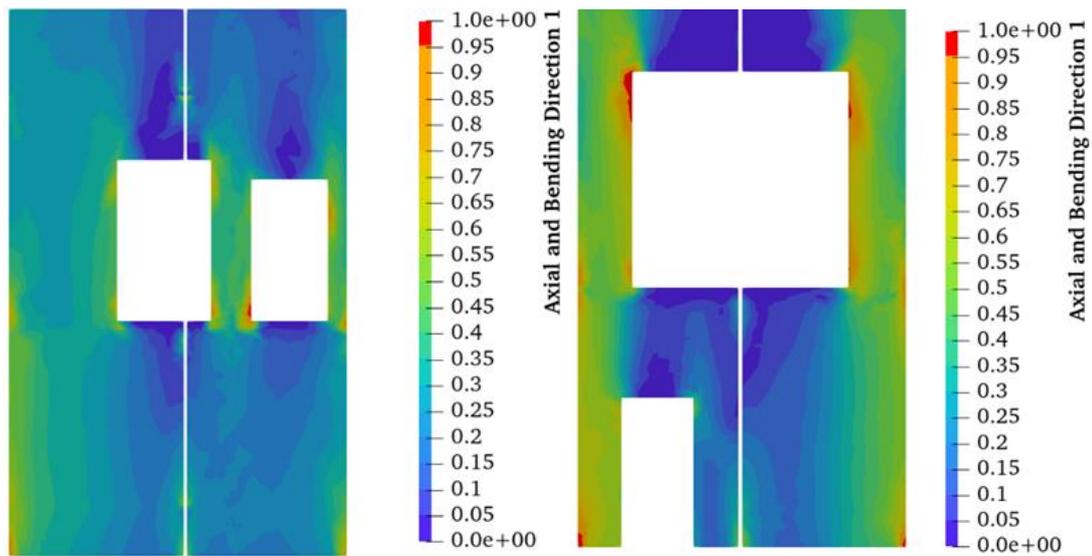


Figure 43 : Résultats du calcul du ratio de contraintes axiales dans la direction 0° des panneaux CLT en adaptant le coefficient de flambement (suite).

Comme expliqué précédemment, les zones rouges correspondent à des imprécisions de calcul dues à l'évaluation des contraintes à proximité des angles aigus. Les zones rouges sont locales, l'analyse est élastique linéaire (conservatrice) et il n'y a pas de problème de flambage global ni d'atteinte de la limite d'élasticité dans aucune section des panneaux. Les murs en CLT sont donc vérifiés à l'État Limite Ultime.

## 6. Conclusion et perspectives

---

### 6.1. Conclusions principales

Ce travail présente une méthode de modélisation et dimensionnement de panneaux CLT, applicable à des projets de taille et complexité considérables, utilisant un logiciel industriel de calcul à la méthode des éléments finis. Un « *plug-in* » en langage de programmation Python a été développé pour permettre l'interaction avec le logiciel industriel de calcul afin d'implémenter, extraire et traiter les données nécessaires.

Après l'introduction du contexte normatif qui concerne les éléments en CLT et la discussion des différentes approches dont l'ingénieur dispose pour analyser leur comportement mécanique, caractérisé par être celui d'une plaque stratifiée, un modèle de plaque monocouche orthotrope équivalente est déduit. Ledit modèle est basé sur une théorie de déformation par cisaillement de premier ordre, celle de Reissner – Mindlin, et utilise les propriétés mécaniques des sections des panneaux à l'État Limite Ultime. Ensuite, des mécanismes de rupture associés à des ratios d'utilisation de résistance sont établis et le processus de dimensionnement est appliqué à deux cas d'étude simples. En plus, une solution analytique pour l'obtention de la déflexion à n'importe quel point d'une panneau CLT rectangulaire, simplement appuyé, à rotation orthogonale au bord bloquée et sous une charge distribuée uniformément est obtenue respectant les équations d'équilibre d'une plaque épaisse. Finalement, deux noyaux de contreventement en CLT d'un bâtiment de 21 m de hauteur sont dimensionnés en utilisant la méthode établie. Le but du Projet de Fin d'Études est donc atteint.

Le choix de modélisation des panneaux CLT en tant que plaques monocouches orthotropes équivalentes, est orienté vers l'objectif de vérifier les éléments vis-à-vis des ratios de résistance définis dans le cadre de projets de bâtiments complexes. Cette technique permet, également, d'utiliser un nombre d'éléments finis raisonnable et de rendre la présence des panneaux CLT compatible avec d'autres éléments dans les modèles numériques des structures. La modélisation par éléments finis de l'épaisseur des panneaux rendrait les modèles plus précis mais excessivement lourds et peu exploitables.

En outre, la méthode de dimensionnement des panneaux par le biais de ratios d'utilisation de la capacité résistante est une méthode sécuritaire. Il est à remarquer que, comme conséquence

d'introduire les moments de torsion  $m_{xy}$  en tant que couple de forces de cisaillement dans le plan, la méthode fournit des résultats sécuritaires en comparaison aux résultats issus de prendre en compte  $m_{xy}$  en tant que couple de forces axiales puisque la résistance aux efforts dans le plan est significativement plus faible que la résistance envers les efforts axiaux.

En tenant compte de critères purement liés à la mécanique de structures, l'utilisation des panneaux CLT peut être avantageuse dans certains cas, mais il faut connaître ses propriétés afin d'être en mesure de juger s'ils offrent une solution efficace ou non. Lorsque le cas d'une dalle rectangulaire simplement appuyée sur tous les bords et recevant une charge uniformément distribuée est étudié, un panneau CLT est moins lourd qu'une dalle en béton armé ou précontraint et proportionne une résistance comparable pour des épaisseurs semblables. Ceci pourrait se traduire par une descente de charge moins importante et des fondations moins conséquentes et moins onéreuses. Cependant, lorsque nous envisageons un élément structurel surfacique de géométrie peu régulière, avec des phénomènes de poinçonnement ou nécessitant des assemblages complexes parce qu'il est connecté à d'autres éléments, les panneaux CLT ne sont pas une bonne solution. Premièrement, un panneau CLT en flexion ne travaille de manière optimale que lorsque les moments fléchissants sont axés selon ses directions à  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . Par rapport au poinçonnement, le bois est plus fragile que le béton armé et, quand il s'agit de CLT, une méthode de calcul appropriée n'existe pas encore. Troisièmement, s'il est nécessaire d'effectuer plusieurs connexions entre un panneau CLT et d'autres éléments, les assemblages deviennent difficiles à exécuter, notamment s'il s'agit d'encastresments.

En ce qui concerne la conception structurelle d'un noyau de contreventement en CLT, le fait que le bois soit plus léger, plus souple et plus fragile que le béton armé présente des inconvénients. En plus, les panneaux CLT ne résistent pas aussi bien que le béton armé aux efforts de cisaillement dans le plan et les ouvertures architecturales favorisent l'apparition d'un potentiel flambement des murs. Tout l'avantage de concevoir des noyaux de contreventement en CLT est la grande réduction de l'empreinte de carbone par rapport à celle du béton armé et l'obtention d'une qualité esthétique appréciée par les architectes. En termes économiques, dans pays nordiques, le CLT affiche un prix du même ordre que celui du béton armé, mais ailleurs il tend à être plus cher.

Finalement, dans la mesure où aucun logiciel de vérification de panneaux CLT exploitables n'existe dans le cadre de projets nécessitant une modélisation par la méthode des éléments finis, l'outil de calcul élaboré permet d'optimiser le processus de conception et de prendre en compte des configurations complexes des panneaux, telles que la présence d'ouvertures ou l'emploi de raideurs reproduisant les assemblages aux joints.

## 6.2.Perspectives

La méthode de modélisation et dimensionnement des panneaux CLT établie tire parti de simplifications concernant les termes suivants :

- 1 Loi de comportement du bois structurel ;
- 2 Définition de sections nettes pour l'ELU ;
- 3 Passage de plaque stratifiée orthotrope à une plaque monocouche équivalente ;
- 4 Calcul de la raideur de la plaque monocouche équivalente ;
- 5 Prise en compte du moment de torsion  $m_{xy}$  dans le critère de ratios d'utilisation.

En effet, le bois est un matériau dont la loi de comportement pourrait être plus précisément définie, notamment en ce qui concerne la réponse à compression pure. Actuellement, un comportement parfaitement fragile est implémenté pour le calcul des éléments en bois, ce qui reste excessivement conservatif.

Le fait de définir des sections nettes pour l'ELU représente une approximation légitime et sécuritaire couramment adoptée par les Eurocodes pour d'autres éléments, par exemple ceux en béton armé ou précontraint. La question de quelle section utiliser se pose lorsqu'on envisage une analyse en ELS, qui est souvent dimensionnante pour les éléments en bois. Il semble raisonnable de prendre en considération la même section qu'à l'ELU, mais une recherche dans ce sens doit être menée.

Afin d'optimiser les résultats issus du processus de dimensionnement établi, tous les plis d'un panneau pourraient être modélisés en tant qu'éléments 2D reliés entre eux. Lesdites liaisons devraient respecter les hypothèses en déformations introduites par le modèle de plaque de Reissner – Mindlin et le caractère orthotrope des plis. Une étude pour évaluer l'applicabilité de cette méthode alternative devrait aussi être effectuée car la demande de puissance computationnelle pourrait devenir excessive comme conséquence d'augmenter de manière

considérable le nombre d'éléments finis utilisés. Le calcul des raideurs relatives entre deux plis consécutifs reste un sujet en lui-même à approfondir, ainsi que la modélisation d'une distribution de contraintes de cisaillement transverse correcte.

Finalement, un meilleur traitement du moment torseur  $m_{xy}$  est nécessaire afin d'améliorer la méthode de dimensionnement établie. Comme indiqué en 3.4.2.2., une hypothèse sécuritaire est faite en introduisant l'effet de  $m_{xy}$  en tant que couple de forces agissant dans le plan d'une section donnée. Des études plus approfondies sur les mécanismes résistants des panneaux vis-à-vis de  $m_{xy}$  sont nécessaires pour constater s'il est plutôt judicieux de le prendre en considération, en tant que couple de forces, dans les mécanismes de rupture associés aux sollicitations axiales, comme il est fait pour les dalles en béton armé (méthode Wood – Armer). Ceci se traduirait par l'obtention de sections plus petites quand un élément se trouve sous l'influence de sollicitations de ce type.

## Bibliographie

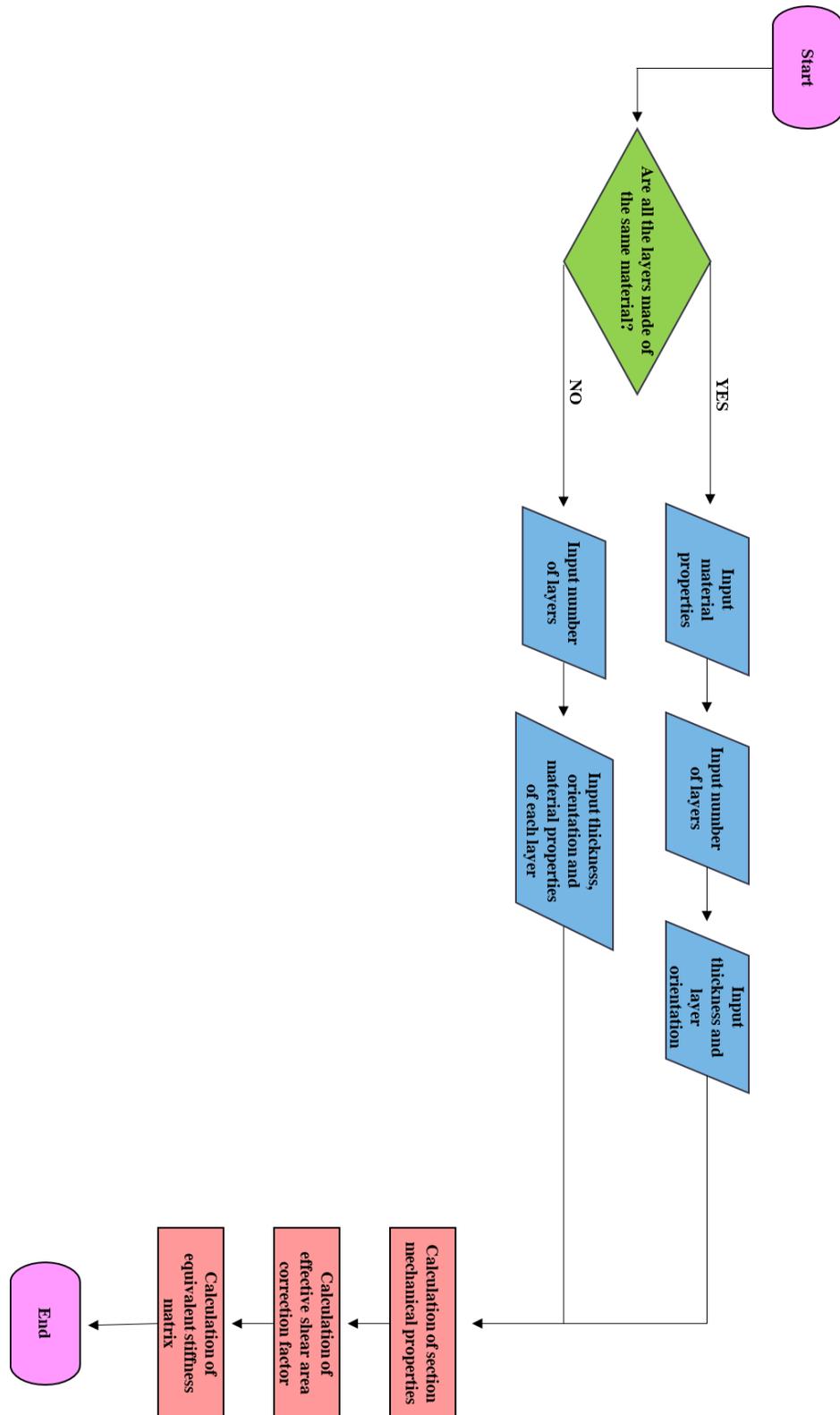
- [1] *Eurocode 5 : Conception et calcul des structures en bois – Partie 1-1 : Généralités – Règles communes et règles pour les bâtiments*, EN-1995-1-1:2004+A1:2008 (E), Union Européenne, Bruxelles, 2008.
- [2] M. Wallner-Novak, J. Koppelhuber, K. Pock. *Cross-Laminated Timber Structural Design. Basic design and engineering principles according to Eurocode*. Graz, Austria: proHolz, 2014.
- [3] E. Borgström and J. Fröbel. *The CLT Handbook. CLT structures – facts and planning*. Stockholm, Sweden: Swedish Wood, 2019.
- [4] S. Timoshenko, J. N. Goodier. *Theory of Elasticity*. New York, United States of America: McGraw – Hill Book Company, 1951.
- [5] E. Reissner, « The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates » *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12, pp. A68–A77, 1945.
- [6] G. Silly. *Numerische Studien zur Drill – und Schubsteifigkeit von Brettsperrholz (BSP)*. Institut für Holzbau und Holztechnologie, Technische Universität Graz, 2010.
- [7] A. Lebée, K. Sab. « A Bending-Gradient model for thick plates, Part I: Theory » *International Journal of Solids and Structures*, 2011.
- [8] N. Bejjani, K. Sab, J. Bodgi, A. Lebée. « The Bending – Gradient Theory for Thick Plates: Existence and Uniqueness of Results » *Journal of Elasticity*, Vol. 133, pp. 37-72, 2018.
- [9] L. Franzoni, A. Lebée, F. Lyon, G. Forêt « Elastic Behaviour of Cross Laminated Timber and timber panels with regular gaps: Thick-Plate Modelling and Experimental Validation » *Engineering Structures*, Vol. 141, pp. 402-416, 2017.
- [10] A. Lebée. *Modélisation des Structures Multicouches (2022)*. Paris, France : École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [11] B. Capra, *Calcul et Comportement des Matériaux de Construction : Le Bois (2020)*. Paris, France : École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [12] R. Mindlin. « Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates » *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, pp. 31-38, 1951.
- [13] S. Brisard. *Plaques et coques (2022)*. Paris, France : École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [14] J. Casanova Colón, *Fonaments de la Teoría de Plaques (2004)*. València, España: Universitat Politècnica de València.

- [15] J. Casanova Colón. *Elementos de Mecánica de los Sólidos Deformables*. València, España: Editorial Universitat Politècnica de València, 2018.
- [16] M. Brocato. *Cours de mécanique des structures, volume 1 : Poutres élastiques*. Paris, France : Presse des Ponts, 2020.
- [17] M.Wallner-Novak, M.Augustin, J. Koppelhuber, K. Pock. *Cross-Laminated Timber Structural Design Volume 2. Applications*. Graz, Austria: proHolz, 2018.
- [18] S. Monleón Cremades. *Teoría Unificada de Elementos Estructurales Esbeltos*. València, España: Editorial Universitat Politècnica de València, 2017.
- [19] *ASE General Static Analysis of FE Structures*, Sofistik, Nuremberg, Deutschland, 2023.
- [20] T.J.R. Hughes, T.E. Tezduyar « Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four-Node Bilinear Isoparametric Element » *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, pp. 587-596, 1981.
- [21] A. Tessler, T.J.R. Hughes « An Improved Treatment of Transverse Shear in the Mindlin – Type Four – Node Quadrilateral Element » *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 39, pp. 311-335, 1983.
- [22] S. Timoshenko, S. Woinowsky – Krieger. *Theory of Plates and Shells*. New York, United States of America: McGraw – Hill Book Company, 1987.
- [23] *Eurocode 1 : Actions sur les Structures – Partie 1-4 : Actions Générales – Actions du Vent*, EN-1991-1-4:2005+A1:2005 (E), Union Européenne, Bruxelles, 2005.

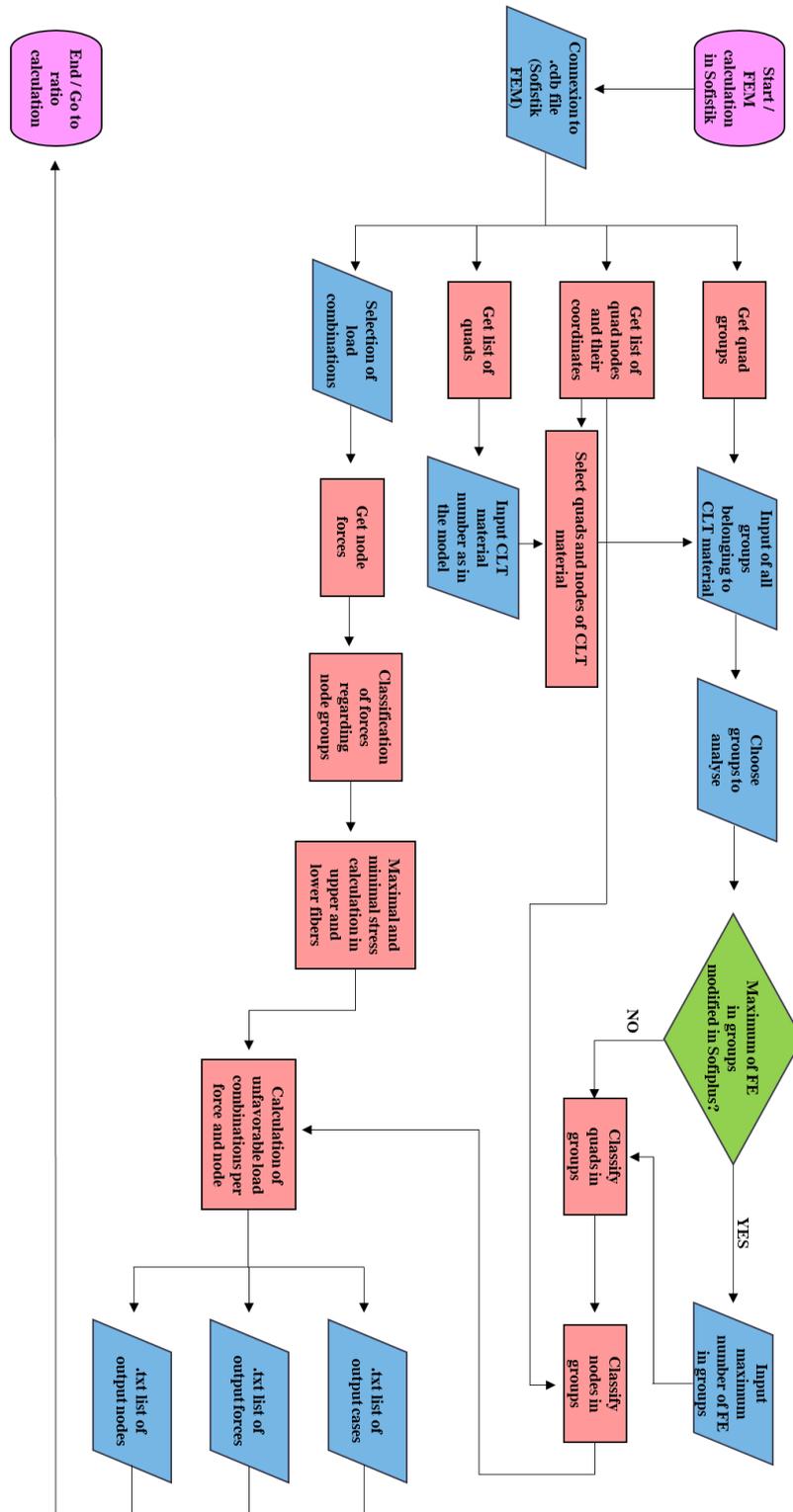
# **Annexes**

## **Annexe 1 : algorithmes**

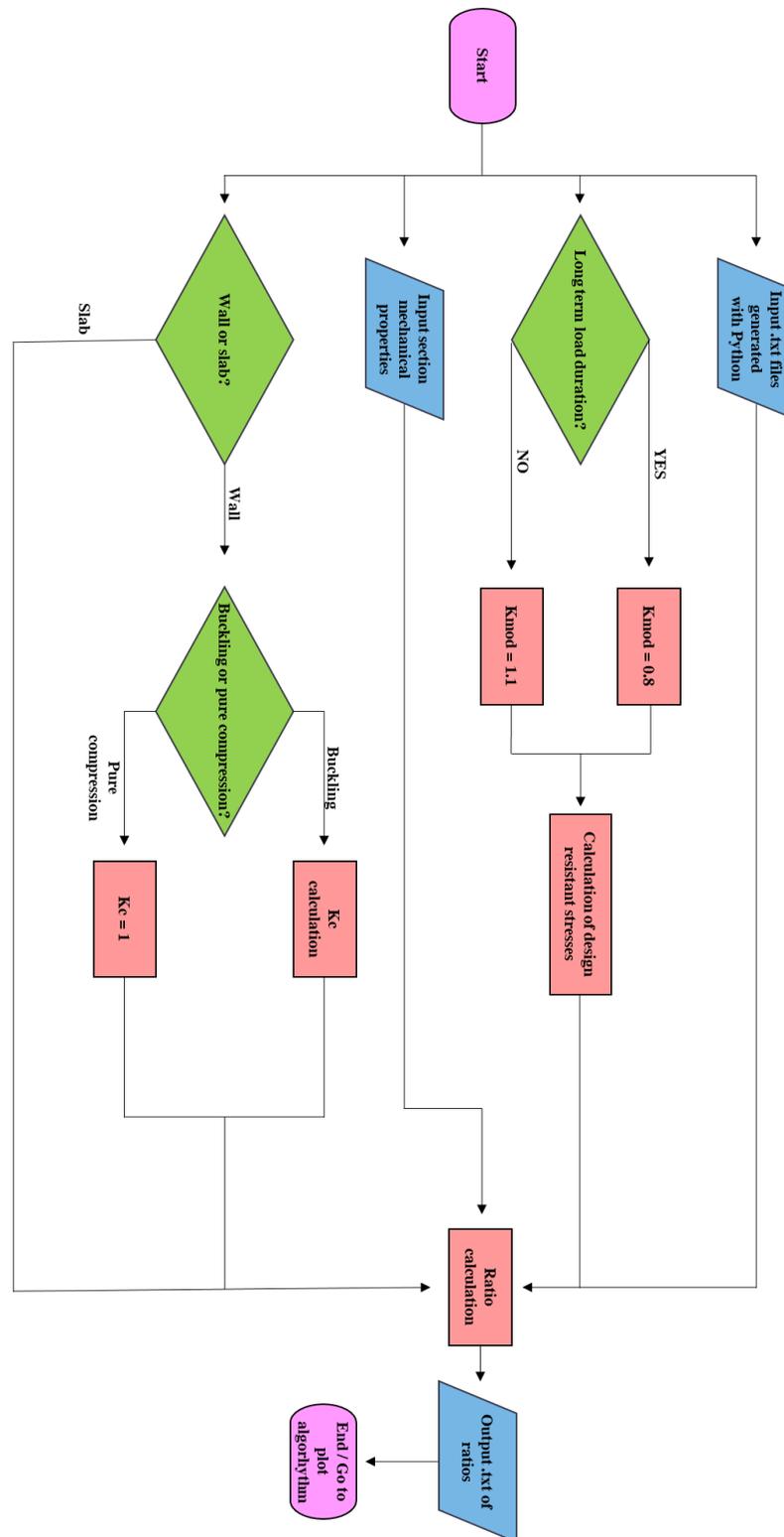
## Algorithme de pré-traitement des données, matrice de raideur



## Algorithme de post-traitement des données, extraction et sélection des données de Sofistik



## Algorithme de post-traitement des données, calcul des ratios à chaque nœud



## Algorithme de post-traitement des données, représentation graphique des résultats

